

**ZAMANDA SÜREKLİ SİSTEMLERDE DURUM DENKLEMLERİ VE  
GİRİŞ-ÇIKIŞ TANIMLAMALARI**

**İbrahim KOLDANCA**

725982

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
ELEKTRİK EĞİTİMİ**

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
BİLİMLER ENSTİTÜSÜ**

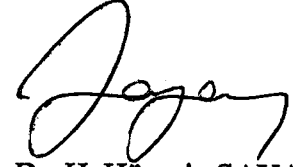
**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Temmuz 2002**

**ANKARA**

125982

İbrahim KOLDANCA tarafından hazırlanan ZAMANDA SÜREKLİ SİSTEMLERDE DURUM DENKLEMLERİ VE GİRİŞ-ÇIKIŞ TANIMLAMALARI adlı tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

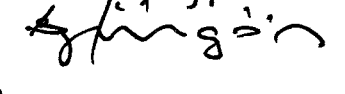



Dr. H. Hüseyin SAYAN

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Elektrik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. İsmail COŞKUN 

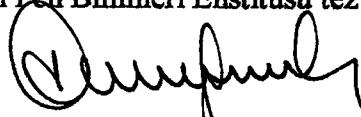
Üye : Doç. Dr. Güngör BAL 

Üye : Dr. H. Hüseyin SAYAN 

Üye : \_\_\_\_\_

Üye : \_\_\_\_\_

Bu tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ .....	iv
ŞEKİLLERİN LİSTESİ .....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. ZAMANDA SÜREKLİ SİSTEMLERDE DURUM DENKLEMLERİ VE GİRİŞ-ÇIKIŞ TANIMLAMALARI.....	4
2.1. Zamanla Sürekli Lineer Sistemlerin Tepkisi.....	4
2.2. Transfer Fonksiyonları.....	9
3. AYRIK (KESİKLİ) ZAMANLI SİSTEMLERİN DURUM DENKLEMLERİ VE GİRİŞ ÇIKIŞ TANIMLAMALARI.....	12
3.1. Ayrık Zamanlı Lineer Sistemlerin Tepkisi.....	12
3.2. Transfer Fonksiyon ve z- Dönüşümü.....	18
3.3. Örneklenmiş-Veri Sistemleri.....	21
4. KONTROLEDİLEBİLİRLİK VE GÖZLENEBİLİRLİK.....	27
4.1. Kontrol edilebilirlik ve Erişilebilirlik.....	27
4.2. Gözlenebilirlik ve Yapılandırılabilirlik.....	31
5. DA MOTORUN MATEMATİKSEL MODELLENMESİ.....	34
5.1. DA Motorun Durum Denklemleri.....	34
5.2. $K_1$ ve $K_b$ arasındaki ilişki.....	37
5.3. Bir DA Motorun Moment Hız Eğrisi.....	38
6. PID KONTROL.....	40
6.1. Giriş.....	40
6.2. P, I ve D Kontrolünün Özellikleri.....	41
6.3. PID Kontrolörler için Ayar Kuralları.....	43
6.3.1. PID kontrolör ayarı için Ziegler-Nichols kuralları.....	43
6.3.1.1. Birinci yöntem.....	44
6.3.1.2. İkinci yöntem.....	47
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	49
KAYNAKLAR.....	51
EKLER.....	52
ÖZGEÇMİŞ.....	78

**ZAMANDA SÜREKLİ SİSTEMLERDE DURUM DENKLEMLERİ VE  
GİRİŞ-ÇIKIŞ TANIMLAMALARI**

**(Yüksek Lisans Tezi)**

**İbrahim KOLDANCA**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Temmuz 2002**

**ÖZET**

Bu çalışmada zamanda sürekli sistemlerin durum denklemleri ele alınarak zamanda sürekli sistemlerin tepkileri ve transfer fonksiyonları incelenmiştir. Ayrık zamanlı sistemlerin durum denklemleri kullanılarak bu sistemlerin tepkisi, transfer fonksiyonu, z-dönüşümü ve örneklenmiş-veri sistemleri incelenmiştir. Lineer sistemlerde kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik konusu araştırılmış, erişilebilirlik ile kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik ile yapılandırılabilirlik arasındaki ilişki incelenmiştir. DA motorun matematiksel modeli kullanılarak durum denklemleri, sinyal akış diyagramı, blok diyagramı verilmiştir. Daha sonra PID kontrolü üzerinde durulmuştur. PID kontrolün genel özellikleri, Ziegler-Nichols kuralları incelenmiştir. Son olarak MATLAB programı kullanılarak DA motorun kontroledilebilirliği ve gözlenebilirliği incelendikten sonra PI ve PID kontrolü yapılmıştır.

**Bilim Kodu : 626.01.00**

**Anahtar Kelimeler : Sürekli zaman, durum denklemleri, kontroledilebilirlik,  
gözlenebilirlik.**

**Sayfa Adedi : 78**

**Tez Yöneticisi : Dr. H. Hüseyin SAYAN**

**STATE EQUATIONS AND INPUT-OUTPUT DESCRIPTION OF  
CONTINUOUS-TIME SYSTEMS**

**(M. Sc. Thesis)**

**İbrahim KOLDANCA**

**GAZİ UNIVERSITY**

**INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

**July 2002**

**ABSTRACT**

In this work, the response of linear continuous-time systems and transfer functions were investigated by considering state equations of linear continuous-time systems. In addition, by using state equations of linear discrete-time systems the response of this systems, transfer function,  $z$ - transform and sampled-data systems were investigated. In linear systems, subject of controllability and observability was researched and the relationship between reachability-controllability and observability-constructibility was observed. By using the mathematical model of DC motor state equations, state diagram of a DC motor, block diagram of a DC motor was made. After that, the control of PID was considered. The general characteristics of PID controls, and the laws of Ziegler-Nichols were investigated. The finally, by using the MATLAB program, the controllability and observability of a DC motor was researched and after that the PI and PID controllers were applied.

**Science Code : 626.01.00**

**Key Words : Continuous time, state equations, controllability , observability**

**Page Number : 78**

**Adviser : Dr. H.Hüseyin SAYAN**

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANİSYON MERKEZİ**

## TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren danıőmanım Sayın Dr. H. Hüseyin SAYAN' a yine tecrübelerinden faydalandığım değerli hocalarım Sayın Doç. Dr. Güngör BAL' a, Arő Gör. Ali SAYGIN' a, Arő Gör. Ahmet ALTINTAŐ' a ve emeği geçen bütün Elektrik Eğitimi Bölümü hocalarına teőekkürü bir borç bilirim.



