b-ÖZELLİĞİNİ SAĞLAYAN RİESZ UZAYLARI ve b-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLER

Birol ALTIN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2002
ANKARA

Birol ALTIN tarafından hazırlanan b-ÖZELLİĞİNİ SAĞLAYAN RİESZ UZAYLARI ve b-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLER adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr. Cevriye TONYALI
Tez Yöneticisi

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Şafak Alpay

Üye : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

Üye : Y. Doç. Dr. Cevriye Tonyalı

Üye : Doç. Dr. Bahri Turan

Üye : Doç. Dr. Zafer Ercan,

Bu tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Esaslarına uygundur.

İÇİNDEKİLER

b-ÖZELİLİĞİNİ SAĞLAYAN RİESZ UZAYLARI ve b-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLER
(DOKTORA TEZİ)

BİROL ALTIN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ağustos 2002

ÖZET

Bu tez çalışmasında, b-özelliğine sahip Riesz uzayı tanımı yapıldı, ve b-özelliğine sahip Riesz uzayları için bazı sonuçlar verildi. Daha sonra E bir AL-uzay ve F b-özelliğine sahip bir Banach örgüsü iken E den F içine tanımlı her sürekli operatörün sıra sınırlı olduğu yani; $L(E,F) = \mathcal{L}_b(E,F)$ eşitliğinin sağlandığı görüldü. Çarpım ve bölüm Riesz uzaylarının b-özelliğini ne zaman sağlayacağı tartışıldı. Tezin son kısmında ise b-zayıf kompakt operatörlerin tanımı yapılarak bu operatörlerin bir karekterizasyonu ile bazı özellikleri elde edildi.

Bilim Kodu	: 403.03.01
Anahtar Kelimeler	: b-özelliği, b-sıra sınırlı küme, b-zayıf kompakt operatör
Sayfa Adedi	: 65
Tez Yöneticisi	: Yrd.Doç.Dr. Cevriye TONYALI

b-PROPERTY ON RİESZ SPACES and b-WEAKLY COMPACT OPERATORS

(Ph.D.Thesis)

BİROL ALTIN

GAZI UNIVERSITY
INSTUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

August 2002

ABSTRACT

In this thesis we define " b-property" on the Riezs spaces and we give some results about Riesz spaces which has b-property. When E is an AL-space and F is a Banach lattice with b-property, it is seen that each continous operator from E into F is order bounded; that is the equality $L(E,F) = \mathcal{L}_b(E,F)$ holds. We discuss the question "when does a cartesian product and a quotient of Riesz spaces has the b-property". In the last part of this thesis we define the classes of b-weakly compact operators. And we give a characterization about this kind of operators. Also some properties are found about b-weakly compact operators.

Science Code : 403.03.01
Key words : b-property, b-order bounded set, b-weakly compact operator
Page number : 65
Adviser : Yrd.Doç.Dr. Cevriye TONYALI

TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca değerli ilgi ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen ve fikirleriyle yol gösteren hocalarım Sayın Prof. Dr. Şafak ALPAY, Sayın Yrd. Doç. Dr. Cevriye TONYALI ve Sayın Doç. Dr. Bahri TURAN 'a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Ayrıca bu çalışmam süresince büyük sabır ve özveri ile beni destekleyen Annem, Eşim ve Kız kardeşime şükranlarımı sunarım.

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$[x,y]$	Sıralı aralık
$x \vee y$	x ve y nin supremumu
$x \wedge y$	x ve y nin infumumu
x^+	x ve 0 (vektör uzayının sıfırı) ın supremumu
x^-	-x ve 0 ın supremumu
$\lvert x \rvert$	-x ve x in supremumu
$x \perp y$	$\lvert x \rvert$ ve $\lvert y \rvert$ nin infumumu 0 dır.
$x_\alpha \downarrow x$	$\{x_\alpha\}$ aşağıya yönlendirilmiş bir ağdır ve infumumu x dir.
$x_\alpha \uparrow y$	$\{x_\alpha\}$ yukarı yönlendirilmiş bir ağdır ve supremumu y dir.
$x_\alpha \xrightarrow{o} x$	$\{x_\alpha\}$ ağı x elemanına sıralı yakınsar.
A^d	A kümesini diki
$A \perp B$	Her $x \in A$ ve her $y \in B$ için $x \perp y$ dir.
$\mathcal{L}(E,F)$	Operatörlerin uzayı
$\mathcal{L}_b(E, F)$	Sıra sınırlı operatörlerin uzayı
$\mathcal{L}_{bs}(E, F)$	b-sıra sınırlı operatörlerin uzayı
$\mathcal{L}_r(E, F)$	Reguler operatörlerin uzayı
$\mathcal{L}_n(E,F)$	Sıralı sürekli operatörlerin uzayı
$\mathcal{L}_c(E,F)$	$\sigma-$ sıralı sürekli operatörlerin uzayı

$L(E,F)$	Sürekli operatörlerin uzayı
$E^{\sim}$	E uzayının sıra duali
$E_n^{\sim}$	E uzayının sıra sürekli duali
T'	T dönüşümünün eşleği
V^*	V uzayının cebirsel duali
$\langle X,X' \rangle$	Dual sistem
$\sigma(X,X')$	X üzerindeki zayıf topoloji
$\lvert\sigma\rvert(E,A)$	E üzerindeki mutlak zayıf topoloji
$W(E,X)$	Zayıf kompakt operatörlerin uzayı
$W^o(E,X)$	Sıra zayıf kompakt operatörlerin uzayı
$W^b(E,X)$	b-zayıf kompakt operatörlerin uzayı

1. GİRİŞ

E ve F iki Banach örgüsü olmak üzere E uzayından F içine tanımlı sürekli operatörler uzayı L(E,F) nin sıra sınırlı operatörler uzayı $\mathcal{L}_b(E,F)$ ile çakışması ilk olarak 1936 yılında Kantorovich, L.V. tarafından çalışılmıştır. Kantorovich, L.V. 1936 yılında "Concerning the general theory of operators in semi-ordered spaces" isimli çalışmasında E bir Banach örgüsü F ise bir Dedekind tam birimli AM-uzay olduğunda $L(E,F) = \mathcal{L}_b(E,F)$ eşitliğinin var olduğunu göstermiştir. Bir yıl sonra Kantorovich, L.V., Vulikh, B.Z. ile birlikte "Sur la representation des operations lineares" isimli çalışmalarında, E bir AL-uzay F ise bir KB-uzayı olduğunda da yine $L(E,F) = \mathcal{L}_b(E,F)$ eşitliğinin sağlandığını göstermişlerdir.

1991 yılında Meyer-Nieberg, P. E bir AL-uzay F ise p-özelliğine sahip bir Banach örgüsü olduğunda da $L(E,F) = \mathcal{L}_b(E,F)$ eşitliğinin sağlandığını göstermiştir (Meyer-Nieberg, P., 1991, Banach Lattices, Springer Verlag, Teorem 1.5.11.). KB-uzayları p-özelliğine sahip olduğundan Meyer-Nieberg, P. bu sonucu ile Kantorovich, L.V. ve Vulikh, B.Z.`nin çalışmasını genelleştirmiş oldu.

Bu tezin üçüncü bölümünde, b-özelliğine sahip uzayların tanımı verilerek E bir AL–uzay F ise b-özelliğine sahip Banach örgüsü olduğunda da $L(E,F) = \mathcal{L}_b(E,F)$ eşitliğinin doğruluğu gösterildi. p-özelliğine sahip her Banach örgüsü b-özelliğine de sahiptir. Böylece burada elde edilen sonucun Meyer-Nieberg, P.`nin çalışmasının bir genelleştirmesi olduğu görüldü. Bu bölümde b-özelliğine sahip Riesz uzayların özellikleri incelendi. Ayrıca Bölüm 3'de bir E Riesz uzayıda b-sıra sınırlı küme tanımı verildi. Bu tanımdan faydalanarak iki Riesz uzayı arasında tanımlanan b-sıra sınırlı operatörün tanımı yapıldı. Bunun yanında b-sıra sınırlı operatörlerin daha önce bilinen preregular operatörler ile çakıştığı görüldü. İki Riesz uzayı arasında tanımlı bir operatörün b-sıra sınırlı olması için eşlek dönüşümünün sıra sınırlı operatör olmasının gerekli ve yeterli koşul olduğu görüldü. Böylece preregular operatörlerin de yeni bir karekterizasyonu elde edilmiş oldu.

Dördüncü bölümde, I bir damga kümesi olmak üzere $\{E_i : i \in I\}$ Riesz uzaylarının kartezyen çarpımının b-özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşulun her bir $i \in I$ için E_i Riesz uzayının b-özelliğine sahip olduğu görüldü. $\{E_n : n \in \mathbb{N}\}$ Banach örgülerinin bir dizisi olmak üzere $(E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots)_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ Banach örgülerinin de b-özelliğine sahip olması karekterize edilmiştir.

Beşinci bölümde, Dodds, P.G., 1975 yılında sıra zayıf kompakt operatör tanımını yaparak bazı özelliklerini elde etmiştir. Bu tanımdan esinlenerek 3. Bölümde tanımlanan b-sıra sınırlı küme tanımından yararlanarak bir Banach örgüsünden bir Banach uzayı içine tanımlı b-zayıf kompakt operatör tanımı yapıldı. B-zayıf kompakt operatörler uzayının, zayıf kompakt operatörler uzayı ile sıra zayıf kompakt operatörler uzayı arasına yerleştiği gözlendi. b-zayıf kompakt operatörler uzayının sürekli opertörler uzayının kapalı bir alt vektör uzayı da olduğu gözlendi. Banach örgüleri arasında tanımlı sürekli operatörlerin bileşkelerinin hangi durumlarda bir b-zayıf kompakt operatör olacağı incelendi. Bir b-zayıf kompakt operatörün sürekli iki eşlek dönüşümünün bir sıra zayıf kompakt operatör olduğu elde edildi. Bir örnekle bu Önermenin tersinin doğru olmadığı vurgulandı. Dodds, P.G. `nin 1975 yılında "o-weakly compact mappings of Riesz spaces, Tran. Amer. Math. Soc., 214, 389-402." isimli çalışmasında sıra zayıf kompakt operatörleri karekterize etmiştir. Bu karekterizasyondan faydalanarak b-zayıf kompakt operatörler için Önerme 5.2.3. de bir karekterizasyon verilmiştir. Bu karekterizasyonun bir sonucu olarak E ve F iki Banach örgüsü S, T E uzayından F içine tanımlı $0 \leq S \leq T$ koşulunu sağlayan iki operatör ve T bir b-zayıf kompakt operatör olduğunda S operatörünün de bir b-zayıf kompakt operatör olduğu elde edildi (Sonuç 5.2.4.).

Bir Banach örgüsünün KB-uzayı olması için özdeşlik dönüşümünün bir b-zayıf kompakt operatör olmasının gerekli ve yeterli koşul olduğu görüldü (Önerme 5.2.7.). Yine bu bölümde zayıf kompakt operatörler ve sıra zayıf kompakt operatörlerin karekterizasyonuna (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985) Teorem 17.2, Teorem 18.6. Teoremlerine benzer biçimde E bir sıra sürekli norma sahip Banach örgüsü ve X bir Banach uzayı olmak üzere T, E uzayından X içine sürekli bir operatör olsun.

E Banach örgüsünün X'' içinde ürettiği band B ise "T operatörünün bir b-zayıf kompakt operatör olması için gerekli ve yeterli koşul $T''(B) \subseteq X$ olmasıdır." Sonucunu elde ederek bu biçimdeki uzaylar arasındaki operatörlerin b-zayıf kompakt olması da karekterize edildi (Önerme 5.2.8.).

2. GENEL TANIM VE ÖNERMELER

2.1. Pozitif Operatörler

Tanım 2.1.1. Üzerindeki "$\geq$" sıralama bağıntısı ile tanımlanmış olan bir gerçel vektör uzayı E ve her $x,y \in E$ için,

i) $x \geq y$ iken her bir $z \in E$ için $x+z \geq y+z$

ii) $x \geq y$ iken her bir $0 \leq \alpha \in IR$ için $\alpha x \geq \alpha y$

şartlarını sağlayan E uzayına sıralı vektör uzayı denir. E sıralı vektör uzayının $x \geq 0$ bağıntısını sağlayan elemanlarına pozitif diyeceğiz. E uzayındaki pozitif elemanların kümesini $\{x \in E : x \geq 0\}$, E^+ veya E_+ sembollerinden biri ile göstereceğiz. E ve F iki sıralı vektör uzayı olmak üzere bir $T: E \to F$ doğrusal dönüşümüne kısaca operatör diyeceğiz. Ayrıca her bir $x \in E^+$ için $T(x) \geq 0$ oluyorsa T operatörüne pozitif diyeceğiz ve $T \geq 0$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.2. E bir sıralı vektör uzayı ve bu uzayın herhangi iki elemanı x, y olsun. Eğer bir $z \in E$ için;

(i) $x \leq z$ ve $y \leq z$

(ii) $s \in E$ ve $x \leq s$ ve $y \leq s$ iken $z \leq s$

koşulları sağlanıyorsa z elemanına E uzayı içinde x ve y nin supremumu denir.

Tanım 2.1.3. E bir sıralı vektör uzayı ve E'nin herhangi iki elemanı x, y olsun. Eğer bir $z \in E$ için;

(i) $z \leq x$ ve $z \leq y$

(ii) $s \in E$ ve $s \leq x$ ve $s \leq y$ iken $s \leq z$

koşulları sağlanıyorsa z elemanına E uzayı içinde x ve y nin infumumu denir.

Tanım 2.1.4. Bir sıralı vektör uzayı E olsun. Eğer üzerindeki sıralamaya göre E uzayının her x, y çiftinin supremumu E uzayına ait ise bu uzaya Riesz uzayı denir.

Bundan sonra supremum ve infumum yerine sırasıyla,

$$x \vee y := \sup\{x,y\}, \quad x \wedge y := \inf\{x,y\}$$

sembollerini kullanacağız.

Örnek 2.1.5. Ω boştan farklı bir küme olsun. Ω kümesi üzerinde tanımlı gerçel değerli fonksiyonların vektör uzayı IR^{Ω}, her bir $f, g \in IR^{\Omega}$ çifti için,

$$[\, f \leq g \Leftrightarrow \forall\ \omega \in \Omega \text{ için } f(\omega) \leq g(\omega)\,]$$

noktasal sıralama ile bir Riesz uzaydır. Burada her bir $\omega \in \Omega$ ve her $f,g \in IR^{\Omega}$ için

$$f \vee g\,(\omega) := \max\{f(\omega), g(\omega)\}$$

$$f \wedge g\,(\omega) := \min\{f(\omega), g(\omega)\}$$

ifadesi sağlanır.

Aşağıdaki uzaylar üzerindeki noktasal sıralama ile birer Riesz uzayıdır.

(i) Ω topolojik uzayı üzerinde tanımlı, gerçel değerli sürekli fonksiyonların uzayı $C(\Omega)$,

(ii) Ω topolojik uzayı üzerinde tanımlı gerçel değerli sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı $C_b(\Omega)$,

(iii) Ω üzerinde tanımlı gerçel değerli sınırlı fonksiyonların uzayı $\ell_\infty(\Omega)$,

(iv) $\ell_p := \left\{(x_1, x_2, \ldots\ldots), \forall n \in IN \ \ x_n \in IR \ \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}, \ (1 \leq p \leq \infty)$

dizi uzayı,

Ayrıca, (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olmak üzere; $0 < p < \infty$ için

$$L_p(\mu) := \{ f : \; f : X \rightarrow IR \;\; \text{ölçülebilir ve} \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \}, \text{ ve}$$

$$L_\infty(\mu) := \{ f : \; f : X \rightarrow IR \;\; \text{ölçülebilir ve ess sup} \, |f| < \infty \}$$

uzayları,

$$f \leq g \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \;\; \text{hhh} \; x \in X$$

sıralaması ile birer Riesz uzayı olurlar.

E bir Riesz uzayı ve $x \in E$ olsun. $x^+ := x \vee 0$, $x^- := (-x) \vee 0$ ve $|x| := x \vee (-x)$ elemanlarına sırayla $x \in E$ elemanının pozitif kısmı, negatif kısmı ve modülü diyeceğiz. Ayrıca $x,y \in E$ olsun. Eğer $|x| \wedge |y| = 0$ ise x ile y birbirine diktir denir ve $x \perp y$ ile gösterilir. A, E'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $\{x \in E$: Her bir $y \in A$ için $x \perp y\}$ kümesine A kümesinin dik tümleyeni denir ve A^d ile gösterilir.

<u>Önerme 2.1.6.</u> E bir Riesz uzayı ve $x,y,z \in E$ olsun. O zaman aşağıdaki bağıntılar sağlanır:

(i) $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$ ve $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$

(ii) $x + y = x \wedge y + x \vee y$

(iii) $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ ve $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$

(iv) Her $0 \leq \alpha \in IR$ için $\alpha(x \vee y) = (\alpha x) \vee (\alpha y)$ ve $\alpha(x \wedge y) = (\alpha x) \wedge (\alpha y)$

(v) $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$, $x^+ \wedge x^- = 0$

(vi) $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x-y|)$, $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x-y|)$

(vii) $|x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x+y| + |x-y|)$, $|x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x+y| - |x-y|)$

(viii) $\big|\, |x| - |y| \,\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ (Üçgen eşitsizliği)

(ix) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x-y|$, $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x-y|$

(x) Eğer $x, y, z \in E^+$ ise $x \wedge (y + z) \leq x \wedge y + x \wedge z$

(Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Önerme 1.2. ve Önerme 1.5.).

E bir Riesz uzayı ve $\{x_\alpha\}$, E Riesz uzayında bir ağ olsun. Eğer $\alpha \leq \beta$ iken $x_\alpha \leq x_\beta$ ($x_\beta \leq x_\alpha$) ise $\{x_\alpha\}$ ağına artan (azalan) denir ve $x_\alpha\uparrow$ ($x_\alpha\downarrow$) sembolü ile gösterilir. E Riesz uzayının bir elemanı x olmak üzere $x_\alpha\uparrow x$ ($x_\alpha\downarrow x$) sembolleri $x_\alpha\uparrow$ ($x_\alpha\downarrow$) $\sup\{x_\alpha\}=x$ ($\inf \{x_\alpha\} = x$) anlamına gelecektir. Eğer her bir $x\in E^+$ için $n^{-1} x\downarrow 0$ sağlanıyorsa E Riesz uzayına Archimedean denir.

