LİNEER ÇATILARIN ASLİ LİF DEMETİ İLE BİRLEŞİK VEKTÖR DEMETLERİNE LİNEER KONNEKSİYONLARIN HORİZONTAL LİFTİ

76284

Mustafa ÖZKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
(MATEMATİK)

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

76284

Ağustos 1998
ANKARA

Mustafa ÖZKAN tarafından hazırlanan LİNEER ÇATILARIN ASLİ LİF DEMETİ İLE BİRLEŞİK VEKTÖR DEMETLERİNE LİNEER KONNEKSİYONLARIN HORİZONTAL LİFTİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof.Dr. Erdoğan ESİN

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr.Arif SABUNCUOĞLU

Üye : Prof.Dr.Erdoğan ESİN

Üye : Doç.Dr.Baki KARLIĞA

Üye :

Üye :

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

İÇİNDEKİLER

LİNEER ÇATILARIN ASLİ LİF DEMETİ İLE BİRLEŞİK VEKTÖR DEMETLERİNE LİNEER KONNEKSİYONLARIN HORİZONTAL LİFTİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Mustafa ÖZKAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ağustos 1998

ÖZET

Bu çalışmada, herhangi bir diferensiyellenebilir M manifoldunun lineer çatılarının asli lif demeti ile birleşik vektör demetlerine lineer konneksiyonların horizontal lifti incelenmiştir. Bununla ilgili 3.3.1 teoreminin iki önemli sonucu verilmiştir. Bunun yanında teorem 3.3.3 ve teorem 3.3.5 ile E total uzayının $\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyonunun torsiyon tensörü ve eğrilik tensörü verilmiştir.

K. Yano, S. Ishihara tarafından tanjant demet ve K. Yano, E.M. Paterson tarafından kotanjant demet olması halinde ispatlanan benzer teoremler 3.3.6 ve 3.3.7 teoremlerinde genelleştirilmiştir.

Bilim Kodu : 403.0201
Anahtar Kelimeler : Birleşik lif demeti, asli demet, horizontal lift
Sayfa Adedi : 61
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Erdoğan ESİN

HORIZONTAL LIFT OF LINEAR CONNECTIONS TO VECTOR BUNDLES ASSOCIATED WITH THE PRINCIPAL BUNDLE OF LINEAR FRAMES
(M.Sc. Thesis)

Mustafa ÖZKAN

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
Agust 1998

ABSTRACT

In this study, horizontal lift of linear connections to vector bundles associated with the principal bundle of linear frames of any differentiable manifold M was investigeted. The two important results of teorem 3.3.1. were given. Beside, in the theorem 3.3.3 and 3.3.5 torsion tensor and curvature tensor of $\tilde{\nabla}$ linear connection on E total space are given respectively.

Theorem 3.3.6 and 3.3.7. generalize similar theorem proved by K.Yano and S.Ishihara in the case of tangent bundles and by K.Yano and E.M. Patterson in the case of cotangent bundles.

Science Code : 403.0201
Key Words : Associated fibre bundle, principal bundle, horizontal lift
Page Number : 61
Adviser : Prof.Dr. Erdoğan ESİN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken, beni yönlendiren, kıymetli vakitlerini bana ayıran ve her safhasında bilgisine baş vurduğum Sayın Hocam Prof. Dr. **Erdoğan ESİN**'e teşekkürü bir borç bilirim.

SİMGELER

Simge	Açıklama
M, N,...	C^∞ -manifoldlar
ι	Doğal inclusion dönüşümü
U, V,...	Manifold üzerinde açıklar
I_U	U açığı üzerinde özdeşlik dönüşümü
IR	Reel sayılar cismi
IR^m	m boyutlu reel vektör uzayı
d	Manifold üzerinde diferensiyel operatörü
f, g,...	M üzerinde reel değerli C^∞ dönüşümler
df	f nin diferensiyeli
	F nin koordinat temsili
dF	F nin türev dönüşümü
domF	F nin tanım kümesi
$(x^i)_{1\leq i\leq m}$	M üzerinde tanımlı lokal koordinatlar
A	M nin C^∞ atlası
$C^\infty(p)$	p noktasının küçük bir komşuluğunda reel değerli C^∞ dönüşümlerin kümesi
C^∞ (M,N)	M den N ye C^∞ -dönüşümlerin kümesi
$\chi(M)$	M üzerinde tanımlı C^∞ -vektör alanlarının modülü
$\chi^*(M)$	M üzerinde tanımlı 1-formların uzayı
(E,π,M)	Lifli manifold veya demet
E_p	(E,π,M) demetinin p noktasındaki lifi
TM	M nin tanjant manifoldu
∇	M üzerinde lineer konneksiyon
	Christoffel sembolleri
π_M	M nin tanjant manifoldu üzerinde tanımlı kanonik projeksiyon
$V_z(E)$	E nin z noktasındaki vertical uzayı

Simge	Açıklama
(E,π,M,F)	Lif demeti
G	Lie grubu
(E,π,M,G)	Asli lif demeti
LM	Lineer çatıların kümesi
X^H	X in E ye horizontal lifti
$\tilde{\nabla}$	E üzerinde bir lineer konneksiyon

1.GİRİŞ

Verilen bir M C^{∞} -manifoldunun tanjant manifoldunun tanımlanması demet kavramına ışık tutmuştur. Önce manifoldun bir p noktasına bir vektör uzayı karşılık getirmek suretiyle vektör demetleri elde edilmiştir. Daha sonra bir E manifoldundan M manifolduna tanımlanan örten submersion yardımıyla da en genel demet yapılarına ulaşılmış ve bunlar lif demetleri olarak adlandırılmıştır.

S. Kobayashi ve K. Yano'nun M üzerinde verilen bir diferensiyellenebilir elemanın (C^{∞} fonksiyonlar, vektör alanları, 1-formlar, tensörler vs.) TM ye vertical, complete ve horizontal liftlerini tanımlamaları yine M üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir elemanların vektör demetlerine liftlerinin tanımlanmasını akla getirmiştir.

Bu düşünceden yola çıkarak J. Gancarcewicz ve N. Rahmani, "Horizontal Lift of Linear Connection to Vector Bundles Associated with the Principal Bundle of Linear Frames" adlı makalelerinde M üzerinde verilen bir vektör alanının horizontal lifti ile M üzerinde tanımlı bir kesitin E total uzayına vertical liftini tanımlamışlardır. Ayrıca E total uzayı üzerinde verilen bir konneksiyonun da horizontal lifti tanımlanmıştır ve böylece konneksiyon yardımı ile tanımlanan eğrilik ve torsiyon tensörlerinin de horizontal lifti elde edilmiştir.

Bu çalışma yukarıda bahsedilen çalışmanın bir irdelenmesidir.

Çalışmamızın ikinci bölümünde gerekli olan temel kavramlar verilmiş. Üçüncü bölümde liftlerle ilgili teoremler ispatlanmıştır. Son kesimde ise J. Gancarcewicz ve N. Rahmani'nin bahsedilen çalışmasının diferensiyel geometriye yaptığı katkılar incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

2.1.1. Tanım (m- boyutlu harita)

Boş olmayan bir küme M, M nin boş olmayan bir altkümesi U ve $\varphi : U \rightarrow IR^m$ bir dönüşüm olsun. Eğer :

(i) φ birebir ;

(ii) $\varphi(U)$, IR^m de açık bir alt küme ;

ise, (U, φ) ikilisine, M için bir *m- boyutlu harita denir* (Brickell and Clark,1970).

■ Bir $p \in M$ noktası için $p \in U$ ise, bu haritaya p de veya p civarında bir harita, U kümesine p noktasının *koordinat komşuluğu* ve φ dönüşümüne de haritanın *koordinat dönüşümü* denir.

■ IR^m de $u^i : IR^m \rightarrow IR$, $(a^i,....,a^m) \in IR^m$ için, $u^i (a^i,....,a^m) = a^i$ $1 \leq i \leq m$, şeklinde tanımlı izdüşüm (doğal koordinat) fonksiyonları gözönüne alınsın. Bu durumda $p \in U$ için φ nin koordinat bileşenleri,

$$(u^i \circ \varphi)(p) = \varphi^i (p) = x^i (p)$$

olmak üzere;

$$\varphi(p) = (x^i (p) , ...,x^m (p))$$

olup, böylece $\varphi = (x^i ,......, x^m) = (x^i)_{1 \leq i \leq m}$ ile ifade edilebilir ve $\{x^i ,...., x^m\}$ sistemine de (U, φ) haritasına ait *lokal koordinat sistemi* denir (Brickell and Clark,1970).

2.1.2. Tanım (C^k - atlas)

M kümesi üzerinde tanımlı haritaların bir sınıfı **A** = $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ olsun. Eğer:

(i) Örtme aksiyomu :

$$M = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \quad ;$$

(ii) Bağdaşabilirlik (veya C^k-bağlı olma) aksiyomu:

$U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ olacak biçimdeki her bir (α, β) indis çifti için,

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k- sınıfından bir diffeomorfizm;

ise, **A** sınıfına M üzerinde bir *C^k - atlas* denir. Burada $k \in \mathbb{N}$ nin ∞ olma hali de geçerlidir (Brickell and Clark,1970).

2.1.3. Tanım(Denk atlaslar)

M kümesi üzerinde **A** ve **A'** C^k - atlasları verilsin. Eğer **A** $\cup$ **A'**, M üzerinde yine bir C^k - atlas ise, **A** ve **A'** atlaslarına *denk atlaslar* denir (Brickell and Clark,1970).

2.1.4. Tanım(C^k - tam atlas)

M kümesi üzerinde bir C^k - atlas **A** = $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ olsun. M üzerinde tanımlı her bir $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ haritasıyla C^k- bağlı olan herhangi bir (U, Ψ) haritasıda **A** atlasında içeriliyorsa **A** atlasına bir *C^k - tam atlas* (veya C^k-maksimal, *C^k - diferensiyellenebilir yapı*) denir (Brickell and Clark,1970).

2.1.5. Tanım(C^k - manifold)

M kümesi üzerinde tanımlı bir C^k -diferensiyellenebilir yapı **A** ile gösterilirse (M, **A**) ikilisine *C^k -sınıfından diferensiyellenebilir manifold* veya kısaca *C^k - manifold* denir (Brickell and Clark,1970).

Bundan sonra çalışmanın tümünde manifoldun C^∞ olduğu kabul edilecektir.

■ M üzerinde tanımlı denk C^k - atlasların her bir denklik sınıfı, M üzerinde bir C^k - tam atlas oluşturmaktadır. Bu nedenle (M,A) C^k- manifoldunun C^K-diferensiyellenebilir yapısını belirtirken A atlasının, yalnızca, herhangi bir C^k-atlas olarak alınması da yeterlidir.

Bir C^∞ - yapıda bulunan haritaların boyutu, C^∞ - manifoldun boyutu olarak tanımlanır. Kısalık için (M, **A**) ikilisi yine M ile ifade edilebilir.

■ Bir C^∞ - manifold (M, **A**) ve **A** = $\{(U_\alpha , \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ olmak üzere;

$$\tau_M = \{S\subset M : \forall\alpha\in I, S\cap U_\alpha \neq\emptyset \text{ için}, \varphi_\alpha(S\cap U_\alpha), IR^m \text{ de açıktır.}\}$$

sınıfı gözönüne alınsın.τ_M nin M kümesi üzerinde bir topolojik yapı oluşturduğu kolayca gösterilebilir. Böylece τ_M topolojisi ile birlikte M bir topolojik uzay olur.

2.1.6. Tanım(İndirgenmiş topoloji)

Bir C^∞- manifold (M, **A**) olsun. M kümesi üzerinde, M nin diferensiyellenebilir yapısından oluşturulan τ_M topolojisine, M üzerinde *diferensiyellenebilir yapıdan indirgenmiş topoloji* (veya M nin *manifold topolojisi*) denir (Brickell and Clark,1970).

2.1.1. Sonuç

(i) Herhangi bir $W \subset U_\alpha$ için,

$$W, \text{ M de açıktır} \Leftrightarrow \varphi(W), \ IR^m \text{ de açıktır.}$$

(ii) U_α lar M de açıktırlar.

(iii) $\mathcal{B} = \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ sınıfı, τ_M nin bir bazını oluşturur.

2.1.7. Tanım(Diferensiyellenebilme)

m ve n -boyutlu iki C^∞- manifold M ve N , $p \in M$ ve $F: M \to N$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer,

$$\hat{F} = \psi o F o \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

dönüşümü $\varphi(p)$ noktasında C^k- diferensiyellenebilir olacak şekilde p noktasının U ve F(p) noktasının da $F(U) \subset V$ şeklinde bir V koordinat komşuluğu varsa , F dönüşümüne $p \in M$ noktasında *C^k-diferensiyellenebilirdir* (veya *C^k- dönüşümdür*) denir.Buradaki $\hat{F}$ dönüşümü (U,φ) ve (V,ψ) haritalarına göre F nin koordinat temsili (veya lokal koordinatlardaki ifadesi) olarak isimlendirilir (Brickell and Clark,1970).

Bundan sonra dönüşümler aksi belirtilmedikçe C^∞-diferensiyellenebilir alınacaktır.

■ $F: M \to N$ dönüşümü verildiğinde F' nin tanım kümesi M' nin ve görüntü kümesi de N' nin tamamı olması gerekmez. Bu durumu belirtmek için, F'nin tanım kümesi domF ve değer kümesi de rangeF ile gösterilir.

■ M de bir açık altküme $W \subset$ domF olmak üzere; eğer F, W nin her noktasında bir C^∞-dönüşüm ise; F, W üzerinde C^∞- dönüşümdür denir (Brickell and Clark,1970).

■ Eğer $F:M \to N$, domF üzerinde bir C^∞- dönüşüm ise $F \in C^\infty(M,N)$ ve özel olarak N=IR ise, o zaman $F \in C^\infty(M)$ yazılır. Bir $p \in M$ için, p nin [küçük] bir komşuluğunda C^∞-diferensiyellenebilir olan reel değerli dönüşümlerin kümesi $C^\infty(p)$ ile gösterilir.