**ÇİZELGELERİN LİSTESİ**

<b>Çizelge</b>	<b>Sayfa</b>
Çizelge 6.1. P, I, D kontrollerin etkileri.....	42
Çizelge 6.2. Sistemin basamak cevabına göre Ziegler-Nichols ayar kuralı.....	45
Çizelge 6.3. $K_{cr}$ kritik kazanç ve $P_{cr}$ kritik periyodu tabanlı Ziegler-Nichols ayar kuralı.....	48



## ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. (3.2) durumunun hal grafiği.....	16
Şekil 3.2. Dijital kontrol sistemi.....	21
Şekil 3.3. Eş 3.33 ve Eş 3.36 formülleri ile tanımlanan sistem.....	23
Şekil 4.1. Erişilebilir bir $x_1$ durumu.....	27
Şekil 4.2. Kontrol edilebilir bir $x_0$ durumu.....	28
Şekil 4.3. Lineer sistemlerde kontrol edilebilirlik ile erişilebilirlik ve gözlenebilirlik ile yapılandırılabilirlik arasındaki ilişki.....	33
Şekil 4.4. Kontrol edilebilirlik ile gözlenebilirlik arasındaki ilişki.....	33
Şekil 5.1. Yabancı uyarımlı DA motorun elektrik devresi.....	35
Şekil 5.2. DA motorun durum modeli.....	36
Şekil 5.3. DA motorun blok diyagramı.....	37
Şekil 5.4. DA motorun tipik moment hız eğrileri.....	39
Şekil 6.1. Bir sistemin PID kontrolü.....	40
Şekil 6.2. Birim basamak tepkisi, maksimum aşım %25.....	43
Şekil 6.3. Sistemin girişine uygulanan birim basamak sinyaline tepkisi.....	43
Şekil 6.4. S biçimli cevap eğrisi.....	44
Şekil 6.5. Bir sistemin P kontrolü.....	47
Şekil 6.6. $P_{\sigma}$ periyotlu devamlı osilasyon.....	47



## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$b_m$	Sürtünme katsayısı, Nms
$e_a(t)$	Endüvi gerilimi, V
$e_b(t)$	Zıt elektromotor kuvvet, V
$i_a$	Endüvi akımı, Amp
$j_m$	Motorun rotor eylemsizliği, $kg\ m^2 /s^2$
$k_t$	Moment sabiti, Nm/Amp
$k_b$	Zıt elektromotor kuvvet sabiti, V/(rad/s)
$L_a$	Endüvi sargısının endüktansı, H
$r_a$	Endüvi direnci, $\Omega$
$T_L(t)$	Yüklü moment, Nm
$T_m(t)$	Motor moment, Nm
$\omega_m$	Rotor açısal hızı, rad/sn
$\theta_m(t)$	Rotor yer değiştirmesi
$\phi(t)$	Hava boşluğundaki manyetik akı, Weber

### Kısaltmalar

da	Doğru Akım
mimo	Çok girişli çok çıkışlı (multi input multi output)
siso	Tek girişli tek çıkışlı (single input single output)
s-s	Sabit durum

## 1. GİRİŞ

Teknolojinin gelişmesi ile birlikte kontrol sistemlerinin önemi gittikçe artmaya başlamıştır. Kontrol sistemleri üretilen ürünlerin kalite kontrolünde, makine ve aletlerin kontrolünde, uzay teknolojisinde, silah sistemlerinde, bilgisayar kontrol sistemlerinde, ulaşım ve güç sistemlerinde, robot ve endüstri sektörlerinde çok yaygındır. Hatta sosyo-ekonomik sistemlerin kontrolünde bile, bugün otomatik kontrol uygulanmaktadır.

Bir kontrol sisteminin temel öğeleri şunlardır:

- 1- Kontrolün amaçları
- 2- Kontrol sistemi öğeleri
- 3- Sonuçlar veya çıkışlar



Genel olarak kontrol sisteminin amacı, kontrol sisteminin elemanları aracılığı ile girişleri kullanarak çıkışları, önceden belirlenmiş bir şekilde kontrol etmektir[1, 2, 3].

Lineer sistemlerin modellenmesinde durum denklemleri kullanılır. Durum değişkeni yada durum uzayı modelinin amacı, giriş-çıkış ilişkisini bozmadan, bu ilişkiyi muhafaza ederek sistemin temsilini gerçekleştirmektir. Bu işlem yapılırken  $n$ . dereceden bir sistem için  $n$  adet birinci dereceden denklem yazılarak sistem ifade edilir.  $n$  tane birinci dereceden denklem kullanılmasının avantajı, sistemin giriş-çıkış karakteristiğine ilave olarak sistemin iç karakteristiğinin de dikkate alınarak temsil edilmesidir.

Durum uzay modelinin kullanılmasında şu faydalar vardır:

- 1- Durum modellerinin analiz ve tasarımı bilgisayar yardımıyla yapılırken yüksek dereceli sistemler için bilgisayar kullanımı kolaylık sağlarken aynı sistemler için transfer fonksiyonu yaklaşımı başarısız olmaktadır.

- 2- Durum değişkeni tasarımında, sitemle ilgili birçok bilgi geri besleme olarak kullanılır. Böylece transfer fonksiyon yaklaşımına göre sistemin olabilecek en mükemmel kontrolü yapılmış olur.
- 3- Kontrol sisteminin tasarımında elde edilen en iyi sonuç, durum değişkeni modelinin kullanılmasıyla elde edilir. Yani, tasarlanan sistemin tasarım kriterini ifade eden matematiksel fonksiyonların azaltılması ya da çoğaltılması kolaydır.
- 4- Durum değişkeni modeli simulasyon için de gereklidir.

Lineer sistemler, zamanda sürekli ve ayrık zamanlı sistemler olarak ikiye ayrılır. Zamanda sürekli sistemlerde transfer fonksiyonunu elde etmek için Laplace dönüşümü kullanılır. Ayrık zamanlı sistemlerde transfer fonksiyonunu elde etmek için ise z-dönüşümü kullanılır.

Bir sistemi inşa etmeden önce o sisteme ait bazı testlerin, sistemin modeli üzerinde yapılması gerekir. Bu testlerden biri de kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik testidir. Bir DA motoru imal etmeden önce o motorun matematiksel modelini çıkarıp bu model üzerinde gerekli testler yapılmalıdır. Böylece sistem daha ekonomik şartlarda, az zaman kaybı ve daha verimli bir şekilde imal edilmiş olur.

Lineer sistemlerde erişilebilirlik her zaman kontroledilebilirlikle eşdeğerdir. Fakat kontroledilebilirlik; sürekli zamanlı sistemlerde yalnızca durum geçiş matrisinin ( $\Phi$ ) tekil olmadığı durumda, ayrık zamanlı sistemlerde ise A matrisinin tekil olmadığı durumda erişilebilirliği ifade eder.

Lineer sistemlerde gözlenebilirlik her zaman yapılandırılabilirliği ifade eder. Fakat yapılandırılabilirlik; sürekli zamanlı sistemlerde durum geçiş matrisi ( $\Phi$ ) tekil olmadığı durumda, ayrık zamanlı sistemlerde A matrisinin tekil olmadığı durumda gözlenebilirliği ifade eder.

Kontrol sistemlerde büyük ölçüde DA motorunun analiz ve simulasyonu için matematiksel modeli kullanılır. Günümüzdeki endüstriyel kontrollerin bir çoğunda

PID kontrolü kullanılmaktadır. PID kontroldeki  $K_p$  kazancı yükselme zamanını azaltır fakat asla yok etmez.  $K_i$  kazancı ise sabit durum hatasının yok edilmesine etki eder fakat daha kötü geçici tepkilere neden olabilir.  $K_d$  kazancıda sistemin kararlılığını artırır, aşımı azaltır, geçici tepkiyi düzeltir [1, 4, 5].



## 2. ZAMANDA SÜREKLİ SİSTEMLERDE DURUM DENKLEMLERİ VE GİRİŞ-ÇIKIŞ TANIMLAMALARI

Bu bölümde; ilk olarak zamanda sürekli lineer sistemlerin tepkileri daha sonra durum denklemleri verilen lineer sabit zamanlı sistemlerin transfer fonksiyonları incelenmiştir.

