

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI
EKONOMETRİ BİLİM DALI

**OTOREGRESİF KOŞULLU DEĞİŞEN VARYANS
MODELLERİYLE MARKOWITZ ETKİN PORTFÖY SETİNİN
BELİRLENMESİ VE BİST50 HİSSELERİ UYGULAMASI**

Yüksek Lisans Tezi

Ömer Mesut BAYHAN

İstanbul, 2019

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI
EKONOMETRİ BİLİM DALI

**OTOREGRESİF KOŞULLU DEĞİŞEN VARYANS
MODELLERİYLE MARKOWITZ ETKİN PORTFÖY SETİNİN
BELİRLENMESİ VE BİST50 HİSSELERİ UYGULAMASI**

Yüksek Lisans Tezi

Ömer Mesut BAYHAN

Danışman: Prof. Dr. Ş. Işıl AKGÜL

İstanbul, 2019



T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

TEZ ONAY BELGESİ

EKONOMETRİ Anabilim Dalı EKONOMETRİ Bilim Dalı TEZLİ YÜKSEK LİSANS öğrencisi ÖMER MESUT BAYHAN'ın OTOREGRESİF KOŞULLU DEĞİŞEN VARYANS MODELLERİYLE MARKOWITZ ETKİN PORTFÖY SETİNİN BELİRLENMESİ VE BİST50 HİSSELERİ UYGULAMASI adlı tez çalışması, Enstitümüz Yönetim Kurulunun 8.08.2019 tarih ve 2019-25/6 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından oy birliği /oy çokluğu ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi 20 / 08 / 2019

Öğretim Üyesi Adı Soyadı

İmzası

Öğretim Üyesi Adı Soyadı	İmzası
1. Tez Danışmanı Prof. Dr. Ş. İŞİL AKGÜL	
2. Jüri Üyesi Prof. Dr. AHMET METE ÇİLİNGİRTÜRK	
3. Jüri Üyesi Prof. Dr. HANDAN YOLSAL	

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	i
TABLO LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	vii
ÖZET	ix
ABSTRACT	x
KISALTMALAR	xi
ÖNSÖZ	xii
GİRİŞ	1

BİRİNCİ BÖLÜM PORTFÖY TEORİSİ

1.1. PORTFÖY KAVRAMI	3
1.2. PORTFÖY YÖNETİMİ VE SÜRECİ	3
1.2.1. PORTFÖY PLANLAMASI	4
1.2.2. YATIRIM ANALİZİ	5
1.2.3. PORTFÖY SEÇİMİ	8
1.2.4. PORTFÖY DEĞERLEMESİ	8
1.2.5. PORTFÖY REVİZYONU	9
1.3. PORTFÖY ÇEŞİTLERİ VE YÖNETİM STRATEJİSİ	9
1.3.1. HİSSE PORTFÖYLERİ VE YÖNETİM STRATEJİSİ	10
1.3.2. SABİT GETİRİLİ PORTFÖYLER VE YÖNETİM STRATEJİSİ	11
1.3.3. HİBRİD PORTFÖYLER VE YÖNETİM STRATEJİSİ	12
1.4. BEKLENEN GETİRİ, RİSK VE KOVARYANS	12
1.5. FAYDA FONKSİYONU VE YATIRIMCI TİPLERİ	13
1.5.1. SERVETİN FAYDA DEĞERİ	14
1.5.2. YATIRIMCI TİPLERİ	15
1.5.2.1. Riskten Kaçan Yatırımcılar	15
1.5.2.2. Riske Karşı Kayıtsız Yatırımcılar	15
1.5.2.3. Riski Seven Yatırımcılar	16

1.5.3. KAYITSIZLIK EĞRİLERİ VE YATIRIM TERCİHLERİ	16
1.6. RİSKİN KAYNAKLARI	17
1.6.1. SİSTEMATİK RİSK	17
1.6.1.2. Piyasa Riski	17
1.6.1.3. Faiz Oranı Riski	18
1.6.1.4. Satın Alım Gücü Riski	18
1.6.2. SİSTEMATİK OLMAYAN RİSK	18
1.6.2.1. İş Riski	18
1.6.2.2. Finansal Risk	18
1.6. GELENEKSEL PORTFÖY YÖNETİMİ	19
1.7. MODERN PORTFÖY YÖNETİMİ.....	24
1.7.1. PORTFÖY KORELASYONU	47
1.7.2. ULUSLARARASI PORTFÖY ÇEŞİTLENDİRMESİ.....	49
1.7.3. KOVARYANS MATRİSİ TAHMİNİNİN PORTFÖY SEÇİMİNE ETKİSİ	49
1.7.4. N SAYIDA RİSKLİ FİNANSAL VARLIKTAN OLUŞAN PORTFÖYLERDE ORTALAMA VARYANS ANALİZİ	50
1.7.4.1. Çeşitlendirme Etkisi	50
1.7.4.2. Optimal Ağırlıklar	51
1.8. AÇIĞA SATIŞIN MODELLENMESİ.....	56

İKİNCİ BÖLÜM

ZAMAN SERİSİ MODELLERİ

2.1. STOKASTİK SÜREÇLER	57
2.2. DURAĞAN ZAMAN SERİLERİ.....	58
2.2.1. DOĞRUSALLIK	59
2.2.2. DURAĞANLIK.....	59
2.2.2.1. Zayıf Durağanlık	61
2.2.2.2. Güçlü Durağanlık	61
2.2.2.3. Gaussian Durağanlık	61
2.2.3. SAF HATA TERİMİ.....	61

2.3. OTOKOVARYANS, OTOKORELASYON VE KISMİ OTOKORELASYON FONKSİYONLARI	62
2.3.1. OTOKOVARYANS FONKSİYONU	62
2.3.2. OTOKORELASYON KATSAYILARI VE FONKSİYONU	63
2.3.3. KISMİ OTOKORELASYON KATSAYILARI VE FONKSİYONU	65
2.3.4. OTOKORELASYON VE KISMİ OTOKORELASYON KATSAYILARININ İSTATİKSEL ANLAMLILIĞININ SINANMASI	66
2.3.4.1. Bartlett Testi	66
2.3.4.2. Portmanteau Testi	67
2.4. DOĞRUSAL ZAMAN SERİSİ ANALİZİ	68
2.5. DURAĞAN ARIMA MODELLERİ	69
2.5.1. OTOREGRESİF MODELLER: $ARIMA(p,0,0) = AR(p)$	69
2.5.2. HAREKETLİ ORTALAMA MODELLERİ $ARIMA(0,0,q) = MA(q)$	71
2.5.3. OTOREGRESİF HAREKETLİ ORTALAMA MODELİ: $ARIMA(p,0,q) = ARMA(p,q)$	74
2.5.3.1. Otoresif Hareketli Ortalama Sürecinin $ARIMA(p,0,q)$ Özellikleri	76
2.6. BOX VE JENKINS MODEL KURMA STRATEJİSİ	77
2.6.1. BELİRLEME	78
2.6.2. TAHMİN	79
2.6.3. AYIRT EDİCİ KONTROL	80
2.6.4. BÜYÜK AYRIM	82
2.6.4.1. Ortalama Hata	82
2.6.4.2. Ortalama Mutlak Hata	83
2.6.4.3. Ortalama Hata Kare	83
2.6.4.4. Nispi Öngörü Hata	83
2.6.4.5. Ortalama Yüzde Hata	84
2.6.4.6. Ortalama Mutlak Yüzde Hata	84
2.6.4.7. Kök Ortalama Hata Kare	84
2.6.4.8. Theil Eşitsizlik (U) Katsayısı	85
2.6.4.9. Ortalama Öngörü Hata Kare	85
2.6.4.9.1. Sapma Oranı	85
2.6.4.9.2. Varyans Oranı	86
2.6.4.9.3. Kovaryans Oranı	86
2.6.4.10. Determinasyon Katsayısı (R^2)	86
2.6.4.11. Akaike ve Schwarz Bilgi Ölçütleri	87
2.6.5. İLERİYE YÖNELİK ÖNGÖRÜ	88
2.7. DİCKEY-FULLER (DF) BİRİM KÖK TESTİ	89

2.8. OTOREGRESİF KOŞULLU DEĞİŞEN VARYANS MODELLERİ	91
2.8.1. ARCH - OTOREGRESİF KOŞULLU DEĞİŞEN VARYANS MODELİ.....	91
2.8.1.1. ARCH Modelinin Kurulması ve ARCH Etkisinin Testi.....	94
2.8.2. GARCH - GENELLEŞTİRİLMİŞ OTOREGRESİF KOŞULLU DEĞİŞEN VARYANS MODELİ	95
2.8.2.2. GARCH Etkisinin Testi	96
2.8.3. FIGARCH – KESİRLİ TÜMLEŞİK GENELLEŞTİRİLMİŞ OTOREGRESİF KOŞULLU DEĞİŞEN VARYANS MODELİ	97
2.8.4. EGARCH – ÜSTSEL GENELLEŞTİRİLMİŞ OTOREGRESİF KOŞULLU DEĞİŞEN VARYANS MODELİ	99
2.8.5. GJR MODELİ	101
2.8.6. APARCH – ASİMETRİK KUVVETLİ OTOREGRESİF KOŞULLU DEĞİŞEN VARYANS MODELİ	102
2.8.7. CCC-GARCH - SABİT KOŞULLU KORELASYON GARCH MODELİ.....	103
2.9. ÇOK DEĞİŞKENLİ GARCH TESTLERİ.....	105
2.9.1. HOSKİNG ÇOK DEĞİŞKENLİ PORTMANTEAU TESTİ	105
2.9.2. LI VE McLEOD’UN ÇOK DEĞİŞKENLİ PORTMANTEAU TESTİ	106
2.9.3. SABİT KORELASYON LM TESTİ (TSE 2000).....	107
2.9.4. ENGLE VE SHEPPARD DİNAMİK KORELASYON TESTİ (2001)	109

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

UYGULAMA

3.1. VERİ SETİ	113
3.2. ORTALAMA DENKLEMLERİNİN OLUŞTURULMASI.....	113
3.3. BOX-JENKINS MODEL KURMA STRATEJİSİ	124
3.3.1. BELİRLEME	124
3.3.2. TAHMİN VE AYIRD EDİCİ KONTROL	128
3.3.3. BÜYÜK AYRIM VE ÖNGÖRÜ.....	133
3.4. ARCH - OTOREGRESİF KOŞULLU DEĞİŞEN VARYANS MODELLERİ	137
3.4.1. ARCH MODELİNİN KURULMASI	137
3.4.2. GARCH MODELİNİN KURULMASI.....	139

3.4.3. EGARCH MODELİNİN KURULMASI	141
3.4.4. GJR MODELİNİN KURULMASI.....	143
3.4.5. APARCH MODELİNİN KURULMASI	146
3.4.6. FIGARCH MODELİNİN KURULMASI	148
3.4.7. SABİT KOŞULLU KORELASYON (CCC)-GARCH MODELİ	150
3.4.7.1. Koşullu Ortalama ve Koşullu Varyans Değerlerinin Öngörüsü	154
3.5. MARKOWITZ ETKİN PORTFÖY SETİNİN OLUŞTURULMASI.....	157
3.5.1. KOŞULLU VARYANSA DAYALI ETKİN PORTFÖY SETİ	157
3.5.2. KOŞULLU OLMAYAN VARYANSA DAYALI ETKİN PORTFÖY SETİ	161
3.5.3. KOŞULLU VE KOŞULLU OLMAYAN PARAMETRELERE DAYALI OPTİMAL PORTFÖYLERİN KARŞILAŞTIRILMASI	164
SONUÇ	166
KAYNAKÇA.....	168

TABLO LİSTESİ

Tablo 1: Otokorelasyon ve Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu	78
Tablo 2: Finansal Varlıkların Tanımsal İstatistikleri	116
Tablo 3: Finansal Varlıkların Getirilerine Ait Tanımsal İstatistikler	123
Tablo 4: ADF Test Sonuçları.....	127
Tablo 5: 50 Hisse Senedine Ait Aday Modeller	128
Tablo 6: Aday Modellere Ait Uyum İyiliği Ölçütleri.....	135
Tablo 7: Nihai Modeller	136
Tablo 8: ROTKAR ve RBİMAS için ARCH(q) Modelleri	138
Tablo 9: ROTKAR ve RBİMAS için ARMA(1,1)-GARCH(p,q) Modelleri	140
Tablo 10: ROTKAR ve RBİMAS için ARMA(1,1)-EGARCH(p,q) Modelleri.....	142
Tablo 11: ROTKAR ve RBİMAS için ARMA(1,1)-GJR(p,q) Modelleri.....	145
Tablo 12: ROTKAR ve RBİMAS için ARMA(1,1)-APARCH(p,q) Modelleri.....	147
Tablo 13: ROTKAR ve RBİMAS için ARMA(1,1)-FIGARCH(p,q) Modelleri	149
Tablo 14: ARMA(1,1)-CCC-GARCH(1,1) Modeli	151
Tablo 15: Hosking ve Li-Mcleod Çok Değişkenli Pormanteau Testi	153
Tablo 16: Sabit ve Dinamik Korelasyon Testleri	154
Tablo 17: Koşullu Ortalama ve Varyans-Korvans Öngörü Değerleri	156
Tablo 18: ROTKAR ve RBİMAS Koşullu Ortalama ve Varyans Öngörü Değerleri ..	157
Tablo 19: Portföy Getirisi ve Sapması.....	158
Tablo 20: ROTKAR ve RBİMAS Koşullu Olmayan Ortalama ve Varyans Değerleri	161
Tablo 21: Portföy Getirisi ve Sapması.....	162

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1: Portföy Yönetim Süreci	4
Şekil 2: Asimetrik İşlem Hacmi-Fiyat Değişim İlişkisi.....	7
Şekil 3: Servetin Fayda Fonksiyonu	14
Şekil 4: Risk Karşısında Yatırımcı Tipleri	15
Şekil 5: Marjinal Fayda ve Yatırımcı Tipleri.....	16
Şekil 6: Kayıtsızlık Eğrileri	17
Şekil 7: Toplam Riskin Kaynakları	17
Şekil 8: Toplam Risk	19
Şekil 9: Etkin $E-V$ Bileşenleri	27
Şekil 10: Portföylerin Geometrik Gösterimi ve Kısıtlara Uygun Portföylere Ait	28
Şekil 11: Eş-Ortalama Doğruları	29
Şekil 12: Eş-Ortalama Doğruları ve Eş-Varyans Eğrileri.....	30
Şekil 13: Eş-Varyans Eğrileri	31
Şekil 14: Farklı Eş-Varyans Sistemleri.....	32
Şekil 15: Kritik Doğru	32
Şekil 16: Etkin Portföy Seti	33
Şekil 17: Kritik Doğru	34
Şekil 18: Üç Varlıktan Oluşan Etkin Portföyler	34
Şekil 19: Etkin Portföyler	35
Şekil 20: Etkin $E-V$ Bileşenleri	35
Şekil 21: Eş-Varyans Eğrisi ve Portföy Bileşeni	36
Şekil 22: En İyi σ, m Bileşeninin Tespiti	40
Şekil 23: N Varlık İçin En İyi σ, m Bileşeninin Tespiti.....	43
Şekil 24: N Varlık İçin En İyi σ, m Bileşenine Sahip Portföy Ağırlıkları	46
Şekil 25: Portföy Korelasyonu.....	48
Şekil 26: Portföy Korelasyonları	48
Şekil 27: Ortalama-Varyans Portföyleri	54

Şekil 28: Box ve Jenkins Model Kurma Stratejisi	78
Şekil 29: Finansal Varlıkların Kapanış Fiyatları	114
Şekil 30: Finansal Varlıkların Getirileri	120
Şekil 31: Getiri Hisselerinin Histogramları	122
Şekil 32: Getiri Hisselerine ait ACF ve PACF	125
Şekil 33: Birim Çemberler ve Karakteristik Kökler	132
Şekil 34: Aday Modellerin Korelogramları	134
Şekil 35: Koşullu Varyans-Kovaryans-Korelasyon.....	154
Şekil 36: Koşullu Ortalama ve Varyans Öngörü Değerleri	156
Şekil 37: Etkin Portföy Sınırı.....	159
Şekil 38: Ağırlık Vektör Kısıtı.....	159
Şekil 39: Eş Varyans Eğrileri ve Ağırlık Vektörü Kısıtı	160
Şekil 40: Optimal Portföy Ağırlıkları	161
Şekil 41: Etkin Portföy Sınırı.....	162
Şekil 42: Ağırlık Vektör Kısıtı.....	163
Şekil 43: Eş Varyans Eğrileri ve Ağırlık Vektörü Kısıtı	163
Şekil 44: Koşullu ve Koşullu Olmayan Portföy Ağırlıkları	164

GENEL BİLGİLER

İsim ve Soyadı	: Ömer Mesut BAYHAN
Anabilim Dalı	: Ekonometri
Programı	: Ekonometri
Tez Danışmanı	: Prof. Dr. Ş. Işıl AKGÜL
Tez Türü ve Tarihi	: Yüksek Lisans – Ağustos 2019
Anahtar Kelimeler	: Portföy, Markowitz, ARMA, ARCH, CCC-GARCH

ÖZET

OTOREGRESİF KOŞULLU DEĞİŞEN VARYANS MODELLERİYLE MARKOWITZ ETKİN PORTFÖY SETİNİN BELİRLENMESİ VE BİST50 HİSSELERİ UYGULAMASI

Geçmişten bugüne finansal piyasalarda yatırımcılar ve portföy yöneticileri kazançlarını korumak veya artırmak amacıyla finansal varlıklara yatırım yaparlar. Bu yatırımlar yapılırken yatırımcıların dikkate aldığı iki temel faktör bulunmaktadır: risk ve getiri. Bunlar yatırım kararlarındaki belirleyici unsurlardır. Birçok yatırımcı, yatırım kararını verirken finansal varlığın getiri kısmına odaklanmakta, risk kısmını ise hesaba katmamaktadır. Bununla birlikte portföy oluşturulurken finansal varlıklara ne kadar yatırım yapılması gerektiği yatırımcılar için cevaplanması gereken zor bir soru olmaktadır. Portföy yönetim teorisinde önemli bir yaklaşım olan ve Markowitz tarafından tanımlanan Ortalama-Varyans (OV) modeli, etkin portföy setinin belirlenmesinde yatırımcılara ve portföy yöneticilerine yardımcı olmaktadır. Fakat modelin girdisi olan finansal varlığın riskinin zamandan bağımsız olduğu varsayımı, finansal zaman serilerinin yapısıyla örtüşmemektedir. Genellikle getiri serilerinin varyansı zaman içinde değişim göstermektedir.

Bu çalışmada, yukarıda bahsedilen riskin zamandan bağımsız olduğu varsayımının geçersiz olduğunun gösterilmesi amaçlanmış ve BİST50 endeksinde yer alan hisse senetlerinin ortalama getirileri ARMA modeliyle, varyansları ise ARCH modelleriyle analiz edilmiştir. Sonrasında istatistiksel anlamlı olan ortalama denklemleri için varyans denklemleri ve koşullu kovaryans matrisi CCC-GARCH(p,q) modeliyle oluşturulmuştur. Daha sonrasında CCC-GARCH(p,q) modeliyle elde edilen haftalık öngörü değerleri Markowitz OV modelinde kullanılarak etkin portföy setine ulaşılmıştır.

GENERAL KNOWLEDGE

Name and Surname	: Ömer Mesut BAYHAN
Field	: Econometrics
Programme	: Econometrics
Supervisor	: Professor Ş. Işıl AKGÜL
Degree Awarded and Date	: Master - August 2019
Keywords	: Portfolio, Markowitz, ARMA, ARCH, CCC-GARCH

ABSTRACT

DETERMINING MARKOWITZ'S EFFICIENT PORTFOLIO FRONTIER WITH AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSKEDASTICITY MODELS AND AN APPLICATION OF SHARES IN BIST50 INDEX

From past to today, investors and portfolio managers invest in financial assets to save their earnings or make money. Investors consider two fundamental factors, risk and return, before they had an investment. These are predictive factors in investment decision. Many investors focus on the return portion of the financial asset but generally they miss the risk component of the financial asset or they are in the dark about measuring risk of securities. In other words, how much money should be invested in financial assets is a difficult question to answer for investors while they diversify their portfolios. Mean-Variance (MV) model presented by Harry Markowitz which is important approach in portfolio management theory helps investors and portfolio managers to definite of efficient portfolios frontier. However supposition of that MV model's risk input is time-invariant doesn't match up with properties of financial time series in general. Typically variance of financial return series variate in time.

In this study, assumption of that risk is time independent mentioned above had been intended to show it is invalid. Returns and variances of shares in BIST50 index were sequentially analyzed with ARMA and ARCH models. Then variance equations and conditional covariance matrix was created with CCC-GARCH(p,q) model for statistical significant mean equations. After then weekly forecasted values by CCC-GARCH(p,q) were used in MV model of Markowitz and efficient portfolios frontier was defined.

KISALTMALAR

ADF	: Genişletilmiş Dickey Fuller (<i>Augmented Dickey Fuller</i>)
AIC	: Akaike Bilgi Ölçütü (<i>Akaike Information Criteria</i>)
APARCH	: Asimetrik Kuvvetli Koşullu Değişen Varyans (<i>Asymmetric Power Autoregressive Conditional Heteroskedasticity</i>)
AR	: Otoregresif (<i>Autoregressive</i>)
ARCH	: Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (<i>Autoregressive Conditional Heteroskedasticity</i>)
ARIMA	: Otoregresif Tümlşik Hareketli Ortalama (<i>Autoregressive Integrated Moving Average</i>)
ARMA	: Otoregresif Hareketli Ortalama (<i>Autoregressive Moving Average</i>)
BİST50	: Borsa İstanbul 50 Endeksi
CCC-GARCH	: Sabit Koşullu Korelasyon (<i>Constant Conditional Correlation</i>)-GARCH
EGARCH	: Üstsel Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (<i>Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity</i>)
FIGARCH	: Kesirli Tümlşik Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (<i>Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity</i>)
GARCH	: Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (<i>Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity</i>)
KOHK	: Kök Ortalama Hata Kare (<i>Root Mean Squared Error</i>)
MA	: Hareketli Ortalama (<i>Moving Average</i>)
NÖH	: Nispi Öngörü Hata (<i>Relative Forecast Error</i>)
OH	: Ortalama Hata (<i>Mean Error</i>)
OMH	: Ortalama Mutlak Hata (<i>Mean Absolute Error</i>)
OMYH	: Ortalama Mutlak Yüzde Hata (<i>Mean Absolute Percent Error</i>)
OÖHK	: Ortalama Öngörü Hata Kare (<i>Mean Squared Forecast Error</i>)
OV	: Ortalama Varyans (<i>Mean Variance</i>)
OYH	: Ortalama Yüzde Hata (<i>Mean Percent Error</i>)
TARCH	: Eşikli Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (<i>Threshold Autoregressive Conditional Heteroskedasticity</i>)
TL	: Türk Lirası

ÖNSÖZ

Yapılan bu çalışmada, “Markowitz Etkin Portföy Seti”nin belirlenmesi amacıyla Otoregresif Koşullu Değişen Varyans modelleri kullanılmıştır. Araştırma öncesi ve süresince, zaman serileri analizinde vizyonumu geliştiren Marmara Üniversitesi öğretim üyesi ve tez danışmanım olan Prof. Dr. Ş. Işıl AKGÜL’e, hayatım boyunca maddi ve manevi desteğiyle hep yanımda olan aileme ve ablam Fatma BAYHAN’a teşekkürü borç bilirim.

İstanbul, 2019

Ömer Mesut BAYHAN



*Atatürk,
Silah arkadaşları,
ve aydınlanma yolunda şehit olan tüm bilim insanlarına...*

GİRİŞ

Finansal varlıkların fiyatlanması ve yönetilmesi ekonomi yazınında geniş bir yer kaplamaktadır. Finansal piyasalarda yatırımcıların ve portföy yöneticilerinin yatırım kararlarını etkileyen bir çok faktör bulunmaktadır. Zaman içerisinde istatistiksel yöntemlerin gelişmesiyle beraber bu varlıkların fiyatlanmasında ve yönetilmesinde subjektif kararlar yerini bilimsel yöntemlere bırakmıştır. Bu süreçte portföy yönetimine Ortalama-Varyans (OV) modeliyle modern bir yaklaşım getiren Markowitz (1952), etkin portföy ve etkin portföy setini ekonomi yazınına kazandırmıştır. Ortalama-Varyans modeli, finansal varlıkların ortalama getirilerini ve varyanslarını kullanarak, portföyde bu finansal varlıklara ait optimum ağırlıkları belirlemektedir. Ortalama-Varyans modelinde risk ölçütü olarak kullanılan varyansın zamandan bağımsız olduğu diğer bir ifadeyle sabit olduğu varsayılmaktadır. Bu varsayım finansal getiri serileri için pek gerçekçi olmamaktadır. Çünkü getiri serileri genellikle normal dağılım özelliklerini taşımamaktadır.

Getiri serilerinin olasılık dağılımlarının leptokurtik dağılım özelliği göstermesi ve varyansın zaman içerisinde değişebilmesi, koşullu olmayan varyansın gerçekçi sonuçlar vermemesine neden olmaktadır. Zaman içerisinde değişim gösterebilen varyans, ARCH ailesi modelleri yardımıyla modellenenmektedir. Burada, sabit varyans varsayımının geçersiz olduğunun gösterilmesi amaçlanmış ve BİST50 endeksinde yer alan hisse senetlerinin ortalama denklemleri ARMA modelleri yardımıyla, varyans denklemleri ise ARCH ailesi modelleriyle oluşturulmuştur. Daha sonrasında ise koşullu ortalama ve koşullu kovaryans değerlerinin *ex-ante* öngörülmesi yapılmış ve elde edilen matris Markowitz Ortalama-Varyans modelinde girdi şeklinde kullanılarak etkin portföy setine ulaşılmıştır.

Yapılan araştırma tez toplamda dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde geleneksel ve modern portföy teorisine geniş bir şekilde yer verilmiştir. İkinci bölümde zaman serisi ekonometrisi ve otoregresif koşullu değişen varyans modelleri anlatılmıştır. Üçüncü bölüm, uygulama bölümü olup finansal varlıklara ait ortalama ve varyans

denklemleri tanımlanmış ve tahmin edilmiştir. Testleri başarılı bir şekilde geçen finansal varlıkların öngürüsü yapılmış ve etkin portföy seti oluşturulmuştur. Değerlendirmelerin yapıldığı Sonuç bölümü ile tez tamamlanmıştır.



BİRİNCİ BÖLÜM

PORTFÖY TEORİSİ

1.1. PORTFÖY KAVRAMI

Portföy, Fransızca bir kelime olup “cüzdan” anlamına gelmektedir.¹ Menkul değerler olarak bakıldığında ise portföy birden çok finansal aracın bir araya getirilmesiyle oluşturulmuş yeni bir finansal varlık olarak tanımlanmaktadır.² Ancak portföy, çeşitli finansal varlıklardan oluşmasına rağmen, portföyün değeri, varlıkların basit bir toplamı değildir.³ Bu sebeple portföy kendine öz, ölçülebilir nitelikleri olan bir finansal varlıktır. Portföyün bu özelliği onu oluşturan menkul kıymetlerin basit bir toplamı olmaktan çıkartarak daha karmaşık bir yapıya işaret etmektedir.

1.2. PORTFÖY YÖNETİMİ VE SÜRECİ

Portföy yönetimi, finansal varlıklardan oluşturulan portföylerin yatırımcı nam ve hesabına, yatırımcının belirlediği risk ve süre çerçevesinde maksimum getiri sağlanacak şekilde, vekil sıfatıyla yönetilmesidir. Portföy yönetim süreci, yatırımcıya ait menkul değerlerin seçimi ve her bir menkul değerden ne kadarının portföye dâhil edileceği konusundaki belli yöntem ve tekniklerin tamamıdır. Portföy yöneticisi, belirli bir risk düzeyinde yatırımcının getirisini maksimum yapmaya çalışmaktadır.

Maksimum getiri sağlamak amacıyla yönetilen portföylerin oluşturulması ve yönetilmesinde en temel amaç riski düşürmektir. Bu amaç doğrultusunda, yatırımcı tarafından üstlenilen riskin çeşitlendirme yoluyla düşürülmesi hedeflenmektedir. Portföy

¹ **Türk Dil Kurumu Güncel Türkçe Sözlük**, “Portföy/Portefeullie”, http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_gts&arama=gts&guid=TDK.GTS.576f8e36bce393.59530475 (26 Haziran 2016).

² Turhan Korkmaz, “Portföy Yönetimi”, Mehmet Başar (Ed.), **Portföy Yönetimi** içinde (2-34), Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, 2013, s.3.

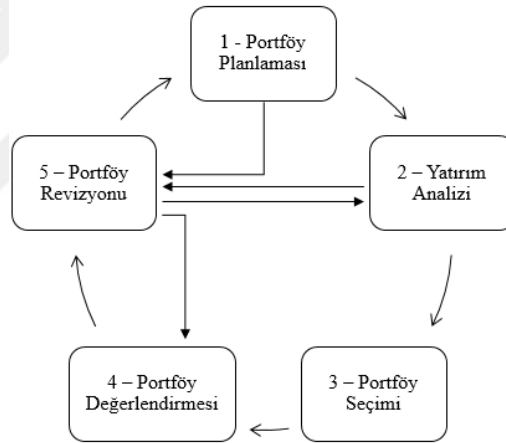
³ Mustafa Mortaş ve Okan Garip, “Optimum Portföy Seçimi Ve BİST’te İşlem Gören Firmalar Üzerinde Bir Araştırma”, **Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi**, Cilt.7, Sayı.13, (Aralık 2015), s.247.

yönetiminde bu duruma “*çeşitlendirme etkisi*” denilmektedir. Diğer bir ifadeyle – yumurtaların hepsini aynı sepete koymamak- şeklinde özetlenebilir.⁴

Portföy yönetim süreci beş aşamadan oluşmaktadır. Bunlar:

1. Portföy planlaması,
2. Yatırım analizi,
3. Portföy seçimi,
4. Portföy değerlemesi,
5. Portföy revizyonudur.

Şekil 1’de portföy yönetim sürecine ait aşamalar ve bu aşamalar arasındaki ilişkiler gösterilmektedir.



Şekil 1: Portföy Yönetim Süreci

Kaynak: Turhan Korkmaz, “Portföy Yönetimi”, Mehmet Başar (Ed.), **Portföy Yönetimi** içinde (2-34), Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, 2013, s.7.

1.2.1. Portföy Planlaması

Portföy yönetim sürecinin başlangıç basamağı olan portföy planlamasının çıkış noktası, yatırımcıların ihtiyaçlarının, tercihlerinin ve bu doğrultuda yatırım ölçütlerinin belirlenmesidir. Yatırım ölçütleri belirlenirken yatırımcının risk algısı belirlenip, getiri ve vade tercihleriyle eşleştirilmelidir. Bununla birlikte yatırımcının mevcut finansal durumu ve finansal piyasalardaki yatırım koşulları dikkatli bir şekilde incelenmelidir. Değişen

⁴ Korkmaz, ss.4-5.

koşullar altında portföy planlaması yeniden yapılarak veya içeriği tamamen değiştirilerek yeni bir portföy oluşturulur. Bu süreçte yatırımcının finansal amaçları; kârlılık, güvenlik ve likidite olarak sayılabilmektedir.⁵

Portföy planlanmasında önemli noktalardan biri de portföye dâhil edilecek varlıkların elde edilme sıklıklarındır. Yani, yatırımcılar açısından temel sorun farklı risk düzeylerinde varlıkların ağırlıkları belirlenirken günlük, haftalık ya da aylık verilerden hangilerinin kullanılacağıdır. Elde edilen portföy, ağırlıklar açısından homojen ise varlık ağırlıkları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir farkın olmayacağı düşünülmektedir. Homojenliğin belirlenmesi için *Ki-Kare testi*'ne başvurulabilir. Veri frekansı genişledikçe tüm risk seviyeleri için homojen yapı bozulmaktadır.⁶

1.2.2. Yatırım Analizi

Portföy yönetim sürecinin ikinci basamağı yatırım analizi aşamasıdır. Bu aşamada portföye dâhil edilecek menkul değerlerin özelliklerinin incelenmesi, ölçülmesi ve bu kıymetlerin performanslarının ileride ne olabileceğinin nicel bir şekilde tahmin edilmesini kapsamaktadır. Analiz yapılırken menkul değerlerin sadece geçmiş performanslarının incelenmesinin yanında, çeşitli matematiksel ve istatistiksel yöntemlerle geleceğe yönelik tahminlerin yapılması da gerekmektedir.⁷ Bu hesaplamalar yapılırken yatırım yapılacak ülkenin makroekonomik konjonktürü, ülkenin para ve maliye politikaları ile sosyal ve politik durumu, sektörün ve firmaların kârlılık oranları-pazar büyüklüğü gibi finansal göstergelerinin göz önünde bulundurulması gerekmektedir.

Portföy kapsamına alınacak finansal varlıkların likiditesi ve işlem hacmi de göz önüne alınması gereken unsurlar arasında yer almaktadır. Yapılan çalışmalarda yüksek işlem hacmine sahip hisse senetleri ile oluşturulan portföylerin beklenen getiri-risk duyarlılıkları ile düşük işlem hacmine sahip hisse senetleri ile oluşturulan portföylerin beklenen getiri-risk duyarlılıkları arasındaki farklılığın, portföy seçiminde yatırımcıyı

⁵ Korkmaz, s.8

⁶ Hakan Aygören ve Hasan Akyer, "Etkin Portföylerin Belirlenmesinde Veri-Aralığı, Hisse Senedi Sayısı ve Risk Düzeyi Faktörlerinin Etkisi", *Uluslararası Alanya İşletme Fakültesi Dergisi*, Cilt.5, Sayı.2, (2013), ss.16-17.

⁷ Korkmaz, s.8.

etkileyen bir kısıt olabileceği sonucuna ulaşılmıştır. ⁸ Likidite bu özelliğiyle değerlendirilebilir bir kavram olarak ortaya çıkmaktadır. Likiditesi yüksek olan bir firmanın borç ödeyebilme ve yeni varlık alma kabiliyetine sahip olması nedeniyle yatırımcılar bu varlıkları tercih edeceklerdir.⁹

Yatırım analizi aşamasında sıklıkla karşılaşılan bazı hatalar özetle:

- Portföye gereğinden çok varlığın dâhil edilmesiyle portföy yönetiminin zorlaşması,
- Çok fazla varlığın portföye dâhil edilmesi nedeniyle, yeterli bilgiye sahip olmadan yapılan alım-satım işlemlerinin gerçekleştirilmesi, araştırma giderlerinin artması ve zaman kayıplarının oluşması olarak sıralanabilmektedir.¹⁰

1987 yılında Jonathan M. Karpoff tarafından yapılan çalışmada işlem hacmi ve fiyat değişimleri arasındaki ilişki incelenmiştir. Karpoff fiyat-hacim ilişkisinin neden önemli olduğu dört temel madde ile açıklanmıştır:

- Fiyat-hacim ilişkisi finansal piyasa yapısının iç yüzünü ortaya çıkarmaya yardımcı olmaktadır,
- Fiyat ve hacim bileşenlerinin kullanıldığı vaka çalışmalarında bu ilişki önem arz etmektedir,
- Spekülatif fiyatların ampirik dağılımları üzerindeki tartışma fiyat-hacim ilişkisi açısından kritiktir. Getiri oranlarının dağılımları normal dağıma göre daha kurtotik olmaktadır,
- Fiyat-hacim ilişkisi vadeli piyasalar üzerine yapılan çalışmalar için önemli çıkarımlar sunmaktadır.¹¹

⁸ Umut Uyar ve Sinem Güler Kangallı, “Markowitz Modeline Dayalı Optimal Portföy Seçiminde İşlem Hacmi Kısıtı”, **Ege Akademik Bakış**, Cilt.12, Sayı.2, (2012), s.184.

⁹ Nihat Bozdağ ve Hasan Türe, “Bulanık Doğrusal Programlama Ve İMKB Üzerine Bir Uygulama”, **Gazi Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi**, Cilt.10, Sayı.1, (2008), s.6.

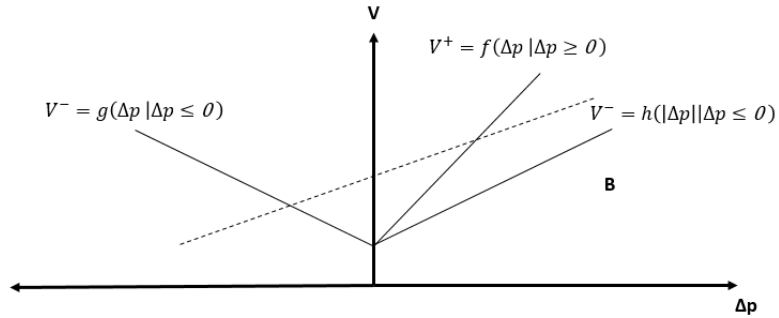
¹⁰ Cengiz Toraman ve Muhammed Fatih Yürük, “Küadratik Programlama Tabanlı Modelleme ile Portföy Optimizasyonu: BİST-100 Uygulaması”, **Mukaddime**, Cilt.5, Sayı.1, (2014), s.137.

¹¹ Jonathan M. Karpoff, “The Relation Between Price Changes and Trading Volume: A Survey”, **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Vol.22, No.1, (March 1987), ss.109-110.

Karpoff fiyat ve hacim arasındaki ilişkiyi inceleyen çalışmasında elde ettiği bulguları aşağıdaki maddeler ile özetlemiştir:

- Pozitif fiyat değişimleri [$V^+ = f(\Delta p | \Delta p \geq 0)$] ile hacim arasındaki korelasyon pozitifdir,
- Negatif fiyat değişimleri [$V^- = g(\Delta p | \Delta p \leq 0)$] ile hacim arasındaki korelasyon negatiftir,
- Fiyat değişimlerinin mutlak değeri [$V^- = h(|\Delta p| | \Delta p \leq 0)$] ile hacim üzerine yapılan testler, pozitif korelasyonu ve değişen varyanslı hata terimlerini ortaya çıkarmıştır,
- Fiyat değişimi-hacim arasında pozitif korelasyon olduğu belirlemiştir. Bununla birlikte fiyat-hacim doğrusal regresyon analizi sonucunda kalıntılarda otokorelasyona rastlamıştır.

Şekil 2’de asimetrik fiyat-hacim arasındaki ilişki gösterilmektedir. Negatif ve pozitif fiyat değişimlerinin hacim üzerindeki etkisi farklı olmaktadır. Pozitif fiyat değişiminin hacim üzerindeki etkisi, negatif fiyat değişimin yarattığı etkiden daha fazla olmaktadır.¹²



Şekil 2: Asimetrik İşlem Hacmi-Fiyat Değişim İlişkisi

Kaynak: Jonathan M. Karpoff, “The Relation Between Price Changes and Trading Volume: A Survey”, **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Vol.22, No.1, (March 1987), s.121.

¹² Jonathan M. Karpoff, “The Relation Between Price Changes and Trading Volume: A Survey”, **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**, Vol.22, No.1, (March 1987), ss.120-121.

1.2.3. Portföy Seçimi

Portföy yönetim sürecinin üçüncü basamağı portföy seçim aşamasıdır. Bu aşamada yatırım analizi sonucunda portföye dâhil edilecek finansal varlıkların seçimi yapılmaktadır. Bu nedenle portföy yönetim sürecinde varlık bileşiminin belirlendiği en önemli aşamadır. Varlık bileşimi genellikle hisse senedi, sabit getirili menkul kıymetler (hazine bonusu, devlet tahvili...), kıymetli madenler (altın, gümüş, paladyum...), emtialar (petrol, pamuk, buğday...), endeksler (BİST100, FTSE100, S&P500...), türev araçlar (future, forward, opsiyon...), yatırım ve emeklilik fonları, yabancı ülke paraları gibi yatırım araçlarından oluşmaktadır. Bir sonraki aşamada ise bu varlıklara ne kadar yatırım yapılacağı belirlenmektedir.¹³

Portföy seçimi üzerine yapılan çalışmalarda, örnek portföy varyansı ile piyasa portföyünün varyansının sabitlenmiş bir güvenilirlik seviyesinde eşit olması sıfır hipotezi olarak kullanıldığında, örnek portföylerin seçim sayıları arttırıldıkça çalışmanın doğruluğu artmaktadır. Ancak seçim sayısının fazla olduğu durumda kullanılan istatistiksel model, örnek portföylerin ve piyasa portföyünün varyansları arasındaki en önemsiz farklara bile duyarlı hale gelmektedir. Modelin bu düzeyde duyarlı hale gelmesi, her iki varyans arasında her zaman sıfır hipotezinin reddedecek kadar fark bulunmasına neden olmaktadır. Bu nedenle seçim sayısının arttırılması bir yandan çalışmanın doğruluğunu arttırırken bir yandan çalışmayı fazla duyarlı hale getirmektedir.¹⁴ Yapılan araştırmalar sonucunda en iyi portföy büyüklüğünün 12-14 varlıktan oluşan portföy olduğu tespit edilmiştir.¹⁵

1.2.4. Portföy Değerlemesi

Portföy yönetim sürecinin dinamik özelliğe sahip olması, oluşturulan portföylerin belirli zaman aralıklarında önceden belirlenen hedeflere ulaşım

¹³ Korkmaz, s.8.

¹⁴ Ömür Tosun ve Eda Oruç, "Portföy Büyüklüğünün Portföy Riski Üzerine Etkileri: İMKB-30 Üzerinde Test Edilmesi", *Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi*, Cilt.15, Sayı.2, (2010), s.481.

¹⁵ Fatih Ecer, N. Serap Vurur ve Latife Özdemir, "Bulanık Bir Modelle Firmaları Değerlendirme Ve Optimal Portföy Oluşturma: Çimento Sektöründe Bir Uygulama", *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, Cilt.6, Sayı.11, (2009), s.479.

ulaşmadığının kontrolünü zorunlu hale getirmiş ve portföy bileşiminde değişikliğe gidilip gidilmemesinin belirlenmesi açısından gereklilik arz etmiştir.

Portföy değerlemesi, performans ölçütlerinin hesaplanması ve performans karşılaştırılması olmak üzere iki aşamadan oluşmaktadır. Performans ölçülmesi, portföy kapsamında olan varlıkların tek tek performanslarının ölçülmesi şeklinde veya portföyün bir bütün halinde performansının ölçülmesi şeklinde olabilmektedir. Performans ölçümü yapılırken portföyün veya menkul kıymetlerin aynı dönemde farklı portföy veya menkul kıymetlerle yapılabileceği gibi farklı dönemlerdeki performanslarının karşılaştırılmasıyla da yapılabilmektedir. Ayrıca portföy performansının yüksek olması, portföy yöneticisinin başarısıyla doğru orantılıdır.

1.2.5. Portföy Revizyonu

Portföy revizyonu, portföyün performans hedefinin, portföyden sağlanan gerçek sonuçlarla karşılaştırılarak incelenmesi anlamına gelmektedir. Portföy revizyonu; planlama, analiz ve değerlemenin oluşturduğu bir süreçtir. Oluşturulan portföyler zaman içinde risk-getiri performansını kaybedebilmektedir.¹⁶ Özellikle kriz dönemlerinde varlıklara ve portföye ait ortalama getirinin oldukça düşük, standart sapmanın ise oldukça yüksek olduğu bilinmektedir.¹⁷ Ayrıca ülkeler arasındaki korelasyon katsayıları kriz dönemlerinde ciddi bir oranda artmaktadır.¹⁸ Bu sebeple düzenli aralıklarla portföy gözden geçirilmeli ve portföyün başarısı raporlanmalıdır. Bu işleme “*portföy raporlanması*” denmektedir.

1.3. PORTFÖY ÇEŞİTLERİ VE YÖNETİM STRATEJİSİ

Bireysel yatırımcılar, birikimlerini onlar adına en iyi yatırım kararının verilebilmesi için güvendikleri profesyonel portföy yöneticilerine teslim ederler. Portföy yöneticileri ise yatırımcıların başta risk, getiri ve vade faktörleri karışışındaki tutumlarına göre uygun portföy türünün belirlenmesinde yatırımcılar için yatırım stratejisi

¹⁶ Korkmaz, s.9.

¹⁷ Aslı Şişman ve Halil Karaca, “Kriz Dönemlerinde Optimal Portföy Seçimi: BİST 100 Uygulaması”, **Yönetim ve Ekonomi Araştırmaları Dergisi**, Cilt.14, Sayı.3, (Temmuz 2016), s.57.

¹⁸ Erhan Birgili ve Gülfen Tuna, “Markowitz Ve Tek Endeks Modellerinin Uygulanması: İMKB 30 Endeksi Üzerinde Karşılaştırmalı Analiz”, **Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi**, Cilt.15, Sayı.3, (2010), s.5.

oluştururlar. Bu kapsamda oluşturulan portföyler hisse, sabit getirili ve hibrid portföyler olmak üzere üç genel başlıkta toplanabilmektedir.¹⁹

1.3.1. Hisse Portföyleri ve Yönetim Stratejisi

Tamamı hisse senetlerinden oluşan hisse portföylerinin yönetim şekli aktif veya pasif olmak üzere iki kategoriye ayrılmaktadır. Korunmalı sabit getirili portföylerin aksine, aktif ve pasif hisse portföyü yönetimi dışında farklı bir yönetim stratejisi bulunmamaktadır.

Pasif yöntem *uzun dönemli al ve tut* stratejisine dayanmaktadır. Bu yöntemde hisse senetleri alınıp portföye dâhil edilir ve endeksin fiyat hareketleri izlenmektedir. Endeksin takip edilmesi sebebiyle, bu yatırım yaklaşımı *endekslleme* olarak da ifade edilmektedir. Bu bağlamda pasif yönetim şekli, seçilen bir endeksin performansına sahip bir portföy oluşturma ihtiyacını ortaya çıkarmaktadır. Böylelikle daha az varlığa yatırım yapılarak hem işlem maliyetinden hem de zaman maliyetinden tasarruf sağlanacaktır.²⁰

Aktif hisse portföyü yönetimi, portföy yöneticisinin referans (*benchmark*) portföy getirisine göre daha iyi performans göstermesi yaklaşımına dayanmaktadır. Burada portföy yöneticisinin alım-satım zamanlamasını iyi ayarlaması gerekmektedir.²¹

Tamamı hisse senedinden oluşan portföylerde dikkat edilmesi gereken husus sektör çeşitlendirmesinin iyi yapılmasıdır. Oluşturulan portföyde hisse senetleri arasındaki korelasyonun düşük olması, portföyün performansını olumlu yönde etkileyecektir. Ayrıca ekonominin genişlediği ve istikrarlı olduğu dönemlerde portföy getirilerinde artış beklenmektedir.²²

¹⁹ Ludwig B. Chincarini ve Daehwan Kim, **Quantitative Equity Portfolio Management: An Active Approach to Portfolio Construction and Management**, 1. Edition, McGraw-Hill, 2006, ss.3-5.

²⁰ Daha fazla bilgi için "*smart beta*" uygulamasına bakınız.

²¹ Frank K. Reilly ve Keith C. Brown, **Investment Analysis and Portfolio Management**, 7. Edition, South-Western College Pub, 2002, ss.653-655.

²² Frank K. Reilly ve Keith C. Brown, **Investment Analysis and Portfolio Management**, 7. Edition, South-Western College Pub, 2002, ss.662-663.

1.3.2. Sabit Getirili Portföyler ve Yönetim Stratejisi

Tamamı tahvil, bono gibi sabit getirili menkul kıymetlerden oluşan portföylerin yönetim stratejisinde beş alternatif yönetim şekli bulunmaktadır. Bunlar pasif yönetim, aktif yönetim, çekirdek-üstü (*core-plus*) yöntemi, fon eşleştirmesi (*matched-funding*) yöntemi ve beklenmedik prosedür (*contingent procedure*) yöntemidir.

Sabit getirili portföyler için iki tür pasif portföy yönetim stratejisi bulunmaktadır. Bunlar *al ve tut* ile *endeksleme* stratejisidir. Al ve tut stratejisi, portföye dâhil edilen sabit getirili menkul değerlerin kupon ve anapara getirisinin vade sonuna kadar beklenerek elde edilmesi sürecinin tamamını ifade etmektedir. Endeksleme stratejisi ise hükümetin veya borçlanma aracı ihraç eden bir kurumun (Örn. Lehman Brothers) sunduğu menkulün performansına eşit olacak bir portföy oluşturulması yaklaşımına dayanmaktadır.

Faiz oranı tahmini, değerlendirme analizi, kredi analizi, getiri marjı analizi ve swap analizi olmak üzere beş alternatif aktif yönetim stratejisi bulunmaktadır. Aktif yönetim stratejisinde sabit getirili menkul kıymetlerin piyasa fiyatlarının veya faiz oranlarının alım-satımı yapılarak normal getirinin üstünde bir performans sağlanmaya çalışılmaktadır.²³

Çekirdek-üstü yönteminde portföyün “çekirdek” kısmı pasif yönetimi ve getiri garantisi yüksek olan menkul kıymetleri (Örn. hazine bonusu) ifade ederken “üst” kısmı, yüksek getirili menkul kıymetlerin (Örn. gelişmekte olan piyasalara ait tahviller) aktif şekilde yönetilmesini ifade etmektedir.

Kurumların yükümlülüklerini yerine getirememesi, onların borçlanma araçlarının faizlerinin yükselmesine ve fiyatlarının düşmesine neden olmaktadır. Bu durum faiz oranlarında dalgalanmalara neden olmakta ve yatırımcıların geleceğe yönelik kaygılarını arttırmaktadır. Bu tür durumlar için tahmin edilebilir gelecek yükümlülüklerin

²³ Frank K. Reilly ve Keith C. Brown, **Investment Analysis and Portfolio Management**, 7. Edition, South-Western College Pub, 2002, ss.809-810.

emeklilik fonları gibi uzun dönemli fonlarla denkleştirilmesi *fon eşleştirme* yaklaşımının temelini oluşturmaktadır.²⁴

Portföy getirisinin önceden belirlenen eşik değerin altına düşmesi durumunda aradaki fark kadar portföy yöneticisine aktif yönetim izni verilebilmektedir. Bu yaklaşıma ise *beklenmedik prosedür* yaklaşımı denmektedir.²⁵

1.3.3. Hibrid Portföyler ve Yönetim Stratejisi

Birden fazla finansal varlıktan oluşan hibrid portföyler, hisse ve tahvil gibi menkul kıymetlerden oluşabileceği gibi future, forward, cfd, opsiyon vb. türev varlıklardan da oluşabilmektedir. Bu tür portföyler, hisse portföylerine ve sabit getirili portföylere göre çok daha karmaşık olup yönetimleri bir o kadar uzmanlık gerektirmektedir. Portföye dâhil edilen finansal varlıklara göre yönetim stratejisi değişecektir.

1.4. BEKLENEN GETİRİ, RİSK VE KOVARYANS

Finansal varlığın elde tutulması süresince sağladığı getiri (HPR-*holding period return*), varlığın dönem sonundaki yüzdesel oranı olarak ifade edilmekte ve

$$HPR = \frac{\text{dönem sonu değeri}}{\text{dönem başı değeri}} - 1 = \frac{P_t + \text{Temettü}_t}{P_0} - 1 = \frac{P_t - P_0 + \text{Temettü}_t}{P_0} \quad (1.4.1)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.²⁶ Yatırımlarda risk ölçütü olarak kullanılan finansal varlığın getirisine ait varyans,

$$S^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (R_t - \mu)^2}{T-1} \quad (1.4.2)$$

²⁴ Frank K. Reilly ve Keith C. Brown, **Investment Analysis and Portfolio Management**, 7. Edition, South-Western College Pub, 2002, ss.824-825.

²⁵ Frank K. Reilly ve Keith C. Brown, **Investment Analysis and Portfolio Management**, 7. Edition, South-Western College Pub, 2002, s.834.

²⁶ Kaplan Inc, **CFA Level I Book 4: Corporate Finance, Portfolio Management, And Equity Investments**, 1. Edition, United States of America: Kaplan, 2012, s.136.

şeklinde hesaplanmaktadır.²⁷ S^2 , varyansı; R_t , t dönemine ait getiriyi; μ , ortalamayı (beklenen getiriyi) ve T , dönem sayısını ifade etmektedir. Varyansın karekökü ise standart sapmaya eşittir.

İki değişkenin birlikte hareketini ölçen kovaryans istatistiği,

$$Cov_{1,2} = \frac{\sum_{t=1}^T [(R_{t,1} - \bar{R}_1)(R_{t,2} - \bar{R}_2)]}{T - 1} \quad (1.4.3)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.²⁸ $R_{t,1}$ ve $R_{t,2}$, t dönemindeki birinci ve ikinci varlığa ait getiriyi; \bar{R}_1 ve \bar{R}_2 birinci ve ikinci varlığa ait ortalama getiriyi ve T , dönem sayısını ifade etmektedir. Kovaryansın pozitif olması değişkenlerin aynı yönde hareket ettiğini, negatif olması değişkenlerin zıt yönde hareket ettiğini ifade etmektedir. Kovaryans değerinin sıfır olması durumunda değişkenler arasında doğrusal bir ilişkinin olmadığı söylenir.²⁹

1.5. FAYDA FONKSİYONU VE YATIRIMCI TİPLERİ

Levy ve Markowitz yaptıkları çalışma sonucunda önerdikleri en iyi fayda fonksiyonunu,

$$f(E, V) = U(E) + 0,5U''E(V) \quad (1.5.1)$$

ile göstermişlerdir.³⁰ $U(R) = \log(1 + R)$ olması durumunda ise,

$$f(E, V) = \log(1 + R) - 0,5V / (1 + E)^2 \quad (1.5.2)$$

olmaktadır.³¹ Taylor'ın fayda yaklaşımına ait denklem ise,

²⁷ Kaplan Inc, **CFA Level I Book 4: Corporate Finance, Portfolio Management, And Equity Investments**, 1. Edition, United States of America: Kaplan, 2012, s.139.

²⁸ Kaplan Inc, **CFA Level I Book 4: Corporate Finance, Portfolio Management, And Equity Investments**, 1. Edition, United States of America: Kaplan, 2012, s.140.

²⁹ Kaplan Inc, **CFA Level I Book 4: Corporate Finance, Portfolio Management, And Equity Investments**, 1. Edition, United States of America: Kaplan, 2012, s.140.

³⁰ Harry M. Markowitz, "Foundations of Portfolio Theory", **Wiley for the American Finance Association**, Vol.46, No.2, (June 1991), s.473.

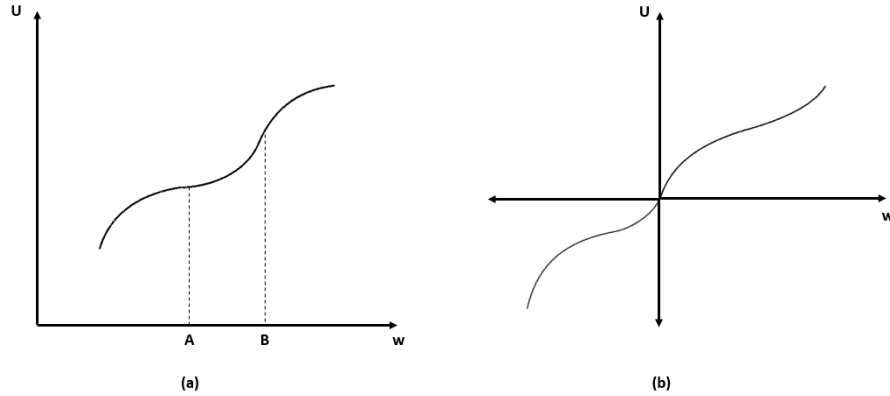
³¹ Harry M. Markowitz, "Foundations of Portfolio Theory", **Wiley for the American Finance Association**, Vol.46, No.2, (June 1991), s.473.

$$Q(R) = U(E) + U'(E)(R - E) + 0,5U''(E)(R - E)^2 \quad (1.5.3)$$

şeklinde gösterilmektedir.³² Faydanın bireylerin tercihlerine göre değişiklik göstermesi finans teorisi için önemlidir. Fayda, memnuniyet düzeyini ifade etmekte olup yatırımcılar için memnuniyet düzeyinin artması, servetin artmasına bağlıdır. Farklı fayda düzeyleri kayıtsızlık eğrileri ile ifade edilmektedir. Yatırımcılar portföylerinden elde edilecek faydanın belirlenmesinde getiri ve riski girdi olarak kabul etmektedir. Genel anlamda getirinin artması ya da riskin azalması, fayda değerini arttıracak ve oluşturulan portföyler fayda değerlerine göre sıralanabilecektir.³³

1.5.1. Servetin Fayda Değeri

Fayda U , servet ise W ile sembolize edildiğinde, bu iki değişken arasındaki ilişki Şekil 3'de gösterilmiştir. Şekil 3'de sürekli eğri üzerinde A noktasının altındaki kısımda $\partial^2 U / \partial W^2 < 0$; A ve B arasında $\frac{\partial^2 U}{\partial W^2} > 0$; B noktasının üzerindeki kısımda $\partial^2 U / \partial W^2 < 0$ olmaktadır.³⁴ Diğer bir ifadeyle A noktasının altında kalan kısım ile B noktası üzerinde kalan kısım konveks olup servetin marjinal faydası azalarak artmaktadır. A ve B noktaları arasında kalan kısım ise konkav olup servetin marjinal faydası artarak artmaktadır.



Şekil 3: Servetin Fayda Fonksiyonu

Kaynak: Harry M. Markowitz, "The Utility of Wealth", **Journal of Political Economy**, Vol.60, No.2, (April 1952), s.151 (a) ve s.154 (b)

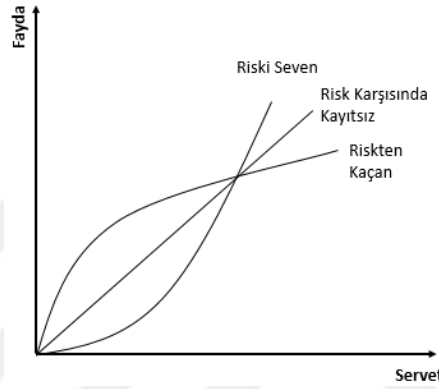
³² Harry M. Markowitz, "Foundations of Portfolio Theory", **Wiley for the American Finance Association**, Vol.46, No.2, (June 1991), s.474.

³³ Kaplan Inc, **CFA Level I Book 4: Corporate Finance, Portfolio Management, And Equity Investments**, 1. Edition, United States of America: Kaplan, 2012, ss.166-167.

³⁴ Harry M. Markowitz, "The Utility of Wealth", **Journal of Political Economy**, Vol.60, No.2, (April 1952), s.151.

1.5.2. Yatırımcı Tipleri

Yatırımcıların risk karşısındaki davranışları temel anlamda üçe ayrılmaktadır: *riskten kaçan yatırımcılar*, *riske karşı kayıtsız kalan yatırımcılar* ve *riski seven yatırımcılar*. Şekil 4’de risk karşısında kayıtsız kalan yatırımcıların servet fayda fonksiyonu orjinden geçen bir doğru olarak gösterilmektedir. Riski seven yatırımcıların servet fayda eğrileri pozitif eğimli iken, riskten kaçan yatırımcıların servet fayda eğrileri ise negatif eğimlidir.



