SERİMLERDE EN KISA YOL ANALİZLERİ VE ATAMA VE AKTARMA MODELLERİ İLİŞKİSİNE EN KISA YOL ANALİZİ YAKLAŞIMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
(ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ)

Ö.FARUK BAYKOÇ

OCAK 1988

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Danışman

Sınav Jürisi

Başkan : Doç. Dr. Yalçın EROL

Üye : Doç. Dr. Fevzi Kutay

Üye : Y. Doç. Dr. Orhan TÜRKBEY

Bu tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım esaslarına uygundur.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

SERİMLERDE EN KISA YOL ANALİZLERİ VE
ATAMA VE AKTARMA MODELLERİ İLİŞKİSİNE
EN KISA YOL ANALİZİ YAKLAŞIMI
(Yüksek Lisans Tezi)

Ö. Faruk BAYKOÇ
GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 1988

ÖZET

Bu tezde, son yıllarda Yöneylem Araştırması'nın en önemli konularından birisi haline gelen serim teorisi ve onun özel bir konusu olan En kısa yol analizleri incelenmiştir.

Serim teorisine genel bir giriş yapıldıktan sonra En kısa yol analizlerine ilişkin çeşitli algoritmalar verilmiş ve ulaştırma modelinin özel halleri olan Atama ve Aktarma modelleri arasındaki ilişkiye En kısa yol analizi yaklaşımı uygulanmıştır.

Bu tez ile, söz konusu analizlerin hem çoğu problemlere çözüm getirebilecek kadar faydalı, hem de Yöneylem Araştırması'nın değişik çözüm yöntemleriyle ilişkilendirilebilecek kadar esnek bir metod olduğu sonucuna varılabilir.

THE SHORTEST PATH ANALYSIS AND AN ANALYSIS APPROACH TO RELATIONSSHIP BETWEEN ASSIGNMENT AND TRANSSHIPMENT PROBLEMS
(M.Sc. Thesis)

Ö. Faruk BAYKOÇ
GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
January 1988

A B S T R A C T

In this thesis, the analysis of the Network Theory having become one of the most important subject of Operations Research recently and the analysis of the shortest path which is one of the special subject of the same have been studied.

After an introduction to the Network Theory having been made, the various algorithms concerning the shortest path analysis have been given and the approach to the shortest path analysis have been applied to the relationship between the models of Assignment and Transshipment that are the special cases of Transportation Model.

By this thesis, it is possible to get the result that the most of the said analysis are both useful that to enable as far as to bring solution to problems or is a method which is elastic as far as to be able to concern by different solution methods of the Operations Research.

TEŞEKKÜR

Tez konumun seçiminden, çalışmalarımın sonuçlanmasına kadar benden hiç bir yardımı esirgemeyen, değerli görüş ve eleştirileriyle beni yönlendiren tez hocam Sayın Doç. Dr. Yalçın Erol'u minnet ve şükranla anarım.

Çalışmalarıma, gösterdiği hoşgörü ve anlayışla yardımcı olan bölüm başkanımız Sayın Doç. Dr. Fevzi Kutay'a da teşekkürü bir borç bilirim.

TABLOLARIN LİSTESİ

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

G İ R İ Ş

Pratikte karşılaşılan çoğu sistemler fiziksel durumları itibariyle bir serim yapısında düşünülebilmekte ve modellenebilmektedir. Sağladığı bu fayda açısından Serim Teorisi günümüzde yöneylem araştırma'sının en önemli konularından birisi haline gelmiştir.

Tez çalışmasının esasını oluşturan en kısa yol analizleri ise serim teorisinin özel konularından sadece biri olmasına rağmen, belirlenen iki nokta arasındaki en kısa uzaklığı bulma gibi belkide ilk bakışta basit görünecek bir fonksiyonu yerine getirmekle beraber, hem pratikte karşılaşılabilecek bazı problemlere çözüm getirebilme, hem de yöneylem araştırmasının bazı değişik teknikleriyle ilişkilendirilebilecek bir yapıya sahip olması açısından önemlidir. Özellikle ikinci belirtilen durum dikkat çekici olup tezde ele alınmıştır.

Konu ile ilgili olarak öncelikle ulaştırma modelinin özel halleri olan Atama ve Aktarma problemlerinin birbirleriyle olan ilişkisi belirlenmiş ve belirlenen bu ilişki esas alınarak olaya en kısa yol analizi yaklaşımı uygulanmıştır.

Böyle bir çalışmaya yönlenmemizin nedeni literatürümüze henüz tam anlamıyla yerleşmemiş olan bu konuya az da olsa bir katkıda bulunabilmek bunun da ötesinde serim teorisi ve onun özel bir konusu olan en kısa yol analizlerinin müstakil bir metod olmaktan daha çok, çoğu problemlere bir bakış açısı, bir yaklaşım sağlayabilen faydalı bir araç olduğu konusunuda vurgulayabilmektedir.

BÖLÜM I

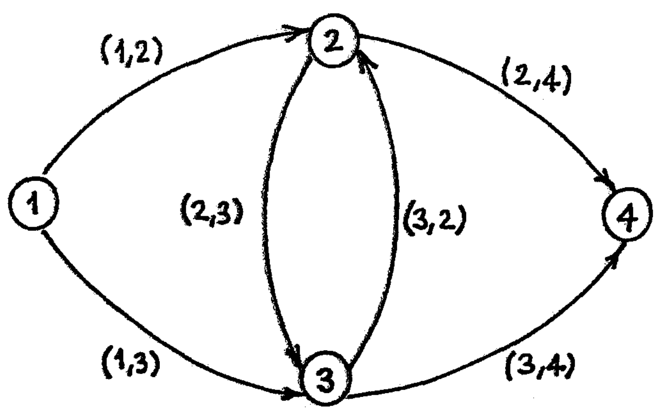
SERİM TEORİSİNE GİRİŞ

I.1. TANIM ve GENEL KAVRAMLAR

Bir serim (network) belli düğümler kümesi ile bunlarla bağlantılı ayrıtlar kümesinin oluşturduğu bir yapı şeklinde tanımlanabilir (1).

Daha ayrıntılı bir tanım ise şu şekilde verilebilir; Sınırlı sayıdaki bir P düğümler kümesi ile yine sınırlı sayıdaki bir E ayrıtlar kümesinden oluşan (P,E) yapısına serim denir.

Burada, P düğümler kümesini gösterir ve i veya P_i, $i = 1,2, \ldots, n$ şeklinde gösterilir. E ise ayrıtlar kümesini gösterir ve (i,j) veya (P_{ij}) şeklinde gösterilir(2).



Şekil-1 Genel bir serim modeli

Şekil 1'de de görüldüğü gibi bir serim düğümler (nodes) ve ayrıtları (arcs) ihtiva etmektedir (3). Böyle bir gösterim fiziksel ve kavramsal durumların modellenmesinde oldukça fuydalıdır (4).

i başlanğıç düğümü, j de bitiş düğümü olmak üzere (i,j) sıralı çitfi, i ve j düğümlerine tekabül eden her bir $(i,j) \varepsilon E$ ayrıtını gösterir. Ayrıca (i,j) yi "i den j ye giden" yol olarak da tanımlayabiliriz.

Yol : Yönlü yol veya kısaca yol (Path), i ve j düğümlerini birbirine bağlayan $P = \{(i,p), (p,q), \ldots, (l,u), (u,j)\}$ şeklindeki sıralı ayrıtlarından oluşur. Öyle ki; eğer (i,p) ayrıtı i dügümünde başlar ve (u,j) ayrıtı da j düğümünde sona ererse P, i den j ye bir yol olarak adlandırılır. i ve j düğümlerine ise yolun uç noktaları denir (5).

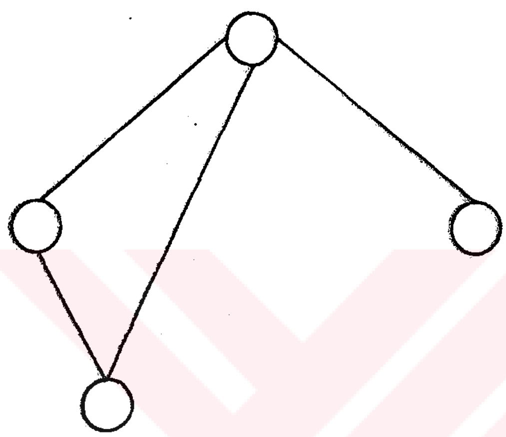
Eğer bir serim i dügümünden j düğümüne bir yol ihtiva ediyorsa, j düğümüne i düğümünden erişilebilir denir(6).

Döngü : Eğer bir yol i=j şeklinde tanımlanırsa o yol bir döngü (loop) oluşturur (7). Yani herhangi bir yolun döngü olabilmesi için başlanğıç ve bitiş düğümleri aynı olmalıdır.

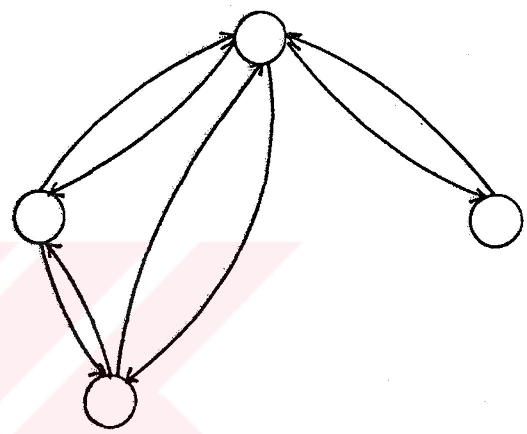
Çevrim : Bir i düğümünden başlayarak iki veya daha fazla sayıda ayrıt izlenmek suretiyle tekrar i düğümüne ulaşılması durumunda bir çevrim (cycle) oluşur.

Yönlü serim : Bazı durumlarda serimin düğümleri arasında bir yön mevcuttur. Öyle ki bir i düğümü ile j dügümü arasında j düğümüne yönelik bir bağlantı sözkonusudur. Ve bu ilişkiyi ters çevirmek doğru olmaz. Bu durumdaki serimlere yönlü serim (directed network) ve ayrıtlara da yönlü ayrıt (directed arcs) denir (8).

Örneğin; arabaların sadece bir yönde gittiği bir cadde, suyun yüksek bir noktadan alçak bir noktaya aktığı bir kanal yönlü serimdir.



Şekil-2 Yönsüz serim



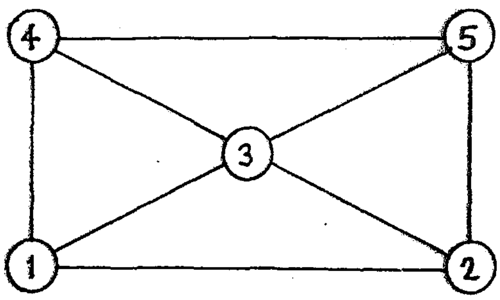
Şekil-3 Yönlü serim

Yönsüz bir serim kolaylıkla yönlü serim haline getirilebilir. Şekil 2 deki yönsüz tek bir ayrıt yerine şekil 3 deki gibi yönlü iki ayrıt tanımlamak mümkündür.

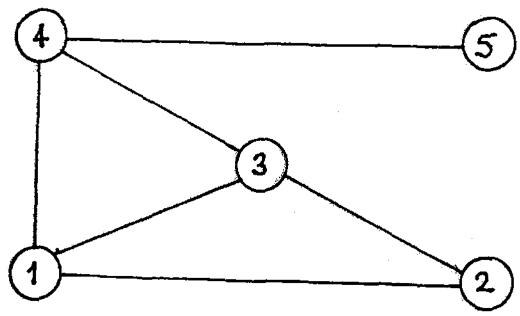
Kısmi serim: Verilen bir G(P,E) seriminin bazı ayrıtları ihmal edilebiliyorsa $G_r = (P, E_r)$ kısmi serim'i (partialnetwork) oluşturulur. Burada $E_r \subset E$ dir.

Alt serim : Verilen bir $G = (P,E)$ seriminin bazı düğümleri ihmal edilebiliyorsa $G_s = (P_s, E_s)$ alt serimi (subnetwork) oluşturulur.

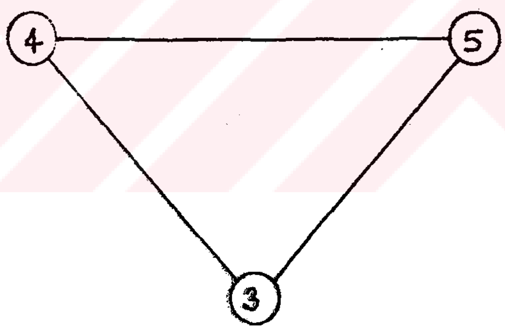
Eğer bir trênyolu sistemi serim yapısında düşünülecek olursa, istasyonlar düğüm, demiryollarıda ayrıt olarak ele alınabilir. Bu durumda serim esas ilişkiyi gösteriyorsa kısmi serim, demiryolu sisteminin özel bir kesimini gösteriyorsa alt serim, yapısı oluşur.



Şekil-4 Serim



Şekil-5 Kısmi Serim



Şekil-6 Alt Serim

Tam serim: Eger tüm düğüm çiftleri direkt bağlantılı ise bu tür bir serim TAM serim (complete network) olarak adlandırılır. Hava yolları konuya ilişkin güzel bir örnek teşkil eder.

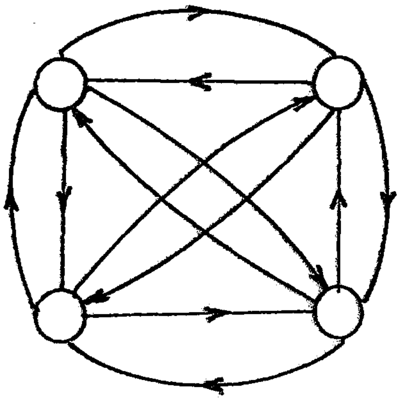
Burada hava limanları düğüm, ve iki liman arasındaki direkt bağlantılı uçuşlarda ayrıtları gösterirse, belli bölgeler içindeki tüm mümkün uçuş bağlantılarını gösteren serim bir tam serimdir.

İki kısımlı serim: Eger P düğüm seti Y ve Z gibi alt sete dönüştürülebilirse G = (P,E) serimine iki kısımlı serim (Bipartite network) denir. Öyle ki ayrıtlar, biri Y kümesinde diğeri Z kümesinde yer alan başlanğıç ve bitiş düğümleri ile bağlantılıdır.