<u>Önerme 2.1.7.</u> (Kantorovich) E bir Riesz uzayı, F Archimedean Riesz uzayı ve $T: E^+ \rightarrow F^+$ toplamsal (Her $x,y \in E^+$ için $T (x + y) = T(x) + T(y)$) olsun. O zaman T, E den F içine bir tek pozitif operatöre genişler ve (genişlemeyi yine T ile gösterirsek) her bir $x \in E$ için, $T (x) = T(x^+) - T(x^-)$ biçimindedir (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Önerme 1.7.).

Bir E Riesz uzayından bir F Riesz uzayı içine tanımlı operatörlerin vektör uzayı $\mathcal{L}(E,F)$ olsun. Her bir $S,T\in \mathcal{L}(E,F)$ için "$T \geq S \Leftrightarrow T-S \geq 0$ (her bir $x\in E^+$ için $T(x) \geq S(x)$)" sıralaması ile $\mathcal{L}(E,F)$ bir sıralı vektör uzayıdır.

E ve F birer Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun. Eğer $\mathcal{L}(E,F)$ sıralı vektör uzayında $\{T, -T\}$ kümesinin supremumu var ise T operatörünün modülü vardır denir ve $|T| := T \vee (-T)$ ile gösterilir.

Bir E Riesz uzayının $x \leq y$ şartını sağlayan iki elemanı x, y olsun. $[x,y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ ile tanımlı alt kümeye Riesz uzayının bir sıralı aralığı denir. E uzayının boştan farklı bir alt kümesi A olsun. Eğer her bir $y \in A$ için $y \leq x$ $(x \leq y)$ olacak şekilde bir $x \in E$ varsa A kümesine üstten (alttan) sınırlıdır denir. Hem üstten hem alttan sınırlı olan kümeye sıra sınırlı küme denir. Açık olarak bir kümenin sıra sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul bu kümenin bir sıralı aralık tarafından kapsanmasıdır.

<u>Tanım 2.1.8.</u> E, F iki Riesz uzayı ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun. Eğer T operatörü E Riesz uzayının sıralı aralıklarını F Riesz uzayının sıra sınırlı kümelerine dönüştürüyorsa T operatörüne sıra sınırlı operatör denir.
Bir E Riesz uzayından bir F Riesz uzayı içine tanımlı sıra sınırlı olan bütün operatörlerin uzayı $\mathcal{L}_b(E,F)$ ile gösterilir.

İki pozitif operatörün farkı şeklinde yazılabilen operatöre regüler operatör denir. Bir E Riesz uzayından bir F Riesz uzayı içine tanımlanan bütün regüler operatörlerin uzayını $\mathcal{L}_r(E,F)$ ile göstereceğiz. Açık olarak,

$$\mathcal{L}_r(E,F) \subseteq \mathcal{L}_b(E,F) \subseteq \mathcal{L}(E,F)$$

vektör uzayı kapsamaları sağlanır. Kısalık için $\mathcal{L}(E,E)$, $\mathcal{L}_b(E,E)$, $\mathcal{L}_r(E,E)$ sırasıyla $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{L}_b(E)$, $\mathcal{L}_r(E)$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.9. E bir Riesz uzayı olsun. Eğer E Riesz uzayının boştan farklı ve üstten sınırlı her alt kümesinin (sayılabilir alt kümesinin) bir supremumu varsa E Riesz uzayına Dedekind tam (σ-Dedekind tam) Riesz uzayı denir.

Bir E Riesz uzayının Dedekind tam (σ-Dedekind tam) olması için gerekli ve yeterli koşul $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x$ ($0 \leq x_n \uparrow \leq x$) olduğunda $\sup\{x_\alpha\}$ ($\sup\{x_n\}$) nın E içinde var olmasıdır. $L_P(\mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$) uzayları Dedekind tam Riesz uzaylarına örnek oluştururlar.

Önerme 2.1.10. (Riesz-Kantorovich) E, F Riesz uzayları ve F Dedekind tam olsun. Bu durumda $\mathcal{L}_b(E,F)$ sıralı vektör uzayı, bir Dedekind tam Riesz uzaydır. Her $x \in E^+$ ve her bir $S, T \in \mathcal{L}_b(E,F)$ çifti için,

$$S \vee T\,(x) = \sup\{\, S(y) + T(z) \;:\; y, z \in E^+ \text{ ve } y + z = x \,\}$$

$$S \wedge T\,(x) = \inf\{\, S(y) + T(z) \;:\; y, z \in E^+ \text{ ve } y + z = x \,\}$$

$$|T|\,(x) = \sup\{\, |Ty| \;:\; |y| \leq x \,\}$$

$$T^+(x) = \sup\{\, Ty \;:\; 0 \leq y \leq x \,\}$$

$$T^-(x) = \sup\{\, -Ty \;:\; 0 \leq y \leq x \,\}$$

eşitlikleri gerçekleşir (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Önerme 1.13.).

2.2. Sıralı Projeksiyonlar

Tanım 2.2.1. G, bir E Riesz uzayının alt vektör uzayı olsun. Eğer her bir $x, y \in G$ çiftinin supremumu G vektör uzayında bulunuyorsa bu alt uzaya E nin bir Riesz alt uzayı denir.

Bir E Riesz uzayının bir altkümesi A olsun. Eğer "$|x| \leq |y|$ ve $y \in A$ iken $x \in A$" oluyorsa A kümesine katı (solid) denir. Riesz uzayının katı olan alt vektör uzaylarına ise ideal denir. $x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x-y|)$ eşitliğinden her idealin bir Riesz alt uzayı olduğu görülür.

<u>Tanım 2.2.2.</u> E bir Riesz uzayı ve $\{x_\alpha\}$, E Riesz uzayında bir ağ olsun. Eğer her bir α için $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ ve $y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde bir $\{y_\alpha\}$ ağı ve bir $x \in E$ var ise $\{x_\alpha\}$ ağına x elemanına sıralı yakınsıyor denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ ile gösterilir.

$$[\ \{x_\alpha\} \subseteq A \ \text{ ve } \ x_\alpha \xrightarrow{o} x \Rightarrow x \in A\ ]$$

önermesini sağlayan E Riesz uzayının A altkümelerine sıra kapalı altkümeler denir. Sıra kapalı olan ideallere de band diyeceğiz.

A bir E Riesz uzayının boştan farklı bir altkümesi olsun. A kümesini kapsayan en küçük (kapsama bağıntısına göre) ideale A kümesinin doğurduğu ideal denir. A kümesinin doğurduğu ideal,

$\{ x \in E \ : \ \exists\, x_1, x_2, ..., x_n \in A \ \text{ ve } \ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in IR^+ ,\ |x| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, |x_i|\ \}$ dir.

$x \in E$ elemanının doğurduğu ideal A_x ise $A_x = \{ y \in E \ : \ \exists\ \lambda > 0 ,\ |y| \leq \lambda\, |x| \}$ kümesi olur. Bir Riesz uzayında tek elemanlı kümelerin ürettikleri ideallere esas ideal denir. Benzer olarak A kümesinin doğurduğu band, A kümesini kapsayan en küçük banddır.

<u>Önerme 2.2.3.</u> Bir E Riesz uzayının bir ideali A olsun.A ideali tarafından üretilen band $\{ x \in E \ : \exists\, \{x_\alpha\} \subseteq A^+$ ve $0 \leq x_\alpha \uparrow |x| \}$ kümesidir. Üstelik tek bir x elemanının ürettiği band B_x ise $B_x = \{ y \in E : \ |y| \wedge n|x| \uparrow |y| \}$ dir.

Bir E Riesz uzayı içinde bir band B olsun. Eğer $E = B \oplus B^d$ eşitliği sağlanıyorsa B uzayına projeksiyon band denir. Bir E Dedekind tam Riesz uzayı içindeki her B band; için $E = B \oplus B^d$ şeklinde yazılır. E bir Riesz uzayı ve $0<e \in E$ olsun. Eğer $B_e = E$ sağlanıyorsa e elemanına zayıf sıra birim denir. Bir Archimedean Riesz uzayında $0 < e \in E$ elemanının zayıf sıra birim olması için gerekli ve yeterli koşul $x \perp e$ iken $x = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.2.4. E, F iki Riesz uzayı ve $T: E \to F$ bir operatör olsun.

(a) E içinde $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken F içinde de $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$ sağlanıyorsa T operatörüne sıra sürekli operatör denir.

(b) E içinde $x_n \xrightarrow{o} 0$ iken F içinde de $Tx_n \xrightarrow{o} 0$ sağlanıyorsa T operatörüne σ-sıra sürekli operatör denir.

$T: E \to F$ pozitif operatörünün sıra sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ iken F içinde $Tx_\alpha \downarrow 0$ sağlanmasıdır.

$$\mathcal{L}_n(E,F) := \{ T \in \mathcal{L}_b(E,F) \ : \ T \text{ sıra süreklidir} \} \text{ ve}$$

$$\mathcal{L}_c(E,F) := \{ T \in \mathcal{L}_b(E,F) \ : \ T \ \sigma\text{- sıra süreklidir} \} \text{ uzayları}$$

F Dedekind tam ise $\mathcal{L}_b(E,F)$ Riesz uzayı içinde birer band olurlar (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O.,1985, Teorem 4.4).

2.3. Pozitif Doğrusal Fonksiyoneller

E bir Riesz uzayı olsun. E üzerinde tanımlı gerçel değerli sıra sınırlı operatörlerin vektör uzayına E Riesz uzayının sıra duali denir ve $E^{\sim}$ ile gösterilir.

$f \in E^{\sim}$ olsun. Eğer her bir $x \in E^{+}$ için $f(x) \geq 0$ ise f fonksiyoneline pozitif doğrusal fonksiyonel denir. Her bir $f, g \in E^{\sim}$ çifti için

$$f \leq g \Leftrightarrow \text{Her bir } x \in E^{+} \text{ için } f(x) \leq g(x)$$

sıralaması ile $E^{\sim}$ bir sıralı vektör uzayıdır. Üstelik IR bir Dedekind tam Riesz uzayı olduğundan Önerme 2.1.10. dan $E^{\sim}$ da bir Dedekind tam Riesz uzaydır.

$E^{\sim}$ Riesz uzayının sıra duali $(E^{\sim})^{\sim} := E^{\sim\sim}$ ile E üzerinde tanımlı bütün sıra sürekli ve sıra sınırlı doğrusal fonksiyonellerin uzayı ise $E^{\sim}_{n}$ ile gösterilecektir. $T: E \rightarrow F$ bir operatör olsun. Eğer her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ sağlanıyorsa T operatörüne örgü homomorfizmi denir. Aynı zamanda birebir ve örten olan Riesz homomorfizmlerine örgü izomorfizmi denir. Eğer E Riesz uzayı ile F Riesz uzayı arasında bir örgü izomorfizmi varsa E ve F uzayları Riesz izomorfiktir denir.

<u>Tanım 2.3.1.</u> E bir Riesz uzayı olsun. Eğer her bir $0 \neq x \in E$ için $f(x) \neq 0$ olacak şekilde bir $f \in E^{\sim}$ bulunubiliyorsa $E^{\sim}$ uzayı E nin noktalarını ayırıyor denir.

$T: E \rightarrow F$ bir birebir ve örten operatör olsun. T operatörünün örgü izomorfizması olması için gerekli ve yeterli koşul T ve T^{-1} operatörlerinin pozitif olmasıdır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 7.3).

V bir vektör uzayı olmak üzere V üzerinde tanımlı doğrusal fonksiyonellerin oluşturduğu vektör uzayı V* ile gösterilir. W bir başka vektör uzayı ve $T : V \to W$ bir operatör olsun. Her bir $f \in W^*$ ve her bir $v \in V$ için $T^* f(v) = f(T(v))$ olarak tanımlanan $T^* : W^* \to V^*$ operatöre T operatörünün cebirsel eşleği (transpozu) denir. Genelde $< T^* f, v > = < f, Tv >$ biçiminde gösterilir.

<u>Önerme 2.3.2.</u> E ve F Riesz uzayları olmak üzere $T: E \to F$ bir sıra sınırlı operatör ise $T^*(F^\sim) \subseteq E^\sim$ sağlanır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 5.8.).

T^* operatörünün $F^\sim$ uzayına kısıtlanmasına T operatörünün (sıra) eşleği denir ve T' ile gösterilir. Yani $T' : F^\sim \to E^\sim$; $< T' f, x > = < f, Tx >$, $x \in E$ dir.

2.4. Topolojik Vektör Uzayları

X bir vektör uzayı ve τ ise E üzerinde tanımlı bir topoloji olsun. Eğer

$+ : X \times X \to X \quad ; \ (x, y) \to x+y$

$* : \mathbb{R} \times X \to X \quad ; \ (\lambda, x) \to \lambda x$

biçiminde tanımlanan iki fonksiyon τ topolojisine göre sürekli ise τ ya bir doğrusal topoloji, (X, τ) ikilisine de bir topolojik vektör uzayı denir.

<u>Tanım 2.4.1.</u> (X, τ) bir topolojik vektör uzayı olsun. Eğer X uzayına ait sıfırın bir konveks komşuluklar tabanı bulunabiliyorsa (X, τ) topolojik uzayına ise bir yerel konveks (lokal konveks) topolojik vektör uzayı adı verilir.

Tanım 2.4.2. (X, τ) bir yerel konveks topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer sıfırın her bir V komşuluğu için $A \subseteq \lambda V$ koşulunu sağlayan bir $\lambda > 0$ gerçel sayısı bulunabiliyorsa A kümesine τ-sınırlı küme denir.

X bir topolojik vektör uzayı ve X üzerinde tanımlı yarınormların bir Q ailesi verilsin. Q ailesindeki her bir yarınormu sürekli yapan X üzerinde en kaba topoloji vardır. Bu topoloji altında X bir konveks uzay olup sıfırın kapalı komşuluklar tabanı $\sigma(\theta) = \{ \{x : \sup_{1 \le i \le n} p_i(x) \le \varepsilon\},\ \varepsilon > 0,\ p_i \in Q \}$ ailesidir.

X ve X' iki vektör uzayı ve XxX' üzerinde tanımlı bir ikilineer (bilineer) form $<,>$ olsun. Eğer $<,>$ ikilineer formu,

D: Her bir $0 \neq x \in X$ için $< x, x' > \neq 0$ olacak şekilde bir $x' \in X'$ vardır.

D': Her bir $0 \neq x' \in X'$ için $< x, x' > \neq 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır.

koşullarını sağlarsa X ve X' ne bir dual ikili denir ve $<X, X'>$ ile gösterilir.

$<X,X'>$ bir dual ikili olsun. Her bir $x' \in X'$ ve her bir $x \in X$ için $p_{x'}(x) = |<x,x'>|$ biçiminde tanımlanan $p_{x'}: X \to IR$ fonksiyonu bir yarınormdur.

$Q = \{ p_{x'} : x' \in X'\}$ yarınormlar ailesinin X üzerinde tanımladığı topolojiye zayıf topoloji denir ve $\sigma(X,X')$ ile gösterilir. $\sigma(X,X')$-topolojisine göre sıfırın bir kapalı komşuluklar tabanı

$\{ \{x : \sup_{1 \le i \le n} |< x, x'_i >| \le 1\} :$ her bir $1 \le i \le n$ için $x'_i \in X' \}$ ailesidir.

$Q' = \{ p_x : x \in X\}$, $p_x(x') = |<x,x'>|$, yarınormların ailesinin X' üzerinde doğurduğu zayıf topoloiyi ise $\sigma(X',X)$ ile göstereceğiz. Bu topolojiye göre $\{x'_\alpha\} \subseteq X'$, $x'_\alpha \to 0$ yakınsaması için gerekli ve yeterli koşul her bir $x \in X$ için IR içinde $< x,x'_\alpha > \to 0$ yakınsamasının sağlanmasıdır.

Tanım 2.4.3. $< X,X' >$ bir dual ikili ve τ, X üzerinde bir yerel konveks topoloji olsun. Eğer (X, τ) uzayının topolojik duali X' oluyorsa τ topolojisine dual ikili ile uyumludur denir.

Önerme 2.4.4. (Mackey) $< X, X' >$ bir dual ikili olsun. Dual ikili ile uyumlu olan X üzerinde tanımlı tüm yerel konveks topolojilere göre X uzayının sınırlı kümeleri aynıdır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 9.25.).

X aşikar olmayan bir normlu uzay ve norm dual X' ise her bir $(x, x') \in XxX'$ için $< x, x' > = x'(x)$ biçiminde tanımlanan ikilineer formu D ve D' şartlarını sağlayacağından her bir normlu uzay üzerinde her zaman bir zayıf topoloji tanımlanabilir.

Önerme 2.4.5. (Eberlein-Smulian) Bir X normlu uzayının bir alt kümesi A olsun. A kümesinin yerel zayıf kompakt (zayıf kompakt) olması için gerekli ve yeterli koşul A içindeki her bir dizinin X uzayının (A kümesinin) bir elemanına yakınsayan bir alt dizisinin var olmasıdır. (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 10.13.).

E bir Riesz uzayı ve $p: E \to \mathbb{R}$ bir yarınorm olsun. Eğer E içinde $|x| \leq |y|$ koşulunu sağlayan her $x, y \in E$ için $p(x) \leq p(y)$ oluyorsa p ye Riesz yarınormu denir.

E bir Riesz uzayı ve $\rho: E \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer ρ aşağıdaki şartları sağlarsa ρ foksiyonuna bir pseudonorm denir:

(i) $\forall\ x \in E$ için $\rho(x) \geq 0$,

(ii) $\forall\ x, y \in E$ için $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$,

(iii) $\forall\ x \in E$ için $\lambda \to 0$ yakınsarken $\rho(\lambda x) \to 0$ dır.

(iv) $\forall\ x, y \in E$ için $|x| \leq |y|$ iken $\rho(x) \leq \rho(y)$.

