BİR POZİTİF OPERATÖR İLE ÜRETİLEN SIRA İDEAL VE YEREL YAKLAŞIMLAR

Ayşe UYAR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2001
ANKARA

Ayşe UYAR tarafından hazırlanan BİR POZİTİF OPERATÖR İLE ÜRETİLEN SIRA İDEAL VE YEREL YAKLAŞIMLAR adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof.Dr. Şafak ALPAY

Tez Yöneticisi

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Cihan ORHAN

Üye : Prof. Dr. Şafak ALPAY

Üye : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Üye : Doç. Dr. Zafer ERCAN

Üye : Doç. Dr. Bahri TURAN

Bu tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Esaslarına uygundur.

İÇİNDEKİLER

BİR POZİTİF OPERATÖR İLE ÜRETİLEN SIRA İDEAL VE YEREL YAKLAŞIMLAR
(Doktora Tezi)

Ayşe UYAR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Mayıs 2001

ÖZET

Bu tez çalışmasında bir operatörle üretilen sıra idealin özellikleri incelendi. İlk olarak, ürettiği ideali cebir olan operatörler betimlendi ve bu operatörlerle merkez operatörler arasındaki ilişki tartışıldı. Uygun koşullar altında ürettiği ideali cebir olan operatörler ile merkez operatörlerin aynı olduğu görüldü. Bir pozitif operatör tarafından üretilen idealle değişmeli olan operatörler uzayının sıra özellikleri incelendi. Bu uzayın uygun koşullar altında Ort(E)'nin Riesz alt uzayı olduğu gösterildi. Son olarak, E ve F Riesz uzayları olmak üzere, $T:E\to F$ pozitif operatörüyle sınırlı pozitif operatörler için bilinen yerel yaklaşım sonuçları E ve F üzerindeki kabuller zayıflatılarak elde edildi.

Bilim Kodu : 403.03.01
Anahtar Kelimeler : Pozitif operatör, sıra ideal, yerel yaklaşımlar
Sayfa Adedi : 89
Tez Yöneticisi : Prof.Dr.Şafak ALPAY

ORDER IDEAL GENERATED BY A POSITIVE OPERATOR AND LOCAL APPROXIMATION

(Ph.D.Thesis)

Ayşe UYAR

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

May 2001

ABSTRACT

We consider the order ideal A_T generated by an operator T and investigate when A_T is an algebra. We then study the order properties of the commutant of A_T and commutant of {T}. In the last part of the thesis, we study the approximation properties of an operator S, with S,T:E→F, 0≤S≤T in terms of operators of type PTπ where π∈Z(E), P∈Z(F) and extends previously known results to spaces with rich and full centres.

Science code : 403.03.01
Key Words : Positive operator, order ideal, local approximation
Page Number : 89
Adviser : Prof.Dr.Şafak ALPAY

TEŞEKKÜR

Zevkli bir çalışma ortamı sağlayan ve fikirleriyle bakış açımı geliştiren danışmanım Prof. Dr. Sayın Şafak Alpay'a, sorularıyla ilham veren Doç. Dr. Sayın Bahri Turan'a, beni sabırla dinleyen ve heyecanlarımı paylaşan sevgili eşime, gösterdikleri özveri ve destek için sevgili aileme, dünyamı güzelleştiren sevgili yeğenlerim Oğuzhan ve Bestesu'ya teşekkürü borç bilirim.

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler	**Açıklamalar**
A_T	T ile üretilen ideal
E_+	E'nin pozitif kısmı
$E^{\sim}$	E'nin sıra duali
$E_n^{\sim}$	E'nin sıra sürekli duali
$E_c^{\sim}$	E'nin dizisel sıra sürekli duali
$\mathcal{L}_b(E,F)$	Sıra sınırlı operatörler
$\mathcal{L}_c(E,F)$	Dizisel sıra sürekli operatörler
$\mathcal{L}_n(E,F)$	Sıra sürekli operatörleri
N_T	T'nin sıfır ideali
Ort(E)	E'nin ortomorfizmaları
Ring(T)	T ile üretilen halka ideal
$\lvert\sigma\rvert(E,E')$	Mutlak zayıf topoloji
x^+	x'in pozitif kısmı
x^-	x'in negatif kısmı
$\lvert x\rvert$	x'in mutlak değeri
$x_\alpha \uparrow x$	x'e artan net
$x_\alpha \downarrow x$	x'e azalan net
$x_\alpha \xrightarrow{o} x$	Sıralı yakınsama
$x \vee y$	x ve y'nin supremumu
$x \wedge y$	x ve y'nin infimumu

1. GİRİŞ

E, Riesz cebirinde halka yapısı ve sıralı yapıdan kaynaklanan iki tür ideal bulunmaktadır. Böylece doğal soru, hangi koşullar altında her r-ideal, idealdir? Benzer şekilde, hangi koşullar altında her ideal, r-idealdir? Bu sorular [2] içinde incelenmiş ve birimli Arşimedyan f-cebri için, idealler arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. $\mathcal{L}_b(E)$ bileşke işlemine göre cebir yapısına sahip olmasına karşın genelde Riesz uzayı değildir. Bölüm 3'de bir pozitif operatörle $\mathcal{L}_b(E)$ içinde üretilen idealin hangi koşullar altında cebir olduğu sorgulanmıştır. Genel koşullar altında A_T'nin cebir olması betimlenmiştir. Merkezdeki operatörle üretilen ideal cebir olmasına karşın ürettiği ideali cebir olan ancak merkezde olmayan operatörler bulunmaktadır. Böylece, merkez operatörler ile ürettiği ideali cebir olan operatörler arasındaki ilişkiler incelenmiştir. T üzerinde kimi koşullarda, ürettiği ideali cebir olan operatörlerin kümesi ile merkez operatörlerin çakıştığı gösterilmiştir. Benzer inceleme, ürettiği bandı cebir olan operatörler ile ortomorfizmalar için yapılmıştır.

Bölüm 3'de incelenen yapılar arasındaki ilişki, uygun E Riesz uzayları için, $Z(E)_c$=Orth(E) olması gerçeğine dayanmaktadır. Dedekind tam Riesz uzayları için bilinen bu eşitlik, Alpay Ş. ve Turan B. tarafından topolojik dolu merkeze sahip uzaylara taşınmıştır [5]. Bölüm 4'de pozitif bir T operatörü tarafından üretilen idealle değişmeli olan operatörler uzayının, sıra özellikleri incelenmiştir. Uygun koşullar altında $(A_T)_c$'nin Orth(E)'nin yerel düzgün tam birimsel f-altcebri olduğu elde edilmiştir.

E ve F Riesz uzayları F Dedekind tam, $T:E\rightarrow F$ pozitif operatör olsun. E esas projeksiyon özelliğine sahipken T'nin bileşenlerinin sıralı projeksiyonlar kullanılarak betimlenebildiği [8] içinde gösterildi. Daha sonra T ile sınırlı, pozitif operatöre, Q ve P sıralı projeksiyonlar olmak üzere QTP biçimindeki operatörlerin doğrusal bileşimleriyle yaklaşılabilindiği görüldü. Yeterli sayıda sıralı projeksiyona sahip olmayan uzaylarda bu teknik uygulanamayacağından, E üzerindeki kabul kaldırılamıyordu. Bu durum, ortomorfizmalar yönünden zengin Banach örgüleri için incelendi [9]. Buna göre T ile sınırlı pozitif operatöre L ve M ortomorfizmalar olmak üzere LTM biçimindeki operatörlerin doğrusal bileşimleriyle yaklaşılabilindi.

Banach örgüleri üzerindeki pozitif operatörlerin, sınırlanabilme problemine katkı sağlayacağı düşüncesiyle $\mathcal{L}_b(E,F)$'nin merkezi incelendi [10]. Bunun sebebi, $0\leq S\leq T$ iken $0\leq\pi\leq I$, $\pi(T)=S$ olacak şekilde $\pi\in Z(\mathcal{L}_b(E,F))$ olmasıdır.

Bölüm 5'de E ve F uzayları üzerindeki kabuller zayıflatılarak, [9] ve [10] içindeki yerel yaklaşım sonuçları elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE BAZI SONUÇLAR

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılan temel kavramlar ve bazı sonuçlar verilmiştir.

2.1. Pozitif Operatörlerin Sıralı Yapısı

Tanım 2.1.1: E gerçel vektör uzayı "$\leq$" sıralama bağıntısıyla donatılsın.

i) Her $z \in E$ için $x \leq y$ iken $x+z \leq y+z$

ii) Her $\alpha \geq 0$ için $x \leq y$ iken $\alpha x \leq \alpha y$

sağlanıyorsa E'ye sıralı vektör uzayı denir.

$x \geq 0$ özelliğini sağlayan E sıralı vektör uzayının x elemanına pozitif denir. E'nin bütün pozitif elemanlarının kümesi E_+ ile gösterilir.

Çalışma boyunca, vektör uzayları arasındaki $T:E \rightarrow F$ doğrusal dönüşümü, operatör olarak adlandırılmıştır.

Tanım 2.1.2 : E ve F sıralı vektör uzayları, $T:E \rightarrow F$ bir operatör olsun. Eğer her $x \in E_+$ için $Tx \in F_+$ oluyorsa, T'ye pozitif operatör denir ve $T \geq 0$ (veya $0 \leq T$) ile gösterilir.

Tanım 2.1.3: E sıralı vektör uzayı olmak üzere, her $x, y \in E$ için $\sup\{x,y\} \in E$ ve $\inf\{x,y\} \in E$ oluyorsa, E'ye Riesz uzayı denir. Aşağıdaki gösterimler kullanılır,

$$x \vee y := \sup\{x,y\} \text{ ve } x \wedge y := \inf\{x,y\}$$

Riesz uzaylarının tipik örnekleri fonksiyon uzayları arasında yer almaktadır. Bir X kümesi üzerinde tanımlı gerçel degerli fonksiyonların vektör uzayı E olmak üzere her f, g $\in$ E için,

$$f \vee g\,(x) := \max\{f(x), g(x)\}$$
$$f \wedge g\,(x) := \min\{f(x), g(x)\}$$

E ye ait fonksiyonlardır. Açıktır ki her E noktasal sıralama ile Riesz uzayıdır.

Örnek 2.1.4:

a) $\mathbb{R}^X$, X kümesi üzerindeki bütün gerçel değerli fonksiyonlar,

b) C(X), X topolojik uzayı üzerindeki bütün gerçel değerli sürekli fonksiyonlar,

c) $C_b(X)$, X topolojik uzayı üzerindeki bütün gerçel değerli sürekli, sınırlı fonksiyonlar,

d) $\ell_\infty(X)$, X kümesi üzerindeki bütün sınırlı gerçel değerli fonksiyonlar,

e) ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ olan bütün gerçel diziler,

f) $L_p(\mu)$ $(0<p<\infty)$, (X, Σ, μ) ölçüm uzayı olmak üzere X üzerindeki bütün, gerçel değerli, μ ölçülebilir ve $\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$ özelliğine sahip fonksiyonlar,

g) $L_\infty(\mu)$,X üzerindeki bütün gerçel değerli μ ölçülebilir ve hemen her yerde sınırlı fonksiyonlar,

$L_p(\mu)$ $(0<p\leq\infty)$ üzerindeki sıralamaya göre $f \leq g$ olmasının anlamı hemen her x için $f(x) \leq g(x)$ olmasıdır.

E Riesz uzayı içindeki herhangi bir x için, x'in pozitif kısmı, x'in negatif kısmı, x'in mutlak değeri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$x^+ := x \vee 0\ ;\ \ x^- := (-x) \vee 0\ ;\ \ |x| := (-x) \vee x$$

E Riesz uzayında herhangi bir x öğesi, $x=x^+ - x^-$ olarak yazılabilir. E Riesz uzayı içinde $|x|\wedge|y|=0$ özelliğine sahip x ve y öğelerine diktir denir ve $x\perp y$ ile gösterilir. A, E Riesz uzayının boştan farklı altkümesi olmak üzere $A^d=\{x\in E:\ x\perp y$ her $y\in A$ için $\}$ kümesine A'nın dik tümleyeni denir.

Tanım 2.1.5.: E Riesz uzayı içinde bir $\{x_\alpha\}$ ağı için, $\alpha\leq\beta$ iken $x_\beta\leq x_\alpha$ özelliği sağlanıyorsa $\{x_\alpha\}$ ağı azalandır denir ve $x_\alpha\downarrow$ ile gösterilir. Eğer $\{x_\alpha\}$ azalan ve $\inf\{x_\alpha\}=x$ ise $x_\alpha\downarrow x$ olarak gösterilir. $x_\alpha\uparrow$ ve $x_\alpha\uparrow x$ benzer biçimde tanımlanır.

E Riesz uzayında her $x\in E_+$ için $\frac{1}{n}x\downarrow 0$ özelliği sağlanıyorsa E ye Arşimedyan Riesz uzayı denir.
Bu çalışma boyunca alınan Riesz uzayları Arşimedyan olarak kabul edilmiştir.

Tanım 2.1.6: E sıralı vektör uzayının $x\leq y$ özelliğine sahip x ve y öğeleri için $[x,y]=\{z\in E : x\leq z\leq y\}$ kümesine sıralı aralık denir. Eğer E'nin A alt kümesi bir sıralı aralığın içinde kalıyorsa A ya sıra sınırlı küme denir.

E ve F sıralı vektör uzayları olmak üzere $T:E\to F$ doğrusal dönüşümü için E'nin sıra sınırlı kümelerinin görüntüsü F nin sıra sınırlı kümeleri oluyorsa, T'ye sıra sınırlı operatör denir ve E den F ye bütün sıra sınırlı operatörlerin vektör uzayı $\mathcal{L}_b(E,F)$ ile gösterilir. $\mathcal{L}_b(E,F)$ üzerindeki sıralamaya göre $T\leq S$ olmasının anlamı $S-T\geq 0$ olmasıdır. Böylece $\mathcal{L}_b(E,F)$ sıralı vektör uzayıdır.

E ve F Riesz uzayı iken $\mathcal{L}_b(E,F)$ genelde Riesz uzayı olmayabilir.

Tanım 2.1.7:

E Riesz uzayının boştan farklı her üstten sınırlı alt kümesi, E içinde supremuma sahipse E' ye Dedekind tam Riesz uzayı denir.
Eğer sayılabilir ve üstten sınırlı her alt kümesi E içinde supremuma sahipse E' ye σ-Dedekind tam Riesz uzayı denir.

Önerme 2.1.8: E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam ise, $\mathcal{L}_b(E,F)$, Dedekind tam Riesz uzayıdır.

Her $S,T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ ve $x \in E_+$ için

$$S \vee T\,(x) = \sup\{Sy+Tz:\ y,z \in E_+,\ y+z=x\}$$

$$S \wedge T\,(x) = \inf\{Sy+Tz:\ y,z \in E_+,\ y+z=x\}$$

eşitlikleri sağlanır.

Ayrıca, $\mathcal{L}_b(E,F)$ içinde $T_\alpha \downarrow 0$ olması her $x \in E_+$ için $T_\alpha x \downarrow 0$ olmasına denktir.

Kanıt : [1], Önerme 1.13

E Riesz uzayının G alt vektör uzayı, E'nin kafes operasyonlarına göre kapalıysa; yani her $x, y \in G$ için E içinde alınan $x \vee y$, G'nin öğesiyse G' ye E'nin Riesz altuzayı denir.

Önerme 2.1.9: E ve F Riesz uzayları F Dedekind tam, $T:E \to F$ pozitif operatör olsun. G , E'nin Riesz alt uzayı ve $S:G \to F$, her $x \in G_+$ için $0 \leq Sx \leq Tx$ eşitsizliği sağlansın. O zaman S, E den F'ye $\mathcal{L}(E,F)$ içinde $0 \leq S \leq T$ eşitsizliğini sağlayan pozitif operatöre genişletebilir.

Kanıt : [1], Önerme 2.2.

Tanım 2.1.10: E sıralı vektör uzayı, F, E'nin alt vektör uzayı olsun. Eğer $x \in F$ ve $0 \leq y \leq x$ eşitsizliğini sağlayan her $y \in E$ için $y \in F$ oluyorsa F'ye sıralı ideal denir. Pozitif üreteçli sıra ideale, ideal denir.

Riesz uzayları için yukarıdaki tanım kısaltılabilir. Yani, A, E Riesz uzayının alt vektör uzayı olmak üzere $x \in A$ ve $0 \leq |y| \leq |x|$ eşitsizliğini sağlayan her $y \in E$ için $y \in A$ oluyorsa A'ya ideal denir.

Tanım 2.1.11: $\{x_\alpha\}$ E Riesz uzayı içinde bir ağ ve $x \in E$ olsun. Her α için $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$, $y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $\{y_\alpha\}$ ağı varsa x_α, x'e sıralı yakınsaktır denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ olarak gösterilir.

B, E Riesz uzayının altkümesi ve $\{x_\alpha\} \subseteq B$ olsun. $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ iken $x \in B$ oluyorsa B'ye sıralı kapalıdır denir.

Sıra kapalı ideale band denir.

Tanım 2.1.12.: E Riesz uzayı ve $e > 0$ olsun.

i) Eğer e ile üretilen esas ideal I_e, E'ye eşit, yani her $x \in E$ için $|x| \leq \lambda e$ olacak şekilde λ pozitif sayısı varsa e'ye sıralı birim denir.

ii) Eğer e ile üretilen esas band B_e, E'ye eşit, yani her $x \in E_+$ için $\{x \wedge ne\}_n \uparrow x$, ise e'ye zayıf sıra birim denir.

iii) Eğer e ile üretilen esas ideal I_e, e ile üretilen alt vektör uzayına eşit, yani $I_e = \{\lambda e : \lambda \in \mathbb{R}\}$, ise e'ye diskret eleman denir.

iv) Eğer $x, y \in [0,e]$ ve $x \wedge y = 0$ iken $x=0$ veya $y=0$ oluyorsa e'ye atom denir.

Arşimedyan Riesz uzayında pozitif bir öğenin atom olması için gerekli ve yeterli koşul diskret eleman olmasıdır. [18], Önerme 26.4.

<u>Tanım 2.1.13:</u> E ve F Riesz uzayları T:E→F bir operatör olsun.

i) Eğer E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken F içinde $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa T'ye sıra sürekli operatör denir.

ii) Eğer E içinde $x_n \xrightarrow{o} 0$ iken F içinde $Tx_n \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa T'ye dizisel sıra sürekli operatör denir.

$$\mathcal{L}_n(E,F) := \{T \in \mathcal{L}_b(E,F) : T \text{ sıra sürekli}\}$$

$$\mathcal{L}_c(E,F) := \{T \in \mathcal{L}_b(E,F) : T \text{ dizisel sıra sürekli}\}$$

olarak tanımlanır. $\mathcal{L}_n(E,F)$ ve $\mathcal{L}_c(E,F)$, $\mathcal{L}_b(E,F)$'nin alt vektör uzaylarıdır. Üstelik $\mathcal{L}_n(E,F) \subseteq \mathcal{L}_c(E,F)$ dir. F Dedekind tam olduğunda $\mathcal{L}_n(E,F)$ ve $\mathcal{L}_c(E,F)$, $\mathcal{L}_b(E,F)$ içinde banddır. [1], Önerme 4.4.

E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam olsun. $T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ için T'nin sıfır ideali $N_T := \{x \in E : |T|\,|x| = 0\}$ olarak tanımlanır. Gerçekten N_T, E içinde idealdir.

<u>Tanım 2.1.14:</u> E Riesz uzayı, $\{x_n\}$ dizisi ve $x \in E$ verilsin.

i) $u \in E_+$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $N \leq n,m$ iken $|x_n - x_m| < \varepsilon u$ olacak şekilde N doğal sayısı bulunabilirse, $\{x_n\}$ dizisine u-düzgün Cauchy dizisi denir.

ii) $v \in E_+$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için $N \leq n,m$ iken $|x_n - x| < \varepsilon v$ olacak şekilde N doğal sayısı bulunabilirse, $\{x_n\}$ dizisi x'e v-düzgün yakınsaktır denir.

iii) E 'nin, bir $u \in E_+$ için u-düzgün Cauchy (u-düzgün yakınsak) dizisine, yerel düzgün Cauchy (yerel düzgün yakınsak) dizisi denir.
iv) E Riesz uzayında her yerel düzgün Cauchy dizisi yerel düzgün yakınsak oluyorsa E'ye yerel düzgün tam denir.

2.2. f-Cebirleri ve Ortomorfizmalar

Tanım 2.2.1:
i) B, E Riesz uzayı içinde band olmak üzere $E=B\oplus B^d$ ise B'ye projeksiyon band denir.
ii) B, E Riesz uzayı içinde projeksiyon bandı olmak üzere her $x \in E$ için; $x_1 \in B$, $x_2 \in B^d$, $x=x_1+x_2$ olacak şekilde bir tek ayrışım vardır. $P_B:E \to E$, $P_B(x)=x_1$ biçiminde tanımlanan operatöre sıralı projeksiyon denir.
iii) E Riesz uzayının her x öğesiyle üretilen esas band, projeksiyon band ise E ye esas projeksiyon özelliğine sahiptir denir.

E Riesz uzayı, $P:E \to E$ bir operatör olsun. P'nin sıralı projeksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul $P^2=P$ ve $0 \le P \le I$ dır. [1], Önerme 3.10.

Tanım 2.2.2: E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam ve S, $T:E \to F$ pozitif operatörler olsun. $S \wedge (T-S)=0$ oluyorsa S'ye T'nin bileşeni denir.
Özellikle, F üzerinde Q, E üzerinde P, sıralı projeksiyonlar olmak üzere QTP, T'nin bileşenidir. QTP biçimindeki bileşene T'nin ilkel bileşeni denir.
$\bigvee_{i=1}^{n} Q_i T P_i$ biçimindeki bileşene, T'nin basit bileşeni denir.

Tanım 2.2.3: E ve F Riesz uzayları, $T:E \to F$ operatör olsun. Her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ oluyorsa T'ye Riesz homomorfizması denir.

$T:E \to F$, bire-bir ve örten operatör olsun T nin Riesz izomorfizması olması için gerekli ve yeterli koşul T ve T^{-1} in pozitif operatör olmasıdır.[1],Önerme 7.3

<u>Tanım 2.2.4:</u> E ve F Riesz uzayları, $T:E \to F$ bir operatör olsun T pozitif operatör ve her $x \in E_+$ için $T[0,x] = [0,Tx]$ oluyorsa T'ye aralık koruyan operatör denir.

<u>Tanım 2.2.5:</u> E Riesz uzayı, $T:E \to E$ operatör olsun E'nin her B bandı için $T(B) \subseteq B$ oluyorsa T ye band koruyan operatör denir.

Band koruyan, sıra sınırlı operatöre ortomorfizma denir ve E nin bütün ortomorfizmalarının kümesi Ort(E) ile gösterilir.

E, Arşimedyan Riesz uzayı $T \in \mathcal{L}_b(E)$ iken $T \in \mathrm{Ort}(E)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $x \perp y$ iken $Tx \perp y$ olmasıdır. [1], Önerme 8.2.

$\mathcal{L}_b(E)$ içinde birim operatör ile üretilen esas ideale E'nin merkezi denir ve Z(E) ile gösterilir. Buna göre, $Z(E)=\{S \in \mathcal{L}_b(E): -\lambda I \leq S \leq \lambda I\}$ ve $Z(E) \subseteq \mathrm{Ort}(E)$ dir.

<u>Önerme 2.2.6:</u> E Arşimedyan Riesz uzayı ise Ort(E), Arşimedyan Riesz uzayıdır. $S,T \in \mathrm{Ort}(E)$ ve her $x \in E_+$ için,

$$(S \vee T)(x) = Sx \vee Tx \; ; \; (S \wedge T)x = Sx \wedge Tx \text{ dir.}$$

<u>Kanıt :</u> [1], Önerme 8.9.

Önerme 2.2.7: Arşimedyan Riesz uzayı üzerinde her ortomorfizma sıra süreklidir.

Kanıt: [1], Önerme 8.10.

Önerme 2.2.8: E Dedekind tam Riesz uzayı, B_I, birim ile üretilen band ise B_I=Ort(E) dir.

Kanıt : [1], Önerme 8.11.

Önerme 2.2.9: G, E Dedekind tam Riesz uzayının Riesz altuzayı ve $T:G \to E$, her $x \in G_+$ için $0 \leq Tx \leq x$ eşitsizliğini sağlasın. O zaman T, E üzerinde bir pozitif ortomorfizmaya genişler.

Özellikle, E Dedekind tam, $x \in E_+$ ve $0 \leq |y| \leq x$ ise $-I \leq T \leq I$, $Tx=y$ olacak şekilde $T \in$ Ort(E) vardır.

Kanıt : [1], Önerme 8.15.

Önerme 2.2.10.: E, F Riesz uzayları, F Dedekind tam $T:E \to F$ pozitif operatör olsun. Aşağıdakiler denktir :

i) T Riesz homomorfizmasıdır.

ii) Her $S:E \to F$, $0 \leq S \leq T$ için $\pi T=S$, $0 \leq \pi \leq I$ olacak şekilde $\pi \in$ Ort(F) vardır.

Kanıt: [1], Önerme 8.16.

Tanım 2.2.11.: E Riesz uzayı birleşmeli cebir olsun. Eğer her $x,y \in E_+$ için $xy \in E_+$ oluyorsa E'ye Riesz cebiri denir.