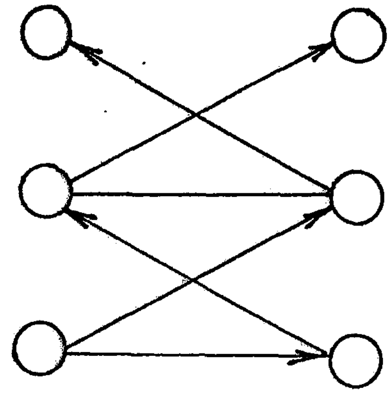
Ağaç: Tam serimin karşıtı ağaç serimi veya ağaçtır. Bir tam serim mümkün olduğunca çok sayıda ayrıt ihtiva ederken, bir ağaç (tree) daha az sayıda ayrıt ihtiva eder öyle ki; burada her düğüm en az bir ayrıtın başlangıç veya bitimidir. Ağaç, çevrim ihtiva etmeyen bir serimdir. Ancak her bir dügümden belli bir düğüme bir yol vardır. Dolayısıyle bir serim de, ağaçla tüm düğümlerden belli bir dügüme minimum sayıda ayrıtla ulaşılması mümkün olmaktadır.

Bağlantısız-Bağlantılı Serim : Genel bir serim de iki düğüm arasında mümkün bir yol olmayabilir. Bu tip serimler bağlantısız serimlerdir. (Non-connected network) Ağaç'da bu tip serimlere bir örnektir.

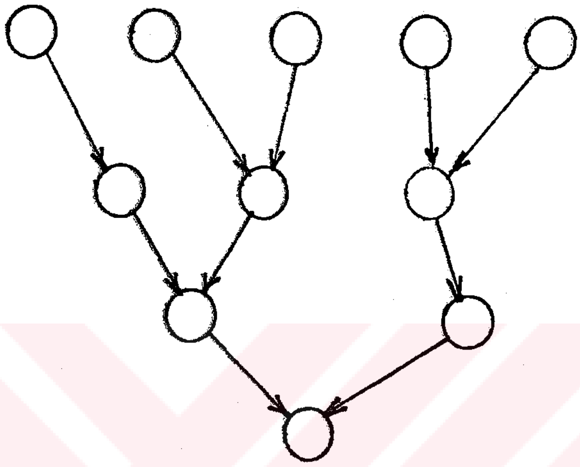
Bu durumun tersi de mümkündür. Yani verilen bir serimde düğüm çiftleri arasında bir yol vardır. Böyle serimlere ise bağlantılı serim (connected network) denir. Karayolu, demiryolu ve haberleşme sistemleri bağlantılı serimlerdir. Tam serim ise her zaman bağlantılıdır.



Şekil-7 Tam serim



Şekil-8 İki kısımlı serim



Şekil-9 Ağaç

I.2. SERİM GÖSTERİMLERİ

Serimler değişik gösterim yolları ile daha uygun bir formda gösterilebilir.

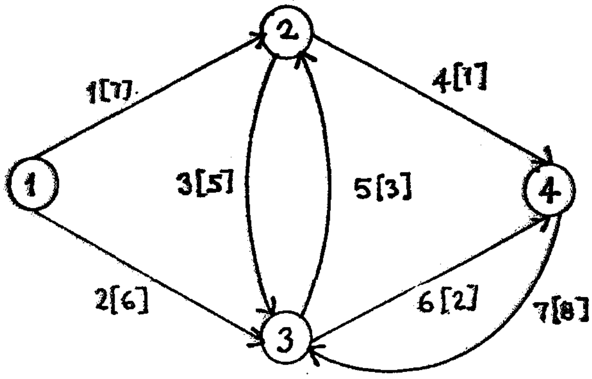
I.2.a. MATRİS GÖSTERİMİ

Bir serimde tüm mümkün (i,j) düğüm çiftlerinin gösteriminin bir yolu matris gösterimidir. Her bir çift için aşağıdaki formülasyon söz konusudur (6).

$$l(i,j) = \begin{cases} l(i,j) \text{ , i ve j düğümleri (i,j) ayrıtı ile bağlantılı ise} \\ 0 \text{ , } i = j \text{ ise} \\ \infty \text{ , i ve j arasında bir ayrıt yok ise} \end{cases}$$

$$i = 1,2,3, \ldots, N$$
$$j = 1,2,3, \ldots, N$$

Şekil 10'daki serimi inceleyelim



Şekil-10 Orijinal serim

1 : i dügümü numarası

e [l(i,j)] : e; ayrıt numarası, l(i,j); (i,j) ayrıtının uzaklığı.

Bu serim matris formunda aşağıdaki gibi gösterilebilir.

Tablo-1 Orijinal serimin matris gösterimi

Dügüm no \ Dügüm no	1	2	3	4
1	0	7	6	∞
2	∞	0	5	1
3	∞	3	0	2
4	∞	∞	8	0

Serimlerin matris gösterimine ilişkin iki önemli gösterim şekli daha vardır. Bunlardan birincisi Etkileşim

Matrisi (Adjacency matrix), digeride Çakışım Matrisi (Node - Edge incidence matrix) dir. Özellikle çakışım matrisi serim teorisinin doğrusal programlama ile olan ilişkisinin belirlenmesinde önem taşımaktadır.

a- Etkileşim Matrisi

Bu matrisin a_{ij} elemanları aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{Eğer i düğümünden j düğümüne bir ayrıt varsa,} \\ 0, & \text{Eğer i düğümünden j düğümüne bir ayrıt yoksa.} \end{cases}$$

b- Çakışım Matrisi

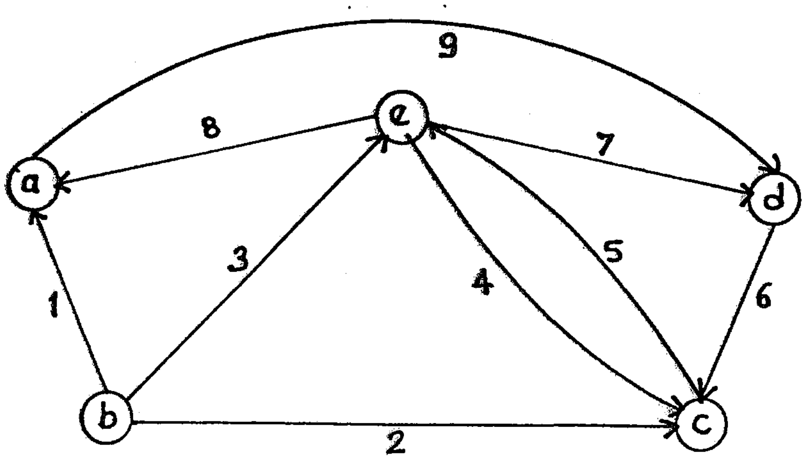
Çakışım matrisinin b_{ij} elemanlarıda aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{eğer j ayrıtı i düğümünden başlarsa} \\ -1, & \text{eğer j ayrıtı i düğümünde biterse} \\ 0, & \text{diğer durumlar da} \end{cases}$$

Bir serim normal olarak düğümlerden daha fazla ayrıt ihtiva ettiğinden, aynı bir serim için çakışım matrisi, etkileşim matrisine göre daha fazla sütun kapsayacaktır.

Büyük ölçekli serimler için, her iki gösterimde bilgisayarda oldukça fazla bir veri yüklemesi gerektirecektir. Bundan dolayı bilgisayara bu matrislerin sıfır olmayan tüm elemanlarını ihtiva eden bilgiler yüklenmelidir.

Şimdi şekil 11'de verilen serim için etkileşim ve çakışım matrislerini oluşturalım.



Şekil-11 Grafiksel bir serim

Tablo-2 Grafiksel serimin etkileşim matrisi

Düğümler / Düğümler	a	b	c	d	e
a	0	0	0	1	0
b	1	0	1	0	1
c	0	0	0	0	1
d	0	0	1	0	0
e	1	0	1	1	0

Tablo-3 Grafiksel serimin çakışım matrisi

Ayrıtlar / Düğümler	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	-1	0	0	0	0	0	0	-1	1
b	1	1	1	0	0	0	0	0	0
c	0	-1	0	-1	1	-1	0	0	0
d	0	0	0	0	0	1	-1	0	-1
e	0	0	-1	1	-1	0	1	1	0

I.2.b. BASAMAK GÖSTERİMİ

Bir diğer gösterim şekli de basamak gösterimi (ladder representation) denilen ve serimdeki tüm ayrıtların listesini çıkaran bir gösterimdir (6). Bu tablo, başlangıç düğümü, bitiş düğümü ve her bir e ayrıtının uzaklığını ihtiva eder.

Şekil 10 daki serimin basamak formundaki gösterimi tablo 4'de verilmiştir.

Tablo-4 Orijinal serimin basamak formu gösterimi

Ayrıt no	Başlangıç düğümü	Bitiş düğümü	Ayrıt uzaklığı
1	1	2	7
2	1	3	6
3	2	3	5
4	2	4	1
5	3	2	3
6	3	4	2
7	4	3	8

I.2.c. İLERİ YILDIZ GÖSTERİMİ

İleri yıldız gösteriminde (Forward star representation) serimde ayrıtlar çıktıkları düğümlere göre düzenlenir. Öyle ki, aynı düğümden başlayan ayrıtlar aynı grupta görünürler. Bundan dolayı bitiş düğümleri ile ayrıt uzaklıkları da tabloda gösterilmelidir.

Tablo-5 Orijinal serimin ileri yıldız formu gösterimi

Düğüm	Bitiş düğümü	Ayrıt uzaklığı
1	2	7
	3	6
2	3	5
	4	1
3	2	3
	4	2
4	3	8

I.3. SERİM TEORİSİNİN YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI'NDAKİ YERİ VE ÖNEMİ

Uygulama alanı oldukça fazla olan serim teorisi, günümüzde kendine özgü tanım ve teoremleriyle aynı bir planlama tekniği olarak uygulamacıların hizmetindedir(9).

Serim problemleri çok çeşitli alanlarda ortaya çıkabilir. Büyük ölçekli projelerin planlanmasında, endüstrinin hen kesiminde uygulanan dağıtım şebekelerinde, bir noktadan diğer noktaya olan en kısa yolun ve belli sistemlerdeki maksimum akışın bulunmasında serim teorisinin önemi büyüktür (10). Ancak, ulaştırma, dağıtım ve haberleşme sistemleri, en yaygın uygulama alanlarını teşkil etmektedir (1).

Öte yandan doğrusal programlamanın belirli uygulamalarında ortaya çıkan ve çeşitli merkezlerin belli çiftlerinin yollarla bağlanması özel bir serim yapısındadır (9).

Pratikteki bazı durumlarda serimler herhangi bir akış karakteristiğini de gösterebilir. Mesela; bir boru hattında suyun akışı, bir yol veya cadde'de trafik akışı, bir dağıtım sisteminde ürünlerin akışı, vb. Bu tip durumlardaki modellere serim akış modelleri (Network flow model) denilmektedir (4).

BÖLÜM II

SERİMLERDE EN KISA YOL ANALİZLERİ

II.1. GİRİŞ

Serim teorisinin önemli problemlerinden birisi de verilen bir başlangıç düğümünden diğer düğümlere olan en kısa yolun bulunmasıdır (11). Bu problem diğer optimizasyon problemlerinde bir alt problem olarak ortaya çıkar.

En kısa yol probleminde iki düğüm kaynak ve batak düğümü olarak belirlenir ve bu kaynak düğümünden batak düğümüne olan en kısa yol araştırılır (12). Buradaki işlemin esası kaynaktan batağa doğru minimum toplam uzaklıkla gitmeyi sağlayan ayrıtlar dizisini bulmaktır (10).

Genel tanım: Uzaklıkları bilinen yönlü ayrıtlar ve bunlarla bağlantılı düğümlerden oluşan bir serimde belli bir düğümden diğer düğüme/düğümlere en kısa yolun bulunmasıdır.

Bu problem gerçekte yöneylem araştırması uygulamalarında geniş bir alan teşkil eder.

Bir serim ve bu serimin a ve b gibi iki düğümü verildiğinde en kısa yol problemi (Shortest path problem) iki şekilde ele alınır (13).

1. a dan b ye giden yolların en kısasının belirlenmesi,

2. En kısa yolun uzunluğunun bulunması.

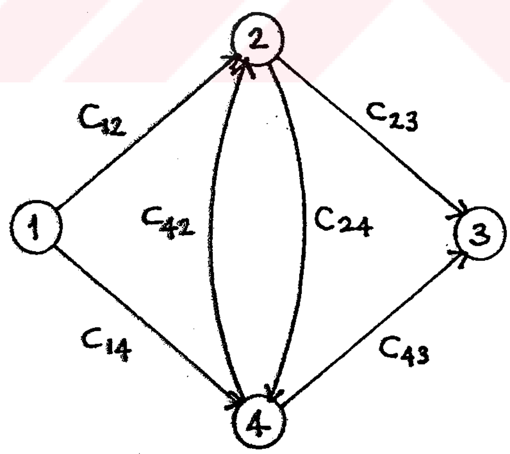
Buna göre, en kısa yol problemlerinde kaynaktan bataĝa en kısa uzaklığı belirlemenin yanı sıra bu enkısa uzaklığı veren ayrıtlar dizisini diğer bir deyişle en kısa yolu da belirlemek durumundayız.

Genelde, verilen bir serimde en kısa yolun bulunması aşağıda belirtilen üç değişik şekilde ele alınabilir.

1. Serimin başlanğıç ve bitiş düğümleri arasındaki en kısa yolun bulunması,

2. Başlangıç ve diğer tüm düğümler arasındaki en kısa yolun bulunması,

3. Tüm düğüm çiftleri arasındaki en kısa yolun bulunması.



Şekil-12 Ayrıt değerleri verilmiş serim

Şekil 12'de de görüldüğü gibi bir serimin ayrıtları üzerinde C_{ij} değerleri yer almaktadır. Bu C_{ij} değerleri çeşitli şekillerde verilebilir (14).

Örneğin; C_{ij}, i düğümünden j düğümüne gidiş maliyeti olarak düşünülebilir. Bu durumda problem, bir en küçük maliyetli yol (least cost path) problemi haline gelir.

C_{ij}, düğümler arasındaki gidiş zamanını gösterebilir. Bu takdirde de amaç minimum süreli yolu (minimum duration path) bulmaktır.

Veya C_{ij}, düğümler arasındaki uzaklığı ifade edebilir ki, problem artık en kısa uzunluklu yolun bulunması şeklinde ele alınmalıdır.