2.1.8. Tanım(Diffeomorfizm)

Aynı boyutlu iki C^∞- manifold M, N ve $F:M \to N$ birebir ve örten bir dönüşüm olsun. Eğer :

i) $F \in C^k(M,N)$;

ii) $F^{-1} \in C^k(N,M)$;

ise, F dönüşümüne bir *C^k- diffeomorfizm* ve bu durumda M ile N manifoldlarına da *C^k- difeomorfiktirler* denir (Brickell and Clark,1970).

Bir C^k- diffeomorfizm, kendisi ve tersi C^k- diferensiyellenebilir olan bir homeomorfizmdir.

2.1.9. Tanım(Tanjant vektör,Tanjant uzay)

Bir C^∞- manifold M , $p \in M$ olsun. $\forall f,g \in C^\infty(p)$ ve $a,b \in$ IR için;

$$v_P: C^\infty(p) \to IR$$
$$f \to v_p(f)$$

dönüşümü ,

i) Lineerlik :

$$v_p(af + bg) = av_p(f) + bv_p(g)$$

ii) Leibniz kuralı :

$$v_p(f.g) = v_p(f).g(p) + f(p).v_p(g)$$

özelliklerini sağlıyorsa, v_P ye p noktasında M nin bir *tanjant vektörü* denir ve M nin bu şekilde tanjant vektörlerinin kümesi $T_P(M)$ ile gösterilir. $T_P(M)$ bir reel vektör uzayı olup bu uzaya M nin p noktasındaki *tanjant uzayı* denir. (Brickell and Clark,1970).

■ p noktasında bir harita $(U, \varphi=(x^i))_{1\leq i\leq m}$ ise $T_P(M)$ nin bir bazı,

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p : 1\leq i\leq m\right\}$$

kümesidir. Bu baza $T_P(M)$ nin *doğal (veya koordinat) bazı* denir.

2.1.10. Tanım (Türev dönüşümü)

m ve n boyutlu iki C^∞- manifold sırasıyla M,N ve $F:M\rightarrow N$ bir C^∞- dönüşüm olsun. F nin bir $p\in M$ noktasındaki *türev dönüşümü*, $\forall v_P\in T_P(M)$ ve $\forall h\in C^\infty(N)$ için;

$$(dF_p(v_p))(h)=v_p(hoF)$$

şeklinde tanımlı bir

$$dF_P:T_P(M)\rightarrow T_{F(P)}(N)$$

dönüşümüdür (Okubo,1987).

■ dF_P lineer olup, M ve N nin doğal bazlarına göre dF_P dönüşümüne karşılık gelen $\left[\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\Big|_p\right]$ matrisi, F nin p deki Jakobien matrisi olarak isimlendirilir ve $J_F(p)$ ile gösterilir. Burada $p \in U$, $(U, \varphi=(x^i))_{1\le i\le m}$, M ye ve $(V,\psi=(y^j))_{1\le j\le n}$, N ye ait haritalar olup, $y^j o F=f^j$ dönüşümleri $F(p)=(f^1(p),...,f^n(p))$ şeklinde F nin koordinat bileşenleridir. Ayrıca,

$$(\mathrm{rank}F)_P = \mathrm{rank}(dF_p) = \mathrm{rank}\, J_F(p) = (\mathrm{rank}\,\hat{F})_{\varphi(P)}$$

olarak tanımlanır.

■$TM=\bigcup_{P\in M} T_P M$ olmak üzere, eğer U, M'nin bir açık altkümesi ise, $\bigcup_{p\in U} T_p M$ ayrık birleşimi $TM|_U$ ile gösterilsin. $p\in U$ için $T_P U \cong T_P M$ olduğundan,

$$TM|_U \cong TM$$

dir.

2.1.11. Tanım (Vektör alanı)

Bir C^∞- manifold M, M nin bir açık alt kümesi U ve $X: U \to TM|_U$ bir dönüşüm olsun.

$$\pi_M: TM|_U \to U,\ \pi_M(v)=p \quad ; (\text{eğer } v\in T_P(M) \text{ ise})$$

kanonik projeksiyon olmak üzere ;

$$\pi_M o X = I_U \ (\text{özdeşlik dönüşümü})$$

ise, X e U üzerinde bir *vektör alanı* denir (Brickell and Clark,1970).

▪ Genellikle vektör alanları tanım kümeleri belirtilmeden $X:M \to TM$ şeklinde de ifade edilir. Bu durumda X in tanım kümesinin M de bir açık altküme olduğu anlaşılacaktır ve M üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilecektir.

▪ $X \in \chi(M)$, dom X= U olmak üzere, $\forall f \in C^\infty(U)$ ve $\forall\, p \in U$ için :

$$X(f)(p) = X_P(f)$$

tanımlansın. Eğer X(f), U üzerinde C^∞- diferensiyellenebilir ise, X vektör alanına U üzerinde C^∞- diferensiyellenebilir denir. Bu durumda

$$\begin{aligned} X: C^\infty(U) &\longrightarrow C^\infty(U) \\ f &\longrightarrow X(f) \end{aligned}$$

operatörü olarak tanımlanabilir. Bundan sonra vektör alanından söz edildiğinde C^∞ diferensiyellenebilir olduğu kabul edilecektir.

2.1.12. Tanım (Kotanjant vektör ve kotanjant uzay)

Bir C^∞ - manifold M olsun. T_pM tanjant uzayının cebirsel duali T^*_pM ye, M nin p noktasındaki *kotanjant uzayı* ve bu uzayın her bir elemanına da p noktasında bir *kotanjant vektör* (veya *kovektör*)denir (Okubo,1987).

▪ $T_p^*(M)$ uzayı bir reel vektör uzayı olup, p noktasında verilen bir $(U,\varphi=(x^i))_{1\le i\le m}$ haritasına göre doğal bazı

$$\left\{dx^i\big|_p : 1 \le i \le m\right\}$$

kümesidir. $dx^i|p\left(\dfrac{\partial}{\partial x^j}|p\right) = \delta^i_j$ olduğu , dual baz olmasından açıktır.

2.1.13. Tanım (1- form veya kovektör alanı)

M nin herbir noktasına bir kotanjant vektör karşılık getiren

$$w: M \to \bigcup_{p \in M} T^*_p(M) = T^*M \quad ; w(p) \in T^*_p(M)$$

dönüşümüne M üzerinde *1-form* (veya *kovektör* alanı) denir (Okubo,1987).

■ M manifoldu üzerinde tanımlı 1-formların kümesi $\chi^*(M)$ ile gösterilecektir.

2.1.14. Tanım (Vektör uzayı üzerinde tensör)

Bir reel vektör uzayı V ve V nin dual uzayı V^* olsun.

$$T: \underbrace{V^* x \ldots x V^*}_{r\text{-tane}} x \underbrace{V x \ldots x V}_{s\text{-tane}} \to IR$$

şeklinde herbir (r+s)- lineer dönüşüme V üzerinde *r. dereceden kontravaryant ve s. dereceden kovaryant* (veya kısaca *(r,s)- tipinden*) bir *tensör* denir (Okubo,1987).

■ Bir vektör uzayı üzerinde tanımlı (r,s) tipinden tensörlerin kümesi $T_s^r(V)$ ile gösterilir. $T_s^r(V)$, IR üzerinde bir vektör uzayı olup, boyV=n ise, boy $T_s^r(V)=n^{r+s}$ dir.

■ V vektör uzayı yerine M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı $T_P(M)$ alınırsa, M nin p noktasında bir tensör uzayı $T_S^r(T_P(M))$ elde edilir ve bu uzayın her bir elemanına *p noktasında bir (r,s)- tensör* denir.

2.1.15.Tanım (Tensör alanı)

Bir C^∞ - manifold M olsun. M nin herbir noktasına (r,s)-tipinden bir tensör karşılık getiren bir dönüşüme M üzerinde *(r,s) - tipinden bir tensör alanı* denir (Okubo,1987).

■ O halde M üzerinde tanımlı bir tensör alanı,

$$T : M \to \bigcup_{P \in M} T_s^r(T_P M)$$
$$p \to T(p) \in T_s^r(T_p M)$$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür.

■ M üzerinde tanımlı tensör alanlarının kümesi, $\mathfrak{I}_s^r(M)$ ile gösterilir. $\mathfrak{I}_s^r(M)$ $C^\infty(M)$ üzerinde bir modüldür.

■ Özel olarak :

$$\mathfrak{I}_0^0(M) = C^\infty(M)$$
$$\mathfrak{I}_0^1(M) = \chi(M)$$
$$\mathfrak{I}_1^0(M) = \chi^*(M)$$

dir.

■ Ayrıca , $w_1,\ldots,w_r \in \chi^*(M)$, $X_1,\ldots X_s \in \chi(M)$ ve $p \in M$ olmak üzere;

$$(T(w_1,\ldots,w_r,X_1,\ldots,X_1))(p) = T_P(w_{1P},\ldots,w_{rp},X_{1p},\ldots,X_{sp})$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$T:\ \underbrace{\chi^*(M)\,x\ldots x\chi^*(M)}_{r\text{-tane}}x\underbrace{\chi(M)x\ldots x\chi(M)}_{s\text{-tane}} \to C^\infty(M)$$

şeklinde $C^\infty(M)$ değerli bir (r+s)-lineer dönüşüm olur.

2.1.16. Tanım (Lineer konneksiyon)

Bir C^∞ manifold M olsun.

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(X,Y) \to \nabla_X Y$$

dönüşümü, $\forall f,g \in C^\infty(M)$ ve $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için:

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\,\nabla_X Z + g\,\nabla_Y Z$;

(ii) $\nabla_X (f\,Y) = f\,\nabla_X Y + (X f)Y$;

(iii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

özelliklerini sağlıyorsa, ∇ dönüşümüne M üzerinde bir *lineer konneksiyon* denir (Brickell and Clark,1970).

■ ∇ lineer konneksiyonun koordinat vektör alanlarındaki değeri ;

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{i\,j}^{k} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

eşitliği ile belirlidir. Bu eşitlik ile tanımlı $\Gamma_{i\,j}^{k}$ C^∞ - dönüşümlerine ∇ lineer konneksiyonunun bileşenleri veya *Christoffel sembolleri* denir (Brickell and Clark,1970).

Bir ∇ lineer konneksiyonunun X, Y $\in \chi(M)$ vektör alanlarındaki değeri, $X=\sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ve $Y=\sum_{j=1}^{m} b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ olmak üzere;

$$\nabla_X Y=\sum_{h=1}^{m}\left(\sum_{i,k=1}^{m} a^i \frac{\partial b^h}{\partial x^i}+\sum_{i,k=1}^{m} a^i b^k \Gamma_{ik}^{h}\right)\frac{\partial}{\partial x^h}$$

eşitliği ile belirlidir.

2.1.17. Tanım (Lie parantez operatörü)

Bir C^∞ - manifold M olsun. X,Y $\in \chi(M)$, p$\in$M ve $\forall f\in C^\infty(p)$ için;

$$[X,Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$$

şeklinde tanımlı

$$[,] : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

dönüşümüne *Lie parantez operatörü* denir (Brickell and Clark,1970).

2.1.18. Tanım (Bir lineer konneksiyonun torsiyonu)

Bir C^∞ - manifold M ve M üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ olsun.

$$T:\chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X,Y) \to T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$$

şeklinde tanımlı T dönüşümüne, ∇ lineer konneksiyonunun *torsiyonu* denir (Brickell and Clark,1970).

■ Eğer, $T\equiv 0$ ise *∇ konneksiyonun torsiyonu sıfırdır* veya *∇ simetriktir* denir.

■ T dönüşümünün koordinat vektör alanlarındaki değeri ;

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^k}\right)=\sum_{h=1}^{m}\left(\Gamma_{ik}^{h}-\Gamma_{ki}^{h}\right)\frac{\partial}{\partial x^h}$$

dır. Buna göre eğer, $T\equiv 0$ ise $\forall$ i,k=1,...,m için ;

$$\Gamma_{ik}^{h}=\Gamma_{ki}^{h}$$

olur.

2.1.19. Tanım (Bir lineer konneksiyonun eğrilik tensör alanı)

Bir C^{∞} - manifold M ve M üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ olsun.

$$R:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\rightarrow\chi(M)$$
$$(X,Y,Z)\rightarrow R(X,Y)Z=\nabla_X(\nabla_Y Z)-\nabla_Y(\nabla_X Z)-\nabla_{[X,Y]}Z$$

şeklinde tanımlı R dönüşümüne ∇ nın *eğrilik tensör alanı* veya *eğrilik formu* denir (Brickell and Clark,1970).

2.1.20.Tanım (Bir tensör alanının kovaryant diferensiyeli ve kovaryant türevi)

Bir M C^{∞}- manifoldu üzerinde ∇ lineer konneksiyonu ve (0,s)-tipinden T tensör alanı verilsin.$\forall Y^1,\ldots,Y^S,X\in\chi(M)$ için,

$$\nabla T(Y^1,\ldots,Y^S,X)=X(T(Y^1,\ldots,Y^S) - T(\nabla_X Y^1,Y^2,\ldots,Y^S) - \ldots - T(Y^1,\ldots,\nabla_X Y^S)$$

şeklinde tanımlı ∇T tensör alanına T nin *kovaryant diferensiyeli* ve ayrıca,

$$\nabla_X T(Y^1,\ldots,Y^S)= \nabla T(Y^1,\ldots,Y^S,X)$$

şeklinde tanımlı $\nabla_X T$ tensör alanına da T nin X vektör alanına göre *kovaryant türevi* denir (Carmo, 1992).

■Tanımdan da anlaşılacağı üzere, ∇T (0,s+1)-tipinden ve $\nabla_X T$ tensör alanı da (0,s)-tipindendir.

2.2. Altmanifoldlar

2.2.1. Tanım (İmmersion)

m ve n - boyutlu C^{∞} - manifoldlar, sırasıyla, M, N ve F:M $\rightarrow$ N bir C^{∞} - dönüşüm olsun. Eğer, tanım kümesinin her bir noktasında $(\mathrm{rank}F)_p = m$ ise, F ye bir *immersion* denir (Brickell and Clark,1970).