E Riesz cebiri olmak üzere $x \wedge y=0$ ve her $z \in E_+$ için $zx \wedge y = xz \wedge y = 0$ oluyorsa E'ye f-cebiri denir.

Önerme 2.2.12: E Arşimedyan Riesz uzayı olsun. Ort(E) bileşke işlemine göre birimli f-cebiridir.

Kanıt : [14], Önerme 140.9.

Her hangi bir Arşimedyan f-cebiri değişmelidir. [14], Önerme 140.10.

Önerme 2.2.13: E birimli, Arşimedyan f-cebiri olsun. Eğer $\pi \in$ Ort(E) ise her $x \in E$ için $\pi(x)=px$ olacak şekilde $p \in E$ vardır. Tersine her $p \in E$ için $\pi: E \to E;\ x \to px$ ile tanımlanırsa $\pi \in$ Ort(E) dir.
π'nin pozitif ortomorfizma olması için gerekli ve yeterli koşul π ile uyuşan p elemanının pozitif olmasıdır.
$\pi \in Z(E)$ olması için gerekli ve yeterli koşul E içinde birim ile üretilen ideal I_e olmak üzere, $p \in I_e$ dir.

Kanıt : [14], Önerme 141.1.

Önerme 2.2.14: E, f-cebiri olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) Her $x,y \in E$ için $|xy| = |x||y|$ dir . Üstelik, $(xy)^+ = x^+y^+ + x^-y^-$ ve $(xy)^- = x^+y^- + x^-y^+$ dır.

ii) Her $x,y,z \in E$ için $x \perp y$ ise $xz \perp y$ ve $zx \perp y$ dir. Böylece E içindeki dik tümleyen iki-yanlı halka idealdir.

iii) Eğer E içinde $x \perp y$ ise $xy=0$ dır. Özellikle, $x^+x^- = x^-x^+ = 0$ dır.

iv) Her $x \in E$ için $x^2 \geq 0$ ve $xx^+ = x^+x = (x^+)^2 \geq 0$ dır.

Kanıt : [14], Önerme 142.1.

E birimli Arşimedyan f-cebiri ise $e=e^2 \geq 0$ olduğundan birim pozitif elemandır. Üstelik $x \wedge e=0$ ise $x=x \wedge x=ex \wedge x=0$ olduğundan e, E'nin zayıf sıra birimidir.

Tanım 2.2.15 : E Riesz cebri olsun.

i) n bir doğal sayı olmak üzere, E içinde $x^n=0$ iken $x=0$ oluyorsa E'ye yarıasaldır denir.

ii) I, E'nin altvektör uzayı ve iki-yanlı halka ideal ise I'ya r-ideal denir.

E Riesz cebrinin yarıasal olması için gerekli ve yeterli koşul $x^2=0$ iken $x=0$ olmasıdır.

E yarıasal f-cebri olsun. O zaman $x \perp y$ olması için gerekli ve yeterli koşul $xy=0$ olmasıdır. [14], Önerme 142.3.

E birimli Arşimedyan f-cebiri ise E yarıasaldır. [14], Önerme 142.5.

E Arşimedyan yarıasal f-cebri $x,y \in E_+$, $x^2 \leq yx$ ise $x \leq y$ dir. [2], Önönerme 12.3.

Önerme 2.2.16 : E Arşimedyan Riesz uzayı ve $e > 0$ olsun. O zaman birimi e olacak şekilde E'yi birimli f-cebiri yapan en fazla bir çarpma vardır.

Kanıt : [1], Önerme 8.23.

E ve F Arşimedyan yarıasal f-cebirleri ve T:E→F cebir homomorfizması ise T dikliği korur, yani E içinde $x \perp y$ iken F içinde $Tx \perp Ty$ dir. Pozitif, dikliği koruyan operatörler Riesz homomorfizması olduğu için T:E→F cebir homomorfizmasının, Riesz homomorfizması olması için gerekli ve yeterli koşul T'nin pozitif olmasıdır.

Önerme 2.2.17 : E ve F Arşimedyan yarıasal f-cebirleri ve ek olarak E yerel düzgün tam olsun. O zaman T:E→F cebir homomorfizması ise T Riesz homomorfizmasıdır.

Kanıt: [16], Önerme 5.1.

Önerme 2.2.18 : E ve F birimli Arşimedyan f-cebirleri E'nin birimi e, F'nin birimi e' olsun. T:E→F pozitif operatör ve $T(e) = e'$ olsun. T'nin cebir homomorfizması olması için gerekli ve yeterli koşul T'nin Riesz homomorfizması olmasıdır.

Kanıt:[16], Sonuç 5.5.

Önerme 2.2.19 : X herhangi bir topolojik uzay, L, C(X)'in yerel düzgün kapalı altcebiri olsun. O zaman L, C(X)'in Riesz alt uzayıdır.

Kanıt : [16], Önerme 6.3.

Örnek 2.2.20 :

(i) C(IR), Arşimedyan f-cebridir. C(IR) içinde g(x)=x fonksiyonu ile üretilen ideal I olsun. Yani, $I=\{f\in C(IR): 0\leq |f| \leq \lambda |g|\}$ olsun. $g^2 \notin I$ dır. Böylece I, C(IR) içinde cebir değil, dolayısıyla r-ideal değildir.

(ii) $C[0,1]$ içinde her $x\in[0,1]$ için $g(x)=x$ olsun. $R=\{f.g:\ f\in C[0,1]\}$ ile tanımlanırsa, R $C[0,1]$ içinde r-idealdir. Eğer $0<x\leq 1$ için $h(x)=x\left|\sin\frac{1}{x}\right|$ ve $h(0)=0$ ise $0\leq h\leq g$ olmasına karşın $h\notin R$ dir. Böylece R ideal değildir. Bu durum, $\pi(g)=h$ olacak şekilde bir $\pi\in Ort(C[0,1])$ bulunamadığını gösterir. Bu ise, $C[0,1]$'in, daha sonra tanımlanacak olan, zengin merkeze sahip olma özelliğini, sağlamadığını gösterir.

Önerme 2.2.21 : E birimli Arşimedyan f-cebri olsun. Aşağıdakiler denktir;

i) E içinde her r-ideal, idealdir.

ii) E içinde $0\leq u\leq v$ ise $wv=u$ olacak şekilde $w\in E_+$ vardır.

Kanıt : [2], Önerme 17.5.

Önerme 2.2.22 : E birimli Arşimedyan f-cebri olsun. Aşağıdakiler denktir;

i) E içinde her ideal, r-idealdir.

ii) E'nin birimi sıra birimdir.

Kanıt : [2], Gözlem, 17.18.

Önerme 2.2.23 : E Dedekind tam Riesz uzayı ve $0\leq\Psi\leq\Phi$, $\Phi\in E_n^{\sim}$ olsun. $\Psi=\Phi\,\pi_0$ olacak şekilde E üzerinde π_0 pozitif ortomorfizması vardır.

Kanıt : [14], Önerme 145.1.

2.3 Banach Örgüleri

Bu çalışma boyunca E Riesz uzayının sıra duali $E^{\sim}$ nın E'nin noktalarını ayırdığı kabul edilmiştir.

Tanım 2.3.1 : p, E Riesz uzayı üzerinde yarınorm olmak üzere $| x | \leq | y |$ iken $p(x) \leq p(y)$ oluyorsa p'ye Riesz yarınormu, ek olarak p norm ise p'ye Riesz normu denir ve bu durumda $(E, \|.\|)$ uzayına normlu Riesz uzayı denir. Norma göre tam olan normlu Riesz uzayına Banach örgüsü denir.

Tanım 2.3.2 : E Banach örgüsü üzerindeki norm M-norm ise, yani E içinde $x \wedge y = 0$ iken $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ oluyorsa E'ye AM-uzay denir.

Önerme 2.3.3. : E Riesz uzayı yerel düzgün tam ve $x \in E$ olsun. x ile E içinde üretilen ideal I_x, her $y \in I_x$ için $\|y\|_\infty = \inf\{\lambda > 0 : |y| \leq \lambda |x|\}$ normuna göre birimli AM-uzaydır. I_x üzerindeki bu norma sıra birim norm denir.

Özellikle , her Banach örgüsü yerel düzgün tam olduğundan, E Banach örgüsü, $x \in E$ için I_x birimli AM-uzaydır.

Kanıt [13], Önerme 1.2.13. ve [1], Önerme 12.20.

Bir Riesz uzayını Banach örgüsü yapan bütün normlar denktir.[1], Sonuç 12.4. Böylece E Banach örgüsü sıra birime sahipse, tekrar normlandırılarak AM-uzay olur. Başka bir deyişle bir Banach örgüsünün, birimli AM-uzay olması, üzerindeki normun sıra birim norm olduğunu gösterir.

Önerme 2.3.4 : E bir Banach örgüsü olsun. E'nin birimli AM-uzay olması için gerekli ve yeterli koşul bir tek (homeomorfik olarak) K kompakt Hausdorff için C(K) uzayına Riesz izometrik olmasıdır.

Özellikle, E'nin AM-uzay olması için gerekli ve yeterli koşul C(K)'nın kapalı bir altuzayına Riesz izometrik olmasıdır.

Kanıt : [1], Önerme 12.28.

E birimli AM-uzay birimi e olsun. Önerme 2.2.16 dan birimi e olacak şekilde E'yi birimli f-cebiri yapan en fazla bir çarpma vardır. Diğer taraftan, Önerme 2.3.4'den bir tek kompakt Hausdorff uzayı K ve böylece π:E→C(K), π(e)=**1** olacak şekilde π örten, Riesz izometrisi vardır. (Burada **1**, K üzerindeki sabit bir fonksiyonu). C(K) birimi **1** olan f-cebri olduğundan E'de $xy=\pi^{-1}(\pi(x)\,\pi(y))$ ile tanımlı çarpmaya göre çarpımsal birimi e olan f-cebiridir.

Böylece, E birimli AM-uzay, birimi e ise çarpımsal birimi e olan f-cebir yapısına sahiptir ve her $x\in E$ için E üzerinde, M(x)=xy ile çarpım operatörü tanımlanır. Üstelik M, E'nin ortomorfizmasıdır.

Böylece E Banach örgüsü, $x\in E$ için I_x, sıra birim norma göre birimi $|x|$ olan AM-uzay olduğundan I_x bol miktarda çarpım operatörüne sahiptir. Başka bir deyişle her Banach örgüsü aşağıdaki "yerel" davranışa sahiptir:
Her esas ideal üzerinde bol miktarda çarpım operatörü vardır.

<u>Önerme 2.3.5 :</u> E Banach örgüsü, $0 < u\in E$ ve $T:I_u\to I_u$ çarpım operatörü olsun. Aşağıdakiler sağlanır;
(i) E ile I_u üzerine indirgenen norma göre T süreklidir.
(ii) Eğer E σ-Dedekind tamsa, T E üzerinde bir ortomorfizmaya genişler.T pozitifken genişleme de pozitiftir.

<u>Kanıt :</u> [1], Önönerme 15.6.

<u>Tanım 2.3.5:</u>
(i) E Riesz uzayı olmak üzere her $x\in E_+$ için $0\leq y\leq x$ iken $\pi(x)=y$ olacak şekilde $\pi\in Z(E)_+$ varsa E'ye zengin merkeze sahiptir denir.
Eğer gerekirse, $\pi\wedge I$ operatörü ile çalışılarak $0\leq\pi\leq I$ olduğu kabul edilir.

(ii) E Riesz uzayı olmak üzere her $x \in E_+$ için x ile üretilen ideal Z(E)x'in σ (E, $E^{\sim}$) kapanışının alt kümesi ise E'ye topolojik dolu merkeze sahiptir denir. Yani, her $x \in E_+$ $0 \leq y \leq x$ için $\pi_\alpha x \rightarrow y$ (σ (E, $E^{\sim}$)) olacak şekilde Z(E) içinde $\{\pi_\alpha\}$ ağı vardır.

Eğer her $x \in E_+$ $0 \leq y \leq x$ için $\pi_\alpha x \rightarrow y$ (σ (E, $E^{\sim}$)) olacak şekilde [0,I] içinde $\{\pi_\alpha\}$ ağı varsa, E'ye kuvvetli topolojik dolu merkeze sahiptir denir.

(iii) I, E Riesz uzayı içinde ideal olsun. Her $\pi_0 \in Z(I)$ için $\pi \in Z(E)$ olacak şekilde π genişlemesi varsa I'ya Z(E)-genişleme özelliğine sahiptir denir.

(iv) E Banach örgüsü, I E içinde bir ideal olsun. Her $\pi_0 \in Z(I)$ için $\pi_n(x) \rightarrow \pi_0(x)$ (her $x \in I$ için) olacak şekilde Z(E) içinde $\{\pi_n\}$ dizisi varsa I'ya Z(E)-yaklaşık genişleme özelliğine sahiptir denir.

(v) E normlu Riesz uzayı $0 < u \in E$ olsun. u ile üretilen sıra ideal E içinde norm yoğunsa, u'ya E'nin $\frac{1}{2}$-sınırlı iç noktası denir.

E zengin merkeze sahipken topolojik dolu merkeze sahiptir.

E Banach örgüsü iken E'nin σ-Dedekind tam olması için gerekli ve yeterli koşul E'nin esas projeksiyon özelliğine sahip olmasıdır. [13], Önerme 1.2.20.

E σ-Dedekind tam Reisz uzayı ise zengin merkeze sahiptir. [2], Önerme 19.4.

E Banach örgüsü $\frac{1}{2}$-sınırlı iç noktaya sahipse topolojik dolu merkeze sahiptir. Bunun kanıtı 5. Bölümde verilecektir.

E Banach örgüsü iken $E^{\sim} = E'$ olduğundan her $x \in E_+$ için $Z(E)x$ konveks kümesinin norm kapanışı ile $\sigma(E, E^{\sim})$ kapanışı aynıdır. Böylece E topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü ise her $x \in E_+$ $0 \leq y \leq x$ için $\pi_n x \to y$ (norma göre) olacak şekilde Z(E) içinde (π_n) dizisi vardır, ve kafes operasyonlarının sürekliliğinden, eğer gerekirse, $0 \leq \pi_n \leq I$ olarak alınabilir.

E Banach örgüsü iken, bu bilgileri aşağıdaki biçimde verebiliriz;

Dedekind tam

$\Downarrow$

σ-Dedekind tam

$\Downarrow$

Zengin merkeze sahip

$\Downarrow$

Birimli AM-uzay $\Rightarrow \frac{1}{2}$-sınırlı iç noktaya sahip$\Rightarrow$Topolojik dolu merkeze sahip

<u>Örnek 2.3.6:</u>

i) E, [0,1] üzerinde sürekli, sonlu kırık doğrular biçimindeki fonksiyonların Riesz uzayı olsun. E, C[0,1]'in alt kafesidir. Her $0 \leq f \in C[0,1]$ için $f \leq e$ olacak şekilde $e \in E$ vardır. E üzerindeki her pozitif fonksiyonel C[0,1] üzerinde pozitif fonksiyonele genişletilebilir [14] önerme 83.15. Böylece $E^{\sim} = C[0,1]^{\sim}$. Ancak $Z(E) = \{\lambda I: \lambda \in IR\}$ olduğundan E topolojik dolu merkeze sahip değildir. Gerçekten $T \in Z(E)$ ve $f \in E$ olsun. $x \in [0,1]$ için $f_x = f - f(x)\mathbf{1}$. Üstelik $|Tf_x| \leq \lambda f_x$ olacak şekilde λ pozitif sayısı vardır. $f_x(x) = 0$ olduğundan $|Tf_x|(x) = 0$ dır. Böylece her $x \in [0,1]$ için $(Tf)(x) = (T\mathbf{1})(x)f(x)$ dir. $T\mathbf{1}$, [0,1] üzerinde sabit fonksiyondur. Eğer $T\mathbf{1}$ sabit fonksiyon değilse, bir açık aralıkta

$T(T1)(x)=ax+b$ dir. Böylece bir açık aralıkta $T(T1)(x)= a^2x^2+2abx+b^2$ dir. Bu, $T((T1))$'in E'de olmasıyla çelişir. Böylece $(Tf)x=(T1)(x)f(x)$ olduğundan $\alpha_T=T1$ olmak üzere $Tf = \alpha_T f$ dir.

ii) C[0,1] topolojik dolu merkeze sahip olmasına rağmen zengin merkeze sahip değildir. Bu durum Örnek 2.2.19 (ii)'de gösterilmiştir.

Tanım 2.3.7: E Riesz uzayı olsun. Her $f\in E^{\sim}$ için E üzerinde p_f Reisz yarınormu, $p_f(x) = |f|(|x|)$ olarak tanımlansın. Böylece $E^{\sim}$ nın boştan farklı her A alt kümesi için, $\{p_f : f\in A\}$ Riesz yarınormlarının ailesi E üzerinde yerel konveks-solid topoloji üretir. Bu topolojiye A ile E üzerinde üretilen mutlak zayıf topoloji denir ve $|\sigma|(E,A)$ ile gösterilir.

A'nın $E^{\sim}$ içinde ürettiği ideal I(A) olmak üzere $|\sigma|(E,A) = |\sigma|(E, I(A))$ olduğu açıktır.

A, E'nin noktalarını arıyorsa $|\sigma|(E,A)$ Hausdorff topolojidir.

Önerme 2.3.8 : E Riesz uzayı, A E'nin noktalarını ayıran $E^{\sim}$ nın alt kümesi olsun (E, $|\sigma|(E,A)$)'nın topolojik duali I(A) dır.

Kanıt:[1], Önerme 11.6.

Tanım 2.3.9 : E Riesz uzayı, E' E'nin noktalarını ayıran $E^{\sim}$ içinde ideal olsun. $\langle E, E'\rangle$ çiftine doğal dualite $\langle x, x'\rangle :=x'(x)$ altında Riesz dual sistem denir.

<E, E′> Riesz dual sistem olsun. Önerme 2.3.8'den (E, $|\sigma|(E,A)$)'nın topolojik duali E′ dür. Böylece τ E üzerinde duali E′ olan yerel konveks-solid topoloji ise $\sigma(E, E') \subseteq |\sigma|(E, E') \subseteq \tau(E, E')$ olur.

Gerçekten $x_\alpha \to 0$ ($|\sigma|(E, E')$) ise her $f \in E'$ için $|f(x_\alpha)| \leq |f||x_\alpha|$ olduğunda $\lim f(x_\alpha) = 0$ ve böylece $x_\alpha \to 0$ ($\sigma(E, E')$) elde edilir. Yani $\sigma(E, E') \subseteq |\sigma|(E, E')$ dir. Diğer taraftan, $x_\alpha \to 0$ ($\tau(E, E')$) olsun. Kafes operasyonlarının sürekliliğinden $|x_\alpha| \to 0$ ($\tau(E, E')$) dır.

Her $f \in E'$ için, $\lim p_f(x_\alpha) = \lim |f|(|x_\alpha|) = 0$ ve böylece $x_\alpha \to 0$ ($|\sigma|(E, E')$) elde edilir. Böylece $|\sigma|(E, E') \subseteq \tau(E, E')$ dir.

Başka bir deyişle $|\sigma|(E,E')$, E üzerinde duali E′ olan yerel konveks-solid topolojilerin en zayıfıdır.

<u>Tanım 2.3.10 :</u> E Banach örgüsü X Banach uzayı olsun.

i) $T : E \to X$ sürekli operatör olsun. Eğer E içinde her dik, norm sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için $\lim \|Tx_n\| = 0$ oluyorsa T'ye M-zayıf kompakt operatör denir.

ii) $T : X \to E$ sürekli operatör olsun. U X'in kapalı birim yuvarı olmak üzere, T(U)'yu içeren en küçük solid küme Sol(T(U)) içindeki her dik $\{y_n\}$ dizisi için $\lim \|y_n\| = 0$ oluyorsa, T'ye L-zayıf kompakt operatör denir.

<u>Önerme 2.3.11 :</u> $T : X \to E$ L-zayıf kompakt operatör olsun. Eğer T(X) ile üretilen ideal A ise A'nın norm kapanışı, sıra sürekli norma sahip ($x_\alpha \downarrow 0$ iken $\|x_\alpha\| \downarrow 0$) Banach örgüsüdür.

Kanıt: [1], Önerme 18.15.

Tanım 2.3.12 : E ve F Banach örgüleri, F Dedekind tam $T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ içinde $|T| \geq T_n \downarrow 0$ iken $\|T_n\| \downarrow 0$ oluyorsa T'ye sıra sürekli norma sahip operatör denir.

Önerme 2.3.13 : E ve F Banach örgüleri F Dedekind tam, $T : E \rightarrow F$ pozitif operatör olsun. T'nin sıra sürekli norma sahip olması için gerekli ve yeterli koşul T'nin L- ve M-zayıf kompakt olmasıdır.

Kanıt : [1], Önerme 18.17.

Reisz uzayları hakkında detaylı bilgi [1], [14] ve [18] içinde bulunabilir.

3. ÜRETTİĞİ İDEAL CEBİR OLAN OPERATÖRLER

Bu bölümde ürettiği ideal cebir olan operatörler ile merkezdeki operatörler arasındaki ilişki incelendi. Benzer tartışma ürettiği band cebir olan operatörlerin kümesi ile ortomorfizmalar arasında yapıldı. Operatörler üzerinde uygun hipotezler altında bu kümelerin aynı olduğu görüldü.

Eğer $T:E\to E$ pozitif operatör ise T ile $\mathcal{L}_b(E)$ içinde üretilen sıra ideal A_T ile gösterilecektir.

İlk olarak A_T'nin genelde cebir olmadığını gösterelim.

<u>Örnek 3.1:</u> X kompakt Hausdorff uzayı, E X'in boş küme ve X'den farklı açık ve kapalı bir alt kümesi olsun. $y\in E$ ve $z\in X\setminus E$ alalım.

$$\Psi : X\to X$$

$$: x\to \Psi(x)=\begin{cases} z, & x\in E \\ y, & x\notin E \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Ψ süreklidir. $T:C(X)\to C(X)$, her $f\in C(X)$ için $T(f)=f\Psi$ olarak tanımlanırsa, T'nin pozitif cebir homomorfizması olduğu görülür. $f=\chi_E$ olmak üzere,

$$(Tf)(y)=f(\Psi(y))=f(z)=0$$

ve

$$(T^2f)(y)=f(\Psi^2(y))=f(y)=1$$

elde edilir. Böylece herhangi bir $\lambda>0$ için $T^2f\not\leq\lambda Tf$ dir. Buradan herhangi bir $\lambda>0$ için $T^2\not\leq\lambda T$ olduğu görülür. Böylece A_T cebir değildir. Eğer $f=\chi_E$ ve $g=\chi_{X\setminus E}$ ise C(X) içinde $f\wedge g=0$ ama $Tf\wedge g\neq 0$dır. Böylece T, C(X)'in ortomorfizması da değildir.

Aşağıdaki Önerme, çok genel koşullar altında, A_T'nin cebir olmasını betimlemektedir.

Önerme 3.2: E sıralı vektör uzayı ve $T:E \to E$ pozitif operatör olsun. A_T'nin cebir olması için gerekli ve yeterli koşul $T^2 \leq \alpha T$ olacak şekilde bir α pozitif sayısının olmasıdır.

Kanıt : A_T cebir iken $T^2 \leq \alpha T$ olacak şekilde bir pozitif $\alpha \in IR$ olduğu açıktır.

Tersine, $T^2 \leq \alpha T$ olacak şekilde bir $0<\alpha \in IR$ olduğunu kabul edelim. $0 \leq S,U \in A_T$ olsun. O zaman $0 \leq S \leq \beta T$ ve $0 \leq U \leq \lambda T$ olacak şekilde β,λ pozitif sayıları vardır. Her $x \in E_+$ için,

$$(SU)(x) = S(U(x)) \leq \beta T(U(x)) \leq \beta T(\lambda T(x)) = \beta\lambda T^2(x)$$

dir. Böylece $0 \leq SU \leq \beta\lambda T^2$ olduğundan $SU \in A_T$'dir.

Eğer S,U A_T'nin keyfi elemanları ise $S=S_1-S_2$ ve $U=U_1-U_2$ olacak şekilde $i=1,2$ için $0 \leq S_i, U_i \in A_T$ vardır. Böylece $SU=(S_1U_1+S_2U_2)-(S_2U_1+S_1U_2) \in A_T$ elde edilir.

Örnek 3.3.

a) Herhangi bir sıralı projeksiyon Önerme 3.2'deki kısıtlamayı sağlar.

Ancak kısıtlamayı sağlamasına karşın sıralı projeksiyon olmayan pozitif operatörler vardır.

b) $T : L^1[0,1] \to L^1[0,1]$, her $f \in L^1[0,1]$ için $Tf = (\int_0^1 f(t)dt)\,\mathbf{1}$ olarak tanımlansın.

O zaman $0 \leq T^2 \leq T$ olmasına rağmen T sıralı projeksiyon değildir. Benzer şekilde, T: C[0,1] $\rightarrow$ C[0,1], her f$\in$C[0,1] için Sf=f(0)**1** olarak tanımlı S operatörü dikliği koruyan ve $0 \leq S^2 \leq S$ eşitsizliğini sağlayan bir operatördür.

c) $T:\ell_2 \rightarrow \ell_2$; $(x_n) \rightarrow (0, x_1, x_2, ...)$ ile tanımlı kaydırma operatörüyle üretilen ideal $\mathcal{L}_b(\ell_2)$ içinde cebir değildir.

d) R, E üzerinde pozitif operatör olmak üzere $\mathcal{L}_b(E)$ üzerinde $\varphi : T \rightarrow TR$ ve $\Psi : T \rightarrow RT$ ile tanımlı dönüşümleri ele alalım. Eğer $R^2 \in A_R$ ise A_φ ve A_ψ $\mathcal{L}_b(\mathcal{L}_b(E))$'nin altcebirleridir.