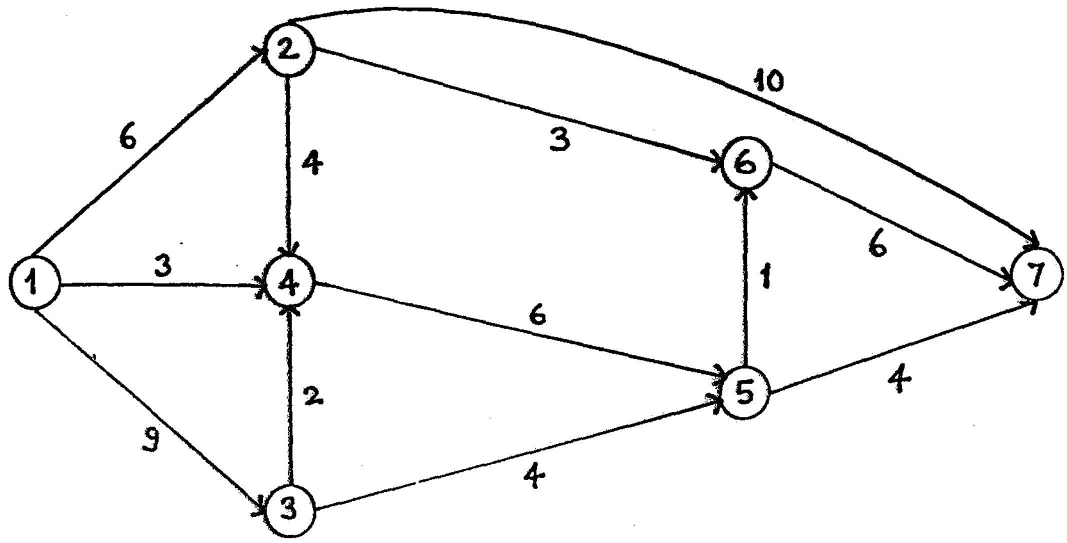
II.2. ÇEVRİMSİZ SERİMLERDE EN KISA YOLUN BULUNMASI

Çevrimsiz serimin anlamı, serimdeki tüm yolların bir çevrim veya döngü oluşturmamasıdır. Çünkü bu serimlerin mantığı gereği, tüm aktiviteler küçük numaralı düğümler den çıkıp, büyük numaralı düğümlere gitmektedir. PERT ve CPM aktiviteleri çevrimsiz serimler (Acylic network) sınıfına girerler.

Şimdi çevrimsiz bir serimde en kısa yolun nasıl bulunacağını inceleyelim.

II.2.a. ÇEVRİMSİZ SERİM EN KISA YOL ALGORİTMASI

Şekil 13'deki serimi inceleyelim ve 1 düğümü ile 7 düğümü arasındaki en kısa yolu bulmaya çalışalım.



Şekil-13 Algoritmaya ilişkin bir serim örneği

Problem aşağıdaki algoritma (14) ile çözülebilir.

ADIM 1: 1 düğümü $m_1 = 0$ ile etiketlenir.

ADIM 2: Diğer düğümlerde aşağıdaki formülasyona göre etiketlenir.

$$m_j = \text{MİN } (m_i + d_{ij}) \ : \ i = 1,2, \ldots \ j-1$$

Buradaki d_{ij} ler, i ve j düğümleri arasındaki uzaklığı göstermektedir.

ADIM 3: Son düğümde etiketlendiğinde serimdeki en kısa yol bulunmuştur. Bu yol, n düğümünden diğer düğümlere $m_i + d_{ij} = m_j$, $j = n, n-1, n-2, \ldots . 1$ formülüyle geriye dönüş yaparak belirlenir. Herhangi bir yol bu eşitliği sağlıyorsa kaynak ve batak arasında en kısa yol olmaya bir adaydır.

Şimdi algoritmanın uygulamasını izleyelim;

ADIM 1: $m_1 = 0$

ADIM 2: $m_2 = \min (m_1 + d_{12}) = \min (0 + 6) = 6$

$m_3 = \min (m_1 + d_{13}) = \min (0 + 9) = 9$

$$m_4 = \min \begin{Bmatrix} m_1 + d_{14} = 0 + 3 = 3 \\ m_2 + d_{24} = 6 + 4 = 10 \\ m_3 + d_{34} = 9 + 2 = 11 \end{Bmatrix} = 3$$

$$m_5 = \min \begin{Bmatrix} m_3 + d_{35} = 9 + 4 = 13 \\ m_4 + d_{45} = 3 + 6 = 9 \end{Bmatrix} = 9$$

$$m_6 = \min \begin{Bmatrix} m_2 + d_{26} = 6 + 3 = 9 \\ m_5 + d_{56} = 9 + 1 = 10 \end{Bmatrix} = 9$$

$$m_7 = \min \begin{Bmatrix} m_2 + d_{27} = 6 + 10 = 16 \\ m_5 + d_{57} = 9 + 4 = 13 \\ m_6 + d_{67} = 9 + 6 = 15 \end{Bmatrix} = 13$$

ADIM 3: 7 nolu düğüm de etiketlendiğinden serimdeki en kısa uzaklık 13 olarak bulunmuştur. Yolları gözden geçirdiğimizde $m_i + d_{ij} = m_j$ eşitliğini (5,7), (2,6), (1,4),(4,5) (1,3) ve (1,2) ayrıtlarının sağladığını görürüz.

Böylece 1 ve 7 düğümleri arasındaki en kısa yol;

(1,4) (4,5) (5,7)

sıralı ayrıtlarından oluşmaktadır.

Bu algoritma serimde başlangıçtan diğer tüm düğümlere de en kısa yolu vermektedir. Etiket, yolların uzunluğunu verir. Gerçek yol, $m_i + d_{ij} = m_j$ denklemini sağlayan ayrıtlar kümesinden belirlenir.

Mesela; $m_6 = 9$ dur. Dolayısıyla 1 ve 6 düğümleri arasındaki en kısa yolun uzunluğu 9 olup bu yol (1,2) ve (2,6) ayrıtlarını kapsar.

Benzer şekilde $m_3 = 9$ olup 1 ve 3 düğümleri arasındaki en kısa yolun uzunluğunu verir ve sadece (1,3) ayrıtını kapsar.

Algoritmadaki basit bir değişiklikle tüm düğüm çiftleri arasındaki en kısa yolda belirlenebilir. Ancak algoritma uygulanırken çevrimsiz serimlerin özelliğinden dolayı, ele alınan bir düğümden önceki düğümler dikkate alınmaz.

Konu ile ilgili olarak şöyle bir genelleme yapılabilir;

Bir k düğümünden herhangi bir h düğümüne $(h > k)$ olan en kısa yolu bulmak için k dan büyük olan tüm düğümleri kapsayan serim parçası (alt serim) dikkate alınır. Aynı prosedürle bu k düğümü 0 ile etiketlenir ve aynı şekilde diğer adımlara geçilir.

Mesela 3 düğümünden diğer düğümlere olan en kısa yolu bulmaya çalışalım. Bunun için öncelikle 3,4,5,6 ve 7 düğümlerinden oluşan alt serimi oluşturur ve algoritmayı şu şekilde uygularız.

ADIM 1 : $m_3 = 0$

ADIM 2: $m_4 = \min\ (m_3 + d_{34}) = \min\ (0 + 2) = 2$

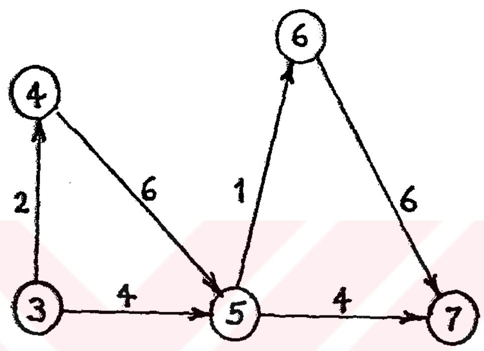
$$m_5 = \min \begin{Bmatrix} m_3 + d_{35} = 0 + 4 = 4 \\ m_4 + d_{45} = 2 + 6 = 8 \end{Bmatrix} = 4$$

$$m_6 = \min \{m_5 + d_{56}\} = \min \ \{ 4 + 1\} \ = 5$$

$$m_7 = \min \begin{Bmatrix} m_5 + d_{57} = 4 + 4 = 8 \\ m_6 + d_{67} = 5 + 6 = 11 \end{Bmatrix} = 8$$

ADIM 3: (3,4), (3,5), (5,6) ve (5,7) ayrıtları

$m_i + d_{ij} = m_j$ denklemini sağlamaktadır.



Şekil-14 Alt serimin oluşturulması

Hesaplamaları aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

3 düğümünden sonraki en kısa yol	Uzaklık	Kapsayan ayrıtlar
Düğüm 4	2	(3,4)
Düğüm 5	4	(3,5)
Düğüm 6	5	(3,5)(5,6)
Düğüm 7	8	(3,5) (5,7)

II.2.b. DİJSKTRA ALGORİTMASI

ADIM 1: Başlangıçta tüm ayrıt ve düğümler etiketsizdir. s kaynak düğümü, t de batak düğümü olmak üzere $d(s) = 0$ ve $d(x) = \infty$ olarak atanır. $(x \neq s)$ Her bir x düğümüne atanan d(x), s düğümünden x düğümüne olan en kısa yolun uzunluğunu vermektedir.

Y ise etiketlenen en son düğümü göstersin. Buna göre etiketlenmiş s düğümüne Y atanır.

ADIM 2: $Y = s$

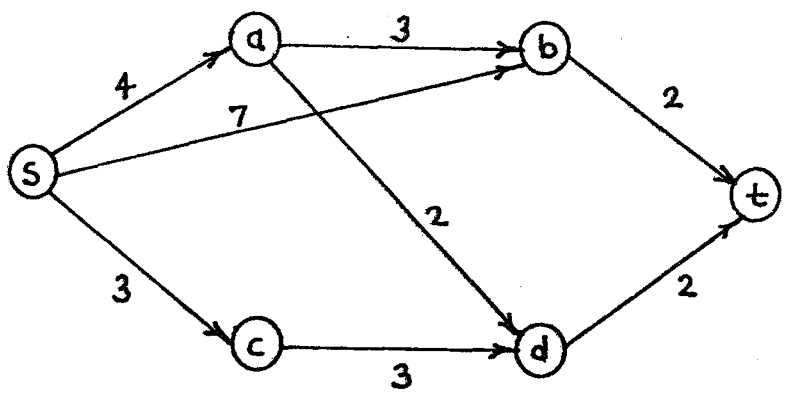
Etiketlenmeyen her bir x düğümü için d(x) aşağıdaki formülasyona göre bulunur.

$$d(x) = \min \{d(x),\ d(Y) + a(Y,X)\}$$

Tüm etiketlenmeyen X düğümleri için $d(x)=\infty$ sonucuna varılırsa, s den diğer etiketlenmemiş düğümlere bir yol olmadığı belirlenir ve algoritma durdurulur. Diğer durumlarda, X düğümü d(x) in en küçük değeri ile etiketlenir. Ve etiketlenen X düğümüne Y atanır.

ADIM 3: t batak düğümü de etiketlenmişse s'den t'ye en kısa yol bulunmuştur. Aksi halde ADIM 2'ye dönülür.

Şimdi şekil 15 deki serimi inceleyelim ve Dijsktra algoritmasıyla s'den t'ye en kısa yolu bulalım.



Şekil-15 Dijsktra algoritmasına ilişkin bir serim örneği

ADIM 1: $d(s) = 0$ ve $d(x) = \infty \quad x \neq s$ için

ADIM 2: $y = s$

$$d(a) = \min \{ d(a), d(s) + a(s,a) \} = \min \{ \infty, 0 + 4 \} = 4$$

$$d(b) = \min \{ d(b), d(s) + a(s,b) \} = \min \{ \infty, 0 + 7 \} = 7$$

$$d(c) = \min \{ d(c), d(s) + a(s,c) \} = \min \{ \infty, 0 + 3 \} = 3$$

$$d(d) = \min \{ d(d), d(s) + a(s,d) \} = \min \{ \infty, 0 + \infty \} = \infty$$

$$d(t) = \min \{ d(t), d(s) + a(s,t) \} = \min \{ \infty, 0 + \infty \} = \infty$$

$$\min \{d(a), d(b), d(c), d(d), d(t)\} = d(c) = 3$$

olduğundan c düğümü etiketlenir ve (s,c) ayrıtıda d(c) ile belirlenir. Bu duruma göre mevcut en kısa yol (s,c) ayrıtını ihtiva etmektedir.

ADIM 3: t dügümü henüz etiketlenmediğinden Adım 2'ye dönülür.

ADIM 2: $y = c$

$$d(a) = \min \{ d(a), d(c) + a(c,a) \} = \min \{ 4, 3 + \infty \} = 4$$

$$d(b) = \min \{ d(b), d(c) + a(c,b) \} = \min \{ 7, 3 + \infty \} = 7$$

$$d(d) = \min \{ d(d), d(c) + a(c,d) \} = \min \{ \infty, 3 + 3 \} = 6$$

$$d(t) = \min \{ d(t), d(c) + a(c,t) \} = \min \{ \infty, 3 + \infty \} = \infty$$

$$\mathrm{Min} \{d(a), d(b), d(d), d(t)\} = \min \{4, 7, 6, \infty\} = 4 = d(a)$$

olduğundan a düğümü etiketlenir ve (s,a) ayrıtıda d(a) ile belirlenir. Buna göre mevcut en kısa yol (s,c) ve (s,a) ayrıtlarını ihtiva etmektedir.

ADIM 3: t düğümü henüz etiketlenmemiştir.
Adım 2'ye dönülür.

ADIM 2: $y = a$

$d(b) = \min \{ d(b), d(a) + a(a,b)\} = \min \{ 7,4 + 3 \} = 7$

$d(d) = \min \{ d(d), d(a) + a(a,d)\} = \min \{ 6,4 + 2 \} = 6$

$d(t) = \min \{ d(t), d(a) + a(a,t)\} = \min \{ \infty,4 + \infty \} = \infty$

$\min \{ d(b), d(d), d(t)\} = \min \{ 7,6,\infty\} = 6 = d(d)$

d düğümüde etiketlenmiştir. Burada (c,d) ve (a,d) ayrıtlarından herhangi birisi seçilebilir. Çünkü her ikisi de aynı uzaklığı vermektedir. Biz (c,d) yi seçelim. Buna göre en kısa yol bu aşamada (s,c) (s,a) ve (c,d) ayrıtlarını kapsamaktadır.

ADIM 3: t düğümü henüz etiketlenmemiştir.

Adım 2'ye dönülür.

ADIM 2: y = d

$d(b) = \min \{ d(b), d(d) + a(d,b)\} = \min \{ 7,6 + \infty\} = 7$

$d(t) = \min \{ d(t), d(d)+ a(d,t)\} = \min \{ \infty,6 + 2\} = 8$

$\min \{ d(b), d(t)\} = \min \{ 7,8\} = 7 = d(b)$ olduğundan b düğümüde etiketlenir ve (s,b) ayrıtı ile belirlenir. En kısa yol bu aşamada (s,c) (s,a) (c,d) ve (s,b) ayrıtlarından oluşmaktadır.

ADIM 3: t düğümü yine etiketlenmemiştir.

Tekrar Adım 2'ye dönülür.

ADIM 2: y = b

$d(t) = \min \{ d(t), d(b) + a(b,t)\} = \min \{ 8,7 + 2\} = 8$

ADIM 3: Böylece t düğümüde etiketlenmiştir. Nihai en kısa yol (s,c) (s,a) (c,d) (s,b) ve (d,t) ayrıtlarından oluşmaktadır.

s den t ye olan en kısa yol

(s,c) (c,d) (d,t)

ayrıtlarını ihtiva eder ve uzunluğu

3 + 3 + 2 = 8 dir.