Şekil 4: Risk Karşısında Yatırımcı Tipleri

Kaynak: Robert S. Pindyck ve Daniel L. Rubinfeld, **Microeconomics**, 8. Edition: New Jersey, Pearson, 2013, s.167.

1.5.2.1. Riskten Kaçan Yatırımcılar

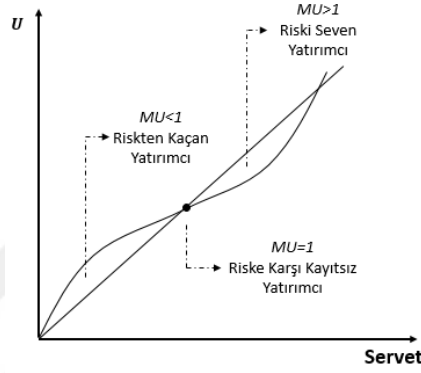
Riskten kaçan yatırımcıların fayda fonksiyonları, servetteki her bir artışa azalarak artmaktadır. Bu tip yatırımcılar risk almayı sevmezler ve risk almaktan korkarlar. Ancak buradan riskten kaçan yatırımcıların riski reddettiği anlamı da çıkarılmamalıdır. Risk istenilmeyen faktör olarak tanımlansa da riski tazmin edebilecek bir getiri, belirsizliği tolere etmeye değecektir.

1.5.2.2. Riske Karşı Kayıtsız Yatırımcılar

Riske karşı kayıtsız yatırımcıların fayda fonksiyonları, servetteki her bir artışa aynı oranda artarak cevap vermektedir. Riske karşı kayıtsız yatırımcılar için servetin marjinal faydası 1’dir.

1.5.2.3. Riski Seven Yatırımcılar

Riski seven yatırımcıların fayda fonksiyonları, servetteki her bir artışa artarak artmaktadır. Bu tip yatırımcılar risk almayı severler ve risk almaktan korkmazlar. Ayrıca yatırımcılar daha riskli fakat beklenen getirisi daha yüksek olan yatırımlara yönelecektir.³⁵ Şekil 5’de bu üç yatırımcı tipi için marjinal faydanın birden küçük ve büyük olduğu bölgeler gösterilmiştir.



Şekil 5: Marjinal Fayda ve Yatırımcı Tipleri

Kaynak: Milton Friedman ve L. J. Savage, “The Utility Analysis of Choices Involving Risk”, **Journal of Political Economy**, Vol.56, No.4, (August 1948), s.295.

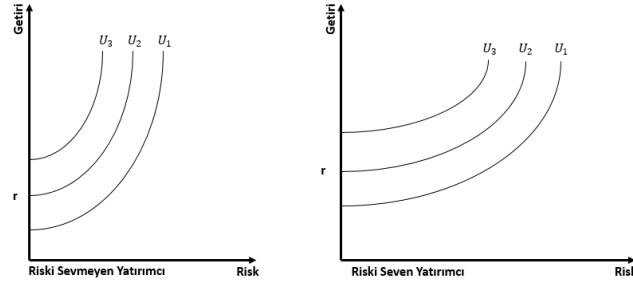
1.5.3. Kayıtsızlık Eğrileri ve Yatırım Tercihleri

Kayıtsızlık eğrileri, yatırımcıların risk (σ) ve getiri [$E(r)$] arasındaki tercihini gösterilmesinde kullanılmaktadır. Tüm eğri boyunca aynı doyumluk düzeyini gösteren kayıtsızlık eğrileri fayda eğrisine denk olmaktadır. Yatırımcılar için risk istenmeyen ve getiri istenen bir durum olduğunda kayıtsızlık eğrisi pozitif eğimli olacaktır.

Şekil 6’da riski seven ve sevmeyen yatırımcılar için kayıtsızlık eğrilerinin pozitif eğimli olduğu görülmektedir. Fakat eğrilerin eğim derecesi yatırımcının risk-getiri tercihine göre değişmektedir. Kayıtsızlık eğrilerinde yukarıya doğru çıktığında yatırımcının doyumluk düzeyi artmaktadır.³⁶

³⁵ Milton Friedman ve L. J. Savage, “The Utility Analysis of Choices Involving Risk”, **Journal of Political Economy**, Vol.56, No.4, (August 1948), s.284.

³⁶ Jack Clark Francis ve Dongcheol Kim, **Modern Portfolio Theory Foundations, Analysis, and New Developments**, 1. Edition, New Jersey: John Wiley and Sons, (2013), ss.35-36.

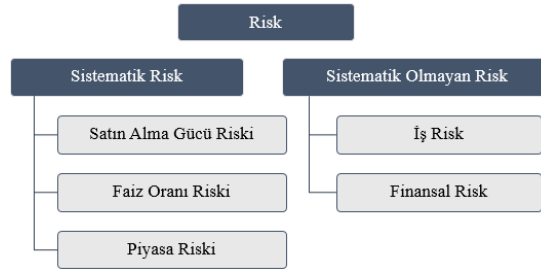


Şekil 6: Kayıtsızlık Eğrileri

Kaynak: Jack Clark Francis ve Dongcheol Kim, **Modern Portfolio Theory Foundations, Analysis, and New Developments**, 1. Edition, New Jersey: John Wiley and Sons, 2013, s.35.

1.6. RİSKİN KAYNAKLARI

Elde bulundurulanan menkul değeler için risk, genellikle gerçekleşen getirinin beklenen getiriden daha düşük olma olasılığı olarak ifade edilmektedir. Finansal varlıkların fiyatlarındaki ya da getirilerindeki değışim kurum dışı kontrol edilemeyen kaynaklardan olabileceği gibi kontrol edilebilen kurumsal kaynaklardan da olabilmektedir. Kontrol edilemeyen kaynaklar “*sistematik risk*”, kontrol edilebilen kaynaklar ise “*sistematik olmayan risk*” olarak ifade edilmektedir. Şekil 7’de toplam riskin kaynakları birarada gösterilmiştir.



Şekil 7: Toplam Riskin Kaynakları

1.6.1. Sistematik Risk

1.6.1.2. Piyasa Riski

Hisse piyasasında fiyatlar düşerken kurum kazançlarının yükselmesi sık karşılaşılan bir durum değildir. Kazançlar değışmese bile hisse fiyatları kısa bir zaman zarfında yüksek dalgalanmalar gösterebilmektedir. Bu durum yatırımcıların hisse alım-

satım davranışlarını değiştirebilmektedir. Özellikle hisse piyasalarındaki ani fiyat değişiklikleri yatırımcılar tarafından “*market (piyasa) riski*” olarak algılanmaktadır.

1.6.1.3. Faiz Oranı Riski

Faiz oranı riski, vadeli piyasa değerinin ve vadeli gelirlerin büyüklüğünün faiz oranlarındaki dalgalanmalar sonucunda oluşan belirsizlik ile ilişkilendirilmesidir. Faiz oranlarının yükselmesi finansal varlıkların fiyatlarını düşürmektedir. Bununla birlikte faiz oranlarındaki dalgalanmalar ödünç alan ve ödünç veren yatırımcıların nakit akışlarında düzensizliğe neden olabilmektedir.

1.6.1.4. Satın Alım Gücü Riski

Fiyatlar genel seviyesinin sürekli düşmesi *deflasyon*, sürekli yükselmesi ise *enflasyon* olarak ifade edilmektedir. Genellikle fiyatlar genel seviyesindeki yükselişler hızlı olurken, düşüşler ise daha yavaş (*rijit*) olmaktadır. Hem deflasyon hem de enflasyon satın alım gücü riski ile ilişkilendirilmektedir. Enflasyonist dönemlerde yatırımcıların satın alma gücü düşerken, deflasyonist dönemlerde kurum kazançlarında azalmalar olmaktadır.

1.6.2. Sistemik Olmayan Risk

1.6.2.1. İş Riski

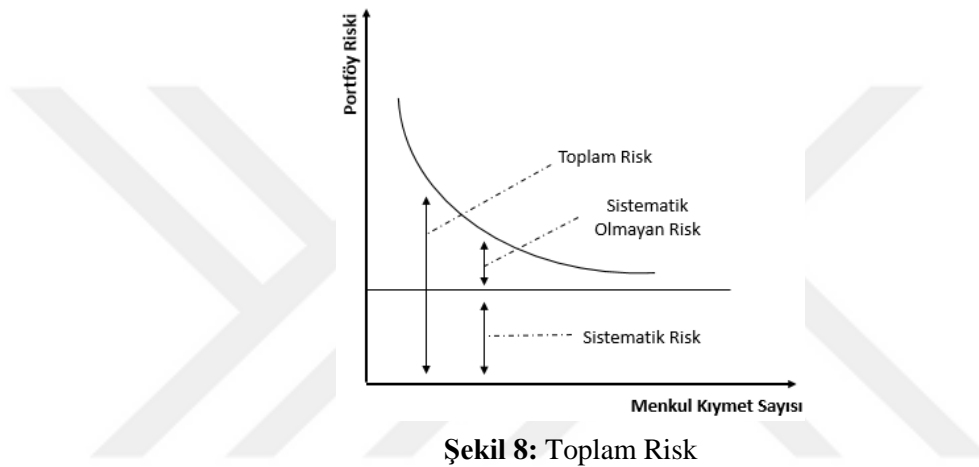
İş riski, genel olarak içsel ve dışsal iş riski olmak üzere iki temel başlıkta toplanabilmektedir. İçsel iş riski, kurumun operasyonlarının etkin bir şekilde yönetilip yönetilmediğini ifade ederken, dışsal iş riski kurum operasyonlarının yönetilmesinde kurumun kontrolü dışında olan koşulları ifade etmektedir.

1.6.2.2. Finansal Risk

Finansal risk, genellikle kurumun finansal aktivitelerini nasıl finanse ettiğiyle ilişkilendirilmektedir. Finansal risk çoğu zaman kurumun sermaye (*kaynak*) yapısının incelenmesiyle ölçülebilmektedir. Sermaye yapısında bulunan ödünç para ya da borç, kurum için düzenli ödeme akışı oluşturacaktır. Yabancı kaynakların sermaye yapısındaki

ağırlığının artması, kurumun ileriye dönük borçlarının zamanında ödenmesinde sorunlar oluşturabilmektedir.³⁷

Portföy teorisinde menkul kıymet çeşitlendirmesi ile portföyün sahip olduğu risk arasında bir ilişki olduğu varsayılmaktadır. Sistemik risk düşürülemezken, sistemik olmayan risk portföy çeşitlendirmesi ile düşürülebilir, hatta iyi bir çeşitlendirme ile tamamen ortadan kaldırılıp sistemik risk düzeyine kadar indirilebilir. Şekil 8’de toplam riskin sistemik risk düzeyine kadar indirilebileceği grafik yardımıyla gösterilmiştir.³⁸



Kaynak: Eddie McLaney, **Business Finance**, 8. Edition, England: Pearson Education, (2009), s.188.

1.6. GELENEKSEL PORTFÖY YÖNETİMİ

Portföy yönetim teorisinde iki temel yaklaşım türü bulunmaktadır. Bunlardan birincisi *Geleneksel Portföy Yaklaşımı*, ikincisi ise Markowitz’in 1952 yılında yapmış olduğu çalışmasını temel alan *Modern Portföy Yaklaşımı*’dır.

Geleneksel portföy yönetimi bilimsel tekniklerden ziyade bir sanat olarak görülmekte, matematiksel veya istatistiksel uygulamalara dayanmamaktadır. Portföy yönetimine esas olan finansal varlıkların yönetimi kişiden kişiye farklılık göstermektedir.

³⁷ Rai Technology University, **Security Analysis and Portfolio Management**, 1. Edition, Bangalore: Rai University, ss.56-58.

³⁸ Eddie McLaney, **Business Finance**, 8. Edition, England: Pearson Education, (2009), ss.187-188.

Bu sebeple geleneksel yaklaşım portföy yönetimini subjektif kararlara, portföy yöneticisinin sezgilerine ve deneyimine dayandırmaktadır.

Geleneksel portföy yönetim yaklaşımı, yatırımcıların fayda maksimizasyonunu hedeflemektedir. Burada portföye dahil edilen finansal varlıkların aynı yönde hareket etmeyeceği varsayıldığından portföye dahil edilen farklı finansal varlık adedi ne kadar çok olursa o kadar başarılı bir portföy yaratılacak ve bu şekilde portföyün riski finansal varlıkların riskinden daha düşük olacaktır. Diğer bir ifadeyle, en iyi portföy en fazla finansal varlığa sahip olan portföydür. Buradaki finansal varlık çeşitlendirmesi *yalın çeşitlendirme* olarak ifade edilmektedir. Ayrıca geleneksel yaklaşımda bahsedilen portföy riski için herhangi bir hesaplama yöntemi önerilmemiştir. Risk algısı “*tüm yumurtalar aynı sepete konulmamalıdır*” önerisinin ötesine geçememiştir.

Geleneksel portföy yönetim yaklaşımında finansal varlıklar seçilirken dikkat edilmesi gerekenler şöyle sıralanabilir:

- Portföye dâhil edilen finansal varlıklar farklı sektörlerden seçilmelidir,
- Aynı vade yapısına sahip sabit getirili varlıkların portföydeki ağırlığı azaltılmalıdır,
- Portföye dâhil edilen finansal varlık sayısı arttırılmalıdır.³⁹

Geleneksel portföy yönetimi yaklaşımının önemli savunucularından olan J. R. Hicks, 1935 yılında *Para Teorisi'nin Basitleştirilmesi için Bir Öneri* adlı makalesinde, risk kavramını öne çıkarmıştır.⁴⁰ Makalede faiz oranlarının pozitif kaldığı sürece, parayı elde tutmak yerine sermaye mallarına yatırım yapılmasının getiri sağlayacağı vurgulanmıştır. Bununla birlikte Hicks, kişilerin parayı ellerinde tutma nedenini üç ana faktörde toplamıştır. Bunlar;

- Gelecekte yapılacak ödemeler,
- Yatırım maliyetleri,

³⁹ I. Karan, “Optimal Portföy Seçimi ve İMKB Tekstil Sektörü Firmalarına Ait Bir Uygulama” (**Yüksek Lisans Tezi**, Celal Bayar Üniversitesi SBE, 2007), s.9. Aktaran: Okan Garip, “Optimum Portföy Seçimi ve BİST’te İşlem Gören Firmalar Üzerinde Bir Araştırma”, (**Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi**, Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi SBE, 2014). s.38.

⁴⁰ Umut Uyar, Sinem Güler Kangallı, s.184.

- Yatırımdan sağlanacak beklenen getiridir.

Hicks, para talebini etkileyen faktörleri ise aşağıdaki gibi sıralamıştır:

- Beklenen faiz oranı,
- Yatırım maliyetleri,
- Yatırımdan sağlanacak beklenen getiri,
- Sermayedeki (*zenginlikteki*) artış ve azalışlar.

Paranın elde tutulmasını ve talebini etkileyen faktörler yukarıdaki gibi sıralanırken, risk unsuru iki farklı şekilde ortaya çıkmaktadır. Bunlar, yatırımın süresi ve yatırımdan elde edilecek beklenen net getiridir. Hicks bu riskin düşürülmesi için *Büyük Sayılar Kanunu*'ndan yola çıkıp, aynı sermaye miktarını farklı risk seviyelerine sahip yatırımlara yönlendirerek riskin çok düşük seviyelere indirgenebileceğini belirtmiştir. Böylece sermaye küçük oranlara bölünüp, riskin geniş bir tabana yayılmasıyla, yatırımcılar tek ve büyük bir yatırım riskinden kaçınmış olacaklardır.⁴¹

Hicks makalesinde istatistiksel anlamda sadece ortalama getiriyi kullanmış olup, riskin nasıl dağıtılacağına dair herhangi bir kantitatif yöntemden bahsetmemiştir.

Geleneksel yaklaşıma katkıda bulunan bir diğer isim ise 1938 yılında "*Para ve Varlık Teorisi*" adlı çalışmasını yayımlayan Marschak olmuştur. Markowitz'in tez danışmanı olan Marschak, Hicks'in çalışmasını bir adım ileri götürerek, riskin ölçülmesinde faktörler arasındaki korelasyon ve standart sapma gibi ölçülerin kullanılabilirliğini ifade etmiştir. Bu fikriyle *Sermaye Varlıklarını Fiyatlandırma Modelinin (CAPM)* temellerini atmıştır.

Marschak çalışmasında varlık getirilerinden sağlanan fayda fonksiyonunu,

$$U(x, y, \dots) \quad (1.6.1)$$

⁴¹ J. R. Hicks, "A Suggestion for Simplifying the Theory of Money", *Economica*, Vol.2, No.5, (February 1935), ss.5-9.

olarak göstermiştir. (1.6.1)'de gösterilen fonksiyonda x, y, \dots getirileri temsil etmektedir.⁴² Bu varlıklara ait değişim koşulu (*transformation condition*) ve denge denklemi (1.6.2) ve (1.6.3)'de gösterilmiştir.⁴³ (1.6.2) ve (1.6.3)'de gösterilen denklemlerde a, b, \dots varlıkları; p, q, \dots varlık fiyatlarını temsil etmektedir.

$$T(x, y, \dots; a, b, \dots) = 0 \quad (1.6.2)$$

$$p(a - a_0) + q(b - b_0) + \dots = 0 \quad (1.6.3)$$

Değişim koşulu, ulaşılabilen varlık kümesi içerisindeki kişisel yatırımın beklenti planını ifade etmektedir. Maksimum getiriyi elde edebilmek için fayda fonksiyonunun, değişim koşulunun ve denge denkleminin diferansiyelleri alınmıştır.

$$U_x dx + U_y dy + \dots = 0 \quad (1.6.4)$$

$$T_x dx + T_y dy + \dots + T_a da + T_b db = 0 \quad (1.6.5)$$

$$p da + q db + \dots = 0 \quad (1.6.6)$$

Yapılan hesaplama sonucunda getiri-ikame denklemine,

$$U_x / U_y = T_x / T_y \quad (1.6.7)$$

ve varlık-ikame denklemine,

$$p / q = T_a / T_b \quad (1.6.8)$$

ulaşılmıştır.⁴⁴ Denklem (1.6.7)'deki eşitliğin sol tarafı yatırımcının x ve y getirileri arasındaki tercihini gösterirken, eşitliğin sağ tarafı ise değişim oranı olarak adlandırılmaktadır.

⁴² J. Marschak, "Money and the Theory of Assets", *Econometrica*, Vol.6, No.4, (October 1938), s.313.

⁴³ J. Marschak, "Money and the Theory of Assets", *Econometrica*, Vol.6, No.4, (October 1938), s.315.

⁴⁴ J. Marschak, "Money and the Theory of Assets", *Econometrica*, Vol.6, No.4, (October 1938), s.315.

(1.6.7) ve (1.6.8)'deki denklemler kullanılarak (1.6.9)'da yer alan marjinal verimlilik denklemi,

$$\frac{p}{q} = \frac{T_a}{T_b} = \frac{U_x \frac{dx}{da} + U_y \frac{dy}{da} + \dots}{U_x \frac{dx}{db} + U_y \frac{dy}{db} + \dots} \quad (1.6.9)$$

elde edilir.⁴⁵ Marschak bu çalışmasında genel anlamda varlığın market fiyatı ile getirilerin tercih oranları arasındaki ilişkinin basit bir ilişki olmadığına dikkat çekmiştir. Ayrıca borç alma-verme, nakdi elde tutma ya da yatırıma yönlendirmeyi etkileyen iki faktörden bahsetmiştir. Bu faktörleri ise faiz oranı ve enflasyon olarak sıralamıştır.

John B. Williams 1938 yılında “*Yatırım Değeri Teorisi*” kitabında temettülerin ve faiz oranlarının gelecek değerlerinin belirsiz olduğunu ifade etmiştir. Varlıkların birçok mümkün değerinin olasılığı oluşturduğu ve bu değerlerin ortalamasının, varlığın değeri olarak atanabileceğini belirtmiştir. Yatırımcıların menkul kıymetler için bir risk primi belirlediğini ve bu risk primi üzerinden hareket ettiklerini varsaymıştır. Büyük sayılar kanununun uygulanması ile portföyün gerçek değerinin ve varyansının tahmininin neredeyse aynı olacağını belirtmiştir. Tüm bu çalışmalar ışığında Williams yatırımcıların tercihlerini portföy teorisi ile ortak bir zeminde buluşturmayı başarmıştır.⁴⁶

Leavens'in 1945'deki çalışmasında yalnızca tek bir sektörde faaliyette bulunan şirketlerin menkul kıymetlerine yatırım yapmanın, o sektörde gerçekleşebilecek olası kötü senaryolara karşı yatırımcıların etkilenme derecesini yani riskini arttıracaklarını vurgulamıştır. Sektörel risklerin azaltılması için çeşitlendirme yapılması gerektiğini vurgulamıştır.⁴⁷

⁴⁵ J. Marschak, “Money and the Theory of Assets”, **Econometrica**, Vol.6, No.4, (October 1938), s.316.

⁴⁶ Harry M. Markowitz, “The Early History of Portfolio Theory: 1600-1960”, **Financial Analysts Journal**, Vol.55, No.4, (July-August 1999), s.13.

⁴⁷ Dickson H. Leavens, “Diversification Of Investments”, **Trust and Estates**, Vol.80, No.5, (May 1945), s.473.

1.7. MODERN PORTFÖY YÖNETİMİ

1950’li yıllara kadar, portföyde yer alan finansal varlıkların getirileri arasındaki ilişki göz ardı edilmiş ve portföydeki finansal varlıkların sayısının artırılması ile riskin azaltılabileceği düşünülmüştür.

1952’de Harry Markowitz yayınlamış olduğu *Portföy Seçimi* adlı makalesiyle modern portföy teorisinin temellerini atarak, etkin ve etkin olmayan portföyler üzerinde çalışmıştır. Etkin ortalama varyans setini oluşturarak “*etkin sınır - efficient frontier*” ifadesini de ekonomi yazınına kazandırmıştır. Analizini yatırımların negatif olmama ve bütçe kısıtı varsayımları altında üç ve dört menkul kıymet kullanarak gerçekleştirmiştir. Bu makalesinde etkin portföy kümesinin parçalı doğrusal ve etkin ortalama varyans bileşenlerinin de parçalı parabolik olduğunu göstermiştir.⁴⁸

Modern portföy yönetiminin varsayımları aşağıdaki gibi sıralanmıştır:

1. Yatırımcılar taşıdıkları pozisyonlar süresince beklenen getirilerin olasılık dağılımlarını göz önünde bulundurarak her bir yatırım alternatifini değerlendirirler,
2. Yatırımcılar tek dönemli beklenen faydalarını maksimize ederler ve yatırımcıların fayda eğrileri, sermayenin (*zenginliğin*) azalan marjinal faydasını göstermektedir,
3. Yatırımcılar beklenen getirilerin değişirliği üzerinden yola çıkarak portföy riskini tahmin etmeye çalışırlar,
4. Yatırımcılar yatırım kararlarını alırken sadece beklenen getiriye ve riski göz önünde bulundurlar. Bu sebeple yatırımcıların fayda eğrileri beklenen getiri ve varyansın (ya da standart sapmanın) bir fonksiyonudur.
5. Belirli bir risk düzeyinde yatırımcılar yüksek getiriye daha düşük getiriye tercih ederler. Benzer şekilde belirli bir getiri düzeyinde yatırımcılar düşük riski daha yüksek riske tercih ederler.⁴⁹

⁴⁸ Harry M. Markowitz, “The Early History of Portfolio Theory: 1600-1960”, **Financial Analysts Journal**, Vol.55, No.4, (July-August 1999), s. 5.

⁴⁹ Frank K. Reilly ve Keith C. Brown, **Investment Analysis and Portfolio Management**, 7. Edition, South-Western College Pub, 2002, s.211.

Markowitz (1952) çalışmasıyla portföy seçiminin genel olarak iki kısımdan oluştuğunu belirtmiştir. Birinci aşamanın gözlem ve tecrübe ile başlayıp, varlıkların gelecek performansının beklenen tahmini değeriyle bittiğini; ikinci aşamanın ise varlıkların gelecek performansının beklenen tahminiyle başlayıp, portföy seçimiyle sonlandığını söylemiştir. Bu bağlamda Markowitz bu aşamalardan ikincisiyle ilgilenmektedir.

Markowitz, beklenen getiri maksimizasyonunun yatırımcılar tarafından istenen bir durum olarak belirtirken, varyansı istenmeyen bir durum olarak belirtmiştir.

Markowitz beklenen portföy getirisinin hesaplanabilmesi için,

$$R = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N d_{it} r_{it} X_i = \sum_{i=1}^N X_i \left(\sum_{t=1}^{\infty} d_{it} r_{it} \right) \quad (1.7.0.0.1)$$

$$R_i = \sum_{t=1}^{\infty} d_{it} r_{it} \quad (1.7.0.0.2)$$

denklemlerini paylaşmıştır.⁵⁰ N , varlık sayısını; r_{it} , i varlığının t dönemine ait beklenen getirisini; d_{it} , r_{it} 'yi bugünkü değere iskontoalayacak olan oranı; X_i , i varlığına yapılan yatırım miktarını ve R_i , i varlığına ait getiriye göstermektedir.

Burada kısa pozisyonlar (*satış*) hariç tutulduğundan tüm varlıklar için $X_i \geq 0$ olacaktır. $R = \sum X_i R_i$ denkleminde R_i , X_i 'den bağımsızdır. $\sum X_i = 1$ ve tüm varlıklar için $X_i \geq 0$ olduğundan, R_i 'nin ağırlıklı ortalaması R olacaktır.

Markowitz rastsal bir değişkene ait beklenen getiri ve varyansın hesaplanmasında aşağıdaki denklemleri kullanmıştır.

Y 'nin rastsal bir değişken ve y_1, y_2, \dots, y_N değerlerinin Y 'nin alabileceği sayılabilir değerler olduğunu varsaymıştır. p_1 ise y_1 'e ait olasılık değeri olarak kabul edildiğinde Y 'nin beklenen değeri ve varyansı,

⁵⁰ Harry M. Markowitz, "Portfolio Selection", **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, (March 1952), s.78.

$$E = p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_N y_N \quad (1.7.0.0.3)$$

$$V = p_1 (y_1 - E)^2 + p_2 (y_2 - E)^2 + \dots + p_N (y_N - E)^2 \quad (1.7.0.0.4)$$

yardımıyla hesaplanmaktadır.⁵¹ Y 'nin standart sapması varyansının karekökü alınarak hesaplanabilmektedir ($\sigma = \sqrt{Y}$). Değişim katsayısı ise σ/E olacaktır.

R_1, R_2, \dots, R_n değerlerinin rastsal değişken olarak tanımlandığında ve R, R_i 'lerin doğrusal bileşenleri olduğunda,

$$R = a_1 R_1 + a_2 R_2 + \dots + a_n R_n \quad (1.7.0.0.5)$$

denklemleri oluşturulabilmektedir. R_i ve R_j arasındaki kovaryans (1.7.0.0.6)'deki denklem yardımıyla hesaplanabilmektedir. N tane varlık analizinde N getiri, N varyans ve $N(N - 1)/2$ kovaryans olacaktır.

$$\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \quad (1.7.0.0.6)$$

Yukarıdaki bilgiler kullanıldığında toplama ait varyans denklemi (1.7.0.0.7) veya (1.7.0.0.8)'deki gibi olmaktadır.⁵²

$$V(R) = \sum_{i=1}^N a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j>1}^N a_i a_j \sigma_{ij} \quad (1.7.0.0.7)$$

$$V(R) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \sigma_{ij} \quad (1.7.0.0.8)$$

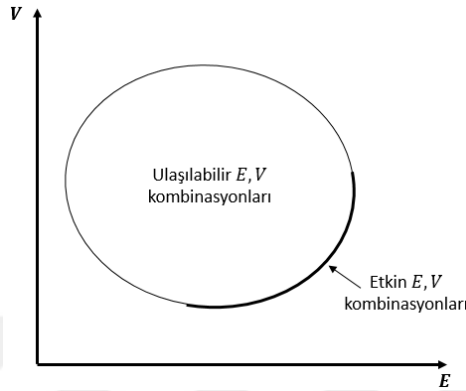
R_i 'nin i 'nci varlığa ait getiri, μ_i 'nin R_i 'ye ait ortalama, σ_{ij} 'nin R_i ve R_j arasındaki kovaryans ve X_i 'nin i varlığının portföy içindeki oranı olarak tanımlandığında portföy getirisi,

⁵¹ Harry M. Markowitz, "Portfolio Selection", **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, (March 1952), s.80.

⁵² Harry M. Markowitz, "Portfolio Selection", **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, (March 1952), s.80.

$$R = \sum R_i X_i \quad \text{veya} \quad E = \sum_{i=1}^N X_i \mu_i \quad (1.7.0.0.9)$$

olarak hesaplanmaktadır. Markowitz Şekil 9’da portföylere ait beklenen getiri ve varyans bileşenlerini geometriksel bir şekilde ifade etmiştir. Yatırımcılar etkin portföy setinde yer alan portföylere yatırım yapmak isteyecektir.⁵³



Şekil 9: Etkin E-V Bileşenleri

Kaynak: Harry M. Markowitz, “Portfolio Selection”, **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, (March 1952), s.82.

Üç varlık durumunda model,

$$E = \sum_{i=1}^3 X_i \mu_i \quad (1.7.0.1.0)$$

$$V(R) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i a_j \sigma_{ij} \quad (1.7.0.1.1)$$

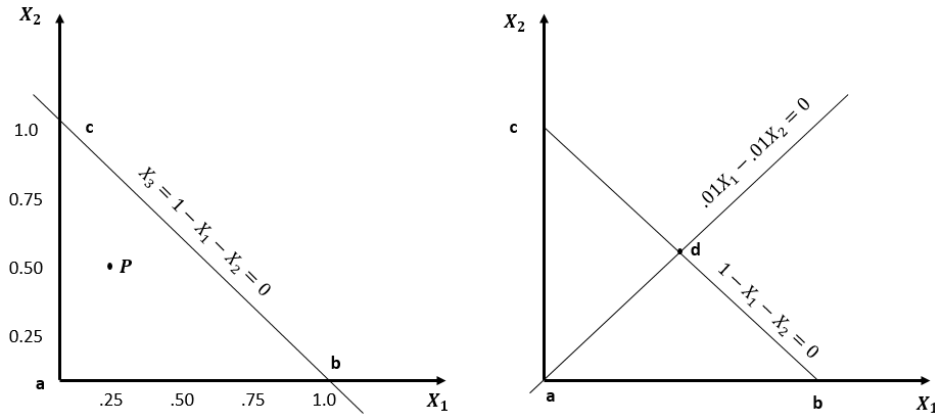
$$\sum_{i=1}^3 X_i = 1 \quad (1.7.0.1.2)$$

$$X_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (1.7.0.1.3)$$

⁵³ Harry M. Markowitz, “Portfolio Selection”, **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, (March 1952), s.81.

$$X_3 = 1 - X_1 - X_2 \quad (1.7.0.1.4)$$

şeklinde yazılmaktadır. ⁵⁴ (1.7.0.1.0) ve (1.7.0.1.1)'de yer alan denklemler sırasıyla portföyün getirisini ve varyansını göstermektedir. (1.7.0.1.2), (1.7.0.1.3) ve (1.7.0.1.4)'de yer alan denklemler kullanılarak kısıtlara uygun portföyün geometrik gösterimi Şekil 10'da gösterilmiştir. \overline{abc} üçgeni koşullara uygun oluşturulmuş portföy bileşimlerinin sınırlarını göstermektedir.



Şekil 10: Portföylerin Geometrik Gösterimi ve Kısıtlara Uygun Portföylere Ait Standart Olmayan Set

Kaynak: Harry M. Markowitz (hızl.), **Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments**, New York: John Wiley and Sons, 1959, s.131.

(1.7.0.1.4)'daki denklem (1.7.0.1.0) ve (1.7.0.1.1)'de yerlerine yazıldığında, X_1 ve X_2 nin fonksiyonu olarak E ve V elde edilir.

$$E = \mu_3 + X_1(\mu_1 - \mu_3) + X_2(\mu_2 - \mu_3) \quad (1.7.0.1.5)$$

$$E = E(X_1, X_2) \quad (1.7.0.1.6)$$

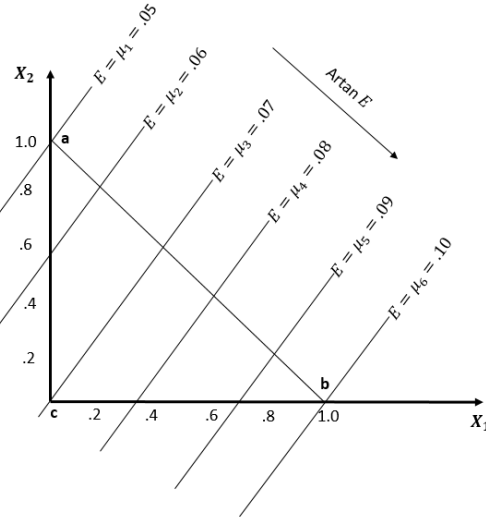
$$V = V(X_1, X_2) \quad (1.7.0.1.7)$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0, \quad 1 - X_1 - X_2 \geq 0 \quad (1.7.0.1.8)$$

⁵⁴ Harry M. Markowitz, "Portfolio Selection", **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, (March 1952), s.83.

(1.7.0.1.6), (1.7.0.1.7), (1.7.0.1.8)'de yer alan ifadeler, iki boyutlu geometride (*uzayda*) çalışılmasına olanak sağlamaktadır.⁵⁵

(1.7.0.1.5) denkleminde gösterilen portföyün beklenen getirisinin geometrik gösterimi Şekil 11'deki gibidir.



Şekil 11: Eş-Ortalama Doğruları

Kaynak: Harry M. Markowitz (hzl.), **Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments**, New York: John Wiley and Sons, 1959, s.134.

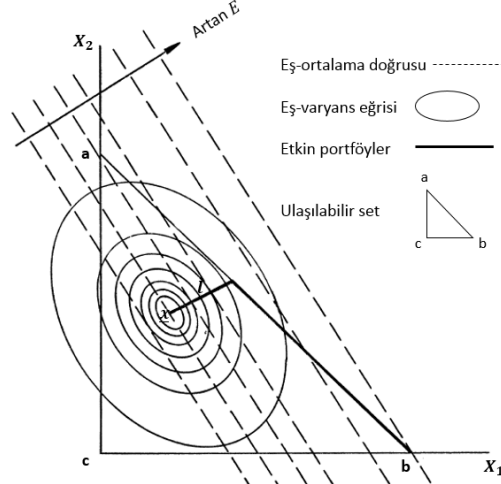
$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ olması durumunda, tüm portföylerin aynı beklenen getiriye sahip olacaktır.⁵⁶ X_1 ve X_2 için ulaşılabilir bileşenleri \overline{abc} üçgeni içerisinde yer almaktadır. X_2 ekseninin solundaki herhangi bir nokta (portföy) $X_1 \geq 0$ koşulu, X_1 ekseninin altında kalan herhangi bir nokta $X_2 \geq 0$ koşulu ve $(1 - X_1 - X_2 = 0)$ doğrusu üzerinde kalan herhangi bir nokta için $(X_3 = 1 - X_1 - X_2 \geq 0)$ koşulu sağlanamayacağından ulaşılabilir olmayacaktır.

Şekil 12'de “eş-ortalama doğrusu” ve “eş-varyans eğrisi” görülmektedir. Eş-ortalama doğrusu belirli bir getiri düzeyine sahip tüm portföy setini temsil etmektedir. Yine aynı şekilde eş-varyans eğrisi belirli bir varyans düzeyine sahip tüm portföy setini

⁵⁵ Harry M. Markowitz, “Portfolio Selection”, **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, (March 1952), s.83.

⁵⁶ Harry M. Markowitz (hzl.), **Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments**, New York: John Wiley and Sons, 1959, ss.131-135.

temsil etmektedir. E ve V denklemleri eş-ortalama doğrusunu ve eş-varyans eğrisini nasıl şekilleneceğini anlatmaktadır.



Şekil 12: Eş-Ortalama Doğruları ve Eş-Varyans Eğrileri

Kaynak: Harry M. Markowitz, “Portfolio Selection”, **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, (March 1952), s.85.

Eş-varyans eğrileri aynı merkeze sahip (*konsantrik*) elipsler olarak ifade edilmiştir. $\mu_2 \neq \mu_3$ olması durumunda (1.7.0.1.5) denklemi (1.7.0.1.9) ve (1.7.0.2.0)’daki gibi yazılabilmektedir.

$$X_2 = a + bX_1 \quad (1.7.0.1.9)$$

$$X_2 = \frac{E - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} - \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} X_1 \quad (1.7.0.2.0)$$

$E = E_0$ bağıntılı eş-ortalama doğrusunda $-(\mu_1 - \mu_3)/(\mu_2 - \mu_3)$ ifadesi eğim olurken, kesim noktası $(E_0 - \mu_3)/(\mu_2 - \mu_3)$ olmaktadır.⁵⁷ Denklemden anlaşıldığı üzere E değerinin değişmesi halinde kesim noktası değişirken, eğimin sabit kaldığı görülmektedir. Bu da eş-ortalama doğrularının birbirine paralel olacağını bir göstergesidir.

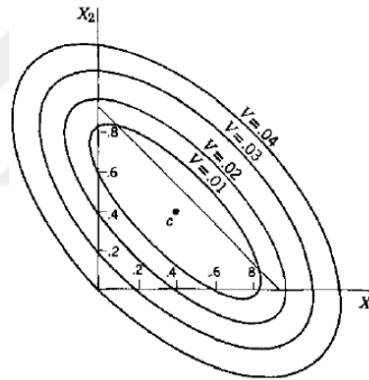
⁵⁷ Harry M. Markowitz, “Portfolio Selection”, **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, (March 1952), s.84.

Üç varlıktan oluşan bir portföye ait eş-varyans eğrileri (1.7.0.2.1) ve (1.7.0.2.2)'de yer alan denklemler yardımıyla hesaplanabilmektedir.

$$V = X_1^2 \sigma_{11} + X_2^2 \sigma_{22} + X_3^2 \sigma_{33} + 2X_1 X_2 \sigma_{12} + 2X_1 X_3 \sigma_{13} + 2X_2 X_3 \sigma_{23} \quad (1.7.0.2.1)$$

X_3 yerine $(1 - X_1 - X_2)$ yazıldığında (1.7.0.2.1)'deki denklem (1.7.0.2.2)'deki gibi olmaktadır.⁵⁸

$$\begin{aligned} V &= X_1^2 \sigma_{11} + X_2^2 \sigma_{22} + \sigma_{33} (1 - X_1 - X_2)^2 + 2X_1 X_2 \sigma_{12} \\ &\quad + 2\sigma_{13} X_1 (1 - X_1 - X_2) + 2\sigma_{23} X_2 (1 - X_1 - X_2) \\ &= X_1^2 [\sigma_{11} - 2\sigma_{13} + \sigma_{33}] + X_2^2 [\sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33}] \\ &\quad + 2X_1 X_2 [\sigma_{12} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \sigma_{33}] \\ &\quad + 2X_1 [\sigma_{13} - \sigma_{33}] + 2X_2 [\sigma_{23} - \sigma_{33}] + \sigma_{33} \end{aligned} \quad (1.7.0.2.2)$$

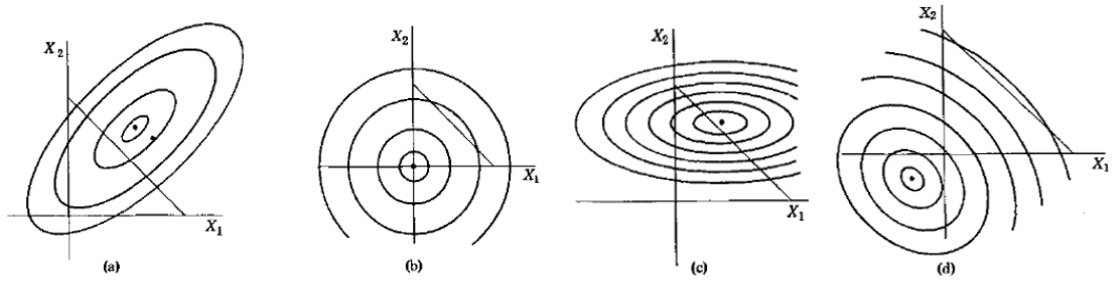


Şekil 13: Eş-Varyans Eğrileri

Kaynak: Harry M. Markowitz (hızl.), **Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments**, New York: John Wiley and Sons, 1959, s.136.

Şekil 12'de X noktası eş-varyans eğrilerinin (elipslerinin) merkezini, E ve V sembolleri ise sırasıyla beklenen getiri ve varyansı temsil etmektedir. Şekil 12'de görüldüğü üzere X merkezinden uzaklaştıkça varyansın arttığı görülmektedir. Yani X merkezine yakın olan eş-varyans eğrisi C_1 , bir sonraki eğri C_2 olarak tanımlandığında C_2 eğrisinin varyansı C_1 eğrisinin varyansından daha büyük olacaktır.

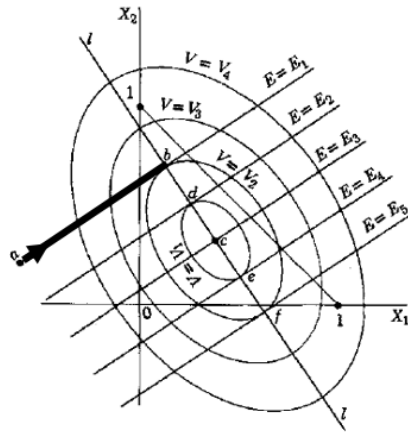
⁵⁸ Harry M. Markowitz (hızl.), **Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments**, New York: John Wiley and Sons, 1959, s.135.



Şekil 14: Farklı Eş-Varyans Sistemleri

Kaynak: Harry M. Markowitz (hızl.), **Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments**, New York: John Wiley and Sons, 1959, s.137.

Ayrıca Şekil 12’de görüldüğü üzere aynı beklenen getiri düzeyinde X noktasından (*portföyünden*) daha düşük varyansa sahip bir portföy ya da aynı varyans düzeyinde daha büyük beklenen getiriye sahip bir portföy bulunmamaktadır. X noktasından l doğrusu boyunca gidildiğinde her bir nokta için $E(X_1, X_2) = E$ eşitliğinde V minimum olacaktır. Bu nedenle l “*kritik doğru*” olarak adlandırılmaktadır. l ’nin diğer yönünde hareket edilmesi durumunda V ’nin artmasına karşın E ’nin azaldığı görülmektedir. X noktasından kritik doğrunun ulaşılabilir seti kestiğini noktaya kadar olan kısım etkin setin (*sınırın*) bir parçasıdır. Etkin setin diğer kalan kısmını ise koyu renkli \overline{ab} doğrusu göstermektedir.⁵⁹



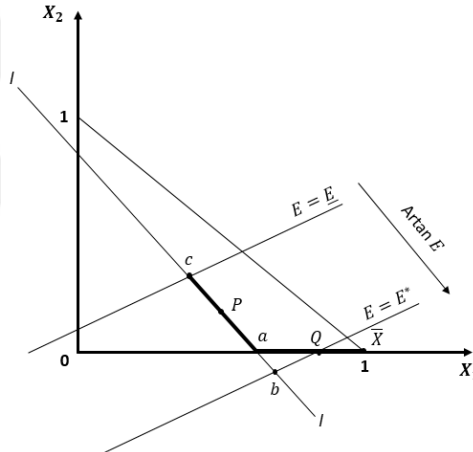
Şekil 15: Kritik Doğru

Kaynak: Harry M. Markowitz (hızl.), **Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments**, New York: John Wiley and Sons, 1959, s.138.

⁵⁹ Harry M. Markowitz, “Portfolio Selection”, **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, (March 1952), s.85.

Şekil 15’de üç varlık için “*kritik doğru*” gösterilmiştir. a noktasından ok yönünde $E = E_1$ eş-ortalama doğrusu üzerinde hareket edildiğinde sırasıyla $V = V_4, V = V_3, V = V_2$ eş-varyans eğrilerinden geçilmiştir. Bu hareket neticesinde getirinin sabit, varyansın ise önce düştüğü daha sonrasında arttığı görülmektedir. b noktası $E = E_1$ eş-ortalama doğrusu üzerinde en düşük varyansa sahip olan noktayı temsil etmektedir. Böylelikle V_2 eş-varyans eğrisi üzerindeki b noktası, E_1 doğrusunun *tanjantı* olmaktadır. Bu çıkarımdan hareketle d, c, e ve f noktaları için de bu durum geçerli olmaktadır.

ll doğrusu eş-ortalama doğruları ile eş-varyans eğrilerinin tüm *tanjant* noktalarının birleştirilmesiyle elde edilen “*kritik doğruyu*” temsil etmektedir. Diğer bir ifadeyle, beklenen getiri düzeyinde minimum getiriye sahip noktaların birleşimini gösteren doğrudur.⁶⁰



Şekil 16: Etkin Portföy Seti

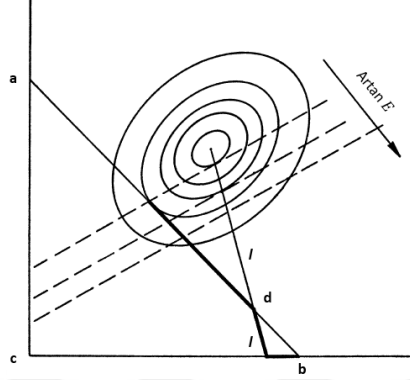
Kaynak: Harry M. Markowitz (hızl.), **Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments**, New York: John Wiley and Sons, 1959, s.140.

Şekil 16’da üç varlık ile yapılan analize ait bilgiler aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- c noktası tüm portföyler arasında minimum varyansa sahip portföyü temsil etmektedir,
- \bar{X} noktası tüm portföyler arasında maksimum getiriye sahip portföyü temsil etmektedir,
- ll kritik doğrusu yönünde E artmaktadır,

⁶⁰ Harry M. Markowitz (hızl.), **Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments**, New York: John Wiley and Sons, 1959, ss.138-139.

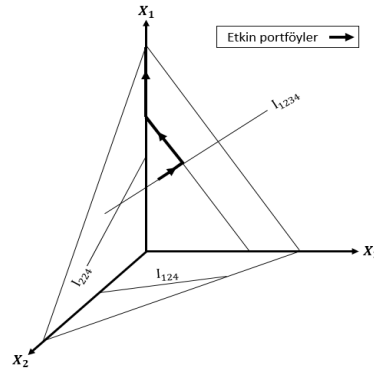
- P ulaşılabilir bir portföyü temsil etmektedir,
- b ulaşılabilir bir portföy değildir,
- $Q, E = E^*$ getiri düzeyinde minimum varyansa sahip ulaşılabilir portföyü temsil etmektedir.⁶¹



Şekil 17: Kritik Doğru

Kaynak: Harry M. Markowitz, "Portfolio Selection", **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, (March 1952), s.86.

Şekil 17'de ise X noktasının ulaşılabilir set dışında olduğu ve kritik doğrunun ulaşılabilir bölgeyi kestiği görülmektedir. Koyu renkli kısım tekrardan etkin portföy bileşimlerini göstermektedir.⁶² Üç varlığa ait gösterim ise Şekil 18'deki gibidir.



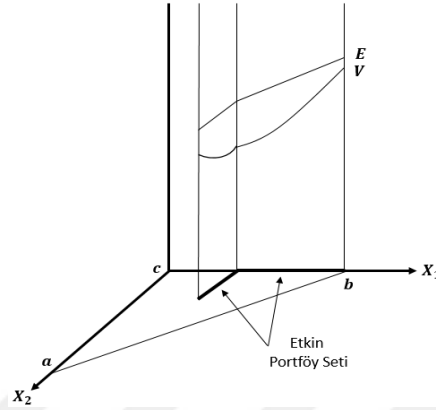
Şekil 18: Üç Varlıktan Oluşan Etkin Portföyler

Kaynak: Harry M. Markowitz, "Portfolio Selection", **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, (March 1952), s.87.

⁶¹ Harry M. Markowitz (hızl.), **Portfolio Selection Efficient Diversification of Investments**, New York: John Wiley and Sons, 1959, ss.140-141.

⁶² Harry M. Markowitz, "Portfolio Selection", **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, (March 1952), s.85.

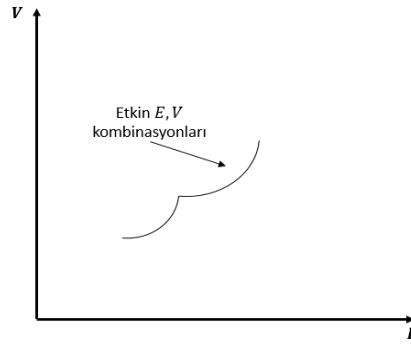
Üç varlık için beklenen getiri ($E = a_0 + a_1X_1 + a_2X_2$) bir düzlem, varyans ise ($V = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2 + b_{11}X_1^2 + b_{22}X_2^2$) bir paraboloidtir. Şekil 19'da beklenen getiri düzlemi üzerindeki etkin portföyler doğrusal, varyans ise paraboloid olarak gösterilmiştir.



Şekil 19: Etkin Portföyler

Kaynak: Harry M. Markowitz, "Portfolio Selection", **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, (March 1952), s.89.

Eğer apsis ve ordinat, beklenen getiri ve varyans olarak değiştirilirse Şekil 19'daki gösterim Şekil 20'deki gibi olacaktır.



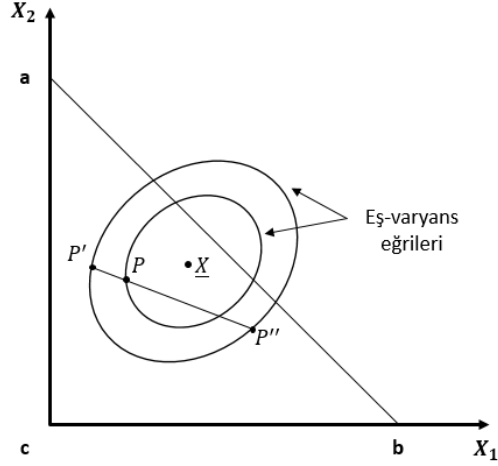
Şekil 20: Etkin E-V Bileşenleri

Kaynak: Harry M. Markowitz, "Portfolio Selection", **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, (March 1952), s.89.

Şekil 21'de ise $P' = (X'_1, X'_2)$ ve $P'' = (X''_1, X''_2)$ portföylerinden oluşturulmuş P portföyü gösterilmiştir ve P ,

$$P = \lambda P' + (1 - \lambda) P'' = [\lambda X'_1 + (1 - \lambda) X''_1, \lambda X'_2 + (1 - \lambda) X''_2] \quad (1.7.0.2.3)$$

şeklinde olacaktır. P'nin P' ve P'' portföylerine doğrusal bir şekilde bağlı olduğu görülmektedir.⁶³



Şekil 21: Eş-Varyans Eğrisi ve Portföy Bileşeni

Kaynak: Harry M. Markowitz, “Portfolio Selection”, **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, (March 1952), s.90.

Markowitz ortalama varyans modelini, ağırlık tahminlerini örnekten elde edilen ilk iki momente dayandırmaktadır. Üçüncü momentin kullanılabileceğini ama yine de en uygun portföyün ilk iki momente dayanan etkin ortalama varyans portföyü olduğunu söylemiştir. Bu durumun bazı tahmin hatalarına neden olabileceği ihtimali araştırmacılar arasında tartışma konusu olmaktadır.⁶⁴

Markowitz'in 1952 ve 1959 yıllarındaki çalışmaları karşılaştırıldığında aşağıdaki çıkarımlara ulaşılabilir.

- Markowitz (1952) ortalama-varyans yöntemini hem pozitif eğilim hem de normatif bir eğilim olarak ileri sürmüştür. Markowitz (1959) yöntemin pozitif eğiliminden bahsetmemiştir. Bunun nedeni bir hata veya unutkanlığın ötesinde Markowitz oluşturduğu yöntemi savunmak ya da feragat etmek için hazır değildi.

⁶³ Harry M. Markowitz, “Portfolio Selection”, **The Journal of Finance**, Vol.7, No.1, (March 1952), s.90.

⁶⁴ Barış Altaylıgil, “Portföy Seçimi İçin Ortalama-Varyans-Çarpıklık Modeli”, **İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi Dergisi**, Cilt.37, Sayı.2, (2008), s.66.

- Markowitz (1952) ortalama-varyans yönteminin normatif kullanımı için gerekçe sunamamış, sadece basit bir öneri sunmakla sınırlı kalmıştır. Fakat, Markowitz (1959) ortalama-varyans etkin sınırı üzerinden önceden belirlenmiş koşullar altında dikkatlice seçilmiş portföyün, yatırımcının beklenen getirisini neredeyse maksimize edeceğini tartışmıştır.
- Markowitz'in 1952 ve 1959 yıllarında yaptığı tek periyotlu ve çok periyotlu analizlerinde bir hayli farklılık gözlemlenmiştir.

Ortalama-Varyans Yönteminin Beklenen Fayda Yaklaşımı

Markowitz kuadratik $U(R)$ fonksiyonu için iki yaklaşım önermiştir. Taylor açılımları aşağıdaki gibidir.

$$Q_Z(R) \cong U(0) + U'(0)R + 0.5U''(0)R^2 \quad (1.7.0.2.4)$$

$$Q_E(R) \cong U(E) + U'(E)(R - E) + 0.5U''(E)(R - E)^2 \quad (1.7.0.2.5)$$

$$f_Z(E, V) = E[Q_Z(r)] = U(0) + U'(0)E + 0.5U''(0)(E^2 + V) \quad (1.7.0.2.6)$$

$$f_E(E, V) = E[Q_E(R)] = U(E) + 0.5U''(E)V \quad (1.7.0.2.7)$$

Örneğin, $U = \ln(1 + R)$ olduğunda f_Z ve f_E sırasıyla,

$$f_Z^L(E, V) = E - (E^2 + V) / 2 \quad (1.7.0.2.8)$$

$$f_E^L(E, V) = \ln(1 + E) - V / [2(1 + E)^2] \quad (1.7.0.2.9)$$

olacaktır. Geometrik ortalamanın kullanılması $\{E[\ln(1 + R)]\}$ ortalama varyans yöntemini *robust* bir yapıya çevirecektir.⁶⁵

⁶⁵ Harry M. Markowitz, "Portfolio Theory: As I Still See It", **Annual Reviews**, Vol.2, (2010), s.3.

Fayda fonksiyonunun kuadratik bir yapıda olması diğer bir ifadeyle fayda fonksiyonunun neredeyse parabol gibi gözükmesi ya da dağılımın normal dağılıma yaklaşması, elde edilecek sonuçların optimum düzeyde olmasını sağlayacaktır.⁶⁶

Markowitz makalesinde portföye dahil edilen finansal varlıkların belirli bir risk düzeyinde maksimum getirinin nasıl elde edilebileceğini araştırmış ve geleneksel portföy yönetim anlayışına üç önemli noktada katkıda bulunmuştur. Bunlar:

- Portföye dahil edilen finansal varlıkların toplamının, portföy bütününe eşit olmadığı, bu sebeple portföy riskinin portföyü oluşturan varlıkların riskinden daha düşük olabileceği ve portföyün sistematik olmayan riskinin tamamen ortadan kaldırılabilceği saptanmıştır.
- Aynı getiri düzeyinde yer alan portföylerden daha düşük risk düzeyine sahip portföyün ve aynı risk düzeyine sahip portföylerden ise daha yüksek getiriye sahip portföylerin daha üstün oldukları ileri sürülmüştür. Bu durum “üstünlük ilkesi” olarak tanımlanmıştır.
- Etkin sınırın *kuadratik (karesel) programlama* yoluyla hesaplanabileceği yöntem geliştirilmiştir.⁶⁷

Markowitz modern portföyün babası olarak bilinse de, bu onuru eşit olarak paylaşabileceği diğer araştırmacı ise Andrew Donald Roy’dur. Markowitz’in isminin Roy’unkinden daha öne çıkmasının nedeni, Markowitz’in 1959 ve 1987 yıllarında yayımlanmış olduğu kitapların Nobel komitesinin radarlarına daha kolay yakalanmasıdır.⁶⁸

1952 yılında “*Önce Güven ve Varlığın Elde Tutulması*” adlı çalışmasıyla Roy geleneksel portföy yönetim anlayışının ötesinde bir teknikle modern portföy yönetiminin temellerine katkı sağlamıştır. Roy daha evvelki yapılan çalışmalarda, belirsizlik ortamında yatırımcı davranışının getiriye veya kârı maksimize etmeye dayalı olduğunu belirleyerek bu yaklaşıma karşı iki ana maddeyle itirazda bulunmuştur. Bunlar:

⁶⁶ Yoram Kroll, Haim Levy ve Harry Max Markowitz, “Mean-Variance Versus Direct Utility Maximization”, **The Journal of Finance**, Vol.39, No.1, (March 1984), s.47.

⁶⁷ Okan Garip, “Optimum Portföy Seçimi Ve BİST’te İşlem Gören Firmalar Üzerinde Bir Araştırma”, (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi SBE, 2014). ss.41-42.

⁶⁸ Harry M. Markowitz, “The Early History of Portfolio Theory: 1600-1960”, **Financial Analysts Journal**, Vol.55, No.4, (July-August 1999), ss.5-6.

- Sıradan yatırımcılar ortalama getirilere veya önceden belirlenmiş mümkün yatırım fırsatlarını göz önünde bulundurlar.
- Beklenen getiri maksimizasyonunun sağlanması için kaynağın geniş yatırım ürünleri yelpazesi içinde nasıl dağıtılacağı tam anlamıyla açıklanmamıştır.⁶⁹

Roy güven önceliğinin daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıdaki olasılık ifadesini paylaşmıştır.⁷⁰

$$f(m, \sigma) = 0 \quad (1.7.0.3.0)$$

$$P(|\xi - m| \geq m - d) \leq \frac{\sigma^2}{(m - d)^2} \quad \text{ya da} \quad (1.7.0.3.1)$$

$$P(m - \xi \geq m - d) = P(\xi \leq d) \leq \frac{\sigma^2}{(m - d)^2}$$

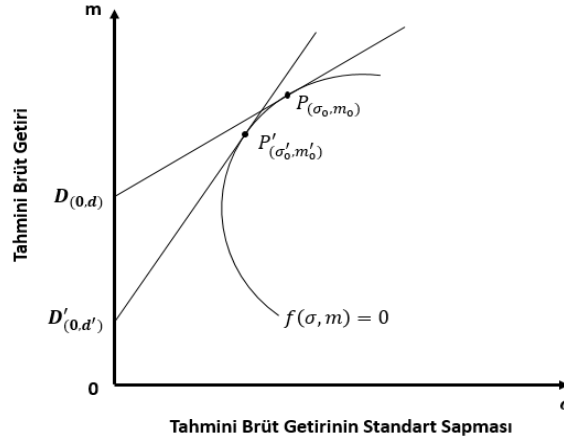
ξ , nihai getiriyi; d , ulaşılmak istenen minimum getiri oranını; m , mümkün olan tüm beklenen getiri oranlarını ve σ , m 'nin standart sapmasını ifade etmektedir. Roy, m ve σ geçmiş değerlerinden faydalanılarak kesin değerlerinin bilindiğini ve denklem (1.7.0.3.0)'da beklenen getiri oranı ile risk arasındaki ilişkinin sıfır olduğunu varsaymıştır.