■ F, M den N ye bir immersion $\Leftrightarrow$ [$\forall p\in \mathrm{dom}F$ için $(\mathrm{rank}F)_p=\mathrm{boy}M \Leftrightarrow \forall p\in \mathrm{dom}f$ için dF_p birebir] önermesi doğrudur.

Ayrıca, F nin bir immersion olması durumunda $m\leq n$ olacağı açıktır.

2.2.2.Tanım (Submersion)

m ve n boyutlu C^∞ - manifoldlar sırasıyla, M, N ve $F:M \to N$ bir C^∞- dönüşüm olsun. Eğer, tanım kümesinin her bir p noktasında $(\mathrm{rank}F)_p = n$ ise, F ye bir *submersion* denir (Brickell and Clark,1970).

■ F, M den N ye bir submersion $\Leftrightarrow [\forall p \in \mathrm{dom}F$ için, $(\mathrm{rank}F)_p = \mathrm{boy}N$ $\Leftrightarrow \forall p \in \mathrm{dom}F$ için, dF_p örten] önermesi doğrudur.

Ayrıca, F nin bir submersion olması halinde m>n olacağı açıktır.

2.2.3.Tanım (İmbedding ve immersed altmanifold)

İki C^∞ - manifold M, N ve $F:M \to N$ bir immersion olsun. Eğer, F birebir ise, F ye bir *imbedding* ve bu durumda F(M) ye (veya M ye **)**, N de bir *immersed altmanifold* denir. (Bir immersed altmanifolda yalnızca, altmanifold da denilmektedir).

■ Bir immersion lokal imbeddingtir. Bu nedenle lokal çalışmalarda immersion yerine imbedding de alınabilir.

2.3. Diferensiyellenebilir Demet Yapıları

2.3.1.Tanım (Lokal çarpım özelliği ve lokal ayrışma (trivialisation))

E,M,F C^∞- manifoldlar, $\pi:E \to M$ bir C^∞- dönüşüm ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ olmak üzere; eğer,

$$(\pi o \psi_\alpha)(p,y) = p \qquad ; p \in U,\ y \in F$$

olacak biçimde $\psi_\alpha : U_\alpha x F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ diffeomorfizmlerinin bir $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sınıfı varsa, [F ye göre] π, *lokal çarpım özelliğine sahiptir* ve **D** $= \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$

sistemi de, π nin bir *lokal ayrışmasıdır* denir (Greub, Halperin and Vanston,1972).

2.3.2. Tanım (Diferensiyellenebilir lif demeti (fibre bundle))

Bir $\pi:E\rightarrow M$ C^{∞}- dönüşümü lokal çarpım özelliğine sahip olsun. Bu durumda $\xi=(E,\pi,M,F)$ dörtlüsüne bir *diferensiyellenebilir lif demeti* adı verilir (Greub, Halperin and Vanston, 1972).

2.3.3. Tanım (Lokal koordinat gösterimi (Representative))

$\xi=(E,\pi,M,F)$ bir C^{∞}- lif demeti olsun . O zaman, **D** lokal ayrışmasına , ξ lif demetinin bir *lokal koordinat gösterimi* denir (Greub, Halperin and Vanston, 1972).

■ Bir $\xi=(E,\pi,M,F)$ lif demetinde E ye ξ lif demetinin *total uzayı*, M ye *baz (taban) uzayı*, F ye *lif modeli* (veya standart lif) ve π ye *fibrasyon* veya *projeksiyon* adı verilir. Ayrıca, *rankξ=boy$_I$F* olarak tanımlanır (Greub, Halperin and Vanston, 1972).

(E,π,M,F) lif demeti bazen E total uzayı ile, bazen de, $\pi:E\rightarrow M$ C^{∞} -dönüşümü ile gösterilir.

2.3.4. Tanım (Lif (fibre))

$\pi:E\rightarrow M$ bir lif demeti olsun. $\forall p\in M$ için,

$$\pi^{-1}(p)=E_p=\{u\subset E \mid \pi(u)=p\}$$

kümesine *p üzerinde bir lif* denir (Greub, Halperin and Vanston, 1972).

■ Tüm E_p liflerin ayrık bileşimi E total uzayını verir: yani ,

$$E = \bigcup_{p \in M} E_p$$

dir. Üstelik bir $p \in M$ için, E_p lifi, E de kapalı imbedded altmanifolddur (Sounders, 1989).

■ $boyE_p$=boyE-boyM sayısına ξ nin *lif boyutu* denir (Sounders, 1989).

■ $\xi=(E,\pi,M,F)$ bir lif demeti ve **D**$=\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ lokal koordinat temsilcisi olsun.
$\forall p\in U_\alpha$ için,

$$\psi_{\alpha,p}:F\to E_p$$

dönüşümü,

$$\psi_{\alpha,p}(y) = \psi_\alpha(p,y)\ ;\ \ y\in F$$

şeklinde tanımlanırsa ; ψ_α lar diffeomorfizm olduklarından, $\psi_{\alpha,p}$ dönüşümleri de diffeomorfizmdir.

■ **D** den $U_{\alpha\beta}= U_\alpha\cap U_\beta \neq \varnothing$ olacak biçimde (U_α,ψ_α) ve (U_β,ψ_β) ikilileri seçilirse ; bu durumda,

$$\psi_\alpha,\psi_\beta^{-1} : U_{\alpha\beta} \times F\to\pi^{-1}(U_{\alpha\beta})$$

şeklinde tanımlı ψ_α ve ψ_β lar diffeomorfizm olduklarından

$$\psi_{\beta\alpha}=\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha : U_{\alpha\beta} \times F \to U_{\alpha\beta}\times F$$

dönüşümü ,

$$\psi_{\beta\alpha}(p,y)=(p,\psi_{\beta,p}^{-1} \circ \psi_{\alpha,p}(y)\ \ ;\ p\in U_{\alpha\beta}\ ,\ y\in F$$

şeklinde tanımlı bir diffeomorfizmdir.

Böylece, $\forall$ p $\in$ $U_{\alpha\beta}$ için,

$$\psi_{\beta\alpha,p}=\psi_{\beta,p}^{-1} \circ \psi_{\alpha\, p} : F \to F$$

dönüşümleri de diffeomorfizmdir (Greub, Halperin and Vanston, 1972).

2.3.5. Tanım (Lifli manifold)

E ve M C^{∞}- manifoldlar, π:E$\to$M bir C^{∞}- dönüşüm olsun. Eğer,π bir örten submersion ise,(E,π,M) üçlüsüne bir *lifli manifold* denir (Sounders, 1989).

■ (E,π,M,F) bir lif demeti olması halinde (E,π,M) nin bir lifli manifold olacağı açıktır.

2.3.6. Tanım (Uyarlanmış koordinat sistemi)

Bir lifli manifold (E,π,M), boyM=m, boyE=m+n ve W$\subset$E açık altkümesi üzerinde bir lokal koordinat sistemi;

$$y:W \to IR^{m+n}$$

olsun.pr_1:$IR^{m+n} \to IR^m$ olmak üzere,

$$a,b \in W \text{ ve } \pi(a)=\pi(b)=p \Rightarrow pr_1(y(a))= pr_1(y(b))$$

önermesi doğru ise, y ye bir *uyarlanmış (adapted) koordinat sistemi* denir (Sounders, 1989).

■ boyM=m, boyF=r ve boyE=m+n olmak üzere,bir (E,π,M,F) demeti ve bunun lokal ayrışmasından bir (U_α,ψ_α) ikilisi alınsın. Bu durumda,E üzerinde uyarlanmış koordinat sistemi $pr_1:U_\alpha\times V\to U_\alpha$ ve $pr_2: U_\alpha\times V\to V$ izdüşüm fonksiyonları olmak üzere;

$$y_\alpha:\psi_\alpha(U_\alpha\times V)\to IR^{m+n}$$

dönüşümü,

$$y_\alpha=(x^i opr_1 o\psi_\alpha^{-1}, v^k opr_2 o\psi_\alpha^{-1}) \qquad ;1\le i\le m, 1\le k\le n$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada M de $(U_\alpha,(x^i))_{1\le i\le m}$ haritası ve F manifoldunda da bir $(V,(v^k))_{1\le k\le n}$ haritası seçilmiştir.

■$\forall\alpha\in I$ için, $\pi^{-1}(U_\alpha)\subset E$ açık altkümesi üzerinde bu şekilde tanımlı koordinat sistemi seçilebilir. Üstelik $y_\alpha(\psi_\alpha(U_\alpha\times V))\subset IR^{m+r}$ açıktır. Buna göre, $(\psi_\alpha(U_\alpha\times V),y_\alpha)$ ikilisi E için bir harita olur. Böylece tanımlanan haritaların

$$A_E=\{(\psi_\alpha(U_\alpha\times V),y_\alpha)\}_{\alpha\in I}$$

sınıfı E üzerinde bir C^∞- yapı tanımlar.

■ Kısalık için $(x^i opr_1 o\psi_\alpha^{-1}, v^k opr_2 o\psi_\alpha^{-1})$ yerine (x^i,v^k) da yazılabilir.

2.3.7. Tanım (Lif demetinin çapraz kesiti (Cross-section))

$\xi=(E,\pi,M,F)$ herhangi bir lif demeti olsun.

$$\pi o\,\sigma = I_M \quad \text{(özdeşlik)}$$

olacak biçimde tanımlı, $\sigma:M\to E$ C^∞- dönüşümüne ξ lif demeti üzerinde bir *çapraz kesit* denir (Greub, Halperin and Vanston, 1972).

2.3.8. Tanım (Altdemet (subbundle))

$\xi_1=(E_1,\pi_1,M_1,F_1)$ bir lif demeti olsun. Eğer $E_2 \subset E_1$ bir altmanifold olmak üzere, $\xi_2=(E_1,\pi_1|_{E_2}, \pi_2(E_2), F_2)$ dörtlüsü bir lif demeti ise ξ_2 demetine ξ_1 demetinin bir *altdemeti* denir. Burada F_2 bir C^∞- manifolddur (Carmo, 1992).

2.3.9. Tanım (Vektör demeti)

$\xi=(E,\pi,M,F)$ bir C^∞- lif demeti olsun. Eğer, aşağıdaki iki özellik sağlanıyorsa, ξ ye bir *vektör demeti* denir :

(i) $\forall p \in M$ için ,$\pi^{-1}(p)=E_p$ ve F reel vektör uzaylarıdır ;

(ii) $\forall p \in M$, $\psi_{\alpha,p}:F \to E_p$ dönüşümleri lineer izomorfizm olacak biçimde ξ nin $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordinat gösterimi vardır (Greub, Halperin and Vanston, 1972).

2.3.10. Tanım (Alt vektör demeti)

$\xi_1=(E_1,\pi_1,M_1,F_1)$ ve $\xi_2=(E_2,\pi_2,M_2,F_2)$ iki vektör demeti olsun. Eğer aşağıdaki üç aksiyom sağlanıyorsa ξ_1 demetine ξ_2 nin *altvektör demeti* denir:

(i) ξ_2, ξ_1 nin bir altdemetidir;

(ii) $\iota_E:E_2 \to E_1$ ve $\iota_M:M_2 \to M_1$ inclusion dönüşümleri olmak üzere;

$$\iota_M o \pi_2 = \pi_1 o \iota_E \ ;$$

(iii)$\forall p \in M_1$ için,

$$\iota_E|_{E_{2p}}:E_{2P} \to E_1|_{\iota_M(p)}$$

kısıtlanmış dönüşümü lineerdir (Poor, 1981).

■ M nin tüm noktalarındaki tanjant uzaylarının ayrık birleşimi $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ ve TM üzerinde,

$$\pi_M : TM \to M$$

dönüşümü, $\pi(v)=p$, ($v\in T_pM$ ise) şeklinde tanımlansın.

M üzerinde bir harita ($U, \varphi =(x^i))_{1\le i\le m}$ olsun. Bu durumda $\bar{U} = \pi^{-1}(U)$ olmak üzere;

$$\bar{\varphi} : \bar{U} \to \varphi(U) \times IR^m$$

dönüşümü,

$$v \to \bar{\varphi}(v) = (x^i \circ \pi_M(v),\ dx^i(v))_{1\le i\le m}$$

şeklinde tanımlanırsa, $\bar{\varphi}$ dönüşümü 1-1 ve örten olup, görüntü kümesi IR^{2m} uzayının bir açık altkümesidir. O halde $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ ikilisi TM üzerinde 2m-boyutlu bir haritadır. M üzerinde **A**$=\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ atlası verildiğinde TM üzerinde, her bir haritası yukarıdaki şekilde elde edilen bir,

$$\bar{A} = \{(\bar{U}_\alpha, \bar{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$$

atlası tanımlanabilir. $\bar{A}$ sınıfı bir C^∞- atlastır ve TM üzerinde bir C^∞- yapı oluşturur. Bu yapıyla, TM 2m boyutlu bir C^∞- manifold olup, M nin tanjant manifoldu olarak isimlendirilir. Lokal olarak,

$$TM \cong \{(p,z) \mid p\in M,\ z\in T_pM \cong IR^m\}$$

gösterimi de kullanılır.

■ TM üzerinde bir lokal koordinat sistemi $dx^i=y^i$ alınarak

$$\{x^1,\ldots,x^m,y^1,\ldots y^m\}$$

şeklinde ve kısalık için $\varphi=(x^i,y^i)_{1\leq i\leq m}$ veya $y=(y^i)_{1\leq i\leq m}$ olmak üzere ; $\varphi=(x,y)$ yazılacaktır. $\overline{\varphi}_\alpha$ koordinat dönüşümü de $\overline{\varphi}_\alpha=(x_\alpha,y_\alpha)$ şeklinde ifade edilecektir.

■ (TM,π_M,M,IR^m) dörtlüsünün bir vektör demeti olduğu kolayca gösterilebilir. Bu demete , M nin tanjant demeti, sürekli , örten ve C^∞- dönüşüm olan π_M ye de *doğal (kanonik) projeksiyon* denir (Greub, Halperin and Vanston, 1972).

