DİKLİĞİ KORUYAN OPERATÖRLER

Cüneyt ÇEVİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

(MATEMATİK)

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Ocak 2001

ANKARA

Cüneyt ÇEVİK tarafından hazırlanan DİKLİĞİ KORUYAN OPERATÖRLE adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Y.Doç.Dr. Bahri TURA

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisar tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Şafak ALPAY

Üye : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

Üye : Doç. Dr. Bahri TURAN

Üye : ________________

Üye : ________________

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kuralların uygundur.

İÇİNDEKİLER

DİKLİĞİ KORUYAN OPERATÖRLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Cüneyt ÇEVİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2001

ÖZET

Sıra sınırlı dikliği koruyan operatörlerin kendilerinin ve terslerinin varlığı terslerinin dikliği koruyan operatör olmaları ile ilgilenilmiştir. İki Riesz uzay arasındaki sıra sınırlı operatör dikliği koruyan iken bunların merkezle arasında f-cebir homomorfizması vardır. Bu durumun karşıtı elde edilmişti Son olarak, dikliği koruyan operatörün tersinin de dikliği koruyan operatö olması üzerine bir teorem verilmiştir.

Bilim Kodu	: 403.03.01
Anahtar Kelimeler	: Merkez, orthomorfizma, f-cebiri
Sayfa Adedi	: 69
Tez Yöneticisi	: Y.Doç.Dr. Bahri TURAN

DISJOINTNESS PRESERVING OPERATORS

(M.Sc. Thesis)

Cüneyt ÇEVİK

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SECIENCE AND TECHNOLOGY

January 2001

ABSTRACT

We are concerned with order bounded disjointness preserving operators and their inverses, in general. Existence of an order bounded disjointness preserving operator T between two Riesz spaces E, F imply that there exists an f-algebra homomorphism between their centers. A converse to this result is obtained. We finish with a theorem on the disjointness preserving property of the inverse operator between two Riesz spaces.

Science Code	: 403.03.01
Key Words	: Center, orthomorphism, f-algebra
Page Number	: 69
Adviser	: Y.Doç.Dr. Bahri TURAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken beni yönlendiren, kaynaklarla destekleyen fikirleriyle yol gösteren ve değerli zamanlarını bana ayıran hocam Y.Doç.Dr. Bahri TURAN'a teşekkürü borç bilirim.

1. GİRİŞ

Dikliği koruyan operatörler kullanılarak literatürde değişik ispatlar ve genellemeler yapılır. Dikliği koruyan operatörlerin çoğu özellikleri orthomorfizma tanımı yapıldıktan sonra ortaya çıkarılmıştır. f-cebiri ile orthomorfizmaları arasında çarpma dönüşümüyle ilişki kurulmuş, birimli f-cebiri ile orthomorfizmalarının Riesz ve cebir izomorfizmaları altında aynı olduğu gösterilmiş ve daha sonra yapılanlar dikliği koruyan operatörler için uygulanmıştır.

D.R. Hart iki Riesz uzayı arasında sıra sınırlı dikliği koruyan operatöre karşılık olarak, bu uzayların merkezleri arasında f-cebir homomorfizmasının varlığını göstermiş ve özelliklerini incelemiştir. B. Turan f-orthomorfizmasını tanımlamış, f-lineer dönüşümle ilişkisini vermiş ve bunlarla dikliği koruyan operatörler arasındaki geçişi sağlamıştır.

Bu çalışmada ilk olarak dikliği koruyan operatörler için temel kavramlar ele alınmış, f-cebirleri ile orthomorfizmalar arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, T dikliği koruyan operatörüne bağlı olarak tanımlanan Φ_T ilişki operatörü olarak adlandırılan f-cebir homomorfizmasına yer verilmiş ve T ile Φ_T arasındaki cebir ve topolojik özellikler incelenmiştir.

Son bölümde ise, bir T sıra sınırlı operatörü için Φ_T f-cebir homomorfizması verildiğinde T nin dikliği koruyan operatör olduğu f-orthomorfizmalarından yararlanılarak gösterilmiş ve genelde dikliği koruyan operatörün tersinin de dikliği koruyan operatör olduğu ispatlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE BAZI SONUÇLAR

2.1. Riesz Uzayları

2.1.1. Tanım (sıralı vektör uzayı)

E reel vektör uzayı ve üzerindeki sıralama bağıntısı $\leq$ olmak üzere, $x \leq$ iken her $z \in E$ ve her $\lambda \in I\!R^{+}$ için $x+z \leq y+z$ ve $\lambda x \leq \lambda y$ oluyorsa, E *sıralı vektör uzayı* denir.

2.1.2. Tanım (Riesz uzayı)

E sıralı vektör uzayı olmak üzere, her $x, y \in E$ için $x \vee y = \sup \{x, y\} \in$ (veya $x \wedge y = \inf \{x, y\} \in E$) oluyorsa, E ye *Riesz uzayı* denir.

2.1.3. Tanım (bir elemanın pozitif kısmı, negatif kısmı ve modülü)

Bir Riesz uzayının herhangi bir x elemanı için; $x^{+} = x \vee 0$, $x^{-} = x \wedge 0$ $|x| = x \vee (-x)$ eşitlikleriyle verilen elemanlarına sırasıyla, *x in pozitif kısmı* *x in negatif kısmı* ve *x in modülü* denir.

2.1.4. Teorem (Aliprantis and Burkinshaw, 1985)

Bir Riesz uzayının herhangi bir x elemanı için aşağıdakiler sağlanır:

1) $x = x^{+} - x^{-}$;

2) $|x| = x^{+} + x^{-}$;

3) $x^{+} \wedge x^{-} = 0$.

2.1.5. Tanım (iki elemanın dikliği, bir kümenin diki)

E Riesz uzayı olmak üzere, $x, y \in E$ için $|x| \wedge |y| = 0$ oluyorsa, x ve y birbirlerine diktir denir ve bu durum $x \perp y$ ile gösterilir. E nin D altkümesinin diki ise, $D^d = \{ x \in E :$ Her $y \in D$ için $x \perp y \}$ ile tanımlanır.

2.1.6. Tanım (sıra yakınsaklık)

E Riesz uzayı olmak üzere, $\{x_\alpha\} \subseteq E$ ve $x \in E$ için $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ ($\{y_\alpha\}$ azalan ve infimumu 0) olacak şekilde $\{y_\alpha\} \subseteq E$ ağı varsa, $\{x_\alpha\}$ ağı x elemanına *sıra yakınsak* denir.

2.1.7. Tanım (düzgün yakınsaklık, göreceli düzgün yakınsaklık, düzgün Cauchy dizisi)

E Riesz uzayı, $\{x_n\} \subseteq E$ ve $x \in E$ olmak üzere,

(a) $0 \leq u \in E$ alındığında, her $\varepsilon > 0$ için $n_\varepsilon \leq n$ iken $|x_n - x| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde $n_\varepsilon \in I\!N$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x elemanına *u-düzgün yakınsak* (*düzgün yakınsak*),

(b) $x_n \to x$ *(u-düzgün yakınsak)* olacak şekilde $0 \leq u \in E$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x elemanına *göreceli düzgün yakınsak*,

(c) Her $\varepsilon > 0$ için $n_\varepsilon \leq n,m$ iken $|x_n - x_m| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde $n_\varepsilon \in I\!N$ ve (ε dan bağımsız) $0 \leq u \in E$ varsa, $\{x_n\}$ dizisine *düzgün Cauchy dizisi* denir.

2.1.8. Tanım (düzgün kapalı küme, düzgün tam Riesz uzayı)

E Riesz uzayı olmak üzere,

(a) E nin D altkümesindeki herhangi bir $\{x_n\}$ dizisi için $x_n \to x$ *(görece*
düzgün yakınsak) iken $x \in D$ oluyorsa, D ye *düzgün kapalı küme*,

(b) E nin her düzgün Cauchy dizisi göreceli düzgün yakınsak oluyorsa, E y
düzgün tam Riesz uzayı denir.

2.1.9. Tanım (Arşimedyan Riesz uzayı, Dedekind tam Riesz uzayı, Ries altuzayı, sıra yoğun Riesz altuzayı, ideal, band)

E Riesz uzayı olmak üzere,

(a) Her $x \in E^+$ için $n^{-1}x \downarrow 0$ oluyorsa, E ye *Arşimedyan Riesz uzayı*,

(b) E nin üstten sınırlı her altkümesi supremuma sahipse, E ye *Dedekind ta*
Riesz uzayı,

(c) G altuzayı için $x, y \in G$ iken $x \vee y \in G$ (veya $x \wedge y \in G$) oluyorsa, G ye
nin *Riesz altuzayı*,

(d) G Riesz altuzayı için $0 < x \in E$ iken $0 < y \leq x$ olacak şekilde $y \in$
varsa, G ye E nin *sıra yoğun Riesz altuzayı*,

(e) I altuzayı için $|x| \leq |y|$ ve $y \in I$ iken $x \in I$ oluyorsa, I ya E de *(sır*
ideal,

(f) B ideal ve herhangi bir $\{x_\alpha\} \subseteq B$; $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ ($\{x_\alpha\}$ artan ve supremumu
ağı için $x \in B$ oluyorsa, B ye E de *band* denir.

2.1.10. Tanım (bir kümenin ürettiği Riesz altuzayı (ideal, band))

E Riesz uzayının boştan farklı D altkümesini kapsayan en küçük Rie
altuzayına (ya da ideale, banda) *D nin ürettiği Riesz altuzayı* (ya da *idea*
band) denir.

• Bir Riesz uzayı Dedekind tam ise, Arşimedyandır. E Riesz uzayının D altkümesinin ürettiği ideal ve band sırasıyla,

$$I_D = \{ x\in E : |x| \leq \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i| \text{ olacak şekilde } \lambda_1,\ldots,\lambda_n \in I\!R^+ \text{ ve } x_1,\ldots,x_n \in D \text{ var } \}$$

$$B_D = \{ x\in E : 0 \leq x_\alpha \uparrow |x| \text{ olacak şekilde } \{x_\alpha\} \subseteq D \text{ var } \}$$

biçimindedir. E nin herhangi bir x elemanının ürettiği ideal ve band sırasıyla,

$$I_x = \{ y\in E : |y| \leq \lambda |x| \text{ olacak şekilde } \lambda \in I\!R \text{ var } \}$$

$$B_x = \{ y\in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y| \}$$

biçiminde elde edilir.

2.1.11. Tanım (sıra birim, zayıf sıra birim)

E Riesz uzayı, $0 < e \in E$ olmak üzere,

(*a*) $I_e = E$ oluyorsa; yani her $x\in E^+$ için $x \leq \lambda e$ olacak şekilde $\lambda \in I\!R^+$ varsa, e ye *E nin sıra birimi*,

(*b*) $B_e = E$ oluyorsa; yani her $x\in E^+$ için $x \wedge n e \uparrow x$ oluyorsa, e ye *E nin zayıf sıra birimi* denir.

• E Riesz uzayının zayıf sıra birimi, aynı zamanda sıra birimidir. E nin her $x > 0$ elemanı, ürettiği idealin sıra birimi; ürettiği bandın zayıf sıra birimidir. Arşimedyan Riesz uzayında $e > 0$ elemanının zayıf sıra birim olması için gerek ve yeter şart $x \perp e$ iken $x = 0$ olmasıdır.

2.1.12. Tanım (Banach örgüsü, soyut M-uzayı)

E Riesz uzayı üzerindeki norm $\|\cdot\|$ olmak üzere,

(a) E bu normla Banach uzayı ve $x, y \in E$ için $|x| \leq |y|$ iken $\|x\| \leq \|y\|$ ($\|\cdot\|$ Riesz normu) oluyorsa, E ye *Banach örgüsü*,

(b) E Banach örgüsü ve $x, y \in E$ için $x \wedge y = 0$ iken $\|x \vee y\| =$ mak $\{ \|x\|, \|y\| \}$ eşitliği sağlanıyorsa, E ye *soyut M-uzayı* denir.

2.1.13. Teorem (Luxemburg and Zaanen, 1971)

E, e sıra birimli Arşimedyan Riesz uzayı olmak üzere,

$$\|x\|_e = \inf \{ \lambda > 0 : |x| \leq \lambda e \}$$

biçiminde tanımlı norm, Riesz normudur (e-düzgün Riesz norm). E içindeki herhangi bir dizinin e-düzgün yakınsaklığı ile göreceli düzgün yakınsaklığı denktir.

2.1.14. Sonuç

Sıra birimli Arşimedyan Riesz uzayının Banach örgüsü olması için gerek ve yeter şart düzgün tam olmasıdır.

2.1.15. Teorem (Aliprantis and Burkinshaw, 1985)

E Banach örgüsünün sıra birimli soyut M-uzayı olması için gerek ve yeter şart, $C(X)$ e Riesz izomorfik olmasıdır (X H-kompakt topolojik uzay).

2.1.16. Teorem (Aliprantis and Burkinshaw,1985)

E Banach örgüsü ve $x \in E^{+}$ olmak üzere, I_x ideali $\|y\|_x = \inf\{\, \lambda > 0 : |y| \le \lambda x \,\}$ $(y \in I_x)$ biçiminde tanımlanan norm ile soyut M-uzayıdır.

2.1.17. Sonuç

E düzgün tam Riesz uzayı, $x \in E^{+}$ olmak üzere, $I_x \approx C(X)$ (Riesz izomorfik) olacak şekilde X H-kompakt topolojik uzayı vardır.

2.2. Sıra Sınırlı Operatörler

2.2.1. Tanım (sıralı aralık, sıra sınırlı küme)

x ve y , E Riesz uzayında $x \le y$ olacak şekilde iki eleman iken $[\, x, y \,] = \{\, z \in E : x \le z \le y \,\}$ kümesine *sıralı aralık* ; E nin bir sıralı aralığı tarafından kapsanan altkümesine de *sıra sınırlı küme* denir.

2.2.2. Tanım (sıra sınırlı operatör, pozitif operatör, aralık koruyan operatör, Riesz homomorfizması, sıra sürekli operatör)

E ve F Riesz uzayları, $T: E \to F$ operatör (lineer dönüşüm) olmak üzere,

(a) E deki her D sıra sınırlı küme için F de $T(D)$ sıra sınırlı küme oluyorsa, T ye *sıra sınırlı operatör* ,

(b) E nin her $x \ge 0$ elemanı için F de $Tx \ge 0$ oluyorsa, T ye *pozitif operatör* ,

(c) E de $x_\alpha \to 0$ *(sıra yakınsak)* iken F de $Tx_\alpha \to 0$ *(sıra yakınsak)* oluyorsa T ye *sıra sürekli operatör*,

(d) Her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$ oluyorsa, T ye *Riesz homomorfizması*,

(e) T pozitif operatör ve her $x \in E^+$ için $T[0,x] = [0,Tx]$ oluyorsa, T ye *aralık koruyan operatör* denir.

• E Riesz uzayından F Riesz uzayına sıra sınırlı operatörlerin kümesi $L_b(E,F)$ ile gösterilir. $T_1, T_2 \in L_b(E,F)$ için

$$T_1 \le T_2 \Leftrightarrow \text{Her } 0 \le x \in E \text{ için } T_1 x \le T_2 x$$

ile tanımlanan sıralama bağıntısıyla $L_b(E,F)$ sıralı vektör uzayıdır. Pozitif operatörler sıra sınırlıdırlar. F Dedekind tam olduğunda, $L_b(E,F)$ Dedekind tam Riesz uzayıdır ve bu durumda her sıra sınırlı operatör, iki pozitif operatörün farkı olarak yazılabilir. Bu tezde her operatör lineer olarak alındığından ve Riesz uzayından Riesz uzayına tanımlandığından, operatörün pozitifliği ile monoton artanlığı denktir.

• $\{x_\alpha\} \subseteq E$ ve $x \in E$ olmak üzere, $T: E \to F$ pozitif operatörünün sıra sürekli olması; $x_\alpha \uparrow x$ iken $Tx_\alpha \uparrow Tx$ olması veya $x_\alpha \downarrow 0$ iken $Tx_\alpha \downarrow 0$ olması ile denktir. T sıra sınırlı operatör olarak alınırsa, T nin sıra sürekli olması da, $x_\alpha \downarrow 0$ iken $\inf\{|Tx_\alpha|\} = 0$ olmasına denktir. E Riesz uzayından F Riesz uzayına sıra sürekli operatörlerin kümesi $L_n(E,F)$ ile gösterilir ve bu küme $L_b(E,F)$ nin altuzayıdır. F Dedekind tam olduğunda $L_n(E,F)$, $L_b(E,F)$ içinde banddır.

• $F = I\!R$ alınırsa $L_b(E, I\!R)$ *E nin sıra duali* , $L_n(E, I\!R)$ *E nin sıra sürekli duali* olarak tanımlanır ve bu dualler sırasıyla $E^{\sim}$ ve $E_n^{\sim}$ ile gösterilir. Sıfırdan farklı her $x \in E$ için $f(x) \neq 0$ olacak şekilde $f \in E^{\sim}$ varsa, $E^{\sim}$ *E nin noktalarını ayıran sıra dual* olarak adlandırılır.