$P(\xi \leq d)$ olasılığının minimum seviyeye çekilememesi durumunda, $\sigma^2/(m - d)^2$ üzerinde yoğunlaşarak $(m - d)/\sigma$ maksimize edilmeye çalışılır. Bununla birlikte m ortalamayla ve σ standart sapmayla ξ normal dağılıma sahipse $P(\xi \leq d)$ kendiliğinden minimum olacaktır. Ya da tüm m değerleri için σ sabit ise $(m - d)/\sigma$ maksimizasyonu sağlanacaktır. Bir başka deyişle beklenen fayda maksimize edilmiştir.

Yukarıdaki verilen bilgiler grafik üzerinde gösterildiğinde anlaşılması çok daha kolay olmaktadır.

⁶⁹ A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", **Econometrica**, Vol.20, No.3, (July 1952), s.431.

⁷⁰ A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", **Econometrica**, Vol.20, No.3, (July 1952), s.434.



Şekil 22: En İyi σ, m Bileşeninin Tespiti

Kaynak: A. D. Roy, “Safety First and the Holding of Assets”, *Econometrica*, Vol.20, No.3, (July 1952), s.435.

$f(m, \sigma)$ fonksiyonu bir eğri olarak Şekil 22’de gösterilmiştir. $0d$ veya daha kötü bir getiri oranından kaçınmak istiyorsa m aksisi üzerinde $D(0, d)$ noktası işaretlemelidir. Pozitif sabit katsayı $D(0, d)$ ’dan $f(m, \sigma)$ eğrisine teğet olarak çizilen doğrunun tanjantına eşit olmaktadır. DP doğrusunun eğiminin 45 dereceye ($1'e 1$) eşit ya da daha düşük olduğu görülmektedir. Diğer bir ifade ile her bir birimlik getiri için bir birimlik risk veya daha fazlası üstlenilecektir. Bu durum yatırımcının maksimum getiriyi elde etmesi yolunda çok faydalı olmayacaktır. Diğer taraftan $D'(0, d')$ noktasından çizilen doğrunun P' noktasında teğet olduğu görülmektedir. $D'P'$ doğrusunun eğiminin 45 dereceden daha fazla olması sebebiyle bir birim getiri başına daha az risk denk gelecektir.

P noktasının koordinat değerlerinin hesaplanmasında (1.7.0.3.2) ve (1.7.0.3.3)’deki denklemler,

$$\sigma = k \frac{\sqrt{\left[a - \frac{d}{k} b \right]' W^{-1} \left[a - \frac{d}{k} b \right]}}{\left[a - \frac{d}{k} b \right]' W^{-1} b} \quad (1.7.0.3.2)$$

$$m = k \frac{\sqrt{\left[a - \frac{d}{k} b \right]' W^{-1} a}}{\left[a - \frac{d}{k} b \right]' W^{-1} b} \quad (1.7.0.3.3)$$

kullanılabilmektedir.⁷¹ Roy n tane varlık için optimum portföy dağılımını (1.7.0.3.4), (1.7.0.3.5) ve (1.7.0.3.6) yer alan denklemlerle,

$$m = \sum_{i=1}^n x_i p_i \quad (1.7.0.3.4)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j r_{ij} \alpha_i \alpha_j \quad (1.7.0.3.5)$$

$$k = \sum_{i=1}^n x_i \quad (1.7.0.3.6)$$

ifade etmiştir.⁷² p , varlığın fiyatını (*getirisini*); α , standart sapmasını; x , varlıkların portföy içindeki oranını ve r_{ij} , korelasyon katsayısını ifade etmektedir. Yukarıdaki üç denklem sadece bir m ve σ değeri için değil tüm ikililer için genelleştirilmiştir.

Korelasyon matrisi (W) kullanılarak denklem (1.7.0.3.4), (1.7.0.3.5) ve (1.7.0.3.6)'deki denklemler (1.7.0.3.7)'deki formüllerle de hesaplanabilmektedir.

$$m = y'a, \quad \sigma^2 = y'Wy, \quad k = y'b \quad (1.7.0.3.7)$$

Sonrasında σ^2 minimize etmek için,

$$y'Wy + 2\mu_1(m - y'a) + 2\mu_2(k - y'b) \quad (1.7.0.3.8)$$

denklemini kullanılabilir.⁷³ Burada μ_1 ve μ_2 değerleri çarpandır. Denklem girdi değerleri için (1.7.0.3.9), (1.7.0.4.0) ve (1.7.0.4.1)'de yer alan formüller,

⁷¹ A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", **Econometrica**, Vol.20, No.3, (July 1952), s. 448.

⁷² A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", **Econometrica**, Vol.20, No.3, (July 1952), s. 436.

⁷³ A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", **Econometrica**, Vol.20, No.3, (July 1952), s. 447.

$$y = W^{-1}(\mu_1 a + \mu_2 b) \quad \text{veya} \quad Wy = \mu_1 a + \mu_2 b \quad (1.7.0.3.9)$$

$$\mu_1 = \frac{k}{\left[a - \frac{d}{k} b \right]' W^{-1} b}, \quad \mu_2 = \frac{-d}{\left[a - \frac{d}{k} b \right]' W^{-1} b} \quad (1.7.0.4.0)$$

$$y = \frac{kW^{-1} \left[a - \frac{d}{k} b \right]}{\left[a - \frac{d}{k} b \right]' W^{-1} b} \quad (1.7.0.4.1)$$

kullanılabilir.⁷⁴ $f(m, \sigma) = 0$ hiperbolüne ait denklem ise,

$$\left[\frac{(\alpha' W^{-1} \alpha)(b' W^{-1} b) - (\alpha' W^{-1} b)^2}{b' W^{-1} b} \right] \left(\sigma^2 - \frac{k^2}{b' W^{-1} b} \right) = \left(m - k \frac{\alpha' W^{-1} b}{b' W^{-1} b} \right)^2 \quad (1.7.0.4.2)$$

α : $\left(\frac{p_1}{\alpha_1}, \frac{p_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{p_n}{\alpha_n} \right)$ sütun vektörü

b : $\left(\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_n} \right)$ sütun vektörü

W : r_{ij} korelasyon matrisi

olmaktadır.⁷⁵ Denklem (1.7.0.4.2)'in matris gösterimi,

$$\begin{vmatrix} \sigma^2 & m & k \\ m & a' W^{-1} a & a' W^{-1} b \\ k & a' W^{-1} b & b' W^{-1} b \end{vmatrix} = 0 \quad (1.7.0.4.3)$$

olmaktadır.⁷⁶ Şekil 23'de sabit katsayının $h = D(0, d)$ yani $\sigma = 0$ ve $m = d$ olduğu nokta dikkate alındığında (1.7.0.4.3)'daki matris gösterimi (1.7.0.4.4)'daki gibi olmaktadır ($h\sigma = m - d$).

⁷⁴ A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", **Econometrica**, Vol.20, No.3, (July 1952), s. 448.

⁷⁵ A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", **Econometrica**, Vol.20, No.3, (July 1952), s. 436.

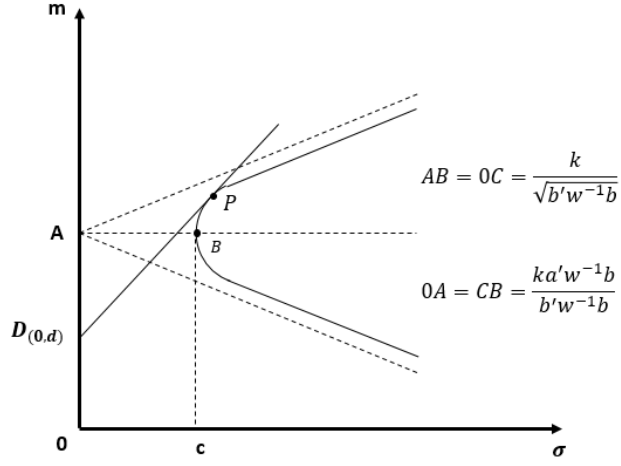
⁷⁶ A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", **Econometrica**, Vol.20, No.3, (July 1952), s. 448.

$$\begin{vmatrix} \sigma^2 & h\sigma + d & k \\ h\sigma + d & a'W^{-1}a & a'W^{-1}b \\ k & a'W^{-1}b & b'W^{-1}b \end{vmatrix} = 0 \quad (1.7.0.4.4)$$

Buradan matris,

$$h^2 = \left[a - \frac{d}{k}b \right]' W^{-1} \left[a - \frac{d}{k}b \right] \quad (1.7.0.4.5)$$

karesel ifadesine dönüşmektir.⁷⁷ Denklem (1.7.0.4.2)'nin grafiği ise Şekil 23'deki gibidir.



Şekil 23: N Varlık İçin En İyi σ , m Bileşeninin Tespiti

Kaynak: A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", *Econometrica*, Vol.20, No.3, (July 1952), s.437.

Yukardaki grafikte D noktasından hiperbole çizilen teğet ile P noktası tespit edilerek hangi varlıktan ne kadarının (x_1, x_2, \dots, x_n) portföye dahil edileceği bulunmaya çalışılır. P noktası, en güvenilir varlık bileşimini vermektedir.

DP doğrusunun eğimi, diğer bir ifadeyle risk,

$$\frac{1}{\left[a - \left(\frac{d}{k} \right) b \right]' W^{-1} \left[a - \left(\frac{d}{k} \right) b \right]} \quad (1.7.0.4.6)$$

⁷⁷ A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", *Econometrica*, Vol.20, No.3, (July 1952), s. 448.

veya

$$\frac{|W|}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\left(p_i - \frac{d}{k}\right)}{a_i} W_{ij} \frac{\left(p_j - \frac{d}{k}\right)}{a_j}} \quad (1.7.0.4.7)$$

olmak üzere iki farklı şekilde hesaplanabilmektedir.⁷⁸ W_{ij} , W matrisindeki r_{ij} kofaktörünü temsil etmektedir. $|W|$ ise W matrisinin determinantıdır. x değerleri ise,

$$x_i = \frac{\lambda}{a_i} \sum_{j=1}^n \frac{\left(p_j - \frac{d}{k}\right)}{a_j} \frac{W_{ij}}{|W|} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.7.0.4.8)$$

denklemleri yardımıyla hesaplanabilmektedir.⁷⁹ λ değeri,

$$\lambda = \frac{k}{\left[a - \frac{d}{k} b \right]' W^{-1} b} = \frac{k}{\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\left(p_j - \frac{d}{k}\right)}{a_j a_l} \frac{W_{jl}}{|W|}} \quad (1.7.0.4.9)$$

olmaktadır.⁸⁰ (1.7.0.4.8) ve (1.7.0.4.9)'de yer alan denklemlerde d/k "kritik fiyat" olarak adlandırılmaktadır. Eğer tüm kaynak (*para*) tek bir varlığa yatırılmışsa, varlığın dönem sonundaki fiyatı kritik fiyatın altında olmaması istenmektedir. Bu aşamadan sonra sorulan soru "Eğer tüm varlık fiyatları kritik fiyatın altına düşerse, varlık fiyatının en iyi doğrusal tahmincisi ne olacaktır?" olmaktadır. Bu durum karşısında alınabilecek iki aksiyon vardır. Bunlardan birincisi kullanılan tüm varlıklar reddedilir. İkinci aksiyon, daha iyi bir yöntem olarak, verilen koşulları azaltmamız gerekmektedir. Böylece uygun varlıklara ve koşullara karar verilmesine olanak sağlayan kritik fiyata sahip olunur. Bu varlıklardan şimdi hangilerini, ne oranda tutulacağını hesaplanması gerekmektedir. Öncelikle tüm varlık fiyatları kritik fiyatın altında iken varlığın tespit edilen fiyatı ile kritik fiyat arasındaki fark belirlenir. Daha sonrasında varlık fiyatının orijinal tahminin

⁷⁸ A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", **Econometrica**, Vol.20, No.3, (July 1952), s. 437.

⁷⁹ A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", **Econometrica**, Vol.20, No.3, (July 1952), s. 438.

⁸⁰ A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", **Econometrica**, Vol.20, No.3, (July 1952), s. 449.

standart sapmasından daha küçük olacak olan varlığın tahmin fiyatının standart sapması hesaplanır. Diğer bir ifade ile varlığın portföy içinde ayrılması gereken oran,

$$x_i = \lambda \frac{\left[\left(\text{Diğer tüm fiyatlar } d/k \text{ 'ya eşitken, } i \text{ 'nci varlığın fiyatına ait en iyi tahmin} \right)^{-\frac{d}{k}} \right]}{\left(\text{Diğer tüm fiyatlar } d/k \text{ 'ya eşitken, } i \text{ 'nci varlığın fiyatına ait en iyi tahminin standart hatası} \right)^2} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (1.7.0.5.0)$$

formülüyle hesaplanmaktadır.⁸¹ Böylelikle en iyi portföy yapısı tespit edilerek, katastrofik riskler azaltılacaktır. Basit bir şekilde tüm fiyatlar arasındaki korelasyon sıfır olarak düşünülerek, (1.7.0.4.8) ve (1.7.0.5.0)'deki denklemler,

$$x_i = \lambda \frac{\left(p_i - \frac{d}{k} \right)}{a_i^2} \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (1.7.0.5.1)$$

haline dönüşecektir.⁸² Tutulan tüm varlıkların fiyatlarının kritik fiyatın altında olduğu durumda tekrardan koşullar azaltılmalıdır. Eğer tüm varlıklar için aynı beklenti var ise, hangi varlığın tutulması gerektiği konusunda kayıtsız kalınılamaz. Tutulan varlıklara ait beklentiler değiştirilememesine rağmen, çıktıya ait belirsizlik değiştirilebilmektedir. Kaynağın tüm varlıklar arasında eşit bir şekilde dağıtıldığında, bu belirsizlik minimum olacaktır. Kaynağın eşit bir şekilde varlıklar arasında dağıtılmasıyla, üst banttaki risk $a^2/n(p - d/k)^2$ olacaktır. Bu durum tüm yumurtaları aynı sepete koymak anlamına geleceğinden mantıklı bir davranış olmayacaktır. Böyle bir yol izlenmesi durumunda varlıkların portföy içindeki oranı,

$$x_i = \lambda \left(p_i - \frac{d}{k} \right) \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (1.7.0.5.2)$$

denklemleriyle hesaplanacaktır.⁸³

⁸¹ A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", **Econometrica**, Vol.20, No.3, (July 1952), s. 438.

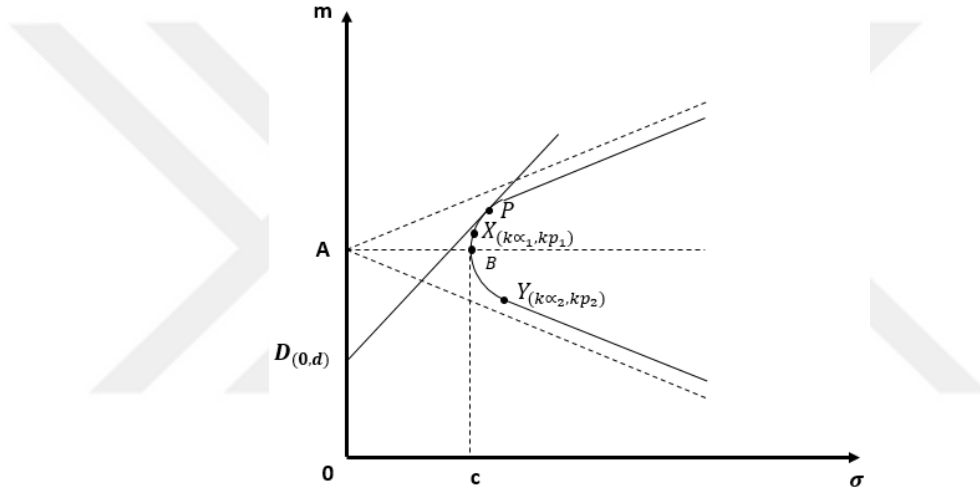
⁸² A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", **Econometrica**, Vol.20, No.3, (July 1952), s. 439.

⁸³ A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", **Econometrica**, Vol.20, No.3, (July 1952), s. 439.

Yukarıda verilen bilgiler dâhilinde denklem (1.7.0.4.2)'de verilen formül iki varlık için tekrardan oluşturulduğunda,

$$(p_1 - p_2)^2 \left[\sigma^2 - \frac{k^2(1-r^2)\alpha_1^2 a_2^2}{\alpha_1^2 - 2ra_1a_2 + a_2^2} \right] = (\alpha_1^2 - 2ra_1a_2 + a_2^2) \left[m - \frac{k \{ \alpha_1^2 p_2 - ra_1a_2(p_1 + p_2) + a_2^2 p_1 \}}{\alpha_1^2 - 2ra_1a_2 + a_2^2} \right]^2 \quad (1.7.0.5.3)$$

ifadesine dönüşmektedir.⁸⁴ Şekil 23'deki çizim ise Şekil 24'deki gibi olacaktır.



Şekil 24: N Varlık İçin En İyi σ , m Bileşenine Sahip Portföy Ağırlıkları

Kaynak: A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", *Econometrica*, Vol.20, No.3, (July 1952), s.443.

Ayrıca x_1 , x_2 ve m arasındaki ilişki,

$$x_1 = \frac{kp_2 - m}{p_2 - p_1}, \quad x_2 = \frac{kp_1 - m}{p_1 - p_2} \quad (1.7.0.5.4)$$

olmaktadır.⁸⁵ Şekil 24'de P noktası $f(\sigma, m) = 0$ eğrisi üzerinde X ve Y noktaları arasında ise her iki varlığında elde tutulması tavsiye edilebilir. Eğer P noktası X noktasının üzerinde ve $p_1 > p_2$ ise ikinci varlık alınarak yükselmesi beklenir.

⁸⁴ A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", *Econometrica*, Vol.20, No.3, (July 1952), s. 442.

⁸⁵ A. D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", *Econometrica*, Vol.20, No.3, (July 1952), s. 442.

Şekil 24’de ayrıca varlıkların fiyatları arasındaki yüksek korelasyonun (pozitif ya da negatif) artması, eğriyi m ordinatına yaklaştıracaktır. Böylelikle DP doğrusunun tanjantı artacaktır.

(1.8.4)’deki denklem,

$$x_1 = \frac{\lambda}{a_1(1-r^2)} \left[\frac{\left(p_1 - \frac{d}{k} \right)}{a_1} - r \frac{\left(p_2 - \frac{d}{k} \right)}{a_2} \right] \quad (1.7.0.5.5)$$

$$x_2 = \frac{\lambda}{a_2(1-r^2)} \left[\frac{\left(p_2 - \frac{d}{k} \right)}{a_2} - r \frac{\left(p_1 - \frac{d}{k} \right)}{a_1} \right] \quad (1.7.0.5.6)$$

şekliyle daha basit yazılabilmektedir.⁸⁶ Markowitz ile Roy’un çalışmaları arasındaki temel iki fark:

- Markowitz’in çalışması negatif olmayan yatırımları kısıt olarak kabul ederken, Roy’un çalışmasında hem negatif hemde pozitif yatırımları dikkate almıştır.
- Markowitz yatırımcıların etkin sınırdan portföy seçeceğini belirtirken, Roy spesifik portföyün yatırımcı tarafından seçileceğini belirtmiştir.⁸⁷

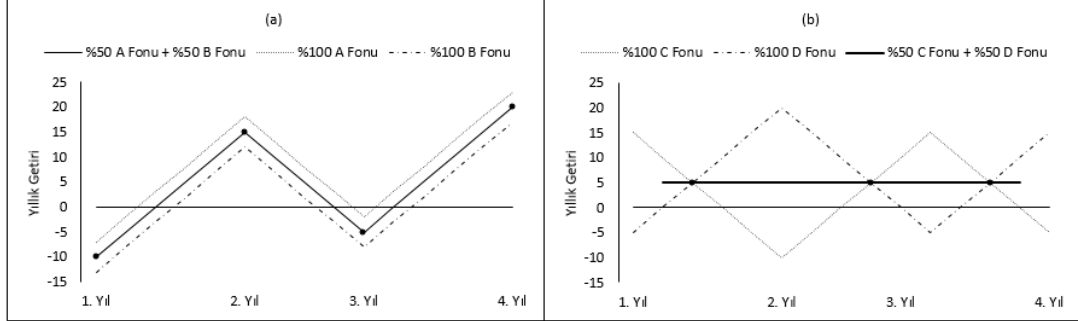
1.7.1. Portföy Korelasyonu

Portföye eklenen finansal varlıklar arasındaki korelasyonun +1 olması durumunda portföy tek bir finansal varlık gibi hareket edecek ve risk, finansal varlığın riskine eşit olacaktır. Korelasyonun -1 olması durumunda ise portföy riski, sistematik olmayan risk düzeyine indirgenmiş olacak ve minimum risk düzeyinde maksimum getiri

⁸⁶ A. D. Roy, “Safety First and the Holding of Assets”, *Econometrica*, Vol.20, No.3, (July 1952), s. 443.

⁸⁷ Harry M. Markowitz, “The Early History of Portfolio Theory: 1600-1960”, *Financial Analysts Journal*, Vol.55, No.4, (July-August 1999), s.5.

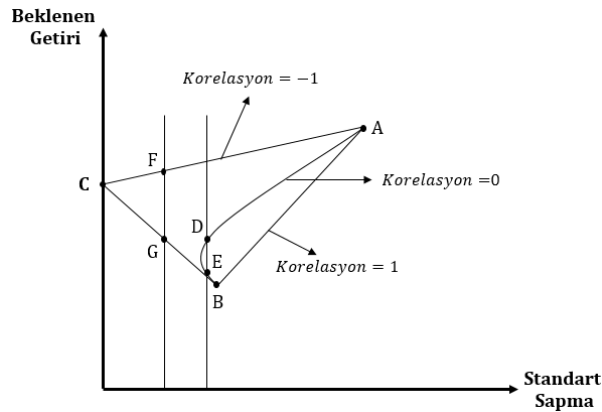
sağlanacaktır. Korelasyonun +1 ve -1 olduğu durumda finansal varlıkların hareketleri sırasıyla Şekil 25'in (a) ve (b) panellerinde gösterilmektedir.⁸⁸



Şekil 25: Portföy Korelasyonu

Kaynak: Richard A. Ferri, *All About Asset Allocation*, New York: McGraw-Hill, 2010, s.49 (a) ve s.50 (b).

Şekil 26'da A ve B, portföyün tamamının A veya B finansal varlıklarından oluştuğunu; AB doğrusu, A ve B varlıkları arasında tam pozitif korelasyon olduğunu göstermektedir. Korelasyon sıfır olduğunda A ve B varlıklarının portföy içindeki ağırlıkları için, beklenen getiri ve standart sapma arasındaki ilişki bir hiperbolle ifade edilecektir. AC ve BC doğruları ise korelasyonun tam negatif olması durumunu ifade etmektedir.⁸⁹



Şekil 26: Portföy Korelasyonları

Kaynak: Ramazan Abay, "Markowitz Karesel Programlama ile Portföy Seçimi: İMKB 30 Endeksinde Riskli Portföylerin Seçimi", *Ç.Ü. Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, Cilt.22, Sayı.2, (2013), s.184.

⁸⁸Richard A. Ferri, *All About Asset Allocation*, New York: McGraw-Hill, 2010, ss.47-53.

⁸⁹ Ramazan Abay, "Markowitz Karesel Programlama ile Portföy Seçimi: İMKB 30 Endeksinde Riskli Portföylerin Seçimi", *Ç.Ü. Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, Cilt.22, Sayı.2, (2013), s.184.

Markowitz, kesinlik durumunun olduğu bir durumda, ileriye dönük kazançları bilen bir yatırımcı, yatırımını en yüksek getiriye sahip varlığa yapacağını belirtmiştir. Kesinlik durumunda, aynı yüksek getiriye sahip farklı varlıklar söz konusu ise bu varlıkların herhangi bir bileşeni arasında kayıtsız kalacak ve hiçbir yatırımcı farklılaştırılmış bir portföyü tercih etmeyecektir. Portföy çeşitlendirmesi ancak ve ancak ileriye dönük belirsizliğin olduğu durumlarda riski azaltacaktır.⁹⁰

1.7.2. Uluslararası Portföy Çeşitlendirmesi

Portföy riskinin düşmesi, finansal varlıkların getiri dağılımlarının arasındaki korelasyonun düşmesine bağlıdır. Buna rağmen genellikle finansal varlıkların ülke ekonomisiyle yüksek korelasyonu bulunmaktadır. Bu durum “uluslararası portföy çeşitlendirmesi” ihtiyacını ortaya çıkarmıştır. Farklı gelişmişlik düzeyinde bulunan ülkelere ait finansal varlıklarla oluşturulan portföylerin tek bir ülkeye ait finansal varlıklarla oluşturulan portföylere göre daha düşük risk seviyesine sahip olduğu gözlemlenmiştir. Bununla birlikte yapılan çalışmalarda gelişmiş ülkeler arasında yüksek korelasyon olduğu ve bu ülkelerde oluşan ekonomik dalgalanmaların diğer gelişmiş ülkeleri etkilediği tespit edilmiştir.⁹¹

1.7.3. Kovaryans Matrisi Tahmininin Portföy Seçimine Etkisi

Kovaryans matrisinin tahmininde varlık sayısının (N), tahmin periyodundan (T) büyük olması ($N > T$ / *matrisin tekil olması*) durumunda kovaryans matrisi önemli miktarda tahmin hatası içermektedir.⁹² Bu sorunun ortadan kaldırılması amacıyla Ledoit ve Wolf tarafından (2004) sabit matrise “küçülme dönüşümü” uygulanmış ve yeni bir kovaryans matrisi elde edilmiştir. Ledoit ve Wolf küçülme dönüşümünü Sharpe’ın Tekli Endeks Modeli’nden oluşturulan kovaryans matrisinin, ağırlıklı ortalama örnek kovaryans matrisine dâhil edilmesi aracılığıyla gerçekleştirilmektedir. Yöntemin

⁹⁰ Cengiz Toraman ve Muhammed Fatih Yürük, “Kuadratik Programlama Tabanlı Modelleme ile Portföy Optimizasyonu: BİST-100 Uygulaması”, **Mukaddime**, Cilt.5, Sayı.1, (2014), s.136.

⁹¹ Vihang R. Errunza, “Gains from Portfolio Diversification into Less Developed Countries' Securities”, **Journal of International Business Studies**, Vol.8, No.2, (1977), s.96.

⁹² Gülfen Tuna, “Kovaryans Matrisi Tahmininin Portföy Seçimine Etkisi: İMKB’de Farklı Yatırım Ufukları için Uygulama”, **Ege Akademik Bakış**, Cilt.12, Sayı.3, (Temmuz 2012), s.313.

uygulanmasıyla tahmin hataları minimum seviyeye indirilmiş ve geleneksel tahmin yöntemlerine göre daha başarılı sonuçlara ulaşmıştır.⁹³

1.7.4. N Sayıda Riskli Finansal Varlıktan Oluşan Portföylerde Ortalama Varyans Analizi

Portföye dâhil edilen finansal varlıkların sayısındaki (N) artış, portföyün getirisinin ve varyansının hesaplanmasında uzun denklemler oluşturmakta ve işlem yoğunluğuna neden olmaktadır. Hesaplama kolaylığı açısından vektör ve matrislerin kullanılması daha uygun olmaktadır.

1.7.4.1. Çeşitlendirme Etkisi

N sayıda finansal varlık için portföyün beklenen getiri ve varyans denklemleri,

$$E[R_p] = \sum_{i=1}^N w_i E[R_i] = \mathbf{w}\bar{\mathbf{R}}' \quad (1.7.4.1.1)$$

$$\sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} = 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N w_i w_j \sigma_{ij} + \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_i^2 = \mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w} \quad (1.7.4.1.2)$$

$$Cov_{ij} = \sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} = \mathbf{V} \quad (1.7.4.1.3)$$

olmaktadır. Burada \mathbf{w} , portföy ağırlık vektörünü; \mathbf{R} , getiri vektörünü; $\bar{\mathbf{R}}$, beklenen getiri vektörünü; $\mathbf{V} = [\sigma_{ij}]_{1 \leq i, j \leq N}$, $n \times n$ boyutundaki varyans-kovaryans getiri matrisini; \mathbf{e} , 1'lerden oluşan vektörü ifade etmektedir. (1.7.4.1.2)'de Portföy getiri varyans denkleminin yapısının iki bileşenden oluştuğu görülmektedir. Finansal varlığın portföy riskine marjinal katkısını gösteren ilişki varyansı azaltmamaktadır. Ancak bu aşamada diğer finansal varlıklarla olan korelasyon dikkate alınmalıdır.

Portföy riskinin w_i ağırlığına göre kısmi türevi,

⁹³ Olivier Ledoit ve Michael Wolf, "A Well-Conditioned Estimator for Large-Dimensional Covariance Matrices", *Journal of Multivariate Analysis*, Vol.88, No.2, (February 2004), s.389.

$$\frac{\partial \sigma^2(R_p)}{\partial w_i} = 2 \sum_{j=1}^N w_j \sigma_{ij} \quad (1.7.4.1.4)$$

olmaktadır. Portföy ile i finansal varlığının arasındaki korelasyon katsayısı σ_{iP} ile gösterildiğinde,

$$\sum_{j=1}^N w_j \sigma_{ij} = \sum_{j=1}^N w_j \text{Cov}(R_i, R_j) = \text{Cov}\left(R_i, \sum_{j=1}^N w_j R_j\right) = \text{Cov}(R_i, R_p) = \sigma_{iP} \quad (1.7.4.1.5)$$

ve

$$\frac{\partial \sigma^2(R_p)}{\partial w_i} = 2\sigma_{iP} \quad (1.7.4.1.6)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Böylelikle i finansal varlığının portföy riskine marjinal katkısı iki kez olmaktadır.

Portföy ağırlıklarının $1/n$ olduğu varsayıldığında varyans,

$$\sigma^2(R_p) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_{ij} \quad (1.7.4.1.7)$$

veya

$$\sigma^2(R_p) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sigma_{ij} \quad (1.7.4.1.8)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

1.7.4.2. Optimal Ağırlıklar

Beklenen getiri düzeyinde minimum varyansa sahip portföy setinin belirlenmesi gerekmekte ve bu durum kuadratik optimizasyon problemini beraberinde getirmektedir. Amaç fonksiyonu,

$$\min \mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w} \quad (1.7.4.2.0.1)$$

şeklinde gösterilmekte ve optimizasyonunun sağlanabilmesi için ilk kısıt beklenen getiriye, ikinci kısıt ise ağırlık vektörüne,

$$E[R_p] = \mathbf{w}'\bar{\mathbf{R}} \quad (1.7.4.2.0.2)$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{e} = 1 \quad (1.7.4.2.0.3)$$

uygulanmaktadır. (1.7.4.2.0.1), (1.7.4.2.0.2) ve (1.7.4.2.0.3)'de yer alan denklemler için Lagrange fonksiyonu,

$$L(\mathbf{w}, \lambda, \delta) = \mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w} + \lambda(E[R_p] - \mathbf{w}'\bar{\mathbf{R}}) + \delta(1 - \mathbf{w}'\mathbf{e}) \quad (1.7.4.2.0.4)$$

$$\min_{\{\mathbf{w}, \lambda, \delta\}} L(\mathbf{w}, \lambda, \delta) = \mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w} + \lambda(E[R_p] - \mathbf{w}'\bar{\mathbf{R}}) + \delta(1 - \mathbf{w}'\mathbf{e}) \quad (1.7.4.2.0.5)$$

olmaktadır. λ ve δ sabit Lagrange çarpanıdır.⁹⁴

Lagrange fonksiyonunun birinci dereceden $\mathbf{w}, \lambda, \delta$ göre türevleri,

$$\frac{\partial L(\mathbf{w}, \lambda, \delta)}{\partial \mathbf{w}} = 2\mathbf{V}\mathbf{w} - \lambda\bar{\mathbf{R}} - \delta\mathbf{e} = 0 \quad (1.7.4.2.0.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_1} = w_1\sigma_{11} + w_2\sigma_{12} + \dots + w_n\sigma_{1n} - \lambda E(r_1) - \delta = 0 \quad (1.7.4.2.0.7)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_2} = w_1\sigma_{21} + w_2\sigma_{22} + \dots + w_n\sigma_{2n} - \lambda E(r_2) - \delta = 0 \quad (1.7.4.2.0.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_n} = w_n\sigma_{n1} + w_n\sigma_{n2} + \dots + w_n\sigma_{nm} - \lambda E(r_n) - \delta = 0 \quad (1.7.4.2.0.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{w}, \lambda, \delta)}{\partial \lambda} &= E[R_p] - \mathbf{w}'\bar{\mathbf{R}} = E(R_p) \\ &- [w_1E(r_1) + w_2E(r_2) + \dots + w_nE(r_n)] = 0 \end{aligned} \quad (1.7.4.2.1.1)$$

⁹⁴ Jean-Luc Prigent, **Portfolio Optimization and Performance Analysis**, 1. Edition, Boca Raton, 2007, s.71.

$$\frac{\partial L(\mathbf{w}, \lambda, \delta)}{\partial \delta} = 1 - \mathbf{w}'\mathbf{e} = 1 - [w_1 + w_2 + \dots + w_n] = 0 \quad (1.7.4.2.1.2)$$

gibi olmaktadır. A , B , C ve D reel sayıları,

$$A = \mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1}\bar{\mathbf{R}}, \quad B = \bar{\mathbf{R}}'\mathbf{V}^{-1}\bar{\mathbf{R}}, \quad C = \mathbf{e}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}, \quad D = BC - A^2 \quad (1.7.4.2.1.3)$$

olarak tanımlansın. $E[R_p]$ getiri düzeyinde optimal portföy ağırlıkları,

$$\mathbf{w} = \frac{1}{D} (B\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} - A\mathbf{V}^{-1}\bar{\mathbf{R}}) + E[R_p] \frac{1}{D} (C\mathbf{V}^{-1}\bar{\mathbf{R}} - A\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}) \quad (1.7.4.2.1.4)$$

denklemleri yardımıyla hesaplanmaktadır. \mathbf{w}_1 ve \mathbf{w}_2 ağırlıkları için hesaplama,

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{d} (B\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e} - A\mathbf{V}^{-1}\bar{\mathbf{R}}) \quad (1.7.4.2.1.5)$$

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{d} (C\mathbf{V}^{-1}\bar{\mathbf{R}} - A\mathbf{V}^{-1}\mathbf{e}) \quad (1.7.4.2.1.6)$$

formülleri yardımıyla olmaktadır.⁹⁵ (1.7.4.2.1.4)'de yer alan denklemdeki ilişki $E[R_p]$ getiri düzeyinde minimum varyans hesaplamasıdır. Risk ve beklenen getiri arasındaki ilişki,

$$\frac{\sigma^2(R_p)}{1/C} - \frac{(E(R_p) - A/C)^2}{D/C^2} = 1 \quad (1.7.4.2.1.7)$$

şeklinde gösterilebilir.⁹⁶ Bu ilişki $(\sigma(R_p), E(R_p))$ düzleminde hiperbol yayını tanımlamaktadır.

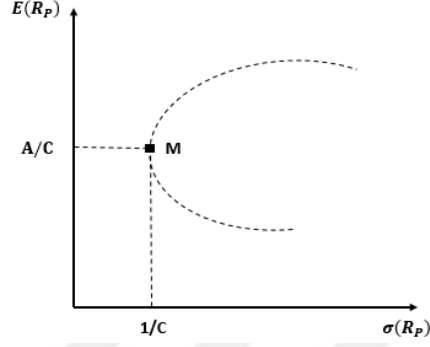
- Hiperbolün tepe noktasının koordinat bileşenleri $(\sqrt{1/C}, A/C)$ ile hesaplanmaktadır.
- Hiperbolün asimtotları

⁹⁵ Jean-Luc Prigent, **Portfolio Optimization and Performance Analysis**, 1. Edition, Boca Raton, 2007, s.72.

⁹⁶ Jean-Luc Prigent, **Portfolio Optimization and Performance Analysis**, 1. Edition, Boca Raton, 2007, s.73.

$$E(R_p) = \frac{A}{C} \pm \frac{D/C^2}{1/C} \sigma(R_p) \quad (1.7.4.2.1.8)$$

denklemleri ile hesaplanmaktadır.⁹⁷



Şekil 27: Ortalama-Varyans Portföyleri

Kaynak: Jean-Luc Prigent, **Portfolio Optimization and Performance Analysis**, 1. Edition, Boca Raton, 2007, s.73.

Portföye ait beklenen getiri, varyans ve kovaryans denklemlerinin matris gösterimi,

$$\mathbf{w}' = [w_1 \quad w_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad w_N], \mathbf{R}' = [R_1 \quad R_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad R_N] \quad (1.7.4.2.1.9)$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \cdots & \sigma_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \quad (1.7.4.2.2.0)$$

şeklinde yapılabilir. Portföy varyansının ve Lagrange fonksiyonu için i 'nci finansal varlığın birinci dereceden türevini gösteren matris açılımı sırasıyla,

⁹⁷ Jean-Luc Prigent, **Portfolio Optimization and Performance Analysis**, 1. Edition, Boca Raton, 2007, s.73.

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} +w_1 w_1 \sigma_{11} & +w_1 w_2 \sigma_{12} & \cdots & +w_1 w_n \sigma_{1n} \\ +w_2 w_1 \sigma_{21} & +w_2 w_2 \sigma_{22} & \cdots & +w_2 w_n \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ +w_n w_1 \sigma_{n1} & +w_n w_2 \sigma_{n2} & \cdots & +w_n w_n \sigma_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.7.4.2.2.1)$$

$$\frac{\partial \sigma_P^2}{\partial w_i} = \begin{bmatrix} w_1 \sigma_{1i} \\ \vdots \\ +w_i \sigma_{i1} + w_i \sigma_{i2} + \cdots + 2w_i \sigma_{ii} + \cdots + w_i \sigma_{iN} \\ \vdots \\ w_N \sigma_{Ni} \end{bmatrix} \quad (1.7.4.2.2.2)$$

şeklinde gösterilmektedir.⁹⁸

Diğer bir ifadeyle, belirli bir risk düzeyinde maksimum getiriye sağlayan portföy “*etkin portföy*” olarak tanımlanmaktadır.⁹⁹ Etkin bir portföy ayrıca “*ortalama-varyans etkin portföy*” olarak da adlandırılmaktadır. Böylelikle, her bir risk düzeyi için etkin bir portföyün varlığından bahsedilebilir.¹⁰⁰

Etkin sınır üzerinde riskten kaçan yatırımcılar sol tarafta kalan portföyleri tercih ederken, risk seven yatırımcılar sağ tarafta kalan yatırımları tercih edeceklerdir. Diğer bir ifadeyle, yatırımcının etkin sınır üzerindeki portföy seçimi aşamasında riske karşı tutumlarının belirleyici olduğu anlaşılmaktadır. Yatırımcının riske olan tutumu ise kayıtsızlık eğrileri yani fayda fonksiyonları ile ilişkilidir.

Portföye dahil edilen finansal varlık sayısının artması durumunda, portföy problemleri matris gösterimiyle daha basit ve anlaşılır olmaktadır. Örneğin, finansal varlığının portföy içindeki ağırlığı w_{ij} ile ifade edilmiş olsun. Burada i indisi i 'inci portföyü ifade ederken, j indisi ise portföydeki finansal varlığı göstermektedir.

⁹⁸ Jack Clark Francis ve Dongcheol Kim, **Modern Portfolio Theory Foundations, Analysis, and New Developments**, 1. Edition, New Jersey: John Wiley and Sons, 2013, ss.136-137.

⁹⁹ Frank J. Fabozzi (Ed.), **Encyclopedia Of Financial Models Volume 1**, New Jersey: John Wiley&Sons, 2013, s.5.

¹⁰⁰ Frank J. Fabozzi (Ed.), **Encyclopedia Of Financial Models Volume 1**, New Jersey: John Wiley&Sons, 2013, s.13.

Markowitz, ortalama-varyans yönteminde kısıtlara ait matrislerin çok miktarda sıfır içermesi ve buna bağlı olarak işlem yükünün artması problemine karşı *seyrek matris* kullanımını önermiştir.¹⁰¹

1.8. AÇIĞA SATIŞIN MODELLENMESİ

Açığa satışın dikkate alındığı durmuda portföy getirisi,

$$R_p = \sum_{i=1}^n r_i X_i + \sum_{i=n+1}^{2n} (-r_{i-n}) X_i + r_c \sum_{i=n+1}^{2n} h_{i-n} X_i \quad (1.8.1)$$

olacaktır.¹⁰² Denklemin sağ kısmının ilk terimi uzun pozisyonu, ikinci terimi açığa satılmış varlıkları, üçüncü terimi ise açığa satış iadesini (*short rebate*)¹⁰³ ifade etmektedir. Açığa satış iadesine konan kısıt,

$$h_i \leq 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (1.8.2)$$

olmakta ve genellikle $h_i \geq 0$ 'dır. Fakat bu koşul piyasada ödünç almanın zorlaştığı dönemlerde kimi zaman geçerliliğini yitirmektedir. Bu nedenle koşulun zorunluluğu bulunmamaktadır. r_c , nakdin veya teminatın getirisidir. Ayrıca nakit uzun pozisyonda tutulabilen risksiz bir varlıktır.¹⁰⁴

¹⁰¹ Harry M. Markowitz, "Efficient Portfolios, Sparse Matrices, and Entities: A Retrospective", **Operations Research**, Vol.50, No.1, (January – February 2002), s.156.

¹⁰² Bruce I. Jacobs, Kenneth N. Levy, CFA ve Harry M. Markowitz, "Trimability and Fast Optimization of Long-Short Portfolios", **Financial Analysts Journal**, Vol.62, No.2, (2006), s.39.

¹⁰³ Ödünç verenler nakit teminatları piyasada değerlendirerek bir faiz getirisi elde etmekte ve elde ettikleri faizin bir kısmını önceden pazarlık edilmiş bir iskonto oranı ile ödünç alana vermektedirler. İfade olan bu tutar "short rebate" olarak ifade edilmektedir. Bu uygulamanın nedeni açığa satışı teşvik etmek ve ödünç alımları kolaylaştırmaktır.

¹⁰⁴ Bruce I. Jacobs, Kenneth N. Levy, CFA ve Harry M. Markowitz, "Trimability and Fast Optimization of Long-Short Portfolios", **Financial Analysts Journal**, Vol.62, No.2, (2006), s.40.

İKİNCİ BÖLÜM

ZAMAN SERİSİ MODELLERİ

Zamana dayalı verilerin analizi ve gelecek değerlerinin öngörüsü başta finans ve ekonomi branşları olmak üzere pek çok alanda araştırmacılar tarafından kullanılmaktadır. Öngörü yöntemlerinde üç temel yaklaşım bulunmaktadır. Bunlar regresyona dayalı metot, sezgisel düzleştirme metodu ve genel zaman serisi modelleridir.

Zaman serisi analizinde ve öngörüsünde önemli yere sahip olan Otoregresif Tümlleşik Hareketli Ortalama [ARIMA(p,d,q)] modelleriyle finansal verilerin modellenmesi mümkün olmaktadır. Bu modellere olan genel yaklaşım iki belirgin bileşenin toplamı şeklinde sunulmaktadır. Bunlar zaman serilerinin deterministik ve stokastik bileşenlerini ifade etmektedir. Deterministik bileşen zamanın bir fonksiyonu iken stokastik bileşen rastsal süreci belirtmektedir.

Box ve Jenkins (1970) tanıttıkları “*model kurma stratejileri*”yle zaman serilerinin analizi ve ARIMA modellerinin nasıl oluşturulacağı konusunda kendi yaklaşımlarını ortaya koymuşlardır. Box ve Jenkins, zaman serilerinin geçmiş değerleri kullanılarak serilerin gelecek değerlerinin tahmin edilebileceğini ifade ederler. Diğer bir ifadeyle zaman serisinin gelecek değerleri geçmiş değerlerinin bir fonksiyonudur. Bu model kurma stratejisiyle zaman serilerinin modellenmesi başarılı bir şekilde yapılabilmektedir.

Aşağıda tezin uygulama aşamasında kullanılan ifadeler ve testler hakkında kısa bilgi verilmektedir.

2.1. STOKASTİK SÜREÇLER

Stokastiklik en basit tanımıyla rastsallık anlamındadır. Zaman serilerinin olasılıklı süreçleri için kullanılan bu kavram, serinin hem fiziksel hem de matematiksel bir modeli olarak algılanmaktadır.

Zaman serisi Y_t , $t = 1, 2, \dots, T$; stokastik süreç olarak adlandırılan teorik sürecin gerçekleşmesi şeklinde düşünülmektedir. Stokastik süreçte her gözlem, diğer bir ifadeyle serideki her değer Y_1, Y_2, \dots, Y_T bir olasılık dağılımından rastsal olarak çekildiğinden, rastsal bir değişken olmakta ve gözlem değerlerinin belirli bir olasılık dağılımına sahip olduğu kabul edilmektedir. Bu nedenle matematiksel olarak zaman aralıklarına bölünmüş stokastik süreç, rastsal değişkenlerin bir birikimi olarak ifade edilebilmektedir ($Y_t, t \in T$). Klasik istatistikte *örneklem* ve *anakütle* kavramlarının özdeşi zaman serisi analizinde sırasıyla *gerçekleşme* ve *stokastik süreç* olmaktadır.¹⁰⁵

Stokastik bir süreci tanımlamanın yolu sürecin momentlerini oluşturmaktır. Ortalama, varyans ve otokovaryans fonksiyonları, birinci ve ikinci momentler şeklinde tanımlanmakta ve,

$$\mu = E(Y_t) \quad (2.1.1)$$

$$\sigma_t^2 = Var(Y_t) \quad (2.1.2)$$

$$\gamma_{kt} = Cov(Y_t, Y_{t+k}) = E\{[Y_t - E(Y_t)][Y_{t+k} - E(Y_{t+k})]\} \quad (2.1.3)$$

gösterilmektedir.¹⁰⁶

2.2. DURAĞAN ZAMAN SERİLERİ

Zaman serilerinin analizinde kullanılan ekonometrik yöntemler, serilerin durağan olduğu varsayımına dayanmaktadır. Durağan olmayan zaman serileriyle yapılan analizler sonucunda sahte regresyon problemi görülebilmektedir. Böyle bir durumda da değişkenler arasındaki ilişki yanıltıcı olacaktır.

Bu bölümde doğrusallık, durağanlık ve saf hata terimi kavramları üzerinde kısaca bilgi verilecektir.

¹⁰⁵ Mustafa Sevüktekin ve Mehmet Çınar, *Ekonometrik Zaman Serileri Analizi EViews Uygulamalı*, 4. Basım, Bursa: Dora Yayıncılık, 2014, s.59.

¹⁰⁶ Mustafa Sevüktekin ve Mehmet Çınar, *Ekonometrik Zaman Serileri Analizi EViews Uygulamalı*, 4. Basım, Bursa: Dora Yayıncılık, 2014, s.61.

2.2.1. Doğrusallık

AR, MA ve ARMA modelleri doğrusal modellerdir. Doğrusal filtre, bir x_t zaman serisinden başka bir y_t zaman serisine olan doğrusal işlemcisidir ve y_t ,

$$y_t = L(x_t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \psi_i x_{t-i} \quad (2.2.1.1)$$

olarak tanımlanmakta, $t = \dots, -1, 0, 1, \dots$ değerlerini almaktadır. Bu bağlamda doğrusal filtre x_t girdisini y_t çıktısı olarak dönüştürdüğünden “süreç” olarak görülebilmektedir. (2.2.1.1)’de yer alan doğrusal filtrenin özellikleri:

- ψ_i katsayısı zamandan bağımsızdır,
- $i < 0$ için $\psi_i = 0$ ise y_t çıktısı x_t girdisinin cari ve geçmiş değerlerinin doğrusal fonksiyonu olmaktadır ve $y_t = \psi_0 x_t + \psi_1 x_{t-1} + \dots$ ’dir,
- $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |\psi_i| < \infty$ ise kararlılık özelliği sağlanmıştır.¹⁰⁷

2.2.2. Durağanlık

Zaman serilerinin durağanlığı, serinin zaman içinde gösterdiği istatistiksel özelliklerle ilişkilidir. Daha açıklayıcı bir ifadeyle durağan serilerin istatistiksel davranışları zaman içinde benzer özellik sergilemekte ve genellikle sabit bir olasılık dağılımına sahip olmaktadır. Zaman serilerinin durağanlığı, zamanın rastsal seçilmiş farklı anlarındaki genel davranışlarının benzer özellik gösterip göstermediğiyle ilgilidir. Durağanlık (*zayıf durağanlık*) koşulları zaman serisinin momentleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilmektedir. Bunlar:

- Zaman serisinin beklenen değeri zamana bağlı değildir,
- Zamanın değil, sadece k fonksiyonunun herhangi bir k gecikmesi için otokovaryans fonksiyonu $\gamma_k(k) = Cov(y_t, y_{t+k})$ olarak tanımlanmaktadır.

¹⁰⁷ Douglas C. Montgomery, Cheryl L. Jennings ve Murat Kulahci, **Introduction to Time Series Analysis and Forecasting**, 1. Edition, New Jersey: John Wiley & Sons, 2008, s.232.

OKF ve KOKF öncül testleri, otokorelasyon fonksiyonunun davranışlarının gözlemlenmeye yöneliktir. Otokorelasyon fonksiyonunun hızlı veya yavaş bir şekilde apsisi kesmesi serinin durağanlığı hakkında fikir vermektedir.

Zamandan bağımsız, kararlı doğrusal filtreli ve durağan girdi x_t zaman serisi için $E(y_t)$ ve $Cov(y_t, y_{t+k})$,

$$E(y_t) = \mu_y = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \psi_i \mu_x \quad (2.2.2.1)$$

$$Cov(y_t, y_{t+k}) = \gamma_y(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_i \psi_j \gamma_x(i-j+k) \quad (2.2.2.2)$$

olmaktadır. Saf hata terimli (ε_t) zaman serilerine ait doğrusal sürecin gösterimi,

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} \quad (2.2.2.3)$$

olmaktadır. ε_t , sıfır ortalamalı [$E(\varepsilon_t) = 0$] bağımsız rastsal şokları ifade etmekte ve

$$\gamma_\varepsilon(h) = \begin{cases} \sigma^2 & h = 0 \\ 0 & h \neq 0 \end{cases} \quad (2.2.2.4)$$

y_t 'nin otokovaryans fonksiyonu,

$$\gamma_y(k) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+k} \quad (2.2.2.5)$$

olarak ifade edilmektedir. Denklem (2.2.2.3) gecikme operatörüyle yazıldığında,

$$y_t = \mu + \psi_0 \varepsilon_t + \psi_1 \varepsilon_{t-1} + \psi_2 \varepsilon_{t-2} + \dots = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i \varepsilon_t = \mu + \Psi(B) \varepsilon_t \quad (2.2.2.6)$$

olmaktadır.¹⁰⁸

2.2.2.1. Zayıf Durağanlık

$y(t)$ rastsal bir değişken ve bu değişkene ait ortalama ve kovaryans fonksiyonları sırasıyla $m(t) = E(y(t))$ ve $r(s, t) = C(y(s), y(t))$ olduğunda stokastik süreç $\{y(t), t \in \mathbb{R}\}$,

$$E(y(t)) = m \quad (2.2.2.1.1)$$

$$r(t) = C(y(s+t), y(s)) \quad (2.2.2.1.2)$$

özelliklerini gösteriyorsa “zayıf durağan” (*weak stationary*) olarak tanımlanmaktadır.¹⁰⁹

2.2.2.2. Güçlü Durağanlık

Stokastik sürecin zayıf durağanlık özelliklerini taşımasının yanı sıra $y(t_1 + \tau), \dots, y(t_1 + \tau)$ ’lerin n -boyutlu dağılımları τ (*zaman*)’den bağımsızsa, süreç “güçlü durağan” (*strictly stationary*) olarak ifade edilir.

2.2.2.3. Gaussian Durağanlık

Stokastik sürecin güçlü durağanlık özelliklerini taşımasının yanı sıra olasılık yoğunluk fonksiyonu normal dağılım özelliği taşıyorsa süreç “Gaussian durağanlık” olarak adlandırılmaktadır.¹¹⁰

2.2.3. Saf Hata Terimi

Değişkenin özdeş, bağımsız ve sıfır ortalamalı dağılım özelliklerine sahip olması durumunda “saf hata terimi” (*white noise*) olarak ifade edilir. Bu özellikler hata terimi için,

¹⁰⁸ Douglas C. Montgomery, Cheryl L. Jennings ve Murat Kulahci, **Introduction to Time Series Analysis and Forecasting**, 1. Edition, New Jersey: John Wiley & Sons, 2008, s.234.

¹⁰⁹ Georg Lindgren, **Stationary Stochastic Processes Theory and Applications**, 1. Edition, New York: CRC Press Taylor & Francis Group, 2013, s.14.

¹¹⁰ James D. Hamilton, **Time Series Analysis**, 1. Edition, New Jersey: Princeton University Press, 1994, s.46.

$$E(\varepsilon_t) = 0, \quad \forall t, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.2.3.1)$$

$$\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma^2, \quad \forall t, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.2.3.2)$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = 0, \quad t \neq s, \quad \forall s = 0, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.2.3.3)$$

şeklinde gösterilebilir.¹¹¹

2.3. OTOKOVARYANS, OTOKORELASYON VE KİSMİ OTOKORELASYON FONKSİYONLARI

2.3.1. Otokovaryans Fonksiyonu

Durağanlık yaklaşımı $p(y_{t_1}, y_{t_2})$ ortak olasılık dağılımının tüm t_1, t_2 zamanlarında aynı olduğunu ifade etmektedir. Özellikle k sabit gecikmeyle y_t ve y_{t+k} değerleri arasındaki kovaryans, durağanlık yaklaşımı altında tüm t 'ler için aynı olmak zorundadır. Buradaki kovaryans “otokovaryans” olarak adlandırılmakta ve k gecikmeli otokovaryans,

$$\gamma_k = \text{cov}[y_t, y_{t+k}] = E[(y_t - \mu)(y_{t+k} - \mu)] \quad (2.3.1.1)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.¹¹² T gözlem sayısı için örnek otokovaryans fonksiyonu,

$$\hat{\gamma}(k) = T^{-1} \sum_{t=1}^{T-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y}), \quad -T < k < T \quad (2.3.1.2)$$

$T - k$, serbestlik derecesini ve \bar{y} , seri değerlerinin ortalamasını ifade etmektedir.¹¹³

¹¹¹ James D. Hamilton, **Time Series Analysis**, 1. Edition, New Jersey: Princeton University Press, 1994, s.47.

¹¹² Walter Enders, **Applied Econometric Time Series**, 4. Edition, University of Alabama: John Wiley & Sons, 2015, s.54.

¹¹³ Peter J. Brockwell ve Richard A. Davis, **Introduction to Time Series and Forecasting**, 3. Edition, Switzerland: Springer, 2016, s.16.

2.3.2. Otokorelasyon Katsayıları ve Fonksiyonu

Zaman serisinin özelliklerini belirlemede önemli bir istatistik olan ve gözlem değerlerinin farklı zamanlardaki korelasyon ölçüsünü ifade eden otokorelasyon katsayıları, serinin olasılık yapısının belirlenmesinde yardımcı olmaktadır. Basit anlamda x ve y değişkenlerine ait korelasyon katsayısı,

$$r = \frac{\sum (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_t - \bar{x})^2 \sum (y_t - \bar{y})^2}} \quad (2.3.2.1)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.¹¹⁴ Benzer şekilde otokorelasyon katsayıları teorik olarak,

$$\rho_k = \frac{E[(y_t - \mu)(y_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{E[(y_t - \mu)^2] E[(y_{t+k} - \mu)^2]}} = \frac{E[(y_t - \mu)(y_{t+k} - \mu)]}{\sigma_y^2} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (2.3.2.2)$$

formülüyle hesaplanmaktadır. Burada varyansın $t+k$ ve t dönemlerinde birbirine eşit olması sebebiyle $\sigma_y^2 = \gamma_0$ olacaktır. Buradan $\rho_k = \gamma_k/\gamma_0$ şeklinde hesaplanması, $\rho_0 = 1$ olmasına işaret edecektir.

y_t ve y_{t+k} arasındaki korelasyon ile y_t ve y_{t-k} arasındaki korelasyon aynı olması nedeniyle otokorelasyon katsayılarının simetrik olma özelliği bulunmaktadır. Simetrik olma özelliği y_t 'nin durağan olması durumunda geçerlidir.¹¹⁵

$$\gamma(k) = \text{cov}(y_t, y_{t+k}) = \text{cov}(y_{t-k}, y_t) = \text{cov}(y_t, y_{t-k}) = \gamma(-k) \quad (2.3.2.3)$$

$$\rho(k) = \rho(-k) \quad (2.3.2.4)$$

Otokorelasyon katsayılarının yorumlanmasına yardımcı olan ve korelogram olarak adlandırılan grafik, k gecikmeye karşılık r_k 'yi göstermektedir. Bazı durumlarda

¹¹⁴ Chris Chatfield, **The Analysis of Time Series An Introduction**, 5. Edition, United Kingdom: Chapman & Hall/CRC, 1997, s.18.

¹¹⁵ Chris Chatfield, **The Analysis of Time Series An Introduction**, 5. Edition, United Kingdom: Chapman & Hall/CRC, 1997, s.30.

otokorelasyon katsayılarının yorumlanması kolay olmamaktadır. Bu nedenle karşılaşılabilecek durumlar aşağıdaki gibi özetlenmiştir.