Ürettiği ideal cebir olan operatörlerin kümesi vektör uzayı değildir. Bunu görmek için Örnek 3.1'de tanımlanan T pozitif operatörünü, X'in açık ve kapalı E alt kümesini, y$\in$E ve z$\in$X\E'yi ele alalım. S,U:C(X)$\rightarrow$C(X) aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$Sf(x) = \begin{cases} 0, & x \in E \\ f(y), & x \notin E \end{cases}$$

ve

$$Uf(x) = \begin{cases} f(z), & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

Böylece S ve $US^2 = U^2 = 0$ eşitliğini sağlayan pozitif operatörlerdir. Bu ise A_S ve A_U'nun cebir olduğunu gösterir. Diğer taraftan S+U=T'dir. Böylece ürettiği ideal cebir olan operatörlerin kümesi toplama altında kapalı değildir. Ancak yine de bazı koşullar altında ideali cebir olan operatörlerin ne zaman toplama altında kapalı olduğu söylenebilir.

T ve S pozitif operatörler A_T ve A_S cebir olsun. Eğer TS=ST ise A_{TS} de cebirdir. Eğer T merkezde ise A_{T+S} de cebirdir. Eğer T ve S pozitif ortomorfizma ,$T \wedge S=0$ ise TS=ST=0 olduğundan A_{T+S} de cebirdir.

E_1 ve E_2 sıralı vektör uzayları ve i=1,2 için $T_i : E_i \to E_i$, $0 \le T_i^2 \le \alpha T_i$ eşitsizliğini sağlayan pozitif operatörler olsun. $E_1 \otimes E_2$

$$Cp = \left\{ \sum x_k \otimes y_k : x_k \in E_1^+, y_k \in E_2^+ \right\}$$

projektif sıralamayla donatıldığında $T_1 \otimes T_2$ pozitif operatörüyle üretilen ideal $A_{T_1 \otimes T_2}$ de cebirdir.

$0 \le T^2 \le \alpha T$ eşitsizliğini sağlayan bir T pozitif operatörünü ele alalım. $Tx_o > 0$ olacak şekilde bir $x_o \in E_+$ seçelim. Tx_o ile üretilen ideal I ile gösterilirse, $T(I) \subseteq I$ olacağı açıktır. Böylece ürettiği ideal cebir olan pozitif operatörler değişmez alt uzaya sahiptir.

E Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere T, E üzerinde Riesz homomorfizması iken $0 \le S \le T$ eşitsizliğini sağlayan her S pozitif operatörü için $S = \pi T$ olacak şekilde π , pozitif merkez operatörünün varolduğu bilinmektedir [1]. Kutateladge'ya ait betimlemenin bir sonucu olarak, T Riesz izomorfizması ve A_T cebir iken $T \in Z(E)$ olduğu görülür. Diğer taraftan, T pozitif merkez operatör ise Önerme 3.2'den A_T cebirdir. Acaba hangi koşullar altında ürettiği ideali cebir olan operatörlerin kümesi ile merkez operatörlerin kümesi aynıdır?

<u>Sonuç 3.4:</u> T, E Dedekind tam Riesz uzayının ortomorfizması olsun. O zaman T ile $\mathcal{L}_b(E)$ içinde üretilen ideal A_T'nin cebir olması için gerekli ve yeterli koşul $T \in Z(E)$'dir.

<u>Kanıt :</u> $A_{|T|} = A_T$ olduğundan T'yi pozitif kabul etmek genelliği bozmaz. $T \in Z(E)$ iken A_T'nin cebir olduğu Önerme 3.2'den kolayca elde edilir.

A_T'nin cebir olduğunu kabul edelim. O zaman $T^2 = \pi T$ olacak şekilde $0 \leq \pi \in Z(E)$ vardır. Böylece $\pi T - T^2 = (\pi - T).T = 0$ eşitliği elde edilir. Ort(E) birimli Arşimedyan f-cebri olduğundan, $|\pi - T| \wedge T = 0$ elde edilir. Böylece, $(T-\pi)\wedge T \leq 0 \Rightarrow (T-\pi)\wedge T - T \leq -T \Rightarrow (-\pi)\wedge 0 \leq -T$ ve $\pi \geq 0$ olduğundan $T \leq \pi$ eşitsizliği sağlanır. Bu ise $T \in Z(E)$ olduğunu gösterir.

<u>Gözlem :</u>

1) E Riesz uzayının sıra duali $E^{\sim}$, E'nin noktalarını ayırsın. $T{:}E \to E$ pozitif operatör olsun. λ pozitif sayısı için $0 \leq T^2 \leq \lambda T$ sağlanırsa, $T \to T^{\sim}$ pozitif operatör olduğundan ve $(T^{\sim})^2 = (T^2)^{\sim}$ olduğundan $0 \leq (T^{\sim})^2 \leq \lambda T^{\sim}$ dır. Tersine λ pozitif sayısı için $0 \leq (T^{\sim})^2 \leq \lambda T^{\sim}$ sağlanırsa, $0 \leq (T^{\sim\sim})^2 \leq \lambda T^{\sim\sim}$ ve E üzerinde T ile $T^{\sim\sim}$ aynı olduğundan $0 \leq T^2 \leq \lambda T$ sağlanır. Böylece, A_T' nin cebir olması için gerekli ve yeterli koşul $A_{T^{\sim}}$ nın cebir olmasıdır.

2) Sonuç 3.4'de pozitif operatörlerle çalışırken E üzerinden Dedekind tam olma koşulu kaldırılabilir. $E^{\sim}$, E'nin noktalarını ayırsın. $\mathcal{L}_b(E)$ içinde T ile üretilen sıra ideal A_T cebir olsun. $T \in Ort(E)$ ve Ort(E) $\mathcal{L}_b(E)$ içinde sıra ideal olduğundan, T ile Ort(E) içinde üretilen ideal I_T olmak üzere $A_T \subseteq I_T$'dir. Üstelik Ort(E) Arşimedyan f-cebri olduğundan T^2 pozitif operatördür. Böylece $0 \leq T^2 = |T|^2 \leq \lambda |T|$ olacak şekilde λ pozitif sayısı vardır. $Ort(E) \to Ort(E^{\sim})$, $T \to T^{\sim}$ operatörü Riesz homomorfizmasıdır [1]. Böylece $0 \leq |T^{\sim}|^2 \leq \lambda |T^{\sim}|$ eşitsizliği sağlanır. Önerme 3.1'den $A_{|T^{\sim}|} = A_{|T|^{\sim}}$ içinde cebirdir. Üstelik

$|T|^{\sim} \in \mathrm{Ort}(E)$ olduğundan, Sonuç 3.4'den $|T|^{\sim} \in Z(E^{\sim})$ ve $E^{\sim}$, E'nin noktalarını ayırdığından $|T| \in Z(E)$'dir. Böylece $T \in Z(E)$ elde edilir.

3) Sonuç 3.4'de E Arşimedyan Riesz uzayı alındığında, $T \in \mathrm{Orth}(E)$ ve A_T cebirse $T \in Z(E)$'dir. Gerçekten, T ile Ort(E) içinde üretilen ideal I_T olmak üzere, I_T cebir olacağından $0 \leq |T|^2 = T^2 \leq |T|.(\lambda I)$ eşitsizliğini sağlayan λ pozitif sayısı vardır. Ort(E) Arşimedyan yarıasal f-cebri olduğundan $0 \leq |T| \leq \lambda I$ eşitsizliği sağlanır [2]. Gerçekten, $0 \leq |T|^2 \leq |T|.(\lambda I)$ ise $(|T|^2 - |T|.(\lambda I))^+ = 0$ yani $|T|.(|T| - \lambda I)^+ = 0$ eşitliği sağlanır Ort(E) yarıasal f-cebri olduğundan $|T| \wedge (|T| - \lambda I)^+ = 0$ ve $(|T| - \lambda I)^+ \leq |T|$ olduğundan $(|T| - \lambda I)^+ = 0$ yani $0 \leq |T| \leq \lambda I$ eşitsizliği sağlanır. Bu ise $|T| \in Z(E)$ ve dolayısıyla $T \in Z(E)$ olduğunu gösterir.

Böylece, E Arşimedyan Riesz uzayı, T E'nin bir pozitif ortomorfizması olmak üzere A_T'nin cebir olması için gerekli ve yeterli koşul $T \in Z(E)$'dir.

3) Sonuç 3.4'deki koşullar altında A_T, $\mathcal{L}_b(E)$ içinde r-ideal iken $T \in Z(E)$ olduğu görülür. Ancak merkez operatör ile üretilen idealin r-ideal olması gerekmez. Eğer $Z(E) \neq \mathcal{L}_b(E)$ ise E üzerinde birim operatör ile üretilen Z(E) r-ideal değildir.

<u>Sonuç 3.5:</u> E Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere T, E üzerinde pozitif operatör ve $T^2 \in B_T$ olsun. $S \in B_T$ ve $U \in B_T \cap \mathcal{L}_c(E)$ ise $US \in B_T$'dir.

Kanıt : Eğer $0 \leq S, U \in A_T$ ise $T^2 \in B_T$ olduğundan $0 \leq US \in B_T$ olacağı açıktır. $0 \leq S \in B_T$ ve $0 \leq U \in A_T \cap \mathcal{L}_c(E)$ alalım. $0 \leq S_n \uparrow S$ olacak şekilde A_T içinde S_n dizisi seçebiliriz. Her n için $US_n \in B_T$ ve $U \in \mathcal{L}_c(E)$ olduğundan $US_n \uparrow US$ elde edilir. Böylece $US \in B_T$ dir. Son olarak $0 \leq S \in B_T$ ve $0 \leq U \in B_T \cap \mathcal{L}_c(E)$ verilsin. O zaman $0 \leq U_n \uparrow U$ olacak şekilde A_T içinde U_n dizisi seçebiliriz. Her n için $U_n S \in B_T$ ve $U_n S \uparrow US$ olduğundan $US \in B_T$ elde edilir. $B_T \cap \mathcal{L}_c(E)$' nin band olmasından genel durum elde edilir.

E Dedekind tam Riesz uzayı ve $E_n^{\sim}$, E'nin noktalarını ayırıyorsa $T^2 \in B_T$ olabilmesi için kullanışlı bir ölçüt C.D.Aliprantis ve O.Burkinshaw tarafından verilmiştir [8]. Buna göre, $0 \leq T \in \mathcal{L}_b(E)$ verildiğinde $T^2 \in B_T$ olması için gerekli ve yeterli koşul $x \in E^+$, $0 \leq f \in E_n^{\sim}$ ve $\varepsilon > 0$ için $\langle f, \bigvee_{i=1}^{n} Q_i T P_i x \rangle < \delta$ iken $\langle f, \bigvee_{i=1}^{n} Q_i T^2 P_i x \rangle < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ olmasıdır. Burada $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ve $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ E üzerinde sıralı projeksiyonlardır.

E Dedekind tam Riesz uzayı üzerinde, Riesz homomorfizması T ile üretilen band içindeki pozitif operatörler W.A.J Luxemburg ve A.R.Schep tarafından betimlenmiştir [3]. Buna göre, $0 \leq S \in B_T$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $u \in E_+$ için $Su \in \{Tu\}^{dd}$, yani S'nin T'ye göre mutlak sürekli olmasıdır. Böylece, Riesz homomorfizması T için B_T cebir ise T^2, T'ye göre mutlak süreklidir.

Buradan, T dizisel sıra sürekli Riesz homomorfizması için T^2, T'ye göre mutlak sürekli iken B_T'nin cebir olduğu elde edilir.

Sonuç 3.6 : E Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere, E üzerinde dizisel sıra sürekli pozitif T operatörü verilsin. B_T'nin cebir olması için gerekli ve yeterli koşul $T^2 \in B_T$ dir.

Kanıt : $B_T \cap \mathcal{L}_c(E) = B_T$ olmasından ve Sonuç 3.5'den kolayca görülür.

Böylece dizisel sıra sürekli pozitif T operatörü için A_T cebirse B_T'nin de cebir olduğu elde edilir.

Böylece E Dedekind tam Riesz uzayının merkezinden alınan pozitif operatörün ürettiği band cebirdir. Gerçekte T, ortomorfizma ise B_T cebirdir.

Sonuç 3.7: E Dedekind tam Riesz uzayı $T \in Ort(E)$ ise B_T cebirdir.

Kanıt : $T \in Ort(E)$ olsun. $B_T = B_{|T|}$ olduğundan T'yi pozitif kabul etmek genelliği bozmaz. T dizisel sıra sürekli olduğundan Sonuç 3.6'dan $T^2 \in B_T$ olduğunu göstermek yeterlidir. $T \in Ort(E)$ olduğundan $T \wedge nT \uparrow T$ $\mathcal{L}_b(E)$ içinde sağlanır. Her $x \in E_+$ için $(T \wedge nT)(Tx) \uparrow T(Tx)$ ve $(T \wedge nI)(Tx) = (T^2 \wedge nT)(x)$ olduğundan $T^2 \wedge nT \uparrow T^2$ sağlanır. Bu ise $T^2 \in B_T$ olduğunu gösterir.

Bir operatörün ürettiği idealin veya bandın cebir olması operatörün Z(E) içinde veya Ort(E) içinde olmasından bağımsızdır.

Örnek 3.8 :

a) $T : \ell_1 \to \ell_1$; $T(x_n) = (x_2, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ ile tanımlı pozitif operatörü ele alalım. $T^2=0$ olduğundan A_T cebirdir. T sıra sürekli olduğundan B_T de cebirdir. Ancak $Te_2 = e_1$ olduğundan, T ortomorfizma değildir.

b) $S:\ell_1 \to \ell_1$; $S(x_n) = (\sum_{n=0}^{\infty} x_n, 0, \ldots, 0, \ldots)$ ile tanımlı sıra sürekli pozitif operatör S için A_S ve B_S cebir olmalarına karşın $S(e_2)=e_1$ olduğundan S ortomorfizma değildir.

c) $T:\ell_1 \to \ell_1$; $T(x_n) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ ile tanımlı kaydırma operatörüyle $\mathcal{L}_b(\ell_1)$ içinde üretilen band cebir değildir. $T^2 \in B_T$ olduğunu kabul edelim. O zaman $T^2 \wedge nT \uparrow T^2$ dir. T bire-bir Riesz homomorfizması ve $T(\ell_1)$, ℓ_1 içinde idealdir. $T:\ell_1 \to T(\ell_1)$ Riesz izomorfizması olduğundan $T^{-1}(T^2 \wedge nT) \uparrow T$ 'dir. Gerçekten $T^2 \wedge nT \leq T^2$ ve T^{-1} pozitif olduğundan $T^{-1}(T^2 \wedge nT) \leq T$ eşitsizliği her $n \in IN$ için sağlanır. $T^{-1}(T^2 \wedge nT) \leq S$ ve $S \in \mathcal{L}_b(\ell_1)$ olsun. T pozitif olduğundan $T^2 \wedge nT \leq TS$ ve böylece $T^2 \leq S$ eşitsizliği sağlandığından $T \leq S$ elde edilir. Her $n \in IN$ için $T^{-1}(T^2 \wedge nT) \leq T \wedge nI$ olduğundan $T \wedge nI \uparrow T$ dir. Böylece $T \in Orth(\ell_1)$ elde edilir. Ancak $e_1 \perp e_2$ olmasına karşın $Te_1 = e_2$ olduğundan $Te_1 \not\perp e_2$ dir. Yani $T \notin Orth(\ell_1)$ dir. Böylece B_T cebir değildir.

Önerme 3.9 : T, E sıralı vektör uzayı üzerinde $T(E_+)=E_+$ özelliğine sahip pozitif operatör ise aşağıdakiler denktir :

i) $T^2 \in A_T$

ii) $T \in Z(E)$

iii) A_T cebirdir.

Kanıt : Önerme 3.2'de (i) $\Leftrightarrow$(iii) olduğu gösterildi. (ii) $\Rightarrow$ (i) olduğu E'nin merkezinin tanımından kolayca görülür. Böylece (i) $\Rightarrow$ (ii) olduğunu göstermek yeter. Bunun için $T^2 \in A_T$ olduğunu kabul edelim. Böylece $0 \leq T^2 \leq \lambda T$ eşitsizliğini sağlayan λ pozitif sayısı vardır. Bir $y \in E_+$ verilsin. $T(E_+)= E_+$ olduğundan $y=T(x)$ olacak şekilde $x \in E_+$ vardır. Buradan $0 \leq T^2(x) \leq \lambda T(x)$ ve böylece $0 \leq Ty \leq \lambda y$ eşitsizliği elde edilir. Bu ise $0 \leq T \leq \lambda I$ yani $T \in Z(E)$ olduğunu gösterir.

Ürettiği band cebir olan operatörler ile ortomorfizmalar arasında Önerme 3.9'dakine benzer bir ilişki vardır.

Önerme 3.10: T, E Dedekind tam Riesz uzayı üzerinde $T(E_+)=E_+$ özelliğine sahip pozitif operatör ise aşağıdakiler denktir:

i) $T^2 \in B_T$

ii) $T \in Ort(E)$

iii) B_T cebirdir.

Kanıt : (iii) $\Rightarrow$ (i) açıkça görülür. Sonuç 3.7'de (ii) $\Rightarrow$ (iii) olduğu gösterildi. Böylece (i) $\Rightarrow$ (ii) olduğunu göstermek yeter. Bunun için $T^2 \in B_T$ ve $y,z \in E_+$ olmak üzere $y \wedge z = 0$ olsun. $T(E_+)=E_+$ olduğundan $y=T(a)$ ve $z=T(b)$ olacak şekilde $a,b \in E_+$ vardır. $T^2 \in B_T$ olduğundan $T^2 \wedge nT \uparrow T^2$ ve böylece $(T^2 \wedge nT)(a) \uparrow T^2(a)$ E içinde sağlanır. Her n için $(T^2 \wedge nT)(a) \in \{Ta\}^{dd}$ olduğundan $T^2(a) \in \{Ta\}^{dd}$ ve böylece $Ty \in \{y\}^{dd}$ elde edilir. Böylece $Ty \wedge z=0$ dır. Eğer $y,z \in E$ olmak üzere, E içinde $y \perp z$ sağlanıyorsa, önceki durumdan $T(|y|) \perp z$ dir. $|Ty| \leq T|y|$ olduğundan $Ty \perp z$ ve böylece $T \in Ort(E)$ elde edilir.

E Dedekind tam Riesz uzayı üzerinde $T(E_+)=E_+$ özelliğini sağlayan T operatörü için B_T, $\mathcal{L}_b(E)$ içinde r-ideal ise Önerme 3.10'dan $T \in Ort(E)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan, T=I alınarak tersinin doğru olmayacağı görülür.

E Arşimedyan Riesz uzayı olmak üzere, $0 \leq T \in Z(E)$ ise A_T cebir ve A_T Z(E)'nin Riesz alt uzayı olduğundan A_T f-cebiridir. E Dedekind tam Riesz uzayı ve $T \in Ort(E)$ ise B_T cebir ve $B_T \subseteq Ort(E)$ olduğundan B_T f-cebiridir.

<u>Sonuç 3.11:</u> E Dedekind tam Riesz uzayı ve $T \in \mathcal{L}_b(E)$ örten veya bire-bir olsun. A_T'nin f-cebiri olması için gerekli ve yeterli koşul $T \in Z(E)$ dir.

<u>Kanıt :</u> $T \in Z(E)$ iken A_T'nin f-cebiri olduğu açıktır.

A_T'nin f-cebiri olduğunu kabul edelim. π, E'nin merkezinde ise πT, $T\pi \in A_T$ dir. A_T değişmeli olduğundan,

$$(\pi T)T=T(\pi T) \Rightarrow (\pi T-T\pi)T=0$$

ve

$$(T\pi)T=T(T\pi) \Rightarrow T(\pi T-T\pi)=0$$

eşitlikleri sağlanır. Eğer T örten ise ilk eşitlikten, bire-bir ise ikinci eşitlikten $\pi T = T\pi$ olduğu görülür. Böylece $T \in Z(E)_C$ ve $Z(E)_C = Ort(E)$ olduğundan $T \in Ort(E)$ dir. Sonuç 3.4'den $T \in Z(E)$ olduğu görülür.

E kuvvetli topolojik dolu merkeze sahipken $Z(E)_C = Ort(E)$ olduğu bilinmektedir [5]. Buna göre E üzerinde örten veya bire-bir pozitif T operatörü için A_T f-cebiri ise Sonuç 3.11'in kanıtında olduğu gibi $T \in Ort(E)$ elde edilir. Sonuç 3.4'den sonraki gözlemden $T \in Z(E)$ dir. Dikkat edilirse pozitif operatörler ile çalışırken E'nin Dedekind tamlığı yerine Z(E) merkezinin kuvvetli topolojik dolu olması yeter.

Sonuç 3.12: E Dedekind tam Riesz uzayı ve $T \in \mathcal{L}_b(E)$ örten veya bire-bir olsun. B_T'nin f-cebiri olması için gerekli ve yeterli koşul $T \in Ort(E)$ dir.

Kanıt : $T \in Ort(E)$ iken B_T'nin f-cebiri olduğu açıktır.
B_T'nin f-cebiri olduğunu kabul edelim. π, E'nin merkezinde ise πT, $T\pi \in B_T$ dir. B_T değişmeli olduğundan,

$$(\pi T)T = T(\pi T) \Rightarrow (\pi T - T\pi)T = 0$$

ve

$$(T\pi)T = T(T\pi) \Rightarrow T(\pi T - T\pi) = 0$$

eşitlikleri sağlanır. Eğer T örten ise ilk eşitlikten, bire-bir ise ikinci eşitlikten $\pi T = T\pi$ olduğu görülür. Böylece $T \in Ort(E)$ dir.

Şimdi, E Dedekind tam Riesz uzayı üzerinde T Riesz izomorfizması tarafından üretilen band, B_T için bir betimleniş verelim.

Önerme 3.13: E Dedekind tam Riesz uzayı üzerinde T Riesz izomorfizması olsun. O zaman

$$B_T = \{S \in \mathcal{L}_b(E) \text{: } S = T\pi \text{ olacak şekilde bir } \pi \in Ort(E) \text{ var } \}.$$

Kanıt : $0 \leq \pi \in Ort(E)$ olsun. O zaman $\pi \wedge nI \uparrow \pi$ ve böylece her n için $T(\pi \wedge nI) \leq T\pi$ dir. $H \in \mathcal{L}_b(E)$ olmak üzere her n için $T\pi \wedge nT \leq H$ olsun.

Dolayısıyla her n için, $T(\pi \wedge nI) \leq H$ ve T^{-1} pozitif operatör olduğundan $\pi \wedge nI \leq T^{-1}H$ olur. Böylece $\pi \leq T^{-1}H$, yani $T\pi \leq H$ elde edilir. Buradan $T\pi \wedge nT \uparrow T\pi$, yani $T\pi \in B_T$ dir. Ort(E)'nin pozitif üreteçli olmasından genel bir $\pi \in Ort(E)$ için $T\pi \in B_T$ olur.

Tersine, $0 \leq S \in B_T$ olsun. O zaman $S \wedge nT \uparrow S$ dir. Her n için $T^{-1}(S \wedge nT) \leq T^{-1}S \wedge nI$ eşitsizliği sağlanır. $T^{-1}S \wedge nI \uparrow T^{-1}S$ olduğunu gösterelim. $H \in \mathcal{L}_b(E)$ olmak üzere her n için $T^{-1}S \wedge nI \leq H$ olsun. Böylece her n için $T^{-1}(S \wedge nT) \leq H$ eşitsizliği sağlanır. T pozitif operatör olduğundan $(S \wedge nT) \leq TH$ ve böylece $S \leq TH$, yani $T^{-1}S \leq H$ elde edilir. $T^{-1}S \wedge nI \uparrow T^{-1}S$ ve her n için $T^{-1}S \wedge nI \in Ort(E)$ olduğundan, $0 \leq T^{-1}S \in Ort(E)$ dir. $T^{-1}S = \pi$ denirse $S=T\pi$ olacak şekilde $0 \leq \pi \in Ort(E)$ vardır. B_T'nin pozitif üreteçli olmasından genel bir $S \in B_T$ için istenen sağlanır.

<u>Sonuç 3.14 :</u> E Dedekind tam Riesz uzayı üzerinde T tersinir ortomorfizma olsun. O zaman B_T=Ort(E)'dir.

<u>Kanıt :</u> $B_T = B_{|T|} \subseteq Ort(E)$ olduğu açıktır. $S \in Ort(E)$ olsun. $|T|$ tersinir ortomorfizma olduğundan $|T|^{-1}S \in Ort(E)$ olur. $|T|^{-1}S = \pi$ denirse $S = |T|\pi$ ve Önerme 3.13'den $S \in B_{|T|}$ dir.

<u>Gözlem :</u> E Dedekind tam Riesz uzayı üzerinde $T \in \mathcal{L}_b(E)$ tersinir operatör olsun. Eğer A_T f-cebiri ise Sonuç 3.11'den $T \in Z(E)$ ve Ort(E) dolu cebir olduğundan $T^{-1} \in Ort(E)$ dir. Böylece Sonuç 3.14'den $B_T = B_{T^{-1}} = Orth(E)$ dir.