■ M,n boyutlu bir manifold ve T^*M bir $p\in M$ noktasında kotanjant uzay olsun. Yani T^*M, T_pM nin dual uzayıdır. T^*M nin her bir elemanına $p\in M$ noktasında kovektör denir.

$$T^*M = \bigcup_{p\in M} T^*M$$

kümesine M manifoldu üzerinde kotanjant demet denir.

■ $\pi^*: T^*M \to M$ bir projeksiyon dönüşümü olmak üzere (T^*M,π^*,M,IR^m) dörtlüsü bir vektör demetidir. (Yano and Ishihara, 1967)

2.3.11. Tanım (Vertical uzay ve vertical tanjant vektör)

(E,π,M,F) bir lif demeti olsun. $\forall z\in E$ için ,

$$V_z E =\{A_z\in T_zE \mid d\pi_z(A_z) =0 \}$$

kümesi $d(\pi_M)_z : T_zE \rightarrow T_pM$ lineer dönüşümünün çekirdeği olup, T_zE tanjant uzayının bir alt uzayıdır. V_z (E) uzayına E nin z noktasında *vertical uzayı* ve bu uzayın her bir elemanına da bir *vertical tanjant* vektör denir (Greub, Halperin and Vanston, 1972).

■ (E,π,M,F) bir lif demeti olsun.

$$V(E)=\{A_Z \in TE : d\pi_z(A_Z)=0, z\in E\}$$

düşey vektörlerin kümesi gözönüne alınsın. V(E), TE nin altmanifoldudur. $(V(E),\pi_E|_{V(E)},E,IR^r)$ dörtlüsü bir vektör demeti olup, TE demetinin altvektör demetidir. (r=boyF).

2.3.12. Tanım (Vertical altdemet)

V(E) demetine TE vektör demetinin *vertical altdemeti* denir (Greub, Halperin and Vanston, 1972).

2.3.13. Tanım (Lie grubu)

Bir M diferensiyellenebilir manifoldu ve bir G grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa (M, G) ikilisine bir *Lie grubu* denir.

(i) M nin noktaları G nin elemanları ile çakışır.

(ii) $\bullet : M \times M \rightarrow M$

$(a, b) \rightarrow a\bullet b^{-1}$

işlemi her yerde diferensiyellenebilirdir (León and Rodrigues, 1989).

M ye Lie grubunun temel manifoldu ve G yede temel grubu denir.

O halde kısaca bir Lie grubunu şu şekilde tanımlayabiliriz:

■ G bir grup ve (a, b) $\rightarrow a \bullet b^{-1}$ şeklinde tanımlanan $\bullet : G \times G \rightarrow G$ grup işlemi C^{∞} sınıfından diferensiyellenebilir olsun. Eğer G bir diferensiyellenebilir manifold ise G ye bir lie grubu denir.

■ M differensiyellenebilir bir manifold ve G bir Lie grubu olsun. Bir ϕ:MxG$\rightarrow$ M C^{∞} dönüşümü $\forall a,b \in G$ ve $x \in M$ için aşağıdaki şartları sağlıyor ise ϕ ye G nin M üzerine sağdan bir etkisi denir (León and Rodrigues,1989).

(i) $\phi(x, ab) = \phi(\phi(x, a), b)$

(ii) $\phi(x, e) = x$

2.3.14. Tanım (Asli lif demeti (Principal Fiber Bundle))

G bir Lie grubu ve (E,π,M,G) diferensiyellenebilir bir lif demeti olsun. $(E,\pi,M,G)=P$ olmak üzere aşağıdaki iki önerme doğru ise (P,T) ikilisine, yapı grubu G olan diferensiyellenebilir bir *asli lif demeti (principal fibre bundle)* denir.

(i) T: $E \times G \rightarrow E$ fonksiyonu G nin E üstüne sağdan bir etkisidir.

(ii) P nin $\forall x \in U_\alpha$ ($U_\alpha \subset M$ de açık) ve $\forall a,b \in G$ için

$$\varphi_\alpha(x, ab) = T(\varphi_\alpha(x, a), b)$$

olacak biçimde bir $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ koordinat gösterimi vardır.

Yukarıdaki T etkisine asli etki, (ii) önermesini sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ koordinat gösterimine de asli koordinat gösterimi denir (León and Rodrigues,1989).

■ (E,π,M,G) bir asli lif demeti ise, $z \in E$, $a \in G$ için

$$\pi(za) = \pi(z)$$

dır.

■ (P, T) asli lif demeti olsun. $z \in \pi^{-1}(x)$ ise

$$zG = \pi^{-1}(x)$$

tir. Yani z den geçen lif z nin yörüngesine eşittir.

2.3.15. Tanım (Lineer çatı)

M, n boyutlu bir manifold olsun. $x \in M$ olmak üzere T_xM nin sıralı bir $\{x_1,\ldots,x_n\}$ bazına x noktasında bir *lineer çatı* denir (León and Rodrigues,1989).

2.3.16. Tanım (Lineer çatıların asli lif demeti)

M üstündeki bütün lineer çatıların kümesini LM ile gösterelim. LM ye M manifoldunun *çatılarının demeti (bundle of frames)* denir.

$$\pi: LM \to M$$

dönüşümü, $\forall x \in M$ için ve $\forall u \in LM$ (u, $x \in M$ noktasında lineer çatı) için

$$\pi(u)=x$$

şeklinde tanımlanır ve π ye LM nin projeksiyon dönüşümü denir.

$GL(n, IR) = \{ A \mid A=[a_{ij}] \in IR^n_n \ , \ \det A \neq 0\}$ cümlesi matris çarpımına göre bir gruptur. Bu grup manifold yapısına sahiptir ve matris çarpımı altında bir lie grubudur.

$a \in GL(n, IR)$ ve $u \in LM$ olsun. O halde $a=[a_{ij}]$ ve $u=(x_1,\ldots,x_n)$ için;

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

olsun. $\{Y_1,\ldots,Y_n\}$ cümlesi x noktasında bir çatıdır. Ayrıca $(Y_1,\ldots,Y_n)$=ua olduğundan

$$LM \times GL(n, IR) \to LM$$
$$(u, a) \to ua$$

dönüşümü GL(N, IR) nin LM üstüne sağdan bir etkisidir.
$(x^1,\ldots,x^n)$ M nin bir U koordinat komşuluğunda bir lokal koordinat olsun. $x\in U$ için $(\partial/\partial x^1)_x,\ldots, (\partial/\partial x^n)_x$ x noktasında bir lineer çatıdır. Böylece x noktasında her $u=(X_1,\ldots,X_n)$ çatısını

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

ile bir tek şekilde ifade edebiliriz. Burada $[X_{ij}]\in GL(n, IR)$ dir. O halde,

$$\psi: \pi^{-1}(U) \to U\times GL(n, IR)$$
$$u \to \psi(u)=(x, [X_{ij}])$$

bire-bir, örten dönüşümü bulunur.

■ (x^i, X_{ij}) yi $\pi^{-1}(U)$ da lokal koordinatlar sistemi olarak alırsak LM $n+n^2$-boyutlu bir manifold olur. LM, GL(n, IR) yapı grubu ve π projeksiyonu ile M üzerinde bir asli lif demetidir (León and Rodrigues,1989).

2.3.17. Tanım (Birleşik (Associated) demet)

(E,π,M,G) asli lif demeti ve F bir manifold olmak üzere G, F üzerinde soldan bir etki olsun.

$$\phi:(E\times F)\times G \to E\times F$$

dönüşümü $z \in E$, $y \in F$, $g \in G$ için

$$\phi((z,y)g)=(zg,\ g^{-1}y)$$

şeklinde tanımlayalım.

$$\begin{aligned}\phi((z,y),e)&=(ze,\ e^{-1}y)\\&=(z,\ y)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\phi((z,y),ab)&=(z(ab),\ (ab)^{-1}y)\\&=((za)b,\ b^{-1}(a^{-1}y))\\&=\phi((za,\ a^{-1}y),b)\\&=\phi(\phi((z,y),a),b)\end{aligned}$$

olduğundan ϕ fonksiyonu G nin ExF manifoldu üzerine sağdan bir etkidir. ϕ etkisinden elde edilen (z,y)G yörüngelerinin kümesini Ex_GF ile gösterelim.

$$\pi_F\colon Ex_GF \to M$$

dönüşümünü

$$\pi_F((z,y)G)=\pi(z)$$

şeklinde tanımlarsak (Ex_GF, π_F,M,F) dörtlüsü bir lif demetidir. Bu demete (E,π,M,G) *asli lif demeti ile birleşik lif demeti* denir (Isham, 1989).

2.3.1. Uyarı

Çalışmanın bundan sonraki bölümlerinde , kısalık için tekrar edilen alt-üst indis ya da indisler üzerinden toplam alınacaktır. Örneğin ,

$$\left(X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \equiv \left(X = \sum_i \; X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

$$\left(F = F^i{}_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j\right) \equiv \left(F = \sum_{i,j} F^i{}_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j\right)$$

şeklinde düşünülecektir.

3. LİFTLER

$\pi: E \to M$, lineer çatıların asli lif demeti LM ile birleşik standart lifi N boyutlu vektör uzayı F olan bir vektör demeti olsun. E nin C^∞ sınıfından kesitlerinin kümesini $\Gamma(E)$ ve M üzerinde (E üzerinde) C^∞ sınıfından tüm vektör alanlarının $C^\infty(M)$-modülünü $\chi(M)$ ($\chi(E)$) ile gösterelim. Burada $C^\infty(M)$, M üzerinde C^∞ sınıfından reel değerli fonksiyonların kümesidir.

3.1. Vektör Alanlarının Horizontal Lifti

3.1.1. Tanım (E üzerinde konneksiyon)

E total uzayı üzerinde bir konneksiyon:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} : \chi(M) \times \Gamma(E) &\to \Gamma(E) \\ (X, S) &\to \tilde{\nabla}_X S \end{aligned}$$

$f \in C^\infty(M)$, $S \in \Gamma(E)$, $\forall X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere;

i) $\tilde{\nabla}_{fX} S = f \tilde{\nabla}_X S$

ii) $\tilde{\nabla}_{X+Y} S = \tilde{\nabla}_X S + \tilde{\nabla}_X S$

iii) $\tilde{\nabla}_X fS = f \tilde{\nabla}_X S + X(f) S$

iv) $\tilde{\nabla}_X (S_1 + S_2) = \tilde{\nabla}_X S_1 + \tilde{\nabla}_X S_2$

şartlarını sağlayan bir dönüşümdür.

■ (U, Φ), n-boyutlu C^∞ M manifoldu üzerinde bir harita olsun. Böylece E nin U üzerinde bir $\tilde{\Phi}$ tirivializationu diffeomorfizmdir.

$$\begin{tikzcd} E|_U = \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\tilde{\Phi}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

diyagramı komutatiftir. Yani;

$$pr_1 o \widetilde{\Phi} = \pi \Leftrightarrow pr_1 = \pi o \widetilde{\Phi}^{-1}$$

dir.

■ $E_1, E_2, \ldots, E_N$, F nin sabit bazı olsun. $E|_U$ nun $\rho_1, \ldots, \rho_N$ kesitleri

$$\rho_a(x) = \widetilde{\Phi}^{-1}(x, E_a)\ , \ a=1,2,\ldots,N \qquad (3.1)$$

olarak tanımlanır ve U üzerinde E nin tirivialization'u için adapte kesitler olarak isimlendirilir.

(x,E_a), $\{x\}xF$ nın bir bazı ve

$$E_x = \pi^{-1}(x) \xrightarrow{\widetilde{\Phi}} \{x\}xF$$

dönüşümü lineer izomorfizm olduğundan $\rho_a(x) = \widetilde{\Phi}^{-1}(x, E_a)$ $E|_U$ nun bir bazıdır.

$(U, x^1, \ldots, x^n)$, M üzerinde lokal koordinatlar olsun. Aşağıdaki eşitliği sağlıyacak şekilde U üzerinde tanımlı bir tek Γ_{ia}^b fonksiyonu vardır.

$$\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \rho_a = \Gamma_{ia}^b \rho_b \qquad (3.2)$$

$\gamma : (a, b) \to M$, C^∞ sınıfından bir eğri ve $J_\gamma(E)$, γ boyunca tanımlanan E nin bütün kesitlerinin kümesi olsun. $J_\gamma(E)$ nin bir elemanı, $\pi o \rho = \gamma$ eşitliğini sağlayacak şekilde $\rho : (a, b) \to E$ C^∞ sınıfından bir dönüşümdür. Böylece E de bir $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonu

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} : J_\gamma(E) \to J_\gamma(E)$$

dönüşümü ile tanımlanır ve γ boyunca kovaryant türev olarak adlandırılır. $S=S^a(\rho_a o\gamma)$ $J_\gamma(E)$ nin bir elemanı ise $(U, x^1,..., x^n)$ M nin lokal koordinatları olmak üzere

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} S &= \tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} S^a(\rho_a o\gamma) \\
&= \dot{\gamma}(S^a)(\rho_a o\gamma) + S^a \tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}(\rho_a o\gamma) \\
&= \frac{d}{dt} S^a(\rho_a o\gamma) + S^a \tilde{\nabla}_{\frac{d\gamma^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}}(\rho_a o\gamma) \\
&= \frac{d}{dt} S^a(\rho_a o\gamma) + S^a \frac{d}{dt}\gamma^i \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\rho_a o\gamma) \\
&= \frac{d}{dt} S^a(\rho_a o\gamma) + S^a \frac{d}{dt}\gamma^i (\Gamma^b_{ia} o\gamma)(\rho_b o\gamma) \\
&= \left\{ \frac{d}{dt} S^a + (\Gamma^a_{ib} o\gamma) \frac{d}{dt}\gamma^i S^b \right\} \rho_a
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} S = \left\{ \frac{d}{dt} S^a + (\Gamma_{ib}{}^a o\gamma) \frac{d}{dt}\gamma^i S^b \right\} \rho_a \tag{3.3}$$

yazabiliriz. Burada; $\gamma^i = x^i o\gamma$, $i = 1,2,\ldots,n$, $a = 1,2,\ldots,N$ dir.