E bir Riesz uzayı ve τ, E üzerinde bir doğrusal topoloji olsun. τ sıfırın, katı kümelerden oluşan bir komşuluklar tabanına sahip ise τ topolojisine yerel katı topoloji, (E, τ) ikilisine ise yerel katı Riesz uzayı denir.

E bir Riesz uzayı ve Q, E üzerinde tanımlı Riesz yarınormlarının bir ailesi olsun. Riesz yarınormlar ailesi Q'nun E üzerine koyduğu topolojiye yerel konveks-katı topoloji ve (E, τ) ikilisine ise yerel konveks-katı Riesz uzayı denir.

Önerme 2.4.6. (E,τ) Hausdorff yerel konveks-katı Riesz uzayı olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) E uzayının pozitif kısmı E^+ kümesi τ-kapalıdır.

(ii) E içinde $x_\alpha \uparrow$ ve $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$ şartını sağlayan $\{x_\alpha\}$ ağı için $\sup\{x_\alpha\} = x$ dir.

(iii) E uzayının her bir bandı τ- kapalıdır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 11.2.).

E bir Riesz uzayı ve A, $E^\sim$ uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her bir $\varphi \in A$ ve her bir $u \in E$ için $\rho_\varphi(u) = |\varphi|(|u|)$ ile tanımlı ρ_φ, E üzerinde bir Riesz yarınormudur. $\{\rho_\varphi : \varphi \in A\}$ Riesz yarınormlarının E üzerine koyduğu yerel konveks-katı topolojiye mutlak zayıf topoloji denir ve $|\sigma|(E,A)$ ile gösterilir.

Önerme 2.4.7. Bir Riesz uzayı üzerindeki yerel konveks topolojinin yerel konveks-katı topoloji olması için gerekli ve yeterli koşul sıfırın konveks ve katı kümelerden oluşan bir komşuluklar tabanına sahip olmasıdır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 11.1.).

Tanım 2.4.8. Tam metriklenebilir yerel konveks-katı Riesz uzaylarına bir Frechet örgüsü denir.

Tanım 2.4.9. (Dodds-Duhoux) E bir Riesz uzayı, X bir topolojik vektör uzayı ve $T : E \to X$ bir operatör olsun. Eğer X uzayının her bir [a,b] sıra aralığı için T([a,b]), X uzayının bir topolojik sınırlı alt kümesi oluyor ise T operatörüne bir aralık sınırlı operatör denir.

Önerme 2.4.10. E bir Frechet örgüsü, X bir topolojik vektör uzayı ve $T: E \to X$ bir operatör ise aşağıdakiler denktir:

(i) T aralık sınırlı operatördür.

(ii) T süreklidir.

(iii) E uzayının her yakınsak $\{x_n\}$ dizisi için $\{T(x_n)\}$, X'in bir topolojik sınırlı dizisidir.

(iv) E uzayının her sıra sınırlı, yakınsak $\{x_n\}$ dizisi için $\{T(x_n)\}$, X' in bir topolojik sınırlı dizisidir (Ercan, Z., 1998).

2.5. Banach Örgüleri

E bir Riesz uzayı ve $\|\,.\,\|$, E üzerinde bir norm olsun. Eğer $|x| \leq |y|$ koşulunu sağlayan her $x,y \in E$ çifti için $\|x\| \leq \|y\|$ oluyorsa $\|\,.\,\|$ normuna E üzerinde bir örgü (lattice) normu denir.

Bir örgü normu ile donatılmış Riesz uzayına normlu Riesz uzayı denir. Ayrıca normlu Riesz uzayı tam ise bu uzay Banach örgüsü (lattice) adını alır. Her bir normlu Riesz uzayının bir yerel konveks-katı Riesz uzayı olduğu açıktır.

Önerme 2.5.1. Normlu bir Riesz uzayının norm duali bir Banach örgüsüdür. (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 12.1.).

Önerme 2.5.2. Bir Banach örgüsünden bir normlu Riesz uzayı içine tanımlanan her bir pozitif operatör süreklidir (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 12.3.).

E bir Banach örgüsü olsun. Eğer E içinde $x_\alpha \downarrow 0$ şartını sağlayan her bir $\{x_\alpha\}$ ağı için $\| x_\alpha \| \downarrow 0$ oluyorsa $\| . \|$ normuna sıra sürekli norm denir.

Önerme 2.5.3. E bir Banach örgüsü olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) E sıra sürekli norma sahiptir.

(ii) E içinde $0 \leq x_n \uparrow \leq x$ ise $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

(iii) E, σ-Dedekind tam ve E içinde $x_n \downarrow 0$ ise $\| x_n \| \downarrow 0$ dir.

(iv) E uzayı E'' uzayı içinde bir idealdir.

(v) E içindeki her bir sıra aralık zayıf kompakt bir kümedir (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 12.9.).

E ve F birer normlu uzayları için E den F içine tanımlanan bütün sürekli operatörlerin vektör uzayını **L**(E,F) ile göstereceğiz.

Örnek 2.5.4. K bir kompakt Hausdorff uzay olmak üzere C(K) ve $L_p(\mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ uzayları Banach örgüleridir.

Tanım 2.5.5. E bir Banach örgüsü olsun.

(i) $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $x \wedge y = 0$ şartını sağlayan her bir $x,y \in E$ için $\|x + y\|^p = \|x\|^p + \|y\|^p$ oluyorsa E ye soyut L_p uzayı denir.

(ii) $x \wedge y = 0$ koşulunu sağlayan her bir $x,y \in E$ için $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ eşitliği sağlanırsa E ye soyut M-uzayı denir. Genelde soyut L_1 uzayına AL-uzayı, soyut M-uzayına ise AM-uzayı denir.

Önerme 2.5.6. E bir Banach örgüsü olsun.

(i) E uzayının bir AL-uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul her bir $x,y \in E^+$ çifti için $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ olmasıdır.

(ii) E uzayının bir AM-uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul her bir $x,y \in E^+$ için $\|x \vee y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ olmasıdır (Zaanen, A.C., 1983).

E bir Riesz uzayı ve $0 < e \in E$ olsun. Eğer her bir $x \in E$ için $|x| \leq \lambda e$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ var ise e elemanına E Riesz uzayının sıra birimi denir.

Önerme 2.5.7. E, bir Banach örgüsü olsun. E uzayının bir AL (AM)- uzay olması için gerekli ve yeterli koşul E' norm dualinin bir AM(AL)-uzay olmasıdır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 12.22.).

Önerme 2.5.8. E bir Banach örgüsü ve F bir Dedekind tam birimli AM-uzayı olsun. O zaman E den F içine her bir sürekli operatör regülerdir.

Yani ; $\mathbf{L}(E,F) = \mathcal{L}_r(E,F)$ dir.

Kanıt: T: $E \to F$ içine bir regüler operatör olsun. O zaman $T = T_1 - T_2$ olacak şekilde $0 \leq T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ vardır. Önerme 2.5.2. den T süreklidir. Yani $\mathcal{L}_r(E,F) \subseteq L(E,F)$ dir.

Şimdi $T \in \mathbf{L}(E,F)$ ve $0 \leq e \in F$ sıra birim olsun. Her bir $x \in E^+$ ve $|y| \leq x$ şartını sağlayan $y \in E$ için $|Ty| \leq \lambda_y \cdot e$ eşitsizliğinden,

$$|Ty| \leq \inf\{\lambda_y . e : |Ty| \leq \lambda_y . e\}$$
$$= \inf\{\lambda_y : |Ty| \leq \lambda_y . e\} . e$$
$$= \|Ty\| e \leq \|T\| \|y\| e \leq \|T\| \|x\| e \quad \text{yani,}$$

$|Ty| \leq \|T\| \|x\| e$ dir.

Dolayısıyla T bir sıra sınırlı operatör olur. Önerme 2.1.10. dan $|T|$ vardır ve $T = |T| -(|T| -T)$ olduğundan T regülerdir. Böylece $\mathcal{L}_r(E,F) = L(E,F)$ dir (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985).■

Tanım 2.5.9. E bir Banach örgüsü olsun. E nin her pozitif artan ve norm sınırlı dizisi, norm yakınsak oluyorsa E uzayına KB-uzayı (Kantorovich-Banach) denir.

Önerme 2.5.10. E bir Banach örgüsü olsun. E nin KB-uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul E nin E'' içinde bir band olmasıdır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 14.12.).

Önerme 2.5.11. E bir AL-uzayı ve F bir KB-uzayı olsun. O zaman $\mathcal{L}_b(E,F) = \mathbf{L}(E,F)$ eşitliği sağlanır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 15.13.).

Önerme 2.5.12. Her AL-uzayı bir KB-uzayıdır.

Kanıt: E bir AL-uzayı, $0 \leq x_n \uparrow$ ve $\sup \|x_n\| \leq k \in \mathbb{R}^+$ olsun. Kabul edelim ki $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olmasın. O zaman $\left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| > \varepsilon$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisinin $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi ve bir $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ vardır.

Böylece,

$$n\varepsilon < \sum_{k=2}^{n+1} \| x_k - x_{k-1} \| = \|x_2 - x_1\| + \|x_3 - x_2\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\|$$

$$= \|x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \ldots + x_{n+1} - x_n \|$$

$$= \|x_{n+1} - x_1\| \leq 2k$$

elde edilir ki bu $\varepsilon > 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla E bir KB-uzayıdır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985).■

<u>Önerme 2.5.13.</u> (Kakutani-Bohnenblust-Nakano)

E Banach örgüsünün bir soyut $L_p(1 \leq p \leq \infty)$ uzay olması için gerekli ve yeterli koşul E nin bir gerçek $L_p(\mu)$ uzayına örgü izometrik olmasıdır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 12.26.).

<u>Önerme 2.5.14.</u> (Kakutani-Bohnenblust ve M. Krein-S. Krein)

E Banach örgüsünün bir birimli AM-uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul (homeomorfizm farkıyla tek) Ω, bir kompakt Hausdorff topolojik uzayı olmak üzere E uzayının $C(\Omega)$ Riesz uzayına örgü izometrik olmasıdır.

Özel olarak, bir Banach örgüsünün AM-uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul bir $C(\Omega)$ uzayının kapalı bir Riesz alt uzayına örgü izometrik olmasıdır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Önerme 12.28.).

2.6. Zayıf Kompakt Operatörler

X bir normlu uzay olmak üzere X üzerinde tanımlanan $\sigma(X,X')$ zayıf topolojisini ω ile, X' üzerinde tanımlanan $\sigma(X',X)$ zayıf topolojisini ise ω^* ile göstereceğiz.

Önerme 2.6.1. X ve Y normlu uzaylar, $T : X \to Y$ bir operatör olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) T norm süreklidir ($\|x_n\| \to 0 \Rightarrow \|Tx_n\| \to 0$).

(ii) T zayıf süreklidir ($x_\alpha \xrightarrow{\omega} 0 \Rightarrow Tx_\alpha \xrightarrow{\omega} 0$).

(Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 17.1.).

Tanım 2.6.2. X ve Y Banach uzayları, $T : X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer X uzayının kapalı birim yuvarının T altındaki görüntüsü Y uzayının relatif zayıf kompakt bir alt kümesi ise T ye bir zayıf kompakt operatör denir.

Önerme 2.6.3. X ve Y Banach uzayları olsun. $T : X \to Y$ operatörünün bir zayıf kompakt operatör olması için gerekli ve yeterli koşul X uzayının her norm sınırlı dizisinin görüntüsünün zayıf yakınsak bir alt dizisinin bulunmasıdır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985).

Önerme 2.6.4. X ve Y Banach uzayları olsun, $T: X \to Y$ bir zayıf kompakt operatör ise T norm süreklidir.

Kanıt: Kabul edelim ki T norm sürekli olmasın. O zaman her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| = 1$ ve $\| Tx_n \| \geq n$ olacak şekilde bir $x_n \in X$ vardır. Buradan $\{Tx_n\}$ dizisinin norm sınırlı hiç bir alt dizisi yoktur. Öyleyse Mackey Önermesinden (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 9.25.) $\{Tx_n\}$ dizisinin zayıf sınırlı hiçbir alt dizisi yoktur. Dolayısıyla $\{Tx_n\}$ dizisinin zayıf yakınsak hiçbir alt dizisi bulunamaz. Ancak $\{T(x_n)\} \subseteq T(U)$ olduğundan bu durum T(U)'nun Y uzayının bir yerel zayıf alt kümesi olması ile çelişir. Böylece T norm sınırlıdır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985).■

Önerme 2.6.5. (Gantmacher) X ve Y iki Banach uzayı, $T: X \to Y$ bir sürekli operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) T bir zayıf kompakt operatördür.

(ii) $T''(X'') \subseteq Y$

(iii) $T' : (Y', \omega^*) \to (X', \omega)$ süreklidir.

(iv) T' bir zayıf kompakt operatördür .

(Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 17.2.).

Önerme 2.6.6. Bir AL-uzayından bir KB-uzayı içine tanımlanan her zayıf kompakt operatör bir zayıf kompakt modüle sahiptir (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 17.14.).

E ve G normlu uzaylar olmak üzere E den G içine tanımlı zayıf kompakt operatörlerin uzayını W(E,G) ile göstereceğiz.

Önerme 2.6.7. E bir Banach örgüsü, E' sıra sürekli norma sahip ve G bir Dedekind tam birimli AM-uzayı olsun. O zaman her bir $T : E \to G$ zayıf kompakt operatörün modülü vardır ve aynı zamanda bir zayıf kompakt operatördür (Schmidt, K.D.,1988).

Önerme 2.6.8. E bir Banach örgüsü E' sıra sürekli norma sahip ve G bir Dedekind tam birimli AM-uzayı olsun. O zaman W(E,G), $\mathcal{L}_b(E,G)$ Riesz uzayında bir idealdir (Schmidt, K.D., 1988).

Tanım 2.6.9. E bir Banach örgüsü, X bir Banach uzayı $T : E \to X$ bir sürekli operatör olsun. Eğer her $x \in E^+$ için $T([0,x])$, X uzayının bir yerel zayıf kompakt bir alt kümesi ise T ye sıra zayıf (o-zayıf) kompakt operatör denir.

Önerme 2.6.10. (Dodds) E bir Banach örgüsü, X bir Banach uzayı $T : E \to X$ bir sürekli operatör olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) T bir o-zayıf kompakt operatördür.

(ii) E uzayının her sıra sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için, $\lim \|T(x_n)\| = 0$ olur.

(iii) Her $x \in E^+$ ve her bir $\varepsilon > 0$ için $|y| \leq x$ ve $x'(|y|) < \delta$ olduğunda $\|Ty\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $0 \leq x' \in E'$ ve $\delta > 0$ vardır.

(iv) E uzayının E'' içinde doğurduğu ideal A olmak üzere $T''(A) \subseteq X$ olur (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 18.6.).

Tanım 2.6.11. E bir Banach örgüsü, X bir Banach uzayı $T : E \to X$ bir sürekli operatör olsun. Eğer E uzayının her bir norm sınırlı dik dizisi $\{x_n\}$ için $\lim \|T(x_n)\| = 0$ sağlanıyorsa T ye M-zayıf kompakt operatör denir.

Önerme 2.6.12. (Meyer-Nieberg) Her M-zayıf kompakt operatör bir zayıf kompakt operatördür (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Önerme 18.10.).

3. b-ÖZELLİĞİNE SAHİP RİESZ UZAYLARI

3.1. b-Özelliği

E bir Riesz uzayı, $E^{\sim\sim}$ ise E uzayının ikinci sıra duali olsun. E uzayından $E^{\sim\sim}$ uzayı içine kanonik gömme $Q_E : x \to \hat{x}$; $\hat{x}(f) = f(x)$, $\forall\ f \in E^{\sim}$ biçiminde tanımlıdır. Her bir $x \in E$ için $\hat{x}$ fonksiyoneli $E^{\sim}$ üzerinde sıra sınırlı ve sıra sürekl̇idir, yani $\hat{x} \in (E^{\sim}_n)^{\sim}_n$ dır. Kanonik dönüşüm her zaman sonlu supremum ve infumumu korur. $E^{\sim}$ uzayı E'nin noktalarını ayırıyorsa Q_E kanonik dönüşümü 1-1 olur. Dolayısıyla E uzayına $E^{\sim\sim}$ nın bir Riesz alt uzayı olarak bakabiliriz. $E^{\sim}_n$ uzayı $E^{\sim}$ uzayı içinde bir banddir. $\hat{x}$ fonksiyonelinin $E^{\sim}_n$ ya kısıtlaması, $(E^{\sim}_n)^{\sim}_n$ uzayı içinde bir doğrusal fonksiyonel verir. E uzayından $(E^{\sim}_n)^{\sim}_n$ uzayı içine

$$x \to \hat{x}\,;\quad \hat{x}(f) = f(x), \qquad \forall\ f \in E^{\sim}_n$$

biçiminde tanımlanan bu dönüşüme doğal gömme denir. Örgü homomorfizmi olan bu doğal gömmenin 1-1 olması için gerekli ve yeterli koşul $E^{\sim}_n$ uzayının E uzayının noktalarını ayırmasıdır.

Tanım 3.1.1. E bir Riesz uzayı ve $Q_E: E \to E^{\sim\sim}$ kanonik dönüşüm olsun. Eğer E uzayının $Q_E(A) \subseteq E^{\sim\sim}$ içinde sıra sınırlı olan her bir $A \subseteq E$ alt kümesi E uzayı içinde de sıra sınırlı oluyorsa E uzayına b-özelliğine sahip Riesz uzayı denir.

Önerme 3.1.2. Bir E Riesz uzayını b-özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul E uzayı içindeki $0 \leq Q_E(x_\alpha)\uparrow \leq x''$, $x'' \in E^{\sim\sim}$ koşulunu sağlayan her bir $\{x_\alpha\}$ ağının E uzayı içinde üstten sınırlı olmasıdır.