2.2.3. Teorem (Aliprantis and Burkinshaw,1985)

$E^{\sim}$, E Riesz uzayının noktalarını ayıran sıra dual ise, herhangi bir $x \in E$ nin $x \geq 0$ olması için gerek ve yeter şart her $0 \leq f \in E^{\sim}$ için $f(x) \geq 0$ olmasıdır.

2.2.4. Teorem (Luxemburg and Zaanen, 1971)

1) Her Riesz homomorfizması pozitif operatördür.

2) Tersi olan bir operatörün Riesz homomorfizması olması için gerek ve yeter şart kendisinin ve tersinin pozitif operatör olmalarıdır.

2.2.5. Teorem (Aliprantis and Burkinshaw,1985)

E ve F Riesz uzayları, $T : E \to F$ operatör olmak üzere aşağıdakiler denktir:

1) T Riesz homomorfizmasıdır

2) Her $x \in E$ için $T(x^+) = (Tx)^+$

3) Her $x, y \in E$ için $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$

4) $x, y \in E$ için $x \wedge y = 0$ iken $Tx \wedge Ty = 0$

5) Her $x \in E$ için $T|x| = |Tx|$.

2.2.6. Teorem (Aliprantis and Burkinshaw,1985)

E ve G Riesz uzayları, F Dedekind tam Riesz uzayı, $S : E \to G$ pozitif operatör olmak üzere

$$\psi_S : L_b(G,F) \to L_b(E,F)$$
$$T \to \psi_S(T) = TS$$

operatörü için aşağıdakiler sağlanır:

1) S aralık koruyan operatör ise, ψ_S Riesz homomorfizmasıdır.

2) S Riesz homomorfizması ise, ψ_S aralık koruyan operatördür.

2.3. Dikliği Koruyan Operatörler

2.3.1. Tanım (dikliği koruyan operatör)

E ve F Riesz uzayları, $T : E \to F$ operatör olmak üzere, herhangi iki $x, y \in E$ için $x \perp y$ iken $Tx \perp Ty$ oluyorsa, T ye *dikliği koruyan operatör* denir.

2.3.2. Lemma (Aliprantis and Burkinshaw,1985)

E ve F Riesz uzayları olmak üzere $T : E \to F$ operatörünün Riesz homomorfizması olması için gerek ve yeter şart T nin pozitif ve dikliği koruyan operatör olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$): Her $x \in E^+$ için $Tx = T(x \vee 0) = Tx \vee T0 = Tx \vee 0 \geq 0$ olduğundan T pozitiftir. Her $x, y \in E^+$; $|x| \wedge |y| = 0$ için $|Tx| \wedge |Ty| = T|x| \wedge T|y| = 0$ olduğundan T dikliği korur.

($\Leftarrow$): Her $x, y \in E^+$; $x \wedge y = 0$ için $x = |x|$, $y = |y|$ olduğundan, $|x| \wedge |y| = 0$ dır. Bu durumda $0 \leq Tx \wedge Ty \leq |Tx| \wedge |Ty| = 0$ olduğundan T Riesz homomorfizmasıdır.

• Bir Riesz uzayı üzerinde tanımlanan dikliği koruyan operatörlerin kümesi vektör uzayı olmak zorunda değildir.

2.3.3. Örnek

$S, T : C[0,1] \to C[0,1]$; $S(f) = f(0)\,1$, $T(f) = f(1)\,1$ ($1 \in C[0,1]$ ve her $x \in [0,1]$ için $1(x) = 1$) olsun. Her $f, g \in C[0,1]$ ve her $x \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} S(f \vee g)(x) &= (f \vee g)(0)\,1(x) = \text{mak}\,\{f(0), g(0)\} \\ &= \text{mak}\,\{f(0)\,1(x), g(0)\,1(x)\} = (f(0)\,1 \vee g(0)\,1)(x) \\ &= (S(f) \vee S(g))(x) \end{aligned}$$

olduğundan S ve benzer olarak T Riesz homomorfizmasıdır. 2.3.2 Lemmasından S ve T dikliği koruyan operatörlerdir.

$$f, g \in C[0,1]\,;\ f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < \frac{2}{3} \text{ ise} \\ x - \frac{2}{3} & , \ x \geq \frac{2}{3} \text{ ise} \end{cases} \ , \ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} - x & , \ x < \frac{1}{3} \text{ ise} \\ 0 & , \ x \geq \frac{1}{3} \text{ ise} \end{cases}$$

için $|f| \wedge |g| = 0$ bulunur. Ancak,

$$(S+T)|f| \wedge (S+T)|g| = (|f|(0)+|f|(1))\mathbf{1} \wedge (|g|(0)+|g|(1))\mathbf{1}$$
$$= (|f(0)|+|f(1)|)\mathbf{1} \wedge (|g(0)|+|g(1)|)\mathbf{1}$$
$$= \frac{1}{3}\mathbf{1} \neq 0$$

olduğundan $S+T$ dikliği koruyan operatör değildir.

• Tezin buradan sonraki kısımında Riesz uzayları, Arşimedyan olarak kabul edilecektir.

2.3.4. Lemma (Aliprantis and Burkinshaw,1985)

E ve F Riesz uzayları olmak üzere $T: E \to F$ sıra sınırlı ve dikliği koruyan operatör ise, her $x,y \in E^+$ için $(Tx)^+ \wedge (Ty)^- = 0$ dır.

İspat

$x,y \in E^+$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$; $0<\varepsilon<1$ olsun. T sıra sınırlı olduğundan her $z \in E$; $0 \le z \le x$ için $|Tz| \le w$ olacak şekilde $w \in F$ vardır.

$\Lambda = \{\ \lambda \in \mathbb{R}^+ : [\,(Tx)^+ \wedge (Ty)^- - \varepsilon w\,]^+ \perp T((\lambda x - y)^+)\ \}$ kümesi alınsın.

(*i*) $0 \le y = (y-\varepsilon x)+\varepsilon x \le (y-\varepsilon x)^+ + \varepsilon x$ olduğundan (Aliprantis, 1985; Thm. 1.9.) $0 \le y_1 \le (y-\varepsilon x)^+$, $0 \le y_2 \le \varepsilon x$ ve $y = y_1 + y_2$ olacak şekilde $y_1, y_2 \in E$ vardır. $|T(\varepsilon^{-1} y_2)| = \varepsilon^{-1}|Ty_2| \le w$ olduğundan $|Ty_2| \le \varepsilon w$ dir. Buradan

$$[\,(Tx)^+ \wedge (Ty)^- - \varepsilon w\,]^+ \le (|Ty| - \varepsilon w)^+ \le (|Ty_1| + |Ty_2| - \varepsilon w)^+ \le |Ty_1|$$

bulunur. Her δ; $0 \le \delta \le \varepsilon$ için

$$0 \le y_1 \wedge (\delta x - y)^+ \le (y-\varepsilon x)^+ \wedge (\varepsilon x - y)^+ = (y-\varepsilon x)^+ \wedge (y-\varepsilon x)^- = 0$$

olduğundan $y_1 \perp (\delta x - y)^+$ dir. T dikliği koruduğundan $Ty_1 \perp T(\delta x - y)^+$ dir. Bu durumda

$$[(Tx)^+ \wedge (Ty)^- - \varepsilon w]^+ \perp T(\delta x - y)^+$$

olduğundan $\delta \in \Lambda$ dır. Böylece $[0,\varepsilon] \subseteq \Lambda$ dır.

(*ii*) $\lambda \in \Lambda ; \lambda \geq \varepsilon$, $0 \leq \delta \leq \varepsilon^2$ ve $\alpha = \text{mak}\{1, \lambda^{-1}\}$ olsun. $\alpha \geq 1$, $\alpha\lambda \geq 1$ ve herhangi bir Riesz uzayında $u^+ \wedge v^+ = (u \wedge v) \vee 0 \leq 2(u \wedge v)^+ \leq (u+v)^+$ olduğundan

$$\begin{aligned}(Tx)^+ \wedge (Ty)^- &\leq (\alpha\lambda Tx)^+ \wedge (\alpha Ty)^- \\ &= \alpha[(T\lambda x)^+ \wedge (Ty)^-] \\ &= \alpha[(T\lambda x)^+ \wedge (-Ty)^+] \\ &\leq \alpha[T(\lambda x - y)]^+ \\ &\leq \alpha[|T(\lambda x - y)^+| + |T(y - \lambda x)^+|]\end{aligned}$$

dir. $y - \lambda x = y - (\lambda + \delta)x + \delta x \leq [y - (\lambda+\delta)x]^+ + \delta x$ olduğundan $(y - \lambda x)^+ \leq [y - (\lambda+\delta)x]^+ + \delta x$ bulunur. (Aliprantis, 1985; Thm.1.9.) dan $0 \leq y_1 \leq [y-(\lambda+\delta)x]^+$, $0 \leq y_2 \leq \delta x$ ve $(y - \lambda x)^+ = y_1 + y_2$ olacak şekilde y_1, $y_2 \in E$ vardır. Bu durumda $|T(y - \lambda x)^+| \leq |Ty_1| + |Ty_2|$ dir. Ayrıca $\alpha\varepsilon \leq 1$ ve $0 \leq y_2 \leq \delta x \leq \varepsilon^2 x$ olduğundan, $\alpha|Ty_2| \leq \alpha\varepsilon^2 w \leq \varepsilon w$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}[(Tx)^+ \wedge (Ty)^- - \varepsilon w]^+ &\leq [\alpha|T(\lambda x - y)^+| + \alpha|Ty_1| + \alpha|Ty_2| - \varepsilon w]^+ \\ &\leq \alpha|T(\lambda x - y)^+| + \alpha|Ty_1|\end{aligned}$$

bulunur. $\lambda \in \Lambda$ ve herhangi bir Riesz uzayında $u \perp v$ ve $\alpha \in I\!R$ için $u \perp \alpha v$ olduğundan, $[(Tx)^+ \wedge (Ty)^- - \varepsilon w]^+ \perp \alpha|T(\lambda x - y)^+|$ dır. Bu durumda

$$[(Tx)^+ \wedge (Ty)^- - \varepsilon w]^+ = [(Tx)^+ \wedge (Ty)^- - \varepsilon w]^+ \wedge (\alpha|T(\lambda x - y)^+| + \alpha|Ty_1|)$$

$$\leq [(Tx)^+ \wedge (Ty)^- - \varepsilon w]^+ \wedge \alpha |Ty_1|$$

$$\leq \alpha |Ty_1|$$

bulunur. Diğer yandan $0 \leq y_1 \wedge ((\lambda+\delta)x-y)^+ \leq (y-(\lambda+\delta)x)^+ \wedge ((\lambda+\delta)x-y)^+ = 0$ olduğundan

$$y_1 \perp ((\lambda+\delta)x-y)^+ \Rightarrow Ty_1 \perp T((\lambda+\delta)x-y)^+$$

dir ve dolayısıyla $[(Tx)^+ \wedge (Ty)^- - \varepsilon w]^+ \perp T((\lambda+\delta)x-y)^+$ olduğundan, her δ; $0 \leq \delta \leq \varepsilon^2$ için $\lambda+\delta \in \Lambda$ dir. Böylece her λ; $\lambda \geq \varepsilon$ için $[\lambda, \lambda+\varepsilon^2] \subseteq \Lambda$ dir.

$[0,\varepsilon] \cup [\varepsilon, \varepsilon+\varepsilon^2] = [0, \varepsilon+\varepsilon^2] \subseteq \Lambda$ ve $[0,\varepsilon+\varepsilon^2] \cup [\varepsilon+\varepsilon^2, (\varepsilon+\varepsilon^2)+\varepsilon^2] = [0, \varepsilon+2\varepsilon^2] \subseteq \Lambda$ olduğu göz önüne alınırsa, tümevarımla her $n \in I\!N$ için $[0, \varepsilon+n\varepsilon^2] \subseteq \Lambda$ dır. Sonuç olarak, $\Lambda = [0,\infty)$ bulunur.

T nin sıra sınırlılığından her $z \in E$; $0 \leq z \leq y$ için $|Tz| \leq v$ olacak şekilde $v \in F$ vardır. Her $\delta \in I\!R$; $\delta > 0$ için $x = (x-\delta y)^+ + x \wedge \delta y$ olduğundan

$$\begin{aligned} [(Tx)^+ \wedge (Ty)^- - \varepsilon w]^+ &\leq (Tx)^+ \\ &\leq |T(x-\delta y)^+| + |T(x \wedge \delta y)| \\ &= |T(x-\delta y)^+| + \delta |T(\delta^{-1} x \wedge y)| \\ &\leq |T(x-\delta y)^+| + \delta v \end{aligned}$$

dir. $\delta^{-1} \in \Lambda$ olduğundan $[(Tx)^+ \wedge (Ty)^- - \varepsilon w]^+ \perp \delta T(\delta^{-1} x \wedge y)^+ = T(x \wedge \delta y)^+$ dır. Bu durumda her $\delta \in I\!R$; $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} [(Tx)^+ \wedge (Ty)^- - \varepsilon w]^+ &= [(Tx)^+ \wedge (Ty)^- - \varepsilon w]^+ \wedge (|T(x-\delta y)^+| + \delta v) \\ &\leq [(Tx)^+ \wedge (Ty)^- - \varepsilon w]^+ \wedge \delta v \\ &\leq \delta v \end{aligned}$$

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

olduğundan, F nin Arşimedyanlığından $[(Tx)^{+} \wedge (Ty)^{-} - \varepsilon w]^{+} = 0$ dır. Son eşitlik, $0 < \varepsilon < 1$ olacak şekildeki her $\varepsilon \in I\!R$ için doğru olduğundan, yine F nin Arşimedyanlığından $(Tx)^{+} \wedge (Ty)^{-} = 0$ bulunur.

2.3.5. Teorem (Aliprantis and Burkinshaw,1985)

E ve F Riesz uzayları, $T{:}E \to F$ sıra sınırlı operatör olmak üzere, aşağıdakiler denktir:

1) T dikliği koruyan operatördür

2) $|T|$ vardır, her $x \in E$ için $|T||x| = |Tx| = |T|x||$ dir ve $|T|$ Riesz homomorfizmasıdır

3) $T = T^{+} - T^{-}$ dir, T^{+} ve T^{-} Riesz homomorfizmalarıdır, her $x \in E^{+}$ için $T^{+}x = (Tx)^{+}$, $T^{-}x = (Tx)^{-}$ ve her $x \in E$ için $T^{+}x \perp T^{-}x$ dir.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2):

(i) $x, y \in E$; $0 \leq y \leq x$ için 2.1.4. teoreminden

$$Tx = T(x-y) + Ty = [(T(x-y))^{+} + (Ty)^{+}] - [(T(x-y))^{-} + (Ty)^{-}]$$

ve

$$\begin{aligned} 0 &\leq [(T(x-y))^{+} + (Ty)^{+}] \wedge [(T(x-y))^{-} + (Ty)^{-}] \\ &\leq (T(x-y))^{+} \wedge (T(x-y))^{-} + (T(x-y))^{-} \wedge (Ty)^{+} \\ &\quad + (T(x-y))^{+} \wedge (Ty)^{-} + (Ty)^{+} \wedge (Ty)^{-} = 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$|Tx| = (T(x-y))^+ + (Ty)^+ + (T(x-y))^- + (Ty)^-$$

$$= |T(x-y)| + |Ty| \geq |Ty|$$

dir.

(*ii*) $x, y \in E$; $|y| \leq x$ olsun. $Ty^+ \perp Ty^-$ olduğundan ve (*i*) den

$$|Ty| = |Ty^+ - Ty^-| = |Ty^+ + Ty^-| \leq |T|y|| \leq |Tx|$$

bulunur. Böylece her $x \in E^+$ için $|Tx| = \sup\{ |Ty| : |y| \leq x \}$ dir. (Aliprantis, 1985; Thm.1.10.) $|T|$ vardır ve her $x \in E^+$ için $|T|(x) = |Tx|$ dir. $x \in E$ için $Tx^+ \perp Tx^-$ olduğundan

$$|T|x|| = |T||x| = |T|(x^+) + |T|(x^-) = |Tx^+| + |Tx^-|$$

$$= |Tx^+| \vee |Tx^-| + |Tx^+| \wedge |Tx^-| = |Tx^+ - Tx^-| = |Tx|$$

dir. Ayrıca $x, y \in E$; $x \wedge y = 0$ için $|T|(x) \wedge |T|(y) = |Tx| \wedge |Ty| = 0$ olduğundan, $|T|$ Riesz homomorfizmasıdır.

(2) $\Rightarrow$ (3): $R = \frac{1}{2}(|T| + T)$ ve $S = \frac{1}{2}(|T| - T)$ alınırsa, $T = R - S$ ve bu eşitliğin böyle yazılışı

$$R \wedge S = \frac{1}{2}[(|T| + T) \wedge (|T| - T)] = \frac{1}{2}[|T| + (T \wedge -T)]$$

$$= \frac{1}{2}[|T| - (-T \vee T)] = 0$$

olduğundan tektir, yani $T^+ = R$ ve $T^- = S$ dir. $x, y \in E$; $x \wedge y = 0$ için

$$0 \leq T^+x \wedge T^+y \leq |T|x \wedge |T|y = 0$$

olduğundan T^+ ve benzer olarak T^- Riesz homomorfizmasıdır. Her $x \in E^+$ için

$$T^{+}x = [\frac{1}{2}(|T|+T)](x) = \frac{1}{2}(|T|x+Tx) = \frac{1}{2}(|Tx|+Tx)$$

$$= \frac{1}{2}((Tx \vee -Tx)+Tx) = \frac{1}{2}(2Tx \vee 0) = (Tx)^{+}$$

dir ve benzer olarak $T^{-}x = (Tx)^{-}$ dir. Ayrıca, 2.2.5. teoreminden her $x \in E$ için

$$|T^{+}x| \wedge |T^{-}x| = T^{+}|x| \wedge T^{-}|x| = (T|x|)^{+} \wedge (T|x|)^{-} = 0$$

olduğundan $T^{+}x \perp T^{-}x$ dir.