II.3. ÇEVRİMLİ SERİMLERDE EN KISA YOLUN BULUNMASI

II.3.a. DÜZELTİLMİŞ ARDIŞIK METOD

Bu metod aşağıda formüle edilen operasyona dayanmaktadır

$$d_{ik} = \min (d_{ik} ; d_{ij} + d_{jk})$$

Bu formülasyonun anlamı şudur; Metod, serimdeki bazı orta j düğümleri için $d_{ij} + d_{jk}$ toplamını i ve k düğümleri arasındaki d_{ik} uzaklığıyla karşılaştırır ve bu ikisinden minimum olanını D matrisinde yerine koyar.

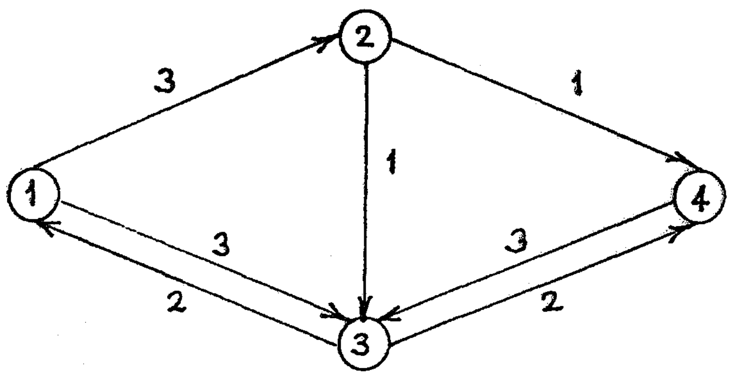
Metodun uygulaması şu şekildedir. j = 1,2, ...,n olarak belirlenir. j nin her değeri için $j = j_o$ yazılır, her bir d_{ik} girişi için $i \neq j_o \neq k$ ve $k \neq j_o \neq i$ şartına bağlı olarak işlemlere devam edilir. Böylece matris, en kısa uzaklık matrisi (D) olarak oluşturulur.

D en kısa uzaklık matrisi oluşturulduktan sonra en kısa yolları (en kısa uzaklığı veren yolları) belirleyen yol matrisi de aşağıdaki formülasyona göre oluşturulur.

$$r_{ik} = \begin{cases} r_{ik} \; ; & d_{ik} \leq d_{ij} + d_{jk} \text{ ise} \\ r_{ij} \; ; & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$R = [r_{ik}]$ matrisi yol matrisidir. Başlangıçtaki R matrisi, 0 olmayan her bir d_{ik} girişi için $r_{ik} = k$ şeklinde alınarak belirlenir.

Şimdi şekil 16 da verilen örnek serimi dikkate alalım ve metodun uygulamasını görelim



Şekil-16 Düzeltilmiş ardışık metoda ilişkin bir serim örneği

Öncelikle başlangıç D ve R matrislerini oluşturalım

$$D = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & \infty \\ \infty & 0 & 1 & 1 \\ 2 & \infty & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & - \\ - & - & 3 & 4 \\ 1 & - & - & 4 \\ - & - & 3 & - \end{bmatrix} \end{array}$$

D matrisindeki ∞ simgesi mevcut olmayan yolları göstermektedir.

Şimdi $j_o = 1$ için ; $i \neq j_o \neq k$ ve $k \neq j_o \neq i$ şartına bağlı olarak $d_{ik} = \min (d_{ik} \; ; \; d_{ij_o} + d_{j_o k})$ denklemimizi oluşturup her bir d_{ik} girişini araştıralım.

$j_o = 1$ için ; $i \neq 1 \neq k$ ve $k \neq 1 \neq i$ şartı ile

$d_{23} = \min (d_{23} \; ; \; d_{21} + d_{13}) = \min (1 \; ; \; \infty + 3) = 1$

$r_{23} = 3$

$d_{24} = \min (d_{24}; d_{21} + d_{14}) = \min (1; \infty + \infty) = 1$

$r_{24} = 4$

$d_{32} = \min (d_{32}; d_{31} + d_{12}) = \min (\infty ; 2 + 3) = 5$

$r_{32} = r_{31} = 1$

$d_{34} = \min (d_{34} ; d_{31} + d_{14}) = \min (2 ; 2 + \infty) = 2$

$r_{34} = 4$

$d_{42} = \min (d_{42} ; d_{41} + d_{12}) = \min (\infty, \infty + 3) = \infty$

$r_{42} = -$

$d_{43} = \min (d_{43} ; d_{41} + d_{13}) = \min (3 ; \infty + 3) = 3$

$r_{43} = 3$

Buna göre D ve R matrislerini tekrar oluşturalım

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & \infty \\ \infty & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & - \\ - & - & 3 & 4 \\ 1 & 1 & - & 4 \\ - & - & 3 & - \end{bmatrix}$$

Burada önemli bir nokta vardır. O da, d_{ij_o} veya $d_{j_ok}=\infty$ olduğunda d_{ik}'nın değiştirilemeyeceğidir. Yani bir önceki aşamadaki d_{ik} değeri aynı kalacaktır. Onun için $j_o=1$ iken d_{23}, d_{24}, d_{34}, d_{42} ve d_{43} ün değerini aramaya gerek yoktur. Sadece d_{32} değişikliğe adaydır.

$j_o = 2$ için d_{21} ve $d_{42} = \infty$ olduğundan d_{31}, d_{41} ve d_{43} değiştirilemez. Bu nedenle biz sadece d_{13}, d_{14} ve d_{34} değerlerini arayacağız.

$$d_{13} = \min (d_{13} \; ; \; d_{12} + d_{23}) = \min (3 \; ; \; 3 + 1) = 3$$

$$r_{13} = 3$$

$$d_{14} = \min (d_{14} \; ; \; d_{12} + d_{24}) = \min (\infty \; ; \; 3 + 1) = 4$$

$$r_{14} = r_{12} = 2$$

$$d_{34} = \min (d_{34} \; ; \; d_{32} + d_{24}) = \min (2 \; ; \; 5 + 1) = 2$$

$$r_{34} = 4$$

Şimdi D ve R matrislerini yeniden oluşturalım.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 4 \\ \infty & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 2 \\ - & - & 3 & 4 \\ 1 & 1 & - & 4 \\ - & - & 3 & - \end{bmatrix}$$

$j_o = 3$ için

$$d_{12} = \min (d_{12} \; ; \; d_{13} + d_{32}) = \min (3, \; 3 + 5) = 3$$

$$r_{12} = 2$$

$$d_{14} = \min (d_{14} \; ; \; d_{13} + d_{34}) = \min (4 \; ; \; 3 + 2) = 4$$

$$r_{14} = 2$$

$$d_{21} = \min (d_{21} \; ; \; d_{23} + d_{31}) = \min (\infty ; \; 1 + 2) = 3$$

$$r_{21} = r_{23} = 3$$

$$d_{24} = \min (d_{24} \; ; \; d_{23} + d_{34}) = \min (1 \; ; \; 1 + 2) = 1$$

$$r_{24} = 4$$

$$d_{41} = \min (d_{41} \; ; \; d_{43} + d_{31}) = \min (\infty \; ; \; 3 + 2) = 5$$

$$r_{41} = r_{43} = 3$$

$$d_{42} = \min (d_{42} \; ; \; d_{43} + d_{32}) = \min (\infty ; \; 3 + 5) = 8$$

$$r_{42} = r_{43} = 3$$

Böylece ; D ve R matrisleri

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 5 & 8 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 2 \\ 3 & - & 3 & 4 \\ 1 & 1 & - & 4 \\ 3 & 3 & 3 & - \end{bmatrix}$$

Son olarak ;

$j_o = 4$ için

$d_{12} = \min (d_{12} \; ; \; d_{14} + d_{42}) = \min (3 \; ; \; 4 + 8) = 3$

$r_{12} = 2$

$d_{13} = \min (d_{13} \; ; \; d_{14} + d_{43}) = \min (3 \; ; \; 4 + 3) = 3$

$r_{13} = 3$

$d_{21} = \min (d_{21} \; ; \; d_{24} + d_{41}) = \min (3 \; ; \; 1 + 5) = 3$

$r_{21} = 3$

$d_{23} = \min (d_{23} \; ; \; d_{24} + d_{43}) = \min (1 ; \; 1 + 3) = 1$

$r_{23} = 3$

$d_{31} = \min (d_{31} \; ; \; d_{34} + d_{41}) = \min (2 \; ; \; 2 + 5) = 2$

$r_{31} = 1$

$d_{32} = \min (d_{32} \; ; \; d_{34} + d_{42}) = \min (5 \; ; \; 2 + 8) = 5$

$r_{32} = 1$

Böylece D ve R matrislerinin son şekli aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 5 & 8 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} - & 2 & 3 & 2 \\ 3 & - & 3 & 4 \\ 1 & 1 & - & 4 \\ 3 & 3 & 3 & - \end{bmatrix}$$

Şimdi D ve R matrislerinin izahını yapalım.

D giriş matrisi iki dügüm arasındaki minimum uzaklığı verirken R yol matrisi de bu minimum uzaklığı sağlayan yolu belirlemektedir.

Mesela; 4 düğümünden 2 düğümüne olan en kısa uzaklığı ve bu en kısa uzaklığı veren yolu bulalım. D matrisinde $d_{42} = 8$ dir. Bu bize 4 düğümünden 2 düğümüne olan en kısa uzaklığın 8 birim olduğunu gösterir. Bu minimum uzaklığı veren yolu da R matrisi yardımıyla bulabiliriz. $r_{42} = 3$, $r_{32} = 1$, $r_{12} = 2$ dir. Böylece 4 den 2'ye giden en kısa yolun ;

şeklinde olduğunu söyleyebiliriz.

Görüldüğü gibi düzeltilmiş ardışık metod (Revised Cascade Method) bir serimde tüm düğüm çiftleri arasındaki en kısa yolların bulunmasında oldukça kullanışlı ve randıman oranı yüksek bir metoddur. Metod aynı zamanda serim içinde kaynaktan batağa veya kaynaktan diğer düğümlere olan en kısa yolu bulmada da rahatlıkla kullanılabilir.

II.3.b. FLOYD ALGORİTMASI

ADIM: 1,2, ..., N düğümlü bir serimi ele alalım.

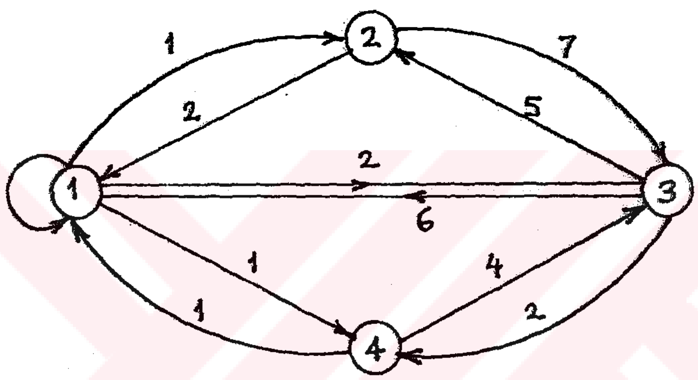
D^o matrisi en kısa uzaklık matrisi olup, matrisin ij elemanı i den j ye giden yolun uzaklığını vermektedir. Eger i'den J ye herhangi bir yol yoksa $d^o_{ij} = \infty$ yazılır. Matrisin diagonal elemanları 0 dır. ($d_{ii}^o = 0$)

ADIM 2: $m = 1, 2, \ldots N$ için D^m matrisinin elemanları aşağıdaki formülasyona göre belirlenir.

$$d_{ij}^{m} = \min \left\{ d_{im}^{m-1} + d_{mj}^{m-1},\ d_{ij}^{m-1} \right\}$$

İşlemler sonrasında elde edilen D^N matrisi en kısa yolun uzaklığını verir.

Şimdi Şekil 17'deki serim için algoritmanın uygulamasını izleyelim.



Şekil-17 Floyd algoritmasına ilişkin bir serim örneği

$$D^{0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 7 & \infty \\ 6 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & \infty & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

D^1 matrisinin elemanları ve bunlara tekabül eden yollar aşağıdaki gibi bulunur.

$d_{ij}^{1} = \min\{ d_{i1}^{o} + d_{1j}^{o},\ d_{ij}^{o} \}$	Tekabül eden yol
$d_{11}^{1} = d_{11}^{o} = 0$	
$d_{12}^{1} = d_{12}^{o} = 1$	(1,2)
$d_{13}^{1} = d_{13}^{o} = 2$	(1,3)
$d_{14}^{1} = d_{14}^{o} = 1$	(1,4)
$d_{21}^{1} = d_{21}^{o} = 2$	(2,1)
$d_{22}^{1} = 0$	
$d_{23}^{1} = \min\{d_{21}^{o} + d_{13}^{o},\ d_{23}^{o}\} = \min\{2 + 2, 7\} = 4$	(2,1)(1,3)
$d_{24}^{1} = \min\{d_{21}^{o} + d_{14}^{o},\ d_{24}^{o}\} = \min\{2 + 1, \infty\} = 3$	(2,1)(1,4)
$d_{31}^{1} = d_{31}^{o} = 6$	(3,1)
$d_{32}^{1} = \min\{d_{31}^{o} + d_{12}^{o}, d_{32}^{o}\} = \min\{6 + 1, 5\} = 5$	(3,2)
$d_{33}^{1} = 0$	
$d_{34}^{1} = \min\{d_{31}^{o} + d_{14}^{o},\ d_{34}^{o}\} = \min\{6 + 1, 2\} = 2$	(3,4)
$d_{41}^{1} = d_{41}^{o} = 1$	(4,1)
$d_{42}^{1} = \min\{d_{41}^{o} + d_{12}^{o},\ d_{42}^{o}\} = \min\{1 + 1, \infty\} = 2$	(4,1)(1,2)
$d_{43}^{1} = \min\{d_{41}^{o} + d_{13}^{o},\ d_{43}^{o}\} = \min\{1 + 2, 4\} = 3$	(4,1)(1,3)
$d_{44}^{1} = 0$	

Böylelikle ;

$$D^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde oluşturulur.

Benzer hesaplamalarla D^2, D^3 ve D^4 matrisleri ile bunlara tekabül eden en kısa yollar aşağıdaki gibi tesbit edilmiştir.

$$D^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

D^2 için en kısa yollar

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} \text{—} & (1,2) & (1,3 & (1,4) \\ \hline (2,1) & \text{—} & (2,1)(1,3) & (2,1)(1,4) \\ \hline (3,1) & (3,2) & \text{—} & (3,4) \\ \hline (4,1) & (4,1)(1,2) & (4,1)(1,3) & \text{—} \end{array}\right]$$

$$D^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

D^3 için en kısa yollar

—	(1,2)	(1,3)	(1,4)
(2,1)	—	(2,1)(1,3)	(2,1)(1,4)
(3,1)	(3,2)	—	(3,4)
(4,1)	(4,1)(1,2)	(4,1)(1,3)	—

$$D^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

D^4 için en kısa yollar

—	(1,2)	(1,3)	(1,4)
(2,1)	—	(2,1)(1,3)	(2,1)(1,4)
(3,4)(4,1)	(3,4)(4,1)(1,2)	—	(3,4)
(4,1)	(4,1)(1,2)	(4,1)(1,3)	—

II.4. SERİMDE k INCI EN KISA YOLUN BULUNMASI

Bir serimde düğümler arasında k ıncı en kısa yolun bulunması enteresan ve önemli bir kavramdır. Mesela; bir en kısa yol kullanımı mümkün olmayabilir. Bu durumda bazı yolların ikinci veya üçüncü en kısa yol gibi kabul edilmesi konusu ortaya çıkar. Duyarlılık analizi de bu yaklaşım için önem taşımaktadır. Mesela; optimum en kısa yoldan sapmanın oluşturduğu zararlada ilgilenebiliriz (14).