### 2.1. Zamanda Sürekli Lineer Sistemlerin Tepkisi

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.1a)$$

$$y = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2.1b)$$

biçiminde zaman değişkenli lineer denklemlerin tanımladığı sistemler göz önüne alınsın. Bu sistemlerde  $A \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $B \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times m})$ ,  $C \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{p \times n})$ ,  $D \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{p \times m})$  ve  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  ifadesinin sürekli veya parçalı sürekli olduğu kabul edilsin. Eş. 2.1a ve 2.1b' de yer alan  $x$ ; durum vektörünü,  $u$ ; sistemin girişini ve  $y$ ; sistemin çıkışını göstermektedir. Başlangıç durumları için verilen  $t_0 \in \mathbb{R}$  için  $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  olduğu ve verilen giriş değerinin  $u$  olduğu göz önüne alınırsa  $t \in \mathbb{R}$  için tek çözüm ;

$$\phi(t, t_0, x_0) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)B(s)u(s)ds \quad (2.2)$$

biçiminde ifade edilir. Burada  $\Phi$ ' ye,  $A(t)$ ' nin durum geçiş matrisi denir. Ayrıca, Eş. 2.2, Eş. 2.1b' de yerine konulduğunda tüm  $t \in \mathbb{R}$  için toplam sistem tepkisi aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, s)B(s)u(s)ds + D(t)u(t) \quad (2.3)$$

Toplam tepki iki bileşenin toplamması ile elde edilir. Bu bileşenlerden

$$\psi(t, t_0, x_0, 0) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 \quad (2.4)$$

sıfır giriş tepkisidir. Diğer bileşen,

$$\rho(t, t_0, 0, u) = C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, s)B(s)u(s)ds + D(t)u(t) \quad (2.5)$$

sıfır durum tepkisidir.

Eş. 2.3' de  $u(t)=0$  alınarak Eş. 2.4 elde edilir.  $x_0$  başlangıç konumu iken, Eş. 2.3' de  $x_0 =0$  alınarak Eş. 2.5 elde edilir. Sıfır-durum tepkisi, sistemin etki tepkisini (yanıtını) bulmak için kullanılır. Eş. 2.3,  $\delta$  (Dirac) fonksiyonu kullanılarak  $x_0=0$  değeri için

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_0}^t [C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) + D(t)\delta(t - \tau)]u(\tau)d\tau \\ &= \int_{t_0}^t H(t, \tau)u(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Bu, Eş. 2.1a ve Eş. 2.1b sisteminin etki tepki matrisini ifade etmektedir.

Burada  $H(t, \tau)$ ,

$$H(t, \tau) = \begin{cases} C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) + D(t)\delta(t - \tau), & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau. \end{cases} \quad (2.7)$$

dır. Eş. 2.1a, Eş. 2.1b' de,  $A(t) \equiv A$ ,  $B(t) \equiv B$ ,  $C(t) \equiv C$  ve  $D(t) \equiv D$  alınırsa sabit zamanlı sistem elde edilir. Yani,

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.8a)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.8b)$$

Bu durumda, Eş. 2.8a' nın çözümü:

$$\phi(t, t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds \quad (2.9)$$

şeklinde ifade edilir ve Eş. 2.8a ve Eş. 2.8b sisteminin toplam tepkisi:

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds + Du(t) \quad (2.10)$$

olarak verilir. Eş. 2.8a ve Eş. 2.8b sisteminin sıfır durum tepkisi

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_0}^t [Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t - \tau)]u(\tau)d\tau \\ &= \int_{t_0}^t H(t, \tau)u(\tau)d\tau = \int_{t_0}^t H(t - \tau)u(\tau)d\tau \end{aligned}$$

olur. Eş. 2.8a, Eş. 2.8b sisteminin H etki yanıt matrisi

$$H(t-\tau) = \begin{cases} Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau) & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau. \end{cases} \quad (2.11)$$

olarak ya da sıkça karşılaşıldığı biçimiyle,

$$H(t) = \begin{cases} Ce^{At}B + D\delta(t) & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilir. Bu noktada bazı özel durumları göz önüne almak faydalı olacaktır.

*Durum 2.1: (Zamanda sürekli ve zaman değişkenli sistemler)*

Eş 2.1a ve Eş. 2.1b sisteminde

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 & e^{2t} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}, C(t) = [e^t \ 1], D = 0$$

olmak üzere  $t_0=0$ ,  $x(0) = [0, 1]^T$ ,  $u$  birim basamak fonksiyonu ve  $t \geq 0$  olsun.

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 1/2(e^t) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) &= \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 1/2(e^t) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t_0} & 1/2(e^{t_0}) \\ 0 & e^{-t_0} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 1/2(e^{t+t_0} - e^{-t+3t_0}) \\ 0 & e^{-(t-t_0)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 1/2(e^t - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\phi_h(t, t_0, x_0) = \Phi(t, 0)x(0) = \begin{bmatrix} 1/2(e^t - e^{-t}) \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\phi_p(t, t_0, x_0) = \int_0^t \Phi(t, \eta)B(\eta)u(\eta)d\eta = \begin{bmatrix} te^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \phi(t, t_0, x_0) &= \phi_h(t, t_0, x_0) + \phi_p(t, t_0, x_0) = \begin{bmatrix} 1/2(e^t - e^{-t}) \\ e^{-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} te^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t}(t-1/2) + 1/2e^t \\ e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ifadesi  $t_0=0$  ve  $t \geq 0$  için elde edilir. Toplam sistemin tepkisi  $y(t)=C(t)x(t)$ , sıfır giriş tepkisi ve sıfır durum tepkisinin toplamından elde edilir.

$$\begin{aligned} y(t, t_0, x_0, u) &= \psi(t, t_0, x_0, 0) + \rho(t, t_0, 0, u) \\ &= [1/2(e^{2t} - 1) + e^{-t}] + t, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

Sıfır giriş tepkisi olan  $\psi$ ,  $\phi$  çözümünün homojen kısmına ( $\phi_h$  tarafından sağlanır) göre değişkenlik gösterirken, sıfır durum tepkisi  $\rho$  ( $\phi_p$  tarafından sağlanan) özel çözüme bağlı olarak değişir.

*Durum 2.2 :* (Zamanda sürekli ve sabit zamanlı sistemler)

Eş. 2.8a ve Eş. 2.8b sisteminde  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = [0 \ 1]$ ,  $D = 0$

ve  $t_0=0$ ,  $x(0)=[1, -1]^T$ ,  $u$  birim basamak fonksiyonu ve  $t \geq 0$  olsun.

Bu durumda Eş. 2.8a' nın çözümü  $t_0=0$  ve  $t \geq 0$  için aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\begin{aligned} \phi(t, t_0, x_0) &= \phi_h(t, t_0, x_0) + \phi_p(t, t_0, x_0) \\ &= \begin{bmatrix} 1-t \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Toplam sistem tepkisi olan  $y(t)=C(t)x(t)$ , sıfır giriş tepkisi ve sıfır durum tepkisinin toplamından

$$y(t, t_0, x_0, u) = \psi(t, t_0, x_0, 0) + \rho(t, t_0, 0, u) = -1+t; \quad t \geq 0$$

şeklinde elde edilir.

$x(0)=0$ ,  $u(t)$  birim basamak fonksiyonu olarak alındığında, Durum 2.1 (değişken zamanlı sistem) ve Durum 2.2 (sabit zamanlı sistem)' de  $y(t)=t$ ,  $t \geq 0$  durumunda sistem tepkilerinin birbirine eşit olduğu görülmektedir. Ayrıca  $u(t)=t$  olarak alındığında da her iki durum için de  $y(t)=t^2$  olduğu görülmüştür.