E Arşimedyan Riesz uzayında birim operatör ile üretilen ideal f-cebiri olduğundan değişmelidir. T:E→E pozitif operatör ve $T \neq I$ iken A_T değişmeli olmayabilir. X kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere C(X) üzerinde birim operatörle üretilen idealin,

$$\{T : \text{her } f \in C(X) \text{ için } Tf = g.f \text{ olacak şekilde } g \in C(X) \text{ vardır}\}$$

olduğu bilinmektedir. Bu durum aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

Önönerme 3.15: X Kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere $T:C(X) \to C(X)$, $T(\mathbf{1})=\mathbf{1}$olan cebir homomorfizması olsun. O zaman

$$A_T = \{S : \text{her } f \in C(X) \text{ için } Sf = g.Tf \text{ olacak şekilde } g \in C(X) \text{ vardır}\}.$$

Kanıt : Eğer her $f \in C(X)$ için $Sf=g.Tf$ olacak şekilde bir $g \in C(X)$ varsa $S \in A_T$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $0 \leq S \leq T$ olduğunu kabul edelim. Her $x \in X$ için, $\delta_x:C(X) \to IR$; $\delta_x(f)=f(x)$ olmak üzere $0 \leq S'\delta_x \leq T'\delta_x$ eşitsizliği sağlanır. $T'\delta_x$ Riesz homomorfizması olduğundan, $S'\delta_x=g(x)T'\delta_x$ olacak şekilde g(x) pozitif sayısı vardır. Buradan her $x \in X$ için $g(x)=(S\mathbf{1})(x)$ olduğu kolayca görülür. Böylece her $f \in C(X)$için $Sf=(S\mathbf{1})Tf$ elde edilir.

Örnek 3.16 : X kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere, $T:C(X) \to C(X)$, $T(\mathbf{1})=\mathbf{1}$ olan cebir homomorfizması olsun. $Tf \neq f$ olacak şekilde $f \in C(X)$ olduğunu kabul edelim. $T(\mathbf{1})=\mathbf{1}$ olduğundan $T^2f > 0$ olduğu kabul edilebilir. Her $g \in C(X)$ için $Sg=f.Tg$ ile tanımlansın. Böylece $S \in A_T$ dir. Üstelik,

$$(ST)(f) = S(Tf) = f.T^2f$$

ve

$$(TS)(f) = T(Sf) = T(f.Tf) = Tf.T^2f$$

yani, $(ST)f \neq (TS)f$ dir. Böylece $TS \neq ST$ dir. O halde A_T'nin değişmeli olması için gerekli ve yeterli koşul T=I olmasıdır.

4. A_T İLE DEĞİŞMELİ OPERATÖRLER

E Riesz uzayının sıra duali $E^{\sim}$ nın, E'nin noktalarını ayırdığını kabul ettiğimizi tekrar hatırlatalım. E Riesz uzayı olmak üzere $\mathcal{L}_b(E)$ ' nin bir A alt kümesi verilsin. $S \in \mathcal{L}_b(E)$ olmak üzere her $R \in A$ için $SR=RS$ oluyorsa , S ye A ile değişmeli operatör denir ve A ile değişmeli operatörlerin uzayı $\{A\}_c$ ile gösterilir.

Öncelikle $S \in B_T$ ve değişme özelliği arasındaki ilişkiyi inceleyelim. E üzerindeki sıralı projeksiyonların Boole cebri $\mathbb{P}(E)$ ile gösterilsin. E, F Dedekind tam Riesz uzaylar ve $T:E \to F$ Riesz homomorfizması olsun. Herhangi bir $P \in \mathbb{P}(E)$ için F den $\{TP(E)\}^{dd}$ örten sıralı projeksiyonu t(P) ile gösterilsin. Böylece $t : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ her $P \in \mathbb{P}(E)$ için $t(P)T=TP$ eşitliğini sağlayan Boole homomorfizması tanımlar. $S \in B_T$ iken her $P \in \mathbb{P}(E)$ için $t(P)S = SP$ dir. Gerçekten $P \in \mathbb{P}(E)$ için , $U \to UP$ ve $U \to t(P)U$ dönüşümleri $\mathcal{L}_b(E,F)$' nin band projeksiyonlarıdır. Bu projeksiyonlar T üzerinde ve dolayısıyla B_T üzerinde aynıdır. Bu önermenin tersi de doğrudur. Yani her $P \in \mathbb{P}(E)$ için $t(P)S = SP$ oluyorsa $S \in B_T$ dir. Detaylı açıklamalar [4] içinde yer almaktadır.

Dikkat edilirse , E Dedekind tam Riesz uzayı üzerinde I , birim operatörü ele alındığında her $P \in \mathbb{P}(E)$ için $t(P) = P$ olacağından $\{\mathbb{P}(E)\}_c = Ort(E)$ elde edilir. Gerçekte, E esas projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzayı üzerindeki band koruyan operatörlerin sıralı projeksiyonlarla değişmeli olduğu, tersine sıralı projeksiyonlarla değişmeli operatörlerin band koruduğu H.Nakano tarafından kanıtlanmıştır [1].Böylece E esas projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzayı iken $Z(E)_c$ = Ort(E) dir. E Dedekind tam Riesz uzayı iken $Z(E)_c$ yerel düzgün tamdır.

Böylece doğal soru , E yerel düzgün tam olduğunda $Z(E)_c$ 'nin de yerel düzgün tam olup ,olmayacağıdır? $\{\pi_n\}$, $Z(E)_c$ içinde pozitif operatörlerin yerel düzgün Cauchy dizisi olsun. Tanım gereği , $T \in \mathcal{L}_b(E)_+$ için ve her $\varepsilon > 0$ için $N=N(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır öyleki , her $n,m \geq N$ için , $-\varepsilon T \leq \pi_n - \pi_m \leq \varepsilon T$ eşitsizliği sağlanır. Böylece her $x \in E_+$ ve her $n,m \geq N$ için $-\varepsilon Tx \leq \pi_n(x) - \pi_m(x) \leq \varepsilon Tx$ eşitsizliği elde edilir. E yerel düzgün tam ve E_+ yerel düzgün kapalı olduğundan $\pi_n(x) \to \pi_o(x)$ (y.d.) olacak şekilde bir tek $\pi_o(x) \in E_+$ vardır. Böylece, E_+ üzerinde tanımlanan π_o , toplamsal olduğundan E üzerinde pozitif operatöre genişler [1]. $\{\pi_n\}$, $Z(E)_c$ içinde sıra sınırlı operatörlerin yerel düzgün Cauchy dizisi olduğunda , her $x \in E_+$ ve her $n,m \geq N$ için,

$$|\pi_n(x)^+ - \pi_m(x)^+| \leq |\pi_n(x) - \pi_m(x)| \leq \varepsilon Tx ,$$

$$|\pi_n(x)^- - \pi_m(x)^-| \leq |\pi_n(x) - \pi_m(x)| \leq \varepsilon Tx$$

eşitsizlikleri sağlanır. E yerel düzgün tam ve E_+ yerel düzgün kapalı olduğundan $\pi_n(x)^+ \to r_1(x)$ (y.d.) olacak şekilde bir tek $r_1(x) \in E_+$ vardır. r_1 , E üzerinde bir tek pozitif operatöre genişler. Benzer şekilde , $\pi_n(x)^- \to r_2(x)$ (y.d.) olacak şekilde $r_2(x) \in E_+$ vardır ve r_2, E üzerinde bir tek pozitif operatöre genişler. Böylece $\pi_o = r_1 - r_2$ denirse π_o , E üzerinde sıra sınırlı operatördür ve $\{\pi_n\}$ dizisi π_o ' a yerel düzgün yakınsar. $\pi_o \in Z(E)_c$ olduğunu elde etmek için her $0 \leq S \in Z(E)$ ile π_o 'ın değişmeli olduğunu göstermek yeter. Gerçekten , $x \in E_+$ için $\pi_n Sx \to \pi_o Sx$ (y.d.) ve pozitif operatörlerin yerel dizisel sürekli olmasından $S\pi_n(x) \to S\pi_o(x)$ (y.d.) elde edilir. Her n için $\pi_n S = \pi_n S$ olduğundan ve limitin tekliğinden , $\pi_o Sx = S\pi_o x$ elde edilir. Böylece $\pi_o \in Z(E)_c$ 'dir.

$Z(E)_c$, $\mathcal{L}_b(E)$ 'nin yerel düzgün kapalı alt kümesidir [5]. Üstelik bu durum I tarafından üretilen idealin yanı sıra herhangi bir T pozitif operatörü ile $\mathcal{L}_b(E)$ içinde üretilen ideal için de geçerlidir. Yani, $\{A_T\}_c$, $\mathcal{L}_b(E)$' nın yerel düzgün kapalı alt kümesidir. $T_n \to S$ (y.d.) olacak şekilde $\{A_T\}_c$ içinde $\{T_n\}$ dizisi verilsin. A_T pozitif üreteçli olduğundan $0 \leq \pi \leq T$, $\pi \in A_T$ için $S\pi = \pi S$ olduğunu göstermek yeter. Tanım gereği, $U \in \mathcal{L}_b(E)_+$ için ve her $\varepsilon > 0$ için , $-\varepsilon U \leq S - T_N \leq \varepsilon U$ eşitsizliğini sağlayan yeterince büyük N doğal sayısı vardır. $0 \leq \pi \leq T$, $\pi \in A_T$ olmak üzere,

$$-\varepsilon(TU+UT) \leq S\pi - \pi S = S\pi - \pi S + \pi T_N - T_N \pi \leq \varepsilon(TU+UT)$$

eşitsizliği sağlanır. $TU+UT$ pozitif operatör olduğundan ve E Arşimedyan Riesz uzayı iken $\mathcal{L}_b(E)$ Arşimedyan olduğundan $S\pi = \pi S$ elde edilir. Böylece $\{A_T\}_c$ yerel düzgün kapalıdır. Benzer düşünce ile her T pozitif operatörü için $\{T\}_c$ 'nin yerel düzgün kapalı olduğu gösterilir.

E kuvvetli topolojik dolu merkeze sahip Riesz uzayı ve $0 \leq S \in Z(E)_c$ olsun. $z \in E_+$ için $S[0, z]$' nin $\sigma(E, E^\sim)$ kapanışı $[0,Sz]$ dir. Gerçekten $[0,Sz]$ $\sigma(E, E^\sim)$ kapalı ve $S[0, z] \subseteq [0,Sz]$ olduğundan , $\overline{S[0,z]} \subseteq [0,Sz]$ dir. Diğer taraftan $0 \leq y \leq Sz$ eşitsizliği sağlanırsa , $\pi_\alpha Sz \to y$ ($\sigma(E, E^\sim)$) her α için $0 \leq \pi_\alpha \leq I$ olacak şekilde $Z(E)$ içinde π_α neti vardır. $S\pi_\alpha z \to y$ ($\sigma(E, E^\sim)$) olduğundan y, $S[0, z]$ nin $\sigma(E, E^\sim)$ kapanışındadır. Böylece $S[0, z]$' nin $\sigma(E, E^\sim)$ kapanışı $[0,Sz]$ dir. Eğer E zengin merkeze sahip ve $0 \leq S \in Z(E)_c$ ise S aralık koruyan operatördür.

<u>Önerme 4.1 :</u> E Arşimedyan Riesz uzayı ve T, E üzerinde pozitif operatör olsun. T örten veya bire- bir ise $\{A_T\}_c \subseteq Z(E)_c$ dir.

<u>Kanıt :</u> $S \in \{A_T\}_c$ ve $\pi \in Z(E)$ olsun π T ve T $\pi \in A_T$ oduğundan,

$$S\,T\pi = T\pi S \Rightarrow TS\pi = T\pi S \Rightarrow T(S\pi - \pi S) = 0 \text{ ve}$$
$$S\,\pi T = \pi T S \Rightarrow S\pi T = \pi ST \Rightarrow (S\pi - \pi S)T = 0$$

eşitsizlikleri sağlanır. T bire –bir ise ilk eşitlikten, T örten ise ikinci eşitlikten $S\pi = \pi S$ ve böylece $S \in Z(E)_c$ elde edilir.

Gerçekte ,kuvvetli topolojik dolu merkeze sahip Riesz uzayı üzerinde tanımlı kesin pozitif operatör için Önerme 4.1 yine doğrudur. Bunu görmek için bazı hazırlıklara gereksinim vardır. E sıralı vektör uzayı, pozitif üreteçli (yani, her $x \in E$ için $x = x_1 - x_2$, olacak şekilde $x_1, x_2 \in E_+$ vardır)ve Riesz ayrışım özelliğine sahip (yani, $x,y,z \in E_+$ $0 \leq x \leq y+z$ sağlandığında $x = x_1 + x_2$, $x_1 \leq y$ $x_2 \leq z$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in E_+$ vardır) olsun. O zaman E ' nin sıra duali , $E^{\sim}$ 'nin Dedekind tam Riesz uzayı olduğu bilinmektedir[14]. Üstelik, $f, g \in E^{\sim}$ ve $x \in E_+$ için,

$$(f \vee g)(x) = \sup \{f(y) + f(z) : y, z \in E_+ \; y+z = x\},$$
$$(f \wedge g)(x) = \inf \{f(y) + f(z) : y, z \in E_+ \; y+z = x\}$$

eşitlikleri sağlanır.

E, F ve G Riesz uzayları, $\phi : E \times F \rightarrow G$ çift doğrusal dönüşüm olsun. Her $f \in E_+$ için $E \rightarrow G$; $x \rightarrow \phi(x, f)$ ve her $x \in E_+$ için $F \rightarrow G$: $f \rightarrow \phi(x,f)$ ile tanımlı dönüşümler Riesz homomorfizması oluyorsa ϕ ye çift Riesz homomorfizması denir.

Özellikle, T E üzerinde pozitif operatör olmak üzere A_T 'nin Riesz ayrışım özelliğine sahip olduğunu kabul edelim. A_T pozitif üreteçli sıralı vektör uzayı olduğundan $A_T^{\sim}$ Dedekind tam Riesz uzayıdır. $\phi : E \times E^{\sim} \rightarrow A_T^{\sim}$; $\phi(x,f) = \mu_{x,f}$; her $\pi \in A_T$ için $\mu_{x,f}(\pi) = f(\pi(x))$ olarak tanımlanan ϕ çift doğrusal dönüşümünü inceleyelim. Her $x \in E_+$ için $f \rightarrow \phi(x,f)$ ve $f \in E_+^{\sim}$ için $x \rightarrow \phi(x,f)$ dönüşümleri pozitiftir. Üstelik her $(x,f) \in E \times E^{\sim}$ için, $|\phi(x,f)| \leq \phi(|x|,|f|)$ eşitsizliği sağlanır. Gerçekten, $0 \leq \pi \in A_T$ $(x,f) \in E \times E^{\sim}$ olmak üzere $|\pi(x)| \leq \pi(|x|)$ ve böylece $|f(\pi(x))| \leq |f| |\pi(x)| \leq |f|(\pi(|x|))$ eşitsizliği elde edilir. Böylece her $0 \leq \pi \in A_T$ için $\phi(x,f) \leq \phi(|x|,|f|)(\pi)$ ve $-\phi(x,f)(\pi) \leq \phi(|x|,|f|)(\pi)$ eşitsizlikleri elde edilir. Buradan $|\phi(x,f)| \leq \phi(|x|,|f|)$ dir. Eğer E kuvvetli topolojik dolu merkeze sahipse , ϕ dönüşümünün pozitifliği hakkında fazlası söylenebilir.

Önönerme 4.2 : E kuvvetli topolojik dolu merkeze sahip Riesz uzayı, T E üzerinde pozitif operatör ve A_T Riesz ayrışım özelliğine sahip olsun. $\phi : E \times E^{\sim} \rightarrow A_T^{\sim}$ dönüşümü çift-Riesz homomorfizmasıdır.

Kanıt : İlk olarak her $x \in E_+$ için $\phi(x, .) : E^{\sim} \rightarrow A_T^{\sim}$ dönüşümünün Riesz homomorfizması olduğunu gösterelim. Her $x \in E_+$ için $\phi(x, .) : E^{\sim} \rightarrow A_T^{\sim}$ dönüşümü pozitif olduğundan $f \in E^{\sim}$ için $\phi(x,f)^+ \leq \phi(x,f^+)$ olur. $0 \leq \pi \in A_T$, $x \in E_+$ ve $f \in E_+$ olsun. O zaman ,

$$\phi(x,f^+)(\pi) = \mu_{x,f+}(\pi) = f^+(\pi(x)) = \sup\{f(y) : 0 \leq y \leq \pi(x)\}$$

eşitliği sağlanır. $0 \leq y \leq \pi(x)$ eşitsizliğini sağlayan her y için, $\pi_\alpha(\pi(x)) \rightarrow y$ $(\sigma(E, E^{\sim}))$, her α için $0 \leq \pi_\alpha \leq I$ olacak şekilde Z(E) içinde $\{\pi_\alpha\}$ neti vardır. Her α için $0 \leq \pi_\alpha \pi \leq \pi$ ve böylece $\pi_\alpha \pi \in A_T$ olduğundan,

$$f(\pi_\alpha(\pi x)) \leq \phi(x,f)^+(\pi_\alpha \pi) \leq \phi(x,f)^+(\pi)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece her y , $0 \leq y \leq \pi(x)$ için $f(y) \leq \phi(x,f)^+(\pi)$ eşitsizliği elde edilir. y üzerinden supremum alınırsa , her $f \in E^{\sim}$ için $\phi(x, f^+) \leq \phi(x,f)^+$ eşitsizliği elde edilir.

Şimdi her $f \in E_+^{\sim}$ için $\phi(\,.\,,f) : E \to A_T^{\sim}$ dönüşümünün Riesz homomorfizması olduğunu gösterelim. Bunun için, $x \wedge y = 0$ iken $\phi(x,f) \wedge \phi(y,f) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

A_T 'nin tanımı gereği $\phi(x,f) \wedge \phi(y,f)(T) = (\mu_{x,f} \wedge \mu_{y,f})(T) = 0$ yeterli olacaktır.

$$(\mu_{x,f} \wedge \mu_{y,f})(T) = \inf\{\mu_{x,f}(T_1) + \mu_{y,f}(T_2) : 0 \leq T_1, T_2 \in A_T, T_1+T_2 = T\}$$
$$= \inf\{f(T_1x) + f(T_2y) : 0 \leq T_1, T_2 \in A_T, T_1+T_2 = T\}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi $z = x + y$ olsun. x , y ve z tarafından üretilen idealler sırasıyla I_x , I_y ve I_z olsun. O zaman I_z , I_x ve I_y' nin sıra direkt toplamıdır [18]. P, I_z' nin I_x 'e örten sıra projeksiyonu olsun. E üzerindeki sıra sınırlı fonksiyonellerin I_z ' ye kısıtlamasıyla elde edilen uzayı J ile gösterelim. O zaman J, $I_z^{\sim}$ içinde idealdir. Gerçekten $f \in I_z^{\sim}$ ve bir $g \in E^{\sim}$ için $0 \leq f \leq g|_{I_z}$ ise f, E üzerinde pozitif fonksiyonele genişler [1]. P ' nin devriği $P^{\sim} : I_z^{\sim} \to I_z^{\sim}$ $0 \leq P^{\sim} \leq I$ eşitsizliğini sağlar. Böylece $P^{\sim}(J) \subseteq J$ dir. $\langle I_z, J \rangle$ Riesz çifti ve P: $I_z(\sigma(I_z, J)) \to I_z(\sigma(I_z, J))$ süreklidir. $0 \leq P(z) \leq z$ olduğundan $\pi_\alpha z \to Pz$ $\sigma(E, E^{\sim})$ yakınsak ve böylece $\sigma(I_z, J)$ yakınsak , her α için $0 \leq \pi_\alpha \leq I$ olacak şekilde Z(E) içinde $\{\pi_\alpha\}$ neti vardır. $P\pi_\alpha z = \pi_\alpha Pz = \pi_\alpha x$ eşitliği sağlanır. P nin sürekliliğinden $\pi_\alpha x \to x$ $(\sigma(I_z, J))$ dir. Her α için $\pi_\alpha(z) = \pi_\alpha(x) + \pi_\alpha(y)$ olduğundan $\pi_\alpha(y) \to 0$ $(\sigma(I_z, J))$ dir. Her α için ,

$$(\mu_{x,f} \wedge \mu_{y,f})(T) \leq f(T(I-\pi_\alpha)x + T\pi_\alpha y)$$

ve böylece

$$(\mu_{x,f} \wedge \mu_{y,f})(T) \leq \ell im_{\alpha}(fT)((I-\pi_{\alpha})x + \pi_{\alpha} y) = 0$$

elde edilir.

<u>Önönerme 4.3 :</u> E kuvvetli topolojik dolu merkeze sahip Riesz uzay, T E üzerinde kesin pozitif operatör ve A_T Riesz ayrışım özelliğine sahip olsun. $\{A_T\}_c \subseteq Ort(E)$ dir.

<u>Kanıt :</u> $S \in \{A_T\}_c$ olsun. Her $x \in E_+$ ve $f \in E^{\sim}$ için $\mu_{Sx,f} = \mu_{x,S^{\sim}f}$ olduğu kolayca görülür. Öte yandan eğer E içinde $x \perp y$ ise $\phi : E x E^{\sim} \to A_T^{\sim}$ dönüşümünün pozitifliğinden, her $f \in E^{\sim}$ için,

$$|\mu_{x,f}| \leq \mu_{|x|,|f|} \leq \mu_{|x|,|f| \vee |g|}$$

ve

$$|\mu_{y,g}| \leq \mu_{|y|,|g|} \leq \mu_{|y|,|f| \vee |g|}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece Önönerme 4.2 den ,

$$\begin{aligned} 0 \leq |\mu_{x,f}| \wedge |\mu_{y,g}| &\leq \mu_{|x|,|f| \vee |g|} \wedge \mu_{|y|,|f| \vee |g|} \\ &= \mu_{|x| \wedge |y|,|f| \vee |g|} \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece eğer E içinde $x \perp y$ ise her $f, g \in E^{\sim}$ için $A_T^{\sim}$ içinde $\mu_{x,f} \perp \mu_{y,g}$ dir. Özellikle her $f \in E^{\sim}$ için $\mu_{x,S^{\sim}f} \perp \mu_{y,f}$ dir. Böylece her $x,y \in E$, $x \perp y$ ve $f \in E^{\sim}$ için , $\mu_{Sx,f} \perp \mu_{y,f}$ dir. Her $0 \leq f \in E^{\sim}$ için , $\phi(\cdot\,, f) : E \to A_T^{\sim}$ Riesz homomorfizması olduğundan,

$$\phi(|Sx| \wedge |y|, f) = \phi(|Sx|, f) \wedge \phi(|y|, f)$$
$$= |\phi(Sx, f)| \wedge |\phi(y, f)|$$
$$= |\mu_{Sx,f}| \wedge |\mu_{y,f}|$$
$$= 0$$

elde edilir. Böylece her $f \in E^{\sim}$ için $\mu_{|Sx| \wedge |y|, f} = 0$ dır. Özellikle her $f \in E^{\sim}$ için $f(T(|Sx| \wedge |y|)) = 0$ dır. $E^{\sim}$ E'nin noktalarını ayırdığından $T(|Sx| \wedge |y|) = 0$ ve T kesin pozitif olduğundan $|Sx| \wedge |y| = 0$ elde edilir. Böylece S ortomorfizmadır.

Sonuç 4.4 : E kuvvetli topolojik dolu merkeze sahip Riesz uzay, T E üzerinde kesin pozitif operatör ve A_T Riesz ayrışım özelliğine sahip olsun. $\{A_T\}_c = Ort(E)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $T \in Ort(E)$ dir.

Kanıt : $\{A_T\}_c = Ort(E)$ ise her $\pi \in Ort(E)$ için $\pi T = T \pi$ olduğu $T \in Z(E)_c$ ve böylece $T \in Ort(E)$ dir [5]. T'nin ortomorfizma olduğunu kabul edelim. Önerme 4.3 den T kesin pozitif operatörü için $\{A_T\}_c \subseteq Ort(E)$ olduğu bilinmektedir. $T \in Ort(E)$ olduğundan $A_T \subseteq Ort(E)$ ve Ort(E) Arşimedyan f-cebri dolayısıyla değişmeli olduğundan $Ort(E) = \{Ort(E)\}_c \subseteq \{A_T\}_c$ elde edilir.

Önerme 4.3 de T üzerindeki kesin pozitiflik koşulu, bir n için T^n ' nin veya sadece bir $S \in A_T$ ' nin kesin pozitif olmasıyla yer değiştirebilir. Ayrıca $\mathcal{L}_b(E)$ 'nin A_T 'yi içeren değişmeli her alt cebrinin , Ort(E)' nin alt cebri olacağı kolayca görülür.

E Dedekind tam Riesz uzayı olsun. T E üzerinde pozitif operatör ve R,S E ' nin ortomorfizmaları olsun. O zaman $\mathcal{L}_b(E)$ içinde, $(R \wedge S)T = RT \wedge ST$, $(R \vee S)T = RT \vee ST$ ve benzer şekilde $T(R \wedge S) = TR \wedge TS$, $T(R \vee S) = RT \vee TS$ eşitlikleri sağlanır.