(3) $\Rightarrow$ (1): $x, y \in E$; $x \perp y$ için

$$\begin{aligned}
0 \leq |Tx| \wedge |Ty| &= |T^{+}x - T^{-}x| \wedge |T^{+}y - T^{-}y| \\
&= (|T^{+}x| \vee |T^{-}x|) \wedge (|T^{+}y| \vee |T^{-}y|) \\
&= (T^{+}|x| \vee T^{-}|x|) \wedge (T^{+}|y| \vee T^{-}|y|) \\
&= (T^{+}|x| \wedge T^{+}|y|) \vee (T^{+}|x| \wedge T^{-}|y|) \vee (T^{-}|x| \wedge T^{+}|y|) \vee (T^{-}|x| \wedge T^{-}|y|) \\
&= [(T|x|)^{+} \wedge (T|y|)^{-}] \vee [(T|x|)^{-} \wedge (T|y|)^{+}] = 0
\end{aligned}$$

olduğundan T dikliği korur.

2.4. Orthomorfizmalar ve Özellikleri

2.4.1. Tanım (merkez operatörü, ideal koruyan operatör, band koruyan operatör, orthomorfizma)

E Riesz uzayı, $T: E \rightarrow E$ operatör olmak üzere,

(a) Her $x \in E$ ve bir $\lambda \in I\!R^+$ için $|Tx| \leq \lambda |x|$ oluyorsa, T ye *merkez operatörü*,

(b) Her $x \in E$ için $|Tx| \leq \lambda_x |x|$ olacak şekilde $\lambda_x \in I\!R^+$ varsa, T ye *ideal koruyan operatör*,

(c) Her $x, y \in E$ için $x \perp y$ iken $Tx \perp y$ oluyorsa, T ye *band koruyan operatör*,

(d) T sıra sınırlı operatör ve band koruyan operatör oluyorsa, T ye *orthomorfizma* denir.

• $T : E \to E$ operatörünün ideal koruyan operatör olması, her $x \in E$ için $Tx \in I_x$ olması ile; band koruyan operatör olması, her $x \in E$ için $Tx \in B_x$ olması ile denktir. Merkez operatörü, ideal koruyan operatör; ideal koruyan operatör, sıra sınırlı ve band koruyan operatör; band koruyan operatör, dikliği koruyan operatördür. E Riesz uzayı üzerinde tanımlanan merkez operatörlerinin, ideal koruyan operatörlerin ve orthomorfizmaların kümeleri sırasıyla, $Z(E)$, $Con(E)$ ve $Orth(E)$ ile gösterilir. $Z(E) \subseteq Con(E) \subseteq Orth(E) \subseteq L_b(E)$ dir. E Dedekind tam ise, $Z(E)$, $Con(E)$ ve $Orth(E)$ Dedekind tam Riesz uzaylarıdır. Bu durumda $I \in L_b(E)$ özdeşlik operatörü $Orth(E)$ nin zayıf sıra birimi, $Z(E)$ nin sıra birimi olduğundan, $L_b(E)$ içinde bu operatörün ürettiği band $Orth(E)$, ürettiği ideal $Z(E)$ dir ve ayrıca $Con(E)$ idealdir.

2.4.2. Teorem (Zaanen, 1983; Aliprantis and Burkinshaw, 1985)

E Arşimedyan Riesz uzayı olmak üzere, $Orth(E)$ noktasal sıralama altında Arşimedyan Riesz uzayıdır.

İspat

$Orth(E)$ sıralı vektör uzayıdır. $T \in Orth(E)$ için 2.3.5. teoreminden $|T|$ var ve her $x \in E$ için $|T||x| = |Tx|$ olduğundan $|T|$ sıra sınırlıdır. Ayrıca $x \perp y$ iken

$$0 \leq ||T|x| \wedge |y| \leq ||T||x|| \wedge |y| = |T||x| \wedge |y| = |Tx| \wedge |y| = 0$$

olduğundan $|T| \in Orth(E)$ dir. $S, T \in Orth(E)$ için

$$S \vee T = \frac{1}{2}(S + T + |S - T|) \quad \text{ve} \quad S \wedge T = \frac{1}{2}(S + T - |S - T|)$$

eşitlikleri sağlandığından $Orth(E)$ Riesz uzayıdır ve her $x \in E^+$ için $(S \vee T)(x) = S(x) \vee T(x)$ ve $(S \wedge T)(x) = S(x) \wedge T(x)$ dir. $T \in Orth(E)^+$ iken, her $n \in I\!N^+$ için

$$(n^{-1}T \wedge 0)(x) = (n^{-1}Tx) \wedge 0 = T(n^{-1}x) \wedge 0 = 0$$

olduğundan $Orth(E)$ Arşimedyandır.

2.4.3. Teorem (Aliprantis and Burkinshaw,1985)

Bir (Arşimedyan) Riesz uzayı üzerindeki her orthomorfizma sıra süreklidir.

İspat

E Riesz uzayı , $T: E \to E$ pozitif orthomorfizma ve E de $x_\alpha \downarrow 0$ olsun. Her α için $0 \leq x_\alpha \leq x$ olacak şekilde $x \in E$ ve $0 \leq y \leq Tx_\alpha \leq Tx$ olacak şekilde $y \in E$

alınırsa, her $\varepsilon > 0$ için $(x_\alpha - \varepsilon x)^+ \wedge (x_\alpha - \varepsilon x)^- = 0$ ve T orthomorfizma olduğundan

$$0 \le (y - \varepsilon Tx)^+ \wedge (x_\alpha - \varepsilon x)^- \le T(x_\alpha - \varepsilon x)^+ \wedge (x_\alpha - \varepsilon x)^- = 0$$

dır. Diğer taraftan, her $\varepsilon > 0$ ve her $\alpha \prec \beta$ için $(x_\alpha - \varepsilon x)^- \le (x_\beta - \varepsilon x)^-$ olduğundan $(y - \varepsilon Tx)^+ \wedge (x_\alpha - \varepsilon x)^- \underset{\alpha}{\uparrow}$ dir ve ayrıca

$$(x_\alpha - \varepsilon x)^- = (\varepsilon x - x_\alpha)^+ \le \varepsilon x$$

$$(y - \varepsilon Tx)^+ \wedge (x_\alpha - \varepsilon x)^- \le z \Rightarrow (y - \varepsilon Tx)^+ \wedge \varepsilon x \le z$$

olduğundan,

$$(y - \varepsilon Tx)^+ \wedge (x_\alpha - \varepsilon x)^- \underset{\alpha}{\uparrow} (y - \varepsilon Tx)^+ \wedge \varepsilon x$$

dir. Böylece, her $\varepsilon > 0$ için $(y - \varepsilon Tx)^+ \wedge \varepsilon x = 0$ bulunur. $\varepsilon \ge 1$ için $0 \le (y - \varepsilon Tx)^+ \wedge x \le (y - \varepsilon Tx)^+ \wedge \varepsilon x = 0$ ve bununla beraber $0 < \varepsilon < 1$ için $(y - \varepsilon Tx)^+ \wedge x \le \varepsilon^{-1}(y - \varepsilon Tx)^+ \wedge x$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için $(y - \varepsilon Tx)^+ \wedge x = 0$ dır. E nin Arşimedyanlığından $y \wedge x = 0$, dolayısıyla $y \wedge Tx = 0$ ve buradan $Tx_\alpha \downarrow 0$ elde edilir.

Herhangi bir $T \in Orth(E)$ dikliği koruyan operatör olduğundan, 2.3.5. teoreminden $T = T^+ - T^-$ dir ve yukarıda yapılanlardan T^+, T^- sıra sürekli olduğundan, T de sıra süreklidir.

• E ve F Riesz uzayları olmak üzere, $T : E \to F$ sıra sınırlı operatörü için $|T|$ varken, $N_T = \{x \in E : |T||x| = 0\}$ olsun. $|x| \le |y|$ ve $y \in N_T$ için $0 \le |T||x| \le |T||y| = 0$ olduğundan $x \in N_T$ dir. $x, y \in N_T$ için $|T|(|x| + |y|) = |T||x| + |T||y| = 0$ olduğundan $|x| + |y| \in N_T$ ve bununla beraber $|x + y| \le |x| + |y|$ olduğundan $x + y \in N_T$ dir. $\lambda \in I\!R$, $x \in N_T$ için $|T||\lambda x| =$

$|T|(|\lambda||x|) = |\lambda||T||x| = 0$ olduğundan $\lambda x \in N_T$ dir. Böylece N_T, E içinde idealdir. N_T, *T nin null ideali* olarak bilinir.

2.4.4. Tanım (Dedekind tamlayan)

E Arşimedyan Riesz uzayı, $\hat{E}$ Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere; E, $\hat{E}$ nın bir (yine E olarak tanımlanan) Riesz altuzayına Riesz izomorfik ve her $x \in \hat{E}$ için $x = \sup\{ y \in E : y \leq x \} = \inf\{ z \in E : x \leq z \}$ oluyorsa, $\hat{E}$ ya *E nin Dedekind tamlayanı* denir.

2.4.5. Teorem (Zaanen, 1983; Aliprantis and Burkinshaw, 1985)

E Riesz uzayı üzerindeki herhangi bir $T \in Orth(E)$ bir tek $\hat{T} \in Orth(\hat{E})$ genişlemesine sahiptir.

2.4.6. Teorem (Aliprantis and Burkinshaw, 1985)

E Arşimedyan Riesz uzayı ise, $Orth(E) = \{ T \in Orth(\hat{E}) : T(E) \subseteq E \}$ eşitliği sağlanır.

2.4.7. Teorem (Zaanen, 1983; Aliprantis and Burkinshaw, 1985)

Herhangi bir orthomorfizmanın çekirdeği banddır. Özellikle bir küme üzerinde iki orthomorfizma eşit ise, o kümenin ürettiği band üzerinde de eşittir.

İspat

$T \in Orth(E)$ olsun. Orthomorfizmalar dikliği koruduğundan 2.3.5. teoreminden $ÇekT = N_T$ dir. T sıra sürekli olduğundan, $\{x_\alpha\} \subseteq ÇekT$; $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ için $Tx_\alpha \to Tx$ *(sıra yakınsak)* ve buradan $x \in ÇekT$; yani $ÇekT$ sıra kapalı bulunur. Böylece $ÇekT$ banddır.

$S, T \in Orth(E)$ ve E nin D altkümesi üzerinde $S = T$ olsun. $R = S - T$ orthomorfizması D üzerinde sıfır olduğundan $D \subseteq ÇekR$ dir. $ÇekR$ band olduğundan D nin ürettiği bandı kapsar. Böylece D nin ürettiği band üzerinde de $S = T$ bulunur.

2.4.8. Sonuç

e, E Riesz uzayının zayıf sıra birimi ve T, $S \in Orth(E)$ olmak üzere, $Te = Se$ iken $T = S$ dir.

2.4.9. Önerme (Pagter, 1981; Aliprantis and Burkinshaw, 1985)

E Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere, $x, y \in E$ için $0 \leq x \leq y$ iken $Tx = y$ ve $0 \leq T \leq I$ olacak şekilde $T \in Orth(E)$ vardır.

2.4.10. Lemma (Luxemburg and Schep, 1978)

E ve F Dedekind tam Riesz uzayları $T \in L_b(E,F)$ sıra sürekli operatör olmak üzere, aşağıdakiler denktir:

1) $|T|$ aralık koruyan operatördür.

2) Her $R: E \to F$; $0 \leq R \leq |T|$ pozitif operatörü için $0 \leq S \leq I$ ve $R = |T| \circ S$ olacak şekilde $S \in Orth(E)$ vardır.

2.4.11. Teorem (Zaanen, 1983)

E normlu Riesz uzayı (E üzerindeki norm, Riesz norm) ve $T \in Orth(E)$ iken T nin norm sınırlı olması için gerek ve yeter şart $T \in Z(E)$ olmasıdır. E Banach örgüsü ise, $Orth(E) = Z(E)$ dir.

2.5. f- Cebirleri ve Özellikleri

2.5.1. Tanım (Riesz cebiri, f- cebiri)

(a) A Riesz uzayı ve cebir olmak üzere, her $x, y \in A^+$ için $xy \in A^+$ oluyorsa, A ya *Riesz cebiri* denir.

(b) A Riesz cebiri olmak üzere, $x \perp y$ iken her $z \in A$ için $xz \perp y$ ve $zx \perp y$ oluyorsa, A ya *f-cebiri* denir.

• A f-cebiri olmak üzere, $x, y \in A^+$ için $x \wedge y = 0$ iken $xy \wedge y = 0$ olduğundan $xy = xy \wedge xy = 0$ dır. Herhangi iki $x, y \in A$ için $xy = (x^+ - x^-)(y^+ - y^-) = x^+y^+ - x^-y^+ - x^+y^- + x^-y^-$ olduğundan, $x \perp y$ iken $xy = 0$ ve benzer olarak $yx = 0$ dır.

2.5.2. Teorem (Zaanen, 1983; Aliprantis and Burkinshaw, 1985)

Her Arşimedyan f-cebiri değişmelidir.

İspat

A Arşimedyan f-cebiri olmak üzere $y \in A$ ve $S, T: A \to A$; $S(x) = xy$, $T(x) = yx$ olsun. S ve T nin orthomorfizma oldukları açıktır. $S(y) = y^2 = T(y)$ olduğundan y nin ürettiği band üzerinde ve dolayısıyla y nin ürettiği ideal üzerinde $S = T$ dir. $x \in I_y^d$ için $S(x) = T(x) = 0$ olduğundan $I_y \oplus I_y^d$ sıra yoğun ideali (Aliprantis, 1985; Thm.3.3.) üzerinde ve böylece A üzerinde $S = T$ dir. Yapılanlar her $y \in A$ için doğru olduğundan A değişmelidir.

• f-cebirinde her x için $x^2 = (x^+)^2 + (x^-)^2 \geq 0$ dır. Arşimedyan f-cebirinin e birim elemanı $e = e^2 \geq 0$ ın görüşünde pozitiftir. Diğer taraftan $e \wedge x = 0$ iken $x = x \wedge x = xe \wedge x = 0 \wedge x = 0$ olduğundan e zayıf sıra birimdir.

2.5.3. Teorem (Zaanen, 1983; Aliprantis and Burkinshaw, 1985)

E Arşimedyan Riesz uzayı olmak üzere, $Orth(E)$ bileşke işlemi altında I özdeşlik operatörünü birim kabul eden Arşimedyan f-cebiridir.

İspat

2.4.2. Teoreminden $Orth(E)$ Arşimedyan Riesz uzayıdır. $Orth(E)$ nin, üzerindeki çarpım bileşke işlemi olarak alındığında Riesz cebiri olduğu açıktır. $R, S, T \in Orth(E)^+$ için $S \wedge T = 0$ iken her $x \in E^+$ için

$$Sx \wedge Tx = (S \wedge T)(x) = 0 \Rightarrow (RS \wedge T)(x) = RSx \wedge Tx = 0$$

ve

$$0 \leq (SR \wedge T)(x) = SRx \wedge Tx \leq S(Rx \vee x) \wedge T(Rx \vee x) = (S \wedge T)(Rx \vee x) = 0$$

olduğundan $Orth(E)$ f-cebiridir.

• $S, T \in Orth(E)$ için $ST = 0$ iken

$$0 \leq (|S| \wedge |T|)^2 = (|S| \wedge |T|)(|S| \wedge |T|) \leq |S||T| = |ST| = 0$$

olduğundan $S \perp T$ dir. Böylece $S, T \in Orth(E)$ olmak üzere, $ST = 0$ olması için gerek ve yeter şart $S \perp T$ olmasıdır.

2.5.4. Teorem (Aliprantis and Burkinshaw, 1985)

A birimli Arşimedyan f-cebiri olmak üzere,

$$\wp : A \to Orth(A) \ ; \ \wp_u(x) = ux$$
$$u \to \wp_u$$

operatörü f-cebir izomorfizmasıdır. E Riesz uzayı için $Orth(E) \approx Orth(Orth(E))$ olur.