*Durum 2.3:* Eş. 2.1 durumundaki değişken zamanlı sistem göz önüne alınırsa,  $\Phi(t, \tau)B(\tau) = [e^{-t}, 0]^T$  elde edilir. Bu durumda

$$H(t, \tau) = \begin{cases} C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau) = 1, & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau. \end{cases}$$



olur ki bu etki tepkisi sık karşılaşılan bir durum değildir. Diğer bir ifade ile, sıfır başlangıç koşullarında, bu sistemin bir giriş verisine olan tepkisi birim basamak fonksiyonudur ve bu tepki etkinin uygulandığı  $\tau$  zamanından bağımsızdır. Bununla birlikte sistemin tepkisi  $t'$  dir (Bkz. Durum 2.1). Böylece bu sistem sıfır başlangıç konumunda, dışarıya karşı sabit zamanlı bir sistem görünümünü alır. Ancak bu, değişken zamanlı sistemlerle normaldir.

*Durum 2.4:* Durum 2.2' deki zaman-değişkensiz sistem göz önüne alınırsa,

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu durumda  $t \geq \tau$  için  $H(t, \tau) = Ce^{A(t-\tau)} B = 1$  ve  $t < \tau$  için  $H(t, \tau) = 0$  olur. Böylece sıfır başlangıç durumu için, sistemin etki verisine olan tepkisi birim basamak fonksiyonu olur. Bunu Durum 2.3' de verilen sistemin tepki yanıtıyla karşılaştırdığımızda bunların birbirine eşit olduğu görülür. Bir başka deyişle birisi değişken zamanlı diğeri sabit zamanlı olan her iki sistemin de, başlangıç durumları sıfır olduğunda, etki tepkileri birbirinin aynısıdır. Aslında bu durumda her iki sistem de  $H(t, \tau) = H(t-\tau, 0) = H(t, 0) = 1$  olan sabit zamanlı sistem davranışı sergiler. Başlangıç durumunun sıfır olmadığı zamanlar da bu iki sistemin yanıtları birbirinden farklıdır. Bu iki durum sonlu-boyutlu lineer sistemlerin dış tanımlarının iç tanımları kadar bütünlük sergilemediğini göstermektedir. Aslında etki yanıtlarının faydası, sistemin duraklama anı göz önüne alındığında, sistemin giriş-çıkış ilişkisini mükemmel bir biçimde ifade etmesidir. Diğer dinamik davranışları tanımlamak için genelde daha fazla bilgiye gereksinim vardır. [Örneğin sistemin iç yapısı olduğu kadar başlangıç durum vektörü de (ya da sistemin duraklama dönemindeki son zaman anından bu yana sistem girdisinin sahip olduğu süreç) önem taşır.]

Durum-uzay ifadeleri gibi iç tanımlar, dış tanımlara oranla daha net tanımlar ortaya koyar. Yine de dış tanımlar iç tanımlara kıyasla daha uygulanabilirlerdir. Her iki ifade de faydalı kullanımlar sağlar. Bir sistemin dış tanımları, iç tanımlarından elde edilir. Bu ifadenin tersi doğru değildir.

## 2.2. Transfer Fonksiyonları

Eş. 2.8a ve Eş. 2.8b ifadelerinin sıfır durum tepkisinin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınır

$$\hat{y}(s) = \hat{H}(s) \hat{u}(s) \quad (2.13)$$

biçimde bir giriş çıkış ilişkisi elde edilir.  $\hat{H}(s)$ , Eş. 2.8a ve Eş. 2.8b sisteminin transfer fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu matris fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir:

Eş. 2.8a ve Eş. 2.8b' nin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınır. Buna göre:

$$s \hat{x}(s) - x(0) = A \hat{x}(s) + B \hat{u}(s) \quad (2.14)$$

$$\hat{y}(s) = C \hat{x}(s) + D \hat{u}(s) \quad (2.15)$$

elde edilir. Buradan  $\hat{x}(s)$  ifadesini çözmek için Eş. 2.14 kullanıldığında

$$\hat{x}(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} B \hat{u}(s) \quad (2.16)$$

bulunur. Eş. 2.16' ı Eş. 2.15' de yerine konulursa:

$$\hat{y}(s) = C(sI - A)^{-1} x(0) + C(sI - A)^{-1} B \hat{u}(s) + D \hat{u}(s) \quad (2.17)$$

elde edilir. Her iki tarafın ters Laplace dönüşümü alınarak

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \hat{y}(s) = C e^{At} x(0) + C \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds + D u(t) \quad (2.18)$$

ifadesi elde edilir. Eş. 2.17' de  $x(0) = 0$  olarak alınır sıfır durum tepkisi için

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= [C(sI - A)^{-1} B + D] \hat{u}(s) \\ &= \hat{H}(s) \hat{u}(s) \end{aligned} \quad (2.19)$$

bulunur. Burada  $\hat{H}(s)$ ,

$$\hat{H}(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (2.20)$$

dir. Ayrıca,  $\mathcal{L}[e^{At}] = \Phi(s) = (sI - A)^{-1}$  dir.

*Durum 2.5:* Durum 2.2 de  $t_0 = 0$  ve  $x(0) = 0$  olsun. Böylece:

$$\hat{H}(s) = C (sI - A)^{-1} B + D$$

$$= [0, 1] \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [0, 1] \begin{bmatrix} 1/s & 1/s^2 \\ 0 & 1/s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1/s$$

ve  $t \geq 0$  için  $H(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{H}(s)\} = 1$  olur.

Daha sonra, Durum 2.2 de olduğu gibi,  $x(0) = [1, -1]^T$  ve  $u$  birim basamak olsun. Bu durumda  $t \geq 0$  için

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= C(sI-A)^{-1}x(0) + \hat{H}(s) \hat{u}(s) = [0, 1/s] (1, -1)^T + (1/s)(1/s) = -1/s + 1/s^2 \\ y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\hat{y}(s)] = -1 + t \text{ olur.} \end{aligned}$$

Durum 2.5' deki  $A$  matrisinin öz değerleri  $\det(sI-A) = s^2 = 0$  denkleminin köküdür.  $s_1 = 0, s_2 = 0$  dir. Aynı zamanda buradaki  $\hat{H}(s)$  transfer fonksiyonu tek bir kutba sahiptir (sıfır payda polinomu) ve orijinde yer alır. SISO (tek girişli tek çıkışlı) sisteminde  $\hat{H}(s)$  transfer fonksiyonu kutupları genellikle  $A$ 'nın öz değerlerinin alt kümesidir.  $A$ 'nın öz değerleri, ancak ve ancak Eş. 2.8a ve Eş. 2.8b sistemi gözlenebilir olduğunda tam olarak  $\hat{H}(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$  transfer fonksiyonun kutupları haline gelebilir.