Sonuç 4.5: E Dedekind tam T , E üzerinde pozitif operatör olsun. T kesin pozitif veya örten ise $\{A_T\}_c$, Ort(E) ' nin Riesz alt uzayıdır.

Kanıt : E Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan kuvvetli topolojik dolu merkeze sahiptir. Üstelik A_T , $\mathcal{L}_b$ (E) 'nin Riesz alt uzayı olduğundan Riesz ayrışım özelliğine sahiptir. Böylece T kesin pozitif operatörse Önerme 4.3 den , T örten operatörse Önerme 4.1 den $\{A_T\}_c \subseteq$ Ort(E) dir. Böylece R,S $\in$ $\{A_T\}_c$ iken R,S $\in$ Ort(E) ve $0 \leq U \in A_T$ için,

$$(R \wedge S)\,U = RU \wedge SU = UR \wedge US = U\,(R \wedge S)$$

eşitliği elde edilir. A_T pozitif üreteçli olduğundan, $R \wedge S \in \{A_T\}_c$ ve böylece Riesz alt uzayıdır.

Sonuç 4.6: E Dedekind tam T , E üzerinde pozitif operatör olsun. T kesin pozitif veya örten ise $\{A_T\}_c$, Ort(E) ' nin yerel düzgün tam birimsel f-alt cebridir.

Kanıt : Sonuç 4.5 'den $\{A_T\}_c$ 'nin , Ort(E)' nin Riesz alt uzayı olduğu bilinmektedir. $\{A_T\}_c$, birimli Riesz cebri olduğundan Ort(E)' nin birimsel f-altcebiri olacağı açıktır. Üstelik $\{A_T\}_c$ ' nin $\mathcal{L}_b$(E) içinde yerel düzgün kapalı olduğu bilinmektedir. E Dedekind tam olduğundan Ort(E) yerel düzgün tam ve böylece $\{A_T\}_c$ yerel düzgün tamdır.

E Arşimedyan Riesz uzayı üzerinde dikliği koruyan S operatörü için |S| vardır ve dikliği koruyan operatördür. Böylece , T Riesz homomorfizması olmak üzere , $\{T\}_c$ içinde dikliği koruyan S operatörü için, $|S| \in \{T\}_c$ olur. Gerçekten $x \in E_+$ için,

$$T|S|\,x = T|Sx| = |TSx| = |STx| = |S||Tx| = |S|Tx$$

eşitliği sağlanır. Böylece $\{T\}_c \cap Z(E)$ ve $\{T\}_c \cap Ort(E)$ Riesz uzayıdırlar.

E esas projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzayı olmak üzere her $\pi \in Z(E)$ için $S\pi \leq \pi S$ (veya $\pi S \leq S \pi$) eşitsizliğini sağlayan S operatörü ortomorfizmadır. $S\in \mathcal{L}_b(E)$ olmak üzere $\Psi_S : Z(E) \to \mathcal{L}_b(E)$;$\Psi_S(\pi) = S\pi$ ve $\varphi_S : Z(E)\to\mathcal{L}_b(E)$; $\varphi_S(\pi) = \pi S$ olarak tanımlansın. Z(E) üzerinde $0 \leq \varphi_S - \Psi_S$ ve $Ker(\varphi_S - \Psi_S) = \{S\}_c \cap Z(E)$ dir. $\{S\}_c \cap Z(E)$ 'nin pozitif kısmı Z(E) 'nin pozitif kısmı içinde solid ve $I\in \{S\}_c \cap Z(E)$ olduğundan, her P sıralı projeksiyonu için $P\in \{S\}_c \cap Z(E)$ dir. Böylece Nakano'nun sonucundan $S\in Ort(E)$ dir.

$\{T\}_c$ 'nın Riesz alt uzayı olmasıyla ilgili detaylar aşağıda yer almaktadır.

Sonuç 4.7: T, E Dedekind tam Riesz uzayı üzerinde sıra sürekli, aralık koruyan Riesz homomorfizması ise $\{T\}_c$, $\mathcal{L}_b(E)$ ' nin Riesz alt uzayıdır.

Kanıt : $\mathcal{L}_b(E) \to \mathcal{L}_b(E)$; $S\to ST$ dönüşümü aralık koruyan Riesz homomorfizması ve T sıra sürekli olduğundan olduğundan, $\mathcal{L}_b(E) \to \mathcal{L}_b(E)$; $S \to TS$ dönüşümü Riesz homomorfizması olur [1]. Böylece S, $R\in \{T\}_c$ iken,

$$(S\vee R)T = ST\vee RT = TS\vee TR = T(S\vee R)$$

eşitliği elde edilir. Bu ise $\{T\}_c$ ' nin Riesz alt uzayı olduğu gösterir.

Dikkat edilirse E Dedekind tam Riesz uzayının T pozitif ortomorfizması için $\{T\}_c$ 'nin Riesz uzayı olduğu sonucunu elde ederiz. Özellikle I, birim operatörü için $\{I\}_c$ 'nın Riesz alt uzayı olması E' nin Dedekind tam olma kabulünü zorunlu kılar. Ortomorfizmalar için daha fazlası söylenebilir.

Önerme 4.8: T, E Dedekind tam Riesz uzayı üzerinde sıra sınırlı operatör olsun. Aşağıdakiler denktir:

(i) $\{T\}_c$ ideal.

(ii) $T \in Ort(E)$.

(iii) $\{T\}_c$ band.

Kanıt : (i) $\Rightarrow$ (ii) $\{T\}_c$ 'nin $\mathcal{L}_b(E)$ içinde ideal olduğunu kabul edelim. $I \in \{T\}_c$ olduğundan $Z(E) \subseteq \{T\}_c$ elde edilir. Böylece her $\pi \in Z(E)$ için $T\pi = \pi T$, yani $T \in Z(E)_c$ dir. $Z(E)_c = Ort(E)$ olduğundan $T \in Ort(E)$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) T, E' nin ortomorfizması olsun. $\Psi_T : \mathcal{L}_b(E) \to \mathcal{L}_b(E)$; $S \to TS$ ve $\varphi_T : \mathcal{L}_b(E) \to \mathcal{L}_b(E)$; $S \to ST$ ile tanımlı dönüşümler $\mathcal{L}_b(E)$' nin ortomorfizmalarıdır. $\varphi_T - \Psi_T$ $\mathcal{L}_b(E)$' nin ortomorfizması olduğundan Ker $(\varphi_T - \Psi_T)$, $\mathcal{L}_b(E)$ içinde band olur. $\{T\}_c = Ker(\varphi_T - \Psi_T)$ olduğundan $\{T\}_c$, $\mathcal{L}_b(E)$ içinde banddır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Band tanımından açıkça görülür.

$T \in A_T$ olduğundan $\{A_T\}_c \subseteq \{T\}_c$ olur. Genelde bu kesin eşitsizliktir. Örneğin ; T, $\mathcal{L}_b(E) \neq Ort(E)$ olan E Dedekind tam Riesz uzayı üzerinde birim operatör ise $\{A_T\}_c = Ort(E)$ ve $\{T\}_c = \mathcal{L}_b(E)$ olduğundan $\{A_T\}_c \neq \{T\}_c$ olur. Önerme

4.3 ‘ ün koşulları altında $\{A_T\}_c = \{T\}_c$ ise $T \in$ Ort(E) ve Sonuç 4.4. den $\{A_T\}_c = \{T\}_c =$ Ort(E) dir.
$T \in B_T$ olduğundan $\{B_T\}_c \subseteq \{T\}_c$ olur. $S \in \{T\}_c$ iken $\{S\}_c$ band oluyorsa, $T \in \{S\}_c$ olduğundan $B_T \subseteq \{S\}_c$ ve böylece $S \in \{B_T\}_c$ elde edilir. Önerme 4.8 ‘in koşulları altında $\{T\}_c \subseteq$ Ort(E) ise $\{T\}_c \subseteq \{B_T\}_c \subseteq \{A_T\}_c \subseteq \{T\}_c$ olduğundan $\{T\}_c = \{B_T\}_c = \{A_T\}_c$ eşitliği elde edilir. Sonuç 4.5 ‘ in koşulları altında $\{T\}_c = \{B_T\}_c$ ise $\{T\}_c \subseteq \{B_T\}_c \subseteq \{A_T\}_c \subseteq$ Ort(E) olduğundan $T \in$ Ort(E) ve böylece Ort(E) $\subseteq \{T\}_c$ dir. Buradan $\{T\}_c = \{B_T\}_c = \{A_T\}_c =$ Ort(E) dir. Sonuç 4.5 ‘in koşulları altında $\{T\}_c = \{B_T\}_c$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\{T\}_c \subseteq$ Ort(E) olmasıdır.

E Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere $\mathcal{L}_b(E)$ içinde sıralı yakınsama ve yerel düzgün yakınsama aynı olsun.Bu duruma $\mathcal{L}_b(E)$ içinde sıralı yakınsama uyumludur denir. Bu koşullar altında sıralı topoloji ile yerel düzgün topoloji özdeştir. $A \subseteq \mathcal{L}_b(E)$ ve $A' = \{S \in \mathcal{L}_b(E) : S_n \xrightarrow{o} S$ olacak şekilde $(S_n) \subseteq A$ vardır$\}$ olsun. Eğer A’nın kapanışı cl(A) ile gösterilirse, $A \subseteq A' \subseteq$ cl(A) olur. Bu koşullar altında $\{B_T\}_c = \{A_T\}_c$ dır. Bunun için $S \in \{A_T\}_c$ alalım. $A_T \subseteq \{S\}_c$ ve böylece $\{A_T\}' \subseteq \{S\}_c'$ olur.

E Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan $\{S\}_c$ yerel düzgün kapalı ve $\mathcal{L}_b(E)$ içinde sıralı yakınsama uyumlu olduğundan, $\{A_T\}' = B_T \subseteq \{S\}_c' = \{S\}_c$ elde edilir. Böylece $S \in \{B_T\}_c$ dir.

Aşağıda ilk olarak Pagter ve Huijsmans tarafından tanımlanan, düzgün kapalı ideallerin ilginç bir sınıfı $\mathcal{L}_b(E,F)$için incelendi [7].
Burada kapanışlar yerel düzgün topolojiye göre alınmışlardır.

Tanım 4.9 : I, E Riesz uzayının ideali olsun. Eğer $f \in I$, $g \in E$ ve $\bar{I}_f = \bar{I}_g$ iken $g \in I$ oluyorsa I ' ya soyut z – ideal denir.

[7] de z-idealler aşağıdaki gibi betimlenmiştir.

Önerme 4.10 : $I \subseteq E$ idealinin z-ideal olması için gerekli ve yeterli koşul $f \in I$ iken $\bar{I}_f \subseteq I$ olmasıdır.

Böylece herhangi bir düzgün kapalı idealin, z-ideal olduğu sonucu elde ederiz.

E, F Riesz uzayları F Dedekind tam ve $T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ olsun. O zaman $\{U \in \mathcal{L}_b(E,F) : N_T \subseteq N_U\}$ yerel düzgün kapalı idealdir. Böylece $\mathcal{L}_b(E,F)$'nin z-idealidir.

Önerme 4.11 : E, F Riesz uzayları F Dedekind tam ve $A \subseteq \mathcal{L}_b(E,F)$ 'nin ideali olsun. Eğer $S \in A$, $T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ ve $N_S = N_T$ iken $T \in A$ oluyorsa, A $\mathcal{L}_b(E,F)$ nin z-idealidir.

Kanıt : $S \in A$, $T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ ve $\overline{A}_S = \overline{A}_T$ olduğunu kabul edelim.

$$\overline{A}_T \subseteq \{U \in \mathcal{L}_b(E,F) : N_T \subseteq N_U\}$$

$$\overline{A}_S \subseteq \{U \in \mathcal{L}_b(E,F) : N_S \subseteq N_U\}$$

olduğundan $N_T = N_S$ dir. Böylece $T \in A$ ve A z- ideal olur.

T, E Arşimedyan Riesz uzayının ortomorfizması iken Ker T = N_T dir. Bu durumda Önerme 4.11' in benzeri Ort(E) için verilebilir.

Sonuç 4.12 : E Arşimedyan Riesz uzayı A, Ort(E) içinde ideal olsun. Eğer $S \in A$, $T \in Ort(E)$ ve Ker T = Ker S iken $T \in A$ oluyorsa A z-idealdir.

Gözlem : Önerme 4.11' in tersi doğru değildir. Bunun için $T : \ell_1 \to \ell_1$, $(x_n) \to T(x_n) = (x_2, x_1, x_3, \ldots)$ ile tanımlı operatörü ele alalım. O zaman $N_T = N_I = \{0\}$olur. $Ort(\ell_1)$ z- ideal olduğu halde $Te_1 \wedge e_2 \neq 0$ olduğundan $T \notin Ort(\ell_1)$ dir.

5. YEREL YAKLAŞIMLAR

E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam olmak üzere, $T:E\rightarrow F$ pozitif operatörünü ele alalım. E esas projeksiyon özelliğine sahip iken T'nin bileşenlerinin sıralı projeksiyonlar kullanılarak betimlenebildiği [8] içinde gösterildi. Daha sonra T ile sınırlı, pozitif operatöre, Q ve P sıralı projeksiyonlar olmak üzere QTP biçimindeki operatörlerin doğrusal bileşimleriyle yaklaşılabilindiği görüldü. Burada kullanılan teknikte, E'nin sıralı projeksiyonlar bakımından zengin olması gerekli olduğundan, esas projeksiyon özelliğine sahip olma kabulü kaldırılamıyordu. Bu durum, ortomorfizma yönünden zengin Banach örgüleri için incelendi [9]. Buna göre T ile sınırlı, pozitif operatöre, L ve M ortomorfizmalar olmak üzere LTM biçimindeki operatörlerin doğrusal bileşimleriyle yaklaşılabilindi.

Banach örgüleri üzerindeki pozitif operatörlerin üstten sınırlanabilme problemine katkı sağlayacağı düşüncesiyle $\mathcal{L}_b(E,F)$'nin merkezi incelendi [10]. Bunun sebebi, $0 \leq S \leq T$ iken $\pi(T) = S$ olacak şekilde $\pi \in Z(\mathcal{L}_b(E, F))$ olmasıdır.

Bu bölümde, E ve F uzayları üzerindeki kabuller zayıflatılarak, [9] ve [10] içindeki yerel yaklaşım sonuçları genişletilerek elde edilmiştir.

<u>Tanım 5.1 :</u> E Arşimedyan Riesz uzayı, $x \in E_+$ olsun .

a) $0 \leq y \leq x$ eşitsizliğini sağlayan her y için $\pi(x) = y$ olacak şekilde $0 \leq \pi \in Z(E)$ varsa E, x noktasında yerel zengin merkeze sahiptir denir. Gerektiğinde, $\pi \wedge I$ operatörünü alarak $0 \leq \pi \leq I$ olduğu kabul edilebilir.

b) E' nin sıra duali $E^{\sim}$, E'nin noktalarını ayırsın. Z(E)x' in $\sigma(E, E^{\sim})$ kapanışı, x tarafından üretilen ideali içeriyorsa, E x noktasında yerel topolojik dolu merkeze sahiptir denir.

Örnek 5.2 :

i) E, x noktasında yerel zengin merkeze sahip ise x noktasında yerel topolojik dolu merkeze sahiptir.

ii) E' nin zengin merkeze sahip olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in E_+$ noktasında yerel zengin merkeze sahip olmasıdır.

iii) E' nin topolojik dolu merkeze sahip olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in E_+$ noktasında yerel topolojik dolu merkeze sahip olmasıdır.

iv) E birimli Arşimedyan f-cebri ise birimde yerel zengin merkeze sahiptir. Gerçekten, $0 \leq y \leq e$ ise her $x \in E$ için $\pi(x)=xy$ çarpım operatörü olmak üzere $0 \leq \pi \leq I$ ve $\pi(e) = y$ sağlanır.

v) E, $u \in E_+$ da $\frac{1}{2}$ - sınırlı iç noktaya sahip Banach örgüsü ise u noktasında yerel zengin merkeze sahiptir. Gerçekten, u ile üretilen ideal A_u, birimli f-cebri olduğundan u noktasında yerel zengin merkeze sahiptir. Böylece $0 \leq v \leq u$ eşitsizliği sağlandığında, $\pi(u) = v$, $0 \leq \pi \leq I$ olacak şekilde $\pi \in Z(A_u)$ çarpım operatörü vardır. π, E'nin A_u üzerine indirgenen normuna göre süreklidir [1]. Böylece π, Z(E) içinde bir $\hat{\pi}$ genişlemesine sahiptir. Buradan, E' nin u noktasında yerel zengin merkeze sahip olduğu elde edilir.

Bunun bir sonucu olarak, sıralı birime sahip Banach örgülerinin birimde yerel zengin merkeze sahip olduğu elde edilir.

Bununla birlikte, ℓ_1 Dedekind tam olduğundan her pozitif elemanda, özellikle e_2 =(0,1,0,...) de yerel zengin merkeze sahiptir.Öte yandan e_2' nin $\frac{1}{2}$ - sınırlı iç nokta olması için gerekli ve yeterli koşul her $0 < f \in \ell_1$ için $f(e_2) > 0$ olmasıdır [1]. $f : \ell_1 \rightarrow IR$, $(x_n) \rightarrow x_1$ ile tanımlı pozitif fonksiyonel için $f(e_2) = 0$ olduğundan, e_2 $\frac{1}{2}$- sınırlı iç nokta değildir.

vi) Örnek 2.2.19 (ii) den, C[0,1] birimli Arşimedyan f- cebri, birimde yerel zengin merkeze sahip olmasına karşın, zengin merkeze sahip değildir.

vii) $e \in E_+$, E Arşimedyan Riesz uzayının diskret elemanı ise E, x noktasında yerel zengin merkeze sahiptir. Gerçekten, $0 \leq y \leq x$ ise $y = \lambda x$ olacak şekilde λ pozitif sayısı var olduğundan, λI merkez operatörü istenen özelliktedir.

Aşagıdaki Önönermeler Wickstead'in sonuçlarına benzerdir [11].

<u>Önönerme 5.3 :</u> E Arşimedyan Riesz uzayı, $x \in E_+$ olsun.

i) E, $x \in E_+$ noktasında yerel zengin merkeze sahiptir.

ii) x ile üretilen ideal I_x, Z (E) -genişleme özelliğine sahiptir.

iii) $0 \leq y_1, y_2, \ldots, y_n \in E$ ve $\sum_{i=1}^{n} y_i = x$ ise $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = I$, i= 1,2, ..., n için $\pi_i(x) = y_i$ olacak şekilde $0 \leq \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n \in Z(E)$ vardır.

O zaman (iii) $\Leftrightarrow$(i)$\Rightarrow$(ii) sağlanır. Özellikle, E yerel düzgün tam ise (iii)$\Leftrightarrow$(i)$\Leftrightarrow$(ii) sağlanır.

<u>Kanıt :</u> (i)$\Rightarrow$ (iii) Kanıt n üzerinde tümevarımla yapılacaktır. n = 1 olsun. $y_1 = x$ olduğundan, $\pi_1 = I \in Z(E)$ için $\pi_1(x) = y_1$ sağlanır. Savın n için doğru olduğunu kabul edelim. $0 \leq y_1,\ldots,y_{n+1} \in E$ ve $\sum_{i=1}^{n+1} y_i = x$ olsun. $u_n = y_n + y_{n+1}$ denirse $y_1 + \ldots + y_{n-1} + u_n = x$ olduğundan $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = I$ ve $i = 1,2,\ldots,n-1$ için $\pi_i(x) = y_i$, $\pi_n(x) = u_n$ olacak şekilde $0 \leq \pi ,\ldots,\pi_n \in Z(E)$ vardır. E, x noktasında yerel zengin merkeze sahip ve $0 \leq y_n \leq x$ olduğundan $\pi(x) = y_n$, $0 \leq \pi \leq I$ olacak şekilde $\pi \in Z(E)$ vardır. $R_n = \pi \wedge \pi_n$, $R_{n+1} = \pi_n - \pi \wedge \pi_n$ denirse, $0 \leq R_n, R_{n+1} \leq I$ ve $R_n + R_{n+1} = \pi_n$ elde edilir. Üstelik $R_n(x) = y_n$ ve $R_{n+1}(x) = y_{n+1}$ elde edilir. $1 \leq i \leq n-1$ için $\pi_i = R_i$ denirse , $\sum_{i=1}^{n+1} R_i = \sum_{i=1}^{n} \pi_i = I$ ve $1 \leq i \leq n+1$ için $R_i(x) = y_i$ olacak şekilde $0 \leq R_1,\ldots,R_{n+1} \in Z(E)$ bulunmuş olur.

(iii)$\Rightarrow$(i) $0 \leq y \leq x$ olsun. $x = x-y+y$ olduğundan $y_1 = x - y$, $y_2 = y$ denirse $\pi_1 + \pi_2 = I$ ve $i = 1,2$ için $\pi_i(x) = y_i$ olacak şekilde $0 \leq \pi_1 , \pi_2 \in Z(E)$ vardır. $\pi_2(x) = y$ olduğundan, E $x \in E_+$ noktasında yerel zengin merkeze sahiptir.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\pi \in Z(I_x)$ olsun. $0 \leq \pi \leq I$ kabul edilebilir. $0 \leq \pi(x) \leq x$ olduğundan $R(x) = \pi(x)$ olacak şekilde $R \in Z(E)$ vardır. Bu ise I_x üzerinde $R = \pi$ olduğunu gösterir.

E' nin yerel düzgün tam olduğunu kabul edelim. (ii) $\Rightarrow$ (i) olduğunu göstermek yeter. Bunun için $0 \leq y \leq x$ eşitsizliği sağlansın. I_x birimli f-cebri olduğundan x noktasında yerel zengin merkeze sahiptir. Böylece $\pi(x) = y$ olacak şekilde $\pi \in Z(I_x)$ vardır. I_x $Z(E)$ – genişleme özelliğine sahip olduğundan $R(x) = y$ olacak şekilde $R \in Z(E)$ vardır.

Önerme 5.4 : E Banach örgüsü, $x \in E_+$ olsun. Aşağıdakiler denktir:

i) E, $x \in E_+$ noktasında yerel topolojik dolu merkeze sahiptir.

ii) x ile üretilen ideal I_x $Z(E)$ –yaklaşık genişleme özelliğine sahiptir.

iii) $0 \le y_1,\ldots,y_n \in E$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = x$ ve $\varepsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = I$, $1 \le i \le n$ için $\|\pi_i x - y_i\| < \varepsilon$ olacak şekilde $0 \le \pi_1,\ldots,\pi_n \in Z(E)$ vardır.

Kanıt : (ii) $\Rightarrow$ (i) $0 \le y \le x$ eşitsizliği sağlansın. I_x birimli f-cebir olduğundan, x noktasında yerel zengin merkeze sahip ve böylece $\pi(x) = y$ olacak şekilde $\pi \in Z(I_x)$ vardır. (ii) den dolayı her $z \in I_x$ için $\pi_n(z) \to \pi(z)$ olacak şekilde $Z(E)$ içinde (π_n) dizisi vardır. Özellikle, $\|\pi_n(x) - \pi(x)\| = \|\pi_n(x) - y\| \to 0$ dır. Böylece E, $x \in E_+$ noktasında yerel topolojik dolu merkeze sahiptir.

(i) $\Rightarrow$ (iii) Kanıt n üzerine tümevarımla yapılacaktır. $n = 1$ olsun. $y_1 = x$ olduğundan, $\pi_1 = I$ için $\|\pi_1(x) - y_1\| = 0 < \varepsilon$ dur. Savın n için doğru olduğunu kabul edelim. $0 \le y_1,\ldots,y_{n+1} \in E$ ve $\sum_{i=1}^{n+1} y_i = x$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. $u_n = y_n + y_{n+1}$ denirse $\varepsilon / 4 > 0$ için $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = I$,$1 \le i \le n-1$ için $\|\pi_i x - y_i\| < \varepsilon/4$ $\|\pi_n(x) - u_n\| < \varepsilon/4$ olacak şekilde $0 \le \pi_1,\ldots,\pi_n \in Z(E)$ vardır. $0 \le y_n \le x$ olduğundan (i) den dolayı $\|\pi(x) - y_n\| < \varepsilon/4$, $0 \le \pi \le I$ olacak şekilde $\pi \in Z(E)$ vardır. $R_n = \pi \wedge \pi_n$

, $R_{n+1} = \pi_n - \pi \wedge \pi_n$, ve $1 \le i \le n-1$ için $R_i = \pi_i$ denirse $\sum_{i=1}^{n+1} R_i = \sum_{i=1}^{n} \pi_i = I$ elde edilir. Üstelik,

$$
\begin{aligned}
|R_n(x) - y_n| &= |\pi \wedge \pi_n(x) - y_n| \\
&\le |\pi \wedge \pi_n(x) - \pi_n(x) \wedge y_n| + |\pi_n(x) \wedge y_n - y_n \wedge u_n| \\
&\le |\pi(x) - y_n| + |\pi_n(x) - u_n|
\end{aligned}
$$

olduğundan $\| R_n(x) - y_n \| \le \| \pi(x) - y_n \| + \| \pi_n(x) - u_n \| < \varepsilon/2$ sağlanır. Böylece,

$$
\begin{aligned}
\| R_{n+1}(x) - y_{n+1} \| &= \| \pi_n(x) - R_n(x) - y_{n+1} - y_n + y_n \| \\
&\le \| \pi_n(x) - u_n \| + \| y_n - R_n(x) \| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

olur. Böylece $0 \le y_1, \ldots, y_{n+1} \in E$, $\sum_{i=1}^{n+1} y_i = x$ ve $\varepsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^{n+1} R_i = I$, $1 \le i \le n+1$ için $\| R_i x - y_i \| < \varepsilon$ olacak şekilde $0 \le R_1, \ldots, R_{n+1} \in Z(E)$ vardır.