- Zaman serisinin rastsal olması durumunda, T gözlem için $r_k \sim 0$ olacaktır. Rastsal r_k zaman serisinin olasılık dağılımı yaklaşık olarak $T(0, 1/T)$ olacak ve $k-1$ tane r_k değerlerinin $\mp 2/\sqrt{T}$ aralığında olması beklenecektir.¹¹⁶
- Zaman serisinin trende sahip olması durumunda r_k değerleri yüksek gecikmeler hariç sıfır ortalamaya düşmeyecektir. Bunun nedeni genel ortalama gözlem sayısı arttıkça aynı yönde yeni ortalamaya eğilimli olacaktır.
- Zaman serisinin mevsimsel etki taşıması durumunda korelogram aynı frekanslarda salınım gösterecektir. Örneğin aylık gözlemlerde, r_6 “büyük” ve negatif olurken r_{12} “büyük” ve pozitif olacaktır. k gecikme boyunca r_k sinüs dalgaları şeklinde bir yol izleyecektir. Örneğin,

$$r_k = a \cos k\omega \quad (2.3.2.5)$$

denkleminde a , sabiti ve ω , $0 < \omega < \pi$ aralığındaki frekansı ifade etmektedir. Bu gözlem sayısının büyük olması durumunda,

$$r_k \approx \cos k\omega \quad (2.3.2.6)$$

olarak da ifade edilebilmektedir.¹¹⁷

- Zaman serisinin bir veya birden fazla uç değer (*outlier*) taşıması durumunda, otokorelasyon katsayıları etkilenebileceğinden, korelogram analizi yapılmadan önce uç değerlerin düzeltilmesi gerekmektedir.¹¹⁸

¹¹⁶ Chris Chatfield, **The Analysis of Time Series An Introduction**, 5. Edition, United Kingdom: Chapman & Hall/CRC, 1997, s.21.

¹¹⁷ Chris Chatfield, **The Analysis of Time Series An Introduction**, 5. Edition, United Kingdom: Chapman & Hall/CRC, 1997, s.22-23.

¹¹⁸ Chris Chatfield, **The Analysis of Time Series An Introduction**, 5. Edition, United Kingdom: Chapman & Hall/CRC, 1997, s.24.

2.3.3. Kısmi Otokorelasyon Katsayıları ve Fonksiyonu

y_{t-2} , AR(1) modelinde yer almamasına rağmen y_t ve y_{t-2} arasında korelasyon bulunabilmektedir. Bu durum iki rastsal değişkenin üçüncü bir değişken ile ilişkisini göstermekte ve otokorelasyon fonksiyonu dolaylı korelasyonları ifade etmektedir. Kısmi otokorelasyon fonksiyonu (PACF) ise y_t ve y_{t-k} arasındaki ilişkiyi $y_{t-1}, \dots, y_{t-k+1}$ değerlerinin etkisini ortadan kaldırarak ortaya koymaktadır. Genellikle PACF'nin hesaplanması adına başvurulan yöntemlerinde birisi,

$$y^* \equiv y_t - \mu \quad (2.3.3.1)$$

olmak üzere,

$$y_t^* = \phi_{11} y_{t-1}^* + e_t \quad (2.3.3.2)$$

olmaktadır. ϕ_{11} , y_t ve y_{t-1} arasındaki hem otokorelasyon hem de kısmi otokorelasyon katsayısıdır. İkinci dereceden otoregresyon denklemi ise,

$$y_t^* = \phi_{11} y_{t-1}^* + \phi_{22} y_{t-2}^* + e_t \quad (2.3.3.3)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada ϕ_{22} , y_t ve y_{t-2} arasındaki kısmi otokorelasyon katsayısıdır. Bu yöntem ile k gecikmeye kadar olan kısmi otokorelasyon katsayılarının hesaplanması mümkündür. Bir diğer yöntem ise Yue-Walker denklemleri yardımıyla olmakta ve

$$\phi_{11} = \rho_1 \quad (2.3.3.4)$$

$$\phi_{22} = (\rho_2 - \rho_1^2) / (1 - \rho_1^2) \quad (2.3.3.5)$$

$$\phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\phi_{k-1,j})(\rho_{k-j})}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} (\phi_{k-1,j})(\rho_j)}, \quad k = 3, 4, 5 \dots \quad (2.3.3.6)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.¹¹⁹

2.3.4. Otokorelasyon ve Kısmi Otokorelasyon Katsayılarının İstatistiksel Anlamlılığının Sınanması

Zaman serilerinin durağanlığının belirlenmesi için otokorelasyon katsayılarının istatistiksel olarak anlamlılıklarının sınanması gerekmektedir.

2.3.4.1. Bartlett Testi

M.S. Bartlett'a (1946) göre, $k + 1$ indeks değerinden itibaren tüm otokorelasyon katsayılarının ortadan kalktığı stokastik süreçlere ait otokorelasyon katsayılarının varyansı yaklaşık olarak,

$$V[\hat{\rho}(\tau)] \approx \frac{1}{T} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^k \hat{\rho}(j)^2 \right), \quad \tau > k, \quad \tau = 1, 2, \dots, T-1 \quad (2.3.4.1.1)$$

hesaplanmakta ve $\tau > k$ için $\rho(\tau) = 0$ olmaktadır. Tahmin edilen zaman serisi modellerinin değerlendirilmesi amacıyla, kalıntıların rastsal süreç özelliklerini gösterip göstermediği önem arz etmektedir. Bu nedenle teste ilişkin temel ve alternatif hipotez,

$$H_0 : \rho(\tau) = 0, \quad \tau = 1, 2, \dots, m, \quad m < T \quad (2.3.4.1.2)$$

$$H_1 : \rho(\tau) \neq 0, \quad \tau = 1, 2, \dots, m, \quad m < T \quad (2.3.4.1.3)$$

şeklinde kurulmaktadır. %95 güven düzeyi için $\pm 2/\sqrt{T}$ aralığında olan tüm tahmin edilmiş korelasyon katsayıları temel hipotez altında geçerli olacaktır. Diğer bir ifadeyle örnek otokorelasyon katsayılarının sıfırdan farklı olmadığına, katsayıların istatistiksel olarak anlamsız olduğuna karar verilir.

¹¹⁹ Walter Enders, **Applied Econometric Time Series**, 4. Edition, University of Alabama: John Wiley & Sons, 2015, s.65.

Herhangi bir örnek otokorelasyon katsayısının belirtilen sınırlar dışına çıkması durumunda temel hipotez reddedilmektedir. Böyle bir durumda tahmin edilen otokorelasyon katsayısı istatistiksel olarak anlamlı ve sıfırdan farklıdır.¹²⁰

2.3.4.2. Portmanteau Testi

Otokorelasyon katsayılarının tek tek sınındığı Bartlett testinden farklı olarak katsayıların anlamlılığının eş anlı olarak sınanmasına imkân veren ilk test Box ve Pierce (1970) tarafından önerilmiştir. Hipotezler,

$$H_0 : \rho_1 = \dots = \rho_m = 0 \quad (2.3.4.2.1)$$

$$H_1 : \rho_1 \neq \dots \neq \rho_m \neq 0 \quad (2.3.4.2.2)$$

şeklinde ifade edilmekte ve sıfır hipotezi altında Portmanteau istatistiği,

$$Q(m) = T \sum_{k=1}^m \hat{\rho}_k^2 \quad (2.3.4.2.3)$$

olarak hesaplanmaktadır. 1978 yılında ise Ljung and Box tarafından $Q^*(m)$ istatistiği sonlu örnekler için geliştirilerek, testin gücü artırılmıştır.

$$Q^*(m) = T(T+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k} \quad (2.3.4.2.4)$$

$Q^*(m)$ ve $Q(m)$ test istatistikleri asimtotik olarak m serbestlik derecesiyle Ki-Kare dağılımına sahiptir. $Q^*(m)$ veya $Q(m) > X_m^2$ olduğunda sıfır hipotezi reddedilir ve örnek otokorelasyon katsayılarından biri ya da birkaçının istatistiksel olarak anlamlı olduğuna karar verilir.¹²¹

¹²⁰ Gebhard Kirchgässner and Jürgen Wolters, **Introduction to Modern Time Series Analysis**, 1. Edition, Heidelberg: Springer, 2007, s.17

¹²¹ Ruey S. Tsay, **Analysis of Financial Time Series**, 3. Edition, Chicago: John Wiley & Sons, 2010, s.32.

2.4. DOĞRUSAL ZAMAN SERİSİ ANALİZİ

y_t zaman serisinin aşağıdaki şekilde modellenilebiliyor olması durumunda doğrusal olduğu kabul edilmektedir.

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} \quad (2.4.1)$$

Denklemden yer alan μ , y_t zaman serisinin ortalamasını, $\psi_0 = 1$ ve ε_t , sıfır ortalamalı ve dağılımı iyi tanımlanmış *IDD* rastsal değişkeni ifade etmektedir (*saf hata terimidir*). Zaman serisi yazımında ε_t 'nin “şok” veya “yenilik” (*innovation*), ψ ise y_t 'nin ağırlıkları olarak ifade edildiği bilinmektedir. y_t 'nin zayıf durağan olduğu durumda, y_t serisinin ortalaması ve varyansı aşağıdaki denklemler yardımıyla kolaylıkla hesaplanabilmektedir.

$$E(y_t) = \mu, \quad \text{Var}(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 \quad (2.4.2)$$

σ_ε^2 , ε_t 'nin varyansını temsil etmektedir. y_t 'nin k -gecikmeli otokovaryansı,

$$\gamma_k = \text{Cov}(y_t, y_{t-k}) = E \left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \varepsilon_{t-i} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-k-j} \right) \right] \quad (2.4.3)$$

ile ifade edilmektedir.¹²² Ayrıca ψ ağırlıklarının, y_t 'nin otokorelasyonlarıyla olan ilişkisi,

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i+k}}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^2}, \quad k \geq 0 \quad (2.4.4)$$

gibi olmaktadır ve $\psi_0 = 1$ 'dir.¹²³

¹²² Ruey S. Tsay, **Analysis of Financial Time Series**, 3. Edition, Chicago: John Wiley & Sons, 2010, s.36.

¹²³ Ruey S. Tsay, **Analysis of Financial Time Series**, 3. Edition, Chicago: John Wiley & Sons, 2010, s.37.

2.5. DURAĞAN ARIMA MODELLERİ

2.5.1. Otoregresif Modeller: ARIMA(p,0,0) = AR(p)

AR(p) sürecine ait parametre seti $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ olarak belirtildiğinde otoregresif süreç,

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \quad (2.5.1.1.1)$$

$$(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p) y_t = \phi(B) y_t = \varepsilon_t \quad (2.5.1.1.2)$$

olmakta ve y_t durağan süreci ifade etmektedir. Birinci dereceden otoregresif süreç,

$$(1 - \phi_1 B) y_t = \varepsilon_t \quad (2.5.1.1.3)$$

$$y_t = (1 - \phi_1 B)^{-1} \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j} \quad (2.5.1.1.4)$$

eşitliğinin sağında sonsuza yakınsayan seriler şeklinde yazılabilmektedir. Dolayısıyla,

$$\psi(B) = (1 - \phi_1 B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j \quad (2.5.1.1.5)$$

olmaktadır.¹²⁴ AR(1) süreci için durağanlık $|\phi_1| < 1$ koşuluna bağlıdır. AR(p) süreci,

$$y_t = \phi^{-1}(B) \varepsilon_t \equiv \psi(B) \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad (2.5.1.1.6)$$

$$\phi(B) = (1 - G_1 B)(1 - G_2 B) \dots (1 - G_p B) \quad (2.5.1.1.7)$$

olarak ifade edildiğinde $\phi(B) = 0$ kökleri $G_1^{-1}, \dots, G_p^{-1}$ olmaktadır. $\phi^{-1}(B)$ genişletildiğinde ise,

¹²⁴ George E. P.Box, Gwilym M. Jenkins ve Gregory C. Reinsel, **Time Series Analysis Forecasting and Control**, 4. Edition, New Jersey: John Wiley & Sons, 2008, s.55.

$$y_t = \phi^{-1}(B)\varepsilon_t = \sum_{i=0}^p \frac{K_i}{1-G_i B} \varepsilon_t \quad (2.5.1.1.8)$$

olacaktır. $|B| \leq 1$ için $\psi(B) = \phi^{-1}(B)$ yakınsak seri olduğu durumda, diğer bir ifadeyle, $\psi_j = \sum_{i=1}^p K_i G_i^j$ ağırlıkları tamamıyla toplanabilir ise $AR(p)$ durağan süreci ifade edecektir. Ayrıca $|G_i| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, p$) olmalıdır.¹²⁵

Otoregresif süreci ifade eden $AR(p)$ modelinin durağan olup olmaması sorgulanırken her zaman $MA(q)$ modeline çevrilebilir özelliindedir.

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t = \phi(\phi Y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \phi^2(\phi Y_{t-3} + \varepsilon_{t-2}) + \phi \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.5.1.1.9)$$

$$Y_t = \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \phi^3 Y_{t-3} + \dots = \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \phi^{j-1} \varepsilon_{t-(j-1)} + \phi^j Y_{t-j} \quad (2.5.1.2.0)$$

$$Y_t = \sum_{i=0}^{j-1} \phi^i \varepsilon_{t-i} + \phi^j Y_{t-j} = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i} \quad (2.5.1.2.1)$$

$|\phi| < 1$ ve $j \rightarrow \infty$ olduğundan, $\phi^j Y_{t-j} \rightarrow 0$ olacaktır. $|\phi| < 1$ iken $AR(1)$ süreci $MA(\infty)$ 'a eşit olacaktır.¹²⁶

$AR(p)$ sürecinin ortalaması,

$$E(Y_t) = E\left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i E(\varepsilon_{t-i}) = 0 \quad (2.5.1.2.2)$$

olmaktadır.¹²⁷ $AR(p)$ sürecinin varyansı,

$$V(Y_t) = E(Y_t^2) = E\left\{\left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \varepsilon_{t-i}\right)^2\right\} = E\left\{\left(\varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \dots\right)^2\right\} \quad (2.5.1.2.3)$$

¹²⁵ George E. P.Box, Gwilym M. Jenkins ve Gregory C. Reinsel, **Time Series Analysis Forecasting and Control**, 4. Edition, New Jersey: John Wiley & Sons, 2008, s.56.

¹²⁶ Walter Enders, **Applied Econometric Time Series**, 4. Edition, University of Alabama: John Wiley & Sons, 2015, s.53.

¹²⁷ Walter Enders, **Applied Econometric Time Series**, 4. Edition, University of Alabama: John Wiley & Sons, 2015, s.53.

$$V(Y_t) = E\left\{\left(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \dots\right)\left(\varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \dots\right)\right\} \quad (2.5.1.2.4)$$

$$V(Y_t) = E\left\{\left(\varepsilon_t^2 + \phi^2\varepsilon_{t-1}^2 + \phi^4\varepsilon_{t-2}^2 + \phi^6\varepsilon_{t-3}^2 + \dots\right)\right\} \quad (2.5.1.2.5)$$

$$V(Y_t) = \sigma^2 + \phi^2\sigma^2 + \phi^4\sigma^2 + \phi^6\sigma^2 + \dots = \sigma^2(1 + \phi^2 + \phi^4 + \phi^6 + \dots) \quad (2.5.1.2.6)$$

$$V(Y_t) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i} = \frac{1}{1-\phi^2} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} \quad (2.5.1.2.7)$$

olmaktadır.¹²⁸ AR(p) sürecinin kovaryansı,

$$Y_t = \sum_{i=0}^{s-1} \phi^i \varepsilon_{t-i} + \phi^s Y_{t-s} \quad (2.5.1.2.8)$$

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-s}) = E(Y_t, Y_{t-s}) = E\left\{\left(\sum_{i=0}^{s-1} \phi^i \varepsilon_{t-i} + \phi^s Y_{t-s}\right)(Y_{t-s})\right\} \quad (2.5.1.2.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega [1 - \beta(1)]^{-1} + \left\{1 - [1 - \beta(L)]^{-1} \phi(L)(1-L)^d\right\} \varepsilon_t^2 \\ &\equiv \omega [1 - \beta(1)]^{-1} + \lambda(L) \varepsilon_t^2 \end{aligned} \quad (2.5.1.3.0)$$

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-s}) = E\left(Y_{t-s} \sum_{i=0}^{s-1} \phi^i \varepsilon_{t-i}\right) + \phi^s E(Y_{t-s}^2) = 0 + \phi^s V(Y_t) = \phi^s \frac{\sigma^2}{1-\phi^2} \quad (2.5.1.3.1)$$

olmaktadır.¹²⁹

2.5.2. Hareketli Ortalama Modelleri ARIMA(0,0, q) = MA(q)

MA(q) sürecine ait parametre seti $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ olarak belirtildiğinde hareketli ortalama süreci,

¹²⁸ Walter Enders, **Applied Econometric Time Series**, 4. Edition, University of Alabama: John Wiley & Sons, 2015, s.54.

¹²⁹ Walter Enders, **Applied Econometric Time Series**, 4. Edition, University of Alabama: John Wiley & Sons, 2015, s.54.

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.5.2.1.1)$$

olacaktır. Gecikme operatörüyle yazıldığında ise,

$$y_t = (1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t = \theta(B) \varepsilon_t \quad (2.5.2.1.2)$$

şeklinde ifade edilecektir. Birinci dereceden hareketli ortalama süreci göz önüne alındığında,

$$y_t = (1 - \theta_1 B) \varepsilon_t \quad (2.5.2.1.3)$$

$|\theta_1| < 1$ olduğunda süreç çevrilebilirdir. Böylelikle,

$$\pi(B) = (1 - \theta_1 B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_1^j B^j \quad (2.5.2.1.4)$$

ve $(1 - \theta_1 B) = 0$ kökü $B = \theta_1^{-1}$ olacaktır. Yüksek dereceden MA süreci ise,

$$\varepsilon_t = \theta^{-1}(B) y_t \quad (2.5.2.1.5)$$

olmaktadır. Buradan,

$$\theta(B) = \prod_{i=1}^q (1 - H_i B) \quad (2.5.2.1.6)$$

ve $\theta(B) = 0$ kökleri $H_1^{-1}, \dots, H_q^{-1}$ olacaktır.¹³⁰ İfade genişletildiğinde,

$$\pi(B) = \theta^{-1}(B) = \sum_{i=1}^q \left(\frac{M_i}{1 - H_i B} \right) \quad (2.5.2.1.7)$$

olarak yazılmakta ve eğer $|H_i| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, q$) ise $\pi_j = -\sum_{i=1}^q M_i H_i^j$ ağırlıkları tamamıyla toplanabilir olacaktır. Bu durumda $MA(q)$ sürecinin karakteristik denklemi,

¹³⁰ George E. P.Box, Gwilym M. Jenkins ve Gregory C. Reinsel, **Time Series Analysis Forecasting and Control**, 4. Edition, New Jersey: John Wiley & Sons, 2008, s.71.

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q = 0 \quad (2.5.2.1.8)$$

şeklinde ifade edilmektedir. $\theta(B)\pi(B) = 1$ ilişkisi dikkate alındığında ise π_j ağırlıkları,

$$\pi_j = \theta_1 \pi_{j-1} + \theta_2 \pi_{j-2} + \dots + \theta_q \pi_{j-q} \quad j > 0 \quad (2.5.2.1.9)$$

fark denkleminde uygun olmaktadır. Ayrıca,

$$\psi(B) = \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q \quad (2.5.2.2.0)$$

serisinin sonlu olması durağanlık için hareketli ortalama sürecine ait parametrelere herhangi bir kısıt gerektirmez.¹³¹

MA(q) modeli AR(p) modeline her zaman çevrilebilir durumda ve,

$$Y_t = -\theta Y_{t-1} - \theta^2 Y_{t-2} - \dots - \theta^{j-1} Y_{t-(j-1)} + \varepsilon_t - \theta^j \varepsilon_{t-j} = \sum_{i=1}^{j-1} -\theta^i Y_{t-i} + \varepsilon_t - \theta^j \varepsilon_{t-j} \quad (2.5.2.2.1)$$

$$Y_t = \sum_{i=1}^{j-1} -\theta^i Y_{t-i} + \varepsilon_t - \theta^j \varepsilon_{t-j} \quad \text{ve} \quad |\theta| < 1 \quad j \rightarrow \infty \quad \text{iken} \quad \theta \rightarrow 0 \quad (2.5.2.2.2)$$

$$Y_t = \sum_{i=1}^{\infty} -\theta^i Y_{t-i} + \varepsilon_t \quad (2.5.2.2.3)$$

şeklinde gösterilmektedir. MA(q) sürecinin ortalaması,

$$E(Y_t) = E(\varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_t) - \theta E(\varepsilon_{t-1}) = \mu = 0 \quad (2.5.2.2.4)$$

olmaktadır. MA(q) sürecinin varyansı,

$$V(Y_t) = E(Y_t^2) = E\left\{(\varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1})^2\right\} = E\left(\varepsilon_t^2 + \theta^2 \varepsilon_{t-1}^2 - 2\theta \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}\right) \quad (2.5.2.2.5)$$

¹³¹ George E. P.Box, Gwilym M. Jenkins ve Gregory C. Reinsel, **Time Series Analysis Forecasting and Control**, 4. Edition, New Jersey: John Wiley & Sons, 2008, s.72.

$$V(Y_t) = E(\varepsilon_t^2) + \theta^2 E(\varepsilon_{t-1}^2) - 2\theta E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = \sigma^2 + \theta^2 \sigma^2 - 2\theta \cdot 0 \quad (2.5.2.2.6)$$

$$V(Y_t) = \sigma^2(1 + \theta^2) = \sigma^2 \left(1 + \sum_{i=1}^q \theta_i^2\right) \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^q \theta_i^2 < \infty \quad (2.5.2.2.7)$$

şeklinde gösterilmektedir.¹³²

MA(q) sürecinin otokovaryansı,

$$\rho_s = \begin{cases} \frac{-\theta}{1 + \theta^2} & , \quad s = 1 \\ 0 & , \quad s > 1 \end{cases} \quad (2.5.2.2.8)$$

$$Cov(Y_t, Y_{t-s}) = E(Y_t, Y_{t-s}) = E\{(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-s} - \theta\varepsilon_{t-s-1})\} \quad (2.5.2.2.9)$$

$$Cov(Y_t, Y_{t-s}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s} - \theta\varepsilon_t \varepsilon_{t-s-1} - \theta\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-s} + \theta^2 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-s-1}) \quad (2.5.2.3.0)$$

$$s = 1, Cov(Y_t, Y_{t-s}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) - \theta E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) - \theta E(\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}) + \theta^2 E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) = \theta \sigma^2 \quad (2.5.2.3.1)$$

$$s > 1, Cov(Y_t, Y_{t-s}) = 0 \quad (2.5.2.3.2)$$

olmaktadır.¹³³

2.5.3. Otoregresif Hareketli Ortalama Modeli: ARIMA($p,0,q$) = ARMA(p,q)

ARIMA($p,0,q$) süreci hem otoregresif hem de hareketli ortalama terimlerini içermekte ve

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (2.5.3.1)$$

¹³² Gebhard Kirchgässner ve Jürgen Wolters, **Introduction to Modern Time Series Analysis**, 1. Edition, Heidelberg: Springer, 2007, s.64.

¹³³ James D. Hamilton, **Time Series Analysis**, 1. Edition, New Jersey: Princeton University Press, 1994, s.48.

$$Y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} \quad (2.5.3.2)$$

olarak ifade edilmektedir. Süreç gecikme operatörü yardımıyla gösterildiğinde ise,

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) Y_t = c + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \varepsilon_t \quad (2.5.3.3)$$

olmakta ve sürece ait kökler,

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0 \quad (2.5.3.4)$$

şeklinde yazılmakta ve birim çemberin dışına düşmektedir.¹³⁴ (2.5.3.3)'de yer alan denklemin her iki tarafı $(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)$ 'ye bölüldüğünde,

$$Y_t = \mu + \psi(L) \varepsilon_t \quad (2.5.3.5)$$

elde edilir ve

$$\psi(L) = \frac{(1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q)}{(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p)} \quad (2.5.3.6)$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty \quad (2.5.3.7)$$

$$\mu = c / (1 - \phi_1 - \phi_2 - \dots - \phi_p) \quad (2.5.3.8)$$

olmaktadır. ARMA(p, q) sürecinde durağanlık tamamıyla $\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p$ otoregresif parametrelerine bağlı olup, $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_q$ hareketli ortalama parametrelerine bağlı değildir. Durağanlığın sağlanabilmesi için otoregresif parametrelerin toplamının mutlak değeri 1'den küçük olmalıdır. $|\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_q| < 1$ olması ise sürecin çevrilebilir olduğunu ifade etmektedir.

¹³⁴ James D. Hamilton, **Time Series Analysis**, 1. Edition, New Jersey: Princeton University Press, 1994, s.59.

ARMA(p,q) sürecinin bir diğer gösterimi olan ortalamadan sapma yöntemiyle gösterimi ise,

$$Y_t - \mu = c + \phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \phi_2(Y_{t-2} - \mu) + \dots + \phi_p(Y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t + \theta_1\varepsilon_{t-1} + \theta_2\varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q\varepsilon_{t-q} \quad (2.5.3.9)$$

olmaktadır.¹³⁵

2.5.3.1. Otoregresif Hareketli Ortalama Sürecinin ARIMA($p,0,q$) Özellikleri

ARMA(p,q) sürecinin ortalamasının zaman içinde sabit olduğu bilinmektedir.

$$E(Y_t) - \phi_1 E(Y_{t-1}) = \phi_0 + E(\varepsilon_t) - \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) \quad (2.5.3.1.1)$$

Tüm $E(\varepsilon_t) = 0$ olacağından, Y_t serisinin ortalaması,

$$E(Y_t) = \mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1} \quad (2.5.3.1.2)$$

şeklinde olacaktır ve Y_t serisi zayıf durağandır ($\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p < 1$).¹³⁶

ARMA(p,q) sürecinin varyansı,

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_t) &= \gamma_0 \\ &= E\left[Y_t(\phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q})\right] \\ &= \phi_1 E(Y_t Y_{t-1}) + \dots + \phi_p E(Y_t Y_{t-p}) + E(\varepsilon_t Y_t) + \theta_1 E(\varepsilon_{t-1} Y_t) + \dots + \theta_q E(\varepsilon_{t-q} Y_t) \end{aligned} \quad (2.5.3.1.2.1)$$

$E(Y_t \varepsilon_t) = \sigma^2$, $E(Y_t \varepsilon_{t-1}) = 0$ ve $\gamma_k = \gamma_{-k}$ olduğundan varyans,

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \dots + \phi_p \gamma_p + \sigma_\varepsilon^2 \quad (2.5.3.1.2.2)$$

şeklinde olmaktadır.¹³⁷

¹³⁵ James D. Hamilton, **Time Series Analysis**, 1. Edition, New Jersey: Princeton University Press, 1994, s.60.

¹³⁶ Ruey S. Tsay, **Analysis of Financial Time Series**, 3. Edition, Chicago: John Wiley & Sons, 2010, s.64.

¹³⁷ Işıl Akgül, **Zaman Serilerinin Analizi ve ARIMA Modelleri**, 1. Basım, İstanbul: Der Yayınları, 2003, s.90.

ARMA(p,q) sürecinin otokovaryansı $k \geq q + 1$,

$$\Phi(L)Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t \quad (2.5.3.1.3.1)$$

$$Y_t + \sum_{j=1}^p \phi_j Y_{t-j} = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (2.5.3.1.3.2)$$

$$\gamma(k) + \sum_{j=1}^p \phi_j \gamma(k-j) = \text{cov} \left(Y_{t-k}, \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \right) = 0 \quad (2.5.3.1.3.3)$$

$$\gamma(k) + \sum_{j=1}^p \phi_j \gamma(k-j) = 0, \quad \forall k \geq q+1 \quad (2.5.3.1.3.4)$$

olacaktır.¹³⁸

Tezin uygulama kısmında ARIMA modelleri Box ve Jenkins model kurma stratejisine göre oluşturulmuş ve aşağıda model kurma stratejisine ait bilgi verilmiştir.

2.6. BOX VE JENKINS MODEL KURMA STRATEJİSİ

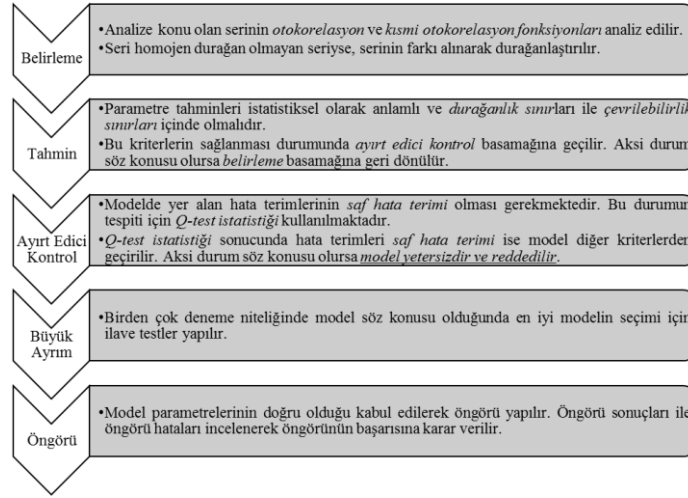
1970 yılında George E. P. Box ve Gwilym M. Jenkins tarafından geliştirilen model kurma stratejisi “*cimrilik*” prensibine dayanmaktadır. Cimrilik prensibiyle anlatılmak istenen şey, verinin özelliklerini yeterli bir şekilde açıklayan model için mümkün olan en az parametrenin kullanılmasıdır. Bununla birlikte, Box ve Jenkins önerdikleri model kurma stratejisinin optimallik ölçütlerini temel almayan pratik bir yaklaşım olarak nitelendirmektedir.¹³⁹

Box ve Jenkins dört basamaklı bir model kurma stratejisi geliştirmişlerdir. İlk basamakta model “*belirlenir*”, ikinci basamakta “*tahmin*” edilir, üçüncü basamakta genellikle “*büyük ayırım*” basamağını da barındıran “*ayırt edici kontrol*”dür. En son basamak ise “*ileriye yönelik tahmin/öngörü*” olarak ifade edilmektedir.¹⁴⁰

¹³⁸ Christian Gourieroux ve Alain Monfort, **Time Series and Dynamic Models**, 1. Edition, United Kingdom: Cambridge University Press, 1997, s.161.

¹³⁹ Işıl Akgül, **Zaman Serilerinin Analizi ve ARIMA Modelleri**, 1. Basım, İstanbul: Der Yayınları, 2003, s.113.

¹⁴⁰ Işıl Akgül, **Zaman Serilerinin Analizi ve ARIMA Modelleri**, 1. Basım, İstanbul: Der Yayınları, 2003, s.114.



Şekil 28: Box ve Jenkins Model Kurma Stratejisi

Kaynak: Işıl Akgül, **Zaman Serilerinin Analizi ve ARIMA Modelleri**, 1. Basım, İstanbul: Der Yayınları, 2003, s.116.

2.6.1. Belirleme

Belirleme basamağı, ARIMA modellerinin p, d, q derecelerinin belirlenmesi amacıyla başta otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonlarının kullanıldığı aşamadır. Bu aşama, derecelerin belirlenmesi için önemli ve zorlu bir aşamadır. Serinin gereğinden fazla farkının alınması anlamsız sonuçlara yol açabilmekte ve bilgi kaybına neden olmaktadır.

Trendi olmayan bir serinin sabit bir ortalama etrafında salınması söz konusu ise durağan olduğu kabul edilmektedir. Mevsim etkisi taşımayan fakat trend etkisi taşıyan serilerde ise birinci veya ikinci dereceden farklarının alınmasıyla trend etkisi ortadan kaldırılır.¹⁴¹ Bu dönüştürme işlemleri yapılmadan önce değişen varyansın azaltılması/ortadan kaldırılması için serilerinin logaritmasının alınması gerekmektedir.¹⁴²

Tablo 1: Otokorelasyon ve Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu

Model	Otokorelasyon Fonksiyonu (OKF)	Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu (KOKF)
MA(q)	q -gecikme sonrası eksenini keser.	Üstel veya sinüs dalgali olarak azalır.
AR(p)	Üstel veya sinüs dalgali olarak azalır.	p -gecikme sonrası eksenini keser.

¹⁴¹ Box-Jenkins trend ve mevsimsel etkiyi ortadan kaldırmak için stokastik veya deterministik ayrımına gitmeden serilerin farkının alınmasını önermesine rağmen durum bundan farklı olmaktadır. Stokastik mevsimsellik bulunan bir serinin mevsimsel farkı alınırken, deterministik mevsimselliğin olduğu bir seride kukla değişkenler eklenerek model kurulmaya çalışılır. Benzer şekilde stokastik trende sahip serinin farkı alınırken, deterministik trende sahip seride ise trendden arındırma işlemi uygulanmaktadır.

¹⁴² Işıl Akgül, **Zaman Serilerinin Analizi ve ARIMA Modelleri**, 1. Basım, İstanbul: Der Yayınları, 2003, s.117.

ARMA(p, q)	Üstel veya sinüs dalgalı olarak azalır. p -gecikme sonrası eksenini keser.	Üstel veya sinüs dalgalı olarak azalır. q -gecikme sonrası eksenini keser.
----------------	--	--

Kaynak: Işıl Akgül, **Zaman Serilerinin Analizi ve ARIMA Modelleri**, 1. Basım, İstanbul: Der Yayınları, 2003, s.120.

Tablo 1’de AR, MA ve ARMA modelleri için OKF ve KOKF’larının seyri belirtilmiştir. OKF ve KOKF’larının incelenmesiyle “deneme” niteliğindeki modelin oluşturulamaya çalışılır. Bununla birlikte birden fazla deneme modeli söz konusu olabilmektedir. Böyle bir durumda “ayrıt edici kontrol” basamağında en uygun model belirlenmektedir.

Serilerin korelogramını model kurulumunda yardımcı olsa da örnek otokorelasyon katsayılarının ve örnek kısmi otokorelasyon katsayılarının istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığının tespiti yapılmalıdır. İstatistiksel anlamlılığa karar verebilmek için daha önce bahsi geçen Bartlett veya Q-istatistiği testleri kullanılabilir.

2.6.2. Tahmin

“Deneme” basamağından sonraki aşamayı ifade eden “tahmin” basamağı, model parametrelerinin en iyi sapsız, tutarlı ve etkin tahminlerin hesaplandığı basamağı ifade etmektedir. Tahmin “En Küçük Kareler: EKK” yöntemiyle yapıldığında, hata terimlerinde görülen otokorelasyon etkisi sebebiyle etkin olmayan ve yüksek varyansa sahip parametre tahminleriyle karşı karşıya kalınacağından parametrelerin “Doğrusal Olmayan EKK” yönteminin kullanılması uygun olacaktır. Eğer hata terimleri normal dağılıyorsa “Maksimum Olabilirlik” yöntemi de kullanılabilir. Ayrıca düşük dereceler için Box ve Jenkins tarafından “Grid-Search” yöntemi önerilmiştir. Yöntem genellikle etkin sonuçlar vermemekte, fakat anlaşılmasının kolay olduğu belirtilmektedir. Yöntemde model parametreleri, durağanlık-çevrilebilirlik bölgelerinde değişmekte ve “toplam hata kare-THK”lerin hesaplanması ve seçilen parametrelerin THK’yi en küçük yapması temeline dayanmaktadır.¹⁴³

¹⁴³ Işıl Akgül, **Zaman Serilerinin Analizi ve ARIMA Modelleri**, 1. Basım, İstanbul: Der Yayınları, 2003, s.122.

Tahmin basamağında dikkat edilmesi gereken hususlar aşağıdaki gibi sıralanmaktadır.

- Tahmin edilen tüm AR ve MA parametrelerinin çevrilebilirlik ve durağanlık sınırları içinde olması gerekmektedir. Aksi durumda incelenen model reddedilerek yeni bir model belirlenir. Tahmin değerlerinin sınırlar içinde olmamasının birkaç nedeni olabilmektedir. Özellikle yanlış dereceden yapılan fark alma işlemleri, AR ve MA parametrelerini bu sınırların dışına çıkaracaktır.
- Tahmin edilen AR ve MA parametrelerinin istatistiksel olarak önemli olması gerekmektedir. Fakat modelin veriye uygunluğu sağlandıktan sonra tüm parametre tahminlerinin istatistiksel olarak önemli olması gerekmeyecektir. Katsayıların ve sabitin anlamlılığı sınanması için “*t-test istatistiği*” kullanılmaktadır. İstatistiksel olarak önemli olmayan parametreler modelden çıkarılıp, model yeniden tahmin edilir.¹⁴⁴

2.6.3. Ayırt Edici Kontrol

Box ve Jenkins’in model kurma stratejisinin üçüncü basamağı olan “*ayırt edici kontrol*” aşamasında, orijinal seriler ile benzetim serilerinin hem grafik hem de otokorelasyon fonksiyonlarının karşılaştırılması yapılmaktadır. Diğer bir ifadeyle modelin tahmin başarısı test edilmektedir. Karşılaştırılan serilerin grafiklerinin ve otokorelasyon fonksiyonlarının benzer çıkması durumunda, hata terimlerinin analizinin yapılması uygun olacaktır. Aksi durum söz konusu olduğunda ise model kurma stratejisinin birinci basamağına geri dönülerek model tekrardan belirlenir ve diğer işlemler tekrarlanır.

“*Deneme*” niteliğindeki denklem(ler) kurulduktan sonra, öngörü amacıyla kullanılmadan önce “*modelin uyum iyiliği*” başarısı için testler yapılmaktadır. Bu testler genel olarak hata terimlerine dayanmaktadır. Yapılan testlerden herhangi birinin başarısız

¹⁴⁴ Işıl Akgül, **Zaman Serilerinin Analizi ve ARIMA Modelleri**, 1. Basım, İstanbul: Der Yayınları, 2003, s.125.

olması durumunda model tekrardan belirlenmekte, önceki basamaklar da tekrarlanarak modelin uyum iyiliği yeniden sınanmaktadır.¹⁴⁵

Oluşturulan modelin ayırt edici kontrol basamağından geçebilmesi için model kalıntılarının saf hata terimi özelliklerini taşıması gerekmektedir.

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad (2.6.3.1)$$

$$V(\varepsilon_t) = \sigma^2 \quad (2.6.3.2)$$

$$E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = 0, \quad t \neq s \quad (2.6.3.3)$$

Diğer bir ifadeyle model,

$$\phi(B)\tilde{w}_t = \theta(B)\varepsilon_t$$

şeklinde tanımlandığında ve *Maksimum Benzerlik* yöntemi uygulanarak ϕ ve θ parametrelerinin tahminleri $\hat{\phi}$ ve $\hat{\theta}$ olarak elde edildiğinde modele ait kalıntılar,

$$\hat{\varepsilon}_t = \hat{\theta}^{-1}(B).\hat{\phi}(B)\tilde{w}_t \quad (2.6.3.4)$$

olacaktır. $w_t = \Delta^d Y_t$ 'dir. Modelin yeterli olduğu durumda,

$$\tilde{\varepsilon}_t = \varepsilon_t + \sigma \frac{1}{\sqrt{T}} \quad (2.6.3.5)$$

olacaktır [$\varepsilon_t \sim (0, \sigma^2)$]. Gözlem sayısının artmasıyla $\hat{\varepsilon}_t$ hata terimi, saf hata terimi olan ε_t 'ye yaklaşacaktır. Modelin iyi bir model olduğundan bahsedebilmek için model hata terimlerinin rastsal olması, otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının sıfır olması gerekmektedir.

¹⁴⁵ Işıl Akgül, *Zaman Serilerinin Analizi ve ARIMA Modelleri*, 1. Basım, İstanbul: Der Yayınları, 2003, s.127.

Otokorelasyondaki küçük gecikmelerin “2 x standart hata”dan küçük olması, modelin ayırt edici kontrol açısından anlamlı olduğuna karar verilir. Ayırt edici kontrolde kullanılan ve Bartlett(1947) tarafından %5 olasılıkla önerilen kriter,

$$\rho_k \Rightarrow \pm \frac{2}{\sqrt{T}} \quad (2.6.3.6)$$

olmaktadır.¹⁴⁶

2.6.4. Büyük Ayrım

Büyük ayrım basamağı, yapılan öngörünün başarısının değerlendirildiği aşamayı ifade etmektedir. Modelin örnek veriyi ne kadar iyi açıkladığını gösteren birçok istatistiksel ölçüt bulunmaktadır. Öngörü modelinin performansının değerlendirmesinde geleneksel olarak kullanılan “bir dönem sonraki öngörü hataları”,

$$\varepsilon_t(1) = y_t - \hat{y}_t(t-1) \quad (2.6.4.1)$$

olarak hesaplanmakta ve $\hat{y}_t(t-1)$, y_t 'nin bir dönem önceki öngörü değerini ifade etmektedir. T tane gözlem değerinin olduğu durumda T adet öngörü hatası olacaktır $[\varepsilon_t(1), t = 1, 2, \dots, T]$.¹⁴⁷

2.6.4.1. Ortalama Hata

Ortalama hata (*mean error*),

$$OH = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t(1) \quad (2.6.4.1.1)$$

denklemiyle hesaplanmaktadır. OH, öngörü hatasının beklenen değerini hesaplamakta ve sıfır olması istenmektedir. Sonucun sıfır ya da sıfıra yakın olması öngörünün sapmasız olduğunu gösterecektir.

¹⁴⁶ Işıl Akgül, **Zaman Serilerinin Analizi ve ARIMA Modelleri**, 1. Basım, İstanbul: Der Yayınları, 2003, s.128.

¹⁴⁷ Douglas C. Montgomery, Cheryl L. Jennings ve Murat Kulahci, **Introduction to Time Series Analysis and Forecasting**, 1. Edition, New Jersey: John Wiley & Sons, 2008, s.49.

2.6.4.2. Ortalama Mutlak Hata

En küçük ortalama mutlak hataya (*mean absolute error*) sahip olan model, “*en uygun*” model olarak seçilecektir. OMH’nin hesaplanış formülü,

$$OMH = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |\varepsilon_t(1)| \quad (2.6.4.2.1)$$

şeklindedir. OMH, öngörü hatalarındaki değişkenliği göstermektedir.¹⁴⁸

2.6.4.3. Ortalama Hata Kare

En küçük ortalama hata kareye (*mean squared error*) sahip olan model, “*en uygun*” model olarak seçilecektir. OHK’nin hesaplanış yöntemi aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon(1)}^2 = OHK = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [\varepsilon_t(1)]^2 \quad (2.6.4.3.1)$$

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon(1)}^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} OMH \cong 1.25 OMH \quad (2.6.4.3.2)$$

OHK’de OMH de olduğu gibi öngörü hatalarındaki değişkenliği göstermekte ve değişkenliğin olabildiğince düşük olması istenmektedir.

2.6.4.4. Nispi Öngörü Hata

En küçük nispi öngörü hata (*relative forecast error*) değerine sahip olan model, “*en uygun*” model olarak seçilecektir. NÖH,

$$r\varepsilon_t(1) = \left(\frac{y_t - \hat{y}_t(t-1)}{y_t} \right) 100 = \left(\frac{\varepsilon_t(1)}{y_t} \right) 100 \quad (2.6.4.4.1)$$

denklemleriyle hesaplanmaktadır.¹⁴⁹

¹⁴⁸ Douglas C. Montgomery, Cheryl L. Jennings ve Murat Kulahci, **Introduction to Time Series Analysis and Forecasting**, 1. Edition, New Jersey: John Wiley & Sons, 2008, s.49.

¹⁴⁹ Douglas C. Montgomery, Cheryl L. Jennings ve Murat Kulahci, **Introduction to Time Series Analysis and Forecasting**, 1. Edition, New Jersey: John Wiley & Sons, 2008, s.50.

2.6.4.5. Ortalama Yüzde Hata

En küçük ortalama yüzde hataya (*mean percent error*) sahip olan model, “*en uygun*” model olarak seçilecektir. OYH’nin hesaplanış formülü ise aşağıdaki gibidir.¹⁵⁰

$$OYH = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r\varepsilon_t(1) \quad (2.6.4.5.1)$$

2.6.4.6. Ortalama Mutlak Yüzde Hata

En küçük ortalama mutlak yüzde hataya (*mean absolute percent error*) sahip olan model, “*en uygun*” model olarak seçilecektir. OMYH öngörü hatalarını yüzdesel olarak ifade etmesi sebebiyle tek başına kullanılabileceğinden diğer öngörü başarı ölçütlerine üstünlük sağlamaktadır. OMYH,

$$OMYH = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T |r\varepsilon_t(1)| \quad (2.6.4.6.1)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.¹⁵¹

2.6.4.7. Kök Ortalama Hata Kare

En küçük kök ortalama hata kare (*root mean squared error*) değerine sahip olan model, “*en uygun*” model olarak seçilecektir. KOHK’nin hesaplanış formülü,

$$KOHK = \sqrt{OHK} \quad (2.6.4.7.1)$$

şeklinde olmaktadır. KOHK, öngörü değeri ile gözlem değeri arasındaki ortalama uzaklık olarak ifade edilebilmektedir.¹⁵²

¹⁵⁰ Douglas C. Montgomery, Cheryl L. Jennings ve Murat Kulahci, **Introduction to Time Series Analysis and Forecasting**, 1. Edition, New Jersey: John Wiley & Sons, 2008, s.51.

¹⁵¹ Douglas C. Montgomery, Cheryl L. Jennings ve Murat Kulahci, **Introduction to Time Series Analysis and Forecasting**, 1. Edition, New Jersey: John Wiley & Sons, 2008, ss.49-51.

¹⁵² N.D. Lewis, **Neural Networks For Time Series Forecasting With R**, 1. Edition, CreateSpace Independent Publishing Platform, 2017, s.40.

2.6.4.8. Theil Eşitsizlik (U) Katsayısı

Sıfır ile bir arasında yer alan “Theil Eşitsizlik Katsayısı”nın sifıra yaklaşması öngörü başarısının yüksek olduğu anlamına gelmektedir. Katsayının hesaplanması,

$$U = \frac{\sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} (\hat{Y}_t - Y_t)^2 / h}}{\sqrt{\sum_{t=T+1}^{T+h} \hat{Y}_t^2 / h + \sum_{t=T+1}^{T+h} Y_t^2 / h}} \quad (2.6.4.8.1)$$

şeklinde olmaktadır. $j = T + 1, T + 2, \dots, T + h$ öngörü dönemlerini, Y_t ve \hat{Y}_t sırasıyla gerçek ve öngörü değerlerini ifade etmektedir.¹⁵³

2.6.4.9. Ortalama Öngörü Hata Kare

Ortalama öngörü hata kare (*mean squared forecast error*) aşağıdaki gibi ayrıştırılabilmektedir.

$$\sum (\hat{Y}_t - Y_t)^2 / h = \left[\left(\sum \hat{Y}_t / h \right) - \bar{Y} \right]^2 + (s_{\hat{Y}} - s_Y)^2 + 2(1-r)s_{\hat{Y}}s_Y \quad (2.6.4.9.1)$$

Formülde yer alan $s_{\hat{Y}}$ ve s_Y sırasıyla \hat{Y}_t ve Y_t 'nin standart sapmalarını, r ise \hat{Y}_t ve Y_t arasındaki korelasyonu ifade etmektedir. Ayrıştırma sonucu her bir terim OÖHK'ye bölünmesiyle üç farklı hesaplamayla karşı karşıya kalınır. Bunlar *sapma oranı*, *varyans oranı* ve *kovaryans oranı*'dir.

2.6.4.9.1. Sapma Oranı

Sapma oranı (*bias proportion*) olarak ifade edilen kısım aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

¹⁵³ IHS Global, EViews 8.1 User's Guide II, 2014, <http://www.eviews.com/EViews8/EViews8/EViews%208%20Users%20Guide%20II.pdf> (29 Eylül 2017), s.122.

$$\frac{[(\sum \hat{Y}_t / h) - \bar{Y}]^2}{\sum (\hat{Y}_t - Y_t)^2 / h} \quad (2.6.4.9.1.1)$$

Sapma oranı, öngörü ortalamasının gerçek serinin ortalamasından ne kadar saptığını ifade etmektedir. Sapma oranının olabildiğince düşük olması istenmektedir.

2.6.4.9.2. Varyans Oranı

Varyans oranı (*variance proportion*) olarak ifade edilen kısım,

$$\frac{(s_{\bar{Y}} - s_Y)^2}{\sum (\hat{Y}_t - Y_t)^2 / h} \quad (2.6.4.9.2.1)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Varyans oranı, öngörü değişirliğinin gerçek seri değişirliğinden ne kadar farklılaştığını ifade etmektedir. Varyans oranının olabildiğince düşük olması istenmektedir.

2.6.4.9.3. Kovaryans Oranı

Kovaryans oranı (*covariance proportion*) olarak ifade edilen kısım,

$$\frac{2(1-r)s_{\bar{Y}}s_Y}{\sum (\hat{Y}_t - Y_t)^2 / h} \quad (2.6.4.9.3.1)$$

formülüyle hesaplanmaktadır. Kovaryans oranı, arta kalan sistematik olmayan öngörü hatalarının payını gösterir. Oran 1'e yaklaştıkça öngörünün başarısı artmaktadır.¹⁵⁴

2.6.4.10. Determinasyon Katsayısı (R²)

¹⁵⁴ IHS Global, EViews 8.1 User's Guide II, 2014, <http://www.eviews.com/EViews8/EViews8/EViews%20%20Users%20Guide%20II.pdf> (29 Eylül 2017), s.122.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T \varepsilon_t}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2} \quad (2.6.4.10.1)$$

R^2 'nin paydası gözlem değerlerinin karelerinin toplamını gösterirken, pay kısmı hata terimlerinin karelerinin toplamını göstermektedir. Bu nedenle en yüksek R^2 değerine sahip modelinin seçilmesi, en düşük hata kare toplamına sahip modelin seçilmesi anlamına gelecektir. Yüksek R^2 değeri tahmin değerlerinin gözlem değerlerine iyi uyum gösterdiğini ifade etmektedir.

Modele eklenen parametre sayısını dikkate alarak hesaplanan düzeltilmiş determinasyon katsayısı,

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T \varepsilon_t / (T - p)}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2 / (T - 1)} \quad (2.6.4.10.2)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. p parametre sayısını ifade etmektedir.¹⁵⁵

2.6.4.11. Akaike ve Schwarz Bilgi Ölçütleri

Akaike (1974) ve Schwarz (1978) tarafından önerilen bilgi ölçütlerinin hesaplanma yöntemleri sırasıyla,

$$AIC = \ln \left(\frac{\sum_{t=1}^T \varepsilon_t}{T} \right) + \frac{2p}{T} \quad (2.6.4.11.1)$$

$$SIC = \ln \left(\frac{\sum_{t=1}^T \varepsilon_t}{T} \right) + \frac{p \ln(T)}{T} \quad (2.6.4.11.2)$$

¹⁵⁵ Damodar N. Gujarati, **Basic Econometrics**, 4. Edition, New York: The McGraw-Hili Companies, 2003, s.217.

olmaktadır. Bu iki ölçüt modele eklenen ek parametreler için hata kare toplamını cezalandırmaktadır. Bilgi ölçütlerinden elde edilen değerler ne kadar düşük olursa modelin o kadar iyi olduğu anlaşılmaktadır. Bununla birlikte AIC ölçütleri asimtotik olarak etkinken, SIC ölçütü asimtotik olarak etkin değildir.¹⁵⁶

2.6.5. İleriye Yönelik Öngörü

Model kurma stratejisinin son basamağını oluşturan “öngörü”, model parametrelerinin doğru bir şekilde belirlendiği varsayıma dayanmaktadır. Zaman serisinin cari değeri Y_t olarak kabul edildiğinde ve $Y_{t+1}, Y_{t+2}, \dots, Y_{t+h}$ değerleri öngörülme istendiğinde, Y_{t+h} 'nin ARIMA öngörüsü $Y_t(h)$ şeklinde olacaktır.

ARIMA modeliyle öngörü yapılırken ilk önce bir sonraki dönem değeri hesaplanır. Daha sonrasında bu öngörü değeri iki dönem sonraki öngörünün hesaplanmasında kullanılır. Bu işlem öngörülme istenen dönem sayısınca devam etmektedir.

Aşağıda tanımlanan bir $ARIMA(p, d, q)$ modelinin bir dönem sonraki öngörüsü,

$$w_t = \phi_1 w_{t-1} + \phi_2 w_{t-2} + \dots + \phi_p w_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} + \delta \quad (2.6.5.1)$$

$$w_t(1) = E(w_{t+1}) = \phi_1 w_t + \phi_2 w_{t-1} + \dots + \phi_p w_{t-p+1} - \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q+1} + \delta \quad (2.6.5.2)$$

olacaktır. İki dönem sonraki öngörüsü,

$$w_t(2) = E(w_{t+2}) = \phi_1 w_t(1) + \phi_2 w_t + \dots + \phi_p w_{t-p+2} - \theta_2 \varepsilon_t - \theta_3 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q+2} + \delta \quad (2.6.5.3)$$

h dönem sonraki öngörüsü,

$$w_t(h) = E(w_{t+h}) = \phi_1 w_t(h-1) + \dots + \phi_p w_{t-p+h} - \theta_1 \varepsilon_t - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q+h} + \delta \quad (2.6.5.4)$$

¹⁵⁶ Douglas C. Montgomery, Cheryl L. Jennings ve Murat Kulahci, **Introduction to Time Series Analysis and Forecasting**, 1. Edition, New Jersey: John Wiley & Sons, 2008, s.59.

olacaktır. w_t , durağan seriyi ifade etmektedir ($w_t = \Delta^d Y_t$). Modelin öngörü hatası,

$$\varepsilon_{t+1} = Y_{t+1} - E[Y_{t+1}] = Y_{t+1} - Y_t(1) \quad (2.6.5.5)$$

şeklinde gösterilecek ve ε_{t+1} rastsal şok olacaktır. Modelin öngörü varyansı ise,

$$\text{Var}(1) = E[\varepsilon_{t+1}^2] = \sigma_\varepsilon^2 \quad (2.6.5.6)$$

şeklinde gösterilecek ve σ_ε^2 , saf hata terimin varyansını ifade etmektedir. Y_{t+1} 'in aralık içindeki öngörüsü %95 olasılıkla,

$$-1,96\sqrt{\text{Var}(1)} < Y_t(1) < 1,96\sqrt{\text{Var}(1)} \quad (2.6.5.7)$$

aralığında olması beklenmektedir.¹⁵⁷

2.7. DİCKEY-FULLER (DF) BİRİM KÖK TESTİ

Serilerin durağan olup olmadıklarını belirlemek amacıyla tezde Dickey-Fuller (1979) testi kullanılmış ve aşağıda test ile ilgili bilgi verilmiştir.

1979 yılında David A. Dickey ve Wayne A. Fuller tarafından Monte-Carlo simülasyonu kullanılarak zaman serilerindeki birim kök varlığının tespiti için önermiş oldukları test yaklaşımının, Portmanteau testine göre daha başarılı olduğunu yaptıkları çalışmayla ortaya koymuşlardır. Birim kökün varlığını ifade eden H_0 hipotezi altında geçerli olan Dickey-Fuller τ (tau) tablosunu oluşturmuşlardır.

Test denklemleri AR(1) modelinden hareketle,

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + e_t \quad (2.7.1)$$

$$\Delta Y_t = \delta_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.7.2)$$

¹⁵⁷ Işıl Akgül, **Zaman Serilerinin Analizi ve ARIMA Modelleri**, 1. Basım, İstanbul: Der Yayınları, 2003, s.146.

oluşturmuşlardır. Denklem (2.7.2)'de $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ olduğu varsayılmakta ve hipotezler (2.7.2) denklemi için,

$$\begin{aligned} H_0 : \delta_1 &= 0 \\ H_1 : \delta_1 &< 0 \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

(2.7.1) denklemi için,

$$\begin{aligned} H_0 : \phi_1 &= 1 \\ H_1 : \phi_1 &< 1 \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

şeklinde kurulmaktadır. Temel hipotez, serinin birim kökünün olduğunu, diğer bir ifadeyle serinin durağan olmadığını ifade ederken, alternatif hipotez serinin birim kökünün olmadığını, başka bir deyişle serinin durağan olduğunu ifade etmektedir.

τ test istatistiği (2.7.2) denklemi için,

$$\tau_{\hat{\delta}} = \frac{\hat{\delta}_1}{\sigma_{\hat{\delta}_1}} \sim DF(1979) - Fuller(1976) \quad (2.7.5)$$

(2.7.1) denklemi için,

$$\tau_{\hat{\phi}} = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{\sigma_{\hat{\phi}_1}} \sim DF(1979) - Fuller(1976) \quad (2.7.6)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. $\tau_{\hat{\delta}}$ veya $\tau_{\hat{\phi}}$ 'nin τ kritik değerinden daha negatif olması halinde temel hipotez reddedilir ve serinin durağan olduğu kabul edilir [$Y_t \sim I(0)$]. Hesaplanan τ değerinin pozitif çıkması, serinin üstsel bir şekilde arttığını ifade etmektedir.

Dickey-Fuller deterministik ögelerin olup olmamasına göre üç farklı denklem yapısını da sunmuşlardır:¹⁵⁸

¹⁵⁸ Mustafa Sevüktekin ve Mehmet Çınar, **Ekonometrik Zaman Serileri Analizi EViews Uygulamalı..**, 4. Basım, Bursa: Dora Yayıncılık, 2014, s.335-336.

Denklemler	Hipotezler	Test İstatistikleri ve Kritik Değerler
I. $\Delta Y_t = \rho Y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \phi_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t$	$H_0 : \rho = 0$ $H_1 : \rho < 0$	τ
II. $\Delta Y_t = a_0 + \rho Y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \phi_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t$	$H_0 : \rho = 0$ $H_1 : \rho < 0$	τ_μ
III. $\Delta Y_t = a_0 + \beta T + \rho Y_{t-1} + \sum_{i=1}^k \phi_i \Delta Y_{t-i} + \varepsilon_t$	$H_0 : \rho = 0$ $H_1 : \rho < 0$	τ_τ

2.8. OTOREGRESİF KOŞULLU DEĞİŞEN VARYANS MODELLERİ

Parametrik yöntemlerde en önemli parametrelerden biri olan standart sapmanın zamandan bağımsız olduğu, başka bir ifadeyle koşulsuz olduğu kabul edilmektedir. Piyasa fiyatlarındaki tarihsel veriler dikkate alındığında, portföy değişimlerinin standart sapmasının zaman içinde değiştiği bilinmektedir. Böyle bir durumda koşulsuz standart sapma varsayımı altında yapılacak olan hesaplamalar gerçek riski yansıtmayacağından zaman içinde gözlemlenen oynaklık etkilerinin dikkate alınması gerekmektedir.¹⁵⁹

Bu bölümde tezde koşullu varyans modellenme aşamasında yararlanılan ARCH ailesi modellerine yer verilmiştir.

2.8.1. ARCH - Otoregresif Koşullu Değişen Varyans Modeli

Rastsal bir y_t değişkeninin, koşullu yoğunluk fonksiyonu $f(y_t|y_{t-1})$ şeklinde yazılması durumunda, diğer bir ifadeyle cari değer in öngörüsü geçmiş bilgiye dayanıyorsa $E(y_t|y_{t-1})$, y_{t-1} değişkenine koşullanmış olmaktadır. Bir dönemlik öngörü varyansı ise $V(y_t|y_{t-1})$ olacaktır. Ancak geleneksel ekonometrik modellerde varyans, y_{t-1} 'e koşullu değildir. Engle, varyansı geçmişten bağımsız olan bir model önermiş ve ekonomik veriler için kullanılabilirliği üzerinde çalışma yapmıştır.