3.1.1. Teorem

$\gamma:(a,b) \to M$ bir eğri olsun. Eğer bazı $t_0 \in (a,b)$ için y, $E_{\gamma(t_0)} = \pi^{-1}(\gamma(t_0))$ nin elemanı ise

(i) $S(t_0)=y$

(ii) $\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} S = 0$

olacak şekilde bir ve yalnız bir tane $S \in J_\gamma(E)$ vardır (Crittenden, 1962).

■ y, E nin sabit bir noktası ve $x = \pi(y)$ olsun. $S:(-\varepsilon, \varepsilon) \to E$, 3.1.1. teoreminin (i) ve (ii) şartlarını $t_0=0$ için sağlayan $\gamma=\pi o S$ boyunca bir kesit olmak üzere bütün $\dot{S}(0)$ hız vektörlerinin kümesini H_y ile gösterelim.

■ $(U, x^1,\ldots, x^n)$, M de lokal koordinatlar ve $\widetilde{\Phi}: E|_U = \pi^{-1}(U) \to U \times F$, U üzerinde E nin bir tirivialization'u olsun. Böylece bütün $y \in \pi^{-1}(U)$ için

$$x^i(y) = x^i(\pi(y))\,;$$
$$y^a(y)=(\rho_a)^*(y)\,;$$

olmak üzere E deki $(\pi^{-1}(U),\ x^i,\ y^a)$ indirgenmiş lokal koordinatlarını tanımlayabiliriz.

■ $(\pi^{-1}(U), x^i, y^a)$ koordinatlarına göre elde edilen

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^a}\right\},\ 1 \le i \le n,\ 1 \le a \le N$$

cümlesini

$$\{\partial_i, \delta_a\},\ 1 \le i \le n,\ 1 \le a \le N$$

ile göstereceğiz.

$X = \dot{\gamma}(0)$, γ nın bir hız vektörü ve S, 3.1.1. teoreminin (i) ve (ii) şartlarını sağlayan kesit olsun. S nin lokal ifadesi

$$S=(x^i, S^a)$$

olduğundan

$$S o\gamma=(x^i o\gamma, S^a o\gamma)$$
$$=(\gamma^i, S^a o\gamma)$$

dır. Bu durumda,

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d\gamma^i}{dt}\right|_{t=0} \partial_i + \left.\frac{dS^a}{dt}\right|_{t=0} \delta_a \tag{3.4}$$

dır.

3.1.1. Teoreminin (ii) şartından,

$$\left.\frac{d}{dt}S^a\right|_{t=0} = \left.(-(\Gamma_{ib}{}^a o\gamma)\frac{d}{dt}\gamma^i S^b)\right|_{t=0} \tag{3.5}$$

bulunur. Eş. 3.4 ve Eş. 3.5 den;

$$\begin{aligned}\dot{S}(0) &= \left.\frac{d\gamma^i}{dt}\right|_{t=0} \partial_i - (\Gamma_{ib}^a o\gamma)\frac{d\gamma^i}{dt} S^b \delta_a \\ &= X^i \partial_i - X^i \Gamma_{ia}^b y^a \delta_b\end{aligned}$$

dır. Buna göre γ değiştikçe X^i bileşenleri değişir. Horizontal uzayın tanımına göre

$$\dot{S}(0) = X^i(\partial_i - \Gamma_{ia}^b y^a \delta_b) \tag{3.6}$$

olduğundan γ değiştikçe H_y taranır. Bu eşitlikte γ ya bağlı olan sadece x^i bileşenleridir. Bu demektirki $\{\partial_i - \Gamma_{ia}^b y^a \delta_b$ vektörleri H_y uzayını gerer. Ayrıca bu lineer bağımsız olduğundan H_y nin bir bazıdır.

$$H(E) = \bigcup_{y \in E} H_y$$

cümlesi 2n+N boyutlu bir manifold olup buna E nin horizontal demeti denir.

■ $\forall y \in E$ için T_yE nin vertical altuzayını $V_yE = \mathrm{Ker}\, d\pi|_y = T_y(E_{\pi(y)})$ ile gösterelim.

$$d\pi|_y : T_yE \to T_{\pi(y)}M$$

dönüşümü örten olduğundan rank($d_y\pi$)=n dir.

$$boy(T_yE)=rank(d_y\pi)+boyKer(d_y\pi)$$

eşitliğinden boyKer($d_y\pi$)=N bulunur.

$\eta \in V_yE \cap H_y$ olsun.

$\eta \in H_y$ ise;

$$\eta = \eta^i(\partial_i - \Gamma^b_{ia} y^a \delta_b)$$

dır.

$\eta \in V_yE$ ise;

$$d(\eta) = \eta^i \partial_i$$
$$0 = \eta^i \partial_i$$

olduğundan η^i=0 bulunur.

$V_yE \cap H_y$={0} ve boyV_yE=N , boyH_y=n olduğundan T_yE uzayını V_yE ve H_y altuzaylarının direkt toplamı olarak

$$T_yE = V_yE \oplus H_y \tag{3.7}$$

şeklinde yazabiliriz.

■ boyH_y=boy$T_{\pi(y)}M$ ve $d\pi|_y|_{H_y} : H_y \to T_{\pi(y)}M$ dönüşümü bazı baza dönüştürdüğünden bir lineer izomorfizmdir.

3.1.2. Tanım (Horizontal lift)

X, M üzerinde bir vektör alanı olsun.

$$X^H y = (d\pi|_y|_{H(y)})^{-1}(X_{\pi(y)}) \tag{3.8}$$

eşitliği ile elde edilen X^H:E $\rightarrow$ TE dönüşümü bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına X in E ye *horizontal lifti* denir.

3.1.2. Teorem

$\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $f \in C^\infty(M)$ için $f^V = fo\pi$ olmak üzere;

(i) $(X+Y)^H = X^H + Y^H$
(ii) $(fX)^H = f^V X^H$
(iii) $X^H(f^V) = (Xf)^V$

eşitlikleri sağlanır (Poor, 1981).

İspat

$y \in E$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
(X+Y)^H y &= (d\pi|_y|_{H_y})^{-1}((X+Y)_{\pi(y)}) \\
&= (d\pi|_y|_{H_y})^{-1}(X_{\pi(y)} + Y_{\pi(y)}) \\
&= (d\pi|_y|_{H_y})^{-1}(X_{\pi(y)}) + (d\pi|_y|_{H_y})^{-1}(Y_{\pi(y)}) \\
&= X^H y + Y^H y \\
\Rightarrow (X+Y)^H &= X^H + Y^H
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(fX)^H y &= (d\pi|_y|_{H_y})^{-1}((fX)_{\pi(y)}) \\
&= (d\pi|_y|_{H_y})^{-1}((fo\pi)(y)X_{\pi(y)}) \\
&= (fo\pi)(y)(d\pi|_y|_{H_y})^{-1}(X_{\pi(y)}) \\
&= f^V y X^H y \\
&= (f^V X^H)y
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow (fX)^H = f^V X^H$$

$$
\begin{aligned}
(X^H(f^V))y &= ((d\pi|_y|_{H_y})^{-1}(X_{\pi(y)}))(f^V y) \\
&= ((d\pi|_y|_{H_y})^{-1}(X_{\pi(y)}))(fo\pi(y)) \\
&= d\pi|_y((d\pi|_y|_{H_y})^{-1}(X_{\pi(y)}))f|_{\pi(y)} \\
&= d\pi|_y((d\pi|_y|_{H_y})^{-1}(X_{\pi(y)}))f|_{\pi(y)} \\
&= (Xf)_{\pi(y)} \\
&= ((Xf)o\pi)_y \\
&= (Xf)^V y
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow X^H f^V = (Xf)^V$$

dir.

3.1.3. Teorem

$(\pi^{-1}(U), x^i, y^a)$ indirgenmiş lokal koordinatlara göre

$$X^H y = X^i(\pi(y))\partial_i - X^i(\pi(y))\Gamma_{ia}^b(\pi(y))y^a\delta_b \qquad (3.9)$$

dir (Poor, 1981).

İspat:

$y \in E$ olmak üzere;

$X_{\pi(y)} = X^i\big|_{\pi(y)} \partial_i$ olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
X^H y &= (d\pi|_y\big|_{H_y})^{-1}(X^i\big|_{\pi(y)}\partial_i) \\
&= X^i\big|_{\pi(y)}(d\pi|_y\big|_{H_y})^{-1}(\partial_i) \\
&= X^i\big|_{\pi(y)}(\partial_i)^H \\
&= X^i\big|_{\pi(y)}(\partial_i - \Gamma_{ia}^b(\pi(y))y^a\delta_b) \\
&= X^i(\pi(y))\partial_i - X^i(\pi(y))\Gamma_{ia}^b(\pi(y))y^a\delta_b
\end{aligned}
$$

bulunur.

3.2. E'nin Kesitlerinin Vertical Lifti:

3.2.1. Tanım (M üzerinde bir fonksiyonun vertical lifti)

$f: M \to IR$ ye C^∞ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f^V = f o \pi$ fonksiyonuna f nin E ye *vertical lifti* denir.

3.2.2. Tanım (İzdüşüm (projection))

π: $E \to M$, standart lifi F olan bir vektör demeti ve $\tilde{X} \in \chi(E)$ olsun. $\tilde{X}$ ile M üzerinde π bağlı ($d\pi o \tilde{X} = X o \pi$) bir X vektör alanına $\tilde{X}$ nın *izdüşümü (projection)* denir.

3.2.1. Teorem

$\tilde{X}$ ile π bağlı olan $X \in \chi(M)$ vektör alanı tektir.

İspat

dom $\widetilde{X}=\Omega$ olsun. Bu durumda $\pi(\Omega)\subset$domX dir. π demet projeksiyonu olduğundan açık bir dönüşümdür. Yani $\pi(\Omega)$ açıktır. X in $\pi(\Omega)$ ye kısıtlanmışı yeni bir vektör alanıdır. Bu vektör alanı tektir. Eğer $\widetilde{X}$ ile π bağlı olan bir vektör alanı Y ise $\pi(\Omega)$ üzerinde $(X-Y)o\pi=0$ dır. O halde $\forall p\in\pi(\Omega)$ için $(X-Y)_p=0$ olup buradan X=Y bulunur.

3.2.2. Teorem

M üzerindeki bütün izdüşürülebilir (projectable) vektör alanlarının kümesi bir Lie cebiridir.

3.2.3. Teorem

E üzerindeki bir $\widetilde{X}$ vektör alanı M üzerindeki bir X vektör alanı üzerinde projectabledir gerek ve yeter şart $\forall f\in C^\infty(M)$ için

$$(\widetilde{X}(f^V)) = (X(f))^V \tag{3.10}$$

dir.

İspat

$X\in\chi(M)$, $\widetilde{X}$ nin bir izdüşümü olsun.

$$\begin{aligned}
(\widetilde{X}(f^V))(y) &= \widetilde{X}_y(f^V)(y) \\
&= \widetilde{X}_y((fo\pi)(y)) \\
&= (d\pi|_y(\widetilde{X}_y))f|_{\pi(y)} \\
&= (X_{\pi(y)})f|_{\pi(y)} \\
&= (X(f))^V(y)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (\tilde{X}(f^V)) = (X(f))^V$$

bulunur.

$(\tilde{X}(f^V)) = (X(f))^V$ olsun.

$\tilde{X} = (\tilde{X}^i, \tilde{X}^a)$ olduğundan;

$$\begin{aligned}(\tilde{X}(f^V))(y) &= \tilde{X}^i\big|_y \partial_i(f^V)\big|_y + \tilde{X}^a\big|_y \delta_a(f^V)\big|_y \\ &= \tilde{X}^i\big|_y \partial_i(f^V)\big|_y\end{aligned} \qquad (3.11)$$

$$\begin{aligned}(X(f))^V(y) &= (X^i\partial_i(f))\big|_{\pi(y)} \\ &= (X^i o\pi)(y)(\partial_i(f))\big|_{\pi(y)} \\ &= (X^i o\pi)(y)\partial_i(f^V)\big|_y\end{aligned} \qquad (3.12)$$

Eş. 3.11 ve Eş. 3.12 $\forall f$ için geçerli olduğundan özel olarak $\{X^j\}$ ler içinde geçerlidir. Buradan hipotez gereği $\tilde{X}^i(y) = (X^i o\pi)(y)$ olduğundan $\tilde{X}$ izdüşürülebilirdir.

■ Eğer E nin herbir y noktası için $\tilde{X}_y$ bir vertical vektör ise $\tilde{X}$ vektör alanı vertical olarak adlandırılır. O halde $\tilde{X}_y \in V_y(E)$ dir. E üzerinde bir vertical vektör alanı M üzerinde projectabledir ve projection sıfırdır (Gancarcewicz and Rahmani, 1989).

Aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.2.1. Sonuç

$\tilde{X}$ E üzerinde bir vektör alanı olsun. $\tilde{X}$ ın E üzerinde bir vertical vektör alanı olabilmesi için gerek ve yeter şart M üzerindeki her f fonksiyonu için

$$\widetilde{X}(f^V) = 0$$

olmasıdır.

İspat

$\widetilde{X} \in \chi(M)$ vertical vektör alanı olsun.

$$\begin{aligned}(\widetilde{X}(f^V))(y) &= (\widetilde{X}^a(y)\delta_a|_y)(fo\pi)(y) \\ &= d\pi|_y(\widetilde{X}^a(y)\delta_a|_y)f|_{\pi(y)} \\ &= (\widetilde{X}^a(y))(d\pi|_y\delta_a|_y)df|_{\pi(y)} \\ &= 0\end{aligned}$$

dir.