İspat

$\wp$ nin lineer ve çarpmayı koruyan dönüşüm olduğunu görmek kolaydır. e, A nın birim elemanı olsun. $S \in Orth(A)$ için $\wp_{S(e)}(e) = S(e)e = S(e)$ ve bununla beraber $B_e = A$ olduğundan A üzerinde $\wp_{S(e)} = S$, yani $\wp$ örtendir. $u_1, u_2 \in A$ için $\wp_{u_1} = \wp_{u_2}$ olmak üzere,

$$\wp_{u_1}(e) = \wp_{u_2}(e) \Rightarrow u_1 e = u_2 e \Rightarrow u_1 = u_2$$

olduğundan $\wp$ birebirdir. $u \in A$ için $u \geq 0$ ise, her $x \in A^+$ için $\wp_u(x) = ux \geq 0$ olduğundan $\wp_u \geq 0$ olması ve bununla beraber $\wp_u \geq 0$ ise, $u = u\,e = \wp_u(e)$ olduğundan $u \geq 0$ olması $\wp$ nin Riesz homomorfizması olduğunu gösterir. Sonuç olarak $\wp$ f-cebir izomorfizmasıdır.

3. İLİŞKİ OPERATÖRLERİ

3.1. Lokal Konveks-Solid Topoloji

3.1.1. Tanım (konveks küme, dengeli küme, soğuran küme)

X vektör uzayının altkümesi D olmak üzere,

(a) $x, y \in D$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olacak şekilde $\lambda \in I\!R$ için $\lambda x + (1-\lambda) y \in$
oluyorsa, D ye *konveks küme* ,

(b) $x \in D$ ve $|\lambda| \leq 1$ olacak şekilde $\lambda \in I\!R$ için $\lambda x \in D$ oluyorsa, D y
dengeli küme ,

(c) $x \in X$ için $\lambda x \in D$ olacak şekilde $\lambda \in I\!R$; $\lambda > 0$ varsa, D ye *emen küm*
denir.

3.1.2. Tanım (iki kümeyi ayıran ve kesin ayıran lineer fonksiyoneller)

X vektör uzayının boştan farklı altkümeleri C ve D , X üzerinde tanıml
lineer fonksiyonel f olmak üzere,

(a) Her $x \in C$ ve $y \in D$ için $f(x) \geq z$ ve $f(y) \leq z$ olacak şekilde $z \in I\!R$ varsa
f *C ile D yi ayırır* ,

(b) Her $x \in C$ ve $y \in D$ için $f(x) \geq z + \varepsilon$ ve $f(y) \leq z$ olacak şekilde $z \in I\!R$ v
$\varepsilon > 0$ sayısı varsa, f *C ile D yi kesin ayırır* denir.

3.1.3. Tanım (lineer topoloji, topolojik vektör uzayı)

X vektör uzayı, τ X üzerinde topoloji olmak üzere,

$$X \times X \to X \quad , \quad I\!R \times X \to X$$
$$(x,y) \to x+y \qquad (\lambda,x) \to \lambda x$$

fonksiyonları sürekli ise, τ ya *lineer topoloji*, (X,τ) ya *topolojik vektör uzayı* denir.

3.1.4. Tanım (lokal konveks uzay, lokal solid Riesz uzayı ve lokal konveks-solid Riesz Uzayı)

(a) X vektör uzayı üzerindeki τ lineer topolojisi konveks kümeleri içeren sıfırda bir tabana sahip ise, τ ya *lokal konveks topoloji*, (X,τ) ya *lokal konveks uzay* denir.

(b) E Riesz uzayı üzerindeki τ lineer topolojisi solid kümeleri içeren sıfırda bir tabana sahip ise, τ ya *lokal solid topoloji*, (E,τ) ya *lokal solid Riesz uzayı* denir.

(c) E Riesz uzayı üzerindeki τ lineer topolojisi, lokal konveks ve lokal solid ise, τ ya *lokal konveks-solid topoloji*, (E,τ) ya *lokal konveks-solid Riesz uzayı* denir.

3.1.5. Teorem (Aliprantis and Burkinshaw, 1985)

(X,τ) lokal konveks uzayının ayrık konveks altkümeleri C ve D olsun. C τ-kompakt ve D τ-kapalı ise, C ile D yi kesin ayıran f τ-sürekli lineer fonksiyoneli vardır. (Yani, her $x \in C$ ve $y \in D$ için $f(x) \leq z < z+\varepsilon \leq f(y)$ olacak şekilde $z \in I\!R$ ve $\varepsilon > 0$ sayısı vardır.)

3.1.6. Tanım (yarınorm)

X vektör uzayı olmak üzere, $\rho : X \to I\!R$ dönüşümü

(a) Her $x \in X$ için $\rho(x) \geq 0$

(b) Her $x, y \in X$ için $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

(c) Her $\lambda \in I\!R$ ve her $x \in X$ için $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$

özelliklerini sağlıyorsa, ρ ye X üzerinde *yarınorm* denir.

3.1.7. Tanım (açık küme)

$\mathcal{P}$, X vektör uzayı üzerindeki yarınormların bir ailesi ve $U \subseteq X$ olsun. Her $x_0 \in U$ için $\bigcap_{i=1}^{n} \{ x \in X : \rho_i(x - x_0) < \varepsilon_i \} \subseteq U$ olacak şekilde $\rho_1, \ldots, \rho_n \in \mathcal{P}$ ve $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ varsa, U ya *açık küme* denir.

• Bu şekilde tanımlanan açık kümelerin ailesi τ olarak alınırsa, τ ya $\mathcal{P}$ *yarınormlar ailesi ile belirlenmiş topoloji* denir. τ topolojisinin Hausdorff olması için gerek ve yeter şart $\bigcap_{\rho \in \mathcal{P}} \{ x \in X : \rho(x) = 0 \} = \{0\}$ olmasıdır.

3.1.8. Teorem (Cristescu, 1977)

$\mathcal{P}$ yarınormlar ailesi ile belirlenen X vektör uzayı üzerindeki topoloji lineer ve lokal konvekstir.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

3.1.9. Tanım (Riesz yarınormu)

E Riesz uzayı üzerindeki ρ yarınormu, her $x, y \in E$ için $|x| \leq |y|$ iken $\rho(x) \leq \rho(y)$ özelliğini sağlıyorsa, ρ ye *Riesz yarınormu* denir.

3.1.10. Önerme (Aliprantis and Burkinshaw, 1985)

E Riesz uzayı üzerindeki ρ yarınormunun Riesz yarınormu olması için gerek ve yeter şart U_ρ nin solid küme olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$): $|y| \leq |x|$ ve $x \in U_\rho$ olsun. Bu durumda $\rho(y) \leq \rho(x) \leq 1$ olduğundan $y \in U_\rho$ dir.

($\Leftarrow$): $x, y \in E$ için $|x| \leq |y|$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|(\rho(y)+\varepsilon)^{-1} x| \leq |(\rho(y)+\varepsilon)^{-1} y| \text{ ve } (\rho(y)+\varepsilon)^{-1} y \in U_\rho$$

olduğundan $(\rho(y)+\varepsilon)^{-1} y \in U_\rho$ dir. Buradan her $\varepsilon > 0$ için $\rho(x) < \rho(y) + \varepsilon$ ve böylece $\rho(x) \leq \rho(y)$ bulunur.

3.1.11. Önerme (Aliprantis and Burkinshaw, 1985)

E sıra duali noktalarını ayıran Riesz uzayı, $f \in E^{\sim}$ olmak üzere

$$\rho_f : E \to I\!R \,;\; \rho_f(x) = |f||x|$$

dönüşümü E üzerinde bir Riesz yarınormudur.

İspat

$f \in E^{\sim}$ olmak üzere, her $x, y \in E$ ve $\lambda \in I\!R$ için

(a) $\rho_f(x) = |f||x| \geq 0$

(b) $|x+y| \leq |x|+|y|$ olduğundan ve $|f|$ nin pozitifliğinden

$$\rho_f(x+y) = |f||x+y| \leq |f|(|x|+|y|) = |f||x|+|f||y| = \rho_f(x)+\rho_f(y)$$

(c) $\rho_f(\lambda x) = |f||\lambda x| = |f|(|\lambda||x|) = |\lambda|(|f||x|) = |\lambda|\rho_f(x)$

(d) $|x| \leq |y|$ iken $\rho_f(x) = |f||x| \leq |f||y| = \rho_f(y)$

olduğundan ρ_f Riesz yarınormudur.

• E sıra duali noktalarını ayıran Riesz uzayı olmak üzere, $\{\rho_f : f \in E^{\sim}\}$ yarınormlar ailesi 3.1.8. Teoreminden E üzerinde lineer lokal konveks topoloji tanımlar. 3.1.10. Önermesinden bu topoloji lokal soliddir. Bu topolojiye *mutlak zayıf topoloji* denir ve $|\sigma|(E, E^{\sim})$ biçiminde gösterilir. Benzer şekilde $f \in E^{\sim}$ olmak üzere

$$\rho_f : E \to I\!R\,;\ \rho_f(x) = |f(x)|$$

dönüşümünün bir yarınorm olduğu gösterilerek $\{\rho_f : f \in E^{\sim}\}$ yarınormlar ailesinin belirlediği lokal konveks-solid topoloji elde edilebilir. Bu topolojiye de *zayıf topoloji* denir ve $\sigma(E, E^{\sim})$ biçiminde gösterilir.

• E sıra duali noktalarını ayıran Riesz uzayı olmak üzere, her $f \in E^{\sim}$ ve her $x \in E$ için $|f(x)| \leq |f||x|$ dir. Buradan her $U \in \sigma(E, E^{\sim})$ ve $x_0 \in U$ için $f_1, \ldots, f_n \in E^{\sim}$ ve $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$ iken

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{ x \in X : |f_i||x - x_0| < \varepsilon_i \} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \{ x \in X : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon_i \}$$

olduğundan $U \in |\sigma|(E, E^{\sim})$ bulunur. Böylece $\sigma(E, E^{\sim}) \subseteq |\sigma|(E, E^{\sim})$ dir.

3.2. Operatör Genişletmeleri

3.2.1. Lemma (Hart, 1985)

E düzgün tam Riesz uzayı olmak üzere, $|y| \leq x$ olacak şekilde her $x \in E^{+}$ ve her $y \in E$ için $y = Tx$ eşitliğini sağlayan bir $T \in Z(I_x)$ vardır.

İspat

2.1.17. Sonucundan $x \in E^{+}$ için $\varphi : I_x \to C(X)$; $\varphi(x) = e$ ($e : X \to I\!R$; her $u \in X$ için $e(u) = 1$) Riesz homomorfizması olacak şekilde X H-kompakt topolojik uzayı vardır. $y, z \in I_x$ olmak üzere, $yz = \varphi^{-1}(\varphi(y)\,\varphi(z))$ çarpımıyla I_x birimi x olan bir f-cebiridir. $C(X)$ birimli f-cebiri ve Banach örgüsü olduğundan

$$I_x \approx C(X) \approx Orth(C(X)) = Z(C(X))$$

dir.

$$\wp : I_x \to Z(I_x)$$
$$y \to \wp_y$$

çarpma dönüşümü için $\wp_x$, $Z(I_x)$ de birimdir ve $|y| \leq x$ iken $\wp_y \in Z(I_x)$; $\wp_y(y) = yx = y$ olduğundan $T = \wp_y$ bulunur.

3.2.2. Lemma (Pagter, 1981)

E düzgün tam Riesz uzayı, $I \subseteq E$ ideal ve $\bar{I}$ I nın düzgün kapanışı olmak üzere, her $T \in Z(I)$, bir tek $\bar{T} \in Z(\bar{I})$ genişlemesine sahiptir.

3.2.3. Teorem (Hart,1985)

Düzgün tam Riesz uzayının Riesz altuzayı G ve G nin ürettiği ideal ve düzgün kapalı ideal sırasıyla I ve $\bar{I}$ olsun.

(1) Her $T \in Con(G)$, bir tek $\bar{T} \in Con(I)$ genişlemesine sahiptir.

(2) Her $T \in Z(G)$, bir tek $\bar{T} \in Z(\bar{I})$ genişlemesine sahiptir.

İspat

(1) $T \in Con(G)$ olsun.

(*i*) I, $0 < x \in G$ nin ürettiği ideal ; yani $I_G = I = I_x$ olsun. 3.2.1. Lemmasından her $y \in I$ için $y = S_y x$ olacak şekilde bir tek $S_y \in Z(I)$ vardır.

$$\bar{T} : I \to I$$
$$y \to \bar{T}y = S_y Tx$$

operatörü için, $y \in I$ iken

$$|\overline{T}y| = |S_y Tx| = |y\,Tx| = |y||Tx| \leq |y|\lambda_y x = \lambda_y(x|y|) = \lambda_y|y|$$

olacak şekilde $\lambda_y \in I\!R^+$ var olduğundan, $\overline{T} \in Con(I)$ elde edilir. Her $z \in G$ için

$$\overline{T}z = S_z Tx = (S_z T)x = (TS_z)x = T(zx) = Tz$$

olduğundan $\overline{T}$, T nin G den I ya genişlemesidir.

(*ii*) Her $x \in G$ için $I_G = I \neq I_x$ olsun. Her $0 < x \in G$ için $I_G \cap I_x = I_x$ olduğundan (*i*) de yapılanlardan dolayı T nin $G \cap I_x$ den I_x e bir T_x genişlemesi vardır. Herhangi bir $y \in I$ için $|y| \leq x$ olacak şekilde bir $x \in G$ vardır ve $y \in I_x$ dir.

$$\overline{T} : I \to I$$
$$y \to \overline{T}y = T_x y$$

tanımlansın. $I_x \subseteq I$ olduğundan $\overline{T}$ anlamlıdır. $|y| \leq z$ olacak şekilde $z \in G$ alınsın ve $u = x \vee z$ olsun. $I_x \subseteq I_u$ olduğundan $x \in G \cap I_u$ dur. Bu durumda T nin $G \cap I_x$ den I_x e ve $G \cap I_u$ dan I_u ya sırasıyla T_x ve T_u genişlemeleri için $T_x x = Tx = T_u x$ olduğundan I_x de $T_x = Tu$ bulunur. Benzer olarak I_z de $T_z = T_u$ bulunur. $y \in I_x \cap I_z$ olduğundan $T_x y = T_u y = T_z y$ dir. Böylece $\overline{T}$ nin tanımı x den bağımsız, başka bir deyişle $\overline{T}$ iyi tanımlıdır. $\overline{T}$ lineer dönüşümdür. Her $y \in I$ için $|\overline{T}y| = |T_x y| \leq \lambda_y |y|$ olacak şekilde $\lambda_y \in I\!R^+$ var olduğundan, $\overline{T} \in Con(I)$ elde edilir. Ayrıca her $y \in G$ için $\overline{T}y = T_x y = Ty$ dir. Sonuç olarak $\overline{T}$, T nin (bir tek) genişlemesidir.

(2) $T \in Z(G)$ olsun. (1) in ispatı sabit $\lambda \in I\!R^+$ için aynı biçimde uygulandığında $\overline{T} \in Z(I)$ genişlemesi elde edilir. 3.2.2. Lemmasından $\overline{T}$, bir tek (aynı gösterimle) $\overline{T} \in Z(\bar{I})$ genişlemesine sahiptir.

3.2.4. Özellik (Hart, 1985)

E Dedekind tam Riesz uzayı, $G \subseteq E$ Riesz altuzayı olmak üzere; her $T \in Z(G)$, G^d üzerinde $\overline{T} = 0$ olacak şekilde bir tek $\overline{T} \in Z(E)$ genişlemesine sahiptir. Bu durumda $Z(G)$, $Z(E)$ deki G^d yi sıfırlayan operatörlerden oluşan bir band olarak tanımlanır.

İspat

E Dedekind tam ise, düzgün tamdır (Luxemburg, 1971; Thm.42.6). 3.2.3. Teoreminden G ideal olarak alınabilir. $L_b(E)$ nin Riesz uzayı olması görüşünde genelliği bozmadan, $0 \leq T \in Z(G)$ olsun. $\hat{G}$, G nin Dedekind tamlayanı iken her $x \in E^+$ için

$$x \in \hat{G} \Leftrightarrow x_\alpha \uparrow x \text{ olacak şekilde } \{x_\alpha\} \subseteq G \text{ var} \Leftrightarrow x \in G^{dd}$$

önermesinin doğruluğundan ve 2.4.5. teoreminden her $0 \leq x \in G^{dd}$ için

$$\begin{aligned} \hat{T}x &= \sup\{Ty : 0 \leq y \leq x,\ y \in G\} \\ &= \inf\{Ty : 0 \leq x \leq y,\ y \in G\} \end{aligned}$$

olacak şekilde T nin bir tek $\hat{T} \in Orth(G^{dd})$ genişlemesi vardır. Bir $\lambda \in I\!R^+$ ve her $x \in G^{dd}$ için

$$\begin{aligned} \hat{T}x^+ &= \sup\{Ty : 0 \leq y \leq x^+,\ y \in G\} \\ &\leq \sup\{\lambda y : 0 \leq y \leq x^+,\ y \in G\} \\ &\leq \lambda x^+ \end{aligned}$$

ve benzer olarak $\hat{T}x^- \leq \lambda x^-$ olduğundan

$$|\hat{T}x| = \hat{T}\,|x| = \hat{T}\,(x^{+}+x^{-}) \le \lambda\,(x^{+}+x^{-}) = \lambda|x|$$

bulunur. Böylece $\hat{T}\in Z(G^{dd})$ elde edilir. E Dedekind tam ve G^{d}, E içinde band olduğundan $E = G^{d}\oplus G^{dd}$ dir. Herhangi bir $u\in E$ nin G^{dd} üzerindeki projeksiyonu v olduğunda

$$\begin{aligned} \overline{T} &: E \to E \\ u &\to \overline{T}u = \hat{T}v \end{aligned}$$

alınırsa, $\overline{T}\in Z(E)$ ve $\overline{T}G^{d} = \{0\}$ dır.

$$\begin{aligned} \psi &: Z(G) \to Z(E) \\ T &\to \overline{T} \end{aligned}$$

olarak elde edilen ψ dönüşümü Riesz izomorfizması olduğundan $Z(G) \approx \{\, T\in Z(E) : T|_{G^{d}} = 0 \,\}$ dir.