*Durum 2.6:* Eş. 2.8a ve Eş. 2.8b' de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [-3, 3], D = 0$$

olsun.  $A$ 'nın öz değerleri,  $\det(sI-A) = s^2 + 2s + 1 = (s+1)^2 = 0$  denkleminin köküdür.  $s_1 = -1, s_2 = -1$  dir. Bu SISO sisteminin transfer fonksiyonu;

$$\begin{aligned} \hat{H}(s) &= C(sI-A)^{-1}B + D \\ &= [-3, 3] \cdot \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 3[-1, 1] \frac{1}{(s+1)^2} \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{3(s-1)}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

olarak ifade edilir ve aynı  $s_1 = -1, s_2 = -1$  değerleri bu transfer fonksiyonunun kutuplarını belirtir. (sıfır payda polinomu). Durum 2.6 da  $B = [0, 1]^T$  ve  $D = 0$  ifadelerini

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ ve } D = [0, 0]$$

ifadeleriyle değiştirilirse çok girişli (multi-input) bir sistem elde edilir. Yeni sistemin transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$\hat{H}(s) = \left[ \frac{3(s-1)}{(s+1)^2}, \frac{3}{(s+1)} \right]$$

MIMO (çok girişli çok çıkışlı) sistemlerin belirlenmesi SISO sistemlerinde olduğu kadar doğruluk taşımamaktadır. Burada  $\hat{H}(s)$ ' nin kutupları  $s_1 = -1$  ve  $s_2 = -1$  dir. Bunlar  $A'$  nin öz değerleriyle aynıdır.

Eş. 2.8a ve Eş. 2.8b ile tanımlanan sisteminin transfer fonksiyonu olan  $\hat{H}(s)$  (2.20 denklemi) ile ilgili bir tespit yapılabilir.  $(sI-A)^{-1}$  ifadesinin pay matris polinomunun derecesi  $(n-1)$  dir. Payda polinomu, yani  $A'$  nin karakteristik polinomu olan  $\alpha(s)$ ' nin derecesi ise  $n$  dir. Bu durumda;

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = D$$

ifadesi gerçeğ değerli bir  $m \times n$  tipinde matristir ve özellikle Eş. 2.8b “doğrudan bağlantı matrisi” sıfır olduğunda çıkış değerleri sıfır olan  $m \times n$  tipindeki matris

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0$$

olarak ortaya çıkar.

### 3. AYRIK (KESİKLİ) ZAMANLI SİSTEMLERİN DURUM DENKLEMLERİ VE GİRİŞ-ÇIKIŞ TANIMLARI

Ayrık-zamanlı lineer denklemlerin giriş-çıkış tanımlamalarına değinilen bu bölüm üç alt bölümden oluşur. İlk alt bölümde lineer zaman değişkenli sistemlerin fark eşitliklerince tanımlanan sabit zamanlı lineer sistemlerin tepkisi incelenmiştir. İkinci alt bölümde sabit zamanlı lineer sistemlerin transfer fonksiyonları, üçüncü alt bölümde ise ayrık-zamanlı sistemlerin en önemli sınıflarından biri olan örneklenmiş-veri sistemleri incelenmiştir.

#### 3.1. Ayrık Zamanlı Lineer Sistemlerin Tepkisi

$$x(k+1)=A(k)x(k)+B(k)u(k) \quad (3.1a)$$

$$y(k)=C(k)x(k)+D(k)u(k) \quad (3.1b)$$

şeklinde verilen sistemlerde  $A:Z \rightarrow R^{n \times n}$ ,  $B:Z \rightarrow R^{n \times m}$ ,  $C:Z \rightarrow R^{p \times n}$  ve  $D:Z \rightarrow R^{p \times m}$  dir. Değişken zamanlı lineer denklemlerle tanımlanan sistemlerde;

$A(k) \equiv A$ ,  $B(k) \equiv B$ ,  $C(k) \equiv C$ ,  $D(k) \equiv D$  alınır

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k) \quad (3.2a)$$

$$y(k)=Cx(k)+Du(k) \quad (3.2b)$$

sabit zamanlı lineer denklemlerle tanımlanan sistemler elde edilir. Eş. 3.1a, Eş. 3.1b ve Eş. 3.2a, Eş. 3.2b' de  $x$ ; durum vektörü,  $u$ ; sistem girişi ve  $y$ ; sistemin çıkışıdır.  $k_0 \in Z$ ,  $x(k_0)=x_{k_0} \in R^n$  başlangıç koşulları ve bir  $u$  girdisi için Eş. 3.1a ve Eş. 3.2a'nın  $k \geq k_0$  için  $x(k)$  çözümleri vardır. Böylece Eş. 3.1b ve Eş. 3.2b için  $y(k)$  yanıtı da tüm  $k \geq k_0$  için tanımlıdır.

Eş. 3.1a denklemin lineer homojen sistemi

$$x(k+1)=A(k)x(k) \quad (3.3)$$

dir. Bu sistemin çözümü ise şöyle bulunur:

$$x(k+2)=A(k+1)x(k+1)=A(k+1)A(k)x(k)$$

.....

$$x(n)=A(n-1)A(n-2)....A(k+1)A(k)x(k)$$

$$x(n) = \prod_{j=k}^{n-1} A(j)x(k)$$

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
BİLİMİNİTASYON MERKEZİ**

$$x(n) = \prod_{j=k}^{n-1} A(j)x(k)$$

dir.  $\Phi(n, k)$   $n > k$  için

$$\Phi(n, k) = \prod_{j=k}^{n-1} A(j)$$

şeklinde tanımlanır.

Başlangıç değer problemi

$$x(k+1) = A(k)x(k) \quad x(k_0) = x_{k_0} \quad (3.4)$$

ile tanımlanır. Eş. 3.4.'ün çözümü  $k > k_0$  için:

$$x(k) = \Phi(k, k_0) x_{k_0} = \prod_{j=k_0}^{k-1} A(j) x_{k_0} \quad (3.5)$$

dir. Burada  $\Phi(k, k_0)$  durum geçiş matrisidir.

$$\Phi(k, k) = I \quad (3.6)$$

dir.  $\Phi(k, l)$  durum geçiş matrisinin özelliklerinden biri olan  $\Phi(k, l) = \Phi(k, m)\Phi(m, l)$   $k \geq m \geq l$  yan grup özelliği Eş. 3.5 ve Eş. 3.6'dan görülebilir. Durum geçiş matrisi  $\Phi(t, \tau)$ 'nin sürekli zaman sistemlerine ait  $\dot{x} = A(t)x$ 'in tüm özellikleri ayrık-zamanlı sistemler için geçerli değildir. Özellikle sürekli zaman durumu için  $\phi$  hali  $t > \tau$  ise  $\tau$  zamanındaki geçmiş değerlerinden elde edilebilir.

$\phi(t) = \Phi(t, \tau)\phi(\tau)$  ve  $\phi(\tau) = \Phi^{-1}(t, \tau)\phi(t) = \Phi(\tau, t)\phi(t)$  ilişkileri gereğince bunun terside söz konusudur. Örneğin sürekli zaman sistemleri için zamanın tersinirliği prensibi geçerlidir. Bu prensip tüm  $k \in Z$   $A^{-1}(k)$  olmadığı sürece Eş. 3.3 sistemi için genelde geçerli değildir. Bunun sebebi şudur: Eğer  $A(k)$  matrisi tüm  $k$  için tekil değilse  $\Phi(k, l)$  durum geçiş matrisi de tekil olamayacaktır.

Eş. 3.2a'nın

$$x(k+1) = Ax(k) \quad (3.7)$$

ile verilen lineer bağımsız homojen eşitlikleri vardır. Eş. 3.5 gereğince başlangıç değer probleminin

$$x(k+1)=A x(k), \quad x(k_0)=x_{k_0} \quad (3.8)$$

çözümü

$$x(k)=\Phi(k, k_0) x_{k_0} = A^{(k-k_0)} x_{k_0}, \quad k \geq k_0 \quad (3.9)$$

dir.