(iii)$\to$ (ii) $\pi \in Z(I_x)$ olsun. $0 \le \pi \le I$ eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. $0 \le \pi(x) \le x$ olduğundan $y_1 = \pi(x)$, $y_2 = x - \pi(x)$ denirse $0 \le y_1, y_2 \in E$ ve $x = y_1 + y_2$ elde edilir.(iii) den dolayı her $\varepsilon > 0$ için $0 \le \pi_\varepsilon \le I$ ve $\| \pi_\varepsilon(x) - \pi(x) \| < \varepsilon$ olacak şekilde $\pi_\varepsilon \in Z(E)$ vardır. Böylece $\| \pi_n(x) - \pi(x) \| \to 0$ olacak şekilde $\{\pi_n\} \subseteq Z(E)$ vardır. $0 \le z \le x$ eşitsizliğini sağlayan her z için $|\pi_n(z) - \pi(z)| = |\pi_n - \pi| z \le |\pi_n x - \pi x|$ olduğundan $\| \pi_n z - \pi z \| \le \| \pi_n x - \pi x \|$ ve böylece her $z \in I_x$ için $\| \pi_n z - \pi z \| \to 0$ elde edilir. Bu ise I_x in $Z(E)$ – yaklaşık genişleme özelliğine sahip olduğunu kanıtlar.

Sonuç 5.5 : E Banach örgüsü $\frac{1}{2}$ - sınırlı iç noktaya sahipse topolojik dolu merkeze sahiptir.

Kanıt : Önerme 5.4 'den her $x \in E_+$ için I_x 'in yaklaşık genişleme özelliğine sahip olduğunu göstermek yeter. Bunun için $0 \leq \pi \leq I$, $\pi \in Z(I_x)$ olsun. E 'nin $\frac{1}{2}$ - sınırlı iç noktaların koleksiyonu E_+ içinde yoğun olduğundan, $\pi(x) \in E_+$ için $u_n \to \pi(x)$ olacak şekilde (u_n) , $\frac{1}{2}$ - sınırlı iç noktaların dizisi vardır. $u_n \vee x$ ile üretilen esas ideal I_n ile gösterilsin. $\pi_n : I_n \to I_n$, $\pi_n(y) = y.u_n$ ile tanımlı çarpım operatörü $0 \leq \pi_n \leq I$ eşitsizliğini sağlar ve süreklidir. [1] . Böylece her n için, $u_n \vee x$, $\frac{1}{2}$- sınırlı iç nokta olduğundan, π_n , Z (E) içinde bir $\hat{\pi}_n$ genişlemesine sahiptir. Üstelik her n için $\hat{\pi}_n(x) = \pi_n(x) = x.u_n = (x \wedge u_n)(x \vee u_n) = x \wedge u_n$ eşitliği sağlanır. Kafes operasyonlarının sürekliliğinden $u_n \wedge x \to \pi(x)$ ve böylece $\hat{\pi}_n(x) \to \pi(x)$ elde edilir. $0 \leq y \leq x$ ise $|\hat{\pi}_n(y) - \pi(y)| \leq |\hat{\pi}_n - \pi|\, x = |\hat{\pi}_n(x) - \pi(x)|$ olduğundan $\hat{\pi}_n \to \pi\, y$ dir. Böylece E topolojik dolu merkeze sahiptir.

$(\ell_\infty)'$ zayıf sıralı birim içermediğinden $\frac{1}{2}$ -sınırlı iç noktaya sahip olmamasına karşın Dedekind tam olduğundan topolojik dolu merkeze sahiptir [13] .

Bütün Riesz uzaylarını Arşimedyan olarak ele aldığımızı tekrar hatırlatalım. Bundan böyle E Riesz uzayı üzerindeki birim dönüşüm I_E ile gösterilecektir. E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam olsun . Her $\pi \in Z(E)$ ve $\sigma \in Z(F)$, $T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ için $T \to \sigma T \pi$ ile tanımlı dönüşüm $Z(\mathcal{L}_b(E,F))$' nin elemanıdır. Bu dönüşüm $\sigma \otimes \pi$ ile gösterilecektir. $\sigma \in Z(F)$ ve $\pi \in Z(E)$ olmak üzere $\sigma \otimes \pi$ biçimdeki elemanların $Z(\mathcal{L}_b(E,F))$ içindeki ürettiği alt vektör uzayı $Z(F) \otimes Z(E)$ ile gösterilecektir. Z (F) birimli f-cebri olduğundan $\sigma_1 , \sigma_2 \in Z(F)$ iken $\sigma_1 \sigma_2 = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\sigma_1 \perp \sigma_2$ olmasıdır [14] .

Böylece, $Z(F) \to Z(\mathcal{L}_b(E,F))$; $\sigma \to \sigma \otimes I_E$ ile tanımlı cebir homomorfizması dikliği korur ve pozitif olmasından dolayı Riesz homomorfizmasıdır. Benzer şekilde, $Z(E) \to Z(\mathcal{L}_b(E,F))$; $\pi \to I_F \otimes \pi$ ile tanımlı dönüşüm de Riesz homomorfizmasıdır. $\sigma \in Z(F)$, $\pi \in Z(E)$ için $\sigma \otimes \pi = (\sigma \otimes I_E)(I_F \otimes \pi)$ olduğundan $|\sigma \otimes \pi| = |\sigma| \otimes |\pi|$ = eşitliği elde edilir.

F üzerindeki sıralı projeksiyonların Boole cebri $\mathbb{P}$ ile gösterilirse, $P \in \mathbb{P}$, $\pi \in Z(E)$ olmak üzere $P \otimes \pi$ biçimindeki elemanların $Z(F) \otimes Z(E)$ içinde ürettiği alt vektör uzayı $\mathbb{P} \otimes Z(E)$ ile gösterilecektir. Böylece $\mathbb{P} \otimes Z(E)$ 'nin her elemanı $\sum_{i=1}^{n} P_i \otimes \pi_i$ biçimindeki sonlu toplamla tek türlü temsil edilir [14].Buna standart temsil diyelim. Burada $1 \leq i \leq n$ için $P_i \in \mathbb{P}$, $\pi_i \in Z(E)$, $i \neq j$ için $P_i \wedge P_j = 0$, $\pi_i \neq \pi_j$ ve $\sum_{i=1}^{n} P_i = I_F$ dir. Eğer $\mathbb{P} \otimes Z(E)$ içinde bir elemanın $\sum_{i=1}^{n} P_i \otimes \pi_i$ biçimindeki standart temsilini ele alırsak $\{ P_i : 1 \leq i \leq n \}$ dik sistem olduğundan $\left|\sum_{i=1}^{n} P_i \otimes \pi_i\right| = \sum_{i=1}^{n} P_i \otimes |\pi_i|$ eşitliğini elde ederiz. Böylece $\mathbb{P} \otimes Z(E)$, $Z(\mathcal{L}_b(E,F))$ 'nin Riesz alt uzayıdır.

L Riesz uzayı $K \subseteq L$ herhangi bir alt kümesi olsun. O zaman, $\uparrow K = \{f \in L : f_\alpha \uparrow f$ olacak şekilde $\{f_\alpha\} \subseteq K$ vardır$\}$ biçiminde tanımlanır. Benzer şekilde $\downarrow K$ tanımlanabilir. Eğer $M \subseteq L^\sim$ ise L üzerinde üretilen mutlak zayıf topoloji $|\sigma|(L,M)$ ile gösterilecektir. Mutlak zayıf topoloji, $f \in L$, $\varphi \in M$ olmak üzere $f \to |\varphi|(|f|)$ Riesz yarı normlarının ailesi tarafından üretilen,L üzerinde yerel konveks-solid topolojidir.M yerine M ile üretilen ideal alınırsa elde edilen mutlak zayıf topoloji değişmez.

Bu bölümün temel sonuçları için taban oluşturan aşağıdaki Önerme Fremlin tarafından elde edilmiştir [15] .

<u>Önerme 5.6 :</u> Eğer L Dedekind tam Riesz uzayı, M L ' nin noktalarını ayıran $L_n^{\sim}$ 'nin solid alt uzayı ve K, L'nin alt kafesi ise K'nın $|\sigma|(L, M)$ kapanışı $\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow$ K 'dır.

E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam olsun. $0 \leq \varphi \in F_n^{\sim}$, $0 \leq T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ ve $0 \leq x \in E$ olmak üzere $\phi_{\varphi,T,x} : Z(\mathcal{L}_b(E,F)) \to IR$; $\pi \in Z(\mathcal{L}_b(E,F))$ için $\phi_{\varphi,T,x}(\pi) = \varphi(\pi(T)x)$ dönüşümü ile tanımlansın. Bu durumda $0 \leq \phi_{\varphi,T,x} \in Z(\mathcal{L}_b(E,F))_n^{\sim}$ olur. $x \in E_+$, I_x ; x ile üretilen ideal olmak üzere,

$$\mathcal{F} = \{ \phi_{\varphi,T,x} : 0 \leq \varphi \in F_n^{\sim} ,\ 0 \leq T \in \mathcal{L}_b(E,F) ,\ 0 \leq x \in E \}$$

ve

$$\mathcal{F}_x = \{ \phi_{\varphi,T,y} : 0 \leq \varphi \in F_n^{\sim} ,\ 0 \leq T \in \mathcal{L}_b(E,F) ,\ 0 \leq y \in I_x \}$$

olsun.

$F_n^{\sim}$, F'nin noktalarını ayırıyorsa $\mathcal{F}$ de $Z(\mathcal{L}_b(E,F))$'nin noktalarını ayırır. $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{F}_x$ $Z(\mathcal{L}_b(E,F))_n^{\sim}$ ' nın pozitif kısmı içinde solid ve böylece toplamaya göre kapalıdır [14].

E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam normlu Riesz uzayı olsun. $0 \leq \varphi \in F^*_n$, $0 \leq T \in \mathcal{L}_b(E,F)$, $0 \leq x \in E$ olmak üzere $\phi_{\varphi,T,x} : Z(\mathcal{L}_b(E,F)) \to IR$; $\pi \in Z(\mathcal{L}_b(E,F))$ için $\phi_{\varphi,T,x}(\pi) = \varphi(\pi(T)x)$ dönüşümü tanımlansın. Bu durumda $0 \leq \phi_{\varphi,T,x} \in Z(\mathcal{L}_b(E,F))^\sim_n$ olur. Bir $x \in E_+$ için,

$$\mathfrak{I} = \{ \phi_{\varphi,T,x} : 0 \leq \varphi \in F^*_n,\ 0 \leq T \in \mathcal{L}_b(E,F),\ 0 \leq x \in E \}$$

ve

$$\mathfrak{I}_x = \{ \phi_{\varphi,T,y} : 0 \leq \varphi \in F^*_n,\ 0 \leq T \in \mathcal{L}_b(E,F),\ 0 \leq y \in I_x \}$$

olsun.

F^*_n , F'nin noktalarını ayırıyorsa $\mathfrak{I}$ de $Z(\mathcal{L}_b(E,F))$'nin noktalarını ayırır. $\mathfrak{I}$ ve $\mathfrak{I}_x$ $Z(\mathcal{L}_b(E,F))^\sim_n$ ' nın pozitif kısmı içinde solid ve böylece toplamaya göre kapalıdır [14].

Dikkat edilirse F Banach örgüsü iken $F^* = F^\sim$ olduğundan, $\mathfrak{I} = \mathcal{F}$ ve $\mathfrak{I}_x = \mathcal{F}_x$ olur. Ayrıca E bir $x \in E_+$ için sıra birime sahipse $\mathfrak{I}_x = \mathfrak{I}$ ve $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}$ dir.

$\mathfrak{C}^+ = \mathbb{P} \otimes Z(E) \cap [0, I_F \otimes I_E]$ ile tanımlanırsa Önerme 5.6 dan aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

<u>Sonuç 5.7 :</u>

a) E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam olsun. $F_n^\sim$, F' nin noktalarını ayırıyorsa $\mathfrak{C}^+$ nın $|\sigma|$ (Z ($\mathcal{L}_b$ (E,F)), $\mathcal{F}$) kapanışı $\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow$ $\mathfrak{C}^+$ dır.

b) E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam normlu Riesz uzayı olsun. F_n^*, F nin noktalarını ayırıyorsa $\mathfrak{C}^+$ ' nın $|\sigma|$ (Z ($\mathcal{L}_b$ (E,F)),$\mathfrak{I}$) kapanışı $\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow$ $\mathfrak{C}^+$ dır.

Bu bölümde E ve F üzerindeki kısıtlamalarla $\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow$ $\mathfrak{C}^+$ ile Z ($\mathcal{L}_b$ (E,F)) nin $[0, I_F \otimes I_E] = [0, I_{\mathcal{L}_b(E,F)}]$ sıralı aralığının aynı olduğu gösterilecektir. Aşağıda $\mathcal{L}_b$ (E,F) içindeki kafes operasyonları için kullanışlı bir formül verilmiştir[10].

<u>Önönerme 5.8 :</u> E ve F Riesz uzayları, F Dedekind tam olsun. $0 \le \varphi \in F_n^\sim$ ve $0 \le S, T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ ise her $x \in E_+$ için

$$\langle S \wedge Tx, \varphi \rangle = \sum_{i,j} \langle P_j S x_i, \varphi \rangle \wedge \langle P_j T x_i, \varphi \rangle$$

sağlanır. Burada infimum ; $x_1+\ldots+x_n = x$ olacak şekilde sonlu $\{ x_1,\ldots,x_n \} \subseteq E_+$ dizisi ile $P_1+\ldots+ P_m = I_F$ olacak şekilde F üzerinde sıralı projeksiyonların sonlu $\{P_1,\ldots,P_m \}$ kesin dik dizisi üzerinden alınır. Aşağıdaki Önerme , [10] Önönerme 2.4'ün benzeridir.

<u>Önerme 5.9 :</u> E, bir $x \in E_+$ noktasında yerel zengin merkeze sahip Arşimedyan Riesz uzayı ve F Dedekind tam olsun.
O zaman $\mathfrak{C}^+$ $[0, I_{\mathcal{L}_b(E,F)}]$ içinde $|\sigma|$(Z ($\mathcal{L}_b$ (E,F)),$\mathcal{F}_x$) yoğundur.

<u>Kanıt :</u> $\varepsilon > 0$, $0 \le \varphi \in F_n^\sim$, $0 \le T \in \mathcal{L}_b$ (E,F) ve $\nu \in [0, I_{\mathcal{L}_b(E,F)}]$ olmak üzere

$\phi_{\varphi,T,x}(|\nu - \pi|) < \varepsilon$ olacak şekilde $\mu \in \mathfrak{C}^+$ olduğu göstermek yeter. Önce ν, $I_{\mathcal{L}_b(E,F)}$ ' nin esas bileşeni olarak kabul edilsin. O zaman $S=\nu(T)$, $\mathcal{L}_b$ (E,F) içinde T' nin esas bileşeni olur. $S \wedge (T-S) = 0$ olduğundan Önönerme 5.8 den, $\sum_{i,j} \langle P_j S x_i, \varphi\rangle \wedge \langle P_j (T-S) x_i, \varphi\rangle < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $P_1+\ldots+P_m = I_F$ eşitliğini sağlayan F üzerinde dik sıralı projeksiyonlar ve $x_1+\ldots+x_n = x$ eşitliğini sağlayan $0 \le x_1,\ldots,x_n \in E$ elemanları vardır.

$$Q = \{(i,j) : \langle P_j S x_i, \varphi\rangle < \langle P_j (T-S) x_i, \varphi\rangle\}$$

olarak tanımlansın ve $Q' = \{1,2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots m\} \setminus Q$ olsun. Böylece,

$$\sum_{(i,j)\in Q} \langle P_j S x_i, \varphi\rangle < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{ve} \qquad \sum_{(i,j)\in Q'} \langle P_j (T-S) x_i, \varphi\rangle < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Önönerme 5.3 den $1 \le i \le n$ için $\pi_i(x)=x_i$, $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = I_E$ olacak şekilde $0 \le \pi_1, \ldots, \pi_n \in Z(E)$ vardır. Buradan, $\langle (\sum_{(i,j)\in Q} P_j S \pi_i) x, \varphi\rangle < \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\langle \, | S - \sum_{(i,j)\in Q} P_j T \pi_i | x, \varphi \, \rangle &\le \langle \, | S - \sum_{(i,j)\in Q'} P_j S \pi_i | x, \varphi \, \rangle + \langle \sum_{(i,j)\in Q'} P_j (T-S) \pi_i x, \varphi \, \rangle \\
&\le \langle \, (\sum_{(i,j)\in Q} P_j S \pi_i) x, \varphi\rangle + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir.

$R = \{i : 1 \le i \le n$ ve $(i,j) \in Q'$ olacak şekilde $1 \le j \le m$ vardır $\}$ ise $\sum_{(i,j)\in Q'} P_j T \pi_i = (\sum_{i\in R} (\sum_{j} P_j) \otimes \pi_i) T$ eşitliği sağlanır.

Böylece $\mu = \sum_{(i,j)\in Q'} P_j \otimes \pi_i$ denirse $\mu \in \mathfrak{C}^+$ olduğundan ν, $I_{\mathcal{L}_b(E,F)}$ nin esas bileşeni iken kanıt tamamlanır.

Genel durum, Freudenthal'ın teoreminden elde edilir. Buna göre, $|\,\nu - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \nu_i\,| < \frac{\varepsilon}{K} I_{\mathcal{L}_b(E,F)}$ olacak şekilde $\{\nu_i\}_{i=1}^{n}$, $I_{\mathcal{L}_b(E,F)}$ esas bileşenleri ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \le 1$ eşitsizliğini sağlayan α_i pozitif sayıları vardır, burada $K = 2(\phi_{\varphi,T,x}(I_{\mathcal{L}_b(E,F)})+1$ dir.Önceki durumdan $1\le i\le n$ için $\phi_{\varphi,T,x}(|\nu_i - w_i|)$ olacak şekilde $w_i \in \mathfrak{C}^+$ bulunabileceğinden $\phi_{\varphi,T,x}(|\,\nu - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i\,| < \varepsilon$ elde edilir.

<u>Sonuç 5.10 :</u> E Arşimedyan Riesz uzayı , zengin merkeze sahip ve F Dedekind tam olsun.
O zaman $\mathfrak{C}^+$ $[0, I_{\mathcal{L}_b(E,F)}]$ içinde $|\sigma|(Z (\mathcal{L}_b (E,F)),\mathcal{F})$ yoğundur.

<u>Kanıt :</u> E zengin merkeze sahip olduğundan her $x \in E_+$ noktasında yerel zengin merkeze sahiptir. Önerme 5.9 dan her $x \in E_+$ için $\mathfrak{C}^+$ $[0, I_{\mathcal{L}_b(E,F)}]$ içinde $|\sigma|(Z (\mathcal{L}_b (E,F)),\mathcal{F}_x)$ yoğundur. Böylece $\mathfrak{C}^+$ $[0, I_{\mathcal{L}_b(E,F)}]$ içinde $|\sigma|(Z (\mathcal{L}_b (E,F)),\mathcal{F})$ yoğundur.

Aşağıdaki Sonuç, [9] Önerme 2.1'in benzeridir.

<u>Sonuç 5.11 :</u> E bir $x \in E_+$ noktasında yerel zengin merkeze sahip Arşimedyan Riesz uzayı ve F Dedekind tam olsun. $0 \le S \le T$ olacak şekilde $S,T:E \to F$ pozitif operatörler olsun. Her $0 \le \varphi \in F_n^{\sim}$, $\varepsilon > 0$ için $0 \le \pi_1,\ldots, \pi_n \in Z(E)$ ve

$i \neq j$ için $P_i \wedge P_j = 0$, $P_1 + \ldots + P_n = I_F$ olacak şekilde $P_1, \ldots, P_n$ F üzerinde sıralı projeksiyonları vardır,

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \leq T \quad \text{ve} \quad \left\langle \left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| x, \varphi \right\rangle < \varepsilon$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Kanıt : $0 \leq S \leq T$ ve $\mathcal{L}_b(E,F)$ Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan $0 \leq \nu \leq I_{\mathcal{L}_b(E,F)}$ $\nu(T)=S$ $\nu \in Z(\mathcal{L}_b(E,F))$ vardır. $0 \leq \varphi \in F_n^{\sim}$, $\varepsilon > 0$ ise Önerme 5.9 dan $\phi_{\varphi,T,x}(|\nu - \mu|) < \varepsilon$ olacak şekilde $\mu \in \mathfrak{C}^+$ vardır. $\mu = \sum_{i=1}^{n} P_i \otimes \pi_i$ standart temsilini ele alalım. Bu durumda $P_1 + \ldots + P_n = I_F$, $i \neq j$ için $P_i \wedge P_j = 0$, $\pi_i \neq \pi_j$ ve $P_1, \ldots, P_n$ F üzerinde sıralı projeksiyonlar $0 \leq \pi_1, \ldots, \pi_n \in Z(E)$ dir. Böylece

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i = \mu(T) \leq T \quad \text{ve} \quad \phi_{\varphi,T,x}(|\nu - \mu|) < \varepsilon \quad \text{olduğundan}$$

$$\varphi(|\nu(T)|x) - \mu(T)|x) = \varphi\left(\left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| x\right) < \varepsilon \quad \text{elde edilir.}$$

Sonuç 5.12 : E Arşimedyan Riesz uzayı zengin merkeze sahip ve F Dedekind tam olsun. $0 \leq S \leq T$ olacak şekilde $S,T : E \to F$ pozitif operatörler olsun. Her $0 \leq \varphi \in F_n^{\sim}$, $\varepsilon > 0$, $x \in E_+$ için $\pi_1, \ldots, \pi_n \in Z(E)$ ve $i \neq j$ için $P_i \wedge P_j = 0$, $P_1 + \ldots + P_n = I_F$ olacak şekilde $P_1, \ldots, P_n$ F üzerinde sıralı projeksiyonları vardır,

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \leq T \quad \text{ve} \quad \left\langle \left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| x, \varphi \right\rangle < \varepsilon$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Kanıt : E zengin merkeze sahip olduğundan ve Sonuç 5.11 den kolayca görülür.

<u>Önerme 5.13 :</u> E Arşimedyan Riesz uzayı zengin merkeze sahip, F Dedekind tam Riesz uzayı olsun. $F_n^{\sim}$, F nin noktalarını ayırıyorsa,

a) $[0, I_{\mathcal{L}_b(E,F)}] = \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \mathfrak{C}^+$

b) $[0, T] = \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow (\mathfrak{C}^+(T))$ her $0 \leq T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ için sağlanır.Burada $\mathfrak{C}^+(T) = \{\mu(T) : \mu \in \mathfrak{C}^+\}$ dır.

<u>Kanıt :</u>

a) Sonuç 5.7 (a) ve Sonuç 5.10 dan elde edilir.

b) $[0, T] = (\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \mathfrak{C}^+)(T)$ olduğu $\mathcal{L}_b(E,F)$ nin Dedekind tam olmasından ve (a) daki eşitlikten açıktır. Burada dikkat edilirse,

$$[0, T] = (\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \mathfrak{C}^+) = \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow (\mathfrak{C}^+(T))$$

eşitliği sağlanır. Gerçekten $\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow (\mathfrak{C}^+(T)) \subseteq [0, T]$ olduğu açıktır. Üstelik $\mu \in \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \mathfrak{C}^+$ iken $\mu \geq 0$ sağlanır. Böylece $\mu \in \uparrow \mathfrak{C}^+$ iken $\mu_\alpha \uparrow \mu$ olduğundan $\mu_\alpha(T) \uparrow \mu(T)$ ve $0 \leq \mu_\alpha \in \mathfrak{C}^+$ olduğundan $\mu(T) \in \uparrow \mathfrak{C}^+(T)$ dir. Böylece devam edilirse $\mu \in \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \mathfrak{C}^+$ iken $\mu(T) \in \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \mathfrak{C}^+(T)$ elde edilir. Bu ise $(\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \mathfrak{C}^+)(T) \subseteq \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \mathfrak{C}^+(T)$ olduğunu gösterir.

Bundan sonra, tanım kümeleri üzerindeki kabuller zayıflatılmış, ancak görüntü kümeleri normlu alınmıştır.

Önerme 5.14 : E, bir $x \in E_+$ noktasında yerel topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü ve F Dedekind tam normlu Riesz uzayı olsun.
O zaman $\mathfrak{C}^+$ $[0, I_{\mathcal{L}_b(E,F)}]$ içinde $|\sigma|(Z(\mathcal{L}_b(E,F)), \mathfrak{I}_x)$ yoğundur.

Kanıt : $\varepsilon > 0$, $0 \le \varphi \in F_n^*$, $0 \le T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ ve $\nu \in [0, I_{\mathcal{L}_b(E,F)}]$ verilsin.