3.2.5. Lemma (Hart, 1985)

D, E Riesz uzayının alt vektör uzayı; *G, D* nin ürettiği Riesz altuzayı olmak üzere; $x\in D, y\in E$ için $x^{+}\perp y$ iken $(Tx)^{+}\perp y$ özelliğini sağlayan $T: D\to D$ lineer dönüşümü G den G ye bir pozitif orthomorfizma genişlemesine sahiptir.

İspat

$x\in D^{+}$ iken $x^{-} = 0 = (-x)^{+}$ olması, her $y\in E$ için $(Tx)^{-}\perp y$ ve dolayısıyla $(Tx)^{-}\in E^{d} = \{0\}$ olmasını gerektirdiğinden, $Tx \ge 0$ dır. O halde T pozitiftir. Ayrıca $x\perp y$ olacak şekilde $x\in D$ ve $y\in E$ alınırsa, $x^{+}\perp y$ ve $x^{-}\perp y$ dir.

Buradan $(Tx)^+ \perp y$ ve bununla beraber $x^- = (-x)^+$, $(Tx)^- = (-Tx)^+ = (T(-x))^+$ eşitliklerinden $(Tx)^- \perp y$ olması, $Tx \perp y$ olduğunu gösterir.

$x_1, \ldots, x_n \in D$ ve $y \in E$ için

$$\left.\begin{array}{l} x_1^+ \wedge \ldots \wedge x_n^+ \perp y \text{ iken } (Tx_1)^+ \wedge \ldots \wedge Tx_n)^+ \perp y, \\ x_1^- \wedge \ldots \wedge x_n^- \perp y \text{ iken } (Tx_1)^- \wedge \ldots \wedge Tx_n)^- \perp y \end{array}\right\} \cdots (1)$$

dir. $\{1,\ldots,m\}$ den $\{1,\ldots,n\}$ ye dönüşümlerin sınıfı C_m^n olsun.

$z_{ijk} \in E$ $(i=1,\ldots,m\ ;\ j=1,\ldots,n\ ;\ k=1,\ldots,p)$ için

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n} \bigwedge_{k=1}^{p} z_{ijk} = 0 \Leftrightarrow \bigwedge_{j=1}^{n} \bigvee_{k=1}^{p} z_{ijk}^- = 0 \qquad (i=1,\ldots,m)$$

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n} \bigwedge_{k=1}^{p} z_{ijk}^+ = 0 \Leftrightarrow \bigvee_{\phi \in C_n^p} \bigwedge_{j=1}^{n} z_{i,j,\phi(j)}^- = 0 \ (i=1,\ldots,m)$$

$$\bigvee_{\psi \in C_m^n} \bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{k=1}^{p} z_{i,\psi(i),k}^+ = 0$$

olduğundan,

$$\left.\begin{array}{l} \bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n} \bigwedge_{k=1}^{p} z_{ijk} = 0 \Leftrightarrow \text{Her } i \in \{1,\ldots,m\}, \text{her } \phi \in C_n^p \text{ için } \bigwedge_{j=1}^{n} z_{i,j,\phi(j)}^- = 0 \\ \qquad\qquad \text{her } \psi \in C_m^n \text{ için } \bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{k=1}^{p} z_{i,\psi(i),k}^+ = 0 \end{array}\right\} \cdots (2)$$

dır. En az iki $m, n \in I\!N$ ve her $i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$ için $x_{ij} \in D$ iken G nin her elemanı

$$\bigwedge_{j=1}^{n} \bigvee_{i=1}^{m} x_{ij}$$

biçiminde yazılabilir. T nin D den G ye genişlemesi

$$\overline{T}\,(\bigwedge_{j=1}^{n}\bigvee_{i=1}^{m} x_{ij}) = \bigwedge_{j=1}^{n}\bigvee_{i=1}^{m} T(x_{ij})$$

ile tanımlansın. $k = 1,\ldots,p$; $l = 1,\ldots,q$ için $y_{kl} \in D$ olmak üzere,

$$\bigwedge_{j=1}^{n}\bigvee_{i=1}^{m} x_{ij} = \bigwedge_{l=1}^{q}\bigvee_{k=1}^{p} y_{kl}$$

kabul edilirse,

$$\bigwedge_{j=1}^{n}\bigvee_{i=1}^{m}\bigvee_{l=1}^{q}\bigwedge_{k=1}^{p}(x_{ij} - y_{kl}) = 0$$

dır. (1) ve (2) den

$$\bigwedge_{j=1}^{n}\bigvee_{i=1}^{m} Tx_{ij} = \bigwedge_{l=1}^{q}\bigvee_{k=1}^{p} Ty_{kl}$$

bulunur. Böylece $\overline{T}$ iyi tanımlıdır. $\overline{T}$ lineerdir. $x\in G$ ve $y\in E$ olmak üzere

$$x = \bigwedge_{j=1}^{n}\bigvee_{i=1}^{m} x_{ij} \;\; (\forall x_{ij} \in D)$$

iken

$$x^{+} \perp y \Leftrightarrow \text{Her } \psi \in C_{m}^{n} \text{ için } \bigwedge_{j=1}^{n} x_{j,\psi(j)} \perp y$$

dir. Bu duruma (1) in uygulanmasıyla $(\overline{T}x)^{+} \perp y$ elde edilir. Sonuç olarak $\overline{T}$ pozitif orthomorfizmadır.

• 3.2.5. Lemmasındaki T operatörü için, ayrıca " her $x \in D^+$ için $Tx \leq \lambda_x x$ olacak şekilde $\lambda_x \in I\!R^+$ var " önermesi verilirse, T nin genişlemesi $Con(G)$ dedir ; " her $x \in D^+$ ve bir $\lambda \in I\!R^+$ için $Tx \leq \lambda x$ " önermesi verilirse, T nin genişlemesi $Z(G)$ dedir.

3.3. İlişki Operatörü ve Özellikleri

3.3.1. Teorem (Hart, 1985)

E ve F Riesz uzayları, $T \in L_b(E,F)$ dikliği koruyan operatör, G TE nin ürettiği Riesz altuzayı olmak üzere, her $S \in Orth(E)$ ve her $x \in E$ için $\Phi_T(S)(Tx) = T(Sx)$ olacak şekilde $\Phi_T : Orth(E) \to Orth(G)$ f-cebir homomorfizması vardır ve tektir. Ayrıca, $\Phi_T(Con(E)) \subseteq Con(G)$ ve $\Phi_T(Z(E)) \subseteq Z(G)$ dir. Üstelik, her $S \in Orth(E)$ için $|T|E$ ye $\Phi_T(S)$ nin kısıtlaması $\Phi_{|T|}(S)$ dir.

İspat

$x \in E$ ve $S \in Orth(E)$ için $\Phi_T(S) : TE \to TE$; $\Phi_T(S)(Tx) = T(Sx)$ olsun.

(a) $\Phi_T(S)$ anlamlıdır.

(b) $Çek\,T$ vektör uzayıdır. $|x| \leq |y|$ ve $y \in Çek\,T$ iken

$$0 \leq |Tx| = ||T|x| \leq |T||y| = |Ty| = 0$$

olduğundan $x \in Çek\,T$ dir. Böylece $Çek\,T$ idealdir.

$\{x_n\} \subseteq Çek\,T$, $x_n \to x$ *(u-yakınsak)* olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n_\varepsilon \leq n$ iken $|x_n - x| < \varepsilon u$ olacak şekilde $n_\varepsilon \in I\!N$ vardır. Buradan

$$|Tx_n - Tx| = |T||x_n - x| < \varepsilon\,|T|u$$

olduğundan $Tx_n \to Tx$ $(\,|T|u\text{-yakınsak})$ bulunur. Bu durumda, T u-sürekli olduğundan $x \in ÇekT$ dir. Böylece $ÇekT$ düzgün kapalıdır. S düzgün kapalı idealleri koruduğundan (Pagter, 1981), $S(ÇekT) \subseteq ÇekT$; yani her $x \in ÇekT$ için $T(Sx) = 0$ dır. $x, y \in E$ için $Tx = Ty$ iken $TS(x-y) = 0$ ve buradan

$$\Phi_T(S)(Tx) = T(Sx) = T(Sy) = \Phi_T(S)(Ty)$$

olduğundan $\Phi_T(S)$ iyi tanımlıdır.

(c) $\Phi_T(S)$ lineerdir.

(d) $(T^+)^{-1}\{y\}^d = \{\, x \in E : T^+x \perp y \,\}$ vektör uzayıdır. T dikliği koruyan operatör olduğundan 2.3.5. teoreminden T^+ Riesz homomorfizması, 2.3.2. lemmasından T^+ dikliği koruyan operatör ve yine 2.3.5. teoreminden $T^+ = |T^+|$ ve her $x \in E$ için $T^+|x| = |T^+x|$ dir. $|x| \le |z|$ ve $z \in (T^+)^{-1}\{y\}^d$ iken

$$|T^+x| = T^+|x| \le T^+|z| = |T^+z| \text{ ve } T^+z \perp y$$

olduğundan $x \in (T^+)^{-1}\{y\}^d$ dir. Böylece $(T^+)^{-1}\{y\}^d$ idealdir.

$\{x_n\} \subseteq (T^+)^{-1}\{y\}^d$, $x_n \to x$ $(u\text{-yakınsak})$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n_\varepsilon \le n$ iken

$$|T^+x_n - T^+x| = T^+|x_n - x| < \varepsilon\, T^+u$$

olacak şekilde $n_\varepsilon \in I\!N$ var olduğundan, $T^+x_n \to T^+x$ $(\,T^+u\text{-yakınsak})$ bulunur. Bu durumda T^+ u-sürekli olduğundan $x \in (T^+)^{-1}\{y\}^d$ dir. Böylece $(T^+)^{-1}\{y\}^d$ düzgün kapalıdır.

$S \ge 0$ ve $x \in E, y \in F$ için $(Tx)^+ \perp y$ olmak üzere,

$$T^+x^- + T^-x^+ = T^+(-x \vee 0) + T^-(x \vee 0) = (-T^+x \vee 0) + (T^-x \vee 0)$$

$$= (-T^+x \vee T^-x) + 0 = -(T^+x \wedge -T^-x) = 0$$

olduğundan,

$$(Tx)^+ = (T^+x - T^-x)^+ = (T^+x^+ + T^-x^- - T^+x^- - T^-x^+)^+ = T^+x^+ + T^-x^-$$

ve bununla beraber, $T^+x^+ \leq (Tx)^+$ ve $T^-x^- \leq (Tx)^+$ olduğundan $T^+x^+ \perp y$ ve $T^-x^- \perp y$ dir. S, $(T^+)^{-1}\{y\}^d$ düzgün kapalı idealini koruduğundan $T^+S(x^+) \perp y$ ve $T^-S(x^-) \perp y$ dir. Bu durumda,

$$(\Phi_T(S)(Tx))^+ = (T(Sx))^+ = T^+(Sx)^+ + T^-(Sx)^- \perp y$$

elde edilir.

Yukarıda yapılanlarla $\Phi_T(S) : TE \to TE$ operatörü 3.2.5. lemmasından dolayı, $\Phi_T(S) : G \to G$ pozitif orthomorfizmasına genişler. Böylece $\Phi_T : Orth(E) \to Orth(G)$ dönüşümü anlamlıdır.

$S_1, S_2 \in Orth(E)$ ve $x \in E$ için $S_1 = S_2$ iken

$$\Phi_T(S_1)(Tx) = T(S_1x) = T(S_2x) = \Phi_T(S_2)(Tx)$$

olduğundan TE üzerinde ve dolayısıyla G üzerinde $\Phi_T(S_1) = \Phi_T(S_2)$ dir. Buradan Φ_T dönüşümü iyi tanımlı olur.

Φ_T lineerdir. $S \geq 0$ için $\Phi_T(S) \geq 0$ olduğundan Φ_T pozitiftir.

$S_1, S_2 \in Orth(E)$ ve $x \in E$ için

$$\Phi_T(S_1S_2)(Tx) = T[(S_1S_2)x] = T[S_1(S_2x)] = \Phi_T(S_1)(TS_2x)$$

$$= \Phi_T(S_1)[\Phi_T(S_2)(Tx)] = (\Phi_T(S_1)\Phi_T(S_2))(Tx)$$

olduğundan TE üzerinde ve dolayısıyla G üzerinde

$$\Phi_T(S_1 S_2) = \Phi_T(S_1)\,\Phi_T(S_2)$$

dir. $S_1, S_2 \in Orth(E)$ için $S_1 \perp S_2$ iken

$$\Phi_T(S_1)\,\Phi_T(S_2) = \Phi_T(S_1 S_2) = \Phi_T(0) = 0$$

olduğundan $\Phi_T(S_1) \perp \Phi_T(S_2)$ dir. Böylece, Φ_T f-cebir homomorfizmasıdır.

$S \in Z(E)$ olmak üzere, her $x \in E$ ve bir $\lambda \in I\!R^+$ için

$$|\Phi_T(S)(Tx)| \leq |T(Sx)| \leq |T||Sx| \leq \lambda |T||x| \leq \lambda |Tx|$$

olduğundan $\Phi_T(S) \in Z(G)$ dir. Böylece, $\Phi_T(Z(E)) \subseteq Z(G)$ ve benzer olarak $\Phi_T(Con(E)) \subseteq Con(G)$ dir.

Son olarak her $x \in E^+$ ve her $S \in Orth(E)^+$ için

$$\Phi_T(S)(|T|x) = |\Phi_T(S)(Tx)| = |T(Sx)| = |T|(Sx)$$

olduğundan her $x \in E$ ve her $S \in Orth(E)$ için $\Phi_T(S)(|T|x) = |T|(Sx)$ yani,

$$\Phi_T(S)\Big|_{|T|E} = \Phi_{|T|}(S)$$

dir.

• 3.3.1 teoremindeki durumda T pozitif ise, dikliği koruduğundan Riesz homomorfizması olur ve TE Riesz altuzayı ($T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$) bulunur. Yani bu durumda yapılan ispatın ilk kısmı gerekli değildir. Her $x \in E$ için

$$|T|x = |T|(x^+ - x^-) = |T|x^+ - |T|x^- = |Tx^+| - |Tx^-| \in G$$

olduğundan $|T|E \subseteq G$ dir. T pozitif ise $|T|E = TE = G$, değilse $|T|E \subset G$ dir. Diğer taraftan $|T|E$ ve TE nin ürettiği idealler aynıdır.

• Dikliği koruyan operatörler ve dolayısıyla orthomorfizmaların görüntüleri Riesz altuzayı olmak zorunda değildir.