*Durum 3.1:* Eş. 3.3' de  $k_0=0$  ve  $A(k)=\begin{bmatrix} k & k^2+1 \\ 0 & (1/2)^k \end{bmatrix}$  olsun.

$$\Phi(k, 0)=A(k-1).....A(0)=\begin{bmatrix} (k-1) & (k-1)^2+1 \\ 0 & (1/2)^{k-1} \end{bmatrix}.....\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

$k=3$  ise,

$$\begin{aligned} x(3)=A(2).A(1).A(0).x(0) &= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(0) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 17/2 \\ 0 & 1/8 \end{bmatrix} x(0). \end{aligned}$$

dir.  $x(0)$  için  $x(3)$ ' ü bulabiliriz.  $A(0)$  durumunda herhangi bir  $k > 0$  için

$$\Phi(k, k_0) = \begin{bmatrix} 0 & \chi \\ 0 & \chi \end{bmatrix} \text{ olur. Diğer bir deyişle } \Phi(k, k_0)' \text{ ın ilk kolonu her zaman tüm } k' \text{ lar}$$

için sıfır olacaktır. Böylece bütün başlangıç koşullarında  $\alpha \in \mathbb{R}$   $x(0)=\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$  için

$$\text{tüm } k > 0 \text{ durumunda } x(k)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

*Durum 3.2:* Eş. 3.8' de  $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  olsun. Eş. 3.9' a göre

$$x(k+1)=Ax(k)$$

$$x(0)=I$$

başlangıç değer probleminin çözümü sistemin durum geçiş matrisi olan

$$\Phi(k)=A^k=\begin{bmatrix} u(k) & v(k) \\ h(k) & g(k) \end{bmatrix}, \text{ yı verecektir. Buna göre;}$$

$$\begin{bmatrix} u(k+1) & v(k+1) \\ h(k+1) & g(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) & v(k) \\ h(k) & g(k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u(0) & v(0) \\ h(0) & g(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{bağıntılarından}$$

$$\begin{aligned} u(k+1) &= -u(k) + 2h(k), & v(k+1) &= -v(k) + 2g(k), \\ h(k+1) &= 0u(k) + h(k), & g(k+1) &= 0v(k) + g(k) \\ u(k+1) &= -u(k) + 2h(k) & u(k+1) &= -u(k) \\ h(k+1) &= h(k) & u(0) &= 1 \\ u(0) &= 1 & u(1) &= -1 \\ h(0) &= 0 \text{ ise} & u(2) &= 1 \\ h(1) &= 0 & u(3) &= -1 \\ h(k) &= 0 & u(k) &= (-1)^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(k+1) &= -v(k) + 2g(k) & v(k+1) &= -v(k) + 2 \\ g(k+1) &= g(k) & v(1) &= -v(0) + 2 \\ v(0) &= 0 & v(1) &= 2 \\ g(1) &= 1 & v(2) &= 0 \\ g(2) &= 1 & v(3) &= 2 \\ g(k) &= 1 & v(4) &= 0 \\ & & v(k) &= 1 - (-1)^k \end{aligned}$$

buradan

$$\Phi(k) = A^k = \begin{bmatrix} u(k) & v(k) \\ h(k) & g(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k & 1 - (-1)^k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(k, k_0) = A^{(k-k_0)} = \begin{bmatrix} (-1)^{k-k_0} & 1 - (-1)^{k-k_0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k \geq k_0 \text{ olur [6].}$$

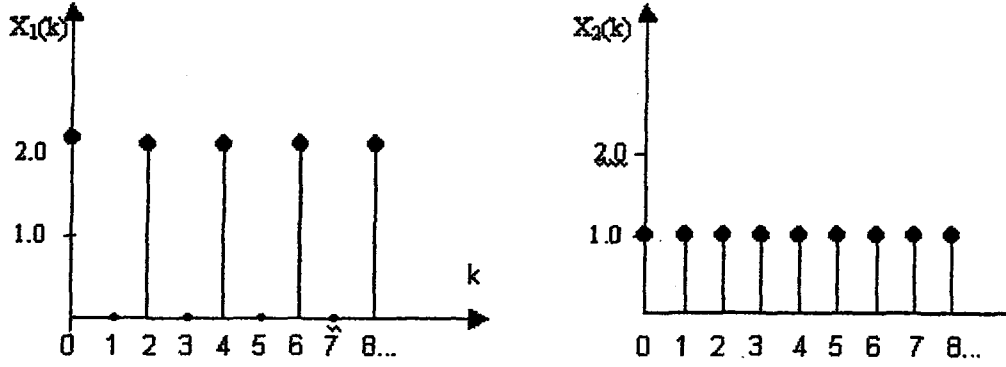
Örneğin; eğer  $(k-k_0)$  tek ise  $A^{(k-k_0)} = A$  olur.  $(k-k_0)$  çift ise  $A^{(k-k_0)} = I$  olur.

Bu nedenle  $k_0=0$  ve  $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  ise  $k=1, 3, 5, \dots$  için  $x(k) = Ax(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  ve

$x(k) = Ix(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $k=2, 4, 6, \dots$  dir.



$x(k)=[x_1(k), x_2(k)]^T$  durumlarının grafiği şekil 3.1' de verilmiştir.



Şekil 3.1. (3.2) durumunun hal grafikleri

Homojen olmayan lineer sistemlerin çözümü şu şekilde bulunur:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + g(k) \quad x(k_0) = x_{k_0}$$

$$x(k_0+1) = A(k_0)x(k_0) + g(k_0)$$

$$x(k_0+2) = A(k_0+1)x(k_0+1) + g(k_0+1)$$

$$= A(k_0+1)A(k_0)x(k_0) + A(k_0+1)g(k_0) + g(k_0+1)$$

$$x(k_0+3) = A(k_0+2)x(k_0+2) + g(k_0+2)$$

$$= A(k_0+2)A(k_0+1)A(k_0)x(k_0) + A(k_0+2)A(k_0+1)g(k_0) + A(k_0+2)g(k_0+1) + g(k_0+2)$$

$$= \Phi(k_0+3, k_0) x_{k_0} + \Phi(k_0+3, k_0+1)g(k_0) + \Phi(k_0+3, k_0+2)g(k_0+1) + \Phi(k_0+3, k_0+3)g(k_0+2)$$

ifadelerinin  $k \geq k_0+1$  için homojen olmayan denklem sisteminin çözümü:

$$x(k) = \Phi(k, k_0) x_{k_0} + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k, j+1)g(j)$$

dir. Yukarıda homojen olmayan lineer sistemlerce belirlenen başlangıç-değer problemlerinin çözümleri verilmiştir. Bunları kullanarak  $x(k_0)$  ve  $u(k)$  için Eş. 3.1a' nın çözümü ;

$$x(k) = \Phi(k, k_0)x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} \Phi(k, j+1)B(j)u(j), \quad k > k_0 \quad (3.10)$$

olur. Bu çözüm Eş.3.1a ve Eş. 3.1b sisteminin yanıtını bulmak için kullanılabilir.