Birinci dereceden otoregresif bir model göz önüne alındığında denklem,

¹⁵⁹ N. Burak Akan, "Piyasa Riski Ölçümü", **Bankacılar Dergisi**, Sayı.61, (2007), s.65.

$$y_t = \gamma y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2.8.1.1)$$

şeklinde ifade edilecektir.¹⁶⁰ ε_t , sabit varyanslı [$V(\varepsilon_t) = \sigma^2$] saf hata terimini ifade etmektedir. Koşullu olmayan ortalama sıfır iken, y_t 'nin koşullu ortalaması γy_{t-1} ; koşullu olmayan varyans $\sigma^2/(1 - \gamma^2)$ iken, y_t 'nin koşullu varyansı σ^2 olacaktır.

Serilerin geçmiş değerlerine bağlı olan koşullu varyans modeli Granger ve Andersen tarafından bilineer model olarak tanımlanmıştır. Basit bir şekilde,

$$y_t = \varepsilon_t y_{t-1} \quad (2.8.1.2)$$

ve koşullu varyans $\sigma^2 y_{t-1}^2$ olmaktadır. Bu durumda koşullu varyans sonsuz ya da sıfır olarak karşımıza çıkmakta fakat küçük bir genellemeyle bu problem ortadan kaldırılabilmektedir. Tercih edilen model,

$$y_t = \varepsilon_t h_t^{1/2} \quad (2.8.1.3)$$

$$h_t = a_0 + a_1 y_{t-1}^2 \quad (2.8.1.4)$$

ve $V(\varepsilon_t) = 1$ olmaktadır. Bu nedenden dolayı modelin ismi “*otoregresif koşullu varyans*” olarak anılmaktadır. Normallik yaklaşımının dâhil edilmesi ve ψ_t bilgi setinin tanımlanması neticesinde koşullu yoğunluk,

$$y_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (2.8.1.5)$$

$$h_t = a_0 + a_1 y_{t-1}^2 \quad (2.8.1.6)$$

şeklinde ifade edilecektir. Varyans fonksiyonu genel bir şekilde ifade edilirse,

$$h_t = h(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}, a) \quad (2.8.1.7)$$

¹⁶⁰ Robert F. Engle, “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates Of The Variance Of United Kingdom Inflation”, *Econometrica*, Vol.50, No.4, (July 1982), s.987.

olacaktır. p , ARCH parametresini; α , bilinmeyen parametre vektörünü ifade etmektedir.¹⁶¹

y_t 'nin ortalaması $x_t\beta$ 'dir. Gecikmeli içsel ve dışsal değişkenlerin doğrusal bileşemi, β bilinmeyen vektörüyle ψ_t bilgi setine eklendiğinde, ARCH regresyon modeli,

$$y_t | \psi_{t-1} \sim N(x_t\beta, h_t) \quad (2.8.1.8)$$

$$h_t = h(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p}, a) \quad (2.8.1.9)$$

$$\varepsilon_t = y_t - x_t\beta \quad (2.8.1.10)$$

şeklinde ifade edilecektir. Varyans fonksiyonu cari ve geçmiş x 'ler ile genişletildiğinde,

$$h_t = h(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p}, x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-p}, a) \quad (2.8.1.11)$$

$$h_t = h_\varepsilon(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-p}) h_x(x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-p}, a) \quad (2.8.1.12)$$

ya da daha basit bir şekilde,

$$h_t = h(\psi_{t-1}, a) \quad (2.8.1.13)$$

olacaktır.¹⁶² p dereceden ARCH regresyon modeli,

$$y_t | \psi_{t-1} \sim N(x_t\beta, h_t) \quad (2.8.1.14)$$

$$h_t = \sigma_t^2 = a_0 + a_1\varepsilon_{t-1}^2 + a_2\varepsilon_{t-2}^2 + \dots + a_p\varepsilon_{t-p}^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i\varepsilon_{t-i}^2 \quad (2.8.1.15)$$

$$\varepsilon_t = y_t - x_t\beta \quad (2.8.1.16)$$

¹⁶¹ Robert F. Engle, "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates Of The Variance Of United Kingdom Inflation", **Econometrica**, Vol.50, No.4, (July 1982), s.988.

¹⁶² Robert F. Engle, "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates Of The Variance Of United Kingdom Inflation", **Econometrica**, Vol.50, No.4, (July 1982), s.989.

şeklinde olacaktır.¹⁶³

2.8.1.1. ARCH Modelinin Kurulması ve ARCH Etkisinin Testi

P_t finansal bir serinin fiyatını gösterdiğinde getiri,

$$\ln P_t - \ln P_{t-1} = r_t = \mu_t + \varepsilon_t \quad (2.8.1.1.1)$$

şeklinde hesaplanmaktadır. ARMA(1,1) modeli,

$$\mu_t = \alpha_0 + \phi_1 r_{t-1} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \quad (2.8.1.1.2)$$

gösterilmekte ve modelin kısıtları,

$$\begin{aligned} 0 \leq \phi_i < 1, \quad \sum_{i=1}^p \phi_i < 1, \quad (i = 1, 2, \dots, p) \\ |\theta_i| < 1 \quad \sum_{i=1}^q \theta_i < 1, \quad (i = 1, 2, \dots, q) \end{aligned} \quad (2.8.1.1.3)$$

şeklinindedir. Ortalamada durağan olan fakat varyansta durağan olmayan ARCH modellerine ait ortalama denklemleri ARMA(p, q) süreçlerinden biri olabilmektedir. Uygun ARMA modelleri tespit edildikten sonra yardımcı regresyon denklemi,

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \rho_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \rho_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + \dots + \rho_k \hat{\varepsilon}_{t-k}^2 + u_t \rightarrow R_{\hat{\varepsilon}_t^2}^2 \quad (2.8.1.1.4)$$

şeklinde oluşturulur. $R_{\hat{\varepsilon}_t^2}^2$ yardımcı regresyon denkleminin determinasyon katsayısını ifade etmektedir. ARCH etkisinin belirlenmesi için oluşturulan temel ve alternatif hipotezler,

$$\begin{aligned} H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_k = 0 \quad (\text{ARCH etkisi bulunmamakta}) \\ H_1 : \rho_1 \neq \rho_2 \neq \dots \neq \rho_k \neq 0 \quad (\text{ARCH etkisi bulunmakta}) \end{aligned} \quad (2.8.1.1.5)$$

şeklinindedir. ARCH-LM test istatistiği ise,

¹⁶³ Robert F. Engle, "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates Of The Variance Of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, Vol.50, No.4, (July 1982), s.994.

$$ARCH - LM = T \times R_{\varepsilon_t^2}^2 \sim X_k^2 \quad (2.8.1.1.6)$$

olmaktadır. Hesaplanan test istatistiği X_k^2 tablo değerinden büyük ise temel hipotez reddedilerek ARCH etkisinin olduğu kabul edilmektedir. Kalıntılarda ARCH etkisinin tespiti durumunda hata terimleri,

$$\varepsilon_t \sim iid(0, h_t) \quad \text{veya} \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_t^2) \quad (2.8.1.1.7)$$

$$h_t = \sigma_t^2 = Var(\varepsilon_t | \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots) \quad (2.8.1.1.8)$$

şeklinde ifade edilir.¹⁶⁴

2.8.2. GARCH - Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans Modeli

ARCH modelinin tahmin aşamasında varyans denkleminde yer alan kalıntıların karesine ait çok sayıda gecikmenin istatistiksel olarak anlamlı çıkması, tahmin edilecek parametre sayısını artırmaktadır.¹⁶⁵ Bollerslev (1986) çalışmasıyla koşullu varyansı daha az parametreyle daha iyi bir şekilde modelleyen GARCH modelini sunmuştur. ARCH modelinin genelleştirilmiş hali olan GARCH(p, q) modeli,

$$\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t) \quad (2.8.2.1)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i} = \alpha_0 + A(L) \varepsilon_t^2 + B(L) h_t \quad (2.8.2.2)$$

olmakta ve model kısıtları,

$$p \geq 0, \quad q > 0, \quad \alpha_0 > 0, \quad \alpha_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, q), \quad \beta_i \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, p) \quad (2.8.2.3)$$

şeklinindedir. $p = 0$ olması durumunda süreç ARCH(q) modeline evrilecektir. $p = q = 0$ olması durumunda ε_t saf hata terimi olacaktır. ARCH(q) sürecinde koşullu varyans

¹⁶⁴ Nilgün Çil Yavuz, **Finansal Ekonometri**, 2. Basım, İstanbul: Der Yayınları, 2015, s.445.

¹⁶⁵ Nilgün Çil Yavuz, **Finansal Ekonometri**, 2. Basım, İstanbul: Der Yayınları, 2015, s.449.

sadece geçmiş değerlerin varyanslarının doğrusal bir fonksiyonu olarak belirtilirken, GARCH(p,q) sürecinde koşullu varyansın gecikmeli değerleri de modelde yer almaktadır.

ε_t 'ler doğrusal regresyonda şok (*innovation*) olarak ifade edildiğinde GARCH(p,q) regresyon modeli,

$$\varepsilon_t = y_t - x_t' b \quad (2.8.2.4)$$

olarak elde edilmektedir. y_t bağımlı değişkeni, x_t açıklayıcı değişken vektörünü ve b bilinmeyen parametre vektörünü ifade etmektedir.

$1 - B(z) = 0$ denkleminin tüm kökleri birim daire dışında yer alması durumunda (2.8.2.2)'deki denklem, geçmiş ε_t^2 'lerin gecikmeli dağılımları olarak tekrardan yazılabilmektedir.

$$h_t = \alpha_0 (1 - B(1))^{-1} + A(L)(1 - B(1))^{-1} \varepsilon_t^2 = \alpha_0 \left(1 - \sum_{i=1}^p \beta_i \right)^{-1} + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (2.8.2.5)$$

Yukardaki denklemde ARCH parametresinin sonsuz boyutlu olduğu görülmektedir.¹⁶⁶

2.8.2.2. GARCH Etkisinin Testi

$z_t' = (1, \varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-q}^2, h_{t-1}, \dots, h_{t-p})$, $\omega' = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q, \beta_1, \dots, \beta_p)$, $\theta \in \Theta$ ve $\theta = (b', w')$ olduğu varsayılınsın. θ , Öklid uzayının kompakt alt uzayını temsil etmektedir. Böyle bir durumda koşullu varyans denklemi,

$$h_t = z_t' \omega = z_{1t}' \omega_1 + z_{2t}' \omega_2 \quad (2.8.2.2.1)$$

şeklinde yazılabilmektedir.¹⁶⁷ $H_0: \omega_2 = 0$ hipotezi için Lagrange çarpanı test istatistiği,

¹⁶⁶ Tim Bollerslev, "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", **Journal of Econometrics**, Vol.31, No.3, (April 1986), s.309.

¹⁶⁷ Tim Bollerslev, "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", **Journal of Econometrics**, Vol.31, No.3, (April 1986), s.317.

$$\xi_{LM}^* = \frac{1}{2} f_0' z_0 (z_0' z_0)^{-1} z_0' f_0 \quad (2.8.2.2.2)$$

$$f_0 = (\varepsilon_1^2 h_1^{-1} - 1, \dots, \varepsilon_T^2 h_T^{-1} - 1)' \quad (2.8.2.2.3)$$

$$z_0 = \left(h_1 \frac{\partial h_1}{\partial \omega}, \dots, h_T \frac{\partial h_T}{\partial \omega} \right)' \quad (2.8.2.2.4)$$

Hesaplanan ξ_{LM}^* , X_r^2 tablo değerinden büyük olduğunda temel hipotez reddedilerek GARCH etkisinin olduğu kabul edilir. r serbestlik derecesi, ω_2 'ye ait eleman sayısını ifade etmektedir. Bu test istatistiğine denk olan diğer bir test istatistiği,

$$\xi_{LM} = T.R^2 \quad (2.8.2.2.5)$$

olmaktadır.¹⁶⁸

2.8.3. FIGARCH – Kesirli Tümlleşik Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans Modeli

Granger ve Joyeux (1980) ve Hosking (1981) zaman serilerinde uzun hafıza özelliğinin test etmek amacıyla ARFIMA(p, d, q) modelini önermişlerdir. Uzun hafızalı süreçler otokorelasyonun yavaşça azaldığı süreçlerdir. Kısa hafıza süreçleri için yaygın olarak kullanılan ARMA modeli, ARFIMA modeli içinde yuvalanmıştır.

y_t zaman serisi için ARFIMA(p, d, q) modeli,

$$\alpha(L)(1-L)^d y_t = b(L)\varepsilon_t \quad (2.8.3.1)$$

şeklinde gösterilebilir. Denklemden $\alpha(L)$ ve $b(L)$ sırasıyla p ve q dereceden gecikme işlemci polinomlarını, ε_t ise sıfır ortalamalı ve serisel bağımsız olan süreci ifade etmektedir. $(1-L)^d$ kesirli fark işlemcisi, hipergeometrik fonksiyon cinsinden uygun bir şekilde tanımlanmış binominal ifadedir.

¹⁶⁸ Tim Bollerslev, "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", **Journal of Econometrics**, Vol.31, No.3, (April 1986), s.318.

$$\begin{aligned}
(1-L)^d &= F(-d, 1, 1; L) \\
&= \sum_{k=0, \infty} \Gamma(k-d) \Gamma(k+1)^{-1} \Gamma(-d)^{-1} L^k \\
&\equiv \sum_{k=0, \infty} \pi_k L^k
\end{aligned} \tag{2.8.3.2}$$

$\Gamma(\cdot)$, Gamma fonksiyonunu ifade etmektedir.¹⁶⁹ (2.8.3.1)'de yer alan denklemde $var(\varepsilon_t) < \infty$ ve $-0,5 < d < 0,5$ ise y_t zayıf durağan ve çevrilebilirlik koşullarını sağlayacaktır.¹⁷⁰

Benzer bir şekilde ε_t için FIGARCH(p, d, q) süreci, ortalama için ARFIMA(k, d, l) sürecindeki gibi tanımlandığında,

$$\phi(L)(1-L)^d \varepsilon_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)] v_t \tag{2.8.3.3}$$

olmaktadır. $0 < d < 1$ aralığında, $\phi(L)$ ve $[1 - \beta(L)]$ ait tüm kökler birim çemberin dışına düşmektedir. (2.8.3.3) denklemindeki terimler düzenlendiğinde FIGARCH(p, d, q) modelinin alternatif gösterimi,

$$[1 - \beta(L)] \sigma_t^2 = \omega + [1 - \beta(L) - \phi(L)(1-L)^d] \varepsilon_t^2 \tag{2.8.3.4}$$

şeklinde yazılabilmektedir. Böylece ε_t 'nin koşullu varyansı,

$$\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= \omega [1 - \beta(1)]^{-1} + \left\{ 1 - [1 - \beta(L)]^{-1} \phi(L)(1-L)^d \right\} \varepsilon_t^2 \\
&\equiv \omega [1 - \beta(1)]^{-1} + \lambda(L) \varepsilon_t^2
\end{aligned} \tag{2.8.3.5}$$

şeklinde hesaplanır ve $\lambda(L) = \lambda_1 L + \lambda_2 L^2 + \dots$ olmaktadır. (2.8.3.3)'deki denklemde yer alan FIGARCH(p, d, q) modelinde tüm t 'ler için koşullu varyans pozitif olmalıdır.

$0 < d \leq 1$ için, $L = 1$ değerini aldığı anda hipergeometrik fonksiyonu sıfıra eşit olacak $[F(-d, 1, 1, ; 1) = 0]$ ve böylelikle $\lambda(1) = 1$ değerini alacaktır. Bu nedenle

¹⁶⁹ Hipergeometrik fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$F(m, n, s; x) = \Gamma(s) \Gamma(m)^{-1} \Gamma(n)^{-1} \sum_{j=0, \infty} \Gamma(m+j) \Gamma(n+j) \Gamma(s+j)^{-1} \Gamma(j+1)^{-1} x^j$$

¹⁷⁰ Richard T. Baillie, Tim Bollerslev ve Hans Ole Mikkelsen, "Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", **Journal of Econometrics**, Vol.74, No.1, (September 1996), s.7.

FIGARCH modeli IGARCH modeline dönüşecektir. $0 \leq d \leq 1$ aralığında FIGARCH(p, d, q) modeli güçlü durağanlık ve ergodiklik koşullarını sağlamış olacaktır.¹⁷¹

2.8.4. EGARCH – Üstsel Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans Modeli

GARCH modeli koşullu varyans ve risk primi arasındaki ilişkinin modellenmesinde kullanılmaktadır. Fakat bu modeller varlık değerlemesinde temelde üç dezavantaja sahiptir. Araştırmacılar cari getiri ile gelecek getiri oynaklığı arasında ilişki tespit etmişlerdir. GARCH modeli bu kuralı göz ardı etmiştir. GARCH modeli tahmin edilen katsayılar tarafından ihlal edilen parametre kısıtlamalarını dayatmakta ve bu parametre kısıtlamaları koşullu varyans sürecinin dinamiklerini gereksiz bir şekilde kısıtlanmasına neden olabilmektedir. Ayrıca GARCH modelinde koşullu varyans şoklarının sürekli olup olmadığını tespiti zordur. EGARCH modeli, GARCH modelinin bu dezavantajlarını ortadan kaldırmaktadır.¹⁷²

t dönemi için verilen öngörü hatasının (ξ_t) koşullu varyansı (σ_t^2) negatif olmamalıdır. GARCH modeli pozitif rastsal değişkenlerin σ_t^2 doğrusal bileşenlerinin oluşmasını sağlamaktadır. σ_t^2 'nin negatif olmama koşulunu sağlayan model için σ_t^2 'nin \ln dönüşümü sonrasında,

$$\xi_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim i.i.d., \quad E(z_t) = 0, \quad V(z_t) = 1 \quad (2.8.4.1)$$

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_t + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k g(z_{t-k}), \quad \beta_1 \equiv 1 \quad (2.8.4.2)$$

olacaktır. Modelde $\{\alpha_t\}_{t=-\infty, \infty}$, $\{\beta_k\}_{k=1, \infty}$ ve $g(z_t) = \ln|z_t|^b$ ($b > 0$) formundadır.¹⁷³ Getiri ile oynaklık arasındaki asimetric ilişkinin ortaya konabilmesi için z_t ve $|z_t|$ 'nin doğrusal bileşenlerinden oluşan $g(z_t)$ fonksiyonu,

¹⁷¹ Richard T. Baillie, Tim Bollerslev ve Hans Ole Mikkelsen, "Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", **Journal of Econometrics**, Vol.74, No.1, (September 1996), s.8.

¹⁷² Daniel B. Nelson, "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", **Econometrica**, Vol.59, No.2, (March 1991), s.347.

¹⁷³ Daniel B. Nelson, "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", **Econometrica**, Vol.59, No.2, (March 1991), s.350.

$$g(z_t) \equiv \theta z_t + \gamma [z_t - E|z_t|] \quad (2.8.4.3)$$

şeklinde ifade edilir. $\{g(z_t)\}_{t=-\infty, \infty}$ sıfır ortalamalı, sabit varyanslı, bağımsız rastsal süreci ifade etmektedir. $g(z_t)$ 'nin iki bileşeni olan θz_t ve $\gamma [z_t - E|z_t|]$ de sıfır ortalamaya sahiptir. z_t 'ye ait dağılım simetrikse bu iki bileşen ortogonal olup bağımsızdır. $0 < z_t < \infty$ aralığında $\theta + \gamma$ katsayılı z_t ve $-\infty < z_t \leq 0$ aralığında $\theta - \gamma$ katsayılı z_t için $g(z_t)$ fonksiyonu doğrusaldır. Dolayısıyla $g(z_t)$ fonksiyonu, koşullu varyansın (σ_t^2) varlık fiyatındaki asimetrik yükseliş ve düşüş hareketlerine yanıt verebilmesini mümkün kılmaktadır.

$\gamma [z_t - E|z_t|]$ terimi, $\gamma > 0$ ve $\theta < 0$ iken GARCH modelinin büyüklük etkisini temsil etmektedir. z_t beklenen değerinden daha büyük(küçük) olduğunda $\ln(\sigma_{t+1}^2)$ 'deki şok daha pozitif(negatif) olacaktır ($\gamma = 0$ ve $\theta < 0$). Getirilerdeki şoklar negatif(pozitif) olduğunda, koşullu varyanstaki şok artık pozitif(negatif) olacaktır.¹⁷⁴

EGARCH(p, q) modelinin genel gösterimi,

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_t + \sum_{k=1}^q \beta_k \left[\theta z_{t-k} + \gamma [z_{t-k} - E|z_{t-k}|] \right] + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(\sigma_t^2) \quad (2.8.4.4)$$

ya da,

$$\ln(h_t) = \alpha_t + \sum_{k=1}^q \beta_k \left[\theta \frac{\varepsilon_{t-k}}{h_{t-k}^{1/2}} + \gamma \left[\frac{\varepsilon_{t-k}}{h_{t-k}^{1/2}} - E \left[\frac{\varepsilon_{t-k}}{h_{t-k}^{1/2}} \right] \right] \right] + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(h_{t-i}) \quad (2.8.4.5)$$

şeklinde ifade edilmektedir. $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t = \varepsilon_t / h_t^{1/2}$ olmaktadır. Modelde yer alan mutlak değerli ifadeler büyüklük etkisini, mutlak olmayan ifadeler işaret etkisini ve θ , asimetri parametresini ifade etmektedir. Parametre yorumları aşağıdaki gibi olmaktadır.¹⁷⁵

- $\theta = 0$ iken getiri ve oynaklık arasında simetrik bir ilişkinin olduğunu anlaşılmakta ve EGARCH modeli geçersiz olmaktadır. $\theta \neq 0$ ve

¹⁷⁴ Daniel B. Nelson, "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", **Econometrica**, Vol.59, No.2, (March 1991), s.351.

¹⁷⁵ Daniel B. Nelson, "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach", **Econometrica**, Vol.59, No.2, (March 1991), s.350.

istatistiksel olarak anlamlı (anlamsız) olması durumunda “*istatistiksel olarak anlamlı (anlamsız) asimetri vardır*” denir.

- $\theta < 0$ ve θ parametresi istatistiksel olarak anlamlı (anlamsız) olduğunda “*istatistiksel olarak anlamlı (anlamsız) kaldıraç etkisi vardır*” denir.
- γ parametresi sıfırdan büyük olmalıdır. $\gamma > 0$ olması, aynı büyüklükteki negatif şokların oynaklık üzerindeki etkisinin pozitif şoklardan daha fazla olduğunu ifade etmektedir.

Modelde GARCH parametresinin $\sum_{i=1}^p \beta_i < 1$ olması sürecin kovaryans durağan olduğunu göstermektedir.

2.8.5. GJR Modeli

Pozitif ve negatif şokların (haberlerin) oynaklık üzerindeki etkisinin birbirinden farklı olduğunu (asimetrik) varsayan GJR modeli,

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \gamma_j D_{j,t-j} \varepsilon_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (2.8.5.1)$$

$$D_{t-j} = \begin{cases} 1 & \varepsilon_{t-j} < 0 \\ 0 & \varepsilon_{t-j} \geq 0 \end{cases} \quad (2.8.5.2)$$

olarak ifade edilmektedir. Modelde yer alan D_{t-j} , 0 ve 1 değerini alan kukla değişken olarak tanımlanmaktadır. Koşullu varyansın pozitif değer alabilmesi için $\alpha_0 > 0$, $\alpha_j > 0$, $(\alpha_j + \gamma_j) \geq 0$ ve $\beta_i \geq 0$ olması gerekmektedir. ε_{t-j} 'nin sıfırdan büyük-eşit olması pozitif şokları, ε_{t-j} 'nin sıfırdan küçük olması negatif şokları ifade etmektedir. Koşullu varyans üzerindeki pozitif şokların etkisi α_j 'ye, negatif şokların etkisi ise $(\alpha_j + \gamma_j)$ 'ye eşit olmaktadır. $\gamma_j \neq 0$ ve istatistiksel olarak anlamlı olması durumunda eşik değer etkisinin olduğu kabul edilir.

Sürecin kovaryans durağanlığı,

$$\sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q \left(\alpha_j + \frac{1}{2} \gamma_j \right) < 1 \quad (2.8.5.3)$$

koşuluyla ifade edilmektedir.¹⁷⁶

2.8.6. APARCH – Asimetrik Kuvvetli Otoregresif Koşullu Değişen Varyans Modeli

Ding, Granger ve Engle (1993) tarafından tanıtılan APARCH modeli,

$$\varepsilon_t = \sigma_t e_t, \quad e_t \sim N(0,1) \quad (2.8.6.1)$$

$$\sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-i}^\delta \quad (2.8.6.2)$$

ve kısıtları,

$$\alpha_0 > 0, \quad \delta \geq 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad -1 < \gamma_i < 1, \quad \beta_j \geq 0 \quad (2.8.6.3)$$

şeklinde ifade edilmektedir.¹⁷⁷ Model koşullu standart sapma süreci ve asimetrik mutlak kalıntıların Box-Cox kuvvet dönüşümünü tayin etmektedir. Dönüşümün kullanılmasıyla doğrusal olmayan modeller doğrusallaştırılabilmektedir. APARCH modeli, yedi farklı ARCH modelinin genelleştirilmiş halini yansıtmaktadır. Bunlar:

- $\delta = 2$, $\gamma_i = 0$ ve $\beta_j = 0$ olduğunda ARCH(p) modelini,
- $\delta = 2$ ve $\gamma_i = 0$ olduğunda Bollerslev'in GARCH(p,q) modelini,
- $\delta = 1$ ve $\gamma_i = 0$ olduğunda Taylor/Schwert'in GARCH modelini,
- $\delta = 2$ ve $0 \leq \gamma_i < 1$ olduğunda GJR modelini,

¹⁷⁶ Nilgün Çil Yavuz, **Finansal Ekonometri**, 2. Basım, İstanbul: Der Yayınları, 2015, s.465.

¹⁷⁷ Zhuanxin Ding, Clive W.J. Granger ve Robert F. Engle, "A Long Memory Property Of Stock Market Returns And A New Model", **Journal of Empirical Finance**, Vol.1, No.1, (June 1993, s.98.

- $\delta = 1$ ve $\beta_j = 0$ olduğunda Zakoian'ın TGARCH modelini,
- $\gamma_i = 0$ ve $\beta_j = 0$ olduğunda Higgins ve Bera'nın NARCH modelini,
- $\delta \rightarrow 0$ 'a yakınsadığında Geweke ve Pantula'nın log-ARCH modelini ifade edecektir.¹⁷⁸

APARCH modelinin durağanlığı,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^q \left\{ (1+\gamma_i)^\delta + (1-\gamma_i)^\delta \right\} 2^{\frac{\delta-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1 \quad (2.8.6.4)$$

şartına bağlı olmakta ve $\Gamma(\cdot)$, Euler Gamma fonksiyonunu¹⁷⁹ temsil etmektedir.¹⁸⁰

2.8.7. CCC-GARCH - Sabit Koşullu Korelasyon GARCH Modeli

CCC-GARCH, koşullu varyansı ve kovaryansı zamanla değişen fakat koşullu korelasyonun zaman içinde sabit kaldığı çok değişkenli bir zaman serisi modelidir. y_t , $N \times 1$ boyutundaki zaman serisi vektörü olarak varsayıldığında,

$$y_t = E(y_t | \psi_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (2.8.7.1)$$

$$\text{Var}(\varepsilon_t | \psi_{t-1}) = H_t \quad (2.8.7.2)$$

H_t koşullu kovaryans matrisini ifade etmektedir. h_{ijt} , H_t matrisinin ij 'inci elemanını, y_{it} ve ε_{it} ise y_t ve ε_t 'nin i 'inci elemanını göstermektedir. $t - 1$ döneminde y_{it} ve y_{jt} arasındaki sabit ölçünün koşullu korelasyonu,

$$\rho_{ijt} = h_{ijt} / \sqrt{h_{iit} h_{jtt}} \quad (2.8.7.3)$$

¹⁷⁸ Zhuanxin Ding, Clive W.J. Granger ve Robert F. Engle, "A Long Memory Property Of Stock Market Returns And A New Model", **Journal of Empirical Finance**, Vol.1, No.1, (June 1993, s.100.

¹⁷⁹ $\Gamma(n) = (n - 1)!$

¹⁸⁰ Zhuanxin Ding, Clive W.J. Granger ve Robert F. Engle, "A Long Memory Property Of Stock Market Returns And A New Model", **Journal of Empirical Finance**, Vol.1, No.1, (June 1993, s.99.

$$-1 \leq \rho_{ijt} \leq 1 \quad (2.8.7.4)$$

tüm t 'ler için yukarıdaki gibi olmaktadır. Karşılıklı iki koşullu varyans,

$$h_{ijt} = \rho_{ijt} (h_{iit} h_{jtt})^{1/2}, \quad j = 1, \dots, N, \quad i = j+1, \dots, N \quad (2.8.7.5)$$

olarak ifade edilmektedir. Koşullu varyans tekrardan yazıldığında,

$$h_{iit} \equiv \omega_i \sigma_{it}^2, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.8.7.6)$$

şeklinde gösterilmektedir. Tüm t 'ler için $\sigma_{it}^2 > 0$ ve ω_i , zamandan bağımsız pozitif skaler bir büyüklük olmaktadır. H_t koşullu kovaryans matrisi ayrıştırıldığında,

$$H_t = D_t \Gamma D_t \quad (2.8.7.7)$$

olarak yazılabilmektedir. D_t , $\sigma_{1t}, \dots, \sigma_{Nt}$ elemanlarından oluşan $N \times N$ boyutundaki stokastik diagonal matrisi ve Γ , $\rho_{ij} \sqrt{\omega_i \omega_j}$ elemanlarından oluşan $N \times N$ boyutundaki matrisi ifade etmektedir.

(2.8.7.1)'de yer alan genel heteroskedastik model için log likelihood fonksiyonu,

$$L(\theta) = -\frac{TN}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (\log |H_t| + \varepsilon_t' H_t^{-1} \varepsilon_t) \quad (2.8.7.8)$$

$$L(\theta) = -\frac{TN}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log |D_t \Gamma D_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t' (D_t \Gamma D_t)^{-1} \varepsilon_t \quad (2.8.7.9)$$

$$L(\theta) = -\frac{TN}{2} \log 2\pi - \frac{T}{2} \log |\Gamma| - \sum_{t=1}^T \log |D_t| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \tilde{\varepsilon}_t' \Gamma^{-1} \tilde{\varepsilon}_t \quad (2.8.7.10)$$

olarak yazılmaktadır.¹⁸¹ $\tilde{\varepsilon}_t = D_t^{-1} \varepsilon_t$, $N \times 1$ boyutundaki standartize edilmiş kalıntı vektörünü ifade edilmektedir. Koşullu korelasyon çözümü ise,

¹⁸¹ Tim Bollerslev, "Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model", *The Review of Economics and Statistics*, Vol.72, No.3, (August 1990), s.499.

$$\hat{\rho}_{ij} = \sum_i \tilde{\varepsilon}_{it} \tilde{\varepsilon}_{jt} \left(\sum_t \tilde{\varepsilon}_{jt}^2 \right)^{-1/2} \left(\sum_t \tilde{\varepsilon}_{it}^2 \right)^{-1/2} \quad (2.8.7.11)$$

olmaktadır. CCC-GARCH(p, q) modeli ise,

$$\text{Var}_t(\varepsilon_{it}) = h_{it} = \omega_i + \sum_{j=1}^q \alpha_{ij} \varepsilon_{it-j}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{ij} h_{it-j} \quad (2.8.7.12)$$

olmaktadır.¹⁸²

2.9. ÇOK DEĞİŞKENLİ GARCH TESTLERİ

2.9.1. Hosking Çok Değişkenli Portmanteau Testi

m adet durağan zaman serisi $\{y_t: t = 1, \dots, T\}$ için, $m \times m$ boyutunda $\Phi_r = (\phi_{ijr}), r = 0, 1, \dots, p$ ve $\theta_r = (\theta_{ijr}), r = 0, 1, \dots, q$ matrisleri oluşmakta ve $\Phi_0 = \theta_0 = \mathbf{I}_m, \Phi_p \neq 0, \theta_0 \neq \mathbf{0}$ ve

$$\sum_{r=0}^p \Phi_r y_{t-r} = \sum_{r=0}^q \theta_r \varepsilon_{t-r}, \quad t = 1, \dots, T \quad (2.9.1.1)$$

$$\Phi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_t \quad (2.9.1.2)$$

ε_t saf hata süreci olarak tanımlanmaktadır. r 'inci saf hata terimi otokovaryans matrisi,

$$C_r = (c_{ijr}) = T^{-1} \sum_t \varepsilon_i \varepsilon_{t-r}^T \quad (2.9.1.3)$$

ve r 'inci hata terimi otokovaryans matrisi,

$$\hat{C}_r = (\hat{c}_{ijr}) = T^{-1} \sum_t \hat{\varepsilon}_i \hat{\varepsilon}_{t-r}^T \quad (2.9.1.4)$$

¹⁸² Tim Bollerslev, "Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model", *The Review of Economics and Statistics*, Vol.72, No.3, (August 1990), s.501.

olmaktadır.¹⁸³ Portmanteau istatistiği,

$$P' = T^2 \sum_{r=1}^s (T-r)^{-1} \text{tr} \left(\hat{C}_r^T \hat{C}_0^{-1} \hat{C}_r \hat{C}_0^{-1} \right) \sim \chi_{m^2(s-p-q)}^2 \quad (2.9.1.5)$$

yöntemiyle hesaplanmaktadır. s , gecikme sayısını; T , ise gözlem sayısını sembolize etmektedir.¹⁸⁴

2.9.2. Li ve McLeod'un Çok Değişkenli Portmanteau Testi

k -boyutlu $\mathbf{Y}_t^T = (Y_{1,t}, \dots, Y_{k,t})$ zaman serisi için çok değişkenli sıfır ortalamalı ARMA modeli,

$$\Phi(B)\mathbf{Y}_t = \theta(B)\boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (2.9.2.1)$$

$$(1_k - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p)\mathbf{Y}_t = \theta(1_k - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)\boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (2.9.2.2)$$

$\mathbf{1}_k$, $k \times k$ boyutundaki birim matrisi; $\boldsymbol{\phi}_l = (\phi_{ij,l})_{k \times k}$ ve $\boldsymbol{\theta}_l = (\theta_{ij,l})_{k \times k}$ ifade etmekte¹⁸⁵ ve

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_t = \mathbf{Y}_t - \dot{\Phi}_1 \mathbf{Y}_{t-1} - \dots - \dot{\Phi}_p \mathbf{Y}_{t-p} + \dot{\theta}_1 \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t-1} + \dots + \dot{\theta}_q \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t-q} \quad (2.9.2.3)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_t = \mathbf{0} \quad (t \leq p) \quad (2.9.2.4)$$

olmaktadır. Hata terimlerinin otokorelasyon matrisi,

$$\dot{\mathbf{R}}_l = (\dot{r}_{ij}(l))_{k \times k} \quad (l \geq 0) \quad (2.9.2.5)$$

$$\dot{r}_{ij}(l) = \dot{c}_{ij}(l) / \sqrt{(\dot{c}_{ii}(0)\dot{c}_{jj}(0))} \quad (1 \leq i, j \leq k) \quad (2.9.2.6)$$

¹⁸³ J. R. M. Hosking, "The Multivariate Portmanteau Statistic", **Journal of the American Statistical Association**, Vol.75, No.371, (September 1981), s.602.

¹⁸⁴ J. R. M. Hosking, "The Multivariate Portmanteau Statistic", **Journal of the American Statistical Association**, Vol.75, No.371, (September 1981), s.606.

¹⁸⁵ W. K. Li ve A. I. McLeod, "Distribution of the Residual Autocorrelations in Multivariate ARMA Time Series Models", **Wiley for the Royal Statistical Society**, Vol.43, No.2, (1981), s.231.

$$\dot{c}_{ij}(l) = \frac{1}{T} \sum_{t=l+1}^T \dot{\varepsilon}_{i,t} \dot{\varepsilon}_{j,t-l} \quad (2.9.2.7)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.¹⁸⁶ Portmanteau istatistiği,

$$Q_m = T \sum_{i=1}^m \left(\text{vec} \hat{\mathbf{R}}_i^T \right)^T \left(\hat{\mathbf{R}}_0^{-1} \otimes \hat{\mathbf{R}}_0^{-1} \right) \left(\text{vec} \hat{\mathbf{R}}_i^T \right) \sim \chi_{k^2(m-p)}^2 \quad (2.9.2.8)$$

yöntemiyle hesaplanmaktadır.¹⁸⁷

2.9.3. Sabit Korelasyon LM Testi (Tse 2000)

Korelasyon matrisi $\Gamma = \{\rho_{ij}\}$ olarak tanımlanmakta ve,

$$\sigma_{it}^2 = \omega_i + \alpha_i \sigma_{i,t-1}^2 + \beta_i y_{i,t-1}^2 \quad (i=1, \dots, K) \quad (2.9.3.1)$$

$$\sigma_{ijt}^2 = \rho_{ij} \sigma_{it} \sigma_{jt} \quad 1 \leq i < j \leq K \quad (2.9.3.2)$$

ω_i, α_i ve β_i pozitif olma kısıtlarına ve $\alpha_i + \beta_i < 1$ uygun olmalıdır.¹⁸⁸ σ_{ijt} , koşullu kovaryansı ifade etmektedir. Zamana bağlı değişen korelasyon için,

$$\rho_{ijt} = \rho_{ij} + \delta_{ij} y_{i,t-1} y_{j,t-1} \quad (2.9.3.3)$$

denklemini dikkate alınır. Eğer standartize edilen kalıntılar ($\varepsilon_{it} = y_{it}/\sigma_{it}$) dikkate alınacaksa alternatif model,

$$\rho_{ijt} = \rho_{ij} + \delta'_{ij} \varepsilon_{i,t-1} \varepsilon_{j,t-1} \quad (2.9.3.4)$$

şeklinde yazılabilir.¹⁸⁹ Sabit korelasyonu test eden temel hipotez,

¹⁸⁶ W. K. Li ve A. I. McLeod, "Distribution of the Residual Autocorrelations in Multivariate ARMA Time Series Models", **Wiley for the Royal Statistical Society**, Vol.43, No.2, (1981), s.232.

¹⁸⁷ W. K. Li ve A. I. McLeod, "Distribution of the Residual Autocorrelations in Multivariate ARMA Time Series Models", **Wiley for the Royal Statistical Society**, Vol.43, No.2, (1981), s.236.

¹⁸⁸ Y.K. Tse, "A Test For Constant Correlations In A Multivariate GARCH Model", **Journal of Econometrics**, Vol.98, No.1, (September 2000), s.110.

¹⁸⁹ Y.K. Tse, "A Test For Constant Correlations In A Multivariate GARCH Model", **Journal of Econometrics**, Vol.98, No.1, (September 2000), s.111.

$$H_0 : \delta_{ij} = 0 \quad (1 \leq i < j \leq K \text{ için}) \quad (2.9.3.5)$$

olarak yazılmaktadır. LMC test istatistiği,

$$\text{LMC} = \hat{s}' (\hat{S}' \hat{S})^{-1} \hat{s} = l' \hat{S} (\hat{S}' \hat{S})^{-1} \hat{S} l \sim \chi_{M=K(K-1)/2}^2 \quad (2.9.3.6)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.¹⁹⁰ Log-likelihood fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned} \ell_t &= -\frac{1}{2} \ln |D_t \Gamma_t D_t| - \frac{1}{2} y_t' D_t^{-1} \Gamma_t^{-1} D_t^{-1} y_t \\ &= -\frac{1}{2} \ln |\Gamma_t| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \ln \sigma_{ii}^2 - \frac{1}{2} y_t' D_t^{-1} \Gamma_t^{-1} D_t^{-1} y_t \quad (t=1, \dots, T) \end{aligned} \quad (2.9.3.7)$$

yöntemiyle hesaplanmaktadır ($\ell = \sum_{t=1}^T \ell_t$) . $D_t^{-1} y_t = \varepsilon_t = (\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{Kt})'$ standartize olmuş gözlemleri göstermektedir.

$\theta = (\omega_1, \alpha_1, \beta_1, \omega_2, \dots, \beta_M, \rho_{12}, \rho_{13}, \dots, \rho_{K-1,K}, \delta_{12}, \dots, \delta_{K-1,K})'$ tanımlanmakta ve log-likelihood fonksiyonunun kısmi türevi alınmaktadır ($\partial \ell_t / \partial \theta$).¹⁹¹

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial \omega_i} = \frac{(\varepsilon_{it}^* \varepsilon_{it} - 1) d_{it}}{2\sigma_{ii}^2} \quad (2.9.3.8)$$

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial \alpha_i} = \frac{(\varepsilon_{it}^* \varepsilon_{it} - 1) e_{it}}{2\sigma_{ii}^2} \quad (2.9.3.9)$$

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial \beta_i} = \frac{(\varepsilon_{it}^* \varepsilon_{it} - 1) f_{it}}{2\sigma_{ii}^2} \quad (2.9.3.10)$$

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial \rho_{ij}} = \varepsilon_{it}^* \varepsilon_{jt}^* - \rho_{ij} \quad (2.9.3.11)$$

¹⁹⁰ Y.K. Tse, "A Test For Constant Correlations In A Multivariate GARCH Model", **Journal of Econometrics**, Vol.98, No.1, (September 2000), s.113.

¹⁹¹ Y.K. Tse, "A Test For Constant Correlations In A Multivariate GARCH Model", **Journal of Econometrics**, Vol.98, No.1, (September 2000), s.112.

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial \delta_{ij}} = (\varepsilon_{it}^* \varepsilon_{jt}^* - \rho_t^{ij}) y_{i,t-1} y_{j,t-1} \quad (2.9.3.12)$$

$$\varepsilon_t^* = (\varepsilon_{1t}^*, \dots, \varepsilon_{kt}^*)' = \Gamma_t^{-1} \varepsilon_t \quad (2.9.3.13)$$

$$\Gamma_t^{-1} = \{\rho_t^{ij}\} \quad (2.9.3.14)$$

$$d_{it} = 1 + \alpha_i d_{i,t-1} = \partial \sigma_{it}^2 / \partial \omega_i \quad (2.9.3.15)$$

$$e_{it} = \sigma_{i,t-1}^2 + \alpha_i e_{i,t-1} = \partial \sigma_{it}^2 / \partial \alpha_i \quad (2.9.3.16)$$

$$f_{it} = \alpha_i f_{i,t-1} + y_{i,t-1}^2 = \partial \sigma_{it}^2 / \partial \beta_i \quad (2.9.3.17)$$

2.9.4. Engle ve Sheppard Dinamik Korelasyon Testi (2001)

Koşullu kovaryans matrisi H_t ,

$$H_t = D_t R_t D_t \quad (2.9.4.1)$$

yöntemiyle hesaplanmaktadır. Sabit koşullu korelasyon modelini ifade eden temel hipotezi, alternatif hipotez olan dinamik koşullu korelasyon modeline karşı sınavan test, likelihood test rasyosuyla bağıntılıdır.

$$H_0 : R_t = \bar{R} \quad \forall t \in T \quad (2.9.4.2)$$

$$H_1 : \text{vech}(R_t) = \text{vech}(\bar{R}) + \beta_1 \text{vech}(R_{t-1}) + \beta_2 \text{vech}(R_{t-2}) + \dots + \beta_p \text{vech}(R_{t-p}) \quad (2.9.4.3)$$

Dinamik korelasyon testi, tek değişkenli GARCH modellerinin tahmini ve her bir seri için hesaplanan standartize edilmiş kalıntılara dayanmaktadır. Yapılan bu hesaplama sonrasında standartize kalıntıların korelasyonu ve \bar{R} 'nin simetrik karekök ayrışmalarıyla tek değişkenli standartize kalıntılara ait vektörün birlikte tahmini yapılır. Temel hipotez altında bu hata terimleri IDD olmalıdır ve I_k varyans kovaryans matrisini ifade etmektedir. Y_t ,

$$Y_t = vech^u \left[\left(\bar{R}^{-1/2} D_t^{-1} r_t \right) \left(\bar{R}^{-1/2} D_t^{-1} r_t \right)' - I_k \right] \quad (2.9.4.4)$$

olarak tanımlandığında ve vektör otoregresyonu,

$$Y_t = \alpha + \beta_1 Y_{t-1} + \dots + \beta_s Y_{t-s} + \eta_t \quad (2.9.4.5)$$

olmaktadır. Temel hipotez altında vektör otoregresyonundaki katsayıların sifıra eşit olduğu ima edilmiştir.¹⁹²

¹⁹² Robert F. Engle ve Kevin Sheppard, "Theoretical And Empirical Properties Of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH", **National Bureau Of Economic Research**, Working Paper 8554, (October 2001), s.11.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

UYGULAMA

Sermaye ve para piyasaları, küçük miktardaki tasarrufların halka arz edilmiş ve organize piyasalarda işlem gören finansal varlıklara yatırılarak büyük yatırımlara dönüşmesinde önemli rol oynamaktadır. Özellikle gelişmekte olan ülkelerde tasarruf oranlarının düşük ve cari dengelerinin açık vermesi nedeniyle tasarrufların bu piyasalarda değerlendirilmesi daha da önem kazanmaktadır. Tasarrufların sermaye piyasalarında değerlendirilmesiyle, paylarını halka arz eden şirketler orta ve uzun vadeli kaynak elde ederler. Elde edilen bu kaynaklarla şirketler faaliyetlerinin finansmanını ucuz maliyetlerle gerçekleştirecek ve iktisadi kalkınma daha etkin ve sağlıklı bir şekilde gerçekleşecektir. Bu sayede sermaye piyasası, fon arz edenler ile fon talep edenlere aracılık etmiş olmaktadır.

Tasarruf fazlası veren ekonomik ajanlar devlet, hane halkı, işletmeler, yatırım fonları vb. olabilir. Yatırımcılar tasarruflarını finansal varlıklara yatırırken temelde iki amaç doğrultusunda gerçekleştirirler. Bunlar:

- Tasarrufların değer kaybının önlenmesi diğer bir ifadeyle enflasyon riskinden korunmak,
- Yapılan yatırımlardan sürekli ve belirli bir düzeyde getiri elde etmektir.

Yatırımcıların yatırım kararını etkileyen diğer etkenler ise yatırımcının yaşı, cinsiyeti, eğitim durumu, yaşam biçimidir. Yatırımcıyı etkileyen finansal etkenlerden ikisi ise risk ve getiridir. Yatırımcılar genellikle yatırımlarını yaparken finansal varlığın riskinden ziyade getirisine odaklanmakta, riski gözardı etmekte veya hesaplamada güçlük çekmektedirler.

Markowitz (1952) yaptığı çalışmayla getiri ve riski modern anlamda göz önüne alarak Ortalama-Varyans modelini geliştirmiştir. Model, finansal varlıkların beklenen

getiri ve varyanslarını kullanarak etkin portföyler oluşturmayı amaçlamaktadır. Modelde kullanılan beklenen getirilerin dağılımının zamana bağlı değişmediği kabul edilmiştir. Fakat Engle (1982) yaptığı çalışmayla varyansın zamana bağlı olarak değişebileceğini göstermiştir.

Getiri serilerinin olasılık dağılımları genellikle normal dağılım özelliği değil, leptokurtik dağılım özelliği göstermektedir. Diğer bir ifadeyle dağılım normal dağılıma göre daha sivri ve kalın kuyruklu olmaktadır. Bu nedenle Ortalama-Varyans modelinde koşullu olmayan varyans veya standart sapmanın kullanılması gerçekçi bir yaklaşım olmayacaktır. Böyle bir durumda otoregresif koşullu değişen varyans modellerinin yardımıyla analizlerin yapılması uygun olacaktır.

Uygulama bölümünde, BİST50 endeksinde yer alan elli hisse senedinden oluşan veri seti kullanılmıştır. 50 hisse senedi için Box-Jenkins (1970) model kurma stratejisiyle ARMA modelleri oluşturulmuş, ARMA modelleri oluşturulduktan sonra ARCH, GARCH, EGARCH, GJR, APARCH ve FIGARCH modelleri ile varyans denklemleri elde edilmiştir. Daha sonrasında CCC-GARCH modeliyle finansal varlık getirilerine ait koşullu beklenen getiri ve koşullu varyans değerleri tahmin edilmiştir. Yapılan analiz sonucunda tüm testleri geçebilen finansal varlıklar, BİMAS ve OTKAR hisseleri olmuştur. Bu iki hisse için başarılı olan model ARMA(1,1)-CCC-GARCH(1,1) modelidir. BİMAS ve OTKAR hisse için kurulan koşullu ortalama ve koşullu varyans denklemleri kullanılarak öngörü yapılmıştır. Ardından bu hisseler için elde edilen koşullu beklenen getiri ve koşullu kovaryans öngörü değerleri Markowitz'in Ortalama-Varyans modelinde girdi olarak kullanılmış ve etkin portföy seti (*eğrisi*) oluşturulmuştur. Etkin portföyler arasından optimal portföy ağırlığı hesaplanmıştır. Daha sonrasında koşullu öngörü değerleriyle oluşturulan portföy ile koşullu olmayan portföy performansları karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda koşullu değerlerle oluşturulan portföyün performansının daha yüksek olduğu görülmüştür.

3.1. VERİ SETİ

Yapılan bu çalışmada 01/02/2019 tarihinde BİST50 endeksinde yer alan elli hisse senedinin 02/01/2014-01/02/2019 tarihleri arasındaki günlük kapanış fiyatları kullanılmıştır. Hisse senetlerine ait kapanış fiyatları Bloomberg veri terminalinden elde edilmiştir.

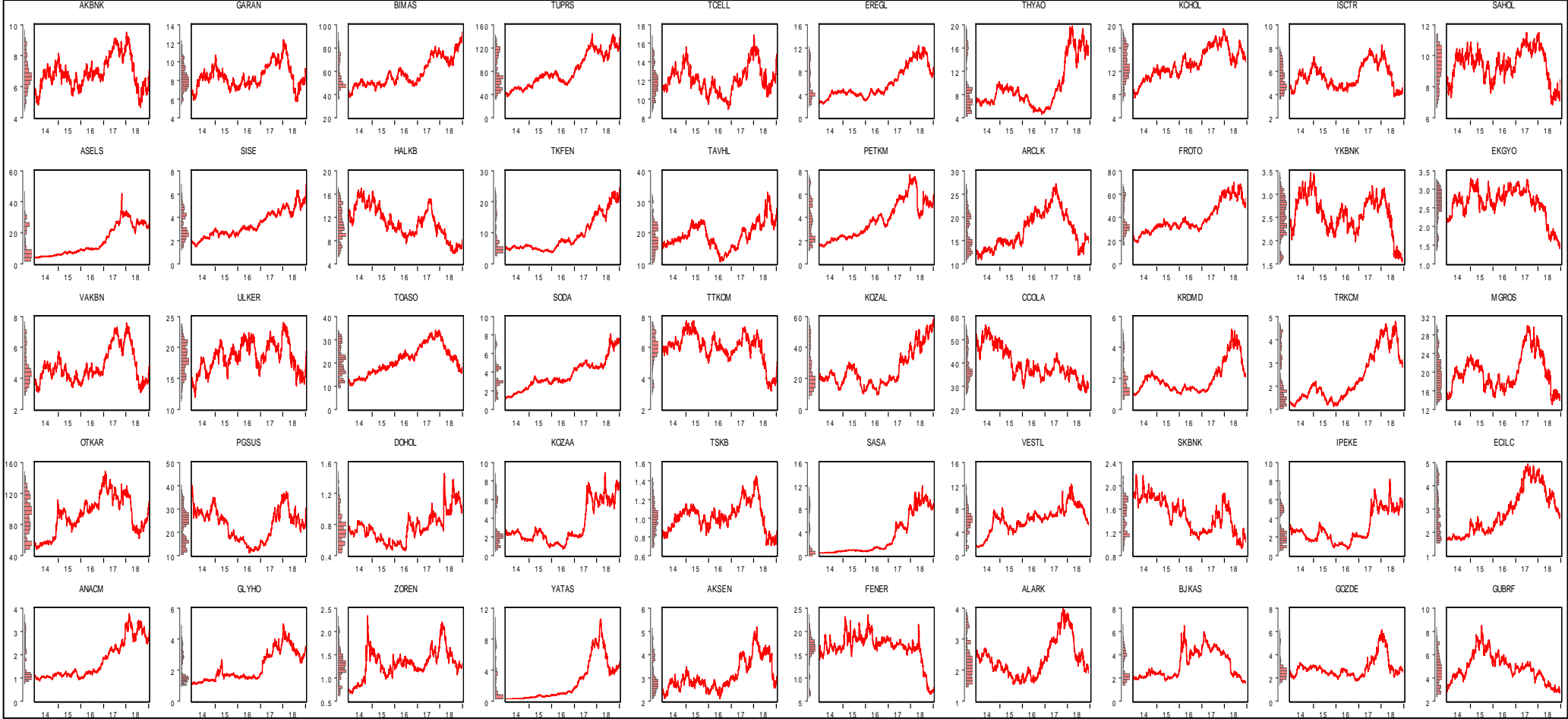
3.2. ORTALAMA DENKLEMLERİNİN OLUŞTURULMASI

Analize finansal varlıkların kapanış fiyatlarına ait düzey grafiklerinin incelenmesiyle başlanmıştır. Zaman serileri genel olarak trend, mevsimsel, devresel ve rastsal hareketlerin bileşiminden oluşmaktadır. Dolayısıyla hisse senetlerinin zaman boyunca gösterdiği seyir, serinin özellikleri hakkında genel bilgi verecektir. Serilerin grafik analizi, serilerin modellenmesi aşamasında yardımcı olacaktır.

Hisse senetlerinde genel olarak trend ve rastsal hareketlerin bileşimi gözlemlenmektedir. Trend bir zaman serisinde görülen uzun süreli azalış veya artış eğilimi olarak ifade edilmektedir. Bu eğilim serilerde doğrusal veya doğrusal olmayan bir kalıpta olabilmektedir. Rastal hareketler ise serinin belirli bir ortalama etrafında düzensiz bir şekilde salınmasıdır. Serideki bu dalgalanmalar tahmin edilemeyen ve belli bir sistematik kalıba sahip olmayan hareketlerdir.

Mevsimsellik bir yıl içinde görülen düzenli ve periyodik hareketlerdir. Devresel hareketler ise bir yıldan daha uzun bir süre boyunca zaman serisindeki döngüsel değişimlerdir. Günlük verilerde mevsimsellik ve 5-6 yıllık dönemde devresel hareketlere rastlanmamaktadır.

Şekil 29'da 50 hisse senedinin 02/01/2014-01/02/2019 tarihleri arasındaki günlük kapanış fiyatları verilmiştir.



Şekil 29: Finansal Varlıkların Kapanış Fiyatları

Seriler incelendiğinde bazı serilerde artan bazı serilerde azalan seyrin hâkim olduğu görülmektedir. Örneğin TUPRS hissesinin grafiğine bakıldığında, dönem içerisinde gerçekleşen fiyat düzeltmelerine rağmen hissenin yükselen trendini koruduğu görülmektedir. TOASO hissesi ise 2017'nin ilk yarısına kadar yükselen trende sahipken daha sonrasında düşüş trendine geçmiştir.

Serilerin düzey grafiklerinde trendin görülmesi ortalamalarının zamana bağlı olarak değiştiğine işaret etmektedir. Ayrıca belirli bir ortalama etrafında salınmayan serilerin hem ortalamada hem varyasta durağan olmadıkları anlaşılmaktadır. Diğer bir ifadeyle serilerin momentleri zaman içinde benzer özellikler göstermemektedir; momentler zamanın bir fonksiyonu olmaktadır.

Serilerin zaman grafiklerinin sol kısımlarında histogram grafikler yerleştirilmiştir. Frekans dağılımların gösterilmesinde yardımcı olan histogram, finansal varlıkların fiyatlarının hangi fiyat seviyelerinde daha çok yayıldığını rahat bir şekilde görmeyi sağlamaktadır. AKBNK hissesine bakıldığında kapanış fiyatlarının genellikle 7 TL ile 6,5TL arasında, FENER hissesinin ise genellikle 16 TL fiyat seviyesinde kapanış yaptığı görülmektedir. Kapanış fiyatlarının belirli fiyat seviyelerinde yoğunluk göstermesi finans piyasalarında *destek/direnç* seviyesi olarak nitelendirilmektedir.

Tablo 2'de 50 hisse senedinin tanımsal istatistikleri verilmiştir. Herbir hisse senedine ait toplam gözlem sayısı (T) 1327'dir. Gözlem değerlerinin toplamının gözlem sayısına bölünmesiyle hesaplanan ortalama değer, en yüksek 91,933910 değeriyle OTKAR hissesi, en düşük 0,767875 değeriyle DOHOL hissesidir.

Serinin değerlerinin küçükten büyüğe sıralandıktan sonra ortadaki sayıyı ifade eden medyan değeri en yüksek 94,4 değeriyle OTKAR hissesi, medyanın en düşük olduğu hisse 0,74 değeriyle DOHOL'dur. Medyan uç değerlere karşı ortalamaya göre daha robust bir ölçüttür. Ortalama ve medyan arasındaki fark en fazla olan hisse 7,93758 değeriyle TUPRS, farkın en düşük olduğu hisse 0,001948 değeriyle ZOREN'dir.