Bir serimde k en kısa yolun bulunması, serimde iki düğüm arasındaki en kısa yolun bulunması işlemindeki küçük bir değişiklikle ele alınabilir.

İşlemin genel adımı şu şekildedir. Her bir j düğümü için j ye bağlı olan i düğümler setini gözönünde bulunduralım. K ıncı en kısa uzaklık, aşağıdaki eşitlik kullanılarak bulunur.

$$m_j^{(k)} = \min_k \; (m_i^{(r)} + d_{ij}), \quad 1 \leqslant r \leqslant k, \quad k = 1, 2, \ldots n$$

j ye bağlı
tüm i'ler için

$m_j^{(k)}$ = j düğümüne olan k ıncı en kısa yolu göstermektedir.

Şimdi şekil 13 de verilen serim için 3 en kısa yolu belirleyelim.

1 düğümü için $m_1^{(1)} = 0$ olduğundan 1 düğümünü 0 zamanlı kabul edelim. $m_1^{(2)}$ ve $m_1^{(3)}$ de sadece bir mümkün zaman olduğundan tanımsızdır.

Düğüm 2 : $m_2^{(1)} = 6$ $m_2^{(2)}$ ve $m_2^{(3)}$ tanımsız

Düğüm 3 : $m_3^{(1)} = 9$, $m_3^{(2)}$ ve $m_3^{(3)}$ tanımsız

Düğüm 4 : $m_4^{(1)} = 3$, $m_4^{(2)} = 10$, $m_4^{(3)} = 11$

Düğüm 5 : $m_5^{(1)} = 9$, $m_5^{(2)} = 13$, $m_5^{(3)} = 16$

Düğüm 6 : $m_6^{(1)} = 9$, $m_6^{(2)} = 10$, $m_6^{(3)} = 14$

Düğüm 7 : $m_7^{(1)} = 13$, $m_7^{(2)} = 15$, $m_7^{(3)} = 16$

2,5 ve 6 düğümleriyle bağlantılı 7 düğümünü gözönüne alarak hesaplamaları yaparsak;

$$m_7^{(1)} = \min_1 \; (m_2^{(1)} + d_{27} \; ; \; m_5^{(1)} + d_{57} \; ; \; m_6^{(1)} + d_{67})$$

$$= \min_1 \; (6 + 10, \; 9 + 4, \; 9 + 6)$$

$$= \min_1 \; (16, 13, 15) = 13$$

$$m_7^{(2)} = \min_2 \; (m_2^{(1)} + d_{27} \; ; \; m_2^{(2)} + d_{27} \; ; \; m_5^{(1)} + d_{57} ;$$

$$m_6^{(1)} + d_{67} \; ; \; m_6^{(2)} + d_{67})$$

$$= \min_2 (6 + 10 \; \text{tanımsız}, \; 9 + 4, \; 13 + 4, \; 9 + 6, \; 10 + 6)$$

$$= \min_2 \; (16, \; \text{tanımsız}, \; 13, 17, 15, 16) = 15$$

$$m_7^{(3)} = \min_3 \; (m_2^{(1)} + d_{27} ; \; m_2^{(2)} + d_{27} \; ; \; m_2^{(3)} + d_{27} \; ;$$

$$m_5^{(1)} + d_{57} \; ; \; m_5^{(2)} + d_{57} \; ; \; m_5^{(3)} + d_{57} \; ;$$

$$m_6^{(1)} + d_{67} \; ; \; m_6^{(2)} + d_{67} \; ; \; m_6^{(3)} + d_{67})$$

$$= \min_3 \; (6 + 10, \; \text{tanımsız}, \; \text{tanımsız}, \; 9 + 4, \; 13 + 4,$$

$$16 + 4, \; 9 + 6, \; 10 + 6, \; 14 + 6)$$

$$= \min_3 \; (16, \; \text{tanımsız}, \; \text{tanımsız}, \; 13, 17, 20, 15, 16, 20)$$

$$= 16$$

Böylece 7 düğümüne olan en kısa üç yolu bulmuş olduk.

Buna göre 7 düğümüne birinci en kısa yol 13 birim ikinci en kısa yol 15 birim, üçüncü en kısa yol 16 birim uzaklıktadır.

İşlemlerdeki $\min_1$, $\min_2$, ..., $\min_k$ notasyonları birinci, ikinci, ..., k ıncı en kısa yolları göstermektedir.

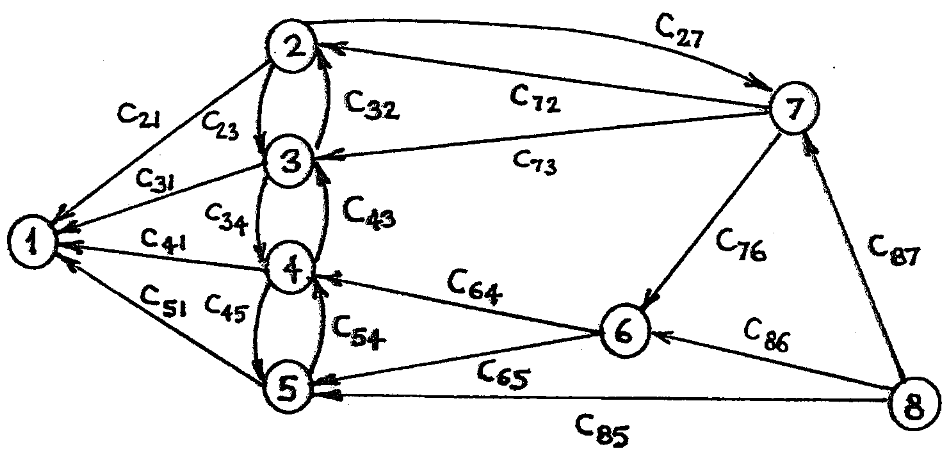
II.5. EN KISA VE EN UZUN YOL PROBLEMLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİ

En uzun yol problemlerinde iki temel yaklaşım vardır. Birinci yaklaşımda, daha önce incelemiş olduğumuz en kısa yol algoritmalarındaki tüm minimum işlemleri maksimum işlemleriyle değiştirilir. Böylece algoritmanın uygulanması sonucu iki düğüm arasındaki en uzun yol bulunmuş olacaktır.

İkinci yaklaşımda ise, serimin ayrıtları üzerindeki değerler negatif yapılır ve en kısa yol algoritmaları uygulanır. Buna göre algoritmalar değiştirilmiş olan serimin en kısa (en negatif) yollarını bulacaktır. Fakat bu değişim orijinal serimde en uzun yol olarak tersten ele alınır.

Bu yaklaşımlar aktivite serimlerinin (PERT-CPM) analizinde kullanılmaktadır.

II.6. EN KISA YOL ANALİZLERİ İLE DOĞRUSAL PROGRAMLAMA ARASINDAKİ İLİŞKİ



Şekil-18. Bir en kısa yol modeli örneği

Şekil 18 deki serimi ele alalım ve problemin bir orijin noktasından (kaynaktan) bir varış noktasına (batağa) en iyi yolun bulunması olduğunu kabul edelim.

Öte yandan 8 düğümünü kaynak, 1 düğümünü de batak olarak belirledikten sonra, 8 düğümünde 1 birim değerlendirilebilir bir stok olduğunu ve bu miktarında 1 düğümünden talep edildiğini varsayalım. Böylece problemi bilinen bir aktarma problemi olarak düşünmek mümkün olacaktır. Serimde, kaynak ve batak düğümleri dışındaki diğer tüm düğümlerde birer aktarma noktası olarak işlem görecektir.

Anlatılanları bir tablo halinde göstermek istersek;

Tablo-6 En kısa yol modelinin tablo gösterimi

	7	6	5	4	3	2	1 (Batak)	
(Kaynak) 8	C_{87}	C_{86}	C_{85}					1
7	0	C_{76}			C_{73}	C_{72}		1
6	0	0	C_{65}	C_{64}				1
5			0	C_{54}			C_{51}	1
4			C_{45}	0	C_{43}		C_{41}	1
3				C_{34}	0	C_{32}	C_{31}	1
2	C_{27}				C_{23}	0	C_{21}	1
	1	1	1	1	1	1	1	

Görüldüğü gibi tabloda alt diagonal elemanların Cij değerleri sıfırdır.

Buna göre bir en kısa yol probleminin matematiksel gösterimi;

Amaç fonksiyonu :

MİNİMİZE $\sum \sum C_{ij} X_{ij}$
serimdeki
tüm i ve j
ler için

Kısıtlayıcılar :

$$\sum_j X_{kj} - \sum_i X_{ik} = \begin{cases} 1, & k = s \text{ (kaynak) için} \\ -1, & k = r \text{ (batak) için} \\ 0, & \text{diğer } k\text{'lar için} \end{cases}$$

$X_{ij} \geqslant 0$, serimdeki tüm i ve j ler için

Modeli açık olarak yazacak olursak ;

Amaç fonk :

$$\text{Min } Z \quad C_{87}X_{87} + C_{86}X_{86} + C_{85}X_{85} + C_{72}X_{72} + C_{73}X_{73}$$
$$C_{76}X_{76} + C_{65}X_{65} + C_{64}X_{64} + C_{54}X_{54} + C_{51}X_{51}$$
$$C_{41}X_{41} + C_{43}X_{43} + C_{45}X_{45} + C_{34}X_{34} + C_{32}X_{32}$$
$$C_{31}X_{31} + C_{27}X_{27} + C_{23}X_{23} + C_{21}X_{21}$$

Kısıtlayıcılar :

$X_{87} + X_{86} + X_{85} = 1$ 8 düğümü

$X_{72} + X_{73} + X_{76} - X_{87} - X_{27} = 0$ 7 düğümü

$X_{65} + X_{64} - X_{76} - X_{86} = 0$ 6 düğümü

$X_{54} + X_{51} - X_{65} - X_{45} - X_{85} = 0$ 5 düğümü

$$X_{41} + X_{43} + X_{45} - X_{34} - X_{64} = 0 \qquad \text{4 düğümü}$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{34} - X_{73} - X_{23} - X_{43} = 0 \qquad \text{3 düğümü}$$

$$X_{21} + X_{23} + X_{27} - X_{72} - X_{32} = 0 \qquad \text{2 düğümü}$$

$$-X_{21} - X_{31} - X_{41} - X_{51} = -1 \qquad \text{1 düğümü}$$

Tüm X_{ij}'ler ≥ 0

Görüldüğü gibi her bir düğüm için bir eşitlik, her bir ayrıt için de bir değişken karşılık gelmektedir.

II.6.a. GENEL BİR SERİMDE DOĞRUSAL PROGRAMLAMA İLE İLİŞKİLİ EN KISA YOL ALGORİTMASI

S kaynak düğümü ile başlayan ve r batak düğümü ile sona eren bir serimde bulunmak istenen en kısa yol aşağıda gösterilen dual lineer programlama modeli ile ilişkilidir.

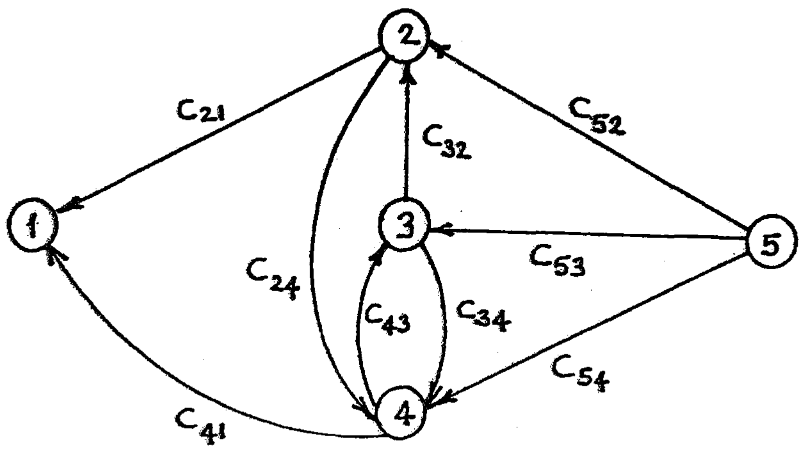
Amaç fonksiyonu :

MAKSİMİZE $\quad - Y_r + Y_s$

Kısıtlayıcılar :

$Y_i - Y_j \leq C_{ij}$, serimdeki tüm i ve j ler için

Her bir Y_k kısıtsızdır.



Şekil-19 Bir en kısa yol serimi

Şimdi 5 numaralı kaynak düğümü ve 1 numaralı batak düğümü ile şekil 19 da verilen serimi ele alalım ve kaynaktan batağa en kısa yolu araştıralım.

Problem: için öncelikle lineer programlama teknoloji tablosunu (çakışım matrisini) oluşturalım.

Tablo-7 En kısa yol problemi için teknoloji tablosu

		TAŞIYICI AKTİVİTELER (AYRITLAR)									
		X_{54}	X_{53}	X_{52}	X_{43}	X_{41}	X_{34}	X_{32}	X_{24}	X_{21}	
DÜĞÜMLER	5	1	1	1							= 1
	4	-1			1	1	-1		-1		= 0
	3		-1		-1		1	1			= 0
	2			-1				-1	1	1	= 0
	1					-1				-1	=-1
		C_{54}	C_{53}	C_{52}	C_{43}	C_{41}	C_{34}	C_{32}	C_{24}	C_{21}	MİNİMİZE

Y_k, k düğümü ile ilişkili dual değişkendir. Bu sebeple örnek, bir dual model mantığı içinde düşünülürse;

Amaç fonksiyonu :

MAKSİMİZE $-Y_1 + Y_5$

Kısıtlayıcılar

$Y_5 - Y_4 \leq C_{54}$ $\quad Y_5 - Y_3 \leq C_{53}$ $\quad Y_5 - Y_2 \leq C_{52}$

$Y_4 - Y_3 \leq C_{43}$ $\quad Y_4 - Y_1 \leq C_{41}$ $\quad Y_3 - Y_4 \leq C_{34}$

$Y_3 - Y_2 \leq C_{32}$ $\quad Y_2 - Y_4 \leq C_{24}$ $\quad Y_2 - Y_1 \leq C_{21}$

Her bir Y_k kısıtsızdır.