<u>Kanıt:</u> ($\Leftarrow$) $A \subseteq E$ ve $Q_E(A) \subseteq E^{\sim\sim}$ içinde sıra sınırlı olsun. O zaman, A kümesinin her bir elemanı için $|a| \leq x''$ olacak biçimde $E^{\sim\sim}$ uzayının pozitif bir x" elemanı vardır. $\beta=\{\sup\{|a_i| : i=1,2,...,n\}: a_i \in A ,\ n \in N\}$ olsun. β yukarı yönlendirilmiş bir küme olduğundan, β kümesini kendisi ile damgalayarak, E uzayı içinde $0 \leq x_\beta \uparrow \leq x''$ şartını sağlayan $\{x_\beta\}$ ağını elde ederiz. $Q_E: E \rightarrow E^{\sim\sim}$ kanonik dönüşümünün bir örgü homomorfizmi olması ve hipotez gereğince A alt kümesinin E içinde bir sıra sınırlı küme olduğu görülür.

Önermenin gerekli koşulu açıktır.■

<u>Örnekler 3.1.3.</u>

a)Yansımalı olan her Banach örgüsü b-özelliğine sahiptir.

b) E bir Riesz uzayı olmak üzere eğer $E^{\sim\sim}$, $Q_E(E)$ üzerinde yansıtılabilir (retractable) ($E^{\sim\sim}$ üzerinde değer kümesi $Q_E(E)$ olan bir pozitif projeksiyon var) ise E uzayı b-özelliğine sahiptir. Gerçekten, $P : E^{\sim\sim} \rightarrow Q_E(E)$ bir pozitif projeksiyon olsun ve $\{x_\alpha\} \subseteq E$, $x'' \in E^{\sim\sim}$ olmak üzere $0 \leq x_\alpha \uparrow x''$, $E^{\sim\sim}$ içinde sağlansın. Her bir α için, $0 \leq P(x_\alpha) = x_\alpha \leq P(x'') \in E$ olduğundan E Riesz uzayı b-özelliğine sahiptir. Diğer taraftan her bir KB-uzayı yansıtılabilir olduğundan KB-uzayları da b-özelliğine sahip Riesz uzaylardır.

c) K, bir kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere C(K) uzayı b-özelliğine sahiptir. Gerçekten, $E = C(K)$ birimi e olan AM-uzayı olsun. Her $0 \leq x' \in E'$ ve her $x \in [-e,e]$ için $|x'(x)| \leq |x'|(|x|) \leq |x'|(e) = x'(e)$, $x'(e) \leq \sup\{|x'(x)| : x \in [-e,e]\} \leq x'(e)$ eşitsizliklerinden $\|x'\| = x'(e)$ eşitliği elde edilir. Her bir $x'' \in E''$ ve her bir $0 \leq x' \in E'$ için $|x''|(x') \leq \|x''\|.\|x'\| = \|x''\|.x'(e) = \|x''\|.e(x')$ olduğunu görürüz. Buradan e elemanının E" Riesz uzayı içinde bir sıra birim olduğu görülür. Şimdi $\{x_\alpha\} \subseteq E$, $x'' \in E''$ olmak üzere $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x''$, E" uzayı içinde sağlansın. $x'' \in E''$ olduğundan $0 \leq x'' \leq \lambda.e$ koşulunu sağlayan λ pozitif reel sayısı vardır. Böylece E Riesz uzayı içinde $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq \lambda.e$ elde edilir. Bu da $E = C(K)$ uzayının b-özelliğine sahip bir Riesz uzay olduğunu gösterir.

d) Sıfıra yakınsak reel sayıların dizi uzayı, c_0 Riesz uzayı b-özelliğine sahip değildir. Gerçekten, her bir $n \in N$ için n. bileşeni 1 diğer terimleri 0 olan $e_n = (0,...0,1,0,0...)$ dizilerinin oluşturduğu küme A olsun. $e = (1,1,1,...) \in \ell_\infty$ olmak üzere her bir $n \in N$ için $0 \leq Q_E(e_n) \leq e$ eşitsizliği $(c_0)^{\sim\sim} \cong \ell_\infty$ sınırlı dizi uzayı içinde sağlandığından A kümesi $(c_0)^{\sim\sim}$ içinde bir sıra sınırlı küme olur. Ancak A kümesi c_0 uzayı içinde sıra sınırlı olmadığından c_0 Riesz uzayı b-özelliğine sahip olamaz.

Önerme 3.1.4. b-özelliğine sahip Dedekind tam Riesz uzaylarının her sıra kapalı Riesz alt uzayı da b-özelliğine sahiptir.

Kanıt: E Dedekind tam b-özelliğine sahip Riesz uzayı ve U ise E uzayının bir bandi, $Q_U : U \to U^{\sim\sim}$ kanonik dönüşüm olsun. $\{x_\alpha\} \subseteq U$, $0 \leq x_\alpha \uparrow$ ve $0 \leq x'' \in U^{\sim\sim}$ olmak üzere $0 \leq Q_U(x_\alpha) \uparrow \leq x''$ koşulu $U^{\sim\sim}$ Riesz uzayında sağlansın. $\hat{x} : E^\sim \to R$, $f \to \hat{x}(f) = x''(f|_U)$ biçiminde tanımlansın. $0 \leq \hat{x} \in E^{\sim\sim}$ olduğu açıktır. Her bir $0 \leq f \in E^\sim$ için $0 \leq f|_U \in U^\sim$ olduğunda $0 \leq Q_U(x_\alpha)(f|_U) \uparrow \leq x''(f|_U)$ elde edilir. Buradan, $0 \leq (f|_U)(x_\alpha) \uparrow \leq x''(f|_U)$ bulunur. Böylece $0 \leq f(x_\alpha) \uparrow \leq \hat{x}(f)$ ve $0 \leq Q_E(x_\alpha)(f) \uparrow \leq \hat{x}(f)$ elde edilir. Bu ise $E^{\sim\sim}$ uzayı içinde $0 \leq Q_E(x_\alpha) \uparrow \leq \hat{x}$ eşitsizliğinin sağlandığını gösterir. E uzayı b-özelliğine sahip olduğundan $0 \leq x_\alpha \leq z$

koşulunu sağlayan E uzayının bir z elemanı vardır. E Dedekind tam bir Riesz uzayı olduğundan $x = \sup\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, E uzayının bir elemanıdır. $\{x_\alpha\}$ ağı artan olduğundan $\{x_\alpha\}$ ağı x elemanına sıra yakınsar. U, E uzayında sıra kapalı olduğundan x, U nun elemanı olur. Bu da U Riesz alt uzayının b-özelliğine sahip olduğunu gösterir.■

b-özelliği, uzayın ideallerine her zaman geçmez. Örneğin ℓ_∞ birimli AM-uzayı b-özelliğine sahip olmasına karşın bir ideali olan c_0 uzayı b-özelliğine sahip değildir.

<u>Önerme 3.1.5.</u> Her Riesz uzayının sıra duali b-özelliğine sahiptir.

<u>Kanıt:</u> E Riesz uzayının sıra duali $E^\sim$, bir Dedekind tam Riesz uzayıdır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 1.13.). $\{x'_\alpha\} \subseteq E^\sim$, $\varphi \in (E^\sim)^{\sim\sim}$ olmak üzere $0 \le x'_\alpha \uparrow \le \varphi$ koşulu $(E^\sim)^{\sim\sim}$ Riesz uzayında sağlansın.

$$x' : E^+ \to R \quad ; \quad x'(x) = \sup_\alpha x'_\alpha(x) \quad , \quad x \in E^+$$

biçiminde bir bağıntı tanımlayalım. Her bir $x \in E^+$ için , $0 \le x'_\alpha(x) = Q_E(x)(x'_\alpha) = Q_{E^\sim}(x'_\alpha)\,(Q_E(x)) \le \varphi\,(Q_E(x)) < \infty$ olduğundan x' anlamlıdır. Şimdi x' dönüşümünün toplamsal olduğunu gösterelim. Her $x,y \in E^+$ için,

$x'_\alpha(x+y) = x'_\alpha(x) + x'_\alpha(y) \le x'(x) + x'(y)$ ve $\sup_\alpha x'_\alpha(x+y) \le x'(x) + x'(y)$ elde edilir. Böylece

$$x'(x+y) \le x'(x) + x'(y) \qquad (3.1)$$

eşitsizliği bulunur. $E^\sim$ Riesz uzayında $\{x'_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ ağı yukarı yönlendirildiğinden, her $\alpha, \beta \in \Lambda$ için $x'_\alpha \le x'_\gamma$ ve $x'_\beta \le x'_\gamma$ koşulunu sağlayan bir $\gamma \in \Lambda$ vardır. Böylece, her $x, y \in E^+$ için $x'_\alpha(x) \le x'_\gamma(x)$ ve $x'_\beta(y) \le x'_\gamma(y)$ eşitsizlikleri sağlanır.

Buradan $x'_\alpha(x)+x'_\beta(y) \leq \; x'_\gamma(x) \leq x'_\gamma(y) = x'_\gamma(x+y)$ elde edilir. Sırasıyla birini sabit tutarak α ve β üzerinden supremum alınırsa,

$$x'(x)+x'(y) \leq x'(x+y) \tag{3.2}$$

bulunur. (3.1) ve (3.2) eşitsizliklerinden $x' : E^+ \to R^+$ dönüşümünün toplamsal olduğu görülür. O halde $x' : E \to R$ bir pozitif operatör olarak genişler (Aliprantis C.D., Burkinshaw O., 1985, Teorem 1.7.). Buradan $x' \in E^\sim$ buluruz. Her bir $x \in E^+$ için $x'(x) = \sup\limits_\alpha x'_\alpha(x) \geq x'_\alpha(x)$ olduğundan $0 \leq x'_\alpha \leq x'$ koşulu $E^\sim$ Riesz uzayında sağlanır. Böylece $E^\sim$ Riesz uzayının b-özelliğine sahip olduğu elde edilir.■

Yukarıdaki önermenin tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, E = c_0 Riesz uzayı için $E^\sim = \ell_1$ b-özelliğine sahip olmasına karşın E, b-özelliğine sahip değildir.

<u>Tanım 3.1.6.</u> E bir Riesz uzayı olsun. E uzayından $(E^\sim_n)^\sim_n$ Riesz uzayına tanımlanan doğal gömme birebir ve örten oluyorsa E Riesz uzayına mükemmel (perfect) Riesz uzayı denir.

$(E^\sim_n)^\sim_n$, $(E^\sim_n)^\sim$ uzayının bir bandı olduğu (Aliprantis C.D., Burkinshaw O., 1985, Teorem 4.4), Önerme 3.1.4. ve Önerme 3.1.5. önermeleri ile birlikte düşünülürse her bir mükemmel Riesz uzayın b-özelliğine sahip olduğu kolayca görülür. Ancak, b-özelliğine sahip her Riesz uzayının mükemmel olması gerekmez. Örneğin C[0,1] Riesz uzayı b-özelliğine sahip bir Riesz uzayı olmasına karşın Dedekind tam olmadığından bir mükemmel Riesz uzayı olamaz.

Bir E Banach örgüsünün b-özelliğine sahip olması ile KB-uzayı olması arasında yakın bir ilişki vardır.

Önerme 3.1.7. E bir Banach örgüsü olsun. E uzayının bir KB-uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul E uzayının sıra sürekli norma sahip ve b-özelliğine sahip olmasıdır.

Kanıt: Bütün KB-uzayları sıra sürekli norma ve b-özelliğine sahiptir (Aliprantis, C.D., Burkinshaw,O., 1985, Teorem 14.12.).

Tersine, E uzayı içinde $0 \leq x_\alpha \uparrow$ ve $\sup\{\| x_\alpha \|\} \leq m$, $0 \leq m \in \mathbb{R}$ koşullarını sağlayan bir $\{ x_\alpha \}$ ağı verilsin.

$$x'' : (E')^+ \to R^+; \qquad f \to x''(f) = \sup(f(x_\alpha))$$

bağıntısını tanımlayalım. $f(x_\alpha) \leq \| f \| . \| x_\alpha \| \leq \| f \| . m$ eşitsizliğinden x'' anlamlıdır ve $0 \leq x_\alpha \uparrow$ olduğundan x'' toplamsal bir dönüşüm olacaktır. Böylece x'' dönüşümü E' uzayının tamamına bir pozitif operatör olarak genişletilebilir. Ayrıca, her α için $0 \leq x_\alpha \leq x''$ eşitsizliği E'' uzayında sağlandığından ve E uzayı b-özelliğine sahip olduğundan $0 \leq x_\alpha \leq z$ koşulunu sağlayan E uzayının bir z elemanı vardır. E sıra sürekli norma sahip bir Banach örgüsü olduğundan E Dedekind tamdır. Buradan $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ koşulunu sağlayan E nin bir x elemanı vardır. E uzayı içinde $x - x_\alpha \downarrow 0$ ve E uzayı sıra sürekli norma sahip olduğundan $\| x - x_\alpha \| \downarrow 0$ dır. Böylece $\lim x_\alpha = x$ bulunur. Bu da E uzayının bir KB-uzayı olduğunu verir.■

C[0,1] Banach örgüsü b-özelliğine sahip olmasına rağmen bir KB-uzayı değildir. Bundan dolayı bu önermedeki sıra süreklilik koşulunu kaldırmak mümkün değildir.

Tanım 3.1.8. (E,τ) bir yerel-katı Riesz uzayı olsun. E içinde $0 \le u_n \uparrow$ koşulunu sağlayan τ-sınırlı $\{u_n\}$ dizisi τ-Cauchy dizisi oluyorsa (E,τ) uzayına B-özelliğine sahiptir denir (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1978, Tanım.18.1.).

Önerme 3.1.9. (E,τ) bir yerel-katı Riesz uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) (E,τ) B-özelliğine sahiptir.

(ii) E içinde $0 \le u_\alpha \uparrow$ koşulunu sağlayan τ-sınırlı her $\{u_\alpha\}$ ağı bir τ-Cauchy ağıdır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1978, Teorem 18.4.).

Önerme 3.1.10. (E,τ) B-özelliğine sahip bir tam yerel konveks-katı Riesz uzayı olsun. O zaman E b-özelliğine sahiptir.

Kanıt: $\{x_\alpha\}$, E uzayının $0 \le x_\alpha \uparrow \le \hat{x}$, $\hat{x} \in E^{\sim\sim}$ koşulunu sağlayan herhangi bir ağı olsun. Her bir $f \in E'$ için $f \in E^{\sim}$ olur (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 11.5.). Ve $0 \le |f(x_\alpha)| \le |f|(x_\alpha) \le \hat{x}(|f|)$ eşitsizliği sağlandığından $\{x_\alpha\}$, E uzayının $\sigma(E,E')$–sınırlı bir ağıdır. E üzerindeki τ topolojisi ile $\sigma(E,E')$-topolojisi uyumlu olduğundan Mackey teoremi (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 9.25.) gereğince $\{x_\alpha\}$ E üzerindeki topolojiye göre de sınırlı olur. E B-özelliğine sahip olduğundan $\{x_\alpha\}$ E uzayının bir Cauchy dizisi olur. E uzayı tam olduğundan $\lim x_\alpha = x$ olacak şekilde E uzayının bir x elemanı vardır. Böylece $\sup x_\alpha = x$ elde edilir (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 11.2.). Bu ise E uzayının b-özelliğine sahip olduğunu verir.■

Ancak Önerme 3.1.10. nun tersi her zaman doğru değildir. $E = C([0,1])$ birimli AM-uzayı b-özelliğine sahip olmasına karşın bir Banach örgüsünün B-özelliğine sahip olması ile KB-uzayı olması çakıştığından ve E birimli AM-uzayı bir KB-uzayı olmadığından B-özelliğine sahip olamaz.

Tanım 3.1.11. (E,τ) bir yerel-katı Riesz uzayı olsun. E içinde $0 \leq u_\alpha \uparrow$ koşulunu sağlayan her τ-sınırlı $\{u_\alpha\}$ ağı E içinde supremumu var ise (E,τ) uzayına Levi özelliğine sahiptir denir (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1978, Tanım.9.3.).

Önerme 3.1.12. (E,τ) Levi özelliğine sahip bir yerel konveks-katı Riesz uzayı olsun. O zaman E b-özelliğine sahiptir.

Kanıt: Bir önceki önermenin ispatındaki adımlar izlenirse E uzayının $E^{\sim\sim}$ içinde $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq \hat{x}$, $\hat{x} \in E^{\sim\sim}$ koşulunu sağlayan her bir $\{x_\alpha\}$ ağının'da E içinde topolojik sınırlı olduğu elde edilir. E uzayı Levi özelliğine sahip olduğundan $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x$ eşitsizliği sağlanacak şekilde E uzayının bir pozitif x elemanı vardır. Bu ise E uzayının b-özelliğine sahip olduğunu verir.■

Yine bu önermenin tersi de her zaman doğru değildir. Gerçekten $E = C([0,1])$ birimli AM-uzayı b-özelliğine sahip olmasına rağmen E uzayı Dedekind tam olmadığından Levi özelliğine sahip değildir.

Tanım 3.1.13. (E,τ) bir yerel-katı Riesz uzayı olsun. E içinde $u_\alpha \downarrow 0$ koşulunu sağlayan her bir ağ için $u_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ oluyorsa E uzayına Lebesgue özelliğine sahiptir denir (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1978, Tanım 8.1.).

Lebesgue özelliği ile b-özelliği birbirinden bağımsız kavramlardır. Aşağıdaki iki örnek ile bu durumu açıklayalım.

Örnek 3.1.14. $E = c_0$ uzayı Lebesgue özelliğine sahip olmasına karşın b-özelliğine sahip değildir.

Örnek 3.1.15. ℓ_∞ sınırlı dizi uzayı b-özelliğine sahip olmasına karşın Lebesgue özelliğine sahip olmayan bir Banach örgüsüdür.

3.2. b-Sıra Sınırlı Operatörler

Tanım 3.2.1. E bir Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. Eğer $Q_E(A)$, $E^{\sim\sim}$ uzayı içinde bir sıra sınırlı küme oluyor ise A kümesine E uzayının bir b-sıra sınırlı alt kümesi denir.

Tanım 3.2.2. E ve F iki Riesz uzayı, $T : E \to F$ bir operatör olsun. Eğer T operatörü, E uzayının b-sıra sınırlı alt kümelerini F uzayının b-sıra sınırlı alt kümelerine dönüştürüyorsa T operatörüne bir b-sıra sınırlı operatör denir.