Tablo 2: Finansal Varlıkların Tanımsal İstatistikleri

No	Finansal Varlığın Sembölü	Gözlem Değerinin Başlangıç Tarihi	Gözlem Değerinin Bitiş Tarihi	Ortalama	Medyan	Maksimum Değer	Minimum Değer	Standart Sapma	Çarpıklık	Basıklık	Jarque-Bera (Olasılık Değeri)	Toplam	Toplam Karesel Sapma	Gözlem Sayısı	
1	AKBNK	02.01.2014	01.02.2019	6.917950	6.794000	9.505000	4.667000	0.998108	0.321008	2.638839	30.002500	0.000000	9180.119000	1320.986000	1327
2	AKSEN	02.01.2014	01.02.2019	3.115818	2.880000	5.190000	2.040000	0.664216	0.911394	2.842969	185.073200	0.000000	4134.690000	585.009100	1327
3	ALARK	02.01.2014	01.02.2019	2.363734	2.260000	3.961000	1.536000	0.590668	0.886801	2.932939	174.177900	0.000000	3136.675000	462.626300	1327
4	ANACM	02.01.2014	01.02.2019	1.741960	1.273000	3.750000	0.869000	0.803610	0.779838	2.147837	174.653500	0.000000	2311.581000	856.315800	1327
5	ARCLK	02.01.2014	01.02.2019	17.210940	15.850000	27.220000	10.850000	3.939577	0.480119	2.163931	89.631480	0.000000	22838.920000	20579.880000	1327
6	ASELS	02.01.2014	01.02.2019	14.482410	9.510000	45.260000	3.820000	9.689818	0.645196	1.944038	153.720100	0.000000	19218.160000	124501.600000	1327
7	BIMAS	02.01.2014	01.02.2019	58.932650	54.500000	93.400000	37.500000	12.313280	0.708066	2.457920	127.131100	0.000000	78203.620000	201043.900000	1327
8	BJKSA	02.01.2014	01.02.2019	3.127099	2.460000	6.500000	1.570000	1.183733	0.469595	1.758388	134.009200	0.000000	4149.660000	1858.024000	1327
9	CCOLA	02.01.2014	01.02.2019	39.371180	37.360000	56.350000	27.200000	6.775042	0.552689	2.365656	89.807650	0.000000	52245.550000	60864.990000	1327
10	DOHOL	02.01.2014	01.02.2019	0.767875	0.740000	1.460000	0.460000	0.193355	0.774192	3.383748	140.703800	0.000000	1018.970000	49.574210	1327
11	ECILC	02.01.2014	01.02.2019	2.877159	2.730000	4.940000	1.648000	0.954813	0.476334	1.955804	110.468400	0.000000	3817.990000	1208.871000	1327
12	EKGYO	02.01.2014	01.02.2019	2.619005	2.710000	3.280000	1.410000	0.428925	-1.035753	3.408620	246.496000	0.000000	3475.420000	243.952700	1327
13	EREGL	02.01.2014	01.02.2019	5.925463	4.580000	12.370000	2.360000	2.693573	0.810275	2.290608	173.030800	0.000000	7863.090000	9620.576000	1327
14	FENER	02.01.2014	01.02.2019	16.488670	16.907000	23.560000	6.430000	3.126633	-1.589280	5.905112	1025.269000	0.000000	21880.470000	12962.760000	1327
15	FROTO	02.01.2014	01.02.2019	39.342160	34.340000	69.750000	18.000000	12.845040	0.672994	2.226803	133.226400	0.000000	52207.040000	218783.600000	1327
16	GARAN	02.01.2014	01.02.2019	8.465230	8.290000	12.360000	5.720000	1.280196	0.522702	2.997238	60.427020	0.000000	11233.360000	2173.183000	1327
17	GLYHO	02.01.2014	01.02.2019	2.210567	1.691000	4.980000	1.083000	0.964507	0.743745	2.211896	156.682000	0.000000	2933.423000	1233.543000	1327
18	GÖZDE	02.01.2014	01.02.2019	2.854554	2.670000	6.120000	1.730000	0.874675	1.801071	5.926964	1191.123000	0.000000	3787.993000	1014.465000	1327
19	GUBRF	02.01.2014	01.02.2019	4.820241	4.780000	8.470000	2.700000	1.192762	0.350236	2.653023	33.786170	0.000000	6396.460000	1886.477000	1327
20	HALKB	02.01.2014	01.02.2019	11.084970	10.860000	17.000000	5.780000	2.716214	0.093425	2.144969	42.352890	0.000000	14709.750000	9782.990000	1327
21	IPEKE	02.01.2014	01.02.2019	2.979638	2.370000	8.200000	0.610000	1.697976	0.734641	2.285654	147.577700	0.000000	3953.980000	3823.023000	1327
22	ISCTR	02.01.2014	01.02.2019	5.566044	5.400000	8.220000	3.820000	1.052095	0.417370	2.086844	84.631900	0.000000	7386.140000	1467.754000	1327
23	KCHOL	02.01.2014	01.02.2019	13.427310	13.100000	19.240000	7.440000	2.518532	0.026927	2.382489	21.244180	0.000024	17818.040000	8410.825000	1327
24	KOZAA	02.01.2014	01.02.2019	3.266850	2.340000	8.840000	0.630000	2.127954	0.839354	2.189996	192.092400	0.000000	4335.110000	6004.379000	1327
25	KOZAL	02.01.2014	01.02.2019	25.703730	20.800000	58.500000	9.180000	11.908570	0.957588	2.823887	204.519100	0.000000	34108.850000	188045.500000	1327
26	KRDMD	02.01.2014	01.02.2019	2.028670	1.680000	5.160000	0.898000	1.013287	1.281614	3.670960	388.165500	0.000000	2692.045000	1361.471000	1327
27	MGROS	02.01.2014	01.02.2019	19.914370	19.250000	30.020000	13.010000	3.893321	0.581201	2.584794	84.241080	0.000000	26426.370000	20099.440000	1327
28	OTKAR	02.01.2014	01.02.2019	91.933910	94.400000	148.600000	47.800000	24.269070	-0.025063	2.074155	47.534380	0.000000	121996.300000	780997.900000	1327
29	PETKM	02.01.2014	01.02.2019	3.784029	3.664000	7.645000	1.473000	1.616710	0.496398	2.188503	90.908990	0.000000	5021.407000	3465.834000	1327
30	PGSUS	02.01.2014	01.02.2019	23.351580	24.680000	40.100000	11.100000	6.830471	-0.024750	2.000433	55.379250	0.000000	30987.550000	61864.970000	1327
31	SAHOL	02.01.2014	01.02.2019	9.418870	9.540000	11.480000	6.850000	1.036039	-0.462971	2.431400	65.281420	0.000000	12498.840000	1423.299000	1327
32	SASA	02.01.2014	01.02.2019	3.193325	1.136000	11.960000	0.315000	3.381577	0.969980	2.323949	233.357700	0.000000	4237.542000	15162.900000	1327
33	SISE	02.01.2014	01.02.2019	3.399880	3.040000	6.790000	1.473000	1.135715	0.495793	2.268488	83.952230	0.000000	4511.641000	1710.340000	1327
34	SKBNK	02.01.2014	01.02.2019	1.489145	1.520000	2.186000	0.920000	0.282958	0.010442	1.867323	70.960980	0.000000	1976.095000	106.166400	1327
35	SODA	02.01.2014	01.02.2019	3.723225	3.233000	8.100000	1.142000	1.593693	0.638599	2.878070	91.015740	0.000000	4940.720000	3367.850000	1327
36	TAVHL	02.01.2014	01.02.2019	19.217670	18.500000	32.960000	10.550000	4.262847	0.404031	2.997139	36.103970	0.000000	25501.850000	24095.900000	1327
37	TCELL	02.01.2014	01.02.2019	12.117690	11.970000	16.860000	8.890000	1.495911	0.435354	2.807352	43.970450	0.000000	16080.180000	2967.254000	1327
38	THYAO	02.01.2014	01.02.2019	9.427219	8.060000	19.770000	4.630000	4.056545	1.035043	2.735472	240.808100	0.000000	12509.920000	21820.070000	1327
39	TKFEN	02.01.2014	01.02.2019	9.312502	6.900000	24.660000	3.530000	5.710284	1.054724	2.756107	249.324300	0.000000	12357.690000	43237.340000	1327
40	TOASO	02.01.2014	01.02.2019	21.207720	21.300000	34.020000	10.100000	6.149264	0.217715	2.078459	57.439040	0.000000	28142.650000	50140.630000	1327
41	TRKCM	02.01.2014	01.02.2019	2.369803	1.915000	4.770000	1.108000	1.063411	0.721404	2.106170	159.274800	0.000000	3144.728000	1499.498000	1327
42	TSKB	02.01.2014	01.02.2019	1.019619	1.023000	1.449000	0.710000	0.151181	0.268242	2.963809	15.986230	0.000338	1353.035000	30.306580	1327
43	TTKOM	02.01.2014	01.02.2019	5.977867	6.110000	7.710000	3.200000	0.930730	-1.028375	4.046175	294.411600	0.000000	7932.630000	1148.660000	1327
44	TUPRS	02.01.2014	01.02.2019	81.137580	73.200000	143.600000	36.360000	28.358900	0.426171	1.873896	110.284600	0.000000	107669.600000	1066406.000000	1327
45	ULKER	02.01.2014	01.02.2019	18.456630	18.430000	23.980000	11.900000	2.381059	-0.135726	2.376723	25.553640	0.000003	24491.950000	7517.683000	1327
46	VAKBN	02.01.2014	01.02.2019	4.792739	4.503000	7.570000	3.080000	1.062739	0.799519	2.673351	147.276100	0.000000	6359.965000	1497.604000	1327
47	VESTL	02.01.2014	01.02.2019	6.209457	6.410000	12.230000	1.380000	2.113506	-0.262889	3.258209	18.971330	0.000076	8239.950000	5923.121000	1327
48	YATAS	02.01.2014	01.02.2019	2.388034	0.974000	10.571000	0.229000	2.570031	1.225556	3.412797	341.611300	0.000000	3168.921000	8758.306000	1327
49	YKBNK	02.01.2014	01.02.2019	2.546666	2.571000	3.460000	1.530000	0.417485	-0.437265	2.694931	47.433020	0.000000	3379.426000	231.113300	1327
50	ZOREN	02.01.2014	01.02.2019	1.307052	1.309000	2.333000	0.654000	0.305361	0.252418	3.413432	23.542350	0.000008	1734.458000	123.643200	1327

Tablo 2’de yer alan standart sapmalar,

$$s = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^T (y_i - \bar{y})^2 \right) / (T-1)}$$

formülüyle hesaplanmıştır. En yüksek standart sapmaya sahip hisse 28,3589 değeriyle TUPRS, en küçük sapmaya sahip hisse 0,151181 değeriyle TSKB’dir. Standart sapmanın yüksek olması dağılımın ortalamadan uzak olduğunu göstermektedir.

Serinin ortalaması etrafındaki dağılımının asimetrik ölçütü olan çarpıklık değeri,

$$S = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left(\frac{y_i - \bar{y}}{\hat{\sigma}} \right)^3$$

formülüyle hesaplanmıştır. Burada $\hat{\sigma} = s\sqrt{(T-1)/T}$ ’dir. Çarpıklık değeri en yüksek olan hisse 1,801071 değeriyle GOZDE, en düşük çarpıklık değerine sahip hisse ise 0,010442 değeriyle SKBNK’dır. Değerlerin pozitif olması dağılımın sağa çarpık olduğunu göstermektedir. Basıklık,

$$K = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \left(\frac{y_i - \bar{y}}{\hat{\sigma}} \right)^4$$

formülüyle hesaplanmıştır. Basıklık değeri en yüksek olan hisse 5,926964 değeriyle GOZDE, en düşük basıklık değerine sahip olan hisse 1,758388 değeriyle BJKAS hissesidir. Basıklık değeri 3’den büyük olması nedeniyle GOZDE hissesinin dağılımı leptokurtik, 3’den küçük olması nedeniyle BJKAS hissesi dağılımı platykurtiktir.

Hisselerin dağılımlarının normal olup olmadığını test eden Jarque-Bera istatistiği,

$$JB = \frac{T}{6} \left(S^2 + \frac{(K-3)^2}{4} \right)$$

formülüyle hesaplanmıştır. H_0 hipotezi normal dağılımı ifade etmektedir. JB test sonuçlarına göre analiz kapsamındaki tüm hisseler için H_0 hipotezi reddedilmiştir. Buda

hiçbir hisse senedinin düzey halinde normal dağılım özelliği göstermediğini ortaya koymuştur.

Tablo 2’de yer alan toplam değer, gözlem değerlerinin toplamıdır. Toplam karesel sapma,

$$\sum_{i=1}^T (y_i - \bar{y})^2$$

formülüyle hesaplamaktadır. En yüksek toplam karesel sapma 1066406 değeriyle TUPRS, en düşük toplam karesel sapma ise 30.306580 değeriyle TSKB hissesidir. Toplam karesel sapmanın yüksek olması gözlem değerlerinin ortalama değerden önemli ölçüde değiştiğini gösterir. Yukarıda yapılan yorumların benzerleri diğer hisse senetleri için de yapılabilmektedir.

Yatırımcılar finansal varlıkların fiyatlarını yakından takip etmektedir. Fakat yatırım aşamasına gelindiğinde yatırımcılar finansal varlıkların fiyatlarından çok getirileriyle ilgilenmektedir. Çünkü yapılacak yatırım sonrasında elde edilecek getiri yatırımcının kazancı olmaktadır.

Analiz kapsamında finansal varlıkların getirilerinin hesaplanmasında,

$$r_{i,t} = \frac{r_t - r_{t-1}}{r_{t-1}} = \frac{r_t}{r_{t-1}} - 1$$

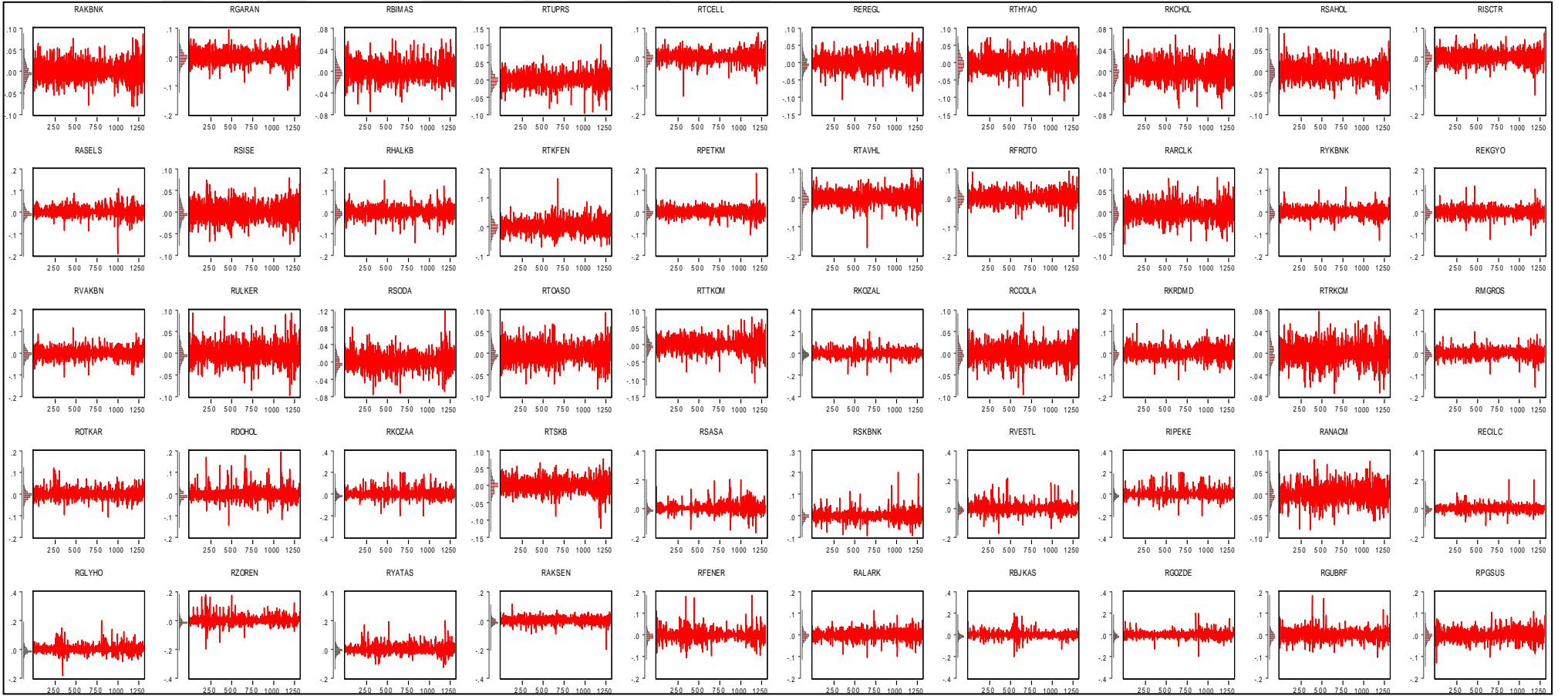
formülü kullanılmıştır. Denklemden yer alan $r_{i,t}$, i varlığının t dönemindeki getirisidir. Getiri hisseleri ile düzey halleri ayırt etmek için hisse sembollerinin önüne “R” harfi konulmuştur.

50 hisse senedine ait getiri grafikleri Şekil 30’de paylaşılmıştır. Grafiklerde görüldüğü üzere getiri serilerinin sıfır ortalama etrafında salındığı görülmektedir. Diğer bir ifadeyle getiri serilerinin ortalama durağan olduğu, ortalamanın zamana bağlı olarak değişmediği görülmektedir.

Finansal getiri serilerinde önemli ortak özellikler bulunmaktadır. Bu özellikler, oynaklık kümelemesi ve leptokurtik dağılım şeklinde sıralanmaktadır.

Finansal serilerin en önemli karakteristik özelliklerinden ilki olan ve ilk kez Benoit Mandelbrot (1963) tarafından tanıtılan oynaklık kümelemesi, getiri serilerinde küçük değişimleri küçük değişimlerin, büyük değişimleri büyük değişimlerin takip etmesi sonucu ortaya çıkmaktadır. Diğer bir ifadeyle, varyans zaman içinde değişmektedir. Şekil 30'de SASA hissesinin getiri grafiği incelendiğinde, varyansın zamana bağlı olarak değiştiği görülmektedir. Hissenin 11/2017-08/2018 tarihleri arasındaki oynaklığı diğer dönemlere göre daha fazladır. 08/2019 tarihinden sonra oynaklığın azaldığı görülmektedir. Hisse en yüksek günlük getiriyi %20.3 oranıyla 30/07/2018 tarihinde, en düşük günlük getiriyi %16.6 oranıyla 22/05/2017 tarihinde yapmıştır. Benzer şekilde VESTL hissesinin getiri grafiğine bakıldığında oynaklığın 11/2015 tarihinden sonra azaldığı fakat 11/2017 tarihinden itibaren oynaklığın tekrardan arttığı gözlemlenmektedir. Hisse en yüksek günlük getiriyi %21.2 oranıyla 08/06/2015 tarihinde, en düşük günlük getiriyi %17.2 oranıyla 02/11/2015 tarihinde yapmıştır. Bununla birlikte belirli yıllarda negatif ve pozitif getirilerin aşırı yüksek olduğu görülmektedir. Benzer yorumlar Şekil 30'da yer alan diğer hisse senetleri için de yapılabilmektedir.

Bazı finansal getiri serilerinin asimetrik özellik sergilemesi söz konusu olabilir. Getiri serisinin asimetri özelliği taşıması, aynı büyüklükteki pozitif ve negatif şokların oynaklığa etkisinin farklı olduğuna işaret etmektedir. Negatif şokların oynaklığa etkisinin pozitif şoklardan daha fazla olması kaldıraç etkisi olarak adlandırılmaktadır. Negatif ve pozitif şokların (*haberlerin*) oynaklığa etkisinin aynı olması durumunda getiri serisi simetrik özellik taşımaktadır. Finansal varlıkların getiri grafikleri bu konuda çok açıklayıcı bilgi vermeyebilir. Bu özellikler simetrik ve asimetrik modeller yardımıyla ortaya çıkarılmaktadır.



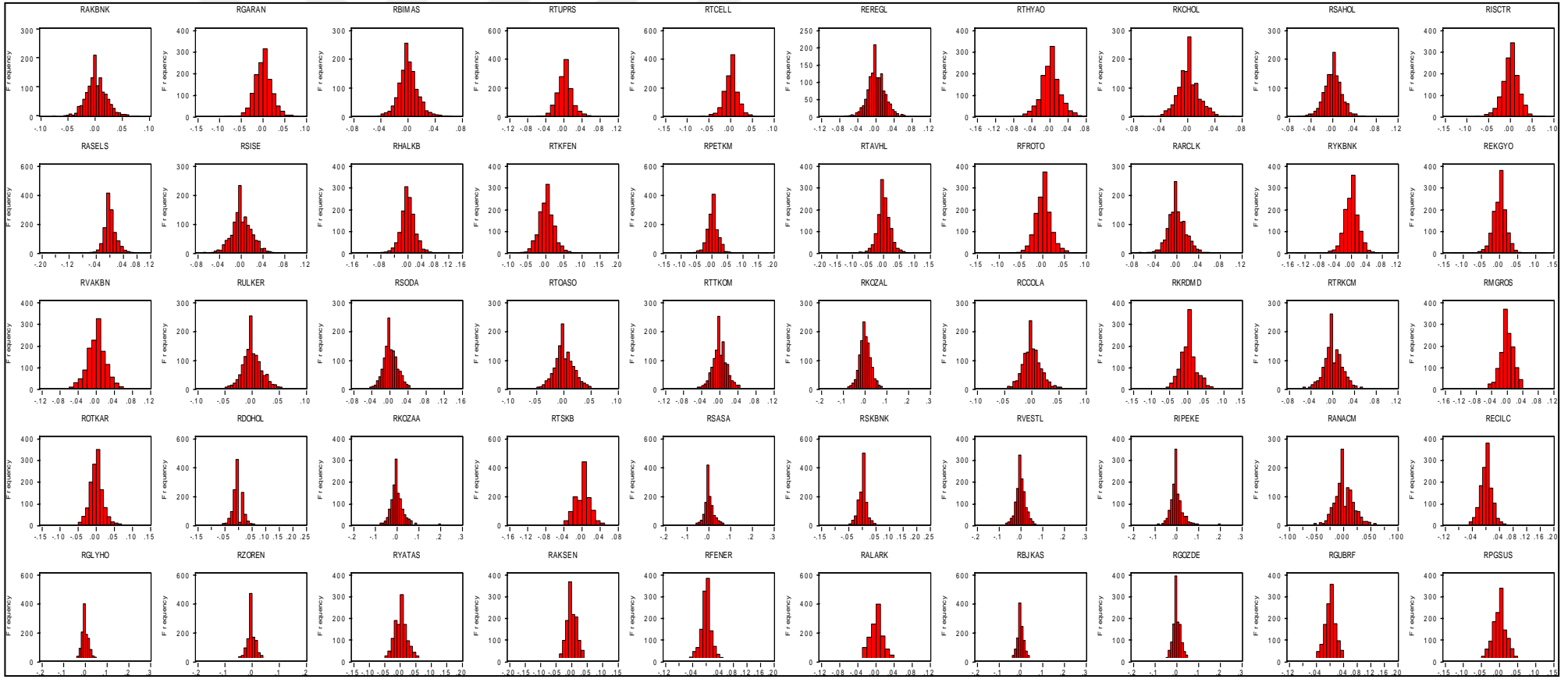
Şekil 30: Finansal Varlıkların Getirileri

Finansal serilerin en önemli karakteristik özelliklerinden ikincisi leptokurtik dağılım özelliğidir. Getiri serilerinin normal dağılmadığı, leptokurtik dağılıma uyduğu bilinmektedir. Şekil 31’de 50 hisse senedinin getiri verilerine ait histogramlara yer verilmiştir. Getiri serilerinin dağılımlarında kalın kuyruk görülmekte ve tümünün basıklık değeri 3’ün üzerindedir. Olasılık dağılımının kuyruklarındaki kalınlığın nedeni, getirideki büyük hareketlerdir. Sivrilik ise getiri serisindeki uç değerlerin daha yüksek olasılıkla beklenildiğine işaret etmektedir.

Getiri serilerine ait tanımlayıcı istatistikler Tablo 3’de paylaşılmıştır. Finansal varlıkların getirilerine ait gözlem sayısı 1326’dır. En küçük ortalamaya sahip hisse -0,000163 değeriyle CCOLA, en büyük ortalamaya sahip hisse 0,002919 değeriyle SASA’dır. Hisseler arasında en yüksek standart sapma 0,039238 değeriyle IPEKE’ye, en düşük standart sapma 0,015230 değeriyle BİMAS’a aittir. Diğer bir ifadeyle dağılımın ortalamaya en yakın olduğu hisse BİMAS, en uzak olduğu hisse IPEKE’dir.

Çarpıklık değeri en düşük ve en yüksek olan hisse sırasıyla 1,67812 değeriyle DOHOL ve -0,007215 değeriyle EKGYO’dur. Çarpıklık değerinin pozitif olması dağılımın sağa, negatif olması ise dağılımın sola çarpık olduğunu göstermektedir. Tüm hisselerine ait basıklık değeri 3’den büyük ve hisselerin tamamı sivri dağılım özelliği göstermektedir. En büyük basıklık değerine sahip hisse 18,519630 değeriyle SKBNK, en düşük basıklık değeri sahip hisse 3,873690 değeriyle SISE’dir. Getiri serilerinde Jarque-Bera test istatistiği yüksek çıkmaktadır. En yüksek JB istatistiği 13898,84 değeriyle SKBNK’a, en düşük JB istatistiği 43,02155 değeriyle SISE’ye aittir. Bu da getiri serilerinin hiçbirinin normal dağılım özelliği taşımadığını göstermektedir.

Toplam karesel sapma değeri en yüksek olan hisse 2,040034 değeriyle IPEKE olurken, en düşük toplam karesel sapma değeri 0,307356 değeriyle BİMAS hissesine aittir. IPEKE hissesinin gözlem değerlerinin diğer hisseler göre ortalama değerden daha fazla değiştiği görülmektedir.



Şekil 31: Getiri Hisselerinin Histogramları

Tablo 3: Finansal Varlıkların Getirilerine Ait Tanımsal İstatistikler

No	Finansal Varlığın Sembolü	Gözlem Değerinin Başlangıç Tarihi	Gözlem Değerinin Bitiş Tarihi	Ortalama	Medyan	Maksimum Değer	Minimum Değer	Standart Sapma	Çarpıklık	Basıklık	Jarque-Bera (Olasılık Değeri)	Toplam	Toplam Karesel Sapma	Gözlem Sayısı	
1	RAKBNK	03.01.2014	01.02.2019	0.000359	0.000000	0.086235	-0.082001	0.020413	0.154014	4.430324	118.274000	0.000000	0.476476	0.552096	1326
2	RAKSEN	03.01.2014	01.02.2019	0.000351	0.000000	0.111111	-0.198020	0.020364	-0.785798	11.313180	3954.731000	0.000000	0.465372	0.549455	1326
3	RALARK	03.01.2014	01.02.2019	0.000221	0.000000	0.111226	-0.104167	0.019503	-0.014437	6.300505	601.902900	0.000000	0.292532	0.503994	1326
4	RANACM	03.01.2014	01.02.2019	0.000983	0.000000	0.079655	-0.083115	0.018939	0.016979	4.450208	116.260100	0.000000	1.303341	0.475258	1326
5	RARCLK	03.01.2014	01.02.2019	0.000444	0.000000	0.079784	-0.073770	0.017813	0.243102	4.785531	189.204400	0.000000	0.588155	0.420445	1326
6	RASELS	03.01.2014	01.02.2019	0.001558	0.000000	0.110000	-0.193420	0.020106	-0.442843	12.834680	5387.170000	0.000000	2.065918	0.535640	1326
7	RBIMAS	03.01.2014	01.02.2019	0.000672	0.000000	0.060185	-0.074816	0.015230	0.243097	5.016026	237.616200	0.000000	0.891681	0.307356	1326
8	RBJKAS	03.01.2014	01.02.2019	0.000293	0.000000	0.198770	-0.200000	0.027011	0.606900	14.309670	7148.352000	0.000000	0.388305	0.966694	1326
9	RCCOLA	03.01.2014	01.02.2019	-0.000163	0.000000	0.093695	-0.095462	0.018702	0.015530	4.981622	217.010400	0.000000	-0.215539	0.463423	1326
10	RDOHOL	03.01.2014	01.02.2019	0.000694	0.000000	0.195402	-0.145161	0.027233	1.678120	13.957170	7255.651000	0.000000	0.920188	0.982665	1326
11	RECICL	03.01.2014	01.02.2019	0.000645	0.000000	0.199468	-0.120000	0.021165	1.214293	16.807580	10859.240000	0.000000	0.855603	0.593516	1326
12	REKGYO	03.01.2014	01.02.2019	-0.000043	0.000000	0.120141	-0.125806	0.019346	-0.007215	7.997210	1379.720000	0.000000	-0.057020	0.495888	1326
13	REREGL	03.01.2014	01.02.2019	0.001101	0.000000	0.086290	-0.106250	0.020592	-0.093280	4.496804	125.706300	0.000000	1.459476	0.561824	1326
14	RFENER	03.01.2014	01.02.2019	-0.000132	0.000000	0.182940	-0.106503	0.023669	0.903614	12.229010	4886.346000	0.000000	-0.175586	0.742322	1326
15	RFROTO	03.01.2014	01.02.2019	0.000891	0.000000	0.092170	-0.109218	0.019258	-0.114684	5.843635	449.672500	0.000000	1.180957	0.491387	1326
16	RGARAN	03.01.2014	01.02.2019	0.000443	0.000000	0.093791	-0.115629	0.021403	-0.033301	5.262308	283.016700	0.000000	0.587480	0.606948	1326
17	RGLYHO	03.01.2014	01.02.2019	0.001191	0.000000	0.198898	-0.193277	0.025159	0.792009	12.005900	4619.750000	0.000000	1.578915	0.838725	1326
18	RGOZDE	03.01.2014	01.02.2019	0.000542	0.000000	0.200000	-0.200000	0.026174	0.637164	12.923690	5530.724000	0.000000	0.718325	0.907757	1326
19	RGUBRF	03.01.2014	01.02.2019	0.000375	0.000000	0.180672	-0.103261	0.022038	0.772482	10.460290	3206.867000	0.000000	0.496754	0.643531	1326
20	RHALKB	03.01.2014	01.02.2019	-0.000056	0.000000	0.146119	-0.142620	0.023387	-0.030761	7.399586	1069.648000	0.000000	-0.074739	0.724698	1326
21	RIPEKE	03.01.2014	01.02.2019	0.001220	0.000000	0.200000	-0.200000	0.039238	1.300687	9.770461	2906.497000	0.000000	1.617857	2.040034	1326
22	RISCTR	03.01.2014	01.02.2019	0.000380	0.000000	0.091418	-0.132159	0.019866	-0.227063	5.728714	422.779200	0.000000	0.503289	0.522905	1326
23	RKCHOL	03.01.2014	01.02.2019	0.000636	0.000000	0.067328	-0.069394	0.016296	0.032818	4.322638	96.890750	0.000000	0.843612	0.351869	1326
24	RKOZAA	03.01.2014	01.02.2019	0.001549	0.000000	0.200000	-0.200000	0.038586	1.119774	9.444238	2571.544000	0.000000	2.054106	1.972724	1326
25	RKOZAL	03.01.2014	01.02.2019	0.001307	0.000000	0.200000	-0.199548	0.033428	0.149937	7.912602	1338.353000	0.000000	1.732638	1.480561	1326
26	RKRDMD	03.01.2014	01.02.2019	0.001036	0.000000	0.136463	-0.122449	0.025288	0.304462	5.140081	273.528000	0.000000	1.373359	0.847320	1326
27	RMGROS	03.01.2014	01.02.2019	0.000287	0.000000	0.098837	-0.156056	0.019572	-0.329931	8.091196	1456.152000	0.000000	0.381129	0.507558	1326
28	ROTKAR	03.01.2014	01.02.2019	0.000752	0.000000	0.121298	-0.105305	0.021168	0.603930	7.149556	1031.945000	0.000000	0.997177	0.593723	1326
29	RPETKM	03.01.2014	01.02.2019	0.001132	0.000000	0.179704	-0.104109	0.019124	0.338070	10.079000	2793.961000	0.000000	1.501041	0.484571	1326
30	RPGSUS	03.01.2014	01.02.2019	0.000115	0.000000	0.108624	-0.130435	0.023604	0.019141	5.231711	275.255400	0.000000	0.151831	0.738219	1326
31	RSAHOL	03.01.2014	01.02.2019	0.000187	0.000000	0.087811	-0.065166	0.017383	0.032641	4.411654	110.335900	0.000000	0.248439	0.400382	1326
32	RSASA	03.01.2014	01.02.2019	0.002919	0.000000	0.200095	-0.168896	0.029873	0.889138	11.027060	3734.677000	0.000000	3.870379	1.182394	1326
33	RSISE	03.01.2014	01.02.2019	0.001139	0.000000	0.078846	-0.073665	0.019342	0.061922	3.873690	43.021550	0.000000	1.510471	0.495687	1326
34	RSKBNK	03.01.2014	01.02.2019	-0.000123	0.000000	0.200000	-0.094203	0.021073	1.635848	18.519630	13898.840000	0.000000	-0.163221	0.588394	1326
35	RSODA	03.01.2014	01.02.2019	0.001510	0.000000	0.117647	-0.075616	0.017991	0.295645	5.723583	429.156000	0.000000	2.002194	0.428871	1326
36	RTAVHL	03.01.2014	01.02.2019	0.000673	0.000000	0.096774	-0.173423	0.021969	-0.371864	7.250519	1028.757000	0.000000	0.892309	0.639506	1326
37	RTCELL	03.01.2014	01.02.2019	0.000351	0.000000	0.083573	-0.136531	0.017498	-0.494961	7.780539	1316.800000	0.000000	0.465896	0.405712	1326
38	RTHYAO	03.01.2014	01.02.2019	0.000888	0.000000	0.076730	-0.125839	0.022467	-0.195497	4.936585	215.654000	0.000000	1.177623	0.668794	1326
39	RTKFEN	03.01.2014	01.02.2019	0.001396	0.000000	0.165663	-0.072235	0.021693	0.470544	5.978841	539.192700	0.000000	1.851478	0.623506	1326
40	RTOASO	03.01.2014	01.02.2019	0.000574	0.000000	0.094238	-0.083203	0.019814	0.103140	4.316673	98.133930	0.000000	0.761127	0.520171	1326
41	RTRKCM	03.01.2014	01.02.2019	0.000896	0.000000	0.077424	-0.073505	0.018173	-0.054224	4.232769	84.614270	0.000000	1.187572	0.437599	1326
42	RTSKB	03.01.2014	01.02.2019	0.000200	0.000000	0.076923	-0.123457	0.018438	-0.300540	6.056587	536.147100	0.000000	0.265821	0.450431	1326
43	RTTKOM	03.01.2014	01.02.2019	0.000056	0.000000	0.080279	-0.110476	0.018763	-0.121566	5.830437	445.894300	0.000000	0.074496	0.466447	1326
44	RTUPRS	03.01.2014	01.02.2019	0.001050	0.000668	0.101083	-0.096429	0.018446	-0.183264	6.228065	583.149900	0.000000	1.392329	0.450843	1326
45	RULKER	03.01.2014	01.02.2019	0.000381	0.000000	0.093446	-0.098028	0.019904	0.211261	5.356916	316.780200	0.000000	0.505689	0.524939	1326
46	RVAKBN	03.01.2014	01.02.2019	0.000441	0.000000	0.117647	-0.109259	0.022287	-0.054899	5.332068	301.145500	0.000000	0.585393	0.658115	1326
47	RVESTL	03.01.2014	01.02.2019	0.001570	0.000000	0.208502	-0.175000	0.030151	1.085679	11.151520	3931.704000	0.000000	2.081784	1.204533	1326
48	RYATAS	03.01.2014	01.02.2019	0.002649	0.000000	0.200000	-0.128028	0.028115	0.906339	8.773050	2022.918000	0.000000	3.512091	1.047369	1326
49	RYKBNK	03.01.2014	01.02.2019	0.000061	0.000000	0.115739	-0.130208	0.019822	0.040452	6.893852	838.066900	0.000000	0.080732	0.520625	1326
50	RZOREN	03.01.2014	01.02.2019	0.000938	0.000000	0.180703	-0.197874	0.028348	1.169780	12.961650	5785.119000	0.000000	1.243270	1.064773	1326

3.3. BOX-JENKINS MODEL KURMA STRATEJİSİ

George Box ve Gwilym Jenkins tarafından geliştirilen strateji, durağan veya durağan olmayan zaman serileri için uygun ARIMA modellerinin nasıl kurulacağını açıklamaktadır. Ortalama denklemlerinin oluşturulmasında Box-Jenkins yaklaşımından yararlanılmıştır. Aşağıda basamaklar ile uygulamaya yer verilmiştir. Stratejinin birinci basamağı “belirleme”dir.

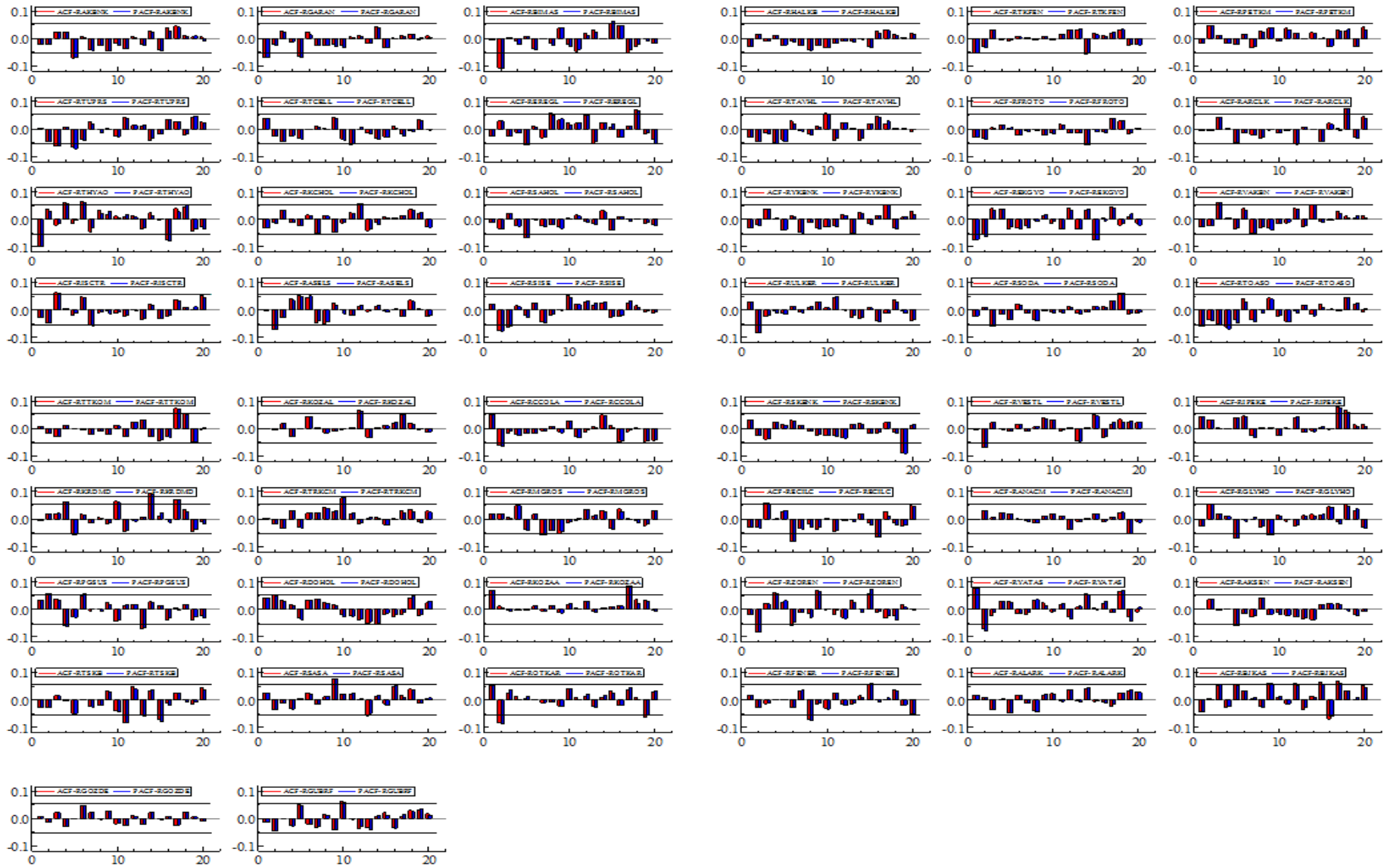
3.3.1. Belirleme

Belirleme aşamasında getiri serilerinin otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon fonksiyonları incelenecektir. Durağan olmayan seriler belirlenip, durağanlaştırılacaktır. Durağan seriler için AR, MA ya da ARMA modellerinden herhangi biri uygun olabilir.

ACF k gecikmede, $t-1$ ile $t-k+1$ gecikmelerindeki etkileri içerirken; PACF k gecikmede, t ve $t-k$ arasındaki gecikme değerlerini sabit tutmaktadır. Şekil 32’de 50 hisse senedinin örnek otokorelasyon (ACF) ve kısmi otokorelasyon (PACF) fonksiyonları gösterilmektedir. Örnek ACF ve örnek PACF değerlerinin sıfır ortalamayı kısa gecikmelerde kestiği ve sıfır ortalama etrafında rastsal bir şekilde salındığı görülmektedir. Katsayıların $\pm 2\sigma$ bant aralığının dışına çıkması durumunda örnek ACF ve örnek PACF değerlerinin istatistiksel olarak anlamlı olduğu kabul edilir. $\pm 2\sigma$ bant değeri,

$$\pm \frac{2}{\sqrt{T}} = \pm \frac{2}{\sqrt{1326}} = \pm 0.054923$$

şeklinde hesaplanmaktadır. 50 hisse senedinin örnek ACF ve örnek PACF katsayıları ± 0.054923 bant aralığında bulunmaktadır. Diğer bir ifadeyle örnek ACF ve örnek PACF katsayıları istatistiksel olarak anlamsızdır.



Şekil 32: Getiri Hisselerine ait ACF ve PACF

Aşağıda örnek ACF yardımı ile durağan olduğu gözlenen getiri serileri için Genişletilmiş Dickey-Fuller (ADF) birim kök testi yapılmıştır. Tablo 4’de 50 hisse senedine ait ADF test sonuçları görülmektedir. ADF denklemi,

$$\Delta r_t = \rho r_{t-1} + \sum_{i=1}^k \phi_i \Delta r_{t-i} + \varepsilon_t$$

ve hipotezler,

$$H_0 : \rho_k = 0$$

$$H_1 : \rho_k < 0$$

şeklinde kurulmuştur. Örnek olarak REKGYO için ADF denklemi,

$$\Delta REKGYO_t = \rho_1 REKGYO_{t-1} + \sum_{i=1}^k \phi_i \Delta REKGYO_{t-i} + \varepsilon_t$$

$$\Delta REKGYO_t = -1.139737 REKGYO_{t-1} + \sum_{i=1}^1 0.060461 \Delta REKGYO_{t-i}$$

<i>std</i>	0.040221	0.027474
<i>t</i>	-28.33670	2.200676

yazılmaktadır. τ test istatistiği,

$$\tau_{\hat{\rho}} = \frac{\hat{\rho}_1}{\sigma_{\hat{\rho}_1}} = \frac{-1.139737}{0.040221} = -28.33670$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Hesaplanan $\tau_{\hat{\rho}}$ değeri -28.33670; %1, %5, %10 anlamlılık düzeyleri sırasıyla -2.5667, -1.9411, -1.6165’dir. Her üç anlamlılık düzeyinde hesaplanan $\tau_{\hat{\rho}}$ değeri, τ kritik değerinden daha negatif olduğundan temel hipotez reddedilerek REKGYO’nun durağan olduğu kabul edilir. Benzer işlemler diğer hisseler için de yapılmıştır. Sonuçlar, tüm hisse senedi getiri serilerinin %5 anlamlılık düzeyinde durağan olduğunu göstermektedir.

Tablo 4: ADF Test Sonuçları

No	Finansal Varlığın Sembolü	Geniştirilmiş Dickey-Fuller Test İstatistiği ve <i>Olasılık Değeri</i>	1%	5%	10%
1	RAKBNK	-27.268640 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
2	RAKSEN	-24.749690 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
3	RALARK	-35.740290 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
4	RANACM	-36.348160 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
5	RARCLK	-36.557230 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
6	RASELS	-13.330730 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
7	RBIMAS	-28.653950 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
8	RBJKAS	-6.507748 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
9	RCCOLA	-26.694000 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
10	RDOHOL	-23.926970 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
11	RECILC	-15.399340 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
12	REKGYO	-28.346760 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
13	REREGL	-37.147150 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
14	RFENER	-35.761910 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
15	RFROTO	-37.423070 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
16	RGARAN	-38.995040 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
17	RGLYHO	-16.685250 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
18	RGOZDE	-36.141650 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
19	RGUBRF	-16.106430 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
20	RHALKB	-37.437960 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
21	RIPEKE	-34.894950 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
22	RISCTR	-20.500720 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
23	RKCHOL	-37.468430 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
24	RKOZAA	-33.903140 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
25	RKOZAL	-36.402200 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
26	RKRDMD	-7.287109 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
27	RMGROS	-35.678080 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
28	ROTKAR	-27.268640 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
29	RPETKM	-24.634400 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
30	RPGSUS	-14.336820 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
31	RSAHOL	-17.741870 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
32	RSASA	-35.165560 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
33	RSISE	-23.011900 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
34	RSKBNK	-35.324600 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
35	RSODA	-21.941420 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
36	RTAVHL	-19.943900 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
37	RTCELL	-35.020500 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
38	RTHYAO	-13.646510 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
39	RTKFEN	-38.189250 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
40	RTOASO	-18.901770 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
41	RTRKCM	-36.225190 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
42	RTSKB	-10.966390 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
43	RTTKOM	-36.104120 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
44	RTUPRS	-18.179520 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
45	RULKER	-27.452720 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
46	RVAKBN	-20.276510 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
47	RVESTL	-27.459680 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
48	RYATAS	-26.345910 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
49	RYKBNK	-37.466340 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165
50	RZOREN	-11.532960 0.000000	-2.5667	-1.9411	-1.6165

3.3.2. Tahmin ve Ayırd Edici Kontrol

Bu aşamada Box-Jenkins model kurma stratejisinin ikinci ve üçüncü basamağı birleştirilerek analizler yapılmıştır. Tahmin basamağında getiri hisseleri için uygun AR, MA ve ARMA modelleri oluşturulmuş ve parametrelerin istatistiksel anlamlılığı test edilmiştir. İstatistiksel olarak anlamlı olan parametrelerin “çevrilebilirlik” ve “durağanlık” sınırları içinde olması gerekmektedir. Bu şartları taşıyan modellere stratejinin üçüncü basamağında Portmanteau testi yapılarak otokorelasyonun olup olmadığı kontrol edilmiştir. Portmanteau testini geçen modellerin ACF ve PACF analizi yapılmıştır. Daha sonrasında ARCH modellerine geçileceğinden kalıntılarda ARCH etkisinin kontrolü ARCH-LM testiyle yapılmıştır.

Çalışmada herbir hisse senedi için 24, toplamda 1200 farklı model kurulmuştur. Kurulan modellerden 44’ü yukarıda belirtilen koşulları sağlamış ve testleri başarılı bir şekilde geçmiştir. Seçilen 44 aday model Tablo 5’de gösterilmiştir.

Tablo 5: 50 Hisse Senedine Ait Aday Modeller

AR(1)	AR(2)	ARMA(1,1)	ARMA(1,2)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	ARMA(3,3)	ARMA(3,4)	ARMA(4,3)	MA(1)	MA(2)
RGARAN	REKGYO	RBIMAS	RTCELL	RTCELL	REKGYO	RGARAN	RMGROS	RMGROS	RGARAN	RCCOLA
RTHYAO	RCCOLA	REREGL		RISCTR	RZÖREN	REREGL			RTHYAO	ROTKAR
REKGYO	ROTKAR	RTHYAO				RSAHOL			REKGYO	RYATAS
RTOASO	RYATAS	RPETKM				RIPEKE			RTOASO	
RKOZAA		RYKBNK							RCCOLA	
RYATAS		RULKER							ROTKAR	
		RTOASO							RKOZAA	
		RCCOLA								
		ROTKAR								
		RPGSUS								
		RDOHOL								
		RIPEKE								
		RGLYHO								

Tablo 5’de yer alanlar arasından örnek olarak seçilen hisseler için tahmin edilen ARMA modelleri aşağıda verilmiştir.

Model 1 – AR(1):

$$RGARAN_t = -0.0684581RGARAN_{t-1}$$

<i>std</i>	0.02741
<i>t</i>	-2.5

Model 2 – AR(2):

$$REKGYO_t = -0.078039REKGYO_{t-1} - 0.0602937REKGYO_{t-2}$$

<i>std</i>	0.02744	0.02747
<i>t</i>	-2.84	-2.2

Model 3 – MA(1):

$$RTHYAO_t = -0.0902185\varepsilon_{t-1}$$

<i>std</i>	0.02645
<i>t</i>	-3.41

Model 4 – MA(2):

$$RCCOLA_t = 0.054231\varepsilon_{t-1} - 0.0629245\varepsilon_{t-2}$$

<i>std</i>	0.02749	0.02811
<i>t</i>	1.97	-2.24

Model 5 – ARMA(1,1):

$$RBIMAS_t = 0.707338RBIMAS_{t-1} - 0.752569\varepsilon_{t-1}$$

<i>std</i>	0.1366	0.1267
<i>t</i>	5.18	-5.94

Model 6 – ARMA(1,2):

$$RTCELL_t = 0.822602RTCELL_{t-1} - 0.787771\varepsilon_{t-1} - 0.065303\varepsilon_{t-2}$$

<i>std</i>	0.1035	0.1057	0.02782
<i>t</i>	7.95	-7.45	-2.35

Model 7 – ARMA(2,1):

$$RISCTR_t = -0.428106RISCTR_{t-1} - 0.0672736RISCTR_{t-2} + 0.40146700\varepsilon_{t-1}$$

<i>std</i>	0.2028	0.02742	0.2018
<i>t</i>	-2.11	-2.45	1.99

Model 8 – ARMA(2,2):

$$RZOREN_t = 0.6178440RZOREN_{t-1} - 0.9241310RZOREN_{t-2}$$

<i>std</i>	0.0328	0.04554
<i>t</i>	18.8	- 20.3

$$-0.663665\varepsilon_{t-1} + 0.914746\varepsilon_{t-2}$$

<i>std</i>	0.03023	0.049380
<i>t</i>	- 22.0	18.5

Model 9 – ARMA(3,3):

$$REREGL_t = 0.44348REREGL_{t-1} + 0.232523REREGL_{t-2} - 0.884713REREGL_{t-3}$$

<i>std</i>	0.06415	0.08403	0.0632
<i>t</i>	6.91	2.77	- 14.0

$$-0.459726\varepsilon_{t-1} - 0.185961\varepsilon_{t-2} + 0.851058\varepsilon_{t-3}$$

<i>std</i>	0.07165	0.09334	0.07142
<i>t</i>	- 6.42	- 1.99	11.9

Model 10 – ARMA(3,4):

$$RMGROS_t = 0.458546RMGROS_{t-1} + 0.411485RMGROS_{t-2} - 0.945687RMGROS_{t-3}$$

<i>std</i>	0.02173	0.02997	0.02085
<i>t</i>	21.1	13.7	- 45.4

$$-0.440679\varepsilon_{t-1} - 0.404601\varepsilon_{t-2} + 0.926374\varepsilon_{t-3} + 0.0565824\varepsilon_{t-4}$$

<i>std</i>	0.03522	0.036	0.02984	0.02851
<i>t</i>	- 12.5	- 11.2	31.0	1.98

Model 11 – ARMA(4,3):

$$RMGROS_t = 0.516439RMGROS_{t-1} + 0.385121RMGROS_{t-2} - 0.970181RMGROS_{t-3}$$

<i>std</i>	0.03744	0.03534	0.02323
<i>t</i>	13.8	10.9	- 41.8

$$0.0552891RMGROS_{t-4} - 0.499371\varepsilon_{t-1} - 0.376036\varepsilon_{t-2} + 0.949637\varepsilon_{t-3}$$

<i>std</i>	0.02804	0.02627	0.03749	0.02634
<i>t</i>	1.97	- 19.0	- 10.0	36.1

Aşağıda Model 9 üzerinden analizler için örnek gösterimler yapılabilir. Bu aşamalar tüm modellere uygulanmıştır. Model 9 incelendiğinde AR ve MA parametrelerinin hesaplanan t değerleri tablo kritik değeri 1,96'dan daha büyük olması, parametrelerin istatistiksel olarak anlamlı olduğunu göstermektedir. Aynı modelin durağanlık ve çevrilebilirlik koşullarını sağlayabilmesi için AR ve MA parametre katsayılarının ayrı ayrı toplamının 1'den küçük olması gerekir.

$$0.44348 + 0.232523 - 0.884713 = -0.20871 < 1$$

$$-0.459726 - 0.185961 + 0.851058 = 0.205371 < 1$$

Durağanlık ve çevrilebilirlik koşullarının kontrolü birim çember üzerinden yapılabilir. Şekil 33'de aday 44 modele ait birim çemberler verilmiştir. AR ve MA karakteristik köklerinin birim çemberin içerisinde olması, durağanlık ve çevrilebilirlik koşullarının sağlandığını göstermektedir.

Modellerin otokorelasyon analizi Portmanteau testi kullanılarak yapılmıştır. Testin hipotezleri Model 9 için,

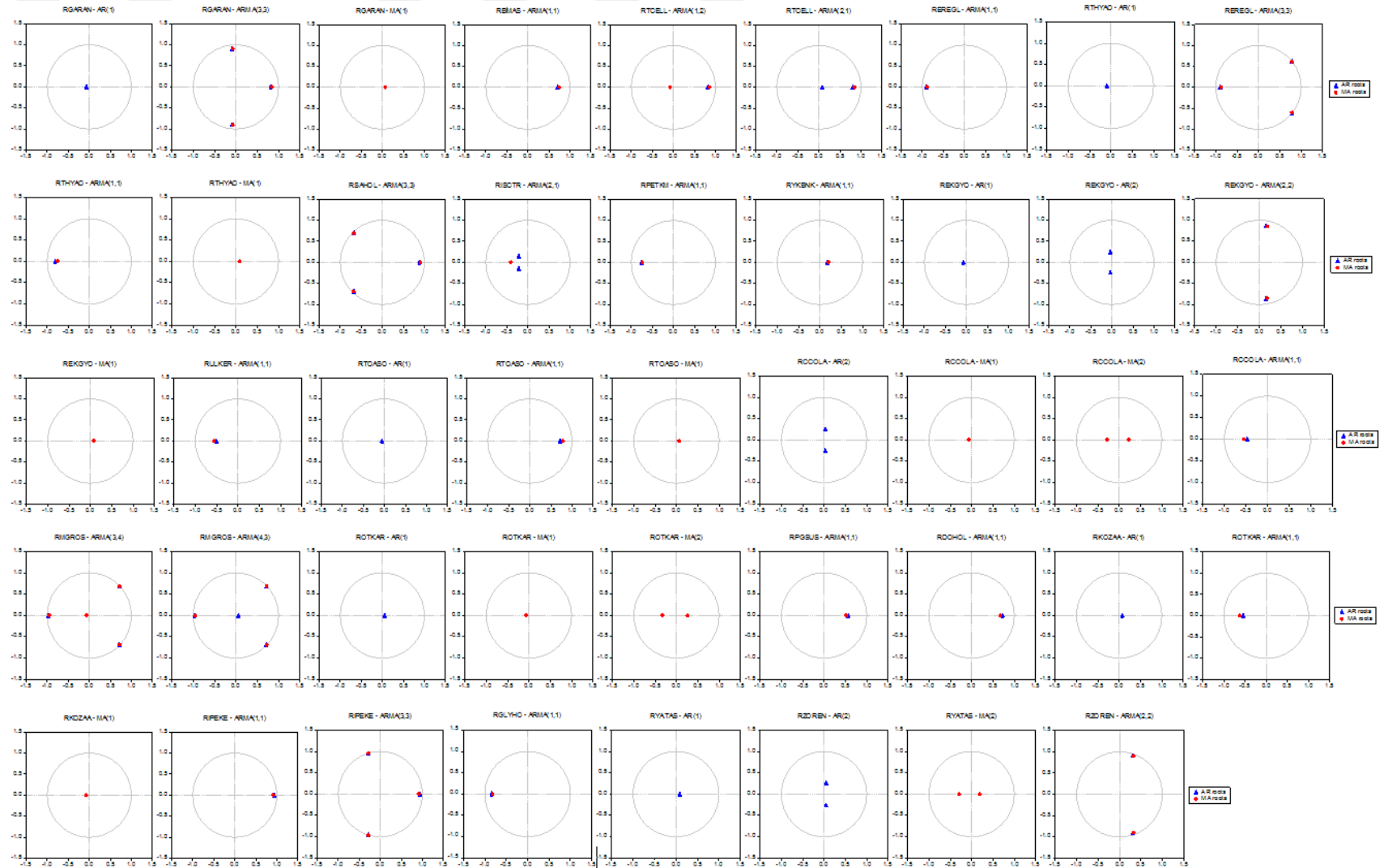
$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_{36} = 0$$

$$H_1 : \rho_1 \neq \rho_2 \neq \dots \neq \rho_{36} \neq 0$$

şeklinde kurulmuştur. Sıfır hipotezi altında Portmanteau istatistiği,

$$Q^*(36) = T \sum_{\ell=1}^{36} \hat{\rho}_{\ell}^2 = 37.911$$

olarak hesaplanmıştır. $Q^*(36) < X_{36}^2$ olması nedeniyle sıfır hipotezi red edilmemiş ve örnek otokorelasyon katsayılarının istatistiksel olarak anlamlı olmadığına karar verilmiştir.



Şekil 33: Birim Çemberler ve Karakteristik Kökler

Oluşturalan ARMA modellerinden varyans denklemlerine geçilebilmesi için modellerin kalıntılarında ARCH etkisinin bulunması gerekir. ARCH etkisinin analizi için ARCH-LM testi kullanılmıştır. Teste ilişkin hipotezler,

$$H_0 : \rho_1 = 0 \quad (\text{ARCH etkisi bulunmamakta})$$

$$H_1 : \rho_1 \neq 0 \quad (\text{ARCH etkisi bulunmakta})$$

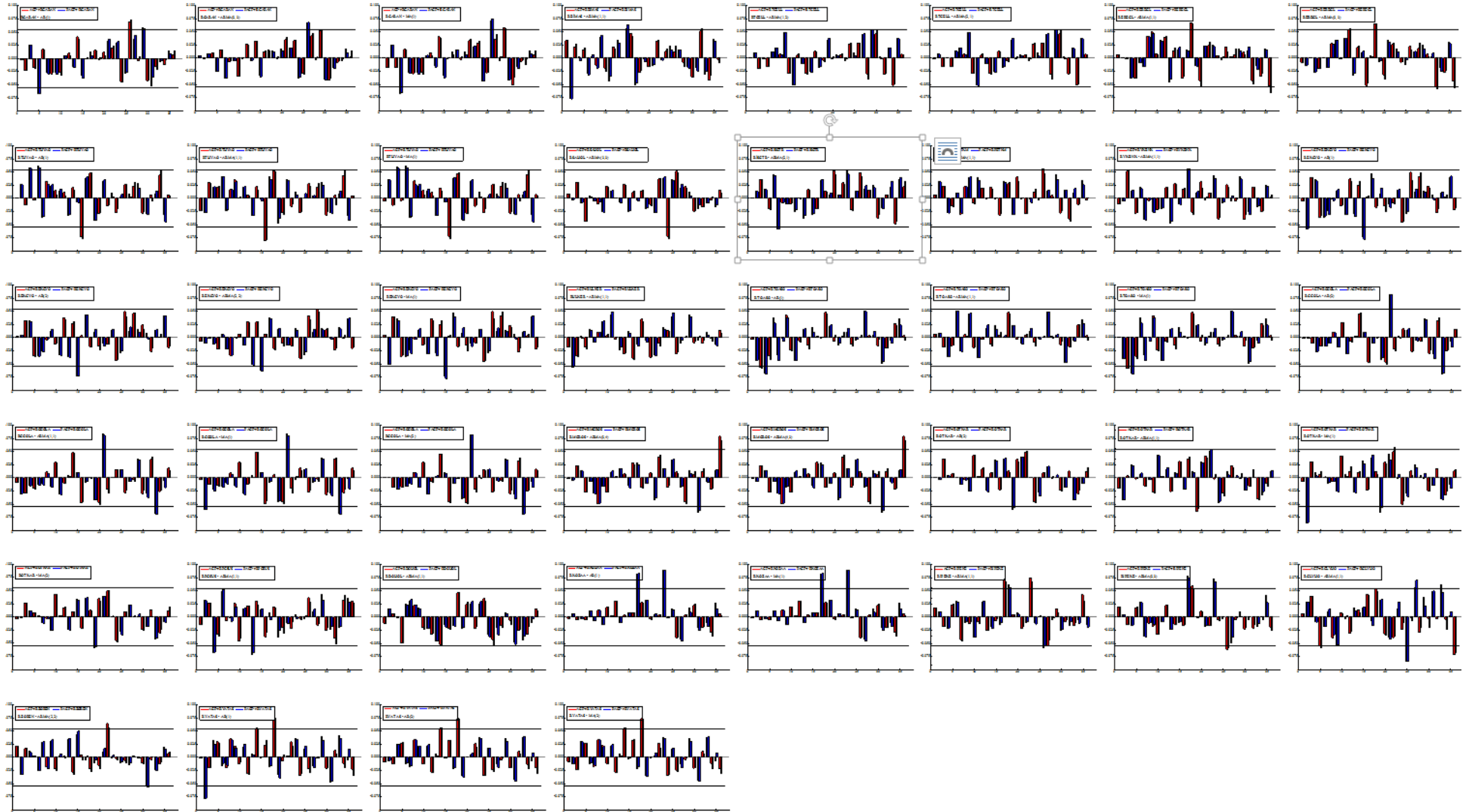
şeklinde kurulmaktadır. Model 9 için ARCH-LM test istatistiği 9.20830 olarak hesaplanmıştır. Test sonucu %5 anlamlılık düzeyinde temel hipotez reddedilmiş ve kalıntılarda ARCH etkisinin olduğuna karar verilmiştir.