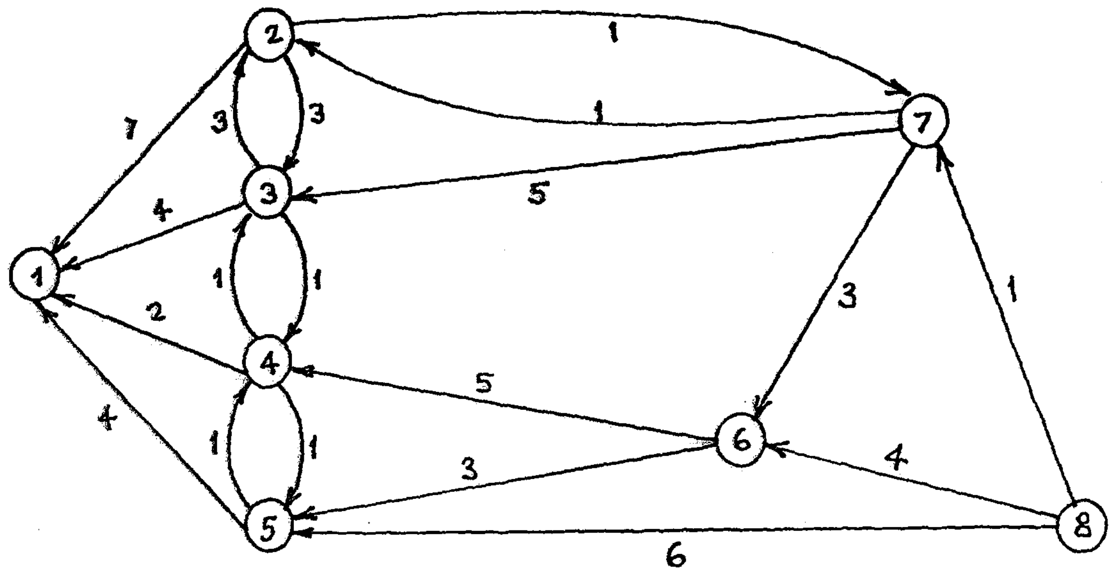
Şimdi, en kısa yol probleminin doğrusal programlama ile olan bu ilişkisinden yararlanarak verilen bir serimde düğümler arasındaki en kısa yolun nasıl bulu nacağını inceleyelim.

Algoritma : Y_k, her bir k düğümü ile ilişki dual değişken olmak üzere algoritmanın çözüm prosedürü şu şekilde olacaktır.

i) $Y_r = 0$ ve diğer tüm $Y_k = \infty$ olarak etiketlenir. Buradaki r batak düğümünü göstermektedir.

ii) Bir (i,j) ayrıtı için $Y_i > C_{ij} + Y_j$ şartı sağlanırsa Y_i'ye $C_{ij} + Y_j$ toplam değeri atanır. Diğer durumlarda algoritma durdurulur.

Böylece Y_k nın değeri tüm ayrıtlar için $Y_i - Y_j \leq C_{ij}$ şartı sağlanana kadar gitgide azalacaktır (16).



Şekil-20 Algoritmanın uygulanışına ilişkin bir serim

1 düğümünü 0 ile diğer tüm düğümleride ∞ ile etiketleyelim ve tüm ayrıtlar için algoritmayı uygulayalım.

$C_{41} + Y_1 = 2 + 0 < \infty = Y_4$, $Y_4 = 2$

$C_{31} + Y_1 = 4 + 0 < \infty = Y_3$, $Y_3 = 4$

$C_{21} + Y_1 = 7 + 0 < \infty = Y_2$, $Y_2 = 7$

$C_{51} + Y_1 = 4 + 0 < \infty = Y_5$, $Y_5 = 4$

$C_{23} + Y_3 = 3 + 4 < 7 = Y_2$, $Y_2 = 7$

$C_{32} + Y_2 = 3 + 7 < 4 = Y_3$, $Y_3 = 4$

$C_{34} + Y_4 = 1 + 2 < 4 = Y_3$, $Y_3 = 3$

$C_{23} + Y_3 = 3 + 3 < 7 = Y_2$, $Y_2 = 6$

$C_{43} + Y_3 = 1 + 3 < 2 = Y_4$, $Y_4 = 2$

$C_{45} + Y_5 = 1 + 4 < 2 = Y_4$, $Y_4 = 2$

$C_{54} + Y_4 = 1 + 2 < 4 = Y_5$, $Y_5 = 3$

$C_{27} + Y_7 = 1 + \infty < 6 = Y_2$, $Y_2 = 6$

$C_{72} + Y_2 = 1 + 6 < \infty = Y_7$, $Y_7 = 7$

$C_{73} + Y_3 = 5 + 3 < 7 = Y_7$, $Y_7 = 7$

$C_{64} + Y_4 = 5 + 2 < \infty = Y_6$, $Y_6 = 7$

$C_{65} + Y_5 = 3 + 3 < 7 = Y_6$, $Y_6 = 6$

$C_{76} + Y_6 = 3 + 6 < 7 = Y_7$, $Y_7 = 7$

$C_{86} + Y_6 = 4 + 6 < \infty = Y_8$, $Y_8 = 10$

$C_{85} + Y_5 = 6 + 3 < 10 = Y_8$, $Y_8 = 9$

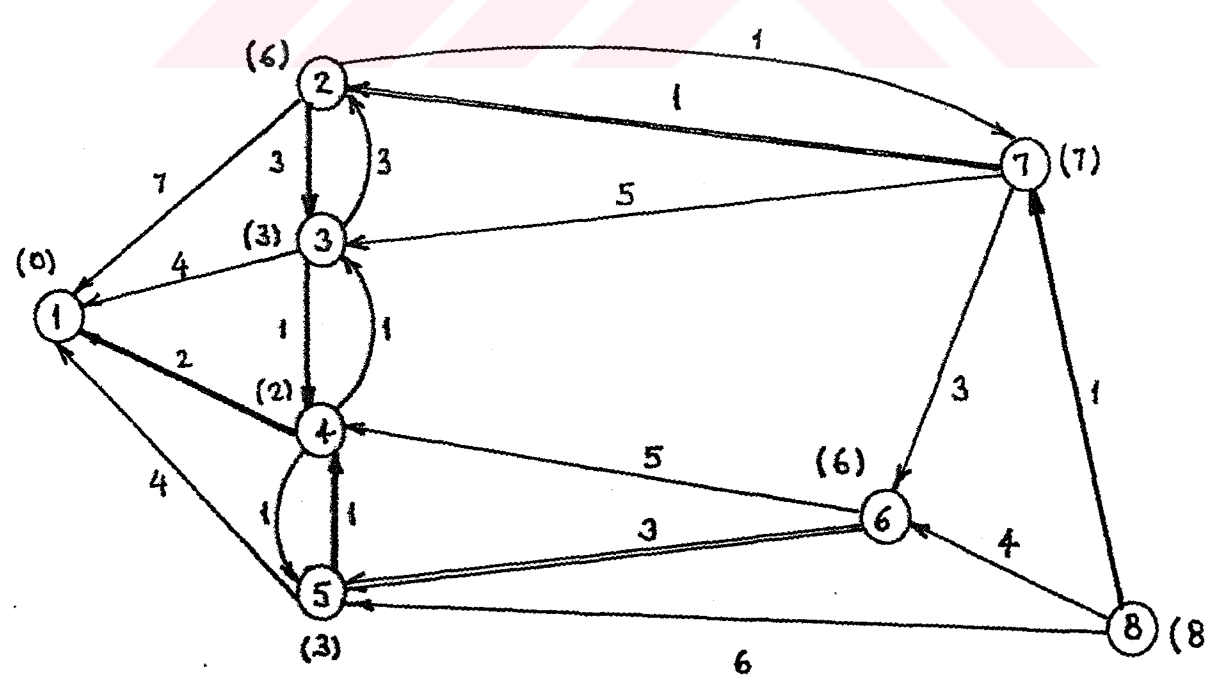
$C_{87} + Y_7 = 1 + 7 < 9 = Y_8$, $Y_8 = 8$

Böylece yukarıdaki hesaplamalarla her bir Y_k'nın yeni değerini (minimum değerini) bulmuş olduk.

Buna göre:

$Y_1 = 0$	$Y_2 = 6$	$Y_3 = 3$	$Y_4 = 2$
$Y_5 = 3$	$Y_6 = 6$	$Y_7 = 7$	$Y_8 = 8$

Bu bulunan Y_k değerleri $Y_i - Y_j \leqslant C_{ij}$ şartını sağladıklarından hesaplamalara son verilir



Şekil-21 Serimde batak düğümüne olan en kısa yollar

Şekil 21 de her bir düğümün Y_k değerleri yanlarında gösterilmiştir. Her düğüme ilişkin Y_k değeri söz konusu düğümün 1 düğümüne olan en kısa uzaklığını, kalın çizgilerde bu uzaklığı veren yolu (en kısa yolu) göstermektedir.

Mesela; $Y_8 = 8$ değeri 8 düğümünden 1 düğümüne olan en kısa uzaklığı temsil etmektedir. Bu uzaklığı sağlayan yol ise (8,7) (7,2) (2,3) (3,4) ve (4,1) ayrıtlar dizisinden oluşmaktadır. Gerçekten de bu yolun uzunluğu $C_{87} + C_{72} + C_{23} + C_{34} + C_{41} = 8$ dir.

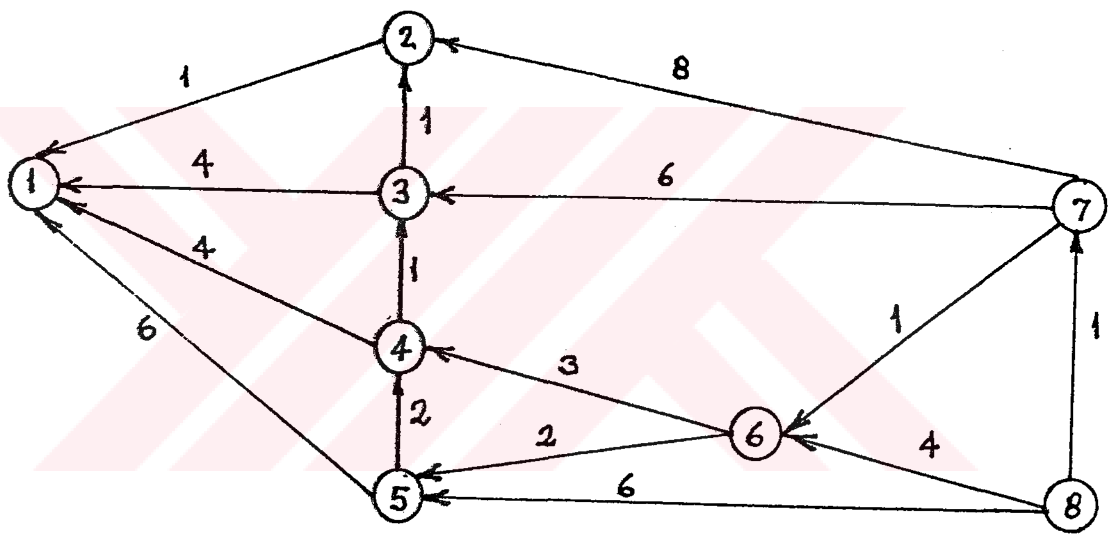
Eğer örneğimizi bir lineer programlama modeli çerçevesinde düşünecek olursak bununla ilişkili mümkün çözüm; $X_{87} = X_{72} = X_{23} = X_{34} = X_{41} = 1$ ve diğer tüm $X_{ij} = 0$ şeklinde olmalıdır. Bu durumda amaç fonksiyonunun değeri de 8 olacaktır.

Daha önce bulunan Y_k değerleri de primal modele tekabül eden dual modelin değişkenleri olduğundan dual modelin amaç fonksiyon değeride 8 dir. $(-Y_1 + Y_8 = 0 + 8 = 8)$ Dolayısıyle bulunan yol dual metoda göre de optimaldir.

II.6.b. ÇEVRİMSİZ BİR SERİMDE DOĞRUSAL PROGRAMLAMA İLE İLİŞKİLİ EN KISA YOL ALGORİTMASI

Çevrimsiz bir serimde en kısa yol, Y_k dual değişkenler vasıtasıyla kolaylıkla bulunabilir.

İlk adımda, serim $i > j$ olmak üzere (i,j) şeklinde bir ayrıt ihtiva ediyorsa düğümler 1 den p'ye kadar numaralandırılır. Bu işlem şu şekilde olacaktır. Batak veya terminal düğümü 1 düğümü olarak belirlenir. Ki bu 1 düğümü sadece kendisine yönelmiş ayrıtları (inward-pointing arcs) ihtiva eder. Bu düğüm ve onun tüm ayrıtları kontrol edilir ve bu ayrıtlar daha sonraki etiketleme işlemine dahil edilmez. Daha sonra aynı şekilde 2 düğümü belirlenir. Bu düğümün de tüm ayrıtları kontrol edilir ve daha sonraki etiketleme işlemine dahil edilmez. Benzer şekilde aynı işleme tüm düğümler numaralanana kadar devam edilir.



Şekil-22 Algoritmaya ilişkin bir çevrimsiz serim örneği

Şimdi şekil 22. deki serimi ele alalım ve algoritmanın uygulanışını izleyelim.

$Y_1 = 0$ (Batak)

$Y_i = \text{Minimum } (C_{ij} + Y_j)$, $i = 2,3, \ldots, p$

serimdeki

(i,j) ler

Buna göre;

$Y_1 = 0$

$Y_2 \equiv \min (C_{21} + Y_1) = (1 + 0) = 1$

$Y_3 = \min (C_{31} + Y_1 , C_{32} + Y_2) = \min (4 + 0, 1 + 1) = 2$

$Y_4 = \min (C_{41} + Y_1 , C_{43} + Y_3) = \min (4 + 0, 1 + 2) = 3$

$Y_5 = \min (C_{51} + Y_1 , C_{54} + Y_4) = \min (6 + 0, 2 + 3) = 5$

$Y_6 = \min (C_{64} + Y_4 , C_{65} + Y_5) = \min (3 + 3, 2 + 5) = 6$

$Y_7 = \min (C_{72} + Y_2 , C_{73} + Y_3, C_{76} + Y_6) =$

$\min (8 + 1, 6 + 2, 1 + 6) = 7$

$Y_8 = \min (C_{85} + Y_5 , C_{86} + Y_6, C_{87} + Y_7) =$

$\min (6 + 5, 4 + 6, 1 + 7) = 8$

Bu bulunan Y_k değerleri, her bir k düğümünün batak düğümüne olan en kısa mesafesini göstermektedir.