Böylece sistemin yanıtı;

$$y(k) = C(k)\Phi(k, k_0)x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} C(k)\Phi(k, j+1)B(j)u(j) + D(k)u(k), \quad k > k_0$$

$$y(k_0) = C(k_0)x(k_0) + D(k_0)u(k_0) \quad (3.11)$$

dır. Eş. 3.2a ve Eş. 3.2b' de tanımlanan sabit zamanlı durum için sistem yanıtı aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$y(k) = CA^{(k-k_0)}x(k_0) + \sum_{j=k_0}^{k-1} CA^{k-(j+1)}Bu(j) + Du(k), \quad k > k_0$$

$$y(k_0) = Cx(k_0) + Du(k_0) \quad (3.12)$$

Eş. 3.2a ve Eş. 3.2b sistemi sabit zamanlı olduğu için Eş. 3.12' den  $k_0=0$  için şu ifade elde edilir.

$$y(k) = CA^kx(0) + \sum_{j=0}^{k-1} CA^{k-(j+1)}Bu(j) + Du(k), \quad k > 0 \quad (3.13)$$

Sürekli zaman durumunda olduğu gibi, toplam sistem yanıtı Eş. 3.11 iki bileşenden oluşur. Bunlar:

$$\Psi(k) = C(k)\Phi(k, k_0)x(k_0), \quad k > k_0$$

sıfır-giriş tepkisi. Diğerisi ise,

$$\rho(k) = \sum_{j=k_0}^{k-1} C(k)\Phi(k, j+1)B(j)u(j) + D(k)u(k), \quad k > k_0$$

$$\rho(k_0) = D(k_0)u(k_0) \quad k = k_0 \quad (3.14)$$

sıfır-durum tepkisi.

Eş. 3.1a ve Eş. 3.1b sisteminin ayrık zamanlı birim etki yanıt matrisi

$$H(k, \ell) = \begin{cases} C(k)\Phi(k, \ell+1)B(\ell), & k > \ell, \\ D(k), & k = \ell \\ 0, & k < \ell \end{cases} \quad (3.15)$$

dir. Eş. 3.2a ve Eş. 3.2b sisteminin birim etki yanıt matrisi

$$H(k, \ell) = \begin{cases} CA^{k-(\ell+1)}B, & k > \ell, \\ D, & k = \ell \\ 0, & k < \ell \end{cases} \quad (3.16)$$

şekindedir. Özellikle  $\ell=0$  iken

$$H(k, 0) = \begin{cases} CA^{k-1}B, & k > 0, \\ D, & k = 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

şeklinde olur.

### 3.2. Transfer Fonksiyonu ve z – Dönüşümü

z bir karmaşık sayı olmak üzere

$$\mathcal{L}\{f(k)\} = \hat{f}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} f(j) \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlı dönüşüme  $\{f(k)\}$ ' nin z-dönüşümü denir. Bu dönüşümün önemli bir özelliği fark denklemlerini çözmede oldukça kullanışlı olan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(k+1)\} &= \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} f(j+1) = \sum_{j=1}^{\infty} z^{-(j-1)} f(j) \\ &= z \left[ \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} f(j) - f(0) \right] \\ &= z[\mathcal{L}\{f(k)\} - f(0)] = z\hat{f}(z) - zf(0) \end{aligned} \quad (3.19)$$

özelliğidir. Eş. 3.19 kullanılarak Eş. 3.2a' nin her iki tarafının da z - dönüşümü alındığında

$$z\hat{x}(z) - zx(0) = A\hat{x}(z) + B\hat{u}(z)$$

bulunur. Burada

$$\hat{x}(z) = (zI - A)^{-1}zx(0) + (zI - A)^{-1}B\hat{u}(z) \quad (3.20)$$

dir. Eş. 3.2b' nin her iki tarafının da z-dönüşümü alındığında ve sonuçta ortaya çıkan ifade de  $\hat{x}(z)$  yerine Eş. 3.20 yazıldığında

$$\hat{y}(z) = C(zI - A)^{-1}z x(0) + [C(zI - A)^{-1}B + D]\hat{u}(z) \quad (3.21)$$

elde edilir.  $\{y(k)\}$ ' nin tek taraflı z-dönüşümü  $\hat{y}(z)$  dir.  $\{y(k)\}$   $[\hat{y}(z)]$ ' nin ters z-dönüşümü alınarak elde edilir. Eş. 3.2a ve Eş. 3.2b sisteminin transfer fonksiyon matrisi olan  $\hat{H}(z)$ , Eş. 3.21' de  $x(0)=0$  alınarak elde edilir.  $\hat{H}(z)$  y çıktısını u girişine bağlar. Bu durumda

$$\hat{y}(z) = \hat{H}(z)\hat{u}(z) \quad (3.22)$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$\hat{H}(z) = C(zI - A)^{-1}B + D \quad (3.23)$$

dir.  $\hat{H}(z)$ 'yi  $H(k, l)$  etki yanıt matrisine bağlamak için  $\mathcal{F}\{\delta(k-l)\} = z^{-l}$  olduğu dikkate alınmalıdır.  $\delta$  burada ayrık-zaman etkisini (birim etki veya birim örnek) göstermektedir. Yani ;

$$\delta(k-l) = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases} \quad (3.24)$$

dir. Sıfır zamanda uygulanan birim etkinin z-dönüşümü  $\mathcal{F}\{\delta(k)\} = 1$ ' dir.

$\{H(k, 0)\} = \mathcal{F}^{-1}[\hat{y}(z)]$  dir. Burada  $\hat{u}(z) = 1$  ve  $\hat{y}(z) = \hat{H}(z)\hat{u}(z)$  dir. :

$$\mathcal{F}^{-1}[H(z)] = \mathcal{F}^{-1}[C(zI - A)^{-1}B + D] = \{H(k, 0)\} \quad (3.25)$$

ifadesinde  $H(k, 0)$  birim etki yanıtı Eş. 3.17' deki  $H(k, 0)$  birim etki yanıtı ile aynıdır.

Özellikle ,

$k=1, 2, \dots$  için  $\{A^{k-1}\}$ 'nin z-dönüşümü  $(zI - A)^{-1}$  dir.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{0, A^{k-1}\} &= \sum_{j=1}^{\infty} z^{-j} A^{j-1} = z^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} z^{-j} A^j \\ &= z^{-1} (I + z^{-1}A + z^{-2}A^2 + \dots) \\ &= z^{-1} (I - z^{-1}A)^{-1} = (zI - A)^{-1} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Yukarıda  $\{A^{k-1}\}$ 'in z-dönüşümü  $(1-\lambda)^{-1} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots$  ifadesi kullanılarak bulunmuştur.

$k=0, 1, 2, \dots$  için  $\mathcal{F}\{A^k\}$ 'nin çözümü  $z(zI - A)^{-1}$  dir. Bu, Eş. 3.21' deki ters z-dönüşümünün Eş. 3.13' e eşit olduğunu gösterir.