Tersine $\widetilde{X}(f^V) = 0$ olsun.

$$\begin{aligned}(\widetilde{X}(f^V))(y) &= (\widetilde{X}^i(\partial_i - \Gamma^b_{ia}y^a\delta_b) + \widetilde{X}^a\delta_a)(fo\pi)(y) \\ &= (\widetilde{X}^i(y)d\pi|_y(\partial_i) - \widetilde{X}^i(y)\Gamma^b_{ia}y^a d\pi|_y(\delta_b) + \widetilde{X}^a(y)d\pi|_y(\delta_a))f|_{\pi(y)} \\ &= (\widetilde{X}^i(y)(\partial_i))f|_{\pi(y)} \\ &= \widetilde{X}^i(y)(\partial_i(f^V))\end{aligned}$$

Hipotezden $\widetilde{X}^i = 0$ bulunur. O halde $\widetilde{X} = \widetilde{X}^a\delta_a$ olduğundan $\widetilde{X}$ vertical vektör alanıdır.

■ $E_{\pi(y)} = \pi^{-1}(\pi(y))$ vektör uzayı olduğundan E nin her y noktası için,

$$\Psi_y : V_yE = T_y(E_{\pi(y)}) \rightarrow E_{\pi(y)}$$
$$V = V^a\delta_a \rightarrow \Psi_y(V) = V^a\rho_a|_{\pi(y)}$$

şeklinde bir lineer izomorfizm tanımlayabiliriz.

3.2.3. Tanım (E nin kesitlerinin vertical lifti)

S:M $\rightarrow$ E , E nin bir kesiti olsun. Yukarıda tanımladığımız izomorfizm yardımı ile $\forall y \in E$ için

$$S_y^V = \Psi_y^{-1}(S_{\pi(y)}) \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlı vektör alanına S nin E ye *vertical lifti* denir (Gancarcewicz and Rahmani, 1989).

■ $S = S^a \rho_a$ ve $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_N$ adapte kesitler olmak üzere E üzerindeki indirgenmiş haritayı kullanırsak

$$S^V = S^a \delta_a \tag{3.14}$$

dir.

3.2.3. Teorem

Eğer S, S' E nin kesitleri, f, g M üzerinde fonksiyonlar ve $f^V = f \circ \pi$ olmak üzere;

(i) $(S + S')^V = S^V + S'^V$
(ii) $(fS)^V = f^V S^V$
(iii) $S^V(f^V) = 0$

dir.

İspat

(i)

$$
\begin{aligned}
(S+S')^V(y) &= (\Psi_y)^{-1}(S+S')_{\pi(y)} \\
&= (\Psi_y)^{-1}(S_{\pi(y)} + S'_{\pi(y)}) \\
&= (\Psi_y)^{-1}(S_{\pi(y)}) + (\Psi_y)^{-1}(S'_{\pi(y)}) \\
&= (S^V + S'^V)(y)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow (S+S')^V = S^V + S'^V$$

dir.

(ii)

$$
\begin{aligned}
(fS)^V(y) &= (\Psi_y)^{-1}((fS)_{\pi(y)}) \\
&= (\Psi_y)^{-1}(f|_{\pi(y)} S_{\pi(y)}) \\
&= (fo\pi)(y)(\Psi_y)^{-1}(S_{\pi(y)}) \\
&= (f^V S^V)(y)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow (fS)^V = f^V S^V$$

dir.

(iii)

$$
\begin{aligned}
(S^V(f^V))(y) &= ((\Psi_y)^{-1}(S_{\pi(y)}))(f^V)(y) \\
&= ((\Psi_y)^{-1}(S_{\pi(y)}))(fo\pi)(y) \\
&= (d\pi|_y(S^a \delta_a|_{\pi(y)}))f|_{\pi(y)} \\
&= (S^a d\pi|_y(\delta_a|_{\pi(y)}))f|_{\pi(y)} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

3.3. Lineer Çatıların Asli Lif Demeti İle Birleşik π:E $\rightarrow$ M Vektör Demetinin E total Uzayı İçin M üzerinde Lineer Konneksiyonların Horizontal Lifti

3.3.1. Teorem

Γ, M üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Eğer π: E $\rightarrow$ M bir vektör demeti ise E manifoldu üzerinde bir ve yalnız bir $\widetilde{\nabla}$ lineer konneksiyonu vardır. M üzerindeki bütün X, Y vektör alanı ve E nin bütün S, S' kesitleri için;

$$\begin{aligned}
&\text{i) } \widetilde{\nabla}_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H \\
&\text{ii) } \widetilde{\nabla}_{X^H} S^V = (\nabla_X S)^V \\
&\text{iii) } \widetilde{\nabla}_{S^V} X^H = 0 \\
&\text{iv) } \widetilde{\nabla}_{S^V} S'^V = 0
\end{aligned}$$

dir. Burada ∇, LM lineer çatıların asli lif demeti ile birleştirilmiş vektör demetlerinin kesitlerinin M üzerindeki vektör alanlarına göre kovaryant türevidir (Gancarcewicz and Rahmani, 1989).

Bu teoremi ispatlamadan önce aşağıdaki lemmayı verelim.

3.3.1. Lemma

Γ, M üzerinde bir lineer konneksiyon ve $\widetilde{\nabla}$, E üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. M üzerinde bir (U, x^i) haritası için E üzerindeki indirgenmiş haritaya göre $\widetilde{\nabla}$ nın Christoffel sembolleri;

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_i} \partial_j = \widetilde{\Gamma}^k_{ij} \partial_k + \widetilde{\Gamma}^a_{ij} \delta_a \tag{3.15}$$

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_i} \delta_a = \widetilde{\Gamma}^j_{ia} \partial_j + \widetilde{\Gamma}^b_{ia} \delta_b \tag{3.16}$$

$$\widetilde{\nabla}_{\delta_a}\partial_i = \widetilde{\Gamma}^j_{ai}\partial_j + \widetilde{\Gamma}^b_{ai}\delta_b \tag{3.17}$$

$$\widetilde{\nabla}_{\delta_a}\delta_b = \widetilde{\Gamma}^i_{ab}\partial_i + \widetilde{\Gamma}^c_{ab}\delta_c \tag{3.18}$$

eşitlikleri ile belirlidir.

Eğer 3.3.1. teoreminin şartlarını sağlattırırsak:

Γ^i_{jk}, Γ lineer konneksiyonunun Christoffel sembolleri ve Γ^a_{ib}, i=1,2,3,…,n ; a,b=1,2,3,…,N Eş. 3.2 de tanımlandığı gibi olmak üzere;

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}, \tag{3.19}$$

$$\widetilde{\Gamma}^a_{ji} = (\partial_i\Gamma^a_{jb} + \Gamma^a_{ic}\Gamma^c_{jb} - \Gamma^k_{ij}\Gamma^a_{kb})y^b, \tag{3.20}$$

$$\widetilde{\Gamma}^i_{ja} = 0, \tag{3.21}$$

$$\widetilde{\Gamma}^b_{ia} = \Gamma^b_{ia}, \tag{3.22}$$

$$\widetilde{\Gamma}^j_{ia} = 0, \tag{3.23}$$

$$\widetilde{\Gamma}^b_{ai} = \Gamma^b_{ia}, \tag{3.24}$$

$$\widetilde{\Gamma}^i_{ab} = 0, \tag{3.25}$$

$$\widetilde{\Gamma}^a_{bc} = 0, \tag{3.26}$$

dir.

İspat

$\delta_a=(\rho_a)^V$ dır. Ayrıca Eş. 3.9 dan

$$(\partial_i)^H = \partial_i - \Gamma^c_{ib}y^c\delta_b$$

(i)

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{\delta_a}(\partial_i)^H &= \widetilde{\nabla}_{\delta_a}(\partial_i - \Gamma^b_{ic}y^c\delta_b) \\
&= \widetilde{\nabla}_{\delta_a}\partial_i - \widetilde{\nabla}_{\delta_a}\Gamma^b_{ic}y^c\delta_b \\
&= \widetilde{\nabla}_{\delta_a}\partial_i - \delta_a(\Gamma^b_{ic}y^c)\delta_b - \Gamma^b_{ic}y^c\widetilde{\nabla}_{\delta_a}\delta_b \\
&= \widetilde{\nabla}_{\delta_a}\partial_i - \delta_a(\Gamma^b_{ic}y^c)\delta_b \\
&= \widetilde{\nabla}_{\delta_a}\partial_i - \Gamma^b_{ic}\delta_a(y^c)\delta_b \\
&= \widetilde{\nabla}_{\delta_a}\partial_i - \Gamma^b_{ia}\delta_b
\end{aligned}$$

$\widetilde{\nabla}_{\delta_a}\partial_i = \widetilde{\Gamma}^j_{ai}\partial_j + \widetilde{\Gamma}^b_{ai}\delta_b$ ve 3.3.1. teoreminden,

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{\delta_a}(\partial_i)^H &= \widetilde{\Gamma}^j_{ai}\partial_j + (\widetilde{\Gamma}^b_{ai} - \Gamma^b_{ia})\delta_b \\ 0 &= \widetilde{\Gamma}^j_{ai}\partial_j + (\widetilde{\Gamma}^b_{ai} - \Gamma^b_{ia})\delta_b \end{aligned}$$

$\Rightarrow \widetilde{\Gamma}^j_{ai} = 0$ ve $\widetilde{\Gamma}^b_{ai} = \Gamma^b_{ia}$ bulunur. .

(ii) $\widetilde{\nabla}_{\delta_a}\delta_b = \widetilde{\Gamma}^i_{ab}\partial_i + \widetilde{\Gamma}^c_{ab}\delta_c = 0$ oluşundan $\widetilde{\Gamma}^i_{ab} = 0$ ve $\widetilde{\Gamma}^a_{bc} = 0$ dır. Çünkü $(\partial_1,\dots,\partial_n,\delta_1,\dots,\delta_N)$, $\forall y \in \pi^{-1}(U)$ noktasında bazdır.

(iii)

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{(\partial_i)^H}\delta_a &= \widetilde{\nabla}_{\partial_i - \Gamma^b_{ic}y^c\delta_b}\delta_a \\ &= \widetilde{\nabla}_{\partial_i}\delta_a - \Gamma^b_{ic}y^c\widetilde{\nabla}_{\delta_b}\delta_a \\ &= \widetilde{\Gamma}^l_{ia}\partial_l + \widetilde{\Gamma}^c_{ia}\delta_c \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{(\partial_i)^H}\delta_a &= \widetilde{\nabla}_{(\partial_i)^H}(\rho_a)^V \\ &= (\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\rho_a)^V \\ &= (\Gamma^c_{ia}\rho_c)^V \\ &= \Gamma^c_{ia}\delta_c \end{aligned}$$

$\Rightarrow \widetilde{\Gamma}^l_{ia}\partial_l + \widetilde{\Gamma}^c_{ia}\delta_c = \Gamma^c_{ia}\delta_c$ dır.

$(\partial_1,\dots,\partial_n,\delta_1,\dots,\delta_N)$, $\forall y \in \pi^{-1}(U)$ noktasında baz olduğundan

$\widetilde{\Gamma}^l_{ia} = 0$ ve $\widetilde{\Gamma}^c_{ia} = \Gamma^c_{ia}$ dır.

(iv)

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{(\partial_i)^H}(\partial_j)^H &= \widetilde{\nabla}_{\partial_i - \Gamma^a_{ib}y^b\delta_a}(\partial_j - \Gamma^d_{jc}y^c\delta_d) \\ &= \widetilde{\nabla}_{\partial_i - \Gamma^a_{ib}y^b\delta_a}\partial_j - \widetilde{\nabla}_{\partial_i - \Gamma^a_{ib}y^b\delta_a}\Gamma^d_{jc}y^c\delta_d \end{aligned}$$

dır

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_i-\Gamma^a_{ib}y^b\delta_a}\partial_j=\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\partial_j-\Gamma^a_{ib}y^b\widetilde{\nabla}_{\Gamma^a_{ib}y^b\delta_a}\partial_j$$
$$=\widetilde{\Gamma}^l_{ij}\partial_l+\widetilde{\Gamma}^d_{ij}\delta_d-\Gamma^a_{ib}y^b(\widetilde{\Gamma}^i_{aj}\partial_i+\widetilde{\Gamma}^b_{aj}\delta_b)$$
$$=\widetilde{\Gamma}^l_{ij}\partial_l+\widetilde{\Gamma}^d_{ij}\delta_d-\Gamma^a_{ib}y^b\widetilde{\Gamma}^b_{ja}\delta_b$$

$$\widetilde{\nabla}_{\partial_i-\Gamma^a_{ib}y^b\delta_a}\Gamma^d_{jc}y^c\delta_d=\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\Gamma^d_{jc}y^c\delta_d-\widetilde{\nabla}_{\Gamma^a_{ib}y^b\delta_a}\Gamma^d_{jc}y^c\delta_d$$
$$=\partial_i(\Gamma^d_{jc}y^c)\delta_d+\Gamma^d_{jc}y^c\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\delta_d-\Gamma^a_{ib}y^b\widetilde{\nabla}_{\delta_a}\Gamma^d_{jc}y^c\delta_d$$
$$=\partial_i(\Gamma^d_{jc}y^c)\delta_d+\Gamma^d_{jc}y^c\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\delta_d-\Gamma^a_{ib}y^b\delta_a(\Gamma^d_{jc}y^c)\delta_d$$
$$-\Gamma^a_{ib}y^b\Gamma^d_{jc}y^c\widetilde{\nabla}_{\delta_a}\delta_d$$
$$=\partial_i(\Gamma^d_{jc}y^c)\delta_d-\Gamma^a_{ib}y^b\delta_a(\Gamma^d_{jc}y^c)\delta_d+\Gamma^d_{jc}y^c\widetilde{\nabla}_{\partial_i}\delta_d$$
$$=\partial_i(\Gamma^d_{jc}y^c)\delta_d-\Gamma^a_{ib}y^b\Gamma^d_{jc}\delta_a(y^c)\delta_d+\Gamma^d_{jc}y^c\widetilde{\Gamma}^j_{id}\partial_j+\Gamma^d_{jc}y^c\widetilde{\Gamma}^b_{id}\delta_b$$
$$=\partial_i(\Gamma^d_{jc}y^c)\delta_d-\Gamma^a_{ib}y^b\Gamma^d_{ja}\delta_d+\Gamma^d_{jc}y^c\widetilde{\Gamma}^b_{id}\delta_b$$

$$\Rightarrow\widetilde{\nabla}_{(\partial_i)^H}(\partial_j)^H=\widetilde{\Gamma}^l_{ij}\partial_l+\widetilde{\Gamma}^d_{ij}\delta_d-\Gamma^a_{ib}y^b\widetilde{\Gamma}^b_{ja}\delta_b-\partial_i(\Gamma^d_{jc}y^c)\delta_d+\Gamma^a_{ib}y^b\Gamma^d_{ja}\delta_d$$
$$-\Gamma^d_{jc}y^c\widetilde{\Gamma}^b_{id}\delta_b \tag{3.27}$$
$$=\widetilde{\Gamma}^l_{ij}\partial_l+\widetilde{\Gamma}^d_{ij}\delta_d+\Gamma^a_{ib}\Gamma^d_{ja}y^b\delta_d-\partial_i(\Gamma^d_{jc}y^c)\delta_d$$

$$\widetilde{\nabla}_{(\partial_i)^H}(\partial_j)^H=(\nabla_{\partial_i}\partial_j)^H$$
$$=(\Gamma^l_{ij}\partial_l)^H$$
$$=\Gamma^l_{ij}(\partial_l)^H \tag{3.28}$$
$$=\Gamma^l_{ij}\partial_l-\Gamma^l_{ij}\Gamma^b_{lc}y^c\delta_b$$

Eş. 3.27 ve Eş. 3.28 den $\widetilde{\Gamma}^l_{ij}=\Gamma^l_{ij}$ ve $\widetilde{\Gamma}^d_{ij}=(\partial_i\Gamma^d_{jc}+\Gamma^a_{jc}\Gamma^d_{ia}-\Gamma^l_{ij}\Gamma^d_{lc})y^c$ bulunur.