E uzayından F içine tanımlı b-sıra sınırlı operatörlerin uzayını $\mathcal{L}_{bs}(E,F)$ ile gösterelim. $\mathcal{L}_{bs}(E,F)$ uzayı her $T,R \in \mathcal{L}_{bs}(E,F)$ için

$$T \leq R \quad \Leftrightarrow \quad T(x) \leq R(x), \quad \forall \ x \in E^+$$

sıralama tanımıyla bir sıralı vektör uzayı olur.

Önerme 3.2.3. E ve F iki Riesz uzayı olmak üzere $\mathcal{L}_b(E,F) \subseteq \mathcal{L}_{bs}(E,F)$ dir.

Kanıt: $T : E \to F$ bir sıra sınırlı operatör olsun. Bu durumda $T^{\sim\sim}:E^{\sim\sim}\to F^{\sim\sim}$ de bir sıra sınırlı operatördür (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 5.8.). $A \subseteq E$ bir b-sıra sınırlı küme olsun. O zaman $Q_E(A) \subseteq E^{\sim\sim}$ bir sıra sınırlı bir küme ve $T^{\sim\sim}:E^{\sim\sim}\to F^{\sim\sim}$ bir sıra sınırlı operatör olduğundan $Q_F(T(A)) = T^{\sim\sim}(Q_E(A))$, $F^{\sim\sim}$

uzayının bir sıra sınırlı alt kümesidir. Yani T(A) kümesi F uzayının bir b-sıra sınırlı alt kümesidir. Bu ise T operatörünün bir b-sıra sınırlı operatör olduğunu verir.■

$\mathcal{L}_b(E,F) = \mathcal{L}_{bs}(E,F)$ eşitliği her zaman doğru değildir. Örneğin, $E = L_1[0,1]$, $F = c_0$ uzayları ve

$$T : E \to F\,; \quad T(f) = \left(\int_0^1 f(x).\sin(x)dx, \int_0^1 f(x)\sin(2x)dx, \ldots\right)$$

olsunlar T, bir norm sürekli operatördür. Ancak bir sıra sınırlı operatör değildir .

$T' :\ c_0^{\sim} = \ell_1 \to L_1^{\sim}[0,1] = L_\infty[0,1]\,; \quad < T'(x_1, x_2, \ldots), f > = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n \int_0^1 f(x)\sin nx dx)$

sürekli operatörü, $L_\infty[0,1]$ bir Dedekind tam birimli AM-uzayı olduğundan bir sıra sınırlı operatördür (Kantorovich, L.V.,1936). Dolayısıyla $T'' : (L_\infty[0,1])' \to \ell_\infty$ bir sıra sınırlı operatör olduğundan T de bir b-sıra sınırlı operatör olur.

E ve F iki Riesz uzayı ve F Riesz uzayı b-özelliğine sahip ise E den F içine tanımlı her bir b-sıra sınırlı operatör bir sıra sınırlı operatör olur.

Tanım 3.2.4. E ve F iki Riesz uzayı ve T: E → F bir operatör olsun. Eğer $Q_F T : E \to F^{\sim\sim}$ operatörü sıra sınırlı bir operatör oluyorsa T ye bir preregüler operatör denir.

Önerme 3.2.5. E ve F iki Riesz uzayı, T: E → F ise bir operatör olsun. Aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

(i) T bir preregüler operatördür.

(ii) $T^{\sim} : F^{\sim} \to E^{\sim}$ bir sıra sınırlı operatördür.

(iii) $T^{\sim\sim} : E^{\sim\sim} \to F^{\sim\sim}$ bir sıra sınırlı operatördür.

(iv) T: E → F bir b-sıra sınırlı operatördür.

Kanıt: (i) $\Rightarrow$ (ii) $0 \le f \in F^{\sim}$ iken $0 \le x \in E$ ve $|y| \le x$ olsun. $T : E \to F$ bir preregüler operatör olduğundan $|Q_F(T(y))| \le z''$ olacak şekilde $F^{\sim\sim}$ uzayının bir z'' elemanı vardır. $|T^*f(y)| = |f(T(y))| = |Q_F(T(y))(f)| \le |Q_F(T(y))|(f) \le z''(f)$ sağlandığından $T^*(f) \in E^{\sim}$ olur. T^* eşlek operatörünün $F^{\sim}$ uzayına kısıtlaması $T^*|_{F^{\sim}} = T^{\sim} : F^{\sim} \to E^{\sim}$ dır. $Q_F T : E \to F^{\sim\sim}$, $Q_F : F \to F^{\sim\sim}$, $Q_F^{\sim} : F^{\sim\sim\sim} \to F^{\sim}$ ve $Q_{F^{\sim}} : F^{\sim} \to F^{\sim\sim\sim}$ operatörlerini düşünelim. Her bir $x \in E$ ve her bir $g \in F^{\sim}$ için

$$< x, (Q_F T)^{\sim} Q_{F^{\sim}}(g) >=< Q_F(T(x)), Q_{F^{\sim}}(g) >=< g, Q_F(T(x)) >=< T(x), g >=< x, T^{\sim}(g) >$$

eşitliği sağlandığından. $(Q_F T)^{\sim} Q_{F^{\sim}}(g) = T^{\sim}(g)$ buluruz. $Q_{F^{\sim}} : F^{\sim} \to F^{\sim\sim\sim}$ ve $(Q_F T)^{\sim} : F^{\sim\sim\sim} \to E^{\sim}$ operatörü sıra sınırlı olduğundan, $(Q_F T)^{\sim} Q_{F^{\sim}}$ operatörü de bir sıra sınırlı operatör olur.

(ii)$\Rightarrow$(iii) $T^{\sim} : F^{\sim} \to E^{\sim}$ bir sıra sınırlı operatör ise T nin iki eşlek dönüşümü $T^{\sim\sim} : E^{\sim\sim} \to F^{\sim\sim}$ bir sıra sınırlı operatör olur (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 5.8.).

(iii)$\Rightarrow$(iv) E uzayının herhangi bir b-sıra sınırlı alt kümesi A olsun. O zaman $Q_E(A)$, $E^{\sim\sim}$ uzayının bir sıra sınırlı alt kümesi olur. $T^{\sim\sim} : E^{\sim\sim} \to F^{\sim\sim}$ bir sıra sınırlı operatör olduğundan, $T^{\sim\sim}(Q_E(A)) = Q_F(T(A))$ kümesi $F^{\sim\sim}$ uzayının bir sıra sınırlı alt kümesi olur. Bu ise T operatörünün b-sıra sınırlı olduğunu gösterir.

(iv)$\Rightarrow$(i) E uzayının herhangi bir pozitif elemanı x olsun. [0,x], E uzayının bir b-sıra sınırlı alt kümesi ve $T: E \to F$ bir b-sıra sınırlı operatör olduğundan $Q_F(T([0,x]))$,

$F^{\sim\sim}$ uzayının bir sıra sınırlı alt kümesi olur. Bu ise $Q_F T : E \to F^{\sim\sim}$ bir sıra sınırlı operatör olduğunu verir. Yani $T : E \to F$ bir preregüler operatördür.∎

Sonuç 3.2.6. $T: E \to F$ bir operatör ve $n \geq 1$ bir doğal sayı olmak üzere T nin n.eşleği bir sıra sınırlı operatör ise T nin her bir eşleği de sıra sınırlıdır.

E bir Riesz uzayı olmak üzere $Q_E : E \to E^{\sim\sim}$ kanonik gömmesini alalım. E uzayının herhangi bir b-sıra sınırlı alt kümesi A olsun. $Q_E(A) \subseteq (E^{\sim})_n^{\sim}$ ve $(E^{\sim})_n^{\sim}$ uzayı $E^{\sim\sim}$ içinde bir band olduğu dikkate alınırsa $Q_E(A)$ kümesinin $(E^{\sim})_n^{\sim}$ içinde sıra sınırlı bir küme olduğu görülür.

Önerme 3.2.7. İki Riesz uzayı arasında tanımlanan her b-sıra sınırlı operatörünün sıra adjointi (eşleği) sıra süreklidir.

Kanıt E ve F iki Riesz uzayı ve bu uzaylar arasında $T : E \to F$ bir b-sıra sınırlı operatör olsun. Bu durumda $Q_F T : E \to (F^{\sim})_n^{\sim}$ bir sıra sınırlı operatördür. E uzayının herhangi bir pozitif x elemanını sabitleyelim. $|y| \leq x$ koşulunu sağlayan her bir y elemanı için $|Q_F T(y)| \leq x''$ olacak biçimde $(E^{\sim})_n^{\sim}$ uzayının bir x'' elemanı vardır. $0 \leq f \in F^{\sim}$ olsun $\sum_{i=1}^{n} f_i = f$ koşulunu sağlayacak biçimde $0 \leq f_1, f_2, \ldots, \in F^{\sim}$ elemanları seçelim.

$$\begin{aligned}
< x, \sum_{i=1}^{n} |T^{\sim}(f_i)| > &= \sum_{i=1}^{n} \sup\{< y, T^{\sim}(f_i) > : |y| \leq x\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sup\{< T(y), f_i >: |y| \leq x\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sup\{< f_i, Q_F T(y) >: |y| \leq x\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} < f_i, x'' > = x''(f) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

olur. (3.3) den ve (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 1.14. ve Teorem 1.16.(3)) den $E^{\sim}$ uzayının her bir pozitif f elemanı için $|T^{\sim}|f(x) \leq x''(f)$ bulunur. Diğer taraftan $F^{\sim}$ uzayında $f_\alpha \downarrow 0$ sağlansın. x'' sıra sürekli olduğundan $|T^{\sim}|f_\alpha(x) \leq x''(f_\alpha) \downarrow 0$ elde edilir, yani her bir $x \in E^+$ için $|T^{\sim}|(f_\alpha)(x) \downarrow 0$ sağlanır. Böylece $E^{\sim}$ uzayı içinde $|T^{\sim}|f_\alpha \downarrow 0$ olduğunu görürüz. O halde $T^{\sim}$ operatörü sıra sürekli olur (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O, 1985, Teorem 4.3.).■

3.3. Sıra Sınırlı Operatörlerle Sürekli Operatörlerin Çakışması

İki Banach örgüsü arasında tanımlı sıra sınırlı operatör aralık sınırlıdır. Dolayısıyla süreklidir (Ercan, Z., 1998). O halde $\mathcal{L}_b(E,F) \subseteq \mathbf{L}(E,F)$ her zaman sağlanır. Ancak bu kapsama bazen öz olabilir. Örneğin, $E = C[0,1]$, $F = c_0$ olmak üzere

$$T : C[0,1] \rightarrow c_0 \; ; \quad T(f) = (\, f(1)-f(0), f(1/2)-f(0), \ldots, f(1/n)-f(0), \ldots), \; \forall \; f \in C[0,1]$$

biçiminde tanımlanan T bir sürekli operatördür ancak bir sıra sınırlı operatör değildir. ■

$\mathcal{L}_b(E,F) = \mathbf{L}(E,F)$ eşitliğinin olduğu bazı durumları şöyle sıralayabiliriz:

(i) E bir Banach örgüsü ve F Dedekind tam birimli bir AM-uzayı olsun. O zaman $\mathcal{L}_b(E,F) = \mathbf{L}(E,F)$ dir (Kantorovich, L.V., 1936).

(ii) E bir AL uzayı ve F bir KB uzayı olsun. $\mathcal{L}_b(E,F) = \mathbf{L}(E,F)$ dir.

(iii) E bir AL uzayı, F p-özelliğine sahip bir Banach örgüsü (F'' üzerinde değer kümesi F olan bir pozitif projeksiyon var) ise $\mathcal{L}_b(E,F) = \mathbf{L}(E,F)$ eşitliği yine sağlanır (Meyer-Nieberg, P., 1991, Teorem 1.5.11.).

Şimdi biz yine $\mathcal{L}_b(E,F) = \mathbf{L}(E,F)$ eşitliğinin sağlandığı başka bir durumu daha verelim.

<u>Önerme 3.3.1.</u> E bir AL-uzayı ve F ise bir b-özelliğine sahip Banach örgüsü ise $\mathcal{L}_b(E,F) = \mathbf{L}(E,F)$ eşitliği sağlanır.

<u>Kanıt:</u> $T : E \to F$ bir sıra sınırlı operatör olsun. O zaman E uzayının her [a , b] sıra aralığı için T([a , b]), F uzayının bir topolojik sınırlı alt kümesi olur. Böylece, T aralık sınırlı operatör olur. Yani T süreklidir (Ercan, Z., 1998).

Şimdi, $T: E \to F$ bir sürekli operatör ve A, E uzayının bir sıra sınırlı alt kümesi olsun. E' bir Dedekind tam birimli AM-uzayı olduğundan $T' : F' \to E'$ sürekli eşlek operatörü sıra sınırlıdır. Dolayısıyla $T'' : E'' \to F''$ operatörü de sıra sınırlıdır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 5.8.). F Riesz uzayının b-özelliğine sahip olduğu ve $Q_F(T(A)) = T''(Q_E(A))$ eşitliği kullanılarak T(A) nın F içinde sıra sınırlı küme olduğu görülür. Buradan $\mathcal{L}_b(E,F) = \mathbf{L}(E,F)$ eşitliği elde edilir. ■

<u>Sonuç 3.3.2.</u> E bir Banach örgüsü, F bir AM-uzayı ve $T: E \to F$ bir sürekli operatör olsun. O zaman T nin eşleği, $T': F' \to E'$ bir sıra sınırlı operatördür.

<u>Kanıt:</u> $T: E \to F$ bir sürekli operatör olsun. $T' : F' \to E'$ bir sürekli operatör, F' bir AL-uzayı ve E' b-özelliğine sahip Banach örgüsü olur. Önerme 3.3.1 den dolayı T' bir sıra sınırlı operatör olur. ■

Önerme 3.3.3. E ve F iki Banach örgüsü, $T: E \to F$ bir b-sıra sınırlı operatör olsun O zaman T bir sürekli operatördür.

Kanıt: E Riesz uzayının keyfi bir aralığı $[a , b]$ olsun. $[a , b]$, E içinde b-sıra sınırlı olduğundan $Q_F(T([a , b]))$, $F^{\sim\sim}$ uzayının norm sınırlı bir alt kümesi olur. Böylece $T([a , b])$, F uzayının norm sınırlı bir alt kümesi olur. Buradan, T nin bir aralık sınırlı operatör olduğu görülür. Dolayısıyla T bir sürekli operatördür (Ercan, Z., 1998).■

4. KARTEZYEN ÇARPIM UZAYLARININ VE BÖLÜM UZAYLARININ b-ÖZELLİĞİNİ SAĞLAMASI

4.1. Kartezyen Çarpım Uzaylarının b-Özelliği

Bu bölümde kartezyen çarpım uzaylarının b-özelliğine sahip olması karekterize edilecektir. Ayrıca b-özelliğine sahip normlu Riesz uzaylarının norm tamamlanışlarının b-özelliğine sahip olmasının gerekmediği bir örnekle gösterilecektir.

$\{ E_i : i\in I \}$ Riesz uzaylarının bir ailesi olsun. $\prod E_i$ kartezyen (dik) çarpım

$$\{x_i\} \geq \{y_i\} \iff \forall\ i\in I \text{ için } x_i \geq y_i$$

sıralaması ile bir Riesz uzayıdır. Açık olarak $\prod E_i$ uzayının herhangi iki elemanı $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\}$ ise

$$\sup\{x,y\} = x \vee y = \{x_i \vee y_i\} \text{ ve } \inf\{x,y\} = x \wedge y = \{x_i \wedge y_i\}$$

olurlar. Direkt toplam $\sum_{i\in I} \oplus E_i$, $\prod E_i$ uzayının sonlu i`ler haricindeki elemanları sıfır olan elemanların uzayı olsun. $\sum_{i\in I} \oplus E_i$ uzayı, $\prod E_i$ Riesz uzayının bir Riesz alt uzayı olur.

Önerme 4.1.1. $\{ E_i : i\in I \}$ Riesz uzaylarının bir ailesi ve $E = \prod E_i$ bu Riesz uzayların kartezyen çarpımı olsun. E Riesz uzayının b-özelliğini sağlaması için gerekli ve yeterli koşul her bir $i\in I$ için E_i Riesz uzayının b-özelliğini sağlamasıdır.

Kanıt: ($\Rightarrow$) E b-özelliğine sahip bir Riesz uzayı olsun. $i \in I$ olmak üzere, $\{x^i_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ E_i Riesz uzayının bir ağı ve $x''_i \in E_i^{\sim\sim}$ olmak üzere $0 \le x^i_\alpha \uparrow \le x''_i$ eşitsizliği $E_i^{\sim\sim}$ Riesz uzayında sağlansın. Böylece her bir $0 \le g \in E_i^{\sim}$ için $0 \le Q_{E_i}(x^i_\alpha)(g) \le x''_i(g)$ ve $0 \le g(x^i_\alpha) \le x''_i(g)$ olur. $0 \le F \in E^{\sim}$ fonksiyonelini sabitleyelim. Her $y_i \in E_i$ için $\overline{y_i} = (y_j)_{j\in I} \in E$ elemanı i.yeri $(\overline{y_i})_i = y_i$, $i \neq j$ için $(\overline{y_i})_j = 0$ biçiminde tanımlansın.

$$f : E_i \to \mathbb{R} \quad ; \quad f(y_i) = F(\overline{y_i}),\ \forall\, y_i \in E_i$$

(i) f 'nin anlamlı ve iyi tanımlı olduğu açıktır.

(ii) $\forall x_i, y_i \in E_i$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $\overline{(x_i + \lambda y_i)} = \overline{x_i} + \lambda \overline{y_i}$ ve F doğrusal olduğundan, $f(x_i + \lambda y_i) = F(\overline{(x_i + \lambda y_i)}) = F(\overline{x_i}) + \lambda F(\overline{y_i}) = f(x_i) + \lambda f(y_i)$ olduğundan f doğrusal olur.