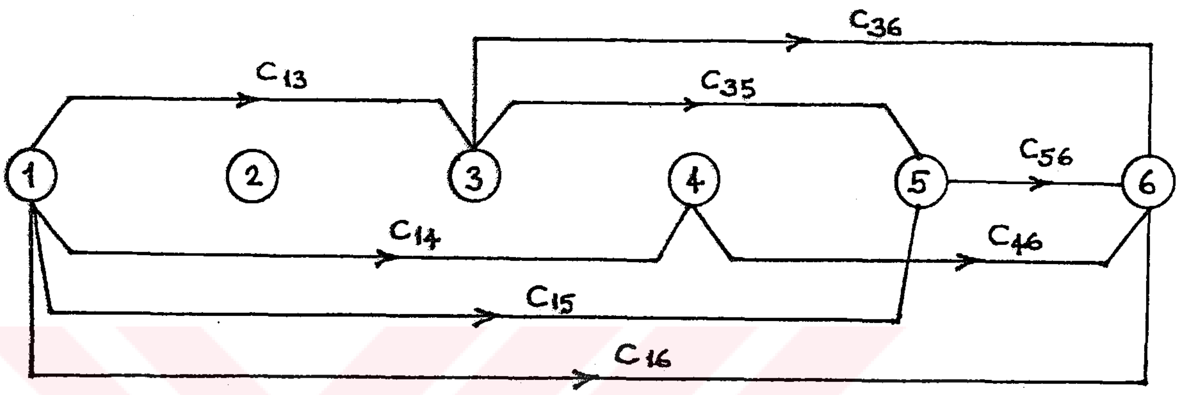
II.7. EN KISA YOL ANALİZLERİNİN BAZI UYGULAMA ALANLARI

II.7.a. EKİPMAN YENİLEME MODELİ

Gelecek n yıl için yenileme politikası oluşturacak olan bir şirket düşünelim şirket şu anda (1 yılda) bir miktar ekipman alabilir ve j yılına kadar muhafaza eder. ($j \leq n$) j yılında yeni bir ekipman alır ve k yılına kadar muhafaza eder. Ve bu işlem n yıla uzanacak kadar devam eder.

Bu olayı şekil 23. de görüldüğü gibi bir serim şeklinde göstermek mümkündür. Serimin ayrıtları üzerinde görülen C_{ij} değerleri yenileme maliyetlerini ifade etmektedir.

Dolayısıyla söz konusu ekipmanın i. yıldaki satın alımı ve j. yıldaki satımı ile ilgili bir maliyetin hesaplanması gerekecektir. Bu maliyet; satın alma fiyatı, kullanım ve bakım maliyetleri ve hurda değerini ihtiva etmektedir.



Şekil-23 Ekipman yenileme modeli

Serim, çevrimsiz bir serim olup, ekipman yenileme (Equipment replacement) durumlarını göstermektedir.

Serimin 1 ve 6 düğümleri arasındaki en kısa yol, minimum maliyetli yenileme politikasını verecektir. Sözgelimi; en kısa yol (1,4) ve (4,6) yollarını kapsıyorsa, bu, ekipmanın 1. yılda satın alınacağını 4. yıla kadar kullanılıp sonra satılacağını ifade etmektedir. 4. yılda ise yeniden ekipman satın alınacak ve 6 . yıl sonunda satılacaktır.

II.7.b. ULAŞTIRMA MODELİ

Bu modelde, ihtiyacı karşılayan merkezler (kaynaklar) ve ihtiyacı karşılanması gereken merkezler (bataklar) vardır. Kaynaklar, genelde depoları, bataklar ise müşterileri ifade etmektedir. Model de, her bir kaynak ve batak çifti ile ilişkili bir birim taşıma mäliyeti C_{ij} ile gösterilmektedir. Ulaştırma modeli, (Transportation model) her bir i kaynağı ile her bir j batağı arasındaki dağıtım maliyetini minimum yapacak optimum dağıtım miktarını (X_{ij}) bulur.

Bu modelin değişik bir şekli de aktarma modeli (Transsshipment Model) olarak bilinir. Bu model de kaynaklar ve bataklar arasında orta merkezler yardımıyla ürün taşımasının mümkün olacağı kabul edilir (14). Mesela herhangi bir ürünün, bir A kentinden, bir D kentine taşınması olayında; A kentinden B kentine kamyonla, B kentinden C kentine uçakla, son olarak C kentinden D kentine kamyonla taşımak, A dan B ye direkt olarak kamyonla taşımaya göredaha ucuz olabilir.

En kısa yol analizleri, iki dağıtım noktası arasında en kısa veya en ucuz yolun bulunmasında kullanılabilir. Eğer ele alınan problemde yalnızca bir kaynak ve bir batak varsa, aktarma modeli, şimdiye kadar incelenen en kısa yol analizlerinin uygulaması şeklinde olacaktır. Eğer çok sayıda kaynak ve batak varsa her bir kaynak ve batak çiftine en kısa yol analizi uygulanabilir. Her bir çift arasındaki en ekonomik yol bulunduktan sonra elde edilen bu bilgi ulaştırma modeli içine oturtulabilir (14).

II.7.c. GÜVENİLİRLİK MODELİ

En kısa yol problemi ile en güvenilir yol problemi (Most reliable route problem) benzerlik artezmektedir.

En güvenilir yol probleminde, serimin ayrıtları sistemin parçalarını, düğümlerde parçalar arasındaki birleşme noktalarını göstermektedir. Güvenilirlik modeli (Reliability model) başarının ihtimali olaraktanımlanan en güvenilir yolu bulma esasına dayanmaktadır.

Şebeke içerisinde bir yolun güvenilirliği, yol üzerindeki ayrıtların bireysel güvenilirliklerinin ürünü olarak tanımlanır. Eğer sistemdeki her bir güvenilirliğin logaritmasını alırsak problemi bir en kısa yol problemi olarak yeniden formüle etmek mümkündür.

Başka bir deyişle, biz maksimum güvenilirliği araştırdığımızdan problem artık serimde en uzun yolun bulunması şekline gelecektir. Dolayısıyle, en kısa ve en uzun yol problemleri arasındaki ilişkiden faydalanmak suretiyle problem, bir en kısa yol problemi haline getirilebilir.

BÖLÜM III

ATAMA VE AKTARMA MODELLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİYE EN KISA YOL ANALİZİ YAKLAŞIMI

Bu bölümde yöneylem araştırmasında önemli bir konuma sahip olan Atama (Assignment) ve Aktarma (Transshipment) problemleri arasındaki ilişki tesbit edilmeye çalışılmış ve bu ilişkiye en kısa yol analizi yaklaşımı uygulanmıştır. Ancak öncelikle her iki modeli de, hatırlamak açısından kısaca gözden geçirmek faydalı olacaktır.

Bir ulaştırma modelinde; kaynak ve batak sayısının eşit olduğunu, kaynakların toplam arzının ve batakların toplam talebinin 1 olduğunu varsayalım. Söz konusu durum ulaştırma modelinin özel bir hali olup, Atama Problemi olarak bilinir. Başka bir deyişle Atama problemi m=n, $a_i=1$, $b_j=1$ şeklinde ulaştırma probleminin özel bir hali olmaktadır (18).

Konuyu biraz daha açıklayıcı şekilde ele alalım. Örnek olarak, elimizde m tane iş ve bu işlere atanmak üzere m tane adamımız olduğunu varsayalım. Eğer i inci adam j inci işe atanırsa bununla ilgili maliyet (atama maliyeti) C_{ij} olacaktır. Modelin esası minimum maliyeti veren atamayı bulmaktır.

Atama modeli, ulaştırma modelinin özel bir hali olduğundan, modelin çözümü için ulaştırma modeline ilişkin çözümler uygulanabilir. Ancak, konunun ele alınışı bakımından, modelin çözüm metotlarına girilmeyecek, matematiksel formülasyonlar üzerinde durulacaktır.

Bir Atama probleminin matematiksel ifadesi;

MİNİMİZE $$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} C_{ij} X_{ij}$$

KISITLAR : $$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = 1 \ , \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = 1 \ , \quad j = 1, \ldots, m$$

$$X_{ij} \geqslant 0$$

Modeli, matris formunda aşağıdaki gibi göstermek mümkündür.

MİNİMİZE Cx

KİSITLAR : $A X = 1$

$X_{ij} \geqslant 0$

Her bir temel mümkün çözümde X_{ij}'ler 0 veya 1 değerini alacaktır. X_{ij}'nin 1 değerini alması, i. adamın j. inci atanması gerektiğini, 0 değerini alması ise maliyet minimizasyonunu sağlayabilmek için böyle bir atamanın yapılmaması gerektiğini belirtir.

Dolayısıyla X_{ij}'ler için aşağıdaki şekilde bir tanımlama getirmek mümkündür;

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ eğer i. inci adam j. inci işe atanmış ise} \\ 0, \text{ aksi halde ise} \end{cases}$$

X_{ij}'lerin bu şekilde tanımlanabilmesi ile modeli en kısa yol analizleri ile değişik bir açıdan da ilişkilendirmek mümkündür. Konuya daha sonra temas edilecektir.

Atama problemini bu şekilde ele aldıktan sonra, modelin ele alınış tarzına benzer olarak Aktarma problemine de bir giriş yapalım.

Aktarma modeli de ulaştırma probleminin özel bir halidir. Bilindiği gibi bir ulaştırma probleminde bir yanda ürünlerin kullanıma arz edildiği, bir yanda da bunların talep edildiği bazı merkezler vardır. Aktarma modelinde ise, ulaştırma modelinin yapısına ilave olarak bazı orta merkezler (Intermediate, Transsshipment points) vardır. Öyle ki bu merkezlerde, ürünlerin ne arzı ne de talebi söz konusu olmayıp sadece bir aktarma olayı gerçekleşmektedir.

Aktarma modelini serim yapısına uygun olarak düşünecek olursak, ürünlerin kullanıma sunulduğu merkezleri kaynak düğümleri (source nodes), ürünlerin talep edildiği merkezleri batak düğümleri (Sink nodes), aktarma olayını sağlayan merkezleri ise aktarma düğümleri (transshipment nodes) olarak ele almak gerekecektir.

Bir aktarma problemi çeşitli yollarla ulaştırma modeli formuna sokulabilir. Bu yollardan biri şu şekilde açıklanabilir. Modelde yalnızca bir kaynak ve bir batak varsa, her ikisi arasındaki en kısa yol bulunur. Eğer bir den fazla kaynak ve batak varsa her bir çift ayrı ayrı ele alınır, en ucuz maliyeti yol bulunur. Ve bu bulunan maliyet kalemleri ulaştırma tablosunda ilgili hücreye birim taşıma maliyeti olarak konulur. Daha sonra bilinen işlemlere devam edilir.

Aktarma modeline bu şekilde bir giriş yaptıktan sonra modelin matematiksel formülasyonu üzerinde duralım.

Bir aktarma probleminde, kaynak düğümünde/düğümlerinde 1 birimlik bir stok olduğunu ve bunun da batak düğümünden/düğümlerinden talep edildiğini kabul edersek modelin formülasyonunu aşağıdaki gibi elde etmek mümkündür;

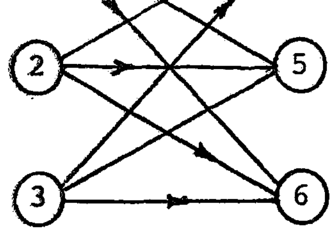
s; kaynak düğümünü t; batak düğümünü göstermek üzere

MİNİMİZE $\sum_i \sum_j C_{ij} \; X_{ij}$

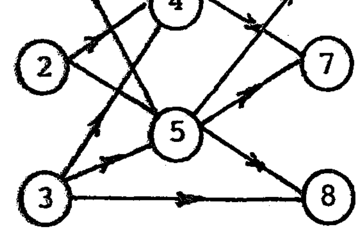
KISITLAR :

$$\sum_j X_{ij} - \sum_k X_{ki} = \begin{cases} 1, & i = s \text{ için} \\ 0, & i \neq s,t \text{ için} \\ -1, & i = t \text{ için} \end{cases}$$

$$X_{ij} \geqslant 0$$



Şekil-24. Bir Atama Modeli Örneği



Şekil-25. Bir Aktarma Modeli Örneği

Aktarma modelinede bu şekilde değindikten sonra, Atama ve Aktarma modelleri arasındaki ilişkiyi belirlemeye çalışalım.

Şekil 24 de de görüldüğü üzere atama problemini her bir ayrıtın bir kaynaktan bir batağa doğru yönlendiği iki kısımlı bir serim (Bipartite network) üzerinde bir serim akış problemi (Network flow problem) olarak düşünmek mümkündür (17). Öte yandan; Atama modeli için, her iki model arasındaki ilişkinin belirlenmesine yardımcı olacak bir kabul yapabiliriz. Öyle ki Atama modelinde de, kaynak düğümünde/düğümlerinde 1 birimlik bir stok olduğu ve bunun batak düğümünden/düğümlerinden talep edildiği şeklinde bir varsayım ilişkiye yaklaşım açısından kolaylık sağlayacaktır.

Bir G = (P,E) şeklindeki yönlü bir serimi ele alalım. Burada P, düğümler kümesini, E de ayrıtlar kümesini göstersin. Ancak ele alınan modellere uygun bir yaklaşım sağlayabilmesi açısından P düğümler kümesini; R, kaynak düğümlerini, Q'da batak düğümlerini göstermek üzere P=RUQ olarak tanımlamak gerekecektir.

Ayrıca, X_{ij} ayrıtlar üzerindeki akışı, C_{ij} bu akışın oluşturacağı maliyeti, b_i de i. inci düğümün arz veya talebini göstermek üzere Atama ve Aktarma modellerini beraberce aşağıdaki gibi formüle etmek mümkün olacaktır.

MİNİMİZE $\quad C_{ij}\ X_{ij}$

KISITLAR :

$$\sum_j X_{ij} - \sum_k X_{ki} = b_i$$

$$b_i = \begin{cases} +1, & i \varepsilon R \quad \text{için} \\ -1, & i \varepsilon Q \quad \text{için} \end{cases}$$

$$X_{ij} \geqslant 0$$

Modeli biraz daha açık şekilde yazacak olursak

MİNİMİZE $\quad C_{ij} \; X_{ij}$

KISITLAR ;

$$\sum_j X_{ij} - \sum_k X_{ki} = \begin{cases} +1 \;, & i \varepsilon R \quad \text{için} \\ -1 \;, & i \varepsilon Q \quad \text{için} \\ 0 \;, & i \not\varepsilon R,Q \quad \text{için} \end{cases}$$

$$X_{ij} \geqslant 0$$

Şimdi her iki model için çakışım matrislerini oluşturalım.