3.3.2. Örnek

$T: C[-1,1] \to C[-1,1]$; Her $x \in [-1,1]$, her $f \in C[-1,1]$ için $Tf(x) = xf(x)$ olsun. T lineer dönüşümdür. $f, g \in C[-1,1]$; $f \perp g$ ve $x \in [-1,1]$ için

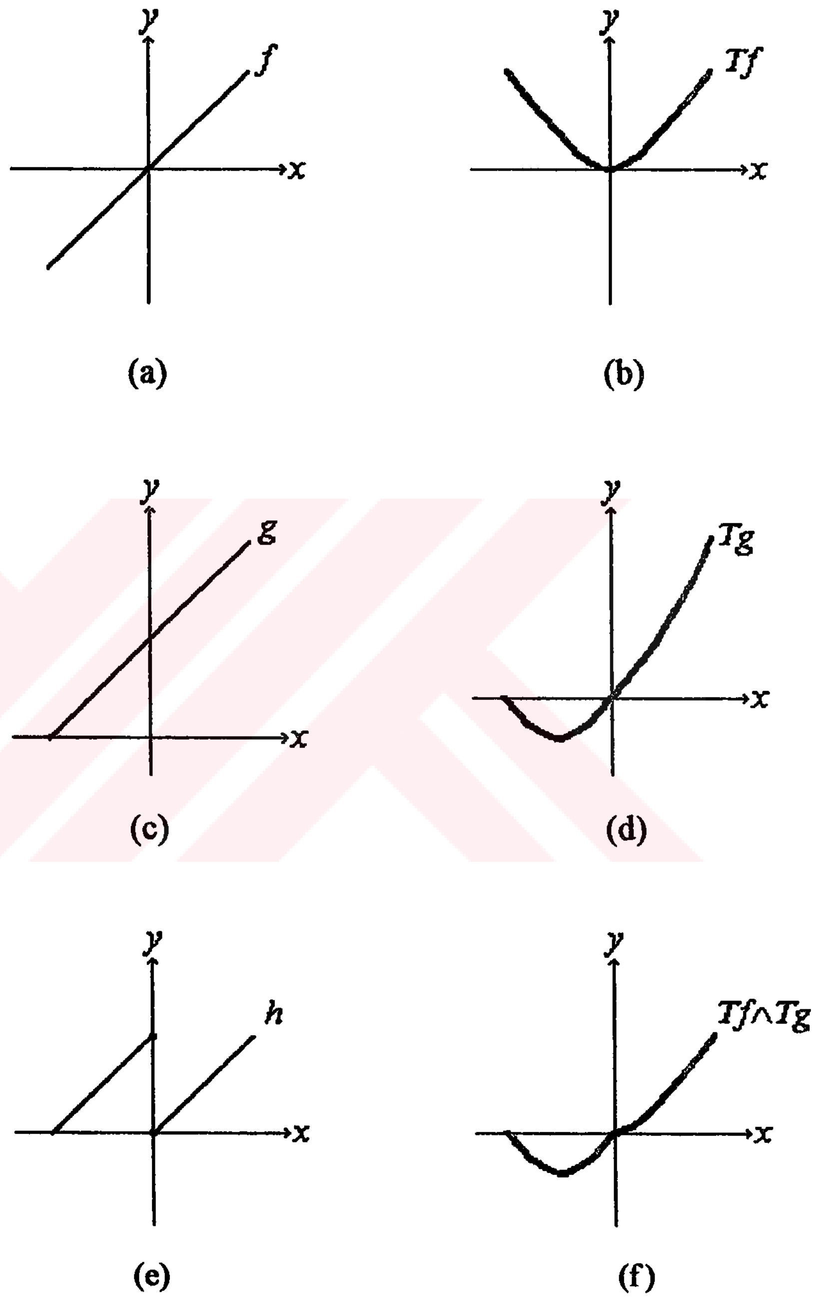
$$\begin{aligned}(|Tf| \wedge |Tg|)(x) &= \min\{\,|Tf|(x), |Tg|(x)\,\} = \min\{\,|Tf(x)|, |Tg(x)|\,\} \\ &= \min\{\,|xf(x)|, |x\,g(x)|\,\} = |x| \min\{\,|f(x)|, |g(x)|\,\} \\ &= |x|(\,|f| \wedge |g|\,)(x) = |x|.0 = 0\end{aligned}$$

olduğundan T dikliği korur. $f, g \in C[-1,1]$; $f(x) = x$, $g(x) = x+1$ için $Tf(x) = x^2$, $Tg(x) = x^2 + x$ ve bu durumda $Tf \wedge Tg \notin T(C[-1,1])$ dir. $Tf \wedge Tg \in T(C[-1,1])$ alınırsa, $Th = Tf \wedge Tg$ olacak şekilde $h \in C[-1,1]$ vardır. Ancak,

$$Th(x) = (Tf \wedge Tg)(x) \;\; (\forall x \in [-1,1]) \Rightarrow x\,h(x) = \begin{cases} x^2 + x & , \; x \in [-1,0] \; ise \\ x^2 & , \; x \in (0,1] \; ise \end{cases}$$

$$\Rightarrow \;\; h(x) = \begin{cases} x+1 & , \; x \in [-1,0) \; ise \\ x & , \; x \in (0,1] \; ise \\ . & , \; x = 0 \quad ise \end{cases}$$

olduğundan $x = 0$ noktasında h hangi değeri alırsa alsın $h \notin C[-1,1]$ dir. Böylece $T(C[-1,1])$ Riesz altuzayı değildir.



Şekil 3.1.

3.3.3. Örnek

$T: C[0,1] \to C[0,1]$; Her $x \in [0,1]$ ve her $f \in C[0,1]$ için $Tf(x) = (x - \frac{1}{2}) f(x)$

olsun. T lineer dönüşümdür. $f, g \in C[0,1]$; $f \perp g$ ve $x \in [0,1]$ için

$$(|Tf| \wedge |g|)(x) = \min\{ |Tf(x)|, |g(x)| \} = \min\{ |(x-\frac{1}{2})f(x)|, |g(x)| \}$$

$$= \min\{ |(x-\frac{1}{2})| |f(x)|, |g(x)| \} = 0$$

olduğundan T orthomorfizmadır.

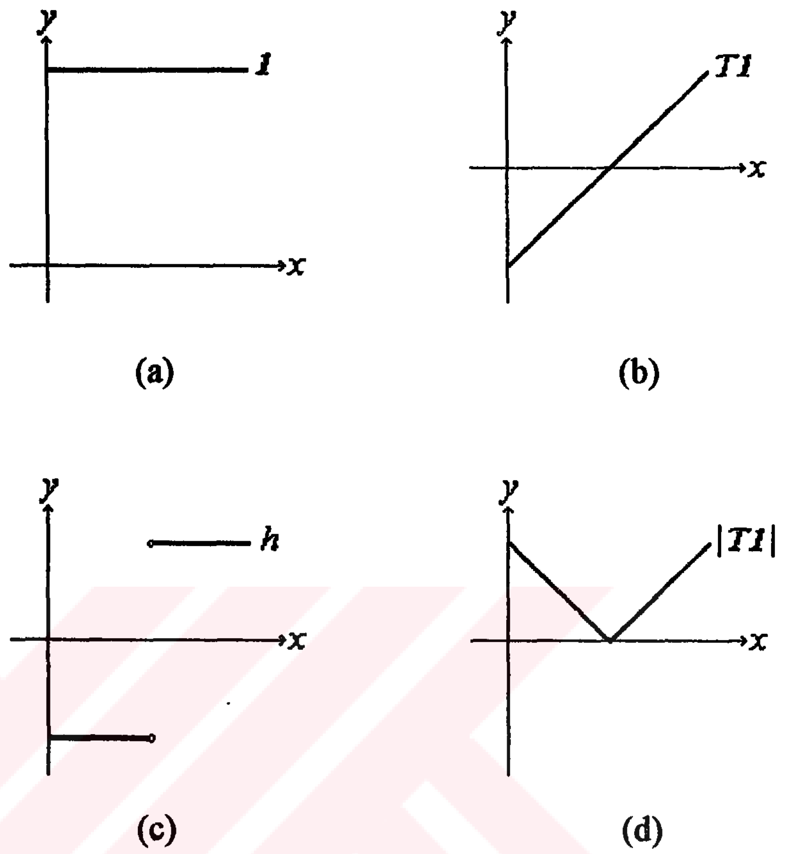
$1 \in C[0,1]$ (Her $x \in [0,1]$ için $1(x) = 1$) için $|T1| \notin T(C[0,1])$ dir.
$|T1| \in T(C[0,1])$ alınırsa, $Th = |T1|$ olacak şekilde $h \in C[0,1]$ vardır.
Ancak,

$$Th(x) = |T1|(x) \;\; (\forall x \in [0,1]) \Rightarrow (x - \frac{1}{2})\, h(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{2} & , x \in [\frac{1}{2}, 1] \; ise \\ -x + \frac{1}{2} & , x \in [0, \frac{1}{2}) \; ise \end{cases}$$

$$\Rightarrow \;\; h(x) = \begin{cases} 1 & , x \in (\frac{1}{2}, 1] \;\; ise \\ -1 & , x \in [0, \frac{1}{2}) \; ise \\ . & , x = \frac{1}{2} \quad ise \end{cases}$$

olduğundan, $x = \frac{1}{2}$ noktasında h hangi değeri alırsa alsın $h \notin C[0,1]$ dir.

Böylece $T(C[0,1])$ Riesz altuzayı değildir.



Şekil 3.2.

• 3.3.1. teoreminin f-cebirleri teorisine ilginç bir uygulaması vardır. Bir yarı-asal f-cebiri (kendisiyle çarpımı sıfır olan eleman sadece sıfırdır), $\wp$ ($x \to \wp_x$) dönüşümü yoluyla orthomorfizmalarının f-cebirine kanonik gömülebilir. A_1 ve A_2 yarı-asal f-cebirleri ve $T : A_1 \to A_2$ f-cebir homomorfizması alındıklarında, her $x, y \in A_1$ için

$$\Phi_T(\wp_x)(Ty) = T(\wp_x y) = T(x.y) = Tx.Ty = \wp_{Tx}(Ty)$$

olduğundan

$$(\wp \circ T)x = \wp_{Tx} = \Phi_T(\wp_x) = (\Phi_T \circ \wp)x$$

dir. Bu durum, her $T : A_1 \rightarrow A_2$ örten f-cebir homomorfizmasının $\Phi_T : Orth(A_1) \rightarrow Orth(A_2)$ f-cebir homomorfizmasına kanonik gömme altında genişletilebileceğini gösterir.

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{T} & A_2 \\ \wp \downarrow & & \downarrow \wp \\ Orth(A_1) & \xrightarrow[\Phi_T]{} & Orth(A_2) \end{array} \qquad \wp \circ T = \Phi_T \circ \wp$$

3.3.4. Sonuç

A_1 ve A_2 birimli Arşimedyan f-cebirleri ise, $T = \Phi_T$ dir.

3.3.5. Özellik (Hart, 1985)

E Riesz uzayı, F düzgün tam Riesz uzayı ve $T \in L_b(E,F)$ dikliği koruyan operatör olsun. TE nin ürettiği ideal ve düzgün kapalı ideal sırasıyla I ve $\bar{I}$ olsun.

1) Her $S \in Con(E)$ için $\Phi_T(S)\,T = TS$ olacak şekilde bir tek $\Phi_T : Con(E) \rightarrow Con(I)$ f-cebir homomorfizması vardır.

2) Her $S \in Z(E)$ için $\Phi_T(S)\,T = TS$ olacak şekilde bir tek $\Phi_T : Z(E) \rightarrow Z(\bar{I})$ f-cebir homomorfizması vardır.

Ayrıca (1) ve (2) de $\Phi_{|T|} = \Phi_T$ dir.

İspat

$I = I_{TE} = I_G$ dir. 3.3.1. Teoremi ve 3.2.3. teoreminden

$$Con(E) \to Con(G) \to Con(I) \quad \text{ve} \quad Z(E) \to Z(G) \to Z(\bar{I})$$

(1) ve (2) de verilen dönüşümlerdir. Her $S \in Orth(E)$ için, $\Phi_T(S)\big|_{|T|E} =$ $\Phi_{|T|}(S)$ olduğundan $|T|E$ üzerinde ve $I = I_{TE} = I_{|T|E}$ olduğundan I üzerinde $\Phi_{|T|}(S) = \Phi_T(S)$ dir.

3.3.6. Tanım (ilişki operatörü)

Yukarıda verilen $\Phi_T : Z(E) \to Z(\bar{I}_{TE})$; $\Phi_T(S)\, T = TS$ dönüşümüne T *nin ilişki operatörü* denir.

3.3.7. Tanım (cebirsel zengin merkez ve düzenli merkez)

E Riesz uzayı olmak üzere,

(a) Her $x, y \in E$; $0 < y \le x$ için $0 < Tx \le y$ ve her $z \in \{x\}^d$ için $Tz = 0$ olacak şekilde $T \in Z(E)^+$ varsa, E *cebirsel zengin merkeze sahiptir* denir.

(b) $\{T_\alpha\} \subseteq Z(E)$; $T_\alpha \downarrow 0$ iken, her $x \in E^+$ için $T_\alpha x \downarrow 0$ oluyorsa, E *düzenli merkeze sahiptir* denir.

3.3.8. Lemma (Meyer, 1978)

E Riesz uzayının cebirsel zengin merkeze sahip olması için gerek ve yeter şart $Z(\hat{E}) = Z(E)^\wedge$ olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$): (Luxemburg,1971; Thm.32.7) nin şatlarını sağlamak gerekir ve yeter.

(a) Herhangi bir $T \in Orth(E)$ nin bir tek $\hat{T} \in Orth(\hat{E})$ genişlemesi vardır. $T \in Z(E)$ alınırsa, her $\hat{x} \in \hat{E}^+$ için $\hat{x} = \sup\{ x : 0 \le x \le \hat{x}, x \in E \}$ ve $\hat{T}$ sıra sürekli olduğundan,

$$\hat{T}\hat{x} = \sup\{ \hat{T}x : 0 \le x \le \hat{x}, x \in E \} = \sup\{ Tx : 0 \le x \le \hat{x}, x \in E \}$$

$$\le \sup\{ \lambda x : \exists \lambda \in IR ; \lambda > 0 , 0 \le x \le \hat{x}, x \in E \}$$

$$= \lambda \sup\{ x : 0 \le x \le \hat{x}, x \in E \} = \lambda \hat{x}$$

dır ve bu durumda $\hat{T} \in Z(\hat{E})$ dır.

$$Z(E) \to Z(\hat{E})$$
$$T \to \hat{T}$$

dönüşümü tanımlanırsa, bu dönüşüm lineer, birebir Riesz homomorfizmasıdır. Böylece $Z(E)$, $Z(\hat{E})$ nın bir Riesz altuzayına Riesz izomorfiktir.

(b) $I \in Z(E)$ olduğundan, $Z(E)$ nin ürettiği ideal $Z(\hat{E})$ dır.

(c) $0 < S \in Z(\hat{E})$ olsun. $Z(\hat{E})$, I nın ürettiği ideal olduğundan, bir $\lambda \in IR ; \lambda > 0$ için $S \le \lambda I$ dır. En az bir $x \in E^+$ için $0 < Sx \le \lambda x$, buradan en az bir $y \in E$ için $0 < y \le Sx \le \lambda x$ ve $Z(E)$ nin cebirsel zenginliğinden, $0 < Tx \le y$ olacak şekilde $T \in Z(E)^+$ vardır. Bu durumda, $\hat{T} \in Z(\hat{E})^+$ için $0 < \hat{T}x = Tx \le y \le Sx$ bulunur. $(S - \hat{T})x \ge 0$ ve $S - \hat{T} \in Z(\hat{E})$ dır. Her $u \in I_x^+ ; u > 0$ ve bir $\lambda \in IR^+$

için $0 < u \leq \lambda x$ dir ve $\hat{E}$ Dedekind tam olduğundan, 2.4.9. önermesinden $0 \leq R \leq I$ ve $R(\lambda x) = u$ olacak şekilde $R \in Z(\hat{E})$ vardır.

$$\lambda R(S-\hat{T})(x) = (S-\hat{T})\, R(\lambda x) = (S-\hat{T})(u)$$

eşitliğinden, her $u \in I_x^{\,+}$ için $\hat{T}u \leq Su$ bulunur. I_x, B_x içinde sıra yoğun olduğundan, her $u \in B_x^{\,+}$ için $0 \leq u_\beta \uparrow u$ olacak şekilde $\{u_\beta\} \subseteq I_x$ ağı vardır. Her β için $\hat{T}u_\beta \leq Su_\beta$ olduğundan,

$$\hat{T}u = \hat{T} \sup_\beta u_\beta = \sup_\beta \hat{T}u_\beta \leq \sup_\beta Su_\beta = S \sup_\beta u_\beta = Su$$

dur ve ayrıca her $v \in \{x\}^d$ için $0 = \hat{T}v \leq Sv$ dir. Her $\hat{u} \in (\hat{B}_x)^+$ için $0 \leq u_\beta \uparrow \hat{u}$ olacak şekilde $\{u_\beta\} \subseteq B_x$ ağı var olduğundan, $\hat{T}\hat{u} \leq S\hat{u}$ ve her $\hat{v} \in (\hat{B}_x^d)^+$ için $0 = \hat{T}\hat{v} \leq S\hat{v}$ dır. Böylece her $\hat{z} \in (\hat{B}_x \oplus \hat{B}_x^d)^+$ için $\hat{T}\hat{z} \leq S\hat{z}$ dır. $\hat{B}_x \oplus \hat{B}_x^d$, $\hat{E}$ da sıra yoğun olduğundan, benzer düşünceyle $0 < \hat{T} \leq S$ bulunur.

($\Leftarrow$): $x, y \in E^+$; $0 < y \leq x$ olsun. $x, y \in \hat{E}^+$ dır. 2.4.9. Önermesinden $0 < R \leq I$ ve $0 < Rx = y$ olacak şekilde $R \in Z(\hat{E})^+$ vardır. $P_{B_x} \in P(\hat{E}) \subseteq Z(\hat{E})$ projeksiyonu, her $z \in B_x$ için $P_{B_x}(z) = z$ özelliğini sağlar. $S = R \circ P_{B_x}$ alınırsa, $S \in Z(\hat{E})^+$,

$$Sx = (R \circ P_{B_x})x = R(P_{B_x}x) = Rx = y$$

ve her $z \in B_x^{\,d}$ için

$$Sz = (R \circ P_{B_x})z = R(P_{B_x}z) = R(0) = 0$$

dır. $S \in Z(E)^{\wedge}$ olduğundan $0 < \hat{T} \le S$ olacak şekilde $T \in Z(E)$ vardır. Böylece $0 < Tx \le y$ ve her $z \in \{x\}^d$ için $Tz = 0$ bulunur.

3.3.9. Lemma (Meyer, 1978)

E cebirsel zengin merkeze sahip Riesz uzayı ise, E düzenli merkeze sahip Riesz uzayıdır.