(iii) $\forall\, 0 \le y_i \in E_i$ için $0 \le \overline{y_i} \in E$, F pozitif olduğundan $f(y_i) = F(\overline{y_i}) \ge 0$ olur. Yani $f \in (E_i^{\sim})_+$ dir. $0 \le Q_E(\overline{x^i_\alpha})(F) = F(\overline{x^i_\alpha}) = f(x^i_\alpha) = Q_{E_i}(x^i_\alpha)(f) \le x''_i(f) < \infty$ olur.

$$\hat{x} : E^{\sim}_+ \to \mathbb{R} \quad \hat{x}(F) := \sup_\alpha \{Q_E(\overline{x^i_\alpha})(F)\} = \sup_\alpha f(x^i_\alpha)$$

biçiminde tanımlı $\hat{x}$, toplamsal bir operatördür. Dolayısıyla $\hat{x}$, $E^{\sim}$ uzayının tamamına pozitif olarak genişler (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 1.7.). Her $0 \le F \in E^{\sim}$ için, $\hat{x}(F) = \sup_\alpha F(\overline{x^i_\alpha}) \ge F(\overline{x^i_\alpha}) = Q_E(\overline{x^i_\alpha})(F)$ olduğundan $0 \le \overline{x^i_\alpha} \le \hat{x}$ eşitsizliği $E^{\sim\sim}$ uzayında sağlanır. E b-özelliğine sahip bir Riesz uzayı olduğundan $0 \le \overline{x^i_\alpha} \le z$ koşulunu sağlayan E uzayının bir pozitif z elemanı vardır.

$P_i : E \to E_i$ i. izdüşüm operatörü olmak üzere $0 \leq P_i(\overline{x_\alpha^i}) \leq P_i(z)$, $P_i(z) \in E_i$ dir. Buradan $0 \leq x_\alpha^i \leq P_i(z)$, E_i uzayında sağlanacağından I damga kümesinin her bir i elemanı için E_i Riesz uzayı b-özelliğine sahip olur.

Tersine, I damga kümesinin her bir i elemanı için E_i Riesz uzayı b-özelliğine sahip olsun. $\{x_\alpha\} \subseteq E$ ve $x'' \in E^{\sim\sim}$ olmak üzere $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x''$ eşitsizliği $E^{\sim\sim}$ uzayında sağlansın. Her bir $\alpha \in \Lambda$ için x_α elemanını $x_\alpha = (x_\alpha^i)_{i\in I}$ biçiminde tanımlayalım. Her bir $0 \leq f \in E_i^\sim$ için,

$$F : E \to IR; \quad x \to F(x) = f(x_i) \quad \forall\ x = \{x_i\} \in E$$

biçimindeki F fonksiyoneli $E_+^\sim$ Riesz uzayının bir elemanıdır. Ayrıca $0 \leq Q_{E_i}(x_\alpha^i)(f) = f(x_\alpha^i) = F(x_\alpha) \leq x''(F) < \infty$ bulunur. Böylece

$$\hat{x}_i : (E_i^\sim)_+ \to IR; \quad f \to \sup_\alpha f(x_\alpha^i)$$

biçiminde tanımlanan $\hat{x}$ toplamsal operatörü $E_i^\sim$ uzayının tamamına bir pozitif operatör olarak genişler (Aliprantis, .D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 1.7.). Her $0 \leq f \in E_i^\sim$ için, $\hat{x}_i(f) = \sup_\alpha f(x_\alpha^i) \geq f(x_\alpha^i) = Q_{E_i}(x_\alpha^i)(f), \forall \alpha \in \Lambda$ bulunur. Böylece $0 \leq x_\alpha^i \uparrow \leq \hat{x}_i$ eşitsizliği $E_i^{\sim\sim}$ uzayında sağlanır. I damga kümesinin her bir i elemanı için E_i Riesz uzayı b-özelliğine sahip olduğundan $\forall \alpha \in \Lambda$ ve $\forall i \in I$ için $0 \leq x_\alpha^i \leq y_i$, $y_i \in E_i$, ifadesi E_i Riesz uzayında sağlanır. Bulunan bu y_i elemanları için $y = (y_i)_{i\in I} \in E$ tanımını yaparsak $0 \leq x_\alpha \leq y$ sıralaması E uzayı içinde sağlanacaktır. Böylece E uzayının b-özelliğine sahip olduğu görülür.■

E bir Riesz uzayı ve ρ ise E üzerinde bir pseudonorm olsun. E içinde $0 \le x_\alpha \uparrow x$ sağlanırken $0 \le \rho(x_\alpha) \uparrow \rho(x)$ oluyor ise ρ ya Fatou-pseudonormu denir (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1978, Sayfa 80).

E bir Banach örgüsü olsun. Açık olarak, E uzayının Levi özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul E uzayının Dedekind tam ve b-özelliğine sahip olmasıdır. (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1978, Teorem 19.17.).

Önerme 4.1.2. $\{ E_k : k \in \mathbb{N}\}$ Banach örgülerinin bir dizisi olmak üzere $E = (E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots)_p$ $(1 \le p \le \infty)$ uzayları

$$(E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots)_p = \{ x = (x_1, x_2, \ldots) : \forall k \in \mathbb{N}\ x_k \in E_k \text{ ve } \|x\|_p = (\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|)^{1/p} < \infty\}$$

$$(E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots)_\infty = \{ x = (x_1, x_2, \ldots) : \forall k \in \mathbb{N}\ x_k \in E_k \text{ ve } \|x\|_\infty = \sup_k \|x_k\| < \infty\}$$

olsunlar (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 12.6.).

(i) E Banach örgüsü b-özelliğine sahip ise her bir k doğal sayısı için E_k Banach örgüsü b-özelliğine sahip olur.

(ii) Her bir k doğal sayısı için E_k Banach örgüsü Levi özelliğine sahip ve E_k üzerindeki norm Fatou özelliğine sahip olsun. O zaman E Banach örgüsü b-özelliğine sahip olur.

Kanıt: (i) E b-özelliğine sahip bir Banach örgüsü ve k keyfi bir doğal sayı , $\{x_\alpha^k\}$, E uzayının α damga kümesi üzerinden artan bir ağı, $x'' \in E_k^{\sim\sim}$ olmak üzere $0 \le x_\alpha^k \uparrow_\alpha \le x''$ eşitsizliği $E_k^{\sim\sim}$ Riesz uzayında sağlansın. Her bir $x \in E_k$ için k.

terimi x diğer terimleri sıfır olan E uzayının elemanını $\overline{x}$ ile gösterelim. Her bir $0 \leq F \in E^{\sim}$ için,

$$f : E_k \to \mathrm{IR} \;;\; x \to f(x) = F(\overline{x})$$

biçiminde tanımlansın. $0 \leq f \in E_k^{\sim}$ olduğu açıktır. $0 \leq Q_E(\overline{x_\alpha^k})(F) = F(\overline{x_\alpha^k}) = f(x_\alpha^k) \uparrow \leq x''(f) < \infty$ olur. Dolayısıyla,

$$\Phi : E_+^{\sim} \to \mathrm{IR} \;; \quad F \to \sup_\alpha F(\overline{x_\alpha^k})$$

biçiminde tanımlı toplamsal fonksiyonu $E^{\sim}$ uzayının tamamına genişler (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 1.7.). Her bir $F \in E_+^{\sim}$ için $\Phi(F) = \sup_\alpha F(\overline{x_\alpha^k}) \geq F(\overline{x_\alpha^k}) = Q_E(\overline{x_\alpha^k})(F)$ olduğundan $0 \leq \overline{x_\alpha^k} \uparrow_\alpha \leq \Phi$ sıralaması $E^{\sim\sim}$ uzayında sağlanır. Hipoteze göre E b-özelliğine sahiptir. Böylece $0 \leq \overline{x_\alpha^k} \uparrow_\alpha \leq z$ koşulunu sağlayan E uzayının bir pozitif z elamanı vardır. Her bir k doğal sayısı için P_k, k. pozitif izdüşüm operatörü $0 \leq \overline{x_\alpha^k} \uparrow_\alpha \leq z$ sıralamasına uygulanırsa $0 \leq P_k(\overline{x_\alpha^k}) \uparrow_\alpha \leq P_k(z) = z_k \in E_k$ elde edilir. Buradan $0 \leq x_\alpha^k \leq z_k$, $z_k \in E_k$ bulunur. Bu ise her bir k doğal sayısı için E_k uzayının b-özelliğine sahip olduğunu verir.

(ii) Her bir k doğal sayısı için E_k Banach örgüsü Levi özelliğine sahip ve E_k üzerindeki norm Fatou özelliğine sahip olsun. $\{x_\alpha\} \subseteq E$ ve $x'' \in E^{\sim\sim}$ olmak üzere $0 \leq x_\alpha \uparrow \leq x''$ eşitsizliği $E^{\sim\sim}$ uzayında sağlansın. Her bir $\alpha \in \Lambda$ için x_α elemanını $x_\alpha = (x_\alpha^k)_{k=1}^\infty$ biçiminde tanımlayalım. Bir önceki önermenin yeter koşulundaki işlemler tekrar edilerek her bir k doğal sayısı ve Λ damga kümesindeki α için $0 \leq x_\alpha^k \uparrow_\alpha \leq y_k$ sıralaması E_k uzayında sağlanır. Her bir k doğal sayısı için E_k Dedekind tam ve norm Fatou özelliğine sahip olduğundan $0 \leq x_\alpha^k \uparrow_\alpha x_k$ ve $\| x_\alpha^k \| \uparrow_\alpha \| x_k \|$ olacak şekilde E_k uzayının x_k elemanı vardır. $1 \leq p < \infty$ olsun.

$\forall n \in \mathrm{IN}$ ve $\forall \alpha \in \Lambda$ için, $(\sum_{k=1}^{n} \| x_{\alpha}^{k} \|^{p})^{1/p} \leq \| x_{\alpha} \| \leq m$ olacak şekilde bir m pozitif reel sayısı vardır. Böylece,

$$\lim_{\alpha}(\sum_{k=1}^{n} \| x_{\alpha}^{k} \|^{p})^{1/p} \leq m \Rightarrow (\sum_{k=1}^{n} \lim_{\alpha} \| x_{\alpha}^{k} \|^{p})^{1/p} \leq m$$

$$\Rightarrow (\sum_{k=1}^{n} \| \lim_{\alpha} x_{\alpha}^{k} \|^{p})^{1/p} \leq m$$

$$\Rightarrow (\sum_{k=1}^{n} \| x_{k} \|^{p})^{1/p} \leq m$$

bulunur. Bu ise $x = \{x_n\}$ elemanının E uzayına ait olduğunu verir. Böylece $0 \leq x_{\alpha} \uparrow \leq x$ sıralaması E uzayı içinde sağlanır. Yani E uzayı b-özelliğine sahip olur.

$p = \infty$ olsun. $\forall k \in \mathrm{IN}$ ve $\forall \alpha \in \Lambda$ için $\| x_{\alpha}^{k} \| \leq \sup_{k} \| x_{\alpha}^{k} \| = \| x_{\alpha} \| \leq m_1$ olacak şekilde bir m_1 reel sayısı vardır. Böylece $\lim_{\alpha}(\| x_{\alpha}^{k} \|) = \| x_{k} \| \leq m_1$ olduğundan $\sup_{k}(\| x_{k} \|) \leq m_1$ sağlanır. Bu ise $x = \{x_n\}$ elemanının E uzayına ait olduğunu verir. Ayrıca $0 \leq x_{\alpha} \uparrow \leq x$ sıralaması E uzayı içinde sağlanır. Yani E b-özelliğine sahip olur.■

<u>Örnek 4.1.3.</u> $A = \{ x = \{x_n\} : x_n \in \mathrm{IR}, \exists n_0 \in \mathrm{IN} \ni \forall n \geq n_0 \text{ için } x_n = 0 \}$ olsun. A uzayı noktasal sıralama ile sıfıra yakınsak reel diziler uzayı c_0' ın b-özelliğine sahip bir idealidir.

<u>Çözüm:</u> A nın c_0 Riesz uzayının bir ideali olduğu açıktır. Bütün reel dizilerin oluşturduğu uzay olan s, A Riesz uzayının sıra dualine eşittir (Zaanen, A.C., 1983). $\{x_{\alpha} : \alpha \in \Lambda\} \subseteq A_{+}$, $x_{\alpha} = (x_{\alpha}^{n})_{n=1}^{\infty}$, $x'' \in A^{\sim\sim}$ olmak üzere, $0 \leq x_{\alpha} \uparrow \leq x''$ ifadesi $A^{\sim\sim}$ Riesz uzayı içinde sağlansın.

(1) Her $\alpha \in \Lambda$ için $\forall n \geq n_0$ iken $x_{\alpha}^{n} = 0$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathrm{IN}$ olduğunu kabul edelim.

$x_0 = (1,1,1,....) \in s$ elemanına karşılık gelen $A^{\sim}$ uzayının pozitif elemanı f olmak üzere $0 \leq Q_A(x_\alpha)(f) \uparrow\leq x''(f)$ sağlanır. $0 \leq Q_A(x_\alpha)(f) = f(x_\alpha) \uparrow\leq x''(f)$ olduğundan $\forall \alpha \in \Lambda$ için $0 \leq f(x_\alpha) = \sum_{n=1}^{n_0} 1.x_\alpha^n \leq x''(f)$ dir Böylece $0 \leq x_\alpha^n \leq \sum_{n=1}^{n_0} x_\alpha^n \leq x''(f)$ $(1 \leq n \leq n_0)$ olur. n_0. yere kadar terimleri $x''(f)$, diğer terimleri sıfır olan A uzayının elemanı $\bar{x} = (x''(f), x''(f), ..., x''(f), 0, 0...)$ olsun. O zaman, $\forall \alpha \in \Lambda$ ve $1 \leq n \leq n_0$ için $0 \leq x_\alpha^n \leq x''(f)$ olduğundan $0 \leq x_\alpha \uparrow\leq \bar{x}$ olur. Böylece (1) koşulunda A uzayı b-özelliğine sahip olur. Şimdi bir an için $\{x_\alpha\}$ ağının (1) koşulunu sağlamadığını kabul edelim. Yani, her bir $n \in IN$ için $\exists \alpha_n \in \Lambda$ ve $\exists k_n \in IN \ni k_n \geq n$ ve $x_{\alpha_n}^{k_n} \neq 0$ olsun. Tümevarımla, $n = 1$ için , $\exists \alpha_1 \in \Lambda$ ve $\exists n_1 \in IN \ni n_1 \geq 1$ ve $x_{\alpha_1}^{n_1} \neq 0$ olur. Bu durumda, $\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ ağı yukarı doğru yönlendirildiğinden $\{x_\alpha : \alpha \geq \alpha_1\}$ ağı da (1) koşulunu sağlamaz. Gerçekten, $\{x_\alpha : \alpha \geq \alpha_1\}$ ağı için (1) koşulunun sağlandığını kabul edelim. O zaman $\forall \alpha \in \Lambda$ için $\exists \gamma \in \Lambda \ni \alpha \leq \gamma$ ve $\alpha_1 \leq \gamma$ olur. $\forall n \geq n_0$ için $0 \leq x_\alpha^n \leq x_\gamma^n = 0$ elde edilir. Bu ise $\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ ağının (1) koşulunu sağlamaması ile çelişir. Aynı biçimde $n = n_1$ için $\exists \alpha_2 \geq \alpha_1 \ni$ $\exists n_2 \in IN \ni n_2 \geq n_1$ ve $x_{\alpha_2}^{n_2} \neq 0$ olur. Bu şekilde devam edilirse; her bir $k \in IN$ için $\exists n_k \in IN$, $\exists \alpha_{n_k} \in \Lambda \ni n_{k-1} \leq n_k$, $\alpha_{n_{k-1}} \leq \alpha_{n_k}$ ve $x_{\alpha_k}^{n_k} \neq 0$ olur.

$$x = \{x_k\} = \begin{cases} 1/x_{\alpha_k}^{n_k} & k = n_k \\ 0 & k \neq n_k \end{cases} , \qquad k = 1,2,3...$$

pozitif elemanına karşılık gelen $A^{\sim}$ uzayının pozitif elemanı f olsun. $\forall \alpha \in \Lambda$ için $0 \leq f(x_\alpha) \uparrow\leq x''(f) < \infty$ sağladığından $\sum_{k=1}^{\infty} x_\alpha^k x_k \leq x''(f)$, $\forall \alpha \in \Lambda$ dır. Böylece

α_k içinde $\sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_k}^{i} x_i \leq x''(f)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ için sağlanır. Buradan

$\sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_k}^{n_i} x_{n_i} \leq x''(f)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ için çıkar. Tümevarımla,

$$k=1 \text{ için } \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_1}^{n_i} x_{n_i} = x_{\alpha_1}^{n_1} x_{n_1} + x_{\alpha_1}^{n_2} x_{n_2} + \ldots \geq 1$$

$$k=2 \text{ için } \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_2}^{n_i} x_{n_i} = x_{\alpha_2}^{n_1} x_{n_1} + x_{\alpha_2}^{n_2} x_{n_2} + \ldots \geq 2$$

...

$$k \text{ için } k \leq \sum_{i=1}^{\infty} x_{\alpha_k}^{n_i} x_{n_i} \leq x''(f)$$

elde edilir. Bu ise $x''(f)$'nin sonlu olması ile çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani burada sadece (1) koşulu gerçekleşir. Böylece $0 \leq x_\alpha \leq x$ olacak şekilde bir pozitif x elemanı olduğundan A uzayı b-özelliğine sahip olur.■

Yukarıdaki örnekten faydalanarak aşağıdaki önermeyi yazabiliriz.

Önerme 4.1.4. b özelliğine sahip normlu Riesz uzayların norm tamamlanışları b-özelliğine sahip olmak zorunda değildir.