3.3.1. Teoreminin İspatı

Teoremin (i), (ii), (iii) ve (iv) şartlarını sağlayan E üzerindeki $\widetilde{\nabla}$ lineer konneksiyonu tektir. Çünkü 3.3.1. lemma ya göre $\widetilde{\nabla}$ nın Christoffel sembolleri M üzerinde verilen lineer konneksiyon tarafından tek olarak tayin edilir. O halde sadece $\widetilde{\nabla}$ nin varlığını ispatlamamız yeterlidir.

(U, x^i), M üzerinde bir harita olsun. $E|_U$ üzerinde indirgenmiş haritaya göre Christoffel sembolleri Eş. 3.19 dan Eş. 3.26 ya kadar olan eşitlikleriyle verilen $\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyonunu tanımlayabiliriz. $E|_U$ üzerine bu $\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyonu i,j=1,...,n ve α,β=1,....N için,

$$\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}_{(\partial_i)^H}(\partial_j)^H = (\nabla_{\partial_i}\partial_j)^H,\\
&\tilde{\nabla}_{(\partial_i)^H}(\rho_\alpha)^V = (\nabla_{\partial_i}\rho_\alpha)^V,\\
&\tilde{\nabla}_{(\rho_\alpha)^V}(\partial_i)^H = 0,\\
&\tilde{\nabla}_{(\rho_\alpha)^V}(\rho_\beta)^V = 0,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

dir.

U üzerindeki bütün X, Y vektör alanları ve $E|_U$ nun bütün S, S' kesitleri için

$$\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}_{X^H}Y^H = (\nabla_X Y)^H,\\
&\tilde{\nabla}_{X^H}S^V = (\nabla_X S)^V,\\
&\tilde{\nabla}_{S^V}X^H = \tilde{\nabla}_{S^V}S'^V = 0
\end{aligned} \tag{3.30}$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

∀X, Y∈χ(U) ve S, S' $E|_U$ nun kesitleri olsun. X ve Y nin (U, x^i) haritasına göre koordinatlarını

$$X = X^i\partial_i\,,\quad Y = Y^j\partial_j$$

ile S ve S' nün E deki indirgenmiş haritaya göre koordinatlarını $S=S^a\rho_a$, $S' = S'^b\rho_b$ ile gösterirsek 3.1.2. teoremi ve 3.2.3. teoremine göre;

$$X^H = (X^i)^V (\partial_i)^H,\ Y^H = (Y^j)^V (\partial_j)^H,\ S^V = (S^a)^V (\rho_a)^V,\ S'^V = (S'^b)^V (\rho_b)^V$$

dir. Eş. 3.29 u kullanırsak;

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{X^H} Y^H &= \widetilde{\nabla}_{(X^i)^V(\partial_i)^H} (Y^j)^V (\partial_j)^H \\
&= (X^i)^V \widetilde{\nabla}_{(\partial_i)^H} (Y^j)^V (\partial_j)^H \\
&= (X^i)^V ((\partial_i)^H (Y^j)^V (\partial_j)^H + (Y^j)^V \widetilde{\nabla}_{(\partial_i)^H} (\partial_j)^H) \\
&= (X^i)^V ((\partial_i Y^j)^V (\partial_j)^H + (Y^j)^V (\nabla_{\partial_i} \partial_j)^H) \\
&= (X^i)^V (\partial_i (Y^j) \partial_j + Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j)^H \\
&= (X^i (\partial_i (Y^j) \partial_j + Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j))^H \\
&= (\nabla_X Y)^H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{X^H} S^V &= \widetilde{\nabla}_{(X^i)^V(\partial_i)^H} (S^a)^V (\rho_a)^V \\
&= (X^i)^V \widetilde{\nabla}_{(\partial_i)^H} (S^a)^V (\rho_a)^V \\
&= (X^i)^V ((\partial_i)^H (S^a)^V (\rho_a)^V + (S^a)^V \widetilde{\nabla}_{(\partial_i)^H} (\rho_a)^V) \\
&= (X^i)^V ((\partial_i S^a)^V (\rho_a)^V + (S^a)^V (\widetilde{\nabla}_{\partial_i} \rho_a)^V) \\
&= (X^i (\partial_i (S^a) \rho_a + S^a \widetilde{\nabla}_{\partial_i} \rho_a))^V \\
&= (\nabla_X S)^V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{S^V} X^H &= \widetilde{\nabla}_{(S^a)^V(\rho_a)^V} (X^i)^V (\partial_i)^H \\
&= (S^a)^V \widetilde{\nabla}_{(\rho_a)^V} (X^i)^V (\partial_i)^H \\
&= (S^a)^V ((\rho_a)^V (X^i)^V (\partial_i)^H + (X^i)^V \widetilde{\nabla}_{(\rho_a)^V} (\partial_i)^H) \\
&= (S^a)^V (\delta_a (X^i)^V (\partial_i)^H) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_{S^V} S'^V &= \widetilde{\nabla}_{(S_a)^V(\rho_a)^V} (S'^b)^V (\rho_b)^V \\
&= (S_a)^V \widetilde{\nabla}_{(\rho_a)^V} (S'^b)^V (\rho_b)^V \\
&= (S_a)^V ((\rho_a)^V (S'^b)^V (\rho_b)^V + (S'^b)^V \widetilde{\nabla}_{(\rho_a)^V} (\rho_b)^V) \\
&= (S_a)^V (\delta_a (S'^b)^V (\rho_b)^V) \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

Eğer (U, x^i) ve (U', x'^i) M üzerinde iki harita ise $E|_U$ ve $E|_{U'}$ üzerinde sırasıyla $\tilde{\nabla}$ ve $\tilde{\nabla}'$ lineer konneksiyonlarını tanımlayabiliriz. Eş. 3.30 dan $U \cap U'$ üzerinde bütün X, Y vektör alanları ve $E|_{U\cap U'} = (E|_U) \cap (E|_{U'})$ nün bütün S, S' kesitleri için;

$$\begin{aligned}
&\tilde{\nabla}_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H = \tilde{\nabla}'_{X^H} Y^H, \\
&\tilde{\nabla}_{X^H} S^V = (\nabla_X S)^V = \tilde{\nabla}'_{X^H} S^V, \\
&\tilde{\nabla}_{S^V} X^H = \tilde{\nabla}'_{S^V} X^H = 0, \\
&\tilde{\nabla}_{S^V} S'^V = \tilde{\nabla}'_{S^V} S'^V = 0
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu nedenle 3.3.1. lemmadan $E|_{U\cap U'}$ üzerinde $\tilde{\nabla}$ ve $\tilde{\nabla}'$ lineer konneksiyonları çakışır. M üzerinde bir atlas kullanarak E üzerinde $\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyonunu tanımlayabiliriz. Bu $\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyonu 3.3.1. teoreminin şartlarını sağlar ve teoremin ispatı yapılmış olur.

3.3.1.Tanım (M den E ye Γ nın horizontal lifti)

3.3.1. teoreminin (i), (ii), (iii) ve (iv) şartlarını sağlayan E üzerindeki lineer konneksiyona M den E ye Γ nın horizontal lifti denir (Gancarcewicz and Rahmani, 1989).

Aşağıdaki iki sonuç, 3.3.1. teoreminin önemli aşikar sonuçlarıdır.

3.3.1. Sonuç

Eğer ∇, M üzerinde bir lineer konneksiyon ise TM üzerinde aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde bir ve yalnız bir $\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyonu vardır. M üzerindeki bütün X, Y vektör alanları için

$$\text{i)}\ \tilde{\nabla}_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H$$
$$\text{ii)}\ \tilde{\nabla}_{X^H} Y^V = (\nabla_X Y)^V$$
$$\text{iii)}\ \tilde{\nabla}_{X^V} Y^H = 0$$
$$\text{iv)}\ \tilde{\nabla}_{X^V} Y^V = 0$$

dır. Burada X^H, ∇ ya göre TM ye X in horizontal liftidir (Yano and Ishihara, 1967).

3.3.2. Sonuç

Eğer ∇, M üzerinde bir lineer konneksiyon ise T^*M üzerinde aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde bir ve yalnız bir $\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyonu vardır. M üzerindeki bütün X, Y vektör alanları ve bütün ϕ, ω 1-formları için;

$$\text{i)}\ \tilde{\nabla}_{X^H} Y^H = (\nabla_X Y)^H,$$
$$\text{ii)}\ \tilde{\nabla}_{X^H} \phi^V = (\nabla_X \phi)^V$$
$$\text{iii)}\ \tilde{\nabla}_{\phi^V} Y^H = 0$$
$$\text{iv)}\ \tilde{\nabla}_{\phi^V} \omega^V = 0$$

dır. Burada X^H, ∇ ya göre T^*M ye X in horizontal liftidir (Yano and Patterson, 1967).

Şimdi torsiyon tensörü ve lineer çatıların asli lif demeti LM ile birleşik (E,π,M,F) vektör demetine ∇ lineer konneksiyonunun horizontal liftinin eğrilik tensörü üzerinde duracağız.

3.3.2. Teorem

Lokal koordinatları kullanarak, M üzerinde her X vektör alanı ve E nin S, S' kesitleri için

$$[X^H, S^V] = (\nabla_X Y)^V \qquad (3.31)$$

$$[S^V, S'^V] = 0 \qquad (3.32)$$

dır.

İspat

$f \in C^\infty$ olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
\left[X^H, S^V\right](f) &= X^H(S^V(f)) - S^V(X^H(f)) \\
&= X^i(\partial_i - \Gamma^b_{ia} y^a \delta_b)(S^a \delta_a(f)) - (S^a \delta_a)(X^i(\partial_i(f) - \Gamma^b_{ia} y^a \delta_b(f))) \\
&= X^i \partial_i(S^a)\delta_a(f) + X^i S^a \partial_i(\delta_a(f)) - X^i \Gamma^b_{ia} y^a \delta_b(S^a)\delta_a(f) \\
&\quad - X^i \Gamma^b_{ia} y^a S^a \delta_b(\delta_a(f)) - S^a X^i \delta_a(\partial_i(f)) + S^a X^i \delta_a(\Gamma^b_{ia}) y^a \delta_b(f) \\
&\quad + S^a X^i \Gamma^b_{ia} \delta_a(y^a)\delta_b(f) + S^a X^i \Gamma^b_{ia} y^a \delta_a(\delta_b(f)) \\
&= X^i \partial_i(S^a)\delta_a(f) - X^i \Gamma^b_{ia} y^a \delta_b(S^a)\delta_a(f) + S^a X^i \Gamma^b_{ia} \delta_b(f) \\
&= X^i \{\partial_i(S^a)\delta_a - \Gamma^b_{ia} y^a \delta_b(S^a)\delta_a + S^a \Gamma^b_{ia} \delta_b\}(f)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \left[X^H, S^V\right] = X^i \{\partial_i(S^a)\delta_a - \Gamma^b_{ia} y^a \delta_b(S^a)\delta_a + S^a \Gamma^b_{ia} \delta_b$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X S)^V &= X^i((\partial_i)^H S^a \delta_a + S^a(\widetilde{\nabla}_{\partial_i} \rho_a)^V) \\
&= X^i((\partial_i - \Gamma^b_{ia} y^a \delta_b) S^a \delta_a + S^a(\Gamma^b_{ia} \rho_a)^V) \\
&= X^i \{(\partial_i(S^a)\delta_a - \Gamma^b_{ia} y^a \delta_b(S^a)\delta_a + S^a \Gamma^b_{ia} \delta_a
\end{aligned}
$$

O halde

$$[X^H, S^V] = (\nabla_X Y)^V$$

dir.

$$\begin{aligned}
\left[S^V, S'^V\right](f) &= S^V(S'^V(f)) - S'^V(S^V(f)) \\
&= S^a\delta_a(S'^a\delta_a(f)) - S'^a\delta_a(S^a\delta_a(f)) \\
&= S^a\delta_a(S'^a)\delta_a(f) + S^aS'^a\delta_a(\delta_a(f)) - S'^a\delta_a(S^a)\delta_a(f) - S'^aS^a\delta_a(\delta_a(f)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[S^V, S'^V\right] = 0$$

bulunur.