Model 9 için yapılan bu testler diğer modeller için de uygulanmış ve 1156 model bu test ve koşulların bir veya birkaçını sağlayamadığından analiz dışı bırakılmıştır. 44 model, koşulları sağlamış ve testleri başarılı bir şekilde geçmiştir.

Oluşturulan 44 aday modele ait ACF ve PACF grafikleri Şekil 34'de gösterilmiştir. Korelogramda model kalıntılarına ait otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının $\pm 2\sigma = \pm 0.054923$ aralığında olduğu görülmektedir. Kalıntıların güven sınırları içerisinde yer alması, kurulan modellerin doğru olduğunu göstermektedir.

3.3.3. Büyük Ayrım ve Öngörü

Bu aşamada aday modellerin uyum iyiliğini ölçmek amacıyla AIC, RMSE, MAE, MAPE, Theli U, sapma oranı, varyans oranı ve kovaryans oranı ölçütleri hesaplanmıştır. Belirtilen ölçütler model bazında Tablo 6'da gösterilmektedir. Kovaryans oranı hariç, Tablo 6'da yer alan tüm ölçütlerden küçük olanın seçilmesi modelin diğer modellere göre başarısını ortaya koymaktadır. Ölçüt bazında en küçük değerler Tablo 6'da işaretlenmiştir. Kovaryans oranı ise 1'e yaklaştıkça öngörünün başarısı artmaktadır.



Şekil 34: Aday Modellerin Korelogramları

Tablo 6: Aday Modellere Ait Uyum İyiliği Ölçütleri

	Model	AIC	RMSE	MAE	MAPE	Theil U	Sapma Oranı	Varyans Oranı	Kovaryans Oranı
RGARAN	AR(1)	-4.85260631	0.021342	0.015638	92.71157*	0.933643	0.00054	0.871251	0.128209
	ARMA(3,3)*	-4.85094594	0.021249*	0.01561*	95.71684	0.90163*	0.000607	0.812193*	0.1872*
	MA(1)	-4.85280392*	0.021347	0.015646	92.85383	0.931363	0.0005*	0.866767	0.132734
RBIMAS	ARMA(1,1)*	-5.53556991	0.015208	0.011103	96.48559	0.937956	0.002836	0.878789	0.118376
RTCELL	ARMA(1,2)	-5.25322253	0.017447*	0.01247*	91.94941*	0.929224	0.000613	0.863474	0.135913
	ARMA(2,1)*	-5.2534702*	0.01745	0.012471	91.96688	0.927542*	0.00059*	0.860158*	0.139252*
REREGL	ARMA(1,1)	-4.92536461*	0.020571	0.01541	93.04198*	0.937563	0.003034	0.876254	0.120712
	ARMA(3,3)*	-4.92481445	0.020484*	0.015405*	95.2471	0.888566*	0.003005*	0.785747*	0.211248*
RTHYAO	AR(1)	-4.7589857	0.022379	0.016508	95.27293	0.908239	0.001884	0.823636	0.17448
	ARMA(1,1)*	-4.76102915*	0.02234*	0.01651	96.34654	0.892846*	0.001684*	0.795747*	0.202568*
	MA(1)	-4.75841788	0.022378	0.016503*	95.04069*	0.913663	0.001916	0.834501	0.163583
RSAHOL	ARMA(3,3)*	-5.26749243	0.017252	0.012969	94.05144	0.916772	0.000177	0.839629	0.160194
RISCTR	ARMA(2,1)*	-4.99853058	0.019809	0.014673	93.95521	0.934752	0.000383	0.873376	0.126241
RPETKM	ARMA(1,1)*	-5.06959227	0.019146	0.013608	89.48479	0.967515	0.003626	0.932663	0.063711
RYKBNK	ARMA(1,1)*	-5.0018373	0.019808	0.01432	89.90979	0.969349	0.000015	0.939624	0.060362
REKGYO	AR(1)	-5.05586853	0.019282	0.013787	85.12961	0.928765	0.000011	0.862574	0.137416
	AR(2)	-5.05801285	0.019242	0.013783*	84.79776*	0.908683	0.00002	0.825921	0.174059
	ARMA(2,2)*	-5.0603479*	0.01919*	0.01382	85.02377	0.886072*	0.000018	0.785178*	0.214803*
	MA(1)	-5.05653077	0.01928	0.013795	85.04028	0.921317	0.000006*	0.847696	0.152299
RULKER	ARMA(1,1)*	-4.99493363	0.019865	0.014338	91.19176	0.944015	0.000382	0.890775	0.108843
RTOASO	AR(1)	-5.00518982	0.019764	0.014734	92.9286*	0.943173	0.001034	0.888722	0.110244
	ARMA(1,1)*	-5.01203858*	0.019682*	0.014647*	93.11662	0.896909*	0.001631	0.804303*	0.194065*
	MA(1)	-5.00549098	0.019778	0.014746	92.95039	0.93841	0.000962*	0.879241	0.119797
RCCOLA	AR(2)*	-5.12346335	0.018622*	0.013657	97.74601	0.919964*	0.000089	0.846376*	0.153535*
	ARMA(1,1)	-5.12193773	0.018648	0.013664	96.45381	0.929111	0.000061*	0.863148	0.136791
	MA(1)	-5.12121396	0.018666	0.013645*	94.87047*	0.942113	0.000068	0.886743	0.113189
	MA(2)	-5.12347039*	0.018631	0.013673	97.811	0.920314	0.000077	0.846944	0.152978
RMGROS	ARMA(3,4)*	-5.03437021*	0.019389	0.014111	94.82464	0.87299*	0.000179*	0.759139*	0.240682*
	ARMA(4,3)	-5.0343276	0.019378*	0.014099*	94.82051*	0.873082	0.000212	0.759633	0.240155
ROTKAR	AR(2)	-4.8777253	0.021058*	0.014812*	98.48568	0.903913	0.0013	0.816031	0.182669
	ARMA(1,1)	-4.87633981	0.021086	0.014859	98.69493	0.910612	0.001185	0.828024	0.170791
	MA(1)	-4.87247211	0.021138	0.014873	96.0324*	0.938515	0.001118*	0.878453	0.12043
	MA(2)*	-4.87824356*	0.021061	0.014831	99.09782	0.900303*	0.00133	0.808735*	0.189934*
RPGSUS	ARMA(1,1)	-4.65386203	0.023569	0.017099	94.07039	0.947953	0.000022	0.898588	0.10139
RDOHOL	ARMA(1,1)	-4.36933352	0.027174	0.017141	67.71224	0.931775	0.000474	0.867762	0.131764
RKOZAA	AR(1)*	-3.67296344*	0.038518	0.025396	91.21498*	0.93192*	0.00137*	0.867101*	0.131529*
	MA(1)	-3.67285564	0.038509*	0.025391*	91.25749	0.933462	0.001414	0.870162	0.128424
RIPEKE	ARMA(1,1)	-3.63695281*	0.039191	0.024602*	87.16613*	0.943475	0.000537	0.890218	0.109245
	ARMA(3,3)*	-3.6349323	0.039109*	0.024677	88.01474	0.911743*	0.000468*	0.829238*	0.170294*
RGLYHO	ARMA(1,1)*	-4.52406224	0.025141	0.016581	83.25063	0.947314	0.002394	0.895188	0.102418
RZOREN	ARMA(2,2)*	-4.29929213	0.028097	0.017716	78.52298	0.871483	0.001162	0.758425	0.240413
RYATAS	AR(1)	-4.30154292	0.028132	0.019629*	90.54208*	0.916233	0.007388*	0.832095	0.160517
	AR(2)*	-4.30495254*	0.028065	0.019674	91.33522	0.893801*	0.008406	0.791087*	0.200507*
	MA(2)	-4.30445149	0.028059*	0.019661	90.99104	0.897897	0.008301	0.799234	0.192464

RTOASO için AR(1), ARMA(1,1) ve MA(1) aday modellerdir. ARMA(1,1) modelinin AIC ölçüt değeri, diğer iki modele göre daha küçük olduğundan, AIC ölçütüne göre ARMA(1,1) modeli daha başarılı bir modeldir. 0 ile 1 arasında değer alan Theil U katsayısı 0'a yaklaştıkça modelin başarısı artmaktadır. Aynı hisse için Theil U katsayısı ARMA(1,1) modeli için 0.896909 olarak hesaplanmıştır. Hesaplanan değer diğer iki modelin Theil U katsayısından daha küçük olduğundan ARMA(1,1) modeli alternatif olan iki modele göre daha başarılıdır. Kovaryans oranına bakıldığında ise en yüksek değere sahip olan modelin ARMA(1,1) olduğu görülmekte ve modelin performansı diğer iki modele göre daha başarılıdır. RTOASO için yapılan yorumların benzerleri diğer yirmibir hisse için de yapılabilmektedir.

Tablo 6'da görüldüğü üzere RPGSUS, RULKER, RPETKM gibi bazı hisselerde tek bir aday model bulunmaktadır. Tek bir aday modele sahip hisseler için karşılaştırma yapılamamıştır. Uyum iyiliği ölçütleri dikkate alındığında hisseler için nihai modeller Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 7: Nihai Modeller

ARMA(3,3)	ARMA(1,1)	ARMA(2,1)	ARMA(2,2)	AR(2)	ARMA(3,4)	MA(2)	AR(1)
RGARAN	RBIMAS	RTCELL	REKGYO	RCCOLA	RMGROS	ROTKAR	RKOZAA
REREGL	RTHYAO	RISCTR	RZOREN	RYATAS			
RSAHOL	RPETKM						
RIPEKE	RYKBNK						
	RULKER						
	RTOASO						
	RPGSUS						
	RDOHOL						
	RGLYHO						

Nihai modeli ARMA(3,3) olan dört farklı hisse, ARMA(1,1) olan dokuz farklı hisse; ARMA(2,1), ARMA(2,2) ve AR(2) olan ikişer hisse; ARMA(3,4), MA(2) ve AR(1) olan birer hisse bulunmaktadır. Analiz sonucunda toplamda sekiz farklı ARMA modelinde yirmiiki farklı hisse bulunmaktadır.

Yukarıda hisse senetleri için oluşturulan ortalama denklemlerinin kalıntılarına ARCH-LM testi uygulanmış ve ARCH etkisinin olduğunda karar verilmiştir. Bunun

üzerlerine koşullu varyansların uygun ARCH ailesinden modellerin bulunması için yapılan analizlerle uygulamaya devam edilmiştir.

3.4. ARCH - OTOREGRESİF KOŞULU DEĞİŞEN VARYANS MODELLERİ

Bu aşamada Tablo 7'de gösterilen yirmi iki hisse için varyans denklemleri oluşturulmuştur. Analiz kapsamında ARCH, GARCH, EGARCH, GJR, APARCH ve FIGARCH modelleri kullanılmıştır. Varyans denklemleri oluşturulurken (p,q) dereceleri ARCH modeli için (1), (2); diğer modeller için (1,1), (1,2), (2,1) ve (2,2) derecelerinden tahminler yapılmıştır. Daha yüksek dereceden kurulan varyans denklemlerinin parametreleri gerekli koşulları yeterli seviyede karşılayamadığından (2,2) derecesi son tahmin derecesi olarak seçilmiştir. Yapılan analiz kapsamında tüm testleri geçebilen ROTKAR ve RBİMAS hisseleri için ARMA(1,1)-GARCH(1,1) modeli olmuştur. Geriye kalan yirmi hisse başarısız olduğundan analiz kapsamı dışında kalmıştır. Yirmi hissenin analiz kapsamı dışında kalmalarının nedeni:

- Tahmin edilen varyans denklemlerinde yer alan parametrelerin bir veya birkaçının istatistiksel olarak anlamsız olması,
- Kurulan ARCH modeline bağlı parametre kısıtlarının sağlanamaması,
- Varyans denkleminin ARCH etkisini ortadan kaldıramaması,

şeklinde sıralanmaktadır. Bu sebeple varyans denklemlerine ait tahmin sonuçlarının paylaşımı sadece ROTKAR ve RBİMAS hisse senetleri için yapılmıştır.

3.4.1. ARCH Modelinin Kurulması

Tablo 8'de ROTKAR ve RBİMAS varlıkları için ARMA(1,1)-ARCH(1) ve ARMA(1,1)-ARCH(2) modelleri paylaşılmıştır. RBİMAS için ARMA(1,1)-ARCH(2) denklemleri,

$$RBİMAS_t = 0.767527RBİMAS_{t-1} - 0.814058\varepsilon_{t-1}$$

<i>std</i>	0.094739	0.075952
<i>t</i>	8.102	-10.72

$$\sigma_t^2 = 1.98743 + 0.090832\varepsilon_{t-1}^2 + 0.048407\varepsilon_{t-2}^2$$

<i>std</i>	0.157210	0.040033	0.028807
<i>t</i>	12.64	2.269	1.68

şeklinde. ARCH modelinin geçerli olabilmesi için $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ ve $\sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$ kısıtları sağlamalı ve parametreler istatistiksel olarak anlamlı olmalıdır. Varyans denkleminde yer alan α_0 , α_1 , α_2 parametrelerinin pozitif olma kısıtını sağlamaktadırlar. $\sum_{i=1}^q \alpha_i = 0.139239 < 1$ olması sürecin kovaryans durağan olduğunu göstermektedir. %5 anlamlılık seviyesinde sabit ve ARCH(1) parametresinin istatistiksel anlamlı, ARCH(2) parametresinin ise istatistiksel olarak anlamsız olduğu görülmektedir. ARCH(2) modelinin kalıntılara uygulanan Box/Pierce Q testi sonucunda temel hipotez %5 anlamlılık düzeyinde red edilmemiş ve kalıntılarda otokorelasyon olmadığına karar verilmiştir. ARCH-LM test istatistiği 1.2854 olarak hesaplanmıştır. Test sonucu %5 anlamlılık düzeyinde temel hipotez red edilmemiş ve kalıntılarda ARCH etkisinin kalmadığına karar verilmiştir. Benzer yorumlar diğer üç model içinde yapılabilmektedir.

Tablo 8: ROTKAR ve RBİMAS için ARCH(q) Modelleri

Ortalama Denklemi: $r_t = \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$				Varyans Denklemi: $h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$								
Model	Bağımlı Değişken	Ortalama Denklemi	Varyans Denklemi	İstatistikler	ϕ_1	θ_1	α_0	α_1	α_2	log-likelihood	Box/Pierce Q Testi	ARCH-LM Testi
1	ROTKAR	ARMA(1,1)	ARCH(1)	Katsayı	-0.5500900	0.63604100	3.66711800	0.17165500		3265.625	4.47061	2.74450
				Standart Sp.	0.101200	0.090685	0.302880	0.051588				
				t-istatistiği	-5.435000	7.014000	12.110000	3.327000				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.000000	0.000900				
2	ROTKAR	ARMA(1,1)	ARCH(2)	Katsayı	-0.53815900	0.62349900	3.55896900	0.16069300	0.03500400	3266.714	4.51530	2.27240
				Standart Sp.	0.100840	0.090155	0.322410	0.049706	0.041463			
				t-istatistiği	-5.337000	6.916000	11.040000	3.233000	0.844200			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.000000	0.001300	0.398700			
3	RBİMAS	ARMA(1,1)	ARCH(1)	Katsayı	0.75344500	-0.80479800	2.09763900	0.09299200		3677.216	14.00280	2.21590
				Standart Sp.	0.097099	0.077456	0.143340	0.040426				
				t-istatistiği	7.760000	-10.390000	14.630000	2.300000				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.000000	0.021600				
4	RBİMAS	ARMA(1,1)	ARCH(2)	Katsayı	0.76752700	-0.81405800	1.98743000	0.09083200	0.04840700	3681.079	13.42840	1.28540
				Standart Sp.	0.094739	0.075952	0.157210	0.040033	0.028807			
				t-istatistiği	8.102000	-10.720000	12.640000	2.269000	1.680000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.000000	0.023400	0.093100			

3.4.2. GARCH Modelinin Kurulması

Tablo 9’da ROTKAR ve RBİMAS varlıkları için ARMA(1,1)-GARCH(p,q) modelleri paylaşılmıştır. RBİMAS ve ROTKAR için ARMA(1,1)-GARCH(1,1) denklemleri,

$$ROTKAR_t = -0.530374ROTKAR_{t-1} + 0.606491\varepsilon_{t-1}$$

<i>std</i>	0.11147	0.10131
<i>t</i>	-4.758	5.986

$$\sigma_t^2 = 0.569582 + 0.091512\varepsilon_{t-1}^2 + 0.778333\sigma_{t-1}^2$$

<i>std</i>	0.28811	0.033501	0.088809
<i>t</i>	1.977	2.732	8.764

$$RBİMAS_t = 0.77047RBİMAS_{t-1} - 0.816955\varepsilon_{t-1}$$

<i>std</i>	0.091837	0.07323
<i>t</i>	8.39	-11.16

$$\sigma_t^2 = 0.65668 + 0.097379\varepsilon_{t-1}^2 + 0.619806\sigma_{t-1}^2$$

<i>std</i>	0.30357	0.038005	0.15165
<i>t</i>	2.163	2.562	4.087

şeklinde. GARCH modelinin geçerli olabilmesi için $p \geq 0$, $q > 0$, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$, $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ ve $\alpha_1 + \beta_1 \geq 0$ kısıtları sağlanmalı ve parametreler istatistiksel olarak anlamlı olmalıdır. ROTKAR için ARCH, GARCH ve sabit parametrenin pozitif olma şartı sağlanmaktadır. ARCH ve GARCH parametrelerinin toplamı 0.869845’dir. Toplam değeri 0’den büyük ve 1’den küçüktür. Parametreler %5 anlamlılık düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır. Box/Pierce Q ve ARCH-LM test sonuçları sırasıyla 5.70094 ve 0.58593 olarak hesaplanmıştır. Testler sonucunda %5 anlamlılık seviyesinde kalıntılarda otokorelasyon ve ARCH etkisinin bulunmadığına karar verilmiştir.

RBİMAS için ARCH, GARCH ve sabit parametreler 0’den büyük ve %5 anlamlılık seviyesinde istatistiksel olarak anlamlıdır. ARCH ve GARCH parametrelerinin toplamı $0 \leq 0.717185 < 1$ aralığında ve model kovaryans durağandır. Box/Pierce Q ve ARCH-LM test sonuçları sırasıyla 12.89430 ve 0.90387 olarak hesaplanmıştır. Testler sonucundan %5 anlamlılık düzeyinde kalıntılarda otokorelasyon ve ARCH etkisinin bulunmadığına karar verilmiştir.

Tablo 9: ROTKAR ve RBİMAS için ARMA(1,1)-GARCH(p,q) Modelleri

Ortalama Denklemi: $r_t = \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$ Varyans Denklemi: $h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}$														
Model	Bağımlı Değişken	Ortalama Denklemi	Varyans Denklemi	İstatistikler	Φ_1	θ_1	ω	α_1	α_2	β_1	β_2	log-likelihood	Box/Pierce Q Testi	ARCH-LM Testi
1	ROTKAR	ARMA(1,1)	GARCH(1,1)	Katsayı	-0.53037400	0.60649100	0.56958200	0.09151200		0.77833300		3284.33	5.70094	0.58593
				Standart Sp.	0.111470	0.101310	0.288110	0.033501		0.088809				
				t-istatistiği	-4.758000	5.986000	1.977000	2.732000		8.764000				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.048300	0.006400		0.000000				
2	ROTKAR	ARMA(1,1)	GARCH(1,2)	Katsayı	-0.55629500	0.63130300	0.26642700	0.14022300	-0.09310000	0.89128900		3287.615	4.88655	0.26913
				Standart Sp.	0.103020	0.092940	0.298870	0.048277	0.064592	0.105620				
				t-istatistiği	-5.400000	6.793000	0.891400	2.905000	-1.441000	8.439000				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.372900	0.003700	0.149700	0.000000				
3	ROTKAR	ARMA(1,1)	GARCH(2,1)	Katsayı	-0.53818500	0.61222500	0.78927700	0.13318100		0.13685500	0.54889200	3289.319	15.37920	0.24088
				Standart Sp.	0.114270	0.104960	0.358600	0.043169		0.120210	0.127180			
				t-istatistiği	-4.710000	5.833000	2.201000	3.085000		1.139000	4.316000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.027900	0.002100		0.255100	0.000000			
4	ROTKAR	ARMA(1,1)	GARCH(2,2)	Katsayı	-0.54651500	0.62040300	0.56172400	0.15420700	-0.05806200	0.35667500	0.41807600	3290.47	5.46619	0.13402
				Standart Sp.	0.111810	0.102410	0.411610	0.047139	0.059969	0.345830	0.231720			
				t-istatistiği	-4.888000	6.058000	1.365000	3.271000	-0.968200	1.031000	1.804000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.172600	0.001100	0.333100	0.302600	0.071400			
5	RBİMAS	ARMA(1,1)	GARCH(1,1)	Katsayı	0.77047000	-0.81695500	0.65668000	0.09737900		0.61980600		3685.674	12.89430	0.90387
				Standart Sp.	0.091837	0.073230	0.303570	0.038005		0.151650				
				t-istatistiği	8.390000	-11.160000	2.163000	2.562000		4.087000				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.030700	0.010500		0.000000				
6	RBİMAS	ARMA(1,1)	GARCH(1,2)	Katsayı	0.76998400	-0.81657900	0.60623000	0.10001900	-0.00795900	0.64688500		3685.689	12.94450	0.92077
				Standart Sp.	0.091579	0.073122	0.569380	0.040237	0.066540	0.301240				
				t-istatistiği	8.408000	-11.170000	1.065000	2.486000	-0.119600	2.147000				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.287200	0.013100	0.904800	0.031900				
7	RBİMAS	ARMA(1,1)	GARCH(2,1)	Katsayı	0.75087200	-0.80164300	0.57286800	0.11385500		0.15193700	0.48817500	3686.93	13.21400	1.01700
				Standart Sp.	0.094132	0.076718	0.377460	0.048615		0.133950	0.231790			
				t-istatistiği	7.977000	-10.450000	1.518000	2.342000		1.134000	2.106000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.129300	0.019300		0.256900	0.035400			
8	RBİMAS	ARMA(1,1)	GARCH(2,2)	Katsayı	0.75408500	-0.80455300	0.84518900	0.11913800	0.02833500	0.01777400	0.47202900	3687.216	13.07580	0.88241
				Standart Sp.	0.092713	0.075124	0.803600	0.050077	0.056713	0.261070	0.185740			
				t-istatistiği	8.134000	-10.710000	1.052000	2.379000	0.499600	0.068080	2.541000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.293100	0.017500	0.617400	0.945700	0.011200			

3.4.3. EGARCH Modelinin Kurulması

Tablo 10’da ROTKAR ve RBİMAS için ARMA(1,1)-EGARCH(p,q) modelleri paylaşılmıştır. ROTKAR için tahmin edilen ARMA(1,1)-EGARCH(1,1) denklemleri,

$$ROTKAR_t = 0.946183ROTKAR_{t-1} - 0.935163\varepsilon_{t-1}$$

<i>std</i>	0.049775	0.050844
<i>t</i>	19.01	-18.39

$$\ln(\sigma_t^2) = -76926.531376 - 0.239591 \left[-0.007313 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + 0.34160 \left(\left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| - E \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| \right) \right]$$

<i>std</i>	986.26	0.19858	0.061023	0.10307
<i>t</i>	-78.0	-1.207	-0.1198	3.314

$$+ 0.778129 \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

<i>std</i>	0.07742
<i>t</i>	10.05

şeklinde dir. EGARCH modelinde ARCH ve GARCH parametrelerinin pozitif olması ile ilgili herhangi bir kısıt yoktur. Bu nedenle parametrelerin istatistiksel anlamlılığına bakılmıştır.

Modelde yer alan mutlak değerli ifadeler ($|\varepsilon_{t-k}/\sigma_{t-k}|$) büyüklük etkisini gösterirken, mutlak değer içinde olmayan ($\varepsilon_{t-k}/\sigma_{t-k}$) işaret etkisini göstermektedir. GARCH parametresine ait katsayı 0.778129’dur ve 1’den küçük olduğu için süreç kovaryans durağandır. $\varphi_1 \neq 0$ ve %5 anlamlılık düzeyinde istatistiksel olarak anlamsızdır. Box/Pierce Q ve ARCH-LM test sonuçları sırasıyla 13.52250 ve 0.53711 olarak hesaplanmıştır. Testler sonucunda %5 anlamlılık düzeyinde kalıntılarda otokorelasyon ve ARCH etkisi bulunmamaktadır.

Tablo 10: ROTKAR ve RBİMAS için ARMA(1,1)-EGARCH(p,q) Modelleri

Ortalama Denklemi: $r_t = \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$ Varyans Denklemi: $\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \left[\varphi_1 \frac{\varepsilon_{t-k}}{\sigma_{t-k}} + \varphi_2 \left(\left| \frac{\varepsilon_{t-k}}{\sigma_{t-k}} \right| - E \left[\frac{\varepsilon_{t-k}}{\sigma_{t-k}} \right] \right) \right] + \sum_{i=1}^p \beta_i \ln(\sigma_{t-i}^2)$

Model	Bağımlı Değişken	Ortalama Denklemi	Varyans Denklemi	İstatistikler	ϕ_1	θ_1	ω	α_1	α_2	φ_1	φ_2	β_1	β_2	log-likelihood	Box/Pierce Q Testi	ARCH-LM Testi
1	ROTKAR	ARMA(1,1)	EGARCH(1,1)	Katsayı	0.94618300	-0.93516300	-76926.53137600	-0.23959100		-0.00731300	0.34160100	0.77812900		3271.728	13.52250	0.53711
				Standart Sp.	0.049775	0.050844	986.260000	0.198580		0.061023	0.103070	0.077420				
				t-istatistiği	19.010000	-18.390000	-78.000000	-1.207000		-0.119800	3.314000	10.050000				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.000000	0.227800		0.904600	0.000900	0.000000				
2	ROTKAR	ARMA(1,1)	EGARCH(1,2)	Katsayı	-0.58505500	0.64676800	-77161.57342800	-0.66389100	0.79055700	0.01171700	0.29038800	0.69043700		3279.512	5.74982	0.36016
				Standart Sp.	0.115130	0.104940	998.150000	0.273810	0.398620	0.047346	0.086790	0.135940				
				t-istatistiği	-5.081000	6.163000	-77.300000	-2.425000	1.983000	0.247500	3.346000	5.079000				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.000000	0.015500	0.047600	0.804600	0.000800	0.000000				
3	ROTKAR	ARMA(1,1)	EGARCH(2,1)	Katsayı	-0.52798200	0.59147600	-75843.45838200	0.51334300		-0.00844800	0.22181000	-0.04213600	0.91228900	3293.221	6.59269	1.09350
				Standart Sp.	0.109750	0.101320	1839.300000	0.257080		0.032465	0.053976	0.046014	0.038140			
				t-istatistiği	-4.811000	5.837000	-41.230000	1.997000		-0.260200	4.109000	-0.915700	23.920000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.000000	0.046100		0.794700	0.000000	0.360000	0.000000			
4	ROTKAR	ARMA(1,1)	EGARCH(2,2)	Katsayı	0.93001400	-0.91416800	-75040.48555400	0.19013600	-0.43706200	-0.03102400	0.31159900	-0.01198600	0.94067400	3292.165	16.45380	0.47100
				Standart Sp.	0.085710	0.077259	1192.500000	0.141420	0.170500	0.041987	0.074587	0.016688	0.022164			
				t-istatistiği	10.850000	-11.830000	-62.930000	1.344000	-2.563000	-0.738900	4.178000	-0.718200	42.440000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.000000	0.179000	0.010500	0.460100	0.000000	0.472700	0.000000			
5	RBİMAS	ARMA(1,1)	EGARCH(1,1)	Katsayı	0.74257600	-0.79405800	-83681.96860000	0.61676600		0.00512000	0.19399300	0.06402500		3680.074	13.47560	1.35840
				Standart Sp.	0.078676	0.065567	643.600000	0.701990		0.073170	0.088078	0.303160				
				t-istatistiği	9.438000	-12.110000	-130.000000	0.878600		0.069970	2.203000	0.211200				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.000000	0.379800		0.944200	0.027800	0.832800				
6	RBİMAS	ARMA(1,1)	EGARCH(1,2)	Katsayı	0.67660500	-0.73746600	-83630.83960800	0.78917600	0.89426400	0.00419300	0.23273900	-0.20700600		3686.97	13.01940	0.95656
				Standart Sp.	0.111230	0.098987	635.640000	0.420580	0.502120	0.050358	0.082693	0.063794				
				t-istatistiği	6.083000	-7.450000	-131.600000	1.876000	1.781000	0.083270	2.814000	-3.245000				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.000000	0.060800	0.075100	0.933600	0.005000	0.001200				
7	RBİMAS	ARMA(1,1)	EGARCH(2,1)	Katsayı	0.67706000	-0.73311000	0.00000000	0.30449500		-0.06273600	0.39544400	0.31223200	0.68151600	3576.819	14.55110	1.38800
				Standart Sp.	0.107450	0.104740	4754.000000	0.211970		0.031104	0.061257	0.080760	0.080423			
				t-istatistiği	6.301000	-6.999000	0.000000	1.436000		-2.017000	6.455000	3.866000	8.474000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	1.000000	0.151100		0.043900	0.000000	0.000100	0.000000			
8	RBİMAS	ARMA(1,1)	EGARCH(2,2)	Katsayı	-0.80775400	0.84617400	0.00000000	0.30088000	0.18033700	-0.06614300	0.34128800	0.36391200	0.62993500	3573.094	10.76420	1.35870
				Standart Sp.	0.083801	0.073597	19.387000	0.285570	0.292660	0.027393	0.098372	0.099152	0.098733			
				t-istatistiği	-9.639000	11.500000	0.000000	1.054000	0.616200	-2.415000	3.469000	3.670000	6.380000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	1.000000	0.292200	0.537900	0.015900	0.000500	0.000300	0.000000			

RBİMAS için tahmin edilen ARMA(1,1)-EGARCH(1,1) denklemleri,

$$RBİMAS_t = 0.742576RBİMAS_{t-1} - 0.794058\varepsilon_{t-1}$$

<i>std</i>	0.078676	0.065567
<i>t</i>	9.438	-12.11

$$\ln(\sigma_t^2) = -83681.9686 - 0.616766 \left[0.00512 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + 0.193993 \left(\left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| - E \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| \right) \right]$$

<i>std</i>	643.6	0.70199	0.07317	0.088078
<i>t</i>	-130	0.8786	0.06997	2.203

$$+ 0.064025 \ln(\sigma_{t-1}^2)$$

<i>std</i>	0.30316
<i>t</i>	0.2112

şeklinindedir. GARCH parametresine ait katsayı 0.064025'dir ve 1'den küçük olduğu için süreç kovaryans durağandır. φ_1 asimetri parametresini göstermektedir. $\varphi_1 \neq 0$ ve %5 anlamlılık düzeyinde istatistiksel olarak anlamsızdır. Box/Pierce Q ve ARCH-LM test sonuçları sırasıyla 13.4756 ve 1.3584 olarak hesaplanmıştır. Testler sonucunda %5 anlamlılık düzeyinde kalıntılarda otokorelasyon ve ARCH etkisi bulunmamaktadır.

3.4.4. GJR Modelinin Kurulması

Tablo 11'de ROTKAR ve RBİMAS için ARMA(1,1)-GJR(*p*,*q*) modelleri paylaşılmıştır. ROTKAR için tahmin edilen ARMA(1,1)-GJR(1,1) denklemleri,

$$ROTKAR_t = -0.530586ROTKAR_{t-1} + 0.606915\varepsilon_{t-1}$$

<i>std</i>	0.11184	0.10157
<i>t</i>	-4.744	5.975

$$\sigma_t^2 = 0.568963 + 0.093506\varepsilon_{t-1}^2 - 0.009257D_{1,t-1}\varepsilon_{t-1}^2 + 0.780225\sigma_{t-1}^2$$

<i>std</i>	0.28972	0.033404	0.05097	0.09234
<i>t</i>	1.964	2.799	-0.1816	8.449

şeklindedir. Modelde yer alan D_{t-1} , 0 ve 1 değerini alan kukla değişkendir. Koşullu varyansın pozitif değer alabilmesi için $\omega > 0$, $\alpha_j > 0$, $(\alpha_j + \gamma_j) \geq 0$ ve $\beta_i \geq 0$ olması gerekmektedir. Kısıtlar $0.568963 > 0$, $0.093506 > 0$, $(0.093506 - 0.009257) \geq 0$ ve $0.780225 \geq 0$ sırasıyla sağlanmaktadır. Koşullu varyans üzerindeki pozitif şokların etkisi α_j 'ye, negatif şokların etkisi ise $(\alpha_j + \gamma_j)$ 'ye eşit olmaktadır. $\gamma_j \neq 0$ ve %5 anlamlılık düzeyinde istatistiksel olarak anlamsızdır.

Sürecin kovaryans durağanlığı,

$$\sum_{i=1}^p \beta_i + \sum_{j=1}^q \left(\alpha_j + \frac{1}{2} \gamma_j \right) < 1$$

koşuluyla ifade edilmektedir. $0.093506 + (-0.009257 + 0,5 \times 0.780225) = 0.8691025 < 1$ olduğundan süreç kovaryans durağandır. Box/Pierce Q ve ARCH-LM test sonuçları sırasıyla 5.71992 ve 0.57691 olarak hesaplanmıştır. Testler sonucunda %5 anlamlılık düzeyinde kalıntılarda otokorelasyon ve ARCH etkisi bulunmamaktadır.

RBİMAS için ARMA(1,1)-GJR(1,1) denklemi,

$$RBİMAS_t = 0.771965RBİMAS_{t-1} - 0.816328\varepsilon_{t-1}$$

<i>std</i>	0.092087	0.07601
<i>t</i>	8.383	-10.74

$$\sigma_t^2 = 0.443177 + 0.053803\varepsilon_{t-1}^2 + 0.057124D_{1,t-1}\varepsilon_{t-1}^2 + 0.730582\sigma_{t-1}^2$$

<i>std</i>	0.58623	0.085118	0.052841	0.31782
<i>t</i>	0.756	0.6321	1.081	2.299

şeklinde yazılmaktadır. Kısıtlar $0.443177 > 0$, $0.053803 > 0$, $(0.053803 + 0.057124) \geq 0$ ve $0.730582 \geq 0$ sırasıyla sağlanmaktadır. $\gamma_j \neq 0$ ve %5 anlamlılık düzeyinde istatistiksel olarak anlamsızdır.

Tablo 11: ROTKAR ve RBİMAS için ARMA(1,1)-GJR(p,q) Modelleri

Ortalama Denklemi: $r_t = \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$ **Varyans Denklemi:** $\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \gamma_i D_{i,t-i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2$

Model	Bağımlı Değişken	Ortalama Denklemi	Varyans Denklemi	İstatistikler	ϕ_1	θ_1	ω	α_1	α_2	γ_1	γ_2	β_1	β_2	log-likelihood	Box/Pierce Q Testi	ARCH-LM Testi
1	ROTKAR	ARMA(1,1)	GJR(1,1)	Katsayı	-0.53058600	0.60691500	0.56896300	0.09350600		-0.00925700		0.78022500		3284.373	5.71992	0.57691
				Standart Sp.	0.111840	0.101570	0.289720	0.033404		0.050970		0.092346				
				t-istatistiği	-4.744000	5.975000	1.964000	2.799000		-0.181600		8.449000				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.049800	0.005200		0.855900		0.000000				
2	ROTKAR	ARMA(1,1)	GJR(1,2)	Katsayı	-0.56539900	0.64043300	0.18676500	0.13662100	-0.09825500	0.01260700	-0.02535000	0.92369300		3288.104	4.64019	0.25224
				Standart Sp.	0.107220	0.098537	0.566630	0.050512	0.107840	0.107340	0.096876	0.212890				
				t-istatistiği	-5.273000	6.499000	0.329600	2.705000	-0.911100	0.117400	-0.261700	4.339000				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.741700	0.006900	0.362400	0.906500	0.793600	0.000000				
3	ROTKAR	ARMA(1,1)	GJR(2,1)	Katsayı	-0.53598800	0.61012500	0.78856800	0.13706200		-0.01427800		0.13722400	0.55072100	3289.37	5.64703	0.23947
				Standart Sp.	0.116320	0.106980	0.360280	0.045039		0.073823		0.115730	0.128030			
				t-istatistiği	-4.608000	5.703000	2.189000	3.043000		-0.193400		1.186000	4.301000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.028800	0.002400		0.846700		0.236000	0.000000			
4	ROTKAR	ARMA(1,1)	GJR(2,2)	Katsayı	-0.54160700	0.61495700	0.57013900	0.16432200	-0.06254800	-0.02849900	0.01777700	0.33890600	0.43296300	3290.621	5.52610	0.13083
				Standart Sp.	0.116460	0.107620	0.429180	0.045911	0.056973	0.083103	0.046275	0.353580	0.235500			
				t-istatistiği	-4.650000	5.714000	1.328000	3.579000	-1.098000	-0.342900	0.384200	0.958500	1.838000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.184300	0.000400	0.272500	0.731700	0.700900	0.338000	0.066200			
5	RBİMAS	ARMA(1,1)	GJR(1,1)	Katsayı	0.77196500	-0.81632800	0.44317700	0.05380300		0.05712400		0.73058200		3686.66	12.88910	1.03050
				Standart Sp.	0.092087	0.076010	0.586230	0.085118		0.052841		0.317820				
				t-istatistiği	8.383000	-10.740000	0.756000	0.632100		1.081000		2.299000				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.449800	0.527400		0.279900		0.021700				
6	RBİMAS	ARMA(1,1)	GJR(1,2)	Katsayı	0.73588200	-0.78510700	0.29114200	0.11205600	-0.07964200	-0.04535100	0.11458700	0.81282100		3690.244	12.49850	1.09950
				Standart Sp.	0.115560	0.098639	0.296890	0.054562	0.055361	0.066842	0.073375	0.171590				
				t-istatistiği	6.368000	-7.959000	0.980600	2.054000	-1.439000	-0.678500	1.562000	4.737000				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.327000	0.040200	0.150500	0.497600	0.118600	0.000000				
7	RBİMAS	ARMA(1,1)	GJR(2,1)	Katsayı	0.74548800	-0.79600400	0.44886600	0.07407700		0.07184400		0.16466800	0.53783100	3688.248	13.36260	0.98003
				Standart Sp.	0.094501	0.078511	0.260490	0.047986		0.058265		0.114590	0.148050			
				t-istatistiği	7.889000	-10.140000	1.723000	1.544000		1.233000		1.437000	3.633000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.085100	0.122900		0.217800		0.150900	0.000300			
8	RBİMAS	ARMA(1,1)	GJR(2,2)	Katsayı	0.71995100	-0.77012800	0.20353300	0.11036900	-0.09390800	-0.04906900	0.09792000	1.24232900	-0.36709900	3691.05	12.28020	0.97232
				Standart Sp.	0.115580	0.099766	0.252850	0.052390	0.049140	0.063973	0.073747	0.242130	0.242930			
				t-istatistiği	6.229000	-7.719000	0.805000	2.107000	-1.911000	-0.767000	1.328000	5.131000	-1.511000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.421000	0.035300	0.056200	0.443200	0.184500	0.000000	0.131000			

$0.73058200 + (0.053803 + 0,5 \times 0.057124) = 0.812947 < 1$ olduğundan süreç kovaryans durağandır. Box/Pierce Q ve ARCH-LM test sonuçları sırasıyla 12.8891 ve 1.0305 olarak hesaplanmıştır. Testler sonucunda %5 anlamlılık düzeyinde kalıntılarda otokorelasyon ve ARCH etkisi bulunmamaktadır.

3.4.5. APARCH Modelinin Kurulması

Tablo 12’de ROTKAR ve RBİMAS için ARMA(1,1)-APARCH(p,q) modeli paylaşılmıştır. ROTKAR için ARMA(1,1)-APARCH(1,1) denklemleri,

$$ROTKAR_t = -0.530384ROTKAR_{t-1} + 0.606752\varepsilon_{t-1}$$

<i>std</i>	0.11157	0.10118
<i>t</i>	-4.754	5.997

$$\sigma_t^2 = 0.568963 + 0.089146(|\varepsilon_{t-1}| - 0.030395|\varepsilon_{t-1}|)^{1.980823} + 0.780996\sigma_{t-1}^{1.980823}$$

<i>std</i>	1.603	0.05065	0.1562	0.09352
<i>t</i>	0.3812	1.76	-0.1946	8.351

şeklindedir. APARCH modeline ait kısıtlar için $\omega > 0$, $\delta \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $-1 < \gamma_1 < 1$ ve $\beta_1 \geq 0$ ’dır. Modelde $0.611003 > 0$, $1.980823 \geq 0$, $0.089146 \geq 0$, $-1 < -0.030395 < 1$, $0.780996 \geq 0$ kısıtları sırasıyla sağlanmıştır. ω , α_1 ve γ_1 parametreleri %5 anlamlılık seviyesinde istatistiksel olarak anlamsızdır.

Süreci durağanlığı,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^q \left\{ (1+\gamma_i)^\delta + (1-\gamma_i)^\delta \right\} 2^{\frac{\delta-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\delta+1}{2}\right) + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$$

koşuluna bağlıdır. İşlem sonucu 1.775210271 değeri 1’den küçük olmaması nedeniyle süreç durağan değildir.

Tablo 12: ROTKAR ve RBİMAS için ARMA(1,1)-APARCH(p,q) Modelleri

Ortalama Denklemi: $r_t = \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$

Varyans Denklemi: $\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i |\varepsilon_{t-i}|)^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^\delta$

Model	Bağımlı Değişken	Ortalama Denklemi	Varyans Denklemi	İstatistikler	ϕ_1	θ_1	ω	α_1	α_2	γ_1	γ_2	β_1	β_2	δ	log-likelihood	Box/Pierce Q Testi	ARCH-LM Testi
1	ROTKAR	ARMA(1,1)	APARCH(1,1)	Katsayı	-0.53038400	0.60675200	0.611100300	0.08914600		-0.03039500		0.78099600		1.98082300	3284.387	5.71485	0.57948
				Standart Sp.	0.111570	0.101180	1.603000	0.050650		0.156200		0.093520		0.689680			
				t-istatistiği	-4.754000	5.997000	0.381200	1.760000		-0.194600		8.351000		2.872000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.703100	0.078600		0.845700		0.000000		0.004100			
2	ROTKAR	ARMA(1,1)	APARCH(1,2)	Katsayı	-0.57210800	0.64681900	0.03229200	0.12539800	-0.10535200	0.03408000	0.06207300	0.93869600		2.39869700	3288.25	4.64258	0.25926
				Standart Sp.	0.102180	0.092839	0.213460	0.083208	0.065803	0.180860	0.183400	0.099499		1.411600			
				t-istatistiği	-5.599000	6.967000	0.151300	1.507000	-1.601000	0.188400	0.338500	9.434000		1.699000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.879800	0.132000	0.109600	0.850600	0.735100	0.000000		0.089500			
3	ROTKAR	ARMA(1,1)	APARCH(2,1)	Katsayı	-0.53384200	0.60799800	2.04971300	0.14148300		-0.03620600		0.13993900	0.56253400	1.73833800	3289.564	5.56268	0.25634
				Standart Sp.	0.116780	0.107770	3.999600	0.055786		0.153520		0.115360	0.132210	0.519470			
				t-istatistiği	-4.571000	5.642000	0.512500	2.536000		-0.235800		1.213000	4.255000	3.346000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.608400	0.011300		0.813600		0.225300	0.000000	0.000800			
4	ROTKAR	ARMA(1,1)	APARCH(2,2)	Katsayı	-0.54116500	0.61419800	1.55948000	0.16335600	-0.05896200	-0.06092000	-0.10651800	0.33526400	0.45187100	1.71830400	3290.857	5.40221	0.13598
				Standart Sp.	0.117040	0.108670	3.062200	0.062831	0.075348	0.159530	0.360960	0.330550	0.226690	0.515730			
				t-istatistiği	-4.624000	5.652000	0.509300	2.600000	-0.782500	-0.381900	-0.295100	1.014000	1.993000	3.332000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.610700	0.009400	0.434000	0.702600	0.768000	0.310600	0.046400	0.000900			
5	RBİMAS	ARMA(1,1)	APARCH(1,1)	Katsayı	0.77076000	-0.81666000	0.02824600	0.06432900		0.13190000		0.69976800		2.67979200	3687.067	12.55920	0.95794
				Standart Sp.	0.087412	0.071450	0.125840	0.055171		0.225200		0.325550		1.154800			
				t-istatistiği	8.818000	-11.430000	0.224500	1.166000		0.585700		2.149000		2.321000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.822400	0.243800		0.558200		0.031800		0.020500			
6	RBİMAS	ARMA(1,1)	APARCH(2,1)	Katsayı	0.74701100	-0.79772300	0.01910000	0.08198000		0.13353300		0.15737800	0.51468200	2.77056500	3688.955	12.86820	0.88662
				Standart Sp.	0.087482	0.072541	0.065448	0.046481		0.130940		0.100820	0.183900	0.872660			
				t-istatistiği	8.539000	-11.000000	0.291800	1.764000		1.020000		1.561000	2.799000	3.175000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.770500	0.078000		0.308000		0.118800	0.005200	0.001500			

RBİMAS için ARMA(1,1)-APARCH(1,1) denklemleri,

$$RBİMAS_t = 0.77076RBİMAS_{t-1} - 0.81666\varepsilon_{t-1}$$

<i>std</i>	0.087412	0.07145
<i>t</i>	8.818	-11.43

$$\sigma_t^2 = 0.028246 + 0.064329(|\varepsilon_{t-1}| + 0.1319|\varepsilon_{t-1}|)^{2.679792} + 0.699768\sigma_{t-1}^{2.679792}$$

<i>std</i>	0.12584	0.055171	0.2252	0.32555
<i>t</i>	0.2245	1.166	0.5857	2.149

şeklinde yazılmaktadır. APARCH modeline ait kısıtlar için $\omega > 0$, $\delta \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $-1 < \gamma_1 < 1$ ve $\beta_1 \geq 0$ 'dır. Modelde $0.028246 > 0$, $2.679792 \geq 0$, $0.064329 \geq 0$, $-1 < 0.1319 < 1$, $0.699768 \geq 0$ kısıtları sırasıyla sağlanmıştır. ω , α_1 ve γ_1 parametreleri %5 anlamlılık seviyesinde istatistiksel olarak anlamsızdır. Durağanlık için yapılan hesaplanan değer 2.10341574 bulunmuştur. Değer 1'den büyük olduğundan süreç durağan değildir.

3.4.6. FIGARCH Modelinin Kurulması

Tablo 13'de ROTKAR ve RBİMAS için ARMA(1,1)-FIGARCH(p,q) modelleri paylaşılmıştır. ROTKAR için ARMA(1,1)-FIGARCH(1,1) denklemi,

$$ROTKAR_t = -0.543141ROTKAR_{t-1} + 0.620215\varepsilon_{t-1}$$

<i>std</i>	0.10324	0.0932
<i>t</i>	-5.261	6.655

$$\sigma_t^2 = 0.721275 + 0.506504\sigma_{t-1}^2 + \left[1 - 0.506504L - (1 - 0.476205L)(1 - L)^{0.151658} \right] \varepsilon_t^2$$

<i>std</i>	0.5908	0.27876	0.26938
<i>t</i>	1.221	1.817	1.768

şeklinde dir. %5 anlamlılık düzeyinde d istatistiksel olarak anlamlı; ω , Ω_1 ve β_1 parametreleri istatistiksel olarak anlamsızdır. $0 \leq d \leq 1$ aralığında bulunmaktadır.

Tablo 13: ROTKAR ve RBİMAS için ARMA(1,1)-FIGARCH(p,q) Modelleri

Ortalama Denklemi: $r_t = \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j}$ Varyans Denklemi: $\sigma_t^2 = \omega + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + [1 - \beta_1 L - (1 - \Omega_1 L)(1 - L)^d] \varepsilon_t^2$

Model	Bağımlı Değişken	Ortalama Denklemi	Varyans Denklemi	İstatistikler	Φ_1	θ_1	ω	Ω_1	Ω_2	β_1	β_2	d	log-likelihood	Box/Pierce Q Testi	ARCH-LM Testi
1	ROTKAR	ARMA(1,1)	FIGARCH(1,1)	Katsayı	-0.54314100	0.62021500	0.72127500	0.47620500		0.50650400		0.15165800	3286.34	4.63342	0.34564
				Standart Sp.	0.103240	0.093200	0.590860	0.269380		0.278760	0.071137				
				t-istatistiği	-5.261000	6.655000	1.221000	1.768000		1.817000	2.132000				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.222400	0.077300		0.069400	0.033200				
2	ROTKAR	ARMA(1,1)	FIGARCH(1,2)	Katsayı	-0.55383100	0.62693800	1.90608700	-0.34150200	-0.07636600	-0.33168800		0.15581100	3290.834	4.97335	0.08960
				Standart Sp.	0.107420	0.097662	0.996850	0.414610	0.049613	0.421090	0.055036				
				t-istatistiği	-5.156000	6.419000	1.912000	-0.823700	-1.539000	-0.787700	2.831000				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.056100	0.410300	0.124000	0.431000	0.004700				
3	ROTKAR	ARMA(1,1)	FIGARCH(2,1)	Katsayı	-0.54178300	0.61650700	1.67561600	-0.25957300		-0.25075100	0.07511100	0.15691500	3290.68	4.92976	0.08390
				Standart Sp.	0.111150	0.102390	0.933540	0.383980		0.387910	0.044028	0.056068			
				t-istatistiği	-4.874000	6.021000	1.795000	-0.676000		-0.646400	1.706000	2.799000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.072900	0.499200		0.518100	0.088200	0.005200			
4	ROTKAR	ARMA(1,1)	FIGARCH(2,2)	Katsayı	-0.52798100	0.61014000	5.12665200	-1.19624400	-0.99948300	-1.20163300	-0.99799600	0.13190500	3299.888	5.46404	0.34297
				Standart Sp.	0.095747	0.087252	1.019100	0.002851	0.003485	0.001740	0.002331	0.029870			
				t-istatistiği	-5.514000	6.993000	5.030000	-419.600000	-286.800000	-690.800000	-428.200000	4.416000			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000			
5	RBİMAS	ARMA(1,1)	FIGARCH(1,1)	Katsayı	0.76980000	-0.81640500	0.58336500	0.70218500		0.62480900		0.02285100	3685.743	12.94770	0.94061
				Standart Sp.	0.092807	0.074203	0.378200	0.169990		0.171310	0.084925				
				t-istatistiği	8.295000	-11.000000	1.542000	4.131000		3.647000	0.269100				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.123200	0.000000		0.000300	0.787900				
6	RBİMAS	ARMA(1,1)	FIGARCH(1,2)	Katsayı	0.76936700	-0.81600000	0.57266100	0.71113700	-0.00095900	0.63295100		0.02164500	3685.739	12.95560	0.11339
				Standart Sp.	0.092183	0.073774	0.547320	0.322860	0.058311	0.302120	0.090156				
				t-istatistiği	8.346000	-11.060000	1.046000	2.203000	-0.016450	2.095000	0.240100				
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.295600	0.027800	0.986900	0.036400	0.810300				
7	RBİMAS	ARMA(1,1)	FIGARCH(2,1)	Katsayı	0.76941100	-0.81603800	0.57279300	0.70825200		0.63091700	0.00059600	0.02251100	3685.74	12.95540	0.94142
				Standart Sp.	0.092145	0.073733	0.489120	0.325350		0.265170	0.071139	0.104390			
				t-istatistiği	8.350000	-11.070000	1.171000	2.177000		2.379000	0.008384	0.215700			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.241800	0.029700		0.017500	0.993300	0.829300			
8	RBİMAS	ARMA(1,1)	FIGARCH(2,2)	Katsayı	0.75353400	-0.80408300	0.78073200	0.12471200	0.50231500	0.01800800	0.47989000	0.01446100	3687.239	13.10020	0.89938
				Standart Sp.	0.093468	0.075886	0.932260	0.271000	0.164420	0.293710	0.210790	0.091059			
				t-istatistiği	8.062000	-10.600000	0.837500	0.460200	3.055000	0.061310	2.277000	0.158800			
				Olasılık	0.000000	0.000000	0.402500	0.645500	0.002300	0.951100	0.023000	0.873800			

RBİMAS için ARMA(1,1)-FIGARCH(1,1) denklemi,

$$RBİMAS_t = 0.7698RBİMAS_{t-1} - 0.816405\varepsilon_{t-1}$$

<i>std</i>	0.092807	0.074203
<i>t</i>	8.295	-11.0

$$\sigma_t^2 = 0.583365 + 0.624809\sigma_{t-1}^2 + \left[1 - 0.624809L - (1 - 0.702185L)(1 - L)^{0.022851}\right]\varepsilon_t^2$$

<i>std</i>	0.3782	0.17131	0.16999
<i>t</i>	1.542	3.647	4.131

şeklindedir. %5 anlamlılık düzeyinde *d* istatistiksel olarak anlamsız; ω , Ω_1 ve β_1 parametreleri istatistiksel olarak anlamlıdır. Box/Pierce Q ve ARCH-LM test sonuçları sırasıyla 12.9477 ve 0.94061 olarak hesaplanmıştır. Testler sonucunda %5 anlamlılık düzeyinde kalıntılarda otokorelasyon ve ARCH etkisi bulunmamaktadır.

3.4.7. Sabit Koşullu Korelasyon (CCC)-GARCH Modeli

Tablo 14'de ROTKAR ve RBİMAS için ARMA(1,1)-CCC-GARCH(1,1) modeli paylaşılmıştır. RBİMAS'a ait ortalama denkleminde AR(1) ve MA(1) parameteleri sırasıyla 0.770469 ve -0.816955 olarak hesaplanmıştır. Her iki katsayıda %5 anlamlılık düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır. Parametreler mutlak değerce 1'den küçük olması durağanlık ve çevrilebilirlik koşullarının sağlandığını göstermektedir.

ROTKAR'a ait ortalama denkleminde AR(1) ve MA(1) parameteleri sırasıyla -0.530374 ve 0.606491 olarak hesaplanmıştır. Her iki katsayıda %5 anlamlılık düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır. $|-0.530374| < 1$ ve $|0.606491| < 1$ olması durağanlık ve çevrilebilirlik koşullarının sağlandığını göstermektedir.

RBİMAS'a ait varyans denkleminde ω , α , β sırasıyla 0.65668, 0.097379 ve 0.619806 olarak hesaplanmıştır. Hesaplanan katsayılar %5 anlamlılık düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır. Üç parametre de pozitif değerde ve her bir parametre 1'den

Tablo 14: ARMA(1,1)-CCC-GARCH(1,1) Modeli

Ortalama Denklemi: $r_t = \phi_1 r_{t-1} + \theta_j \varepsilon_{t-1}$		
Parametreler	RBİMAS	ROTKAR
ϕ_1	0.7704690	-0.5303740
Standart Sp.	0.091837	0.111470
t-istatistiği	8.390000	-4.758000
Olasılık	0.000000	0.000000
θ_1	-0.8169550	0.6064910
Standart Sp.	0.073230	0.101310
t-istatistiği	-11.160000	5.986000
Olasılık	0.000000	0.000000
Varyans Denklemi: $Var_t(\varepsilon_{it}) = h_{iit} = \omega_i + \alpha_{ij} \varepsilon_{it-j}^2 + \beta_{ij} h_{iit-j}$		
ω	0.65668000	0.56958200
Standart Sp.	0.303570	0.288110
t-istatistiği	2.163000	1.977000
Olasılık	0.030700	0.048300
α	0.0973790	0.0915120
Standart Sp.	0.038005	0.033501
t-istatistiği	2.562000	2.732000
Olasılık	0.010500	0.006400
β	0.6198060	0.7783330
Standart Sp.	0.151650	0.088809
t-istatistiği	4.087000	8.764000
Olasılık	0.000000	0.000000
Log Likelihood	3685.674000	3284.330000
$\alpha+\beta$	0.717180	0.869840
Koşullu Korelasyon: $\rho_{ijt} = h_{ijt} / \sqrt{h_{iit} h_{jjt}}$		
$\rho_{BİMAS,i}$	1	-
Standart Sp.	-	-
t-istatistiği	-	-
Olasılık	-	-
$\rho_{ROTKAR,i}$	0.2204730	1
Standart Sp.	0.029166	-
t-istatistiği	7.559000	-
Olasılık	0.000000	-
Log Likelihood	7003.078000	

küçüktür. ARCH ve GARCH parametrelerinin toplamı 0.71718 hesaplanmıştır. Değerin 1'den küçük olması sürecin kovaryans durağan olduğunu göstermektedir.