Kanıt: b-özelliğine sahip normlu Riesz alt uzayı olarak bir önceki örnekteki A normlu uzayı seçilerek önerme kanıtlanır.■

4.2. Bölüm Uzaylarının b-Özelliği

E bir Riesz uzayı ve A, E nin bir ideali olsun. E /A bölüm uzayı E içindeki x elemanlarının $\dot{x} = x + A$ biçimindeki denklik sınıflarından oluşur. E /A bölüm uzayı,

$$\forall\, \dot{x}, \dot{y} \in E/A \text{ çifti için } \dot{x} \leq \dot{y} \Leftrightarrow \exists\, x_1 \in \dot{x}, \exists\, y_1 \in \dot{y} \ni x_1 \leq y_1$$

sıralaması ile bir Riesz uzayı olur (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 7.10.).

b-özelliğine sahip her bir Riesz uzayına örgü izomorfik olan Riesz uzayları da b-özelliğine sahip olur. Gerçekten, E b-özelliğine sahip bir Riesz uzayı ve F ise E uzayına örgü izomorfik Riesz uzayı olsun. O zaman $T: E \to F$ bir örgü izomofizmi vardır. $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subseteq F_+$, $y'' \in F^{\sim\sim}$ olmak üzere, $0 \le y_\alpha \uparrow \le y''$ ifadesi $F^{\sim\sim}$ Riesz uzayı içinde sağlansın. T bir örgü izomorfizmi olduğundan $0 \le x_\alpha \uparrow$ ve $y_\alpha = T(x_\alpha)$ koşulunu sağlayan E Riesz uzayının bir $\{x_\alpha\}$ ağı vardır. Her bir $f \in E_+^\sim$ için,

$$g: F \to \mathbb{R}\,; \quad y \to g(y) = f(T^{-1}(y)), \quad y \in F$$

biçiminde tanımlı g bir pozitif fonksiyoneldir. $0 \le y_\alpha \uparrow \le y''$ ifadesi $F^{\sim\sim}$ içinde sağlandığından $0 \le f(T^{-1})(y_\alpha) \uparrow \le y''(f \circ T^{-1})$ olur. $y_\alpha = T(x_\alpha)$ eşitliğinden her bir $f \in E_+^\sim$ için, $0 \le f(x_\alpha) \uparrow \le y''(f \circ T^{-1}) < \infty$ elde edilir.

$$\hat{x}: E_+^\sim \longrightarrow \mathbb{R}\,; \qquad h \longrightarrow \hat{x}(h) = \sup_\alpha h(x_\alpha)$$

biçiminde tanımlı toplamsal $\hat{x}$ dönüşümü $E^\sim$ uzayının tamamına bir pozitif operatör olarak genişler (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 1.7.). Böylece $0 \le x_\alpha \uparrow \le \hat{x}$ eşitsizliği $E^{\sim\sim}$ Riesz uzayında sağlanır. E uzayı b-özelliğine sahip olduğundan $0 \le x_\alpha \le x$ olacak şekilde E Riesz uzayının bir pozitif x elemanı vardır. Bu eşitsizliğe pozitif T operatörü uygulanırsa $0 \le y_\alpha \le T(x)$; $T(x) \in F$ bağıntısı F içinde sağlanır. Bu ise F uzayının b-özelliğine sahip olduğunu verir.

Şimdi bölüm uzayların b-özelliğine sahip olmasını karakterize edecek olan aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 4.2.1. E bir Riesz uzayı ve B, E uzayının bir projeksiyon bandi olsun. E / B bölüm uzayı ve B bandinin b-özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul E Riesz uzayının b-özelliğine sahip olmasıdır.

Kanıt: E bir Riesz uzayı ve B, E Riesz uzayının bir projeksiyon bandi olsun. O zaman $E = B \oplus B^d$ olur. Her bir $x \in E$ elemanı $x_1 \in B$ ve $x_2 \in B^d$ olmak üzere $x = x_1 + x_2$ biçiminde tek türlü yazılabildiğinden E Riesz uzayı $B \times B^d$ kartezyen çarpım uzayına örgü izomorftur.

($\Rightarrow$) B, B^d Riesz uzayları b-özelliğine sahip olduğundan E Riesz uzayı da b-özelliğine sahip olur (Önerme 4.4.1.).

Tersine, E Riesz uzayı b-özelliğine sahip olsun. O zaman B, B^d Riesz uzayları da b-özelliğine sahip olur (Önerme 4.4.1.). B^d Riesz uzayı, E/B Riesz uzayına örgü izomorfik olduğundan E/B Riesz uzayı da b-özelliğine sahip olur.■

5. b-ZAYIF KOMPAKT OPERATÖRLER

Aksi söylenmedikçe bu bölümde E bir Banach örgüsü, X ise bir Banach uzayı olarak alınacaktır.

5.1. b-Zayıf Kompakt Operatör Uzayları Üzerine

Tanım 5.1.1. Eğer $T : E \to X$ operatörü, E uzayının her b-sıra sınırlı alt kümesini X uzayının relatif zayıf kompakt alt kümesine dönüştürüyorsa, T operatörüne b-zayıf kompakt operatör denir. Yani, E uzayının her b-sıra sınırlı A alt kümesi için T(A) nın $\sigma(X,X')$- kapanışı $\sigma(X,X')$-kompakttır.

E Banach örgüsünden, X Banach uzayı içine tanımlı bütün b-zayıf kompakt operatörlerin kümesini $W^b(E, X)$ ile göstereceğiz.

Önerme 5.1.2. E bir Banach örgüsü ve X bir Banach uzayı olsun. O zaman $W^b(E, X)$, $L(E, X)$ uzayının bir alt vektör uzayıdır.

Kanıt: E Banach örgüsünün keyfi bir sıra aralığı [a, b] olsun. Her [a, b] sıra aralığı E uzayının bir b-sıra sınırlı alt kümesi olduğundan, T([a, b]), X uzayının bir relatif zayıf kompakt alt kümesidir. Dolayısıyla T([a, b]), X Banach uzayının bir zayıf sınırlı alt kümesi olur. X uzayının dual ikili ile uyumlu topolojilerine göre sınırlı alt kümeleri çakıştığından T([a, b]), X uzayının bir norm sınırlı alt kümesi olur. (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 9.25.). O halde, T bir aralık sınırlı operatördür. Dolayısıyla T sürekli bir operatördür (Ercan, Z., 1998).

Diğer taraftan, relatif zayıf kompakt kümelerin sonlu toplamları ve skalerle çarpımlarının yine relatif zayıf kompakt kümeler olduğu düşünülürse $W^b(E,X)$ kümesinin $L(E, X)$ uzayının bir alt vektör uzayı olduğu kolaylıkla görülür. ■

E uzayının her bir pozitif x elemanı için $[0,x]$ sıra aralığı bir b-sıra sınırlı alt küme olduğundan E uzayından X Banach uzayı içine tanımlı her bir b-zayıf kompakt operatör bir o-zayıf kompakt operatördür. Yani $W^b(E,X) \subseteq W^o(E,X)$ kapsaması vardır. Genelde bu kapsama öz olur.

<u>Örnek 5.1.3.</u> $I : c_0 \rightarrow c_0$ özdeşlik dönüşümünü göz önüne alalım. c_0 uzayı sıra sürekli norma sahip olduğundan özdeşlik dönüşümü bir o-zayıf kompakt operatör olmasına rağmen (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 12.9.) I özdeşlik dönüşümü bir b-zayıf kompakt operatör değildir. Gerçekten, c_0 bir AM-uzayı olduğundan kapalı birim yuvarı bir b-sıra sınırlı küme olur. c_0 uzayı yansımalı olmadığından I özdeşlik dönüşümü zayıf kompakt operatör olamaz. Buradan I özdeşlik dönüşümü b-zayıf kompakt operatör olamaz.

$T: E \rightarrow X$ bir zayıf kompakt operatör, B ise E Banach örgüsünün herhangi bir b-sıra sınırlı alt kümesi olsun. Aynı zamanda B kümesi E uzayının bir norm sınırlı alt kümesi olacağından T(B) kümesi, X uzayının bir relatif zayıf kompakt alt kümesi olur. Buradan T nin bir b-zayıf kompakt operatör olduğu görülür. O halde $W(E,X) \subseteq W^b(E,X)$ kapsaması elde edilir. Genelde bu kapsama da özdür.

<u>Örnek 5.1.4.</u> $I : L_1[0,1] \rightarrow L_1[0,1]$ özdeşlik dönüşümü ve B, $L_1[0,1]$ uzayının bir b-sıra sınırlı alt kümesi olsun. $L_1[0,1]$ bir KB-uzayı olduğundan B, $L_1[0,1]$ uzayının bir sıra sınırlı alt kümesi olur. Ayrıca $L_1[0,1]$ sıra sürekli norma sahip olduğundan I dönüşümü bir b-zayıf kompakt operatördür. Öte yandan $L_1[0,1]$ bir yansımalı uzay olmadığından $L_1[0,1]$ uzayının kapalı birim yuvarı zayıf kompakt küme olamaz.

(Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 10.5.). Böylece I özdeşlik dönüşümü zayıf kompakt operatör değildir.

Yukarıda verilen Örnek 5.1.3. ve Örnek 5.1.4.' den dolayı

$$W(E,X) \subseteq W^b(E,X) \subseteq W^o(E,X)$$

kapsamaları öz olarak gerçekleşir.

İki Banach örgüsü arasında tanımlı sürekli bir $T : E \to F$ operatörünün b-zayıf kompakt olması ile $T' : F' \to E'$ sürekli eşlek operatörünün b-zayıf kompakt olması denk değildir. Aşağıdaki iki örnek buna ışık tutar.

Örnek 5.1.5. $I : L_1[0,1] \to L_1[0,1]$ özdeşlik dönüşümünün b-zayıf kompakt operatör olduğunu biliyoruz. $L_\infty[0,1]$ uzayı sıra sürekli norma sahip olmadığından $I' : L_\infty[0,1] \to L_\infty[0,1]$ operatörü o-zayıf kompakt değildir (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 12.9.). Dolayısıyla I' sürekli eşlek operatörü b-zayıf kompakt operatör olamaz.

Örnek 5.1.6. $I : c_0 \to c_0$ özdeşlik dönüşümünün b-zayıf kompakt operatör olmadığı Örnek 5.1.3. de görüldü. Ancak, ℓ_1 uzayının bir KB-uzayı olmasından dolayı $I' : \ell_1 \to \ell_1$ sürekli eşlek dönüşümü bir b-zayıf kompakt operatör olur.

5.2. b-Zayıf Kompakt Operatörlerin Özellikleri

Önerme 5.2.1. Bir sürekli operatör $T : E \to X$ olsun. Eğer, T operatörünün sürekli iki eşlek dönüşümü $T'' : E'' \to X''$ bir o-zayıf kompakt operatör ise T bir b-zayıf kompakt operatördür.

<u>Kanıt :</u> E uzayının herhangi bir b-sıra sınırlı alt kümesi A olsun. O zaman $Q_E(A) \subseteq [-x'',x'']$ koşulunu gerçekleyen E'' uzayının bir x'' pozitif elemanı vardır. T'' o-zayıf kompakt operatör olduğundan $T''(Q_E(A))$ kümesi X'' uzayının bir relatif zayıf kompakt alt kümesi olur. $\{y_n\} \subseteq T(A)$ kümesi içinde keyfi bir dizi olsun. O zaman her bir $n \in \mathbb{N}$ için $y_n = T(x_n)$ olacak şekilde A kümesinin x_n elemanı vardır. $T''(Q_E(x_n)) = Q_X(T(x_n))$ ve $T''(Q_E(A))$ kümesi relatif zayıf kompakt ($\sigma(X'',X''')$ topolojisine göre) bir küme olduğundan $Q_X(T(x_{n_k})) \xrightarrow{w} x^*$ olacak şekilde X'' uzayının bir x^* elemanı vardır. $x^* \in \overline{Q_X(X)}^{\sigma(X'',X''')}$ ve $Q_X(X) \subseteq X''$ içinde bir konveks küme olduğundan X'' uzayının dual ikili ile uyumlu dual topolojilerine göre kapanışı aynıdır. Diğer taraftan X bir Banach uzayı olduğundan $x^* \in \overline{Q_X(X)}^{\|\cdot\|} = Q_X(X)$ dir, dolayısıyla $x^* \in Q_X(X)$ bulunur. Böylece $Q_X(x) = x^*$ olacak biçimde X uzayının bir x elemanını bulabiliriz. $\sigma(X'',X''')$-topolojisine göre $Q_X(T(x_{n_k})) \to Q_X(x)$ olduğundan, her bir $f \in X'''$ için $Q_X(T(x_{n_k}))(f) \to Q_X(x)(f)$ yakınsaması $\mathbb{R}$ içinde sağlanır. $X' \subseteq X'''$ kapsamasından her bir $f \in X'$ için de $f(T(x_{n_k})) \to f(x)$ yakınsaması vardır ve T(A) kümesi, X uzayının bir relatif zayıf kompakt altkümesi olur. Buradan T operatörünün bir b-zayıf kompakt operatör olduğunu görürüz. ■

Ancak bu önermenin tersi doğru değildir. Bu durum aşağıdaki örnekte yer almaktadır (Meyer-Nieberg, P., 1991).

<u>Örnek 5.2.2.</u> $\ell_n^1 = \{z = (z_n) \in \mathbb{R}^n : \|z\|_1 = \sum_{i=1}^n |z_i|\}$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. $x = \{x_n\}$, $x_n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_n^n) \in \ell_n^1$ ve $\{\|x_n\|_1\} \in c_0$ şartını sağlayan dizi uzayı $E = c_0(\ell_n^1)$ olsun. E Riesz uzayını, $x \in E$ olmak üzere, $\|x\| = \max\{\sum_{i=1}^n |x_n^i| : n \in \mathbb{N}\}$ normu ile donatarak bir Banach örgüsü yapalım. E Banach örgüsünün sürekli duali

$E' = \ell_n^1(\ell_n^\infty)$, $y = \{y_n\}$, $y_n = (y_n^1,\ldots,y_n^n) \in \ell_n^\infty$ ve $\{\|y_n\|_\infty\}_{n=1}^\infty \in \ell_1$ koşulunu sağlayan, $\|y\| = \{\sum_{i=1}^n \max\{|y_n^1|,\ldots,|y_n^n|\}$ normu ile donatılmış, $y = \{y_n\}$ dizilerinden oluşan bir Banach örgüsüdür. E' uzayı ayrılabilir ve σ-Dedekind tam bir uzay olduğundan E' sıra sürekli norma sahiptir (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Sonuç14.5.). Buradan E' uzayının bir KB-uzayı olduğunu görürüz. E' uzayının dual uzayı $E'' = \ell^\infty(\ell_n^1)$; $z=\{z_n\}$, $z_n = (z_n^1,\ldots,z_n^n) \in \ell_n^1$ ve $\{\|z_n\|_\infty\}_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$ koşulunu sağlayan $\|z\| = \sup\{\sum_{i=1}^n |z_n^i| : n \in \mathrm{IN}\}$ normuyla donatılmış $z = \{z_n\}$ dizilerinden oluşan bir Banach örgüsüdür. ℓ_∞ sınırlı dizi uzayı E" içine örgü gömülebilir olduğundan E" sıra sürekli norma sahip olamaz (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 14.4.). Yani E" bir KB-uzayı değildir. Diğer taraftan, E" uzayı ℓ_1 dizi uzayını izometrik izomorfizm altında bir alt vektör uzayı olarak içerir. Gerçekten;

$$T : \ell_1 \to E'' \quad T(x_n) = ((x_1),(x_1,x_2),\ldots),\ \forall\ (x_n) \in \ell_1$$

biçiminde tanımlanan T dönüşümü izometrik Riesz homomorfizmasıdır. Dolayısıyla, E''' bir KB uzayı olamaz (Meyer -Nieberg, P., 1991, Teorem 2.4 .14.).

Şimdi I : E'→ E' özdeşlik dönüşümünü gözönüne alalım. E' bir KB-uzayı olduğundan I dönüşümü bir b-zayıf kompakt operatör olur. Ancak, E''' bir KB-uzayı olmadığından sıra sürekli norma sahip olamaz. Böylece, I" özdeşlik dönüşümü bir o-zayıf kompakt operatör değildir.

Önerme 5.2.3. Bir T : E → X sürekli operatörü için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) T bir b-zayıf kompakt operatördür.

(ii) Her bir $A \subseteq E$ b-sıra sınırlı kümesi ve A içindeki her bir dik $\{x_n\}$ dizisi için $\lim \|T(x_n)\| = 0$ dır.