■ R, ∇ lineer konneksiyonun eğrilik dönüşümü olmak üzere $[X^H,Y^H]-[X,Y]^H$ farkını $(R(X,Y))^O$ ile gösterelim. Burada;

$$\begin{aligned}
\left[X^H, Y^H\right] &= X^H(Y^H) - Y^H(X^H) \\
&= X^i(\partial_i - \Gamma^b_{ia}y^a\delta_b)(Y^j(\partial_j - \Gamma^d_{jc}y^c\delta_d)) - Y^j(\partial_j - \Gamma^d_{jc}y^c\delta_d)(X^i(\partial_i - \Gamma^b_{ia}y^a\delta_b)) \\
&= X^i\partial_i(Y^j)\partial_j - X^i\partial_i(\Gamma^d_{jc})y^c\delta_d + Y^jX^i\Gamma^c_{ia}y^a\Gamma^d_{jc}y^c\delta_d - Y^j\partial_j(X^i)\partial_i \\
&\quad + Y^jX^i\partial_j(\Gamma^b_{ia})y^a\delta_b - Y^jX^i\Gamma^d_{jc}y^c\Gamma^b_{id}\delta_b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[X,Y]^H &= (X(Y) - Y(X))^H \\
&= (X^i\partial_i(Y^j)\partial_j - Y^j\partial_j(X^i)\partial_i)^H \\
&= X^i\partial_i(Y^j)\partial_j - X^i\partial_i(Y^j)\Gamma^s_{jr}y^r\delta_s - Y^j\partial_j(X^i)\partial_i - Y^j\partial_j(X^i)\Gamma^b_{ia}y^a\delta_b
\end{aligned}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}
(R(X,Y))^O = {} & X^i\partial_i(\Gamma^l_{jc})y^c\delta_l + Y^jX^i\Gamma^c_{ia}y^a\Gamma^l_{jc}y^c\delta_l + Y^jX^i\partial_j(\Gamma^l_{ia})y^a\delta_l \\
& - Y^jX^i\Gamma^l_{jc}y^c\Gamma^l_{il}\delta_l + X^i\partial_i(Y^j)\Gamma^l_{jr}y^r\delta_l + Y^j\partial_j(X^i)\Gamma^l_{ia}y^a\delta_l
\end{aligned} \qquad (3.33)$$

dır. Yani $(R(X,Y))^O$ bir vertical vektör alanıdır.

3.3.3. Teorem

E, LM ile birleşik vektör demeti ve ∇, M üzerinde lineer konneksiyon olsun. Eğer $\widetilde{\nabla}$, E de ∇ nın horizontal lifti ve $\widetilde{\nabla}$ nın torsiyon tensörü $\widetilde{T}$ ise M üzerinde bütün X, Y vektör alanları ve E nin bütün S, S' kesitleri için T, ∇ nın torsiyon tensörü olmak üzere;

$$\widetilde{T}(X^H, Y^H) = (T(X,Y))^H - (R(X,Y))^O,$$
$$\widetilde{T}(X^H, S^V) = \widetilde{T}(S^V, S'^V) = 0$$

dir.

İspat:

3.3.1. teoremini ve Eş. 3.31, Eş. 3.32 yi kullanırsak;

$$\begin{aligned}
\widetilde{T}(X^H, Y^H) &= \widetilde{\nabla}_{X^H} Y^H - \widetilde{\nabla}_{Y^H} X^H - \left[X^H, Y^H\right] \\
&= (\nabla_X Y)^H - (\nabla_Y X)^H - [X,Y]^H - (\left[X^H, Y^H\right] - [X,Y]^H) \\
&= (T(X,Y))^H - (R(X,Y))^O \\
\widetilde{T}(X^H, S^V) &= \widetilde{\nabla}_{X^H} S^V - \widetilde{\nabla}_{S^V} X^H - \left[X^H, S^V\right] \\
&= (\nabla_X S)^V - (\nabla_X S)^V \\
&= 0 \\
\widetilde{T}(S^V, S'^V) &= \widetilde{\nabla}_{S^V} S'^V - \widetilde{\nabla}_{S'^V} S^V - \left[S^V, S'^V\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

bulunur.

$\widetilde{\nabla}$ nın eğrilik tensörünü hesaplamadan önce teoremi verelim.

3.3.4. Teorem

Lokal koordinatlar kullanılırsa; X, Y, Z M üzerinde vektör alanları, S, E nin kesiti ve R , M üzerinde verilmiş ∇ lineer konneksiyonunun eğrilik tensörü olmak üzere;

$$\tilde{\nabla}_{(R(X,Y))^{O}} S^{V} = 0 \tag{3.34}$$

$$\tilde{\nabla}_{(R(X,Y))^{O}} Z^{H} = 0 \tag{3.35}$$

dır.

İspat

Eş. 3.30 ve Eş. 3.33 den

$$\tilde{\nabla}_{(R(X,Y))^{O}} S^{V} = 0$$

$$\tilde{\nabla}_{(R(X,Y))^{O}} Z^{H} = 0$$

dir.

Şimdi aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.3.5. Teorem

Eğer $\tilde{\nabla}$, LM ile birleşik bir E vektör demetinde M üzerinde verilmiş lineer konneksiyonun horizontal lifti ve $\tilde{\nabla}$ nın eğrilik tensörü $\tilde{R}$ ise, M üzerindeki bütün X, Y, Z vektör alanları ve E nin bütün S, S' kesitleri için, ∇ nın eğrilik dönüşümü R(X, Y) olmak üzere;

$$\widetilde{R}(X^H, Y^H)Z^H = (R(X,Y)Z)^H,$$
$$\widetilde{R}(X^H, Y^H)S^V = (R(X,Y)S)^V,$$
$$\widetilde{R}(X^H, S^V) = 0,$$
$$\widetilde{R}(S^V, S'^V) = 0$$

dır.

İspat:

3.3.1. teoremini ve Eş. 3.34, Eş. 3.35 i kullanırsak; M üzerinde bütün X, Y, Z vektör alanları ve E nin bütün S, S', S'' kesitleri için

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X^H, Y^H)Z^H &= \widetilde{\nabla}_{X^H}(\widetilde{\nabla}_{Y^H} Z^H) - \widetilde{\nabla}_{Y^H}(\widetilde{\nabla}_{X^H} Z^H) - \widetilde{\nabla}_{[X^H, Y^H]} Z^H \\
&= (\nabla_X(\nabla_Y Z))^H - (\nabla_Y(\nabla_X Z))^H - \widetilde{\nabla}_{[X^H, Y^H] - [X,Y]^H + [X,Y]^H} Z^H \\
&= (\nabla_X(\nabla_Y Z))^H - (\nabla_Y(\nabla_X Z))^H - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]^H} Z^H - \widetilde{\nabla}_{[X^H, Y^H] - [X,Y]^H} Z^H \\
&= (\nabla_X(\nabla_Y Z))^H - (\nabla_Y(\nabla_X Z))^H - (\nabla_{[X,Y]} Z)^H - \widetilde{\nabla}_{(R(X,Y))^O} Z^H \\
&= (R(X,Y)Z)^H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X^H, Y^H)S^V &= \widetilde{\nabla}_{X^H}(\widetilde{\nabla}_{Y^H} S^V) - \widetilde{\nabla}_{Y^H}(\widetilde{\nabla}_{X^H} S^V) - \widetilde{\nabla}_{[X^H, Y^H]} S^V \\
&= (\nabla_X(\nabla_Y S))^V - (\nabla_Y(\nabla_X S))^V - \widetilde{\nabla}_{[X^H, Y^H] - [X,Y]^H + [X,Y]^H} S^V \\
&= (\nabla_X(\nabla_Y S))^V - (\nabla_Y(\nabla_X S))^V - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]^H} S^V - \widetilde{\nabla}_{[X^H, Y^H] - [X,Y]^H} S^V \\
&= (\nabla_X(\nabla_Y S))^V - (\nabla_Y(\nabla_X S))^V - (\nabla_{[X,Y]} S)^V - \widetilde{\nabla}_{(R(X,Y))^O} S^V \\
&= (R(X,Y)S)^V
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X^H, S^V)Y^H &= \widetilde{\nabla}_{X^H}(\widetilde{\nabla}_{S^V} Y^H) - \widetilde{\nabla}_{S^V}(\widetilde{\nabla}_{X^H} Y^H) - \widetilde{\nabla}_{[X^H, S^V]} Y^H \\
&= -\widetilde{\nabla}_{S^V}(\nabla_X Y)^H - \widetilde{\nabla}_{(\nabla_X S)^V} Y^H \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\tilde{R}(X^H, S^V)S'^V = \tilde{\nabla}_{X^H}(\tilde{\nabla}_{S^V}S'^V) - \tilde{\nabla}_{S^V}(\tilde{\nabla}_{X^H}S'^V) - \tilde{\nabla}_{[X^H, S^V]}S'^V)$$
$$= -\tilde{\nabla}_{S^V}(\nabla_X S')^V - \tilde{\nabla}_{(\nabla_X S)^V}S'^V$$
$$= 0$$

$$\tilde{R}(S^V, S'^V)X^H = \tilde{\nabla}_{S^V}(\tilde{\nabla}_{S'^V}X^H) - \tilde{\nabla}_{S'^V}(\tilde{\nabla}_{S^V}X^H) - \tilde{\nabla}_{[S^V, S'^V]}X^H$$
$$= 0$$

$$\tilde{R}(S^V, S'^V)S''^V = \tilde{\nabla}_{S^V}(\tilde{\nabla}_{S'^V}S''^V) - \tilde{\nabla}_{S'^V}(\tilde{\nabla}_{S^V}S''^V) - \tilde{\nabla}_{[S^V, S'^V]}S''^V$$
$$= 0$$

dır.

3.3.6. Teorem

$\tilde{\nabla}$, LM ile birleşik bir E vektör demetinde ∇ lineer konneksiyonunun horizontal lifti olsun. $\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyonu torsiyonsuz olabilmesi için gerek ve yeter şart, T torsiyonunun M üzerindeki bütün X, Y vektör alanları için sıfır olmasıdır (Gancarcewicz and Rahmani, 1989).

İspat

$$\tilde{T}(X^H, Y^H) = (T(X,Y))^H - (R(X,Y))^O$$
$$0 = (T(X,Y))^H - (R(X,Y))^O$$
$$\Rightarrow (T(X,Y))^H = (R(X,Y))^O$$

dir. $V_y E \cap H_y = \{0\}$ olduğundan

$$T(X,Y) = 0$$

bulunur.

3.3.7. Teorem

$\widetilde{\nabla}$, LM ile birleşik bir E vektör demetinde ∇ lineer konneksiyonunun horizontal lifti olsun. $\widetilde{\nabla}$ lineer konneksiyonun flat ($\widetilde{R}$ =0) olabilmesi için gerek ve yeter şart ∇ nın R eğrilik tensörünün M üzerinde bütün X, Y vektör alanları için sıfır olmasıdır (Gancarcewicz and Rahmani, 1989).

İspat

3.3.5. teoreminden,

$$\widetilde{R}(X^H, Y^H)Z^H = (R(X, Y)Z)^H,$$

olduğundan R=0 dır.

4.SONUÇ VE ÖNERİLER

M üzerinde tanımlı vektör alanları ve kesitlerin liftlerinin tanımlanmasıyla M nin geometrisine esas teşkil eden eğrilik ve torsiyon tensör alanları ve bunların liftleri ile aralarındaki bağıntılar elde edilmiş ve böylece total uzayın geometrisi ile taban uzayın geometrisi arasında bir ilişki kurulmuştur. 3.3.6. teoremi ve 3.3.7. teoremi esas olarak bunu ifade etmektedir.

M üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir elemanların E total uzayına diğer liftlerinin olup olmadığı bir araştırma konusudur. Örneğin, TM dekine benzer olarak vektör alanlarının ve kesitlerinin complete liftlerinde tanımlanabilmesi umulmaktadır.

Bu konuda da çalışmalarımız devam etmektedir.

KAYNAKLAR

Birickel, F., Clark, R.S., 1970, Differentiable Manifolds, **VRN Company**, London.

Carmo, M.P., 1992, Instituto de Matematica Pura e Aplicada, **Portuguese**.

Cirittenden, R., 1962, Covaiant differention, **Quart. J. Math. Oxford (2)**, 13, 285-298.

Gancarcewicz, J., Rahmanı, N., 1989, Horizontal lift of lineer connection to vector bundles associated with the pirincipal bundle of linear frames, **Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai,** 56. Differential Geometry, 273-284, Eger (Hungary).

Greub, W., Halperin, S., Vanstone, R., 1972, Connection, Curvature and Cohomology, Vol. 1-2, **Acedemic-Press**, New York.

Isham, C.J., 1989, Modern Differential Geometry For Physicists, **Singapore**.

Kobayashı, S., Nomizu, K., 1963, Foundations of Differential Geometry I, **New York-London**.

León, M., Rodrigues, Pr., 1989, Methods Of Differential Geometry In Analytical Mechanic, **Netherlands**.

Okubo, T., 1987, Differential Geometry, **Marcel Dekker**, Inc. New York

Poor, W.A., 1981, Differential Geometric Structures, **Mc Graw-Hill**.

Sounders, D.J., 1989, The Geometry of Jet Bundle, **Cambridge Universty Press**, Cambridge.

Yano, K., Ishihara, S., 1967, Horizontal lift of tensor fields and connection to tangent bundles, **Journ. Math. and Mech.**, 16, 1015-1030.

Yano, K., Patterson, E.M., 1967, Horizontal lift from a manifold to its cotangent bundle, **Journ. Math. Soc. Japan**, Vol. 19, 185-198.

Yano, K., Ishihara, S., 1973, Tangent and Cotangent Bundles, **Marcel Dekker Inc.**, New York

ÖZGEÇMİŞ

Mustafa ÖZKAN, 1975 yılında Alanya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Alanya'da tamamladı. 1991 yılında girdiği Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünden 1995 yılında mezun oldu. 1996 yılında Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne araştırma görevlisi olarak girdi. Halen bu görevi sürdürmektedir.