ROTKAR'a ait varyans denkleminde ω , α , β sırasıyla 0.569582, 0.091512 ve 0.778333 olarak hesaplanmıştır. Hesaplanan katsayılar %5 anlamlılık düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır. $0.569582 > 0$, $0.091512 \geq 0$, $0.778333 \geq 0$ olması, pozitif olma kısıtlamalarının geçerli olduğunu göstermiştir. ARCH ve GARCH parametrelerinin toplamı 0.86984 hesaplanmıştır. Değerin 1'den küçük olması sürecin kovaryans durağan olduğunu göstermektedir.

OTKAR ve BİMAS arasındaki sabit korelasyon katsayısı ($\rho_{BİMAS,OTKAR}$) 0.270473 olarak hesaplanmıştır. Katsayı %5 anlamlılık düzeyinde istatistiksel olarak anlamlıdır.

CCC-GARCH(1,1) modelinin matrisi,

$$\rho_{ijt} = h_{ijt} / \sqrt{h_{iit} h_{jtt}} = \sigma_{ijt} / \sigma_{it} \sigma_{jt}, \quad -1 \leq \rho_{ijt} \leq 1$$

$$H_t = D_t \Gamma D_t$$

$$D_t = \begin{bmatrix} \sigma_{1,t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{2,t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{N,t} \end{bmatrix} \quad ve \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1N} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1} & \rho_{N2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$H_t = \begin{bmatrix} \sigma_{1,t}^2 & \sigma_{12,t}^2 & \cdots & \sigma_{1N,t}^2 \\ \sigma_{21,t}^2 & \sigma_{2,t}^2 & \cdots & \sigma_{2N,t}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1,t}^2 & \sigma_{N2,t}^2 & \cdots & \sigma_{N,t}^2 \end{bmatrix}$$

gösterilmekte ve model denklemi,

$$Var_t(\varepsilon_{it}) = h_{iit} = \omega_i + \alpha_{i1} \varepsilon_{it-1}^2 + \beta_{i1} h_{iit-1}$$

şeklinde yazılmaktadır.

ARMA(1,1)-CCC-GARCH(1,1) modeli standardize kalıntılarına uygulanan Hosking ve Li-McLeod'un çok değişkenli pormanteau testi uygulanmış ve testin sonuçları Tablo 15'de paylaşılmıştır.

Her iki teste de temel hipotez “*kalıntılarda otokorelasyonun yoktur*” olarak kurulur. Hosking ve Li-McLeod'un çok değişkenli pormanteau testi sonucunda %5 anlamlılık düzeyinde temel hipotez red edilmemiş ve kalıntılarda otokorelasyon etkisinin olmadığına karar verilmiştir.

Tablo 15: Hosking ve Li-McLeod Çok Değişkenli Pormanteau Testi

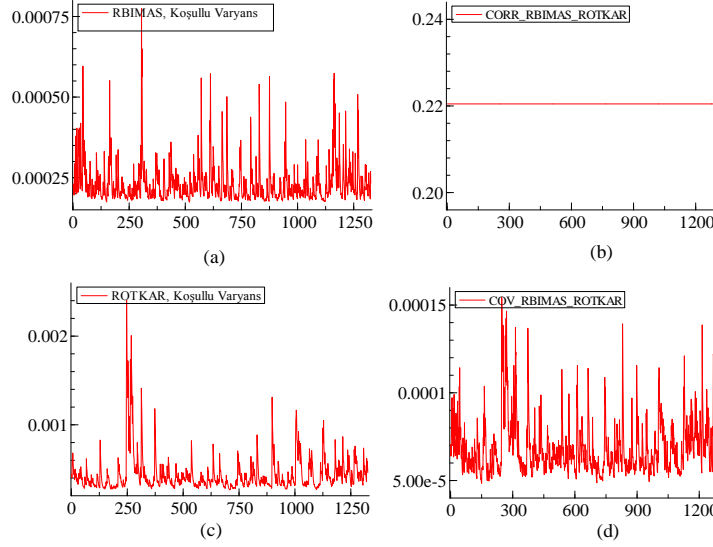
Standardize Kalıntılara Hosking'in Çok Değişkenli Portmanteau İstatistikleri		
	<i>Test İstatistiği</i>	<i>Olasılık</i>
Hosking(5)	15.4665	0.6297229
Hosking(10)	30.7560	0.7917976
Hosking(20)	74.4119	0.594132
Hosking(50)	167.1760	0.945594

Standardize Kalıntılara Li ve McLeod'un Çok Değişkenli Portmanteau İstatistikleri		
	<i>Test İstatistiği</i>	<i>Olasılık</i>
Li-McLeod(5)	15.4810	0.6287168
Li-McLeod(10)	30.8005	0.7901099
Li-McLeod(20)	74.4313	0.5935123
Li-McLeod(50)	167.8840	0.9410625

CCC ve DCC (*dinamik koşullu korelasyon*) modellerinin hangisinin seçilmesi gerektiğine karar verebilmek için Engle ve Sheppard tarafından geliştirilen dinamik korelasyon testi ve Y.K. Tse tarafından geliştirilen LM testi sonuçları Tablo 16'da verilmiştir. Her iki teste de temel hipotez “ $H_0: CCC \text{ modeli}$ ” olarak kurulmaktadır. Testler sonucunda %5 anlamlılık düzeyinde temel hipotez red edilmemiştir.

Tablo 16: Sabit ve Dinamik Korelasyon Testleri

Sabit Korelasyon için LM Test (Tse - 2000)			Engle ve Sheppard Dinamik Korelasyon Testi		
	Test İstatistiği	Olasılık		Test İstatistiği	Olasılık
LMC	0.0733195	0.7865636	E-S Test(5)	2.06463	0.9136593
			E-S Test(10)	5.30688	0.9153984



Şekil 35: Koşullu Varyans-Kovaryans-Korelasyon

Şekil 35’de ROTİAR ve RBİMAS’ait koşullu varyans-kovaryans-korelasyon grafikleri paylaşılmıştır. Şeklin 35’in (b) panelinde koşullu korelasyonun zamana göre değişmediği, sabit kaldığı görülmektedir.

3.4.7.1. Koşullu Ortalama ve Koşullu Varyans Değerlerinin Öngörüsü

y_{t+h} ’in h dönem sonraki öngörüsü y_{t+h} ile gösterilmektedir. y_{t+h} ’nin t dönemindeki koşullu beklentisi $\hat{y}_{t+h|t}$ olmaktadır. ARFIMA(p,d,q) modeli için y_{t+h} ’nin h dönem sonraki koşullu ortalama öngörü denklemi:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+h|t} = & \left[\hat{\mu}_{t+h|t} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{c}_k \left(\hat{y}_{t+h-k} - \hat{\mu}_{t+h|t} \right) \right] \\ & + \sum_{i=1}^p \hat{\psi}_i \left\{ \hat{y}_{t+h-i} - \left[\hat{\mu}_{t+h|t} + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{c}_k \left(\hat{y}_{t+h-i-k} - \hat{\mu}_{t+h|t} \right) \right] \right\} \\ & + \sum_{j=1}^q \hat{\theta}_j \left(\hat{y}_{t+h-j} - \hat{y}_{t+h-j|t} \right)\end{aligned}$$

şeklinde genelleştirilmektedir. $\hat{\mu}$ ve $\hat{\psi}$ tahmin edilen parametrelerdir. ARFIMA(p,d,q) modelinde $p = 1$, $q = 1$, $d = 0$ ($c_k = 0$) olduğu durumda model ARMA(1,1) süreci olmaktadır.¹⁹³

h dönem sonraki koşullu varyans $\hat{\sigma}_{t+h|t}$ ile gösterilmektedir. GARCH(p,q) modeli için h dönem sonraki koşullu ortalama öngörü denklemi:

$$\sigma_{t+h|t}^2 = \hat{\omega} + \sum_{i=1}^q \hat{\alpha}_i \varepsilon_{t+h-i|t}^2 + \sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j \sigma_{t+h-j|t}^2$$

şeklinindedir. $i > 0$ olduğu durumda $\varepsilon_{t+i|t}^2 = \sigma_{t+i|t}^2$ olmaktadır. $i \leq 0$ olduğu durumda ise $\varepsilon_{t+i|t}^2 = \varepsilon_{t+i}^2$ ve $\sigma_{t+i|t}^2 = \sigma_{t+i}^2$ olmaktadır.¹⁹⁴

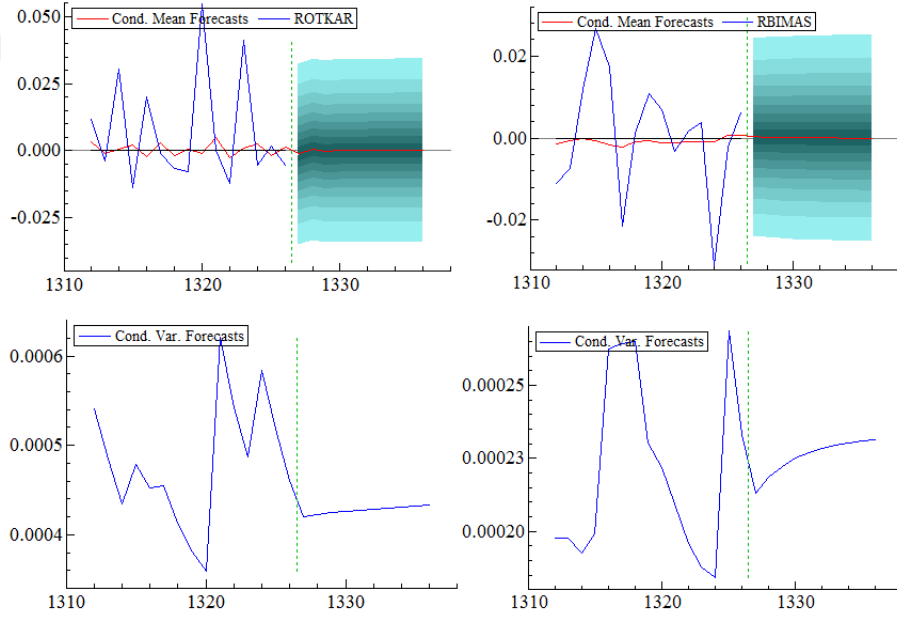
Tablo 17’de ARMA(1,1)-CCC-GARCH(1,1) modelinin koşullu ortalama ve varyans kovaryans öngörü değerleri paylaşılmıştır. Öngörü aralığı 04.02.2019 tarihinden 08.02.2019 tarihine kadardır. Tablo 17’de beş günlük (*haftalık*) veriler bulunmaktadır. Şekil 36’da ise öngörü değerlerine ait grafikler verilmiştir.

¹⁹³ Sébastien Laurent ve Jean-Philippe Peters, “G@RCH 2.2: An Ox Package for Estimating and Forecasting Various ARCH Models”, *Journal Of Economic Surveys*, Vol.16, No.3, 2002, s.463.

¹⁹⁴ Sébastien Laurent ve Jean-Philippe Peters, “G@RCH 2.2: An Ox Package for Estimating and Forecasting Various ARCH Models”, *Journal Of Economic Surveys*, Vol.16, No.3, 2002, s.464.

Tablo 17: Koşullu Ortalama ve Varyans-Kovaryans Öngörü Değerleri

Koşullu Varyans Kovaryans Öngörü Değerleri			Koşullu Ortalama Öngörü Değerleri		
		BIMAS	OTKAR	BIMAS	OTKAR
04.02.2019	BIMAS	0.00021299	0.00006597	0.0003237	-0.0012470
	OTKAR	0.00006597	0.00042035		
05.02.2019	BIMAS	0.00021842	0.00006698	0.0002494	0.0006614
	OTKAR	0.00006698	0.00042260		
06.02.2019	BIMAS	0.00022232	0.00006773	0.0001922	-0.0003508
	OTKAR	0.00006773	0.00042456		
07.02.2019	BIMAS	0.00022511	0.00006830	0.0001481	0.0001860
	OTKAR	0.00006830	0.00042626		
08.02.2019	BIMAS	0.00022711	0.00006872	0.0001141	-0.0000987
	OTKAR	0.00006872	0.00042773		



Şekil 36: Koşullu Ortalama ve Varyans Öngörü Değerleri

3.5. MARKOWITZ ETKİN PORTFÖY SETİNİN OLUŞTURULMASI

3.5.1. Koşullu Varyansa Dayalı Etkin Portföy Seti

Bu aşamada ROTKAR ve RBİMAS hisseleri için kurulan ve tüm testlerden başarılı bir şekilde geçen ARMA(1,1)-CCC-GARCH(1,1) modeli kullanılarak elde edilen beşinci günün koşullu ortalama, koşullu kovaryans ve koşullu korelasyon değerleri, Markowitz'in geliştirdiği ortalama varyans modelinde kullanılarak etkin portföy seti ve ağırlıkları belirlenecektir. Beşinci güne (*haftalık*) ait öngörü değerleri Tablo 18'de paylaşılmıştır.

ROTKAR'ın beşinci güne (08.02.2019) ait koşullu ortalaması negatiftir. Ortalama varyans modelinde getirilere pozitif kısıtlama konduğundan, ortalamanın mutlak değeri alınmıştır. Değerin negatif olması hissenin piyasada işleme girilirken açığa satış yapılacağı anlamını taşımaktadır.

Tablo 18: ROTKAR ve RBİMAS Koşullu Ortalama ve Varyans Öngörü Değerleri

	RBİMAS	ROTKAR
Koşullu Ortalama	0.00011410	0.00009867
Koşullu Varyans	0.00022711	0.00042773
Koşullu S.Sapma	0.01507017	0.02068163
Sabit Korelasyon	0.22047300	

Beklenen getiri düzeyinde minimum varyansa sahip portföy setinin belirlenmesi gerekmekte ve optimizasyonunun sağlanabilmesi için ilk kısıt beklenen getiriye, ikinci kısıt ise ağırlık vektörüne uygulanmaktadır.

$$\min \mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w}$$

$$E[R_p] = \mathbf{w}'\bar{\mathbf{R}}$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{e} = 1$$

Lagrange fonksiyonu,

$$L(\mathbf{w}, \lambda, \delta) = \mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w} + \lambda(E[R_p] - \mathbf{w}'\bar{\mathbf{R}}) + \delta(1 - \mathbf{w}'\mathbf{e})$$

$$\min_{\{\mathbf{w}, \lambda, \delta\}} L(\mathbf{w}, \lambda, \delta) = \mathbf{w}'\mathbf{V}\mathbf{w} + \lambda(E[R_p] - \mathbf{w}'\bar{\mathbf{R}}) + \delta(1 - \mathbf{w}'\mathbf{e})$$

olmaktadır.

Yapılan hesaplama sonucunda farklı hisse ağırlıklarında oluşturulan oniki portföye ait getiri ve standart sapma paylaşılmıştır.

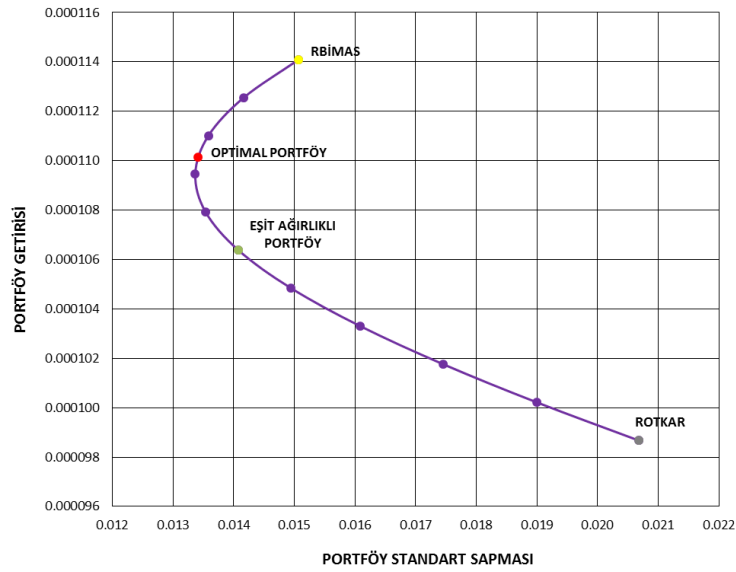
Tablo 19: Portföy Getirisi ve Sapması

HİSSE AĞIRLIKLARI			PORTFÖY	
SIRA NO	RBİMAS	ROTKAR	GETİRİ	S. SAPMA
1	0	1	0.000098670	0.020681634
2	0.1	0.9	0.000100213	0.019002665
3	0.2	0.8	0.000101756	0.017459116
4	0.3	0.7	0.000103299	0.016090008
5	0.4	0.6	0.000104842	0.014943364
6	0.5	0.5	0.000106385	0.014073665
7	0.6	0.4	0.000107928	0.013534405
8	0.7	0.3	0.000109471	0.013365641
9	0.8	0.2	0.000111014	0.013581191
10	0.9	0.1	0.000112557	0.014163520
11	1	0	0.000114100	0.015070169
12	0.742572	0.257428	0.000110128	0.013410746

Birinci portföyde sadece OTKAR hissesine yatırım yapıldığı ve portföy getirisinin 0.00009867, portföy standart sapmasının 0.020681634 olduğu görülmektedir. Üçüncü portföyde yatırım %20'si BİMAS hissesine, %80'i OTKAR hissesine yapılmıştır. Oluşturulan üçüncü portföyün getirisi 0.000101756, standart sapması 0.017459116 hesaplanmıştır. Altıncı portföyde ise her iki hisse senedine yapılan yatırım %50'dir. Ağırlıklandırma sonucunda altıncı portföyün getirisi 0.000106385, standart sapması 0.014073665'dir.

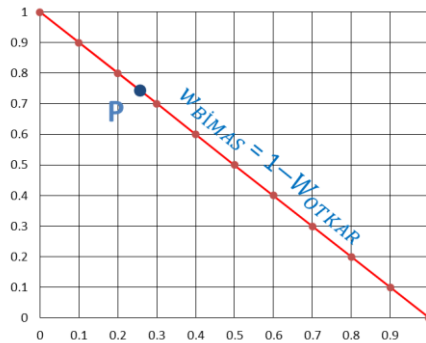
Hesaplama sonucu minimum standart sapma düzeyinde maksimum getiri sağlayan optimal portföy, onikinci portföy olmuştur. Portföyün ağırlıkları BİMAS ve OTKAR için sırasıyla %74.26 ve %25.74'dür. Portföyün getirisi ve standart sapması 0.000110128 ve 0.013410746 olarak hesaplanmıştır.

Şekil 37’de alınan riske karşılık elde edilebilecek etkin portföy alternatiflerini gösteren etkin sınır çizilmiştir. Yatay eksende portföylerin standart sapması, dikey eksende ise portföylerin getirisi bulunmaktadır. Optimal portföyün OTKAR ve eşit ağırlıklarla oluşturulan portföye göre daha düşük risk seviyesinde daha yüksek getiri sunmaktadır. BİMAS hissesinin getirisi optimal portföyden daha fazladır. Fakat her bir risk başına sağlanan getiri miktarı BİMAS hissesi için daha azdır. Optimal portföyde ise her bir birim başına katlanılan risk, alternatif etkin portföyler arasında en azdır.



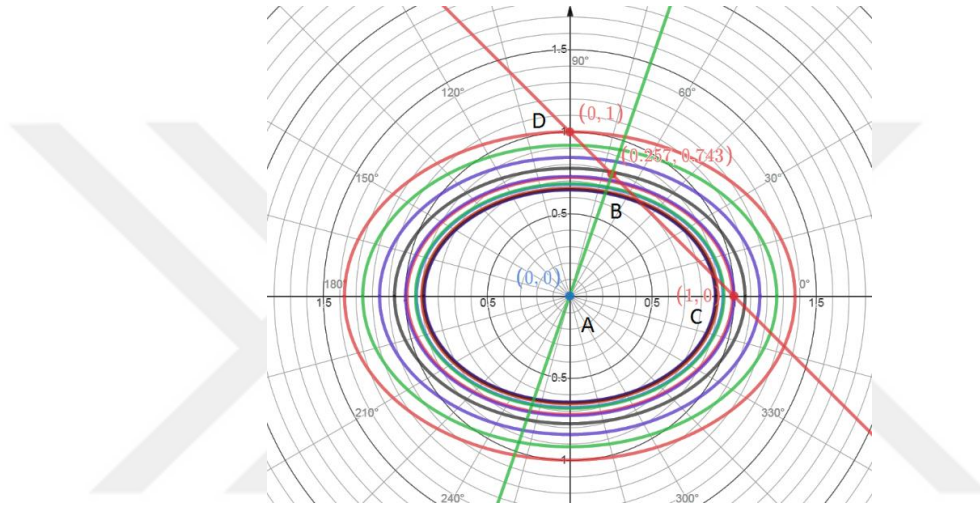
Şekil 37: Etkin Portföy Sınırı

Şekil 38’de BİMAS ve OTKAR hisselerinin ağırlık vektör kısıtı geometrik olarak gösterilmektedir. Dikey eksende BİMAS hissesinin ağırlıkları, yatay eksende OTKAR hissesinin ağırlıkları bulunmaktadır. P noktası ise optimal portföye ait ağırlıkları göstermektedir.



Şekil 38: Ağırlık Vektör Kısıtı

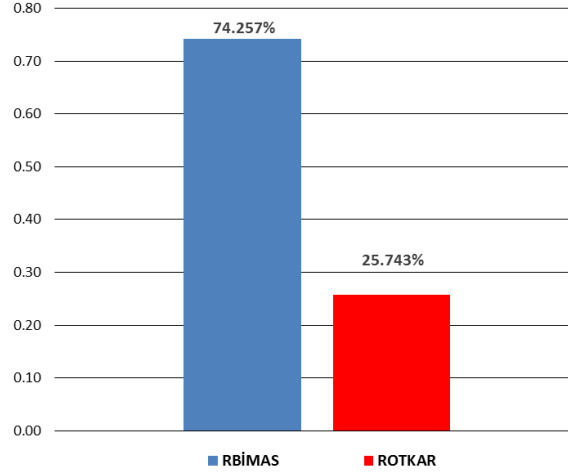
Şekil 39’da ağırlık vektörü kısıtı ve eş varyans eğrileri birlikte gösterilmektedir. Dikey ekseninde BİMAS hissesinin, yatay ekseninde ise OTKAR hissesinin ağırlıkları vardır. Kordinat sistemi üzerinde birinci bölge dışında kalan alanlar ortalama varyans modeline konan kısıtları sağlamadığından, oluşturulan portföyler ulaşılabilir olmayacaktır. ADC üçgeni kısıtları uygun olarak oluşturulmuş portföy kompozisyonlarını göstermektedir. optimal portföy ağırlıklarını gösteren B noktası ADC üçgeni içerisinde ve DC doğrusunun üzerinde kalmaktadır.



Şekil 39: Eş Varyans Eğrileri ve Ağırlık Vektörü Kısıtı

Belirli bir varyans düzeyinde tüm portföy setini gösteren eş varyans eğirileri, oluşturulan oniki portföy için Şekil 39’da çizilmiştir. Birbirlerine paralel ve merkezden uzaklaştıkça varyansın arttığı görülmektedir. Optimal portföy eş varyans eğrisi üzerinde bulunduğu nokta B noktasıdır. A noktasından B noktasına gidilen doğru boyunca gidilen her bir noktada $E(BIMAS, OTKAR) = E$ eşitliğinde V minimum olacaktır.

Optimal portföy ağırlıkları Şekil 40’de gösterilmiştir. Portföyün optimum seviyede olabilmesi için yatırımların yaklaşık %74.26’sıyla BİMAS hissesi alınmalı, %25.74’üyle OTKAR hissesi açığa satılmalıdır.



Şekil 40: Optimal Portföy Ağırlıkları

3.5.2. Koşullu Olmayan Varyansa Dayalı Etkin Portföy Seti

Bu aşamada ROTKAR ve RBİMAS hisselerine ait koşullu olmayan ortalama, kovaryans ve korelasyon değerleri hesaplanmıştır. Hesaplanan değerler Markowitz'in geliştirdiği ortalama varyans modelinde kullanılarak etkin portföy seti ve ağırlıkları belirlenmiştir. Tablo 20'de ROTKAR ve RBİMAS hisseleri için hesaplanan değerler verilmiştir.

Tablo 20: ROTKAR ve RBİMAS Koşullu Olmayan Ortalama ve Varyans Değerleri

	RBİMAS	ROTKAR
Koş.Olmayan Ortalama	0.00067246	0.00075202
Koş.Olmayan Varyans	0.00023195	0.00044808
Koş.Olmayan S.Sapma	0.01523000	0.02116800
Koş.Olmayan Korelasyon	0.21181362	

Tablo 20'de hisseleri ait koşullu olmayan ortalama ve standart sapma değerleri Tablo 3'de paylaşılan ortalama ve standart sapma değerleriyle aynı olduğu görülmektedir. Koşullu olmayan varyans, koşullu olmayan standart sapmanın karesi alınarak hesaplanmıştır. Koşullu olmayan korelasyon ise,

$$\rho_{RBİMAS,ROTKAR} = \frac{1}{T-1} \sum \left(\frac{RBİMAS_t - \overline{RBİMAS}}{S_{RBİMAS}} \right) \left(\frac{ROTKAR_t - \overline{ROTKAR}}{S_{ROTKAR}} \right)$$

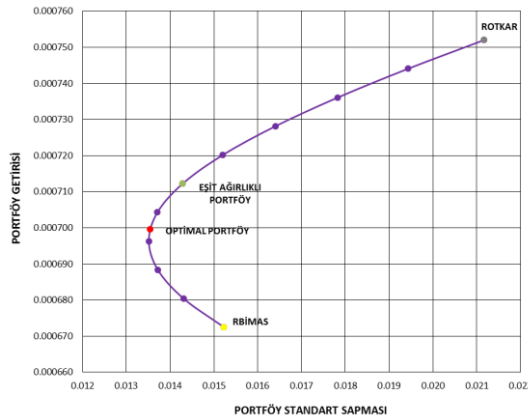
denklemleri yardımıyla hesaplanmıştır.

Tablo 20'deki hesaplanan değerler ortalama varyans modelinde girdi olarak kullanılmış ve oluşturulan oniki portföye ait getiri ve standart sapma Tablo 21'de paylaşılmıştır.

Tablo 21: Portföy Getirisi ve Sapması

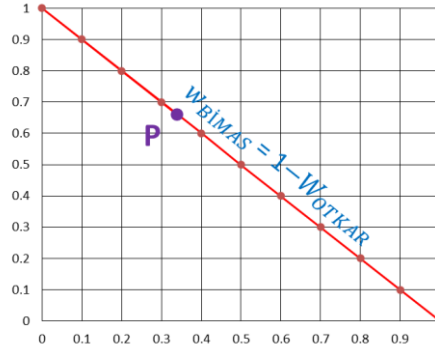
SIRA NO	HİSSE AĞIRLIKLARI		PORTFÖY	
	RBİMAS	ROTKAR	GETİRİ	S. SAPMA
1	0	1	0.000752019	0.021168000
2	0.1	0.9	0.000744063	0.019430885
3	0.2	0.8	0.000736107	0.017829852
4	0.3	0.7	0.000728151	0.016404794
5	0.4	0.6	0.000720195	0.015205269
6	0.5	0.5	0.000712239	0.014288192
7	0.6	0.4	0.000704283	0.013710359
8	0.7	0.3	0.000696327	0.013515352
9	0.8	0.2	0.000688371	0.013719506
10	0.9	0.1	0.000680416	0.014305741
11	1	0	0.000672460	0.015230000
12	0.660448	0.339552	0.000699474	0.013544937

Hesaplama sonucu minimum standart sapma düzeyinde maksimum getiri sağlayan optimal portföy, onikinci portföy olmuştur. Portföyün ağırlıkları BİMAS ve OTKAR için sırasıyla %66.04 ve %33.95'dir. Portföyün getirisi ve standart sapması 0.000699474 ve 0.013544937 olarak hesaplanmıştır.



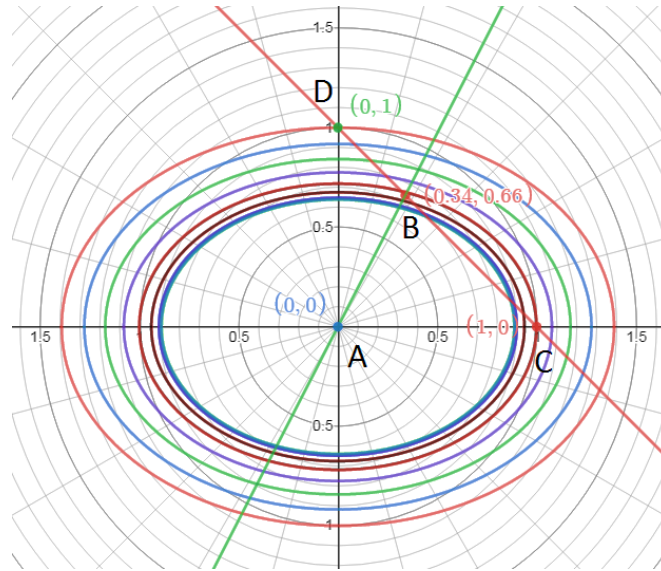
Şekil 41: Etkin Portföy Sınırı

Şekil 41’de koşullu olmayan değerlere dayalı etkin portföy seti görülmektedir. Eşit ağırlıklı portföyde risk başına düşen getiri 0.049848111 iken, optimal portföyde 0.05164101 birim getiridir. Etkin sınır üzerinde riskten kaçan yatırımcılar sol tarafta kalan portföyleri tercih etmektedir. Riski seven yatırımcılar ise sağ tarafta kalan portföyleri tercih etmektedir.



Şekil 42: Ağırlık Vektör Kısıtı

Şekil 42’de BİMAS ve OTKAR hisselerinin ağırlık vektör kısıtı geometrik olarak gösterilmektedir. P noktası ise optimal portföye ait ağırlıkları göstermektedir.



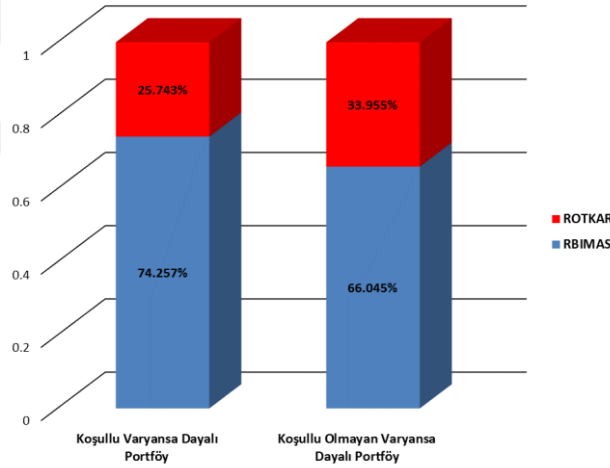
Şekil 43: Eş Varyans Eğrileri ve Ağırlık Vektörü Kısıtı

Şekil 43’de ağırlık vektörü kısıtı ve eş varyans eğrileri birlikte gösterilmektedir. Koşullu olmayan optimal portföyün ağırlıklarını gösteren B noktası ADC üçgeni sınırları içinde ve DC doğrusunun üzerinde yer almaktadır.

Optimal portföy ağırlıkları Tablo 21’de gösterilmiştir. Portföyün optimum seviyede olabilmesi için yatırımların yaklaşık %66.04’üyle BİMAS, %33.95’iyle OTKAR hissesi alınmalıdır.

3.5.3. Koşullu ve Koşullu Olmayan Parametrelere Dayalı Optimal Portföylerin Karşılaştırılması

ROTKAR ve RBİMAS hisselerinden oluşturulan iki farklı portföyün ağırlıkları Şekil 44’de gösterilmiştir. ARMA(1,1)-CCC-GARCH(1,1) modeli sonucu hesaplanan ve koşullu parametrelerin baz alındığı portföy ağırlıkları RBİMAS için %74.257, ROTKAR için %25.743’dür. Koşullu olmayan parametrelerin temel alındığı portföy ağırlıkları ise RBİMAS için %66.045, ROTKAR için %33.955’dir.



Şekil 44: Koşullu ve Koşullu Olmayan Portföy Ağırlıkları

Analiz kapsamında son gözlem değerinin bitiş tarihi 01.02.2019’dur. Bu tarihte BİMAS ve OTKAR hissesinin fiyatları sırasıyla 90.80TL ve 108.00TL’dir. 08.02.2019 tarihinde ise kapanış fiyatları sırasıyla 92.85TL ve 107.10TL’dir.

Koşullu portföy ağırlıklarıyla 100TL’lik bir yatırım yapılması durumunda, 100TL’nin 74.257TL’siyle BİMAS alınmakta, 25.743TL’siyle OTKAR satılmaktadır. Yatırım sonucunda BİMAS hissesi %2.257 oranında artarak 75.933TL, OTKAR hissesi %0.840 oranında azalarak 25.959TL olmuştur. Portföyün değeri ise %1.892 oranında

artarak 101.892TL'ye ulaşmıştır. Kesinlik durumunda, diğer bir ifadeyle finansal varlığın ileriye yönelik kazançlarını bilen yatırımcı, yatırımını en yüksek getiriye sahip olan varlığa yapacaktır. Böyle bir durumda 100TL'nin tamamıyla BİMAS hissesi alınır ve yatırım sonunda %2.257 oranında getiri elde edilir.

Koşullu olmayan portföy ağırlıklarıyla 100TL'lik bir yatırım yapılması durumunda, 100TL'nin 66.045TL'siyle BİMAS, 33.955TL'siyle OTKAR alınmaktadır. Yatırım sonucunda BİMAS hissesi %2.257 oranında artarak 67.536TL, OTKAR hissesi %0.833 oranında azalarak 33.672TL olmuştur. Portföyün değeri ise %1.208 oranında artarak 101.208TL'ye ulaşmıştır.

Koşullu portföy ile koşullu olmayan portföy ağırlıklarıyla yapılan yatırım sonucunda, Koşullu portföyün performansının %0.684 oranında daha iyi olduğu görülmektedir.

SONUÇ

Geçmişten günümüze tasarruf sahibi yatırımcılar birikimlerini korumak veya gelir elde etmek amacıyla çeşitli yöntemler izlemişlerdir. 1950’li yıllara kadar yatırımcılar finansal piyasalarda yatırımlarını yaparken daha çok sezgileriyle ve sübjektif kararlarıyla işlem yapmaktaydı. Yatırımcılar finansal varlıkların getirileriyle ilgilenmekte ve finansal varlığın riskinin nasıl ölçüleceğine dair yeterli bilgiye sahip değildi. Risk algısı “*yumurtaların aynı sepete konmaması*” önermesinin ötesine geçememekteydi. Bu nedenle yatırımcılar birikimlerini ne kadar çok finansal varlığa paylaşırlarsa o kadar risklerini azalatacaklarını umuyorlardı. Diğer bir ifadeyle tasarruflarını yalnız çeşitlendirme yöntemiyle finansal varlıklara dağıtıyorlardı.

1952 yılında Markowitz “portföy seçimi” makalesinde yaptığı çalışmayla etkin portföy kavramını ekonomi yazınına ve finansal piyasalara kazandırmış oldu. Markowitz modern yatırım teknikleri geliştirerek ve bu teknikleri kullanarak belirli bir risk düzeyinde maksimum getiri sağlayan portföyler oluşturmuş ve oluşturulan bu portföyler arasında optimal portföyü hesaplamıştır. Birden fazla finansal varlığın getirisini ve riskini girdi olarak kullanan Ortalama Varyans modeli, tek bir varlığa göre daha yüksek getirili ve daha az riskli bir yatırım alternatif sunmaktadır. Ortalama varyans modeli günümüz finans piyasalarında da ağırlığını korumaktadır.

1982 yılında Engle, yaptığı çalışmayla varyansın zamana bağlı olarak değişebileceğini ve bunun nasıl modellenebileceğini göstermiştir. Varyansın zamana bağlı olarak değiştiği durumda, koşullu olmayan varyansların ortalama varyans modelinde kullanılması uygun olmayacaktır.

Uygulama bölümünde BİST50 endeksinde yer alan 50 hisse senedi analiz edilmiştir. Analiz kapsamında 50 hisse senedi için ortalama denklemleri Box- Jenkins model kurma stratejisi yardımıyla kurulmuştur. Hisse bazında 24, toplamda 50 hisse için 1200 ARMA modeli kurulmuş ve 44 model aday seçilmiştir. 1156 model temel varsayımları sağlayamadığından analiz kapsamı dışında bırakılmıştır. Büyük ayırım ve öngörü basamağında daha önce belirlenen 44 modelden 22’si nihai model olarak

seçilmiştir. Nihai modellerin seçimi AIC, RMSE, MAE, MAPE, Theil U gibi uyum iyiliği ölçütleri yardımıyla yapılmıştır.

Aday ve nihai ARMA modelleri için varyans denklemleri kurulmuştur. Analiz kapsamında ARCH, GARCH, GJR, APARCH ve FIGARCH modelleri kullanılmıştır. Analiz sonucunda tüm testleri geçebilen hisseler BİMAS ve OTKAR olmuştur. İki hisse için kurulan ARMA(1,1)-CCC-GARCH(1,1) modeliyle yapılan haftalık öngörü sonuçları Markowitz'in geliştirdiği ortalama varyans modeline dâhil edilmiştir. Optimal portföy ağırlıkları BİMAS ve OTKAR için sırasıyla %74.26 ve %25.74 hesaplanmıştır. Bulunan portföy ağırlıklarıyla yapılan haftalık yatırım sonucunda %1.893 oranında getiri başarılı bir şekilde sağlanmıştır.

BİMAS ve OTKAR hisselerinden ikinci portföy koşullu olmayan ortalama ve varyans değerleri temel alınarak oluşturulmuştur. Koşullu olmayan portföy ağırlıkları BİMAS ve OTKAR için sırasıyla %66.045 ve %33.955 olarak hesaplanmıştır. Bulunan portföy ağırlıklarıyla yapılan haftalık yatırım sonucunda %1.208 oranında getiri sağlanmıştır.

Koşullu değerlerle oluşturulan birinci portföy ile koşullu olmayan değerlerle oluşturulan ikinci portföy karşılaştırıldığında, birinci portföyün ikinci portföye göre %0.684 oranında daha başarılı performans sağladığı görülmüştür.

KAYNAKÇA

- Abay, Ramazan. “Markowitz Karesel Programlama ile Portföy Seçimi: İMKB 30 Endeksinde Riskli Portföylerin Seçimi”, **Ç.Ü. Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi**. Cilt.22, Sayı.2, 2013, ss.175-194.
- Akan, N. Burak. “Piyasa Riski Ölçümü”, **Bankacılar Dergisi**. Sayı.61, 2007, ss.59-74.
- Akçayır, Ömer, Buhari Doğan ve Yusuf Demir. “Elton-Gruber Kısıtlı Markowitz Kuadratik Programlama Modeli ile Portföy Optimizasyonu: BİST-50 Üzerine Bir Uygulama”, **Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi**. Cilt.19, Sayı.3, 2014, ss.333-352.
- Akgül, Işıl. **Zaman Serilerinin Analizi ve ARIMA Modelleri**. 1. Basım. İstanbul: Der Yayınları, 2003.
- Altaylıgil, Barış. “Portföy Seçimi İçin Ortalama-Varyans-Çarpıklık Modeli”, **İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi Dergisi**. Cilt.37, Sayı.2, 2008, ss.65-78.
- Atan, Sibel, Sinan Mete, Şenol Altan ve Murat Atan. “İMKB 100 Endeksi İçin Optimal Portföy Seçimi Model Önerisi”, **Aksaray Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi**. Cilt.2, Sayı.1, 2010, ss.21-32.
- Aygören, Hakan ve Hasan Akyer. “Etkin Portföylerin Belirlenmesinde Veri-Aralığı, Hisse Senedi Sayısı ve Risk Düzeyi Faktörlerinin Etkisi”, **Uluslararası Alanya İşletme Fakültesi Dergisi**. Cilt.5, Sayı.2, 2013, ss.9-17.
- Aytürk, Yusuf. “Black-Litterman Modeli İle Borsa İstanbul’da Portföy Optimizasyonu”, **Bankacılar Dergisi**. Sayı.95, (2015), ss.51-67.
- Bacon, Carl R. **Practical Portfolio Performance Measurement and Attribution**. 2. Edition. England: John Wiley & Sons, 2008.
- Baillie, Richard T., Tim Bollerslev ve Hans Ole Mikkelsen “Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”, **Journal of Econometrics**. Vol.74, No.1, September 1996, ss.3-30.
- Başar, Mehmet (Ed.). **Portföy Yönetimi**. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, 2013.
- Birgili, Erhan ve Gülfen Tuna. “Markowitz Ve Tek Endeks Modellerinin Uygulanması: İMKB 30 Endeksi Üzerinde Karşılaştırmalı Analiz”, **Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi**. Cilt.15, Sayı.3, 2010, ss.1-18.
- Black, Fischer, Michael C. Jensen ve Myron Scholes. **Studies in the Theory of Capital Markets**. New York: Praeger, 1972.

- Bollerslev, Tim. "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", **Journal of Econometrics**. Vol.31, No.3, April 1986, ss.307-327.
- Bollerslev, Tim. "Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized Arch Model", **The Review of Economics and Statistics**. Vol.72, No.3, August 1990, ss.498-505.
- Box, George E. P., Gwilym M. Jenkins ve Gregory C. Reinsel. **Time Series Analysis Forecasting and Control**. 4. Edition. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008.
- Bozdağ, Nihat, ve Hasan Türe. "Bulanık Doğrusal Programlama Ve İMKB Üzerine Bir Uygulama", **Gazi Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi**. Cilt.10, Sayı.1, 2008, ss.1-18.
- Bozdağ, Nihat, Şenol Altan ve Sibel Duman. "Minimaks Portföy Modeli ile Markowitz Ortalama Varyans Portföy Modelinin Karşılaştırılması". **VII. Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu**. İstanbul: İstanbul Üniversitesi. 26-27 Mayıs 2005, ss.1-8.
- Brentani, Christine. **Portfolio Management in Practice**. 1. Edition. Amsterdam: Elsevier, 2004.
- Brockwell, Peter J. ve Richard A. Davis. **Introduction to Time Series and Forecasting**. 3. Edition. Switzerland: Springer, 2016.
- Chatfield, Chris. **The Analysis of Time Series An Introduction**. 5. Edition. United Kingdom: Chapman & Hall/CRC, 1997.
- Chen, Nai-Fu, Richard Roll ve Stephen A. Ross. "Economic Forces and the Stock Market", **The Journal of Business**. Vol.59, No.3, July 1986, ss.387-394.
- Chincarini, Ludwig B. ve Daehwan Kim. **Quantitative Equity Portfolio Management: An Active Approach to Portfolio Construction and Management**. 1. Edition. McGraw-Hill, 2006.
- Christopherson, Jon A., David R. Cariño ve Wayne E. Ferson. **Portfolio Performance Measurement and Benchmarking**. 1. Edition. McGraw-Hill, 2009.
- Cohen, Kalma J. ve Jerry A. Pogue. "An Empirical Evaluation of Alternative Portfolio-Selection Models", **The Journal of Business**. Vol.40, No.2, April 1967, ss. 166-193
- Çalışkan, Tuncer. "Black-Litterman Ve Markowitz Ortalama Varyans Modeliyle Oluşturulan Portföylerin Performanslarının Ölçülmesi", **Yönetim ve Ekonomi Araştırmaları Dergisi**. Sayı.15, 2011, ss.99-109.
- Çil Yavuz, Nilgün. **Finansal Ekonometri**. 2. Basım. İstanbul: Der Yayınları, 2015.

- Da, Zhi, Re-Jin Guo ve Ravi Jagannathan. "CAPM for Estimating the Cost of Equity Capital: Interpreting the Empirical Evidence", **Journal of Financial Economics**. Vol.103, No.1, January 2012, ss.204-220.
- Dickey, David A. ve Wayne A. Fuller. "Likelihood Ratio Statistics For Autoregressive Time Series With A Unit Root", **Econometrica**. Vol.49, No.4, July 1981, ss.1057-1072.
- Ding, Zhuanxin, Clive W.J. Granger ve Robert F. Engle. "A Long Memory Property Of Stock Market Returns And A New Model", **Journal of Empirical Finance**. Vol.1, No.1, June 1993, ss.83-106.
- Ecer, Fatih, N. Serap Vurur ve Latife Özdemir. "Bulanık Bir Modelle Firmaları Değerlendirme Ve Optimal Portföy Oluşturma: Çimento Sektöründe Bir Uygulama", **Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi**. Cilt.6, Sayı.11, 2009, ss.478-502.
- Elton, Edwin J. ve Martin J. Gruber. "Estimating the Dependence Structure of Share Prices – Implications for Portfolio Selection", **The Journal of Finance**. Vol.28, No.5, December 1973, ss.1203-1232.
- Elton, Edwin J., Martin J. Gruber, Stephen J. Brown ve William N. Goetzmann. **Modern Portfolio Theory And Investment Analysis**. 9. Edition. United States of America: John Wiley & Sons, 2014.
- Enders, Walter. **Applied Econometric Time Series**. 4. Edition. University of Alabama: John Wiley & Sons, 2015.
- Engle, Robert F. "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity With Estimates Of The Variance Of United Kingdom Inflation", **Econometrica**. Vol.50, No.4, July 1982, ss.987-1008.
- Engle, Robert F. ve Kevin Sheppard "Theoretical And Empirical Properties Of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH", **National Bureau Of Economic Research**. Working Paper 8554, October 2001, ss.1-43.
- Errunza, Vihang R. "Gains from Portfolio Diversification into Less Developed Countries' Securities", **Journal of International Business Studies**. Vol.8, No.2, 1977, ss.83-99.
- Fabozzi, Frank J. (Ed.). **Encyclopedia Of Financial Models Volume 1**. New Jersey: John Wiley&Sons, 2013.
- Fama, Eugene F. ve Kenneth R. French. "The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence", **Journal of Economic Perspectives**. Vol.18, No.3, 2004, ss.25.-46
- Fama, Eugene F. ve Kenneth R. French. "A Five-Factor Asset Pricing Model", **Journal of Financial Economics**. Vol.116, No.1, April 2015, ss.1-22.

- Ferri, Richard A. **All About Asset Allocation**. 2. Edition. New York: McGraw-Hill, 2010.
- Folarin, Samson Babatunde ve Olaniyi Samuel Iyiola. "Causality And Invertibility Of Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA) Model", **Asian Journal Of Current Engineering And Maths**. Vol.2, No.4, 2013, ss.260-266.
- Francis, Jack Clark ve Dongcheol Kim. **Modern Portfolio Theory Foundations, Analysis, and New Developments**. 1. Edition. New Jersey: John Wiley and Sons, 2013.
- Friedman, Milton. ve L. J. Savage. "The Utility Analysis of Choices Involving Risk". **Journal of Political Economy**. Vol.56, No.4, August 1948, ss.279-304.
- Garip, Okan. "Optimum Portföy Seçimi Ve BİST'te İşlem Gören Firmalar Üzerinde Bir Araştırma", **Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi**. Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi SBE, 2014.
- Ghysels, Eric ve Denise R. Osborn. **The Econometric Analysis Of Seasonal Time Series**. 1. Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- Goodwin, Thomas. "The Information Ratio", **Financial Analysts Journal**. Vol.54, No.4, July-August 1998, ss. 34-43.
- Gourieroux, Christian ve Alain Monfort. **Time Series and Dynamic Models**. 1. Edition. United Kingdom: Cambridge University Press, 1997.
- Gujarati, Damodar N. **Basic Econometrics**. 4. Edition. New York: The McGraw-Hill Companies, 2003.
- Hamilton, James D. **Time Series Analysis**. 1. Edition. New Jersey: Princeton University Press, 1994.
- Hicks, John Richard. "Suggestion for Simplifying the Theory of Money", **Economica**. Vol.2, No.5, February 1935, ss.1-19.
- Hosking, J. R. M. "The Multivariate Portmanteau Statistic", **Journal of the American Statistical Association**. Vol.75, No.371, September 1980, ss.602-608.
- IHS Global. EViews 8.1 User's Guide II. 2014. <http://www.eviews.com/EViews8/EViews8/EViews%208%20Users%20Guide%20II.pdf> (29 Eylül 2017).
- İskenderoğlu, Ömer ve Erdiñ Karadeniz. "Optimum Portföy Seçimi: İMKB30 Üzerinde Bir Uygulama", **C.Ü. İktisadi Ve İdari Bilimler Dergisi**. Cilt.12, Sayı.2, 2011, ss.235-257.
- Jacobs, Bruce I., Kenneth N. Levy ve Harry M. Markowitz. "Portfolio Optimization with Factors, Scenarios, and Realistic Short Positions", **Operations Research**. Vol.53, No.4, July – August 2005, ss.586-599.

- Jacobs, Bruce I., Kenneth N. Levy, CFA ve Harry M. Markowitz. “Trimability and Fast Optimization of Long-Short Portfolios”, **Financial Analysts Journal**. Vol.62, No.2, 2006, ss.36-46.
- Jensen, Michael C. “The Performance of Mutual Funds in the Period 1945-1964”, **Journal of Finance**. Vol.23, No.2, May 1968, ss.389-416.
- Jensen, Michael C. ve George A. Benington. “Random Walks and Technical Theories: Some Additional Evidence”, **Journal of Finance**. Vol.25, No.2, May 1970, ss.469-482.
- Kaplan Inc. **CFA Level I Book 4: Corporate Finance, Portfolio Management, And Equity Investments**. 1. Edition. United States of America: Kaplan, 2012.
- Kardiyen, Filiz. “Doğrusal Programlama ile Portföy Optimizasyonu ve İMKB Verilerine Uygulanması Üzerine Bir Çalışma”, **Atatürk Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi**. Cilt.21, Sayı.2, 2007, ss.15-28.
- Karpoff, Jonathan M. “The Relation Between Price Changes and Trading Volume: A Survey”, **The Journal of Financial and Quantitative Analysis**. Vol.22, No.1, March 1987, ss.109-126.
- Kirchgässner, Gebhard ve JürgenWolters. **Introduction to Modern Time Series Analysis**. 1. Edition. Heidelberg: Springer, 2007.
- Kocadağlı, Ozan ve Nalan Cinemre. “Portföy Optimizasyonunda SVFM İle Bulanık Doğrusal Olmayan Model Yaklaşımı”, **İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi Dergisi**. Cilt.39, Sayı.2, 2010, ss.359-369.
- Konno, Hiroshi ve Hiroaki Yamazaki. “Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market”, **Management Science**. Vol.37, No.5, May 1991, ss.519-531.
- Kroll, Yoram, Haim Levy ve Harry Max Markowitz. “Mean-Variance Versus Direct Utility Maximization”, **The Journal of Finance**. Vol.39, No.1, March 1984, ss.47-61.
- Laurent, Sébastien ve Jean-Philippe Peters, “G@RCH 2.2: An Ox Package for Estimating and Forecasting Various ARCH Models”, **Journal Of Economic Surveys**. Vol.16, No.3, 2002, ss.447-485.
- Leavens Dickson H. “Diversification Of Investments”, **Trust and Estates**. Vol.80, No.5, (May 1945), ss.469-482.
- Lewis, N.D. **Neural Networks For Time Series Forecasting With R**. 1. Edition. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2017.
- Ledoit, Olivier ve Michael Wolf, “A Well-Conditioned Estimator for Large-Dimensional Covariance Matrices”, **Journal of Multivariate Analysis**. Vol.88, No.2, February 2004, ss.365-411.

- Li, W. K. ve A. I. McLeod. "Distribution of the Residual Autocorrelations in Multivariate ARMA Time Series Models", **Wiley for the Royal Statistical Society**. Vol.43, No.2, 1981, ss.231-239.
- Lindgren, Georg. **Stationary Stochastic Processes Theory and Applications**. 1. Edition. New York: CRC Press Taylor & Francis Group, 2013.
- Lintner, John. "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", **The Review of Economics and Statistics**. Vol.47, No.1, February 1965, ss.13-37.
- Lintner, John. "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets: A Reply", **The Review of Economics and Statistics**. Vol.51, No.2, May 1969, ss.222-224.
- Markowitz, Harry Max. "Efficient Portfolios, Sparse Matrices, and Entities: A Retrospective", **Operations Research**. Vol.50, No.1, January - February 2002, ss.154-160.
- Markowitz, Harry Max. "Foundations of Portfolio Theory", **Wiley for the American Finance Association**. Vol.46, No.2, June 1991, ss.469-477.
- Markowitz, Harry Max. "Portfolio Selection", **The Journal of Finance**. Vol.7, No.1, March 1952, ss.77-91.
- Markowitz, Harry Max. **Portfolio Selection Efficient Diversification of Investment**. 1. Basım. New York: John Wiley and Sons, 1959.
- Markowitz, Harry Max. "Portfolio Theory: As I Still See It", **Annual Review of Financial Economics**. Vol.2, 2010, ss.1-23.
- Markowitz, Harry Max. "The Early History of Portfolio Theory: 1600-1960", **Financial Analysts Journal**. Vol.55, No.4, July-August 1999, ss.5-16.
- Markowitz, Harry Max. "The Utility of Wealth", **Journal of Political Economy**. Vol.60, No.2, April 1952, ss. 151-158.
- Markowitz, Harry Max ve André F. Perold. "Portfolio Analysis with Factors and Scenarios", **Wiley for the American Finance Association**. Vol.36, No.4, September 1981, ss.871-877.
- Markowitz, Harry Max, R. Lacey, J. Plymen, M. A. H. Dempster ve R.G. Tompkins. "The General Mean-Variance Portfolio Selection Problem [and Discussion]", **Philosophical Transactions: Physical Sciences and Engineering**. Vol.347, No.1684, 15 June 1994, ss.543-549.
- Marschak, Jacob. "Money and the Theory of Assets", **Econometrica**. Vol.6, No.4, October 1938, ss. 311-325.
- McLaney, Eddie. **Business Finance**. 8. Basım. England: Pearson Education, 2009.

- Montgomery, Douglas C., Cheryl L. Jennings ve Murat Kulahci. **Introduction to Time Series Analysis and Forecasting**. 1. Edition. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008.
- Mortaş, Mustafa ve Okan Garip. “Optimum Portföy Seçimi Ve BİST’te İşlem Gören Firmalar Üzerinde Bir Araştırma”, **Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi**. Cilt.7, Sayı.13, Aralık 2015, ss.245-282.
- Mossin, Jan. “Equilibrium in a Capital Asset Market”, **Econometrica**. Vol.34, No.4, October 1966, ss.768-783.
- Nelson, Daniel B. “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach”, **Econometrica**. Vol.59, No.2, March 1991, ss.347-370.
- Pindyck, Robert S. ve Daniel L. Rubinfeld. **Microeconomics**. 8. Edition: New Jersey, Pearson, 2013.
- Prigent, Jean-Luc. **Portfolio Optimization and Performance Analysis**. 1. Edition. Boca Raton, 2007.
- Rai Technology University. **Security Analysis and Portfolio Management**. 1. Edition. Bangalore: Rai University, 2001.
- Reilly, Frank K. ve Keith C. Brown. **Investment Analysis and Portfolio Management**. 7. Edition. South-Western College Pub, 2002.
- Roy, Andrew Donald. “Safety First ve Holding of the Assets”, **Econometrica**. Vol.20, No.3, July 1952, ss. 431-449.
- Sarker, Mokta Rani. “Optimal Portfolio Construction: Evidence from Dhaka Stock Exchange in Bangladesh”, **World Journal of Social Sciences**. Vol.3, No.6, November 2013, ss.75-87.
- Sentana, Enrique. “Quadratic ARCH Models”, **The Review of Economic Studies**. Vol.62, No.4, October 1995, ss.639-661.
- Sevüktekin, Mustafa ve Mehmet Çınar. **Ekonometrik Zaman Serileri Analizi EViews Uygulamalı**. 4. Basım. Bursa: Dora Yayıncılık, 2014.
- Sharpe, William F. “A Simplified Model for Portfolio Analysis”, **Management Science**. Vol.9, No.2, January 1963, ss.277-293.
- Sharpe, William F. “Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk”, **The Journal of Finance**. Vol.19, No.3, September 1964, ss.425-442.
- Şişman, Aslı ve Halil Karaca. “Kriz Dönemlerinde Optimal Portföy Seçimi: BİST 100 Uygulaması”, **Yönetim ve Ekonomi Araştırmaları Dergisi**. Cilt.14, Sayı.3, Temmuz 2016, ss.51-63.

- Sortino, Frank ve Lee Price. "Performance Measurement in a Downside Risk Framework", **Journal of Investing**. Vol.3, Issue.3, 1994, ss.59–65.
- Süer, Seda. "Yatırımcı Beklentilerinin Black-Litterman Optimizasyon Modeli ile Değerlendirilmesi: BORSA İSTANBUL Uygulaması", **The Journal of Academic Social Science Studies**. Sayı.34, Nisan 2015, ss.299-330.
- Topal, Yusuf ve Kenan İlarıslan. "Portföy Optimizasyonu Bağlamında Tanjant Portföyleri: İMKB30 İşletmelerinden Bir Örnek", **Afyon Kocatepe Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi**. Cilt.11, Sayı.1, Haziran 2009, ss.219-247.
- Toraman, Cengiz ve Muhammed Fatih Yürük. "Kuadratik Programlama Tabanlı Modelleme ile Portföy Optimizasyonu: BİST-100 Uygulaması", **Mukaddime**. Cilt.5, Sayı.1, 2014, ss.133-148.
- Tosun, Ömür ve Eda Oruç. "Portföy Büyüklüğünün Portföy Riski Üzerine Etkileri: İMKB-30 Üzerinde Test Edilmesi", **Süleyman Demirel Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi**. Cilt.15, Sayı.2, 2010, ss.479-493.
- Treynor, Jack ve Fischer Black. "How to Use Security Analysis to Improve Portfolio Selection", **Journal of Business**. Vol.46, No.1, January 1973, ss.66–86.
- Tsay, Ruey S. **Analysis of Financial Time Series**. 3. Edition. Chicago: John Wiley & Sons, 2010.
- Tse, Y.K. "A Test For Constant Correlations In A Multivariate GARCH Model", **Journal of Econometrics**. Vol.98, No.1, September 2000, ss.107–127.
- Tuna, Gülfen. "Kovaryans Matrisi Tahmininin Portföy Seçimine Etkisi: İMKB'de Farklı Yatırım Ufukları için Uygulama", **Ege Akademik Bakış**. Cilt.12, Sayı.3, Temmuz 2012, ss.311-322.
- Türk Dil Kurumu Güncel Türkçe Sözlük**. "Portföy", http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_gts&arama=gts&guid=TDK.GT.S.576f8e36bce393.59530475 (26 Haziran 2016).
- Uyar, Umut ve Sinem Güler Kangallı. "Markowitz Modeline Dayalı Optimal Portföy Seçiminde İşlem Hacmi Kısıtı", **Ege Akademik Bakış**. Cilt.12, Sayı.2, 2012, ss.183-192.
- Yaffee, Robert A. ve Monnie McGee. **Introduction to Time Series Analysis and Forecasting with Applications of SAS and SPSS**. 1. Edition. New York: Academic Press, 2000.
- Zerey, Gökçe ve Erol Terzi. "Portföy Seçimi Ve BİST30 Üzerinde Bir Uygulama", **International Anatolia Academic Online Journal**. Cilt.3, Sayı.2, 2015, ss.38-46.