Tablo-8 Atama modeli için çakışım matrisi

		AYRITLAR								
		(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
DÜĞÜMLER	1	+1	+1	+1						
	2				+1	+1	+1			
	3							+1	+1	+1
	4	-1			-1			-1		
	5		-1			-1			-1	
	6			-1			-1			-1

Tablo-9 Aktarma modeli için çakışım matrisi

DÜĞÜMLER	A Y R I T L A R												
	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,4)	(2,5)	(3,4)	(3,5)	(3,8)	(4,6)	(4,7)	(5,6)	(5,7)	(5,8)
1	+1	+1	+1										
2				+1	+1								
3						+1	+1	+1					
4	-1			-1		-1			+1	+1			
5		-1			-1		-1				+1	+1	+1
6			-1						-1		-1		
7										-1		-1	
8								-1					-1

Her iki modelide verilen ortak formülasyona uygun olarak açıkça yazalım

Atama modeli için:

MİNİMİZE : $C_{14}X_{14} + C_{15}X_{15} + C_{16}X_{16} + C_{24}X_{24} + C_{25}X_{25} +$

$$C_{26}X_{26} + C_{34}X_{34} + C_{35}X_{35} + C_{36}X_{36}$$

KISITLAR

$$\left.\begin{aligned} X_{14} + X_{15} + X_{16} &= 1 \\ X_{24} + X_{25} + X_{26} &= 1 \\ X_{34} + X_{35} + X_{36} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad i\varepsilon R \text{ için}$$

$$\left.\begin{aligned} X_{14} + X_{24} + X_{34} &= 1 \\ X_{15} + X_{25} + X_{35} &= 1 \\ X_{16} + X_{26} + X_{36} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad i\varepsilon Q \text{ için}$$

$$X_{ij} \geqslant 0$$

Aktarma modeli için;

$$\text{MİNİMİZE}: C_{14}X_{14}+C_{15}X_{15}+C_{16}X_{16}+C_{24}X_{24}+C_{25}X_{25}+ C_{34}X_{34}+C_{35}X_{35}+C_{38}X_{38}+C_{46}X_{46}+C_{47}X_{47}+ C_{56}X_{56}+C_{57}X_{57}+C_{58}X_{58}$$

KISITLAR :

$$\left.\begin{aligned} X_{14}+X_{15}+X_{16} &= 1\\ X_{24}+X_{25} &= 1\\ X_{34}+X_{35}+X_{38} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad i\varepsilon R \ \text{ için}$$

$$\left.\begin{aligned} X_{14}+X_{24}+X_{34} &= X_{46}+X_{47}\\ X_{15}+X_{25}+X_{35} &= X_{56}+X_{57}+X_{58} \end{aligned}\right\} \quad i\not\varepsilon R,Q \ \text{ için}$$

$$\left.\begin{aligned} X_{16}+X_{46}+X_{56} &= 1\\ X_{47}+X_{57} &= 1\\ X_{38}+X_{58} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad i\varepsilon Q \ \text{ için}$$

$$X_{ij} \geqslant 0$$

Atama ve Aktarma modelleri arasındaki ilişkiyi bu şekilde belirledikten sonra belirlenen bu ilişkiye en kısa yol analizi yaklaşımını uygulamaya çalışalım.

Öncelikle bir en kısa yol modelinin matematiksel olarak nasıl formüle edileceğini inceleyelim.

Bilindiği gibi bir en kısa yol problemi; m tane düğümden, n tane ayrıtdan oluşan bir serimde, C_{ij}, her bir (i,j) ayrıtı ile ilişkili maliyeti göstermek üzere, 1 düğümünden m düğümüne en kısa (veya maliyetçe en küçük) yolu bulur. Bulunan yolun maliyeti ise yol üzerindeki C_{ij}'lerin toplamıdır.

Şimdi m tane düğümden oluşan bir serim düşünelim. Öte-yandan, serimin kaynak düğümünde 1 birimlik değerlendiri-lebilir bir stok olduğunu ve bunun batak düğümünden ta-lep edildiğini kabul edelim. Ve bu 1 birimlik akışı kay-naktan batağa doğru minimum maliyetle göndermeye çalış-tığımızı varsayalım.

Böylece, 1 kaynak düğümünü, m batak düğümünü, b_i de i. inci düğümün arz veya talep değerini göstermek üzere;

$$b_i = \begin{cases} 1, & i=1 \text{ için} \\ 0, & i\neq 1,m \text{ için} \\ -1, & i=m \text{ için} \end{cases}$$

olacaktır.

Buna göre bir en kısa yol probleminin matematiksel modelini aşağıdaki şekilde elde etmek mümkündür (18).

MİNİMİZE $\quad \Sigma\Sigma C_{ij}\, X_{ij}$

KISITLAR

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} - \sum_{k=1}^{m} X_{ki} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } i=1 \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } i\neq 1,m \text{ ise} \\ -1, & \text{eğer } i=m \text{ ise} \end{cases}$$

Modele dikkatle bakılacak olursa, elde edilen formü-lasyonun atama ve aktarma modelleri ile ilişkilendirile-bileceği kolaylıkla görülebilir.

Şimdi şekil 24 ve şekil 25'deki atama ve aktarma mo-dellerini en kısa yol formülasyonuna göre açıkça yazalım.

Atama modeli için en kısa yol formülasyonu;

Daha önce de belirtildiği gibi, Atama modelini kaynak ve batak düğümleri olmak üzere iki kısımda düşünmemiz ve her bir kaynak düğümünden her bir batak düğümüne 1 birimlik bir akış sağlamak gerektiğini göz önünde bulundurmamız gerekecektir.

Buna göre;

MİNİMİZE : $C_{14}X_{14} + C_{15}X_{15} + C_{16}X_{16} + C_{24}X_{24} + C_{25}X_{25} + C_{26}X_{26} + C_{34}X_{34} + C_{35}X_{35} + C_{36}X_{36}$

KISITLAR :

$$X_{14} + X_{15} + X_{16} = 1$$
$$X_{24} + X_{25} + X_{26} = 1$$
$$X_{34} + X_{35} + X_{36} = 1$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 1$$
$$X_{15} + X_{25} + X_{35} = 1$$
$$X_{16} + X_{26} + X_{36} = 1$$

$$X_{ij} \geqslant 0$$

Aktarma modeli için en kısa yol formülasyonu:

Burada da aynı şekilde düğümleri iki kısımda ele alacağız yine her bir kaynak düğümünden, her bir batak düğümüne 1 birimlik bir akışın sağlanacağını varsayacağız.

Buna göre;

MİNİMİZE : $C_{14}X_{14} + C_{15}X_{15} + C_{16}X_{16} + C_{24}X_{24} + C_{25}X_{25} + C_{34}X_{34} + C_{35}X_{35} + C_{38}X_{38} + C_{46}X_{46} + C_{47}X_{47} + C_{56}X_{56} + C_{57}X_{57} + C_{58}X_{58}$

$$X_{14} + X_{15} + X_{16} = 1$$
$$X_{24} + X_{25} = 1$$
$$X_{34} + X_{35} + X_{38} = 1$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = X_{46} + X_{47}$$
$$X_{15} + X_{25} + X_{35} = X_{56} + X_{57} + X_{58}$$
$$X_{16} + X_{46} + X_{56} = 1$$
$$X_{47} + X_{57} = 1$$
$$X_{38} + X_{58} = 1$$

$$X_{ij} \geqslant 0$$

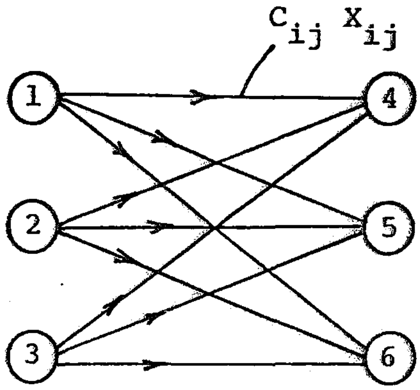
Görüleceği üzere her iki modelinde, hem daha önce belirlenen ortak formülasyona, hem de en kısa yol formülasyonuna göre oluşturulan kısıt denklemleri birbirinin aynı olmaktadır. Bu ise ulaştırma modelinin özel halleri olan Atama ve Aktarma modellerinin, gerek ayrı ayrı, gerekse beraberce ortak bir yapı içinde düşünüldüğünde en kısa yol analizleri ile kuvvetli bir ilişki içinde olduğunu göstermektedir.

Öte yandan her iki model ile en kısa yol analizleri arasındaki ilişki bir noktada daha dikkati çekmektedir. Bilindiği gibi bir en kısa yol modelinde X_{ij}'ler aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{eğer } (i,j) \text{ ayrıtı en kısa yolda ise} \\ 0, & \text{değilse} \end{cases}$$

X_{ij}'lerin bu şekilde tanımlanması aslında en kısa yolu vermektedir. Yani, eğer serim içerisindeki bir yol

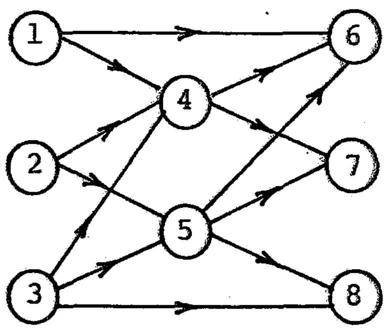
Şimdi bu anlatılanları küçük bir örnek üzerinde tartışalım.



Şekil-26. Örnek bir atama modeli serimi

Şekil 26'deki atama modeli serimini ele alalım ve 1. adamın 6. işe, 2. adamın 4. işe, 3. adamında 5. işe atandığını kabul edelim. Bu takdirde;

$X_{16} = 1$, $X_{24} = 1$, $X_{35} = 1$ diğer tüm $X_{ij} = 0$ olacaktır. Dolayısıyle 6 düğümüne olan en kısa yolun 1 düğümünden, 4 düğümüne olan en kısa yolun 2 düğümünden, 5 düğümüne olan en kısa yolun da 3 düğümünden geldiği anlaşılacaktır. Böyle bir atama yapıldığı takdirde de atama maliyeti minimum kılınacaktır.



Şekil 27-. Örnek bir aktarma modeli serimi

Şimdi de Şekil 27'deki aktarma modelini ele alalım ve 6 düğümüne olan en kısa yolun (3,4) (4,6), 7 düğümüne olan en kısa yolun (3,5)(5,7) 8 düğümüne olan en kısa yolun da (2,5) (5,8) olduğunu kabul edelim. Bu durumda;

$X_{34} = X_{46} = X_{35} = X_{57} = X_{25} = X_{58} = 1$ ve diğer tüm

$X_{ij} = 0$ olacaktır.

Açıkça görüleceği üzere en kısa yol analizleriyle Atama ve Aktarma modelleri arasındaki ilişki X_{ij}'lerin tanımlanması konusunda da gündeme gelmektedir. Başka bir deyişle bir yolun en kısa yol olarak seçimi bu yol üzerindeki X_{ij} değerlerinin 1 olmasını gerektirmektedir. Bu sadece atama ve aktarma modelleri için değil en kısa yol analizine uygun olarak modellenebilen tüm problemler için geçerlidir.

BÖLÜM IV

SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Serim teorisi çoğu sistemlerin bir serim yapısında düşünülmesinde, modellenmesinde ve çözümünde kullanılabilen etkili bir planlama tekniğidir.

Teorinin özel ve konusu olan en kısa yol analizleri ise serim yapısında düşünülebilen problemlere, problemin karakterine göre çözüm getirebilme özelliğinin de ötesinde Yöneylem Araştırma'sı içinde esnek bir yapıya sahiptir. Bu esneklik sayesinde en kısa yol analizleri bir amaç olmaktan ziyade problemlere bir yaklaşım, bir bakış açısı sağlayabilecek ve daha da üst düzeyde değişik çözüm teknikleriyle ilişkisi kurulabilecek faydalı bir araç olmuştur.

Yapılan tez çalışmasından da anlaşılacağı üzere, yöneylem araştırması'nın önemli konularından birisi olan ulaştırma modelinin özel hallerini teşkil eden atama ve aktarma problemlerinin özel bir serim yapısında düşünülebileceği ve her iki modelin özel bir en kısa yol modeli olarak ele alınıp formüle edilebileceği konusu vurgulanmıştır.

Böyle bir yaklaşım, aslında iki ayrı problem arasındaki ilişkiden faydalanarak, olayı bir en kısa yol modeli mantığı içerisinde düşünmek gibi önemli bir sonuç getirmektedir. Böyle bir sonucun getirdiği en önemli avantaj, iki ayrı problemin aynı tip bir modellemeyle çözümünün mümkün olmasıdır. Ayrıca bu sonuç, en kısa yol analizleriyle diğer değişik çözüm yöntemleri arasındaki muhtemel ilişkilerin belirlenmesi konusuna yönlendirme açısından da önem arzetmektedir.

K A Y N A K L A R

1. Ackoff.R.L.,Sasieni, M.W., Fundamentals Of Operations Research,John Wiley and Sons, Newyork (1968).

2- Potts, R.B., Oliver, R.M., Flows In Transportation Networks, Academic Press, Newyork, (1982).

3. Chacko, G.K., Applied Operations Research/Systems Analysis In Hierarchical Decision Making II,North Holland Publishing Company-Amsterdam, (1976).

4- Jensen, P.A., Barnes, J.W., Network Flow Programming, John Wiley and Sons, Newyork, (1980).

5. Moder, J.J., Philiphs. C.R., Davis, E.W., Project Management With CPM, PERT And Precedence Diagramming,

6. Aktin, T., Evranuz, Ç., Shortest Path Algorithms And Special Implementation For Capacitated Networks, 0190017901, TÜBİTAK, Gebze, 4-8, (1983).

7. Hadley, G., Linear Programming , Addison-Wesley, (1962)

8. Mandl, C., Applied Network Optimization, Academic Press, Newyork, (1979).

9. Bakoğlu, H., Doğrusal Programlama, 1. Baskı, E.Ü.Fen Fak.Yay., İzmir, (1982).

10. Öztürk, A., Yöneylem Araştırması, U.Ü. İk.İd.Bil.Fak. Yay., Bursa,(1984).

11. Hu, T.C., Integer Programming and Network Flows,Addison - Wesley, (1970).

12. Levin, R.I., Kırkpatrick, C.A., Rubin, D.S., Quantitative Approaches to Management, 5 th ed., Mc Graw-Hill, (1982).

13. Doğrusöz, H., Çapar, U., Modern Proje Yönetim Teknikleri, TÜBİTAK Yay., Gebze, (1967).

14. Whitehouse, G.E., Systems Analysis And Design Using Network Techniques, Prentice-Hall, (1973).

15. Minieka, E., Optimization Algorithms for Networks and Graphs, Marcel Dekker, Newyork, (1978).

16. WAGNER, H.M., Principles of Operations Research with Applications to Managerial Decisions, 2 nd. ed., Prentice-Hall, (1975).

17. Akgül, M., A Genuinely Polynomial Primal Simplex Algorithm For The Assignment Problem, IEOR-8707, Bil. Üniv., Ankara, 4, (1987).

18. Bazaraa, M.S. and Jarvis, J.J., Linear Programming And Network Flows, John Wiley and Sons, Newyork, (1977).

ÖZGEÇMİŞ

Ömer Faruk Baykoç 1962 yılında Ankara'da doğmuştur. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladıktan sonra 1980 yılında G.Ü. Müh. Mim. Fak. Endüstri Mühendisliği Bölümüne girmiş ve aynı bölümden 1984 yılında mezun olmuştur. Şu anda söz konusu bölümde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.