Kanıt: (i) $\Rightarrow$ (ii) E uzayının keyfi bir b-sıra sınırlı alt kümesi A olsun. O zaman $Q_E(A) \subseteq [-x'',x'']$ olacak şekilde E'' uzayında bir x'' pozitif elemanı vardır. x'' elemanının E'' uzayı içinde doğurduğu ideal $I_{x''}$ olmak üzere $Y = Q_E(E) \cap I_{x''}$ olsun. Her bir $y \in I_{x''}$ için, $\|y\|_\infty = \inf\{\lambda > 0 : |y| \leq \lambda x''\}$ normu ile birlikte birimli AM-uzayıdır. Öte yandan $I_{x''}$ idealini E'' uzayının normu ile donatırsak bir normlu Riesz uzayı olur.

$$I : (I_{x''}, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (I_{x''}, \|\cdot\|)$$

pozitif operatörü süreklidir ve E bir Banach uzay olduğundan $(Y, \|\cdot\|_\infty)$ bir AM-uzayıdır. Gerçekten; $\{y_n\} \subseteq Y$ ve $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} y$, $y \in I_{x''}$ olsun. I sürekli olduğundan $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y$ olur. $\{y_n\} \subseteq Q_E(E)$ ve E bir Banach uzayı olduğundan $y \in Q_E(E)$ dir. Böylece $y \in Y$ bulunur. Bu ise Y nin bir Banach uzayı olduğunu verir. $(Y, \|\cdot\|_\infty)$ uzayının kapalı birim yuvarı U olsun. $U \subseteq [-x'', x'']$ olacağından $Q_E^{-1}(U)$, E uzayının bir b-sıra sınırlı alt kümesi olur.

$$\hat{T} : Y \to X, \qquad y = Q_E(x) \to \hat{T}(y) = T(x) \qquad (y \in Y, \quad x \in E)$$

biçiminde tanımlayalım. $\hat{T}(U) = T(Q_E^{-1}(U))$ ve T bir b-zayıf kompakt operatör olduğundan $\hat{T}(U)$, X uzayının bir relatif zayıf kompakt altkümesidir. Yani, $\hat{T}$ bir zayıf kompakt operatör olacaktır. Önerme 2.6.5. teoreminden ise $\hat{T}'$ eşlek

$\hat{T}': X' \to Y'$ bir zayıf kompakt operatör olacaktır. $W \subseteq X'$ uzayının kapalı birim yuvarı olmak üzere $\hat{T}'(W)$, Y' uzayının relatif zayıf kompakt bir alt kümesidir. A kümesinde bir dik dizi $\{x_n\}$ olsun. $\{Q_E(x_n)\} \subseteq Q_E(A) \subseteq [-x'', x'']$ olduğundan $\{Q_E(x_n)\}$, $(Y, \|.\|_\infty)$ uzayının bir norm sınırlı dizisidir. $Q_Y : Y \to Y''$ kanonik dönüşümü normu koruduğundan, $\{Q_Y(Q_E(x_n))\}$, Y'' uzayının norm sınırlı bir dizisidir. Y'' bir birimli AM-uzayı olduğundan, $\{Q_Y(Q_E(x_n))\}$, Y'' içinde bir sıra sınırlı dizidir. Öte yandan sırası ile $Q_E : E \to E''$ ve $Q_Y : Y \to Y''$ dikliği koruyan dönüşüm ve $\{x_n\} \subseteq A$ içinde bir dik dizi olduğundan $\{Q_Y(Q_E(x_n))\}$, Y'' uzayında sıra sınırlı dik dizi olur. $\hat{T}'(W) \subseteq Y'$ içinde relatif zayıf kompakt bir küme olduğundan $\{Q_Y(Q_E(x_n))\}$ dizisi $\hat{T}'(W)$ kümesi üzerinde sıfıra düzgün yakınsar (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 13.7.). Dolayısıyla, $\forall\ x' \in X'$, $\|x'\| \leq 1$ ve $\forall\ \varepsilon > 0$ için, $\forall\ n \geq n_0$ için, $|Q_Y(Q_E(x_n))(\hat{T}'(x'))| < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 doğal sayısı vardır. Böylece, $|\hat{T}'(x')(Q_E(x_n))| = |x'(\hat{T}(Q_E(x_n))| = |x'(T(x_n))| < \varepsilon$ eşitsizliği elde edilir. Buradan $\sup\{|x'(T(x_n))| : \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}, x' \in X', \|x'\| \leq 1\}$ $\leq \varepsilon$ bulunur. Böylece $\forall n \geq n_0$ için $\|T(x_n)\| \leq \varepsilon$ olur. Yani $\lim \|T(x_n)\| = 0$ dır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $A \subseteq E$ bir b-sıra sınırlı küme olsun. O zaman, $Q_E(A) \subseteq [-x'', x'']$ koşulunu sağlayan E'' uzayının bir pozitif x'' elemanı vardır. (i) $\Rightarrow$ (ii) gerektirmesinin kanıtında kullanılan gösterimlerdeki gibi $Y = Q_E(E) \cap I_{x''}$ olsun. T sürekli bir operatör olduğundan

$$\hat{T} : Y \to X, \qquad y = Q_E(x) \to \hat{T}(y) = T(x) \quad (y \in Y, \quad x \in E)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm de süreklidir. $(Y,\|\cdot\|_\infty)$ uzayı içinde norm sınırlı ve dik herhangi bir dizi $\{y_n\} = \{Q_E(x_n)\}$ olsun. $\{x_n\}$, E içinde b-sıra sınırlı dik bir dizi olduğundan hipoteze göre $\lim \|T(x_n)\| = 0$ dır.

$$\lim \left\|\hat{T}(y_n)\right\| = \lim \left\|\hat{T}Q_E(x_n)\right\| = \lim \|T(x_n)\| = 0$$

eşitliklerinden $\hat{T} : Y \to X$ bir M-zayıf kompakt operatör olur. O halde T bir zayıf kompakt operatördür (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 18.10.). $Q_E(A) \subseteq Y$ bir norm sınırlı küme ve $\hat{T}$ zayıf kompakt operatör olduğundan, $\hat{T}(Q_E(A)) = T(A)$ kümesi X uzayının bir relatif zayıf kompakt alt kümesi olur. Böylece T operatörünün bir b-zayıf kompakt operatör olduğunu görürüz.■

Sonuç 5.2.4. E ve F Banach örgüleri ve $S, T : E \to F$ $0 \le S \le T$ koşulunu sağlayan pozitif operatörler olsun. Eğer, T bir b-zayıf kompakt operatör ise S operatörü de bir b-zayıf kompakt operatör olur.

Kanıt : E uzayının herhangi bir b-sıra sınırlı kümesi A ise $|A| := \{|a| : a \in A\}$ kümesi de E uzayının bir b-sıra sınırlı alt kümesi olur. $\{x_n\}$, A içinde herhangi bir dik dizi olsun. $0 \le |S(x_n)| \le S(|x_n|) \le T(|x_n|)$ olduğundan

$$\|S(x_n)\| \le \|T(|(x_n|)\| \qquad (5.1)$$

Diğer taraftan Önerme 5.2.3. ile T bir b-zayıf kompakt operatör olduğundan $\lim \|T(|x_n|)\| = 0$ bulunur. (5.1)'den $\lim S(x_n) = 0$ elde edilir ki bu S operatörünün de bir b-zayıf kompakt operatör olduğunu verir. ■

E ve F iki Riesz uzayı ve $T,S : E \to F$ iki operatör olsun. Her bir $x \in E$ için $|S(x)| \leq T(|x|)$ sağlanıyor ise T operatörüne S operatörünü sınırlıyor denir.

Sonuç 5.2.5. E ve F iki Banach örgüsü T, S operatörleri ise E uzayından F içine tanımlı olsunlar. Eğer T, S operatörünü sınırlayan pozitif b-zayıf kompakt operatör ise S operatörü de bir b-zayıf kompakt operatör olur.

Kanıt: T operatörü S operatörünü sınırladığı için her bir $x \in E$ için $|S(x)| \leq T(|x|)$ olur. $\{x_n\}$, E uzayının herhangi bir b-sıra sınırlı dik dizisi olsun. Dolayısıyla $\{|x_n|\}$ dizisi de b-sıra sınırlı dik bir dizi olur. T b-zayıf kompakt operatör olduğundan $\lim \| T(|x_n|) \| = 0$ bulunur. F Banach örgüsü olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\| S(x_n) \| = \| \, |S(x_n)| \, \| \leq \| T(|x_n|) \|$ eşitsizliği vardır, böylece $\lim S(x_n) = 0$ elde edilir. Buradan S operatörünün de bir b-zayıf kompakt operatör olduğu çıkar (Önerme 5.2.3.).■

Sonuç 5.2.6. $W^b(E,X)$ uzayı $L(E,X)$ sürekli operatörler uzayının kapalı bir alt vektör uzayıdır.

Kanıt: $W^b(E,X)$ uzayının $L(E,X)$ sürekli operatörler uzayının bir alt vektör uzayı olduğu Önerme 5.1.2. de görüldü. $W^b(E,X)$ uzayının $L(E,X)$ sürekli operatörler uzayının herhangi bir T elemanına normda yakınsayan bir dizisi $\{T_n\}$ olsun. A, E uzayının herhangi bir b-sıra sınırlı alt kümesi ve A içinde herhangi bir dik dizisi $\{x_m\}$ olsunlar. $\varepsilon > 0$ verildiği zaman $\lim T_n = T$ olduğundan $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall\, n \geq n_0$ için $\| T_n - T \| < \varepsilon$ olur. $\{x_m\}$ dizisinin norm sınırlı olmasından $\forall\, m \geq n_0$ için,

$$\| T(x_m) \| = \| T(x_m) - T_{n_0}(x_m) + T_{n_0}(x_m) \| \leq \| T - T_{n_0} \| . \| x_m \| + \| T_{n_0}(x_m) \|$$

eşitsizliği dikkate alınırsa $\lim T(x_m) = 0$ bulunur. Yine Önerme 5.2.3. den T operatörünün bir b-zayıf kompakt operatör olduğu görülür.■

Önerme 5.2.7. X, Y, Z Banach örgüleri ve $X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{S} Z$ operatörleri verilsin. O zaman aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(i) T b-sıra sınırlı, S b-zayıf kompakt ise ST bileşke operatörü de bir b-zayıf kompakt operatördür.

(ii) S sürekli,T b-zayıf kompakt ise ST bileşke operatörü de bir b-zayıf kompakt operatördür.

Kanıt : (i) A, X uzayının bir b-sıra sınırlı altkümesi olsun. T bir b-sıra sınırlı operatör olduğundan T(A), Y uzayının bir b-sıra sınırlı altkümesi olur. S bir b-zayıf kompakt operatör olduğundan ST(A), Z uzayının bir relatif zayıf kompakt altkümesi olur. Yani, ST bir b-zayıf kompakt operatör olur.

(ii) A, X uzayının bir b-sıra sınırlı altkümesi olsun. T bir b-zayıf kompakt operatör olduğundan T(A) Y uzayının bir relatif zayıf kompakt altkümesi olur. S operatörünün sürekli olması ve $ST(A) \subseteq S(\overline{T(A)})$ kapsamasından dolayı ST(A), Z uzayının bir relatif zayıf kompakt altkümesi olur. Yani ST bileşke operatörü bir b-zayıf kompakt operatör olur. ■

Önerme 5.2.8. E bir Banach örgüsü olsun. E uzayının bir KB-uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul E üzerinde tanımlı özdeşlik dönüşümünün bir b-zayıf kompakt operatör olmasıdır.

Kanıt : E bir KB-uzayı ve A da E uzayının bir b-sıra sınırlı altkümesi olsun. E, b-özelliğine sahip olacağından $A \subseteq [-x, x]$ koşulunu sağlayan E uzayının pozitif bir x elemanı vardır. E sıra sürekli norma sahip olduğundan, $[-x,x]$ aralığı zayıf kompakttır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 12.9.). Buradan, I özdeşlik dönüşümünün bir b-zayıf kompakt operatör olduğu çıkar.

Tersine, E uzayı içinde artan pozitif ve norm sınırlı herhangi bir dizi $\{x_n\}$ olsun. $\{x_n\}$ artan ve norm sınırlı olduğundan $\{x_n : n \in IN\}$ kümesi E uzayının bir b-sıra sınırlı alt kümesi olur. I özdeşlik dönüşümü b-zayıf kompakt olduğundan, $\{x_n\}$ dizisinin zayıf yakınsak bir $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Yani, $x_{n_k} \xrightarrow{\omega} x$ olacak şekilde E uzayının bir x elemanı vardır. Her bir $0 \le f \in E'$ için $0 \le f(x_{n_k}) \uparrow f(x)$ olduğundan $0 \le x_{n_k} \uparrow \le x$ olur. Her bir $n_k \in IN$ için E uzayının $0 \le x_{n_k} \uparrow \le y$ koşulunu sağlayan başka bir y elemanı var olsun. Her bir $0 \le f \in E^{\sim}$ için $0 \le f(x_{n_k}) \uparrow \le f(y)$ olduğundan $f(x) \le f(y)$ bulunur. Böylece, $x \le y$ elde edilir. Yani, $\sup x_{n_k} = x$ dir. $\{x_n\}$, artan bir dizi olduğundan $\sup x_n = x$ olur. Buradan ise kolaylıkla E uzayı içinde $x_n \xrightarrow{\omega} x$ bulunur. $(x - x_n) \downarrow 0$ ve $x_n - x \xrightarrow{\omega} 0$ olduğu dikkate alınırsa $\lim x_n = x$ bulunur (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 11.8.). Bu ise E Banach uzayının bir KB-uzayı olduğunu verir.■

Önerme 5.2.9. E sıra sürekli norma sahip ve $T : E \to X$ bir sürekli operatör olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) T bir b-zayıf kompakt operatördür.

(ii) B, E uzayının E'' uzayı içinde ürettiği band olmak üzere $T''(B) \subseteq X$ sağlanır.

<u>Kanıt</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii) B bandinin pozitif keyfi elemanı x" olsun. E uzayı sıra sürekli norma sahip olduğundan $0 \leq x_\alpha \uparrow x''$ olacak şekilde E uzayının bir $\{x_\alpha\}$ ağı vardır (Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Teorem 12.9.). $x_\alpha \xrightarrow{\omega^*} x''$ ve $T'': E'' \to X''$ içine ω^*-sürekli olduğundan $T''(x_\alpha) \xrightarrow{\omega^*} T''(x'')$ olur. Öte yandan, T bir b-zayıf kompakt operatör olduğundan $\{T(x_\alpha)\}$ ağının X uzayının bir x elemanına zayıf yakınsayan $\{T(x_{\alpha_\beta})\}$ alt ağı vardır. Yani X uzayında $T(x_{\alpha_\beta}) \xrightarrow{\omega} x$ olur. $Q_X : X \to X''$ zayıf sürekli olduğundan X" uzayı içinde $Q_X(T(x_{\alpha_\beta})) \xrightarrow{\omega} Q_X(x)$ yakınsaması sağlanır. X" üzerindeki ω-yakınsama X" üzerindeki ω^*-yakınsamayı gerektirdiğinden X" uzayı içinde $T''(Q_E(x_{\alpha_\beta})) \xrightarrow{\omega^*} Q_X(x)$ yakınsaması sağlanır. Öte yandan $0 \leq x_\alpha \uparrow x''$ olduğundan E" uzayında $x_\alpha \xrightarrow{\omega^*} x''$ yakınsaması olduğunu biliyoruz. $T'' : E'' \to X''$ içine ω^*-sürekli ve E" uzayında $x_{\alpha_\beta} \xrightarrow{\sigma(E'',E')} x''$ yakınsaması sağlanacağından $T''(Q_E(x_{\alpha_\beta})) \xrightarrow{\omega^*} T''(x'')$ bulunur. $(X,\sigma(X'',X'))$ topolojik uzayının Hausdorff olduğu dikkate alınırsa $T''(x'') = Q_X(x)$ bulunur. Bu ise $T''(B) \subseteq X$ olduğunu verir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) E, uzayının herhangi bir b-sıra sınırlı altkümesi A olsun. O zaman $A \subseteq [-x'',x'']$ şartını sağlayan B bandinin pozitif bir x" elemanı vardır. $[-x'',x''] \subseteq B$ uzayının ω^*- kompakt alt kümesi ve $T'' : E'' \to X''$ iki eşlek operatörü ω^*-sürekli olduğundan $T''([-x'',x''])$ kümesi X" uzayının bir ω^*-kompakt altkümesidir. Diğer taraftan, $T''(A) \subseteq T''([-x'',x'']) \subseteq T''(B) \subseteq X$ kapsamasından ve X" uzayı üzerindeki ω^* topolojisinin X üzerine kısıtlaması X üzerindeki ω topolojiyi vereceğinden

$T''(A)$, X uzayının bir relatif zayıf kompakt alt kümesi olur. Bu ise T' nin b-zayıf kompakt operatör olduğunu verir.■

Önerme 5.2.10. E sıra sürekli norma sahip bir Banach örgüsü, X bir Banach uzayı, $T : E \to X$ bir b-zayıf kompakt operatör ve B ise E uzayının E'' içinde doğurduğu band olsun. O zaman, $T' : (X', \omega^*) \to (E', \sigma(E', B))$ operatörü süreklidir.

Kanıt: X' dual uzayı içinde ω^* topolojisine göre $x'_\alpha \to 0$ yakınsaması sağlansın ve $x'' \in B$ olsun. T bir b-zayıf kompakt operatör ve E sıra sürekli norma sahip olduğundan Önerme 5.2.9.'a göre $T''(B) \subseteq X$ dir, yani $T''(x'') \in X$ olur. $< T'(x'_\alpha) , x'' > = < x'_\alpha , T''(x'') > \to 0$ sağlandığından $(E', \sigma(E', B))$ topolojik uzayında $T'(x'_\alpha) \to 0$ yakınsaması sağlanır. ■

KAYNAKLAR

1. Abramovich, Y.A., 1990 , When each regular operators is contiuous, **Functional Analysis Optimization and Mathematical Economics,** Oxford University Press, New York, 133-140.

2. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O.,1978, Locally Solid Riesz Spaces, **Academic Press.,** London.

3. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., 1985, Positive Operators, **Academic Press.,** New York, London.

4. Cohn, D.L., 1980, Measure Theory, **Birkhauser,** Boston, Basel, Stuttgart.

5. Conway, J.B., 1985, A Course in Functonal Analysis, **Springer-Verlag,** New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo.

6. Ercan Z., 1998, İnterval bounded operators and order weakly compact operators, **Demostratio Mathematica,** Vol.XXX1, No 4, 805-812.

7. Luxemburg , W.A. J., Zaanen, A. C., 1971, Riesz Spaces I, **North Holland Pub. Comp.,** Amsterdam.

8. Kantorovich, L. V., 1936, Concerning the general theory of operators in semi-ordered spaces, **Dokl. Akad. Nauk USSR,** v.1, 271-274.

9. Kantorovich, L. V., and Vulikh, B.Z., 1937, Sur represetation des operations lineares, **Comp.-Math.** V.5., 119-165.

10. Meyer- Nieberg, Peter, 1991, Banach Lattices, **Springer- Verlag,** Heidelberg.

11. Meyer-Nieberg , P., 1974, Über klassen schwach kompakter operatoren in Banachverbanden, **Math. Z.,** 138,145-159.

12. Dodds, P.,G., 1975, “o-weakly compact mappings of Riesz spaces”, **Trans. Amer. Math.Soc.,** 214, 389-402.

13. Robertson, A. P., Robertson, W., 1964, Topological Vector Spaces, **Cambiridge University Press,** London, New York.

14. Schaefer, H. H., 1974, Banach Lattices and Positive Operators, **Springer-Verlag,** New York , Berlin.

15. Schmidt, K.D., 1988, ”On the modules of weakly and strogly additive vector measures”, **Proc. Amer. Math. Soc.,** 102, 862-866.

16. Zaanen, A.C., 1983, Riesz Spaces II, **North-Holland Pub. Comp.,** Amsterdam.

ÖZGEÇMİŞ

Birol ALTIN 1973 yılında Çorum`da doğdu. İlk öğrenimini Boğaziçi ilk okul`unda , orta öğrenimini Açıkalın orta okulu ve Abidin Paşa lisesi`nde tamamladı. Üniversite lisans öğrenimini Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü`nde tamamladı. 1994 yılında Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm`üne araştıma görevlisi olarak başladı.

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dal`ında Yüksek Lisansını tamamladı. Halen Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm`ünde araştıma görevlisi olarak çalışmaktadır.