$\phi_{\varphi,T,x}(|\nu - \mu|) < \varepsilon$ olacak şekilde $\mu \in \mathfrak{C}^+$ olduğunu göstermek yeter. Önce ν, $I_{\mathcal{L}_b(E,F)}$ nin esas bileşeni olarak kabul edilsin. O zaman $S=\nu(T)$, $\mathcal{L}_b(E,F)$ içinde T ' nin esas bileşeni olur. $S \wedge (T-S) = 0$ olduğundan Önönerme 4.8 den,

$$\sum_{i,j} \langle P_j S x_i, \varphi \rangle \wedge \langle P_j (T-S) x_i, \varphi \rangle < \frac{\varepsilon}{4}$$

olacak şekilde $P_1 + \ldots + P_m = I_F$ eşitliğini sağlayan F üzerinde dik sıralı projeksiyonlar ve $x_1 + \ldots + x_n = x$ eşitliğini sağlayan $0 \le x_1, \ldots, x_n \in E$ elemanları vardır.

Q ve Q' Önerme 5.9 un kanıtında olduğu gibi tanımlansın. O zaman,

$$\sum_{(i,j) \in Q} \langle P_j S x_i, \varphi \rangle < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{ve} \qquad \sum_{(i,j) \in Q'} \langle P_j (T-S) x_i, \varphi \rangle < \frac{\varepsilon}{4}$$

olur. Önönerme 5.4 den $\delta = \varepsilon / 2(n\|\varphi\|\|T\|+1)$ için $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = I_E$ ve $1 \le i \le n$ için $\|\pi_i x - x_i\| < \delta$ olacak şekilde $0 \le \pi_1, \ldots \pi_n \in Z(E)$ vardır. Böylece,

$$\left\langle \left| S - \sum_{(i,j) \in Q'} P_j T \pi_i \right| x, \varphi \right\rangle$$

$$\le \left\langle \left| S - \sum_{(i,j) \in Q'} P_j S \pi_i \right| x, \varphi \right\rangle + \left\langle \sum_{(i,j) \in Q'} P_j (T-S) \pi_i x, \varphi \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{(i,j) \in Q} P_j S \pi_i x, \varphi \right\rangle + \left\langle \sum_{(i,j) \in Q'} P_j (T-S) \pi_i x, \varphi \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{(i,j) \in Q} P_j S (\pi_i x - x_i), \varphi \right\rangle + \left\langle \sum_{(i,j) \in Q} P_j S x_i, \varphi \right\rangle +$$

$$+\left\langle \sum_{(i,j)\in Q'} P_j(T-S)(\pi_i x - x_i),\varphi \right\rangle + \left\langle \sum_{(i,j)\in Q'} P_j(T-S)x_i,\varphi \right\rangle$$

$$\le \left\langle \sum_{(i,j)\in Q} P_j S(\pi_i x - x_i),\varphi \right\rangle + \left\langle \sum_{(i,j)\in Q'} P_j(T-S)(\pi_i x - x_i),\varphi \right\rangle + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\le \left\langle \sum_{(i,j)\in Q} P_j T\left| \pi_i x - x_i \right|,\varphi \right\rangle + \left\langle \sum_{(i,j)\in Q'} P_j T\left| \pi_i x - x_i \right|,\varphi \right\rangle + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \left\langle \sum_{i,j} P_j T\left| \pi_i x - x_i \right|,\varphi \right\rangle + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} T\left|\pi_i x - x_i\right|,\varphi \right\rangle + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \|\varphi\|\|T\|\|\pi_i - x_i\| + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< n\|\varphi\|\|T\|\delta + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \varepsilon$$

elde edilir. R, Önerme 5.9 un kanıtında olduğu gibi tanımlanırsa

$$\sum_{(i,j)\in Q'} P_j T\pi_i = \left(\sum_{i\in R}\left(\sum_j P_j\right)\otimes\pi_i\right)T$$ eşitliği sağlanır.

Böylece $\mu = \sum_{(i,j)\in Q'} P_j \otimes \pi_i$ denirse $\mu\in\mathfrak{C}^+$ olduğundan ν, $I_{\mathcal{L}_b(E,F)}$ nin esas bileşeni iken kanıt tamamlanır.

Genel durum, Freudenthal'ın teoreminden Önerme 5.9 da olduğu gibi elde edilir.

<u>Sonuç 5.15 :</u> E, bir $x\in E_+$ noktasında yerel topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü ve F Dedekind tam Banach örgüsü olsun.

O zaman $\mathfrak{C}^+$ $[0, I_{\mathcal{L}_b(E,F)}]$ içinde $|\sigma|(Z(\mathcal{L}_b(E,F)),\mathcal{F}_x)$ yoğundur.

Kanıt : F Banach örgüsü olduğundan $\mathcal{F}_x = \mathfrak{J}_x$ ve böylece Önerme 5.14 den $\mathfrak{C}^+ [0, I_{\mathcal{L}_b(E,F)}]$ içinde $|\sigma|(Z (\mathcal{L}_b (E,F)),\mathcal{F}_x)$ yoğundur.

Sonuç 5.16 : E, topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü ve F Dedekind tam normlu Riesz uzayı olsun.

O zaman $\mathfrak{C}^+ [0, I_{\mathcal{L}_b(E,F)}]$ içinde $|\sigma|(Z (\mathcal{L}_b (E,F)),\mathfrak{J})$ yoğundur.

Kanıt : E topolojik dolu merkeze sahip olduğundan her $x \in E_+$ noktasında yerel topolojik dolu merkeze sahiptir. Önerme 5.14 den elde edilir.

Aşağıdaki Sonuç, [10] Sonuç 2.5'in benzeridir.

Sonuç 5.17 : E, topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü ve F Dedekind tam Banach örgüsü olsun.

O zaman $\mathfrak{C}^+ [0, I_{\mathcal{L}_b(E,F)}]$ içinde $|\sigma|(Z (\mathcal{L}_b (E,F)),\mathcal{F})$ yoğundur.

Kanıt : $\mathcal{F} = \mathfrak{J}$ olmasından hemen çıkar.

Sonuç 5.18 : E, bir $x \in E_+$ noktasında yerel topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü ve F Dedekind tam Bannch örgüsü olsun. $0 \leq S \leq T$ olacak şekilde $S,T : E \to F$ pozitif operatörler olsun. Her $0 \leq \varphi \in F_n^\sim$, $\varepsilon > 0$ için $0 \leq \pi_1,\ldots, \pi_n \in Z(E)$ ve $i \neq j$ için $P_i \wedge P_j = 0$, $P_1 + \ldots + P_n = I_F$ olacak şekilde $P_1,\ldots,P_n$ F üzerinde sıralı projeksiyonları vardır,

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \leq T \quad \text{ve} \quad \left\langle \left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| x, \varphi \right\rangle < \varepsilon$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Kanıt : Sonuç 5.11 in kanıtında kullanılan yöntem burada da geçerlidir.

Sonuç 5.19 : E, topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü ve F Dedekind tam Banach örgüsü olsun. $0 \leq S \leq T$ olacak şekilde $S,T : E \to F$ pozitif operatörler olsun.

Her $0 \leq \varphi \in F_n^{\sim}$, $\varepsilon > 0$ için $x \in E_+$ $0 \leq \pi_1, \ldots, \pi_n \in Z(E)$ ve $i \neq j$ için $P_i \wedge P_j = 0$, $P_1 + \ldots + P_n = I_F$ olacak şekilde $P_1, \ldots, P_n$ F üzerinde sıralı projeksiyonları vardır,

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \leq T \quad \text{ve} \quad \left\langle \left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| x, \varphi \right\rangle < \varepsilon$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Kanıt : E, topolojik dolu merkeze sahip olduğundan ve Sonuç 5.18 'den kolayca elde edilir.

Şüphesiz Sonuç 5.18 ve 5.19 da F Dedekind tam normlu uzay ve $0 \leq \varphi \in F_n^*$ olarak değiştirilebilir.

$Z(E) \odot Z(F)$ ile cebirsel tensör çarpımı gösterelim. $Z(E) \odot Z(F)$ 'nin ϕ elemanı ile $Z(E) \otimes Z(F)$ 'nin uyuşan elemanı Φ olsun Yani $\phi = \sum_{k=1}^{n} \pi_k \otimes \sigma_k$, $\pi_k \in Z(E)$, $\sigma_k \in Z(F)$ ise Φ, $\mathcal{L}_r(E,F)$ üzerinde, $\Phi(T) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k T \pi_k$ olsun. $Z(E) \odot Z(F)$ injektif tensör normu ile ele alındığında bu norma göre tamamlanışı $Z(E) \otimes_\lambda Z(F)$ 'nin $Z(\mathcal{L}_r(E,F))$ 'ye izometrik olarak gömülebildiği [11] Önerme 2.1 de gösterilmiştir. Bu gömme örten olmayabileceğinden, görüntünün $Z(\mathcal{L}_r(E,F))$

içinde yoğun olduğu durumlar incelenmeye değerdir. A.W.Wickstead , [10] Önerme 2.6 dan yararlanarak [11] Önerme 3.2 de uygun topolojiye göre, görüntünün yoğun olduğunu göstermiştir. [10] Önerme 2.6 nın benzeri olan aşağıdaki Önerme Wickstead'in sonucunun topolojik dolu merkeze sahip uzaylar için de sağlanacağını gösterir.

Önerme 5.20 : E topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü ve F Dedekind tam normlu Riesz uzayı olsun. F_n^*, F nin noktalarını ayırıyorsa,

a) $[0 , I_{\mathcal{L}_b(E,F)}] = \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \mathfrak{C}^+$

b) $[0, T] = \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \ (\mathfrak{C}^+(T))$ her $0 \leq T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ için sağlanır.

Kanıt :

a) Sonuç 5.7 (b) ve Sonuç 5.16 dan elde edilir.

b) Önerme 5.13 (b) nin kanıtında uygulanan yöntem ile eşitlik elde edilir.

E topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü ve F Dedekind tam normlu Riesz uzayı ve F_n^* F nin noktalarını ayırsın. λ, $Z(\mathcal{L}_b(E,F))$ üzerinde herhangi bir sıra sürekli Riesz yarınormu ise $\mathfrak{C}^+$ içinde $[0, I_{\mathcal{L}_b(E,F)}]$ λ-yoğundur. Gerçekten önerme 5.20 den $[0 , I_{\mathcal{L}_b(E,F)}] = \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \mathfrak{C}^+$ olduğu bilinmektedir. $\nu \in \uparrow\mathfrak{C}^+$ ise $\nu_\alpha \uparrow \nu$ olacak şekilde $\mathfrak{C}^+$ içinde $\{\nu_\alpha\}$ neti vardır. Böylece $\lambda(\nu - \nu_\alpha) \downarrow 0$ olduğundan ν, $\mathfrak{C}^+$ nın λ-kapanışındadır. Benzer düşünce ile devam edilirse $\nu \in [0 , I_{\mathcal{L}_b(E,F)}] = \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow \mathfrak{C}^+$ iken ν, $\mathfrak{C}^+$ nın λ- kapanışındadır.

$\mathfrak{C} = \{\mu \in \mathbb{P} \otimes Z(E) : 0 \leq |\mu| \leq I_F \otimes I_E\}$ ise $\mathfrak{C}$ $[-I_{\mathcal{L}_b(E,F)}, I_{\mathcal{L}_b(E,F)}]$ içinde λ yoğundur. Gerçekten $\mu \in [-I_{\mathcal{L}_b(E,F)}, I_{\mathcal{L}_b(E,F)}]$ ise $0 \leq |\mu| \leq I_{\mathcal{L}_b(E,F)}$ olduğundan ve önceki durumdan μ^+, μ^- $\mathfrak{C}^+$ nın λ -kapanışındadır. Böylece her $\varepsilon > 0$ için $\lambda (\mu^+ - \mu_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\lambda (\mu^- - \mu_2) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{C}^+$ vardır. Böylece $\mu_1 - \mu_2 \in \mathbb{P} \otimes Z(E)$ ve $-I_{\mathcal{L}_b(E,F)} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq I_{\mathcal{L}_b(E,F)}$ eşitsizliği sağlandığından $\mu_1 - \mu_2 \in \mathfrak{C}$ elde edilir. Üstelik $\lambda (\mu - (\mu_1 - \mu_2)) < \varepsilon$ olduğundan μ, $\mathfrak{C}$ 'nin λ -kapanışındadır.

$T \in \mathcal{L}_b(E,F)$, ρ ; $|T|$ ile $\mathcal{L}_b(E,F)$ içinde üretilen ideal üzerinde sıra sürekli Riesz yarınormu olsun. $\nu \in Z(\mathcal{L}_b(E,F))$ için $\lambda(\nu) = \rho(\nu(T)) = \rho(|\nu||T|)$ olarak tanımlansın. Böylece λ, $Z(\mathcal{L}_b(E,F))$ üzerinde sıra sürekli Riesz yarımnormu olur. $S \in \mathcal{L}_b(E,F)$ ve $0 \leq |S| \leq |T|$ ise $\mathcal{L}_b(E,F)$ Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan, $\mu(T) = S$ olacak şekilde $\mu \in [-I_{\mathcal{L}_b(E,F)}, I_{\mathcal{L}_b(E,F)}]$ vardır. Böylece önceki durumdan $\varepsilon > 0$ için $\lambda(\mu - \nu) < \varepsilon$ olacak şekilde $\nu \in \mathfrak{C}$ vardır. Yani, $\nu = \sum_{i=1}^{n} P_i \otimes \pi_i$, $0 \leq |\nu| \leq I_{\mathcal{L}_b(E,F)}$ ve

$$\begin{aligned}\lambda(\mu - \nu) &= \rho((\mu - \nu)(T)) = \rho(|\mu - \nu||T|) \\ &= \rho(|\mu(T) - \nu(T)|) \\ &= \rho(|S - \sum_{i=1}^{n} P_i \otimes \pi_i|) < \varepsilon\end{aligned}$$

olacak şekilde $1 \leq i \leq n$ için $P_i \in \mathbb{P}$, $\pi_i \in Z(E)$ vardır. Dikkat edilirse, $0 \leq S \leq T$ olduğunda ν, $\mathfrak{C}^+$ nın elemanı olarak bulunabilir.

<u>Önerme 5.21 :</u> E topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü, F Dedekind tam normlu Riesz uzayı olsun. F_n^*, F nin noktalarını ayırısın. $S, T \in \mathcal{L}_b(E,F)$

$0 \le |S| \le |T|$ eşitsizliğini sağlayan operatörler ve ρ $|T|$ ile $\mathcal{L}_b$ (E,F) içinde üretilen idel üzerinde sıra sürekli Riesz yarınormu olsun. $\varepsilon > 0$ için $P_1,\ldots,P_n$ F üzerinde sıralı projeksiyonlar, $\pi_1,\ldots,\pi_n \in Z(E)$ vardır.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} P_i \otimes \pi_i\right| \le I_{\mathcal{L}_b(E,F)} \quad \text{ve} \quad \rho\left(S - \sum_{i=1}^{n} P_i \otimes \pi_i\right) < \varepsilon$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Özellikle, $0 \le S \le T$ ise $\pi_1,\pi_2,\ldots,\pi_n$ pozitif merkez operatörleri olarak seçilebilir.

Kanıt : Yukarıdaki açıklamalardan hemen görülür.

E birimli AM- uzay olsun. E üzerindeki her çarpım operatörü, E^{**} üzerinde bir çarpım operatörü tanımlar. Bununla birlikte E aşikar olmayan sıralı projeksiyonlara sahip olmadığında, E^{**} ' nin Dedekind tamlığı, E^{**} üzerinde bolca sıralı projeksiyon bulunmasını garanti eder. Aşağıdaki bilinen sonuç E üzerindeki çarpım operatörleri ile E^{**} nin sıralı projeksiyonlarına yerel yaklaşılabildiğini gösterir [1].

Önönerme 5.22 : E birimli AM- uzay ve P E^{**} üzerinde sıralı projeksiyon olsun. O zaman her $0 \le \varphi \in E^{*}$ ve $\varepsilon > 0$ için E üzerinde pozitif çarpım operatörü M vardır, $0 \le M \le I$ ve P-M nin E^{**} içindeki modulü alındığında, $\langle\, |P-M|\, e, \varphi \,\rangle < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

Aşağıdaki Sonuç, [1] Önerme 15.11'in benzeridir.

Önerme 5.23 : E bir $x \in E_+$ noktasında yerel topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü ve F birimli AM- uzay, $S,T:E \to F$, $0 \le S \le T$ eşitsizliğini sağlayan pozitif operatörler olsun. Eğer $0 \leq \varphi \in F^*$, $\varepsilon > 0$ verilirse, E üzerinde $M_1,\ldots,M_n$ pozitif merkez operatörleri ve F üzerinde $L_1,\ldots,L_n$ pozitif çarpım operatörleri vardır; her $y \in E$ $|y| \leq x$ için,

$$\langle \, | \, (S-\sum_{i=1}^{n} L_i TM_i)y \, |, \varphi \, \rangle < \varepsilon$$

sağlanır.

<u>Kanıt :</u> S ve T' yi E den F^{**} ne operatörler olarak ele alalım. Dikkat edilirse, $0 \leq \varphi \in (F^{**})_n^{\sim}$ sağlanır. Sonuç 5.18 den E üzerinde pozitif merkez operatörler $M_1,\ldots,M_n$ ve F^{**} üzerinde sıralı projeksiyonlar $P_1,\ldots,P_n$ vardır,

$$\langle \, | \, S-\sum_{i=1}^{n} P_i TM_i \, |x, \varphi \, \rangle < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Önönerme 5.22 den her $1 \leq i \leq n$ için F üzerinde L_i pozitif çarpım operatörleri vardır,

$$\langle \, | \, P_i - L_i \, | TM_i x, \varphi \, \rangle < \frac{\varepsilon}{2n}$$

eşitsizliği sağlanır.

Böylece , $y \in E$ $|y| \leq x$ için ,

$$\langle \, | \, (S-\sum_{i=1}^{n} L_i TM_i)y \, |, \varphi \, \rangle$$

$$\leq \langle \, | \, (S-\sum_{i=1}^{n} P_i TM_i)y \, |, \varphi \, \rangle + \langle \, | \, \sum_{i=1}^{n} (P_i - L_i) TM_i y \, |, \varphi \, \rangle$$

$$\leq \left\langle \left| S-\sum_{i=1}^{n} P_i TM_i \right| x,\varphi \right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \left| P_i - L_i \right| TM_i x,\varphi \right\rangle$$

$< \varepsilon$

elde edilir.

Şimdi Haid'in önermesinin bir benzerini verebiliriz.

Sonuç 5.24 : E bir $x \in E_+$ noktasında yerel topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü ve F topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü olsun. $S,T:E \to F$, $0 \leq S \leq T$ eşitsizliğini sağlayan pozitif operatörler olsun. Her $0 \leq \varphi \in F^*$, $\varepsilon > 0$ için E üzerinde $M_1,\ldots,M_k$ ve F üzerinde $L_1,\ldots,L_k$ pozitif ortomorfizmaları vardır; her $y \in E$ $|y| \leq x$ için,

$$\left\langle \left| (S-\sum_{i=1}^{n} L_i TM_i)y \right|,\varphi \right\rangle < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır.

Kanıt : $0 \leq \varphi \in F^*$, $\varepsilon > 0$ verilsin. $Tx = v$ diyelim. I_x ve I_v sırasıyla E ve F içinde x ile v tarafından üretilen idealler olsun. I_x ve I_v sup norm ile birimli AM- uzaylardır. Böylece I_x, $x \in E_+$ noktasında yerel topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü olur. S ve T, I_x 'i I_v ye taşır ve S ile T ' yi I_x ' e kısıtladığımızda $0 \leq S \leq T$ sağlanır. Üstelik φ , I_v ' ye kısıtlandığında pozitif ve sürekli olur. Böylece Sonuç 5.23 den I_x üzerinde $M_1,\ldots,M_k$ ve I_v üzerinde $L_1,\ldots,L_k$ pozitif merkez operatörleri vardır; her $|y| \leq x$ için,

$$\left\langle \left| (S-\sum_{i=1}^{n} L_i TM_i)y \right|,\varphi \right\rangle < \frac{\varepsilon}{3}$$

eşitsizliği sağlanır.

E ve F üzerindeki kabullerden dolayı, I_x ile I_v , Z(E) – yaklaşık genişleme özelliğine sahiptir. Böylece $1 \le i \le k$ için, $(M_n^i)_n \subseteq Z(E)$ ve $(L_n^i)_n \subseteq Z(F)$ dizileri vardır; her $z \in I_x$, $t \in I_v$ için,

$$M_n^i(z) \to M_i(z) \quad \text{ve} \quad L_n^i(t) \to L_i(t)$$

sağlanır . Kafes operasyonlarının sürekliliğinden her $1 \le i \le k$ ve her n için $0 \le M_n^i \in Z(E)$ ve $0 \le L_n^i \in Z(F)$ olduğu kabul edilebilir. Her $1 \le i \le k$ için $0 \le M_i \le \lambda_i I$ olacak şekilde λ_i pozitif sayısı vardır. $\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k$ olmak üzere $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{3(\lambda k\|\varphi\|+1)}$ olsun. Yeterince büyük N için, $\|L_N^i(v) - L_i(v)\| < \varepsilon_1$ eşitsizliği her $1 \le i \le k$ için sağlanır. $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{3(\|\varphi\|\sum_{i=1}^{k}\|L_N^i T\|+1)}$ olsun. Yeterince büyük K için, $\| M_K^i(x) - M_K(x)\| <$ ε_2 eşitsizliği her $1 \le i \le k$ için sağlanır.

Dikkat edilirse, her $1 \le i \le k$, $0 \le |z| \le x$ ve $0 \le |t| \le v$ için,

$$| L_N^i(t) - L_i(t) | \le | L_N^i - L_i | v = | L_N^i v - L_i v |$$

$$| M_K^i(z) - M_i(z) | \le | M_K^i - M_i | x = | M_K^i x - M_i x |$$

olduğunda, $\|L_N^i(t) - L_i(t)\| < \varepsilon_1$ ve $\|M_K^i(z) - M_i(z)\| < \varepsilon_2$ eşitsizlikler sağlanır .

Şimdi aradığımız ortomorfizmaların $L_N^1,\ldots,L_N^k$ ve $M_K^1,\ldots,M_K^k$ olduğunu gösterelim. $0 \le |y| \le x$ olsun.

$$\left\langle \left| (S-\sum_{i=1}^{k} L_N^i T M_K^i)y \right|, \varphi \right\rangle$$

$$\leq \langle \mid (S-\sum_{i=1}^{k} L_i TM_i)y \mid,\varphi \rangle + \langle \mid (\sum_{i=1}^{k} L_N^i TM_K^i - \sum_{i=1}^{k} L_i TM_i)y \mid,\varphi \rangle$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^{k} \langle \mid (L_N^i TM_K^i - L_i TM_i)y \mid,\varphi \rangle$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^{k} \langle \mid L_N^i TM_K^i(y) - L_i TM_i(y) \mid,\varphi \rangle + \sum_{i=1}^{k} \langle \mid L_N^i TM_i(y) - L_i TM_i(y) \mid,\varphi \rangle$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^{k} \|\varphi\| \, \| L_N^i T\| \, \| M_K^i(y) - M_i(y) \| + \sum_{i=1}^{k} \|\varphi\| \, \| L_N^i TM_i(y) - L_i TM_i(y)\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{i=1}^{k} \|\varphi\| \, \| L_N^i T\| \, \varepsilon_2 + \lambda \sum_{i=1}^{k} \|\varphi\| \, \| L_N^i TM_i(\frac{y}{\lambda}) - L_i TM_i(\frac{y}{\lambda}) \|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \lambda k \|\varphi\| \frac{\varepsilon}{3(\lambda k \|\varphi\| + 1)}$$

$$< \varepsilon$$

elde edilir.

Dikkat edilirse Sonuç 5.24 de F Banach örgüsünün $Tx = v \in F_+$ noktasında yerel topolojik dolu merkeze sahip olması kanıt için yeterlidir. Üstelik E ve F 'nin topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüleri olması durumunda Sonuç 5.24 ün her $x \in E_+$ için sağlanacağı açıktır.

Aşağıdaki Sonuç, [9] Önerme 2.3'ün benzeridir.

<u>Sonuç 5.25 :</u> E, $x \in E_+$ noktasında yerel topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü ve F sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü olsun. S, $T:E \to F$, $0 \leq S \leq T$ eşitsizliğini sağlayan pozitif operatörler olsun. $\varepsilon > 0$ için E üzerinde $\pi_1, \ldots, \pi_n$ pozitif merkez operatörler ve $P_1 + \ldots + P_n = I_F$, $i \neq j$ için $P_i \wedge P_j = 0$ olacak şekilde F üzerinde $P_1, \ldots, P_n$ sıralı projeksiyonları vardır.

$$\left\| \left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| x \right\| < \varepsilon \text{ ve } 0 \leq \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \leq T$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Kanıt : $\varepsilon>0$ verilsin. Her $x^* \in F^*$, $\|x^*\| \leq 1$ için $\langle (|x^*| - y^*)^+, Tx \rangle < \frac{\varepsilon}{3}$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde $0 < y^* \in F^*$ nün var olduğu [1], Önerme 12.17'den bilinmektedir. F sıra süreli norma sahip olduğundan Dedekind tamdır ve $0<y^* \in F_n^{\sim}$ olur. Sonuç 5.18'den E üzerinde $\pi_1, \ldots, \pi_n$ pozitif merkez operatörleri ve $P_1+\ldots+P_n=I_F$, $i \neq j$ için $P_i \wedge P_j=0$ olacak şekilde F üzerinde $P_1, \ldots, P_n$ sıra projeksiyonları vardır;

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \leq T \text{ ve } \left\langle \left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| x, y^* \right\rangle < \frac{\varepsilon}{3}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Böylece,

$$\left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| \leq S + \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \leq 2T$$

eşitsizliği elde edilir. $x^* \in F^*$, $\|x^*\| \leq 1$ olsun.