İspat

$\{T_\alpha\} \subseteq Z(E)$; $T_\alpha \downarrow 0$ olsun. Herhangi bir $x \in E^+$ ve her α için $0 < y \le T_\alpha x$ olacak şekilde $y \in E^+$ var kabul edilsin. Bir $\lambda \in I\!R$; $\lambda > 0$ ve her α için $0 < y \le T_\alpha x \le \lambda x$ dir. $Z(E)$ nin cebirsel zenginliğinden,

$$\exists T_1 \in Z(E) \ni 0 < (\lambda T_1)x = T_1(\lambda x) \le y$$

$$\Rightarrow \exists T \in Z(E) \ni \forall \alpha \text{ için } 0 < Tx \le y \le T_\alpha x \quad (T = \lambda T_1)$$

dir. Her α için $(T_\alpha - T)x \ge 0$ ve $(T_\alpha - T)^{\wedge} \in Z(\hat{E})$ dir. 3.3.8. Lemmasının ispatında olduğu gibi, her α için $T \le T_\alpha$ olduğundan $T = 0$ bulunur. Böyle olamayacağından,

$$\forall x \in E^+ \text{ için } T_\alpha x \downarrow 0$$

dır.

3.3.10. Teorem (Hart, 1985)

E cebirsel zengin merkeze sahip Riesz uzayı, F düzgün tam Riesz uzayı, $T \in L_b(E,F)$ dikliği koruyan operatör, Φ_T T nin ilişki operatörü, $\bar{I}_{TE}$ TE nin ürettiği düzenli merkeze sahip düzgün kapalı ideal olsun. T nin sıra sürekli olması için gerek ve yeter şart Φ_T nin sıra sürekli olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$): T sıra sürekli ve $Z(E)$ de $S_\alpha \downarrow 0$ olsun. (Zaanen, 1983; Thm.83.3) den ve sıra sürekli operatörlerin kümesi vektör uzayı olduğundan, $T \geq 0$ kabul edilebilir. $Z(E)$ cebirsel zengin merkez ve dolayısıyla düzenli merkez olduğundan, her $x \in E^+$ için $S_\alpha x \downarrow 0$ dır. T nin sıra sürekliliğinden, her $x \in E^+$ için $\Phi_T(S_\alpha)Tx = TS_\alpha x \downarrow 0$ dır. Her α için

$$0 \leq S \leq \Phi_T(S_\alpha) \Rightarrow \text{Her } y \in TE \text{ için } 0 \leq Sy \leq \Phi_T(S_\alpha)y$$

$$\Rightarrow \text{Her } y \in TE \text{ için } 0 \leq Sy \leq \inf \Phi_T(S_\alpha)y = 0$$

olduğundan, TE üzerinde ve böylece $\bar{I}_{TE}$ üzerinde $S = 0$ bulunur. O halde $Z(\bar{I}_{TE})$ da $\Phi_T(S_\alpha) \downarrow 0$ dir.

($\Leftarrow$): Φ_T sıra sürekli ve E de $x \geq x_\alpha \downarrow 0$ olsun. (Aliprantis, 1985; Thm.4.3) den $T \geq 0$ kabul edilebilir. 2.4.9. Önermesinden her α için, $0 < S_\alpha \leq I$, $S_\alpha x = x_\alpha$ ve her $y \in \{x\}^d$ için $S_\alpha y = 0$ olacak şekilde $S_\alpha \in Z(\hat{E})^+$ vardır. Her $u \in I_x^+$ ve bir $\lambda \in I\!R^+$ için $0 \leq u \leq \lambda x$ olduğundan, her α için $0 \leq S_\alpha u \leq \lambda S_\alpha x$ dir. Bu durumda I_x üzerinde; I_x, B_x de sıra yoğun olduğundan, B_x üzerinde ve böylece $B_x \oplus B_x^d$ üzerinde $S_\alpha \downarrow 0$ dır. $B_x \oplus B_x^d$ nin E de; E nin de $\hat{E}$ da sıra yoğunluğundan, $\hat{E}$ üzerinde $S_\alpha \downarrow 0$ dır. $Z(\hat{E}) = Z(E)^\wedge$ olduğundan, $S_{\alpha\beta} \downarrow_\beta S_\alpha$ olacak şekilde $\{S_{\alpha\beta}\} \subseteq Z(E)$ vardır. Bu durumda $S_{\alpha\beta} \downarrow_{\alpha,\beta} 0$ ve Φ_T sıra sürekli olduğundan $\Phi_T(S_{\alpha\beta}) \downarrow_{\alpha,\beta} 0$ bulunur. $Z(\bar{I}_{TE})$ düzenli merkez ve

$$0 \leq \inf_{\alpha} Tx_{\alpha} = \inf_{\alpha} TS_{\alpha}x \leq \inf_{\alpha,\beta} TS_{\alpha\beta}x = \inf_{\alpha,\beta} \Phi_T(S_{\alpha\beta})(Tx)$$

olduğundan, $Tx_{\alpha}\downarrow 0$ dır.

3.3.11. Teorem (Hart, 1985)

E Riesz uzayı, F düzgün tam Riesz uzayı, $T \in L_b(E,F)$ dikliği koruyan operatör, Φ_T T nin ilişki operatörü olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

1) T birebir ise, Φ_T birebirdir.

2) E cebirsel zengin merkeze sahip ve T sıra sürekli olduğunda, Φ_T birebir ise, T birebirdir.

3) Φ_T örten ve $\bar{I}_{TE}$ cebirsel zengin merkeze sahip olduğunda, Φ_T birebir ise, T birebirdir.

İspat

1) T birebir ve herhangi iki $S_1,S_2 \in Z(E)$ için $\Phi_T(S_1) = \Phi_T(S_2)$ olsun. Her $x \in E$ için

$$\Phi_T(S_1)(Tx) = \Phi_T(S_2)(Tx) \Rightarrow T(S_1x) = T(S_2x) \Rightarrow S_1x = S_2x \Rightarrow S_1 = S_2$$

olduğundan Φ_T birebirdir.

2) T nin birebir olmadığını kabul edelim. $0 \neq x \in Çek\,T$ olsun. Her $R \in Z(E)$ için $T(Rx) = \Phi_T(R)(Tx) = 0$ olduğundan, $Rx \in Çek\,T$ dir. $0 < R \in Z(E)^+$ alınırsa, $0 < Rx \leq x$ dir. E cebirsel zengin merkeze sahip olduğundan $0 < Sx \leq Rx$ olacak şekilde $S \in Z(E)^+$ ve her $y \in \{x\}^d$ için $Sy = 0$ dır. T sıra sürekli olduğundan $Çek\,T$ banddır. Bu durumda $Sx \in Çek\,T$ dir. Her $u \in I_x^+$

ve bir $\lambda \in I\!R^{+}$ için $0 < u \leq \lambda\, x$ olduğundan ve S nin pozitifliğinden, $Su \in ÇekT$ dir. Her $v \in B_x^{\ +}$ için $0 \leq v_\beta \uparrow v$ olacak şekilde $\{v_\beta\} \subseteq I_x$ ağının varlığından ve S nin sıra sürekliliğinden, $Sv \in ÇekT$ dir. Böylece $SE \subseteq ÇekT$ dir. Her $x \in E$ için $\Phi_T(S)\,(Tx) = T(Sx) = 0$ olduğundan $S \in Çek\Phi_T$ bulunur ki, bu durum Φ_T nin birebir olmasıyla çelişir. O halde T birebirdir.

3) Φ_T birebir ise, $Çek\Phi_T = \{0\}$ band olduğundan (Luxemburg, 1971; Thm.18.13) den Φ_T sıra süreklidir. Φ_T f-cebir izomorfizması olduğundan, $Z(E) = Z(\bar{I}_{TE})$ dır. $Z(E)$ cebirsel zengin olduğundan, 3.3.10. teoreminden T sıra sürekli ve bu durumda (2) den T birebir bulunur.

3.3.12. Tanım (sıra adjoint)

E ve F Riesz uzayları, $T : E \to F$ sıra sınırlı operatör olmak üzere, her $f \in F^{\sim}$ ve her $x \in E$ için $T^{\sim} : F^{\sim} \to E^{\sim}$; $T^{\sim} f\,(x) = f\,(Tx\,)$ biçiminde tanımlanan operatöre *T nin sıra adjointi* denir.

• $T : E \to F$ pozitif operatör olmak üzere, $0 \leq f \in F^{\sim}$ iken her $x \in E^{+}$ için $T^{\sim} f\,(x) = f\,(Tx) \geq 0$ olduğundan $T^{\sim}$ pozitiftir. Buradan sonraki kısımda T dikliği koruyan operatör (Riesz homomorfizması) iken $T^{\sim}$ nın dikliği koruyan operatör (Riesz homomorfizması) olması için gerekli ve yeterli şartlar incelenecektir.

3.3.13. Lemma (Aliprantis and Burkinshaw, 1985)

E ve F Riesz uzayları, $T \in L_b(E,F)$ dikliği koruyan operatör ise, $T^{\sim}$ bir modüle sahiptir ve $|T^{\sim}| = |T|^{\sim}$ dır.

İspat

$T, T^{\sim}$ sıra sınırlı ve $E^{\sim}$ Dedekind tam olduğundan $|T|, |T^{\sim}|$ vardır. $f \in (F^{\sim})^{+}$ olmak üzere, her $x \in E^{+}$ için

$$\pm T^{\sim}f(x) = \pm f(Tx) = f(\pm Tx) \leq f(|T|x) = |T|^{\sim}f(x)$$

olduğundan, $|T^{\sim}|f \leq |T|^{\sim}f$ dir. Diğer taraftan T dikliği koruduğundan ve (Aliprantis, 1985; Thm.1.14) ten, her $x \in E^{+}$ için

$$\begin{aligned} |T|^{\sim}f(x) &= f(|T|x) \\ &= f(|Tx|) \\ &= \sup\{|g(Tx)| : |g| \leq f\} \\ &= \sup\{|T^{\sim}g(x)| : |g| \leq f\} \\ &\leq \sup\{|T^{\sim}g|(x) : |g| \leq f\} \\ &= \sup\{|T^{\sim}g| : |g| \leq f\}(x) \\ &= |T^{\sim}|f(x) \end{aligned}$$

dir. Buradan, $|T|^{\sim}f \leq |T^{\sim}|f$ bulunur. Sonuç olarak $|T^{\sim}| = |T|^{\sim}$ dır.

3.3.14. Önerme (Lotz, 1975)

E ve F Riesz uzayları, $F^{\sim}$ F nin noktalarını ayıran sıra dual, $T \in L_b(E,F)$ pozitif operatör olsun. $T^{\sim}$ nın Riesz homomorfizması olması için gerek ve yeter şart $\overline{T[0,x]}^{|\sigma|(F,F^{\sim})} = [0, Tx]$ olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$): $x, y \in E$ ve $0 \leq y \leq x$ olsun. T pozitif olduğundan $0 \leq Ty \leq Tx$ ve dolayısıyla $T[0,x] \subseteq [0, Tx]$ dir. $z \in \overline{T[0,x]}$ olsun. $Tx_\alpha \xrightarrow{|\sigma|(F,F^\sim)} z$ olacak şekilde $\{x_\alpha\} \subseteq [0,x]$ ağı vardır. $\sigma(F, F^\sim) \subseteq |\sigma|(F, F^\sim)$ olduğundan $Tx_\alpha \xrightarrow{\sigma(F,F^\sim)} z$ dır. Buradan her $f \in F^\sim$ için $f(Tx_\alpha) \to f(z)$ dir. Her $f \in (F^\sim)^+$ ve her α için $f(Tx - Tx_\alpha) \geq 0$ ve $f(Tx_\alpha) \geq 0$ olduğundan, $f(Tx - Tx_\alpha) \geq 0$ ve $\lim\limits_{\alpha} f(Tx_\alpha) = f(z) \geq 0$ dır. 2.2.3. Teoreminden $z \leq Tx$ ve $z \geq 0$ bulunur. Bu durumda $\overline{T[0,x]} \subseteq [0, Tx]$ dir.

$0 \leq x \in E$ ve $0 \leq y \notin \overline{T[0,x]}$ olsun. $F^\sim$ F nin noktalarını ayırdığından $|\sigma|(F, F^\sim)$ Hausdorff topolojidir. Bu durumda y ve $T[0,x]$ kesin ayrılır. Dolayısıyla 3.1.5. teoreminden her $z \in [0,x]$ için

$$T^\sim f(z) = f(Tz) \leq \lambda < f^+(y)$$

olacak şekilde $f \in F^\sim$ ve $\lambda \in I\!R$ vardır. $T^\sim$ Riesz homomorfizması ve $y \geq 0$ olduğundan

$$f^+(Tx) = T^\sim f^+(x) = (T^\sim f)^+(x) \leq \lambda < f^+(y),$$

ve buradan $f^+(y - Tx) > 0$ bulunur. $y \leq Tx$ alınırsa, $f^+(y) \leq f^+(Tx)$ ve buradan $f^+(y - Tx) \leq 0$ bulunur. O halde her $y \notin \overline{T[0,x]}$ için $y \notin [0, Tx]$ dir. Sonuç olarak, $\overline{T[0,x]}^{|\sigma|(F,F^\sim)} = [0, Tx]$ dir.

($\Leftarrow$): $f \in F^\sim$ ve $0 \leq x \in E$ için

$$(T^\sim f)^+(x) = \sup\{T^\sim f(y) : 0 \leq y \leq x\}$$

$$= \sup \{ f(Ty) : 0 \le y \le x \}$$

$$= \sup \{ f(z) : 0 \le z \le Tx \}$$

$$= f^{+}(Tx)$$

$$= T^{\sim} f^{+}(x)$$

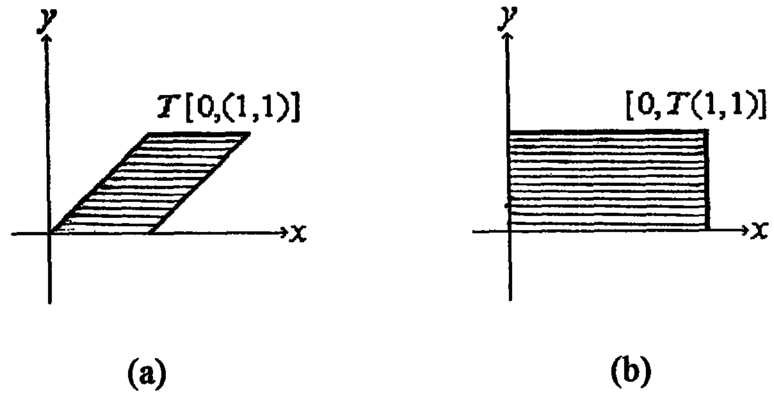
dir. Herhangi bir $x \in E$ nin $x = x^{+} - x^{-}$ olması görüşünden, $T^{\sim}$ Riesz homomorfizmasıdır.

• Aralık koruyan operatörün görüntüsü idealdir, ancak tersi genelde doğru değildir.

3.3.15. Örnek

$T : I\!R^2 \to I\!R^2$; $T(x,y) = (x+y, y)$ olsun. T lineer ve pozitif dönüşümdür. T örten olduğundan, $TI\!R^2$ idealdir. T pozitif olduğundan, her $x \in I\!R^2$ için $T[0,x] \subseteq [0, Tx]$ dir.

Diğer taraftan $0 \le (0,1) \le (2,1) = T(1,1)$ olduğundan $(0,1) \in [0, T(1,1)]$ dir, ancak $T(x,y) = (0,1)$ olacak şekilde $[0,(1,1)]$ sıra aralığında (x,y) elemanı yoktur. O halde T aralık koruyan operatör değildir.



Şekil 3.3.

3.3.16. Lemma (Hart, 1985)

E, F Riesz uzayları, $T \in L_b(E,F)$ dikliği koruyan operatör olmak üzere, aşağıdakiler denktir:

1) $|T|$ aralık koruyan operatördür

2) $|T|E$, F de idealdir

3) TE idealdir.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2): $|T|$ Riesz homomorfizması olduğundan, $|T|E$ Riesz altuzayıdır. $x \in E^+$ olmak üzere, $0 \le y \le |T|x$ olacak şekilde $y \in F$ alınırsa, $|T|$ aralık koruduğundan $y \in |T|[0,x]$ dir. Bu durumda $y = |T|z \in |T|E$ olacak şekilde $z \in [0,x]$ vardır.

(2) $\Rightarrow$ (3): Her $x \in E$ için $|Tx| = |T||x|$ olduğundan, $TE \subseteq |T|E$ dir.

$x \in E^+$, $y \in F$ ve $0 \le y \le |T|x$ olsun. $0 \le y \le T^+x + T^-x$ olduğundan, $0 \le y_1 \le T^+x$ ve $0 \le y_2 \le T^-x$ olacak şekilde $y_1, y_2 \in F$ vardır. Ayrıca, $|T|E$

ideal olduğundan $0 \leq z_1$, $z_2 \leq x$, $|T|\, z_1 = y_1$, $|T|\, z_2 = y_2$ olacak şekilde $z_1, z_2 \in E$ vardır. $0 \leq |T|\, z_1 = T^+ z_1 + T^- z_1 \leq T^+ x$ ve T^- nin pozitifliğinden $T^- z_1 \leq T^- x$ olduğundan

$$0 \leq T^- z_1 = T^- z_1 \wedge T^- z_1 \leq T^+ x \wedge T^- x = 0$$

dir. Benzer olarak $T^+ z_2 = 0$ dır. Böylece, $z = z_1 - z_2$ alınırsa,

$$0 \leq Tz = T^+ z_1 + T^- z_2 = y_1 + y_2 = y$$

bulunur. Sonuç olarak, $|T|E \subseteq TE$ dir.