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| x, x^* \right\rangle \\
&\leq \left\langle \left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| x, (|x^*| - y^*)^+ \right\rangle + \left\langle \left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| x, y^* \right\rangle \\
&< \langle 2Tx, (|x^*| - y^*)^+ \rangle + \frac{\varepsilon}{3} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\left\| \left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| x \right\| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

E topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü iken Sonuç 5.25'in her $x \in F_+$ için sağlanacağı açıktır.

X ve Y Banach uzayları olmak üzere $T:X \to Y$ sürekli operatör olsun. Ring(T); $1 \leq i \leq n$ için $S_i \in \mathcal{L}(X)$ ve $R_i \in \mathcal{L}(Y)$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{n} R_i T S_i$ biçimindeki bütün operatörlerin alt vektör uzayının $\mathcal{L}(X,Y)$ içindeki norm kapanışıdır. $\mathcal{L}(X,Y)$ 'nin kapalı alt vektör uzayı Ring(T)'ye T ile üretilen halka ideal denir.

E ve F Banach örgüleri, F Dedekind tam olsun. O zaman $\mathcal{L}_b(E,F) \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ olduğu biliniyor. $T:E \to F$ sıra sınırlı bir operatör olmak üzere T ile üretilen ideal ve halka ideal arasında herhangi bir ilişki olup olmadığı sorgulandı.

C.D. Aliprantis ve O. Burkinshaw, σ-Dedekind tam veya $\frac{1}{2}$-sınırlı iç noktaya sahip Banach örgüleri üzerinde tanımlı sıra sürekli norma sahip pozitif bir T operatörü için $A_T \subseteq$Ring(T) olduğunu gösterdi [9]. Aşağıdaki Sonuç, topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüleriyle çalışıldığında da kapsamının sağlandığını gösterir.

<u>Sonuç 5.26 :</u> E topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü ve F Dedekind tam Banach örgüsü olsun. Eğer $T:E \to F$ pozitif operatörü sıra sürekli norma sahip ise $A_T \subseteq$Ring(T) dir.

<u>Kanıt :</u> T sıra süreli norma sahip olduğundan L- ve M- zayıf kompaktır [1]. T(E) ile üretilen ideal A olsun. O zaman $\overline{A}$ sıra sürekli norma sahip Banach örgüsüdür [1]. $S:E \to F$, $0 \leq S \leq T$ eşitsizliğini sağlayan pozitif operatörler olsun. $S(E) \subseteq \overline{A}$ olduğu açıktır. $\varepsilon > 0$ olsun. T, M-zayıf kompakt olduğundan öyle bir

$u \in E_+$ vardır; her $x \in E$ $\|x\| \leq 1$ için $\|T(|x|-u)^+\| < \frac{\varepsilon}{3}$ eşitsizliği sağlanır. $\overline{A}$ sıra sürekli norma sahip böylece, Sonuç 5.25'den E üzerinde $\pi_1, \ldots, \pi_n$ merkez operatörleri ve $\overline{A}$ üzerinde $P_1, \ldots, P_n$ sıralı projeksiyonları vardır;

$$\left\| \left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| u \right\| < \varepsilon \text{ ve } 0 \leq \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \leq T$$

eşitsizlikleri sağlanır.

$1 \leq i \leq n$ için P_i: $\overline{A} \to F$, I_F birim operatörüyle sınırlıdır. Böylece, P_i, F'nin tamamına genişler [1]. Bu genişlemeyi tekrar P_i ile gösterirsek $0 \leq P_i \leq I_F$ sağlanır. Ozaman $\sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \in \text{Ring}(T)$ ve $\left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| \leq S + \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \leq 2T$ eşitsizliği $\mathcal{L}_b(E,F)$ içinde sağlanır. Diğer taraftan $x \in E$ için,

$$\left| (S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i) x \right| \leq \left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| (|x|+u)^+ + \left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| u$$

$$\leq 2T\,(|x|-u)^+ + \left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| u$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece her $x \in E$ $\|x\| \leq 1$ için,

$$\left\| \left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| x \right\| \leq 2\, \| T\,(|x|-u)^+ \| + \left\| \left| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right| u \right\| < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece, $\left\| S - \sum_{i=1}^{n} P_i T \pi_i \right\| < \varepsilon$ olur. Bu ise $S \in \text{Ring}(T)$ olduğunu gösterir. Böylece genel bir $S \in A_T$ için A_T'nin pozitif üreteçli ve Ring(T)'nin vektör uzayı olmasından, $S \in \text{Ring}(T)$ elde edilir.

Buraya kadar yapılan çalışmada F Dedekind tam Riesz uzayı olarak ele alındı. Şimdi F üzerindeki bu kabul zayıflatılacaktır. E ve F Banach örgüleri olsun. F tarafından $(F^{*})_{n}^{*}$ içinde üretilen ideal, F_1 ile gösterilsin $\sigma \in Z(F)$ verildiğinde σ^{**} 'ın F_1'e kısıtlaması σ_1 ile gösterilsin. O zaman $\sigma_1 \in Z(F_1)$ ve Z(F) den $Z(F_1)$ içine, $\sigma \rightarrow \sigma_1$ dönüşümü bire-bir, cebir ve Riesz homomorfizmasıdır. Böylece σ ve σ_1'in özdeşliğinden Z(F), $Z(F_1)$'in alt cebri olarak ele alınacak ve $Z(F) \otimes Z(E)$, $Z(F_1) \otimes Z(E)$'nin uyuşan alt uzayı olarak tanımlanacaktır.

X herhangi bir topolojik uzay olmak üzere L, C(X)'in yerel düzgün kapalı alt cebri ise L'nin Riesz alt uzayı olduğu bilinmektedir [16]. Böylece E Arşimedyan Riesz uzayı yerel düzgün tam iken Z(E) bir C(K) uzayına Riesz izomorfik ve $I_E \rightarrow \mathbf{1}$ olduğundan cebir izomorfiktir. Böylece Z(E)'nin yerel düzgün kapalı alt cebri, Riesz altuzayıdır.

<u>Sonuç 5.27 :</u> E ve F Banach örgüleri olsun. $Z(F) \tilde{\otimes} Z(E)$ ile $Z(F) \otimes Z(E)$ nin $Z(\mathcal{L}_b(E,F_1))$ üzerinde birim operatörle elde edilen sıra birim norma göre kapanışı gösterilsin. O zaman $Z(F) \tilde{\otimes} Z(E)$, $Z(\mathcal{L}_b(E,F_1))$'in Riesz alt uzayıdır.

<u>Kanıt :</u> F_1 Dedekind tam dolayısıyla $\mathcal{L}_b(E,F_1)$ Dedekind tam olduğundan $Z(F) \tilde{\otimes} Z(E)$ 'nin $Z(\mathcal{L}_b(E,F_1))$ 'in yerel düzgün kapalı alt cebri olduğunu göstermek yeter. $Z(F) \otimes Z(E)$, $Z(\mathcal{L}_b(E,F_1))$ in birimsel alt cebiridir. Gerçekten $\sigma_1, \sigma_2 \in Z(F)$, $\pi_1, \pi_2 \in Z(F)$ için $(\sigma_1 \otimes \pi_1)\ (\sigma_2 \otimes \pi_2) = \sigma_1 \sigma_2 \otimes \pi_2 \pi_1$ eşitliği sağlanır. Böylece $Z(F) \tilde{\otimes} Z(E)$, $Z(\mathcal{L}_b(E,F_1))$ in birimsel alt cebridir. Üstelik,

$(\mu_n) \subseteq Z(F)\tilde{\otimes}Z(E)$ ve $\mu_n \to \mu$ (y.d.) olacak şekilde $\mu \in Z(\mathcal{L}_b(E,F_1))$ varsa $\mu \in Z(F)\tilde{\otimes}Z(E)$ dir. Böylece $Z(F)\tilde{\otimes}Z(E)$, $Z(\mathcal{L}_b(E,F_1))$ 'in yerel düzgün kapalı alt cebri ve dolayısıyla Riesz uzayıdır.

E Riesz uzayı ve F_1 Dedekind tam normlu Riesz uzayı daha önce olduğu gibi $\mathfrak{I}_1=\{ \phi_{\varphi,T,x} : 0 \le \varphi \in (F_1)^*_n,\ 0 \le T \in \mathcal{L}_b(E,F_1),\ 0 \le x \in E\}$ olarak tanımlansın. $(F_1)^*_n = F^*$ olduğu bilinmektedir [14]. Buna göre, $\mathfrak{I}_1$ içindeki bütün ϕ fonksiyonelleri, $0 \le \varphi \in F^*$, $0 \le T \in \mathcal{L}_b(E,F_1)$, $0 \le x \in E$ olmak üzere $\phi(\mu) = \langle \varphi, \mu(T)x \rangle$ ile tanımlanabilir. $\mathfrak{I}_1$ $Z(\mathcal{L}_b(E,F_1))^\sim_n$ 'nın pozitif kısmı içinde soliddir. Üstelik, $\nu \in Z(\mathcal{L}_b(E,F_1))$, $\nu \neq 0$ ise $\nu(T)x \neq 0$ olacak şekilde $0 \le T \in \mathcal{L}_b(E,F_1)$ ve $0 \le x \in E$ vardır. Böylece $\langle \varphi, \nu(T)x \rangle \neq 0$ olacak şekilde $0 \le \varphi \in F^*$ vardır. Böylece $\phi(\nu) \neq 0$ olacak şekilde $\phi \in \mathfrak{I}_1$ vardır. Yani $\mathfrak{I}_1$, $Z(\mathcal{L}_b(E,F_1))$'in noktalarını ayırır.

Aşağıdaki Önönerme, [10] Önönerme 3.3'ün benzeridir.

<u>Önerme 5.28.:</u> F topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü ise $[0, I_F] \subseteq Z(F_1)$ sıra aralığı $[0, I_{F_1}] \subseteq Z(F_1)$ içinde $|\sigma|(Z(F_1), (F \otimes F^*)$ yoğundur.

<u>Kanıt:</u> $\varepsilon > 0$, $0 \le \sigma \le I_{F_1}$, $0 \le \varphi \in F^*$, $0 \le x \in F$ verilsin. $\sigma(x) = \omega \in F_1$ denirse $0 \le \omega \le x$ olduğu açıktır. O zaman $0 \le \omega' \le x$, $\varphi|\omega' - \omega| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $\omega' \in F$ vardır [17]. F topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüsü olduğundan, $0 \le \sigma_n \le I_F$, $\sigma_n(x) \to \omega'$ olacak şekilde $(\sigma_n) \subseteq Z(F)$ vardır. Yeterince büyük N için

φ ($|\sigma_N(x)$- ω' $|< \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned}\varphi(\,|\,\sigma-\sigma_N|x) &= \varphi(\,|\,\sigma(x)-\sigma_N(x)\,|)\\ &= \varphi\,(\,|\omega-\sigma_N(x)|\,)\\ &\leq \varphi\,(\,|\omega-\omega'\,|\,)+\varphi\,(\,|\omega'-\sigma_N(x)\,|\\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir.

Aşağıdaki Önerme, [10], Önerme 3.2.'nin benzeridir.

<u>Önerme 5.29.:</u> E, F topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüleri $\pounds^+ = \{\ \mu\in Z(F)\tilde{\otimes}Z(E):\quad 0\leq\ \mu\ \leq\ I_F\otimes I_E\ \}$ ise $\pounds^+$ $[0, I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)}]$ içinde $|\sigma|(\,Z(\mathcal{L}_b\,(E,F_1)),\mathfrak{I}_1)$ yoğundur.

Kanıt : $0\leq \varphi\in F^*$, $0\leq x\in E$, $0\leq T\in\mathcal{L}_b(E,F_1)$ ve $\varepsilon>0$ verilsin. $\pi\in[0, I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)}]$ iken $\varphi\,(\,|\pi-\mu|(T)x)<\varepsilon$ olacak şekilde $\mu\in\pounds^+$ olduğunu göstermek yeter. Sonuç 5.16 dan $\varphi\,(|\pi-\mu'|(T)x)\ <\frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde μ' vardır; Burada $\mu'=\sum_{i=1}^{n}P_i\otimes\pi_i$ biçiminde ve $0\leq\mu'\leq I_{F_1}\otimes I_E$ eşitsizliğini sağlar. Üstelik $1\leq i\leq n$ için P_i, F_1 üzerinde sıralı projeksiyonlar, $\sum_{i=1}^{n}P_i=I_{F_1}$ ve $i\neq j$ için $P_i\wedge P_j=0$ ve $0\leq\pi_i\in Z(E)$ dir. $1\leq i\leq n$ için $0\leq P_i\leq I_{F_1}$ ve $0\leq T\pi_i x\in F_1$ ve $\frac{\varepsilon}{2n}>0$ için Önönerme 5.28 den $\varphi\,(|\,P_i-\sigma_i\,|\,T\pi_i x)<\frac{\varepsilon}{2n}$ olacak şekilde $\sigma_i\in[0, I_F]\subseteq Z(F)$

vardır. $\nu=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\otimes\pi_i$ denirse $\nu\in Z(F)\otimes Z(E)$ ve böylece $\nu\wedge I_F\otimes I_E\in Z(F)\tilde{\otimes}Z(E)$ dir. $\mu=\nu\wedge I_F\otimes I_E$ denirse $\mu\in \pounds^+$ elde edilir. $\mu'=\sum_{i=1}^{n}P_i\otimes\pi_i\ \wedge I_{F_1}\otimes I_E$ olduğundan ,

$|\mu'-\mu| \leq |\sum_{i=1}^{n}P_i\otimes\pi_i-\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\otimes\pi_i|$ eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\varphi(|\mu'-\mu|)Tx)\leq\varphi(|\sum_{i=1}^{n}P_i\otimes\pi_i-\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\otimes\pi_i|Tx)$$

$$\leq\sum_{i=1}^{n}\varphi(|P_i-\sigma_i|T\pi_i x)$$

$$< n\frac{\varepsilon}{2n}=\frac{\varepsilon}{2}$$

ve böylece ,

$$\varphi(|\pi-\mu|Tx)\leq\varphi(|\pi-\mu'|Tx)+\varphi(|\mu'-\mu|Tx)<\varepsilon$$

elde edilir.

Aşağıdaki Önerme, [10] Önerme 3.4 ün benzeridir.

<u>Önerme 5.30 :</u> E ve F topolojik dolu merkeze sahip, Banach örgüleri olsun.

$\pounds^+=\{\ \mu\in Z(F)\tilde{\otimes}Z(E):\ 0\leq\mu\leq I_F\otimes I_E\ \}$ ise,

a) $[0, I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)}]=\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\pounds^+$

b) $[0,T]=(\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\pounds^+)(T)$ her $0\leq T\in\mathcal{L}_b(E,F_1)$ için

<u>Kanıt :</u>

a) Önerme 5.29 ve Önerme 5.6 dan $[0, I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)}] = (\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow £^+)$ elde edilir.

b) $\mathcal{L}_b(E,F_1)$ ' in Dedekind tam olmasından ve (a) dan her $0 \leq T \in \mathcal{L}_b(E,F_1)$ için $[0, T] = (\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow £^+)(T)$ olduğu açıktır.

E ve F topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüleri olsun. Eğer λ, $Z(\mathcal{L}_b(E,F_1))$ üzerinde herhangi bir sıra sürekli Riesz yarınormuysa $£^+$ alt kafesi $[0, I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)}]$ içinde λ-yoğundur. Gerçekten $\nu \in \uparrow £^+$ ise $\nu_\alpha \uparrow \nu$ olacak şekilde $£^+$ içinde $\{\nu_\alpha\}$ neti vardır. $\nu - \nu_\alpha \downarrow 0$ olduğundan $\lambda(\nu - \nu_\alpha) \downarrow$ ve böylece ν, $£^+$ nın λ-kapanışındadır. Böylece devam edilirse $\nu \in \downarrow\uparrow\downarrow\uparrow £^+$ iken ν $£^+$ nın λ-kapanışındadır. Önerme 5.30 dan $£^+$, $[0, I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)}]$ içinde λ-yoğundur.

Eğer $£ = \{ \mu \in Z(F) \tilde{\otimes} Z(E) : 0 \leq \mu \leq I_F \otimes I_E \}$ ise $£$ $[-I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)}, I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)}]$ içinde λ-yoğundur. Gerçekten, $\nu \in [-I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)}, I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)}]$ ise önceki durumdan ν^+, ν^- $£^+$ nın λ-kapanışında olduğundan $\nu = \nu^+ - \nu^-$, $£^+$ nın λ-kapanışındadır.

$T \in \mathcal{L}_b(E,F_1)$ olsun. ρ, $|T|$ ile $\mathcal{L}_b(E,F_1)$ içinde üretilen ideal üzerinde sıra sürekli Riesz yarınormu olsun. $\nu \in Z(\mathcal{L}_b(E,F_1))$ için $\lambda(\nu) = \rho(\nu(T)) = \rho(|\nu||T|)$ olarak tanımlansın. Böylece λ, $Z(\mathcal{L}_b(E,F_1))$ üzerinde sıra sürekli Riesz yarınormu olur. $S \in \mathcal{L}_b(E,F_1)$ ve $0 \leq |S| \leq |T|$ eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. $\mathcal{L}_b(E,F_1)$ Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan $-I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)} \leq \mu \leq I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)}$ ve $\mu(T) = S$ olacak şekilde $\mu \in Z(\mathcal{L}_b(E,F_1))$ vardır. Böylece, önceki durumdan $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\lambda(\mu - \nu) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $\nu \in £$ vardır.

Öte yandan $£$, $\{\nu \in Z(F) \otimes Z(E) : |\nu| \leq I_F \otimes I_E\}$ nin $I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)}$-düzgün kapanışıdır. Gerçekten, $\nu \in £$ ise $|\nu| \leq I_F \otimes I_E$ ve $\nu \in Z(F) \tilde{\otimes} Z(E)$ dir. O zaman sıra birim norma göre $\nu_n \to \nu$ olacak şekilde Z(F)⊗Z(E) içinde $\{\nu_n\}$ dizisi vardır. Her n için $\nu_n \neq 0$ olarak kabul edebiliriz. $\frac{1}{\|\nu_n\|} \to \frac{1}{\|\nu\|}$ ve buradan,

$\frac{\nu_n}{\|\nu_n\|} \to \frac{\nu}{\|\nu\|}$ elde ederiz. $\|\nu\| \leq 1$ olduğundan $\mu_n = \frac{\nu_n}{\|\nu_n\|}\|\nu\|$ denirse $\mu_n \in Z(F) \otimes Z(E)$, $\|\mu_n\| \leq 1$ ve böylece $|\mu_n| \leq I_F \otimes I_E$ elde edilir. $|\mu_n - \nu| \leq \|\mu_n - \nu\| \, I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)}$ ve $\mu_n \to \nu$ olduğundan $\mu_n \to \nu$ $I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)}$-düzgün yakınsaktır. Böylece ν, $\{\mu \in Z(F) \otimes Z(E) : 0 \leq |\mu| \leq I_F \otimes I_E\}$' nin $I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)}$-düzgün kapanışındadır. Tersine, $\nu_n \to \nu$ $I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)}$-düzgün yakınsak olacak şekilde $|\nu_n| \leq I_F \otimes I_E$ eşitsizliğini sağlayan Z(F)⊗Z(E) içinde $\{\nu_n\}$ dizisi var olsun. O zaman düzgün yakınsamanın tanımından, sıra birim norma göre $\nu_n \to \nu$ elde edilir. Böylece $\nu \in Z(F) \tilde{\otimes} Z(E)$ ve $|\nu_n| \leq I_F \otimes I_E$ dir. Böylece $\nu \in \mathcal{L}$ olduğu görülür.

$\varepsilon > 0$ verildiğinde $\lambda(\mu - \nu) < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $\nu \in \mathcal{L}$ olduğu bilindiğinden ve önceki durumdan, $|\nu - \nu'| < \frac{\varepsilon}{2(\rho(|T|)+1)} I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)}$ olacak şekilde $|\nu'| \leq I_F \otimes I_E$ eşitsizliğini sağlayan $\nu' \in Z(F) \otimes Z(E)$ vardır. Böylece $|\nu - \nu'|\,|T| < \frac{\varepsilon}{2(\rho(|T|)+1)}|T|$ ve buradan da $\rho(|\nu - \nu'|\,|T|) < \frac{\varepsilon}{2}$ elde edilir. λ nın tanımından $\lambda(\nu - \nu') < \frac{\varepsilon}{2}$ ve böylece $\lambda(\nu' - \mu) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Böylece $\lambda(\nu' - \mu) = \rho(|\nu'(T) - S|) < \varepsilon$ olacak şekilde $0 \leq |\nu'| \leq I_F \otimes I_E$ eşitsizliğini sağlayan $\nu' \in Z(F) \otimes Z(E)$ vardır. Yani, $\rho\left(\left|S - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i T \pi_i\right|\right) < \varepsilon$, $\left|\sum_{i=1}^{n} \sigma_i \otimes \pi_i\right| \leq I_F \otimes I_E$ eşitsizlikleri sağlanacak şekilde $1 \leq i \leq n$ için $\sigma_i \in Z(F)$

ve $\pi_i \in Z(E)$ vardır. Böylece aşağıdaki Önerme elde edilir. Bu Önerme, [10] Önerme 3.5 ‘ in benzeridir.

Önerme 5.31 E ve F topolojik dolu merkeze sahip Banach örgüleri ve F_1 , F ile $(F^*)_n^*$ içinde üretilen ideal olsun S, T $\in \mathcal{L}_b(E,F_1)$, $0 \leq |S| \leq |T|$ eşitliğini sağlayan operatörler ve ρ, | T | ile $\mathcal{L}_b(E,F_1)$ içinde üretilen ideal üzerinde sıra sürekli Riesz yarı normu olsun. $\varepsilon > 0$ için $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in Z(F)$, $\pi_1, \ldots, \pi_n \in Z(E)$ vardır;

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \otimes \pi_i \right| \leq I_{\mathcal{L}_b(E,F_1)} \quad \text{ve} \quad \rho\left(S - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i T \pi_i\right) < \varepsilon$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Kanıt : Yukarıdaki açıklamalardan elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Positive Operators, **Academic Press**, London.

2. Pagter, B., 1981, f-Algebras and Orthomorphisms, **Ph.D. Dissertation**, University of Leiden.

3. Luxemburg, W.A.J., Schep, A.R., 1978, A Radon-Nikodym type theorem for positive operators and a dual, **Indag. Math.**, 40, 357-375.

4. Huijsmans, C.B., Pagter, B., 1991, Disjointness preserving and diffuse operators, **Composito Mathematica**, 79, 351-374.

5. Alpay, Ş., Turan, B., 1998, On the commutant of the ideal centre, **Note di Matematica**, Vol.18, n.1, 63-69.

6. Wickstead, A.W., 1981, Extremal Structure of cones of Operators, **Quart.J. Math. Oxford**, 32(2), 239-253.

7. Huijsmans, C.B., Pagter, B., 1980, On z-ideals and d-ideals in Riesz Space I, **Indag.Math.**,42, 183-185.

8. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1983, The components of a Positive Operator, **Math Z.**, 184, 245-257.

9. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1986, On the Ring ideal Generated by a Positive Operator, **Journal of Functional Analysis**, 67, 60-72.

10. Buskes, G.J.H.M., Dodds, P.G., Pagter, B., Schep, A.R., 1986, Up-down theorems in the centre of $\mathcal{L}_b(E,F)$, **Indag.Math.**, 89(1), 1-9.

11. Wickstead, A.W., 1999, The centre of spaces of regular operators, **Mathematische Zeitschrift**, (To appear)

12. Alpay, Ş., Turan, B., 1996, On Surjectivity of the Arens Homomorphism, **Turkish Journal of Mathematics**, 20(3), 369-376.

13. Meyer, P., 1991, Banach Lattices, **Springer-Verlag ,** Heidelberg.

14. Zaanen, A.C., 1983, Riesz Spaces II, North-Holland, Amsterdam.

15. Fremlin, D.H., 1967, Abstract Köthe Spaces I, **Proc.Camb. Phil.Soc.**, 63, 630-660.

16. Huijsmans, C.B., Pagter, B., 1984, Subalgebras and Riesz Subspaces of an f-algebra, **Proc.London Math.Soc.**, (3)48, 161-174.

17. Dodds, P.G., 1975, o-weakly compact mappings of Riesz Spaces, **Trans. Amer.Math.Soc.**, 214, 389-402.

18. Luxemburg, W.A.J., Zaanen, 1971, Riesz Spaces I, North-Holland, Amsterdam.

19. Kalton, N.J., Saab, P., 1985, ideal properties of Regular Operators Between Banach lattices, **İllinois Journal of Mathematics**, 29(3), 382-400.

20. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1978, Locally Solid Riesz Spaces, **Academic Press**, London.

ÖZGEÇMİŞ

Ayşe UYAR 1970 yılında Ankara'da doğdu. İlk öğrenimini Bandırma Evyapan İlk Okulu'nda, orta öğrenimini Ankara Yalçın Eskiyapan Ortaokulu ve Ankara Gazi Lisesi'nde tamamladı. Üniversite lisans öğrenimini Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Anabilim Dalı'nda tamamladı.

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisansını tamamladı. Halen Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.