(3) $\Rightarrow$ (1): $|T|$ nin pozitifliğinden, her $x \in E^+$ için $|T|\,[0, x] \subseteq [0, |T|\, x]$ dir. $x \in E^+, y \in F$ ve $0 \leq y \leq |T|\, x$ olsun. $|T|\, x = |Tx|$ ve TE ideal olduğundan, $y \in TE$ dir. Bu durumda $0 \leq y = Tz = |Tz| = |T|\, z \leq |T|\, x$, buradan $|T|\,(x - z) \geq 0$ olacak şekilde $z \in E^+$ vardır. Dolayısıyla, $y \in |T|\,[0, x]$ dir. Sonuç olarak, $|T|$ aralık koruyan operatördür.

3.3.17. Önerme (Hart, 1985)

E Dedekind tam Riesz uzayı, F Riesz uzayı, $F^\sim$ F nin noktalarını ayıran sıra dual ve $T \in L_b(E,F)$ sıra sürekli Riesz homomorfizması olsun. T nin aralık koruması için gerek ve yeter şart $T^\sim$ nın Riesz homomorfizması olmasıdır.

İspat

($\Rightarrow$): Her $f \in F^\sim$ için $T^\sim f = f \circ T$ dir. 2.2.6. Teoreminden

$$F^\sim \to E^\sim$$
$$f \to f \circ T = T^\sim f$$

Riesz homomorfizmasıdır. Böylece $F^{\sim}$ da $f \wedge g = 0$ ise, $E^{\sim}$ da

$$T^{\sim}f \wedge T^{\sim}g = (f\circ T)\wedge(g\circ T) = (f\wedge g)\circ T = 0$$

olduğundan $T^{\sim}$ Riesz homomorfizmasıdır.

($\Leftarrow$): T pozitif olduğundan, $T[0,x] \subseteq [0,Tx]$ dir.

$x \in E^+$ ve $0 < y < Tx$ olsun. 3.3.14 Önermesinden her $\alpha \in \Lambda$ için $Ty_\alpha \le Tx$ ve $Ty_\alpha \to y$ *(*$|\sigma|(F,F^{\sim})$*-yakınsak)* olacak şekilde $\{y_\alpha\} \subseteq [0,x]$ ağı vardır. E Dedekind tam olduğundan, herhangi bir $\alpha \in \Lambda$ için $x_\alpha = \inf\limits_{\beta>\alpha} y_\beta$ tanımlanırsa, $x_\alpha \uparrow$ olacak şekilde $\{x_\alpha\} \subseteq [0,x]$ ağı vardır. $u = \sup\limits_{\alpha} x_\alpha$ olsun. T sıra sürekli Riesz homomorfizması olduğundan,

$$Tu = \sup_{\alpha} Tx_\alpha = \sup_{\alpha} T(\inf_{\beta>\alpha} y_\beta) = \sup_{\alpha} \inf_{\beta>\alpha} Ty_\beta = \liminf_{\alpha} x_\alpha = y$$

dir ve bu durumda $[0,Tx] \subseteq T[0,x]$ bulunur.

3.3.18. Teorem (Hart, 1985)

E,F Dedekind tam Riesz uzayları, $F^{\sim}$ F nin noktalarını ayıran sıra duali ve $T \in L_b(E,F)$ sıra sürekli dikliği koruyan operatör olmak üzere, aşağıdakiler denktir:

1) T aralık koruyan operatördür

2) TE, F de idealdir

3) Φ_T ilişki operatörü örtendir

4) $|T|^{\sim}$ Riesz homomorfizmasıdır

5) $T^{\sim}$ dikliği koruyan operatördür.

İspat

(1), (2) ve (4) ün denklikleri 3.3.16. lemması ve 3.3.17. önermesinden sağlanır.

(1) $\Rightarrow$ (3): $0 \leq R \leq I$ olacak şekilde $R \in Z(\bar{I}_{TE})$ olsun. Bu durumda her $x \in E^+$ için $R(|T|x) \leq |T|x$ olduğundan $R \circ |T| \leq |T|$ dir. 2.4.10. Lemmasından $R \circ |T| = |T| \circ S$ ve $0 \leq S \leq I$ olacak şekilde $S \in Orth(E)$ vardır. Böylece, her $R \in Z(\bar{I}_{TE})$ için $\Phi_{|T|}(S) = R$ olacak şekilde $S \in Z(E)$ elde edilir. 3.3.5. Özelliğinden dolayı $\Phi_{|T|} = \Phi_T$ olduğundan Φ_T örtendir.

(3) $\Rightarrow$ (1): $\Phi_{|T|} = \Phi_T$ dir ve $|T|$ nin pozitifliğinden, her $x \in E^+$ için $|T|[0,x] \subseteq [0,|T|x]$ dir. Herhangi bir $x \in E^+$ için $0 \leq y \leq |T|x$ olsun. 2.4.9. Önermesinden $0 \leq R \leq I$ ve $R(|T|x) = y$ olacak şekilde $R \in Z(\bar{I}_{TE})$ vardır. $\Phi_{|T|}(S) = R$ olacak şekilde $S \in Z(E)$ nin var olduğundan, $\Phi_{|T|}$ nin tanımından $|T|(Sx) = y$ ve dolayısıyla $y \in |T|[0,x]$ bulunur. Böylece $|T|$ aralık koruyan operatördür.

(4) ve (5) in denkliği; $f, g \in F^\sim$ iken 2.3.5. teoremi ve 3.3.13. lemması kullanılarak elde edilen

$$|T^\sim f| \wedge |T^\sim g| = |T^\sim||f| \wedge |T^\sim||g| = ||T|^\sim f| \wedge ||T|^\sim g|$$

eşitliklerinden görülür.

3.4. f-Modülleri ve f-Orthomorfizmaları

- Bu bölümde 3.3.1. teoreminin tersinin oluşturulması çalışılacaktır. Yani, " $T \in L_b(E,F)$ verildiğinde $Z(E)$ den $Z(F)$ ye $\Phi_T(S)\,T = TS$ biçiminde tanımlı f-cebir homomorfizması varsa, T dikliği koruyan operatör müdür ? " sorusu cevaplanacak, ayrıca dikliği koruyan operatörün hangi durumlarda tersinin de dikliği koruyan operatör olduğu belirtilecektir. Bunlar için önce bazı tanım ve teoremler verilecektir.

3.4.1. Tanım (f- modülü)

A birimli f-cebiri, E Riesz uzayı olmak üzere, $A \times E \to E$; $(a, x) \to a.x$ dönüşümü için

(a) E, A üzerinde bir modül (sol modül)

(b) $a \in A^+$ ve $x \in E^+$ iken $a.x \in E^+$

(c) $x \perp y$ iken her $a \in A$ için $a.x \perp y$

özellikleri sağlanıyorsa, E ye A üzerinde *f-modülü* denir.

3.4.2. Tanım (f- lineer dönüşüm)

E ve F, A birimli f-cebiri üzerinde f-modülleri olmak üzere, $T : E \to F$ operatörü her $a \in A$ ve $x \in E$ için $T(a.x) = a.Tx$ eşitliğini sağlıyorsa, T ye *f-lineer dönüşüm* denir. Sıra sınırlı f-lineer dönüşümlerin kümesi $L_b(E, F; A)$ ile gösterilir.

3.4.3. Tanım (f- orthomorfizması)

E ve F, A birimli f-cebiri üzerinde iki f-modülü, $T \in L_b(E, F)$ f-lineer dönüşüm ve $x \in E$ için $\psi_{x,f} : A \to I\!R$; $\psi_{x,f}(a) = f(a.x)$ biçiminde tanımlı $\psi_{x,f} \in A^\sim$ lineer fonksiyonellerinin kümesi $\Psi(x) = \{ \psi_{x,f} : f \in E^\sim \}$ olmak üzere her $x \in E$ için $\Psi(Tx) \subseteq \Psi(x)$ oluyorsa, T ye *f-orthomorfizması* denir. f-orthomorfizmalarının kümesi $Orth(E,F;A)$ ile gösterilir.

3.4.4. Tanım (topolojik dolu merkez)

E Riesz uzayı, $E^{\sim}$ E nin noktalarını ayıran sıra dual olmak üzere, her $x, y \in E$; $0 \le y \le x$ için $S_\alpha x \to y$ *($\sigma(E,E^{\sim})$-yakınsak)* olacak şekilde $\{S_\alpha\} \subseteq Z(E)$; her α için $0 \le S_\alpha \le I$ ağı varsa, E ye *topolojik dolu merkeze sahiptir* denir.

- Bundan sonraki kısımda f-cebirleri ve Riesz uzaylarının sıra dualleri noktalarını ayıran alınacaktır.

3.4.5. Teorem (Turan, 2000)

F topolojik dolu merkeze sahip Riesz uzayı, E ve F, A birimli f-cebiri üzerinde f–modülleri olmak üzere aşağıdakiler sağlanır:

1) Her f-orthomorfizması, dikliği koruyan operatördür

2) Her $T \in Orth(E, F; A)$ için $T = T^+ - T^-$ dir, T^+ ve T^- Riesz homomorfizmalarıdır, her $x \in E^+$ için $T^+x = (Tx)^+$, $T^-x = (Tx)^-$ ve her $x \in E$ için $T^+x \perp T^-x$ dir

3) Her $T \in Orth(E, F; A)$ için $|T|$ vardır. $|T|$ Riesz homomorfizması, $|T| = T^+ + T^-$ ve her $x \in E$ için $|T||x| = |Tx| = |T|x||$ dir.

3.4.6. Önerme (Turan, 2000)

E ve F, A birimli f-cebiri üzerinde f-modülleri olmak üzere, F topolojik dolu merkeze sahip ise, $Orth(E,F;A) = L_b(E,F;A)$ dir.

3.4.7. Teorem

E Riesz uzayı, F topolojik dolu merkeze sahip Riesz uzayı ve $T \in L_b(E,F)$ olmak üzere, $\Phi_T : Z(E) \to Z(F)$; $\Phi_T(S)\, T = TS$ biçiminde tanımlı f-cebir homomorfizması varsa, T dikliği koruyan operatördür.

İspat

$$Z(E) \times E \to E \;;\; (S,x) \to S.x = S(x)$$

dönüşümü $S, R \in Z(E)$ ve $x, y \in E$ için

(a) (i) $S.(x+y) = S(x+y) = S(x) + S(y) = S.x + S.y$

(ii) $(S+R).x = (S+R)(x) = S(x) + R(x) = S.x + R.x$

(iii) $(SR).x = (SR)(x) = S(R(x)) = S.R(x) = S.(R.x)$

(iv) $I.x = I(x) = x$ (I özdeşlik operatörü ($Z(E)$ nin birimi)

(b) $S \in Z(E)^+$ ve $x \in E^+$ iken $S.x = S(x) \in E^+$

(c) $x \perp y$ iken $S.x = S(x) \perp y$

olduğundan E, $Z(E)$ üzerinde f-modülüdür. Ayrıca

$$Z(E) \times F \to F \;;\; (S,y) \to S.x = \Phi_T(S)(x)$$

dönüşümü $S, R \in Z(E)$ ve $x, y \in F$ için

(a) (i) $S.(x+y) = \Phi_T(S)(x+y) = \Phi_T(S)(x) + \Phi_T(S)(y) = S.x + S.y$

(ii) $(S+R).x = \Phi_T(S+R)(x) = (\Phi_T(S) + \Phi_T(R))(x)$
$= \Phi_T(S)(x) + \Phi_T(R)(x) = S.x + R.x$

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

$$(iii)\ \ (SR).x = \Phi_T(SR)(x) = (\Phi_T(S)\,\Phi_T(R))(x) = \Phi_T(S)(\Phi_T(R)(x))$$
$$= S.(\Phi_T(R)(x)) = S.(R.x)$$

$$(iv)\ \ I.x = \Phi_T(I)(x) = I(x) = x$$

(b) $S \in Z(E)^+$ ve $x \in F^+$ iken Φ_T nin pozitifliğinden $S.x = \Phi_T(S)(x) \in E^+$

(c) $x \perp y$ iken $\Phi_T(S)$ nin orthomorfizma olmasından $S.x = \Phi_T(S)(x) \perp y$

olduğundan F, $Z(E)$ üzerinde f-modülüdür.

Her $S \in Z(E)$ ve her $x \in E$ için

$$T(S.x) = T(S(x)) = \Phi_T(S)(Tx) = S.Tx$$

olduğundan $T: E \to F$ f-lineer dönüşümdür.

$x \in E$ olmak üzere, $f \in E^{\sim}$ iken her $S \in Z(E)$ için

$$\psi_{Tx,f}(S) = f(S.Tx) = f(\Phi_T(S)(Tx)) = f(T(Sx))$$
$$= T^{\sim}f(Sx) = T^{\sim}f(S.x) = \psi_{x,\,T^{\sim}f}(S)$$

olduğundan $\Psi(Tx) \subseteq \Psi(x)$ dir. Böylece T f-orthomorfizmasıdır. 3.4.5. Teoreminden T dikliği koruyan operatördür.

3.4.8. Teorem

E topolojik dolu merkeze sahip Riesz uzayı, F Riesz uzayı ve $T \in L_b(E,F)$ birebir örten ve dikliği koruyan operatör ise, T^{-1} operatörü de dikliği koruyan operatördür.

İspat

3.3.5. Özelliğinden $\Phi_T : Z(E) \rightarrow Z(F)$; $\Phi_T(S)\, T = TS$ biçiminde tanımlı f-cebir homomorfizması vardır. E ve F, $Z(E)$ üzerinde f-modülleri ve T f-lineer dönüşüm olduğundan (Bkz. 3.4.7. teoreminin ispatı)

$$S.x = T^{-1}T(S.x) = T^{-1}(S.Tx)$$

eşitliği T^{-1} in f-lineer dönüşüm olduğunu gösterir.

$x \in F$ olmak üzere, $f \in F^{\sim}$ iken her $S \in Z(E)$ için T^{-1} in f-lineerliğinden

$$\psi_{T^{-1}x, f}(S) = f(S.T^{-1}x) = f(T^{-1}(S.x)) = (T^{-1})^{\sim} f(S.x) = \psi_{x, (T^{-1})^{\sim} f}(S)$$

olduğundan $\Psi(T^{-1}x) \subseteq \Psi(x)$ dir. Böylece T^{-1} f-orthomorfizmasıdır. 3.4.5. Teoreminden T dikliği koruyan operatördür.

- 3.4.8. Teoreminin hipotezinde, T nin birebirliği yerine, 3.3.11. ve 3.3.18. teoremlerinin görüşünde değişik durumlar kullanılabilir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

İki Riesz uzayı arasında sıra sınırlı bir operatörün dikliği koruyan operatö olması ile bu uzayların merkezleri arasında f-cebir homomorfizmasını olması durumlarından birinin varlığının diğerinin varlığını garanti etti gösterildi. Riesz uzaylarının cebirsel zengin merkeze ve topolojik dol merkeze sahip olmaları durumlarının yapılanlar için önemi vurguland Böylece sıra sınırlı dikliği koruyan operatörün adjointinin de dikliği koruya operatör olması için gerekli ve yeterli şartlar verildi. Zayıf hipotezler altınd sıra sınırlı dikliği koruyan operatörlerin tersinin var olması ve tersinin d dikliği koruyan operatör olması çalışıldı.

Sıra sınırlı olmayan operatörler için bu yapılanlar bir araştırma konusudur. B konuda çalışmalarımız devam etmektedir.

(

KAYNAKLAR

Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Positive Operators, **Academ Press**, London.

Alpay, Ş., Turan, B., 1998, On the commutant of the ideal centre, **Note (Matematica** 18, 63-69.

Cristescu, R., 1977, Topological Vector Spaces, **Noordhoff Internation Publishing**, Leiden.

Hart, D.R., 1985, Some properties of disjointness preserving operator **Proc. A** 88, 183-197.

Lotz, H.P.,1975, Extensions and liftings of positive linear mappings o Banach lattices, **Trans. A.M.S.** 211, 85-100.

Luxemburg, W.A.J., Zaanen, A.C., 1971, Riesz Spaces I, **North Hollan** Amsterdam.

Luxemburg, W.A.J., Schep, A.R., 1978, A Radon-Nikodym type theorem fc positive operators and a dual, **Indag. Math.** 81, 357-375.

Meyer, M., 1978, Richesses du centre d'un espace vectoriel réticulé, **Matl Ann.** 236, 147-169.

Pagter, B.de, 1981, f-Algebras and Orthomorphisms, Ph.D. Dissertatior **University of Leiden.**

Turan, B., 2000, On f -linearity and f -orthomorphisms, **Positivity** 4 293-301.

Zaanen, A.C., 1983, Riesz Spaces II, **North Holland**, Amsterdam.

ÖZGEÇMİŞ

Cüneyt ÇEVİK, 1974 yılında Ankara'da doğdu. İlköğrenimini ve ortaöğrenimini Ankara'da tamamladı. 1992 yılında girdiği Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 1996 yılında mezun oldu. 1997 yılında aynı bölüme araştırma görevlisi olarak girdi. Halen bu görevini sürdürmektedir.