*Durum 3.3:* Eş. 3.2a ve Eş. 3.2b' de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1, 0], D = 0, p(k) = \begin{cases} 1, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0 \end{cases} \quad \text{olsun.}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[z(zI - A)^{-1}] = A^k$$

$$z(zI - A)^{-1} = z \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0 & z+1 \end{bmatrix}^{-1} = z \begin{bmatrix} 1/z & 1/z(z+1) \\ 0 & 1/z+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/z+1 \\ 0 & z/z+1 \end{bmatrix}$$

$$\text{denklemini ve } \mathcal{F}^{-1}[z(zI - A)^{-1}] = \begin{bmatrix} \delta(k) & (-1)^{k-1} p(k-1) \\ 0 & (-1)^k p(k) \end{bmatrix} \text{ yada}$$

$$A^k = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, & k = 0 \text{ olduğunda} \\ \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{k-1} \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix}, & k = 1, 2, \dots, \text{ olduğunda} \end{cases}$$

Şuna da dikkat edilmesi gerekir:

$$\begin{aligned} k=0 \text{ olduğunda } \mathcal{F}^{-1}[(zI-A)^{-1}] &= \mathcal{F}^{-1} \left[ \begin{bmatrix} 1/z & 1/z(z+1) \\ 0 & 1/z+1 \end{bmatrix} \right] \\ &= \begin{bmatrix} \delta(k-1)p(k-1) & \delta(k-1)p(k-1) - (-1)^{k-1}p(k-1) \\ 0 & (-1)^{k-1}p(k-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$k=1 \text{ iken } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } k=2, 3, \dots, \text{ iken } \mathcal{F}^{-1}[(zI-A)^{-1}] = \begin{bmatrix} 0 & -(-1)^{k-1} \\ 0 & (-1)^{k-1} \end{bmatrix} \text{ olur, buda birim}$$

tarafından yapılan ertelemelerde  $A^k$ ,  $k \geq 0$ ' ya denk gelir, yani  $k=1, 2, \dots$  için  $A^{k-1}$  ifadesine eşit olur. Sonra sistem yanıtını  $x(0)=0$  ve  $u(k)=p(k)$  olarak düşünüldüğünde  $y(k) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{y}(z)] = \mathcal{F}^{-1}[C(zI-A)^{-1}B\hat{u}(z)]$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{(z+1)(z-1)} \right] = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right] \\ &= 1/2[(1)^{k-1} - (-1)^{k-1}]p(k-1) \\ &= \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \frac{1}{2}(1 - (-1)^{k-1}), & k = 1, 2, \dots, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & k = 0, \\ 0, & k = 1, 3, 5, \dots, \\ 1 & k = 2, 4, 6, \dots, \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir. Şu da unutulmamalıdır ki  $x(0)=0$  ve  $u(k)=\delta(k)$  olduğunda

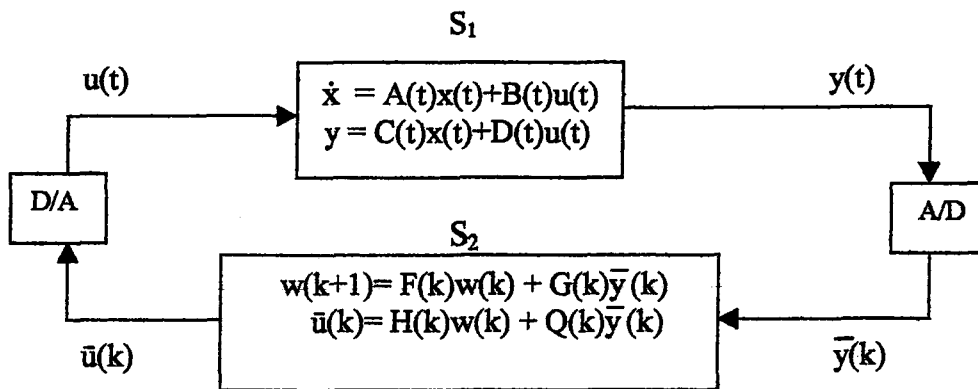
$$\begin{aligned} y(k) &= \mathcal{F}^{-1}[C(zI-A)^{-1}B] = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{z(z+1)} \right] \\ &= \delta(k-1)p(k-1) - (-1)^{k-1}p(k-1) - (-1)^{k-2} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \\ (-1)^{k-2} & k = 2, 3, \dots, \end{cases}$$

olur. Bu da sistemin birim etki yanıtıdır.

### 3.3. Örneklenmiş-Veri Sistemleri

Ayrık-zamanlı dinamik sistemler, modelleme süreci içinde çok farklı yollarda ortaya çıkar. Zaman içinde sadece ayrık noktalarda tanımlanan sistemler ve zaman içinde ayrık noktalardaki sürekli-zaman sistemlerinin ifadeleri bulunmaktadır. Daha önceki örneklerde, sistem davranışının ayrık-zamanlı anlarındaki değişkenlerin değerleriyle (zamanın ayrık anları arasında ne olduğu varolan problemle ilgili değildir.) tanımlandığı dijital bilgisayarlar ve araçlar (örn. Dijital filtreler); her günün (ya da ayın) sonunda sadece demirbaş eşyanın sayımının söz konusu olduğu demirbaş sistemler; birikimlerin ayrık zaman aralıklarında hesaplanıp tasarruf hesaplarına eklendiği bankacılık işlemleri gibi ekonomik sistemler, vb örnekler bulunmaktadır. Sonraki örnekler, dijital bilgisayarların kullanıldığı ve soru işaretleri taşıyan diferansiyel denklemleri tahmin edebilmek için fark denklemlerinden yararlandığı sürekli-zaman işlem simülasyonları, dijital kontrolörleri devreye sokan ve örneklenmiş-veri sistemlerini arttıran geri besleme kontrol sistemleri, vb. içermektedir. Örneğin Şekil 3.2' de verilen lineer geri besleme kontrol sisteminin özel sınıfından faydalanılabilir. Bu sistem kontrol edilen sistem  $S_1$  ve dijital kontrolör adı verilen  $S_2$  alt sistemleriyle birbirine bağlıdır.



Şekil 3.2. Dijital kontrol sistemi

Kontrol edilen sistem

$$\dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (3.27a)$$

$$y = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (3.27b)$$

denklemleriyle tanımlanır. Eş. 3.27a ve Eş. 3.27b' de kullanılan tüm semboller Eş. 2.1a ve Eş. 2.1b' deki gibi tanımlanır ve  $0 \leq t_0 \leq t$  olarak kabul edilir.

$S_2$  alt sistemi  $y(t)$  sürekli-zaman sinyalini giriş olarak alır. Çıkıştan ise  $u(t)$  kısmi sürekli-zaman sinyalini verir ( $t_0 \leq t$ ).  $y$  sürekli-zaman sinyali, analogdan dijitale konvertör (A/D) aracılığıyla  $k$ ,  $k_0 \in Z$  ve  $k \geq k_0 \geq 0$  için  $\{\bar{y}(k)\}$  ayrık-zaman sinyaline dönüştür ve,

$$w(k+1) = F(k)w(k) + G(k)\bar{y}(k) \quad (3.28a)$$

$$\bar{u}(k) = H(k)w(k) + Q(k)\bar{y}(k) \quad (3.28b)$$

fark denklemleri tarafından sağlanan kontrol logaritmasına göre işletilir ve  $w(k)$ ,  $\bar{y}(k)$ ,  $\bar{u}(k)$  gerçek vektörler olup  $F(k)$ ,  $G(k)$ ,  $H(k)$  ve  $Q(k)$  sabit boyutlu gerçek matrislerdir. Son olarak,  $k \geq k_0 \geq 0$  için  $\{\bar{u}(k)\}$  ayrık-zamanlı sinyali dijitalden analoga konvertör (D/A) aracılığıyla  $u$  sürekli-zaman sinyaline çevrilir. Burada  $t_0 = t_{k_0}$  olarak alınabilir.

İdeal bir A/D konvertörü sürekli-zaman sinyal verisine karşılık  $\{\bar{y}(k)\}$ ,  $k = k_0, k_0+1, \dots$ , gerçek sayı dizinini çıktı olarak veren ve

$$\bar{y}(k) = y(t_k) \quad (3.29)$$

ile ifade edilen bir araçtır. Diğer bir deyişle ideal bir A/D konvertörü verilen giriş sinyali için  $t_0, t_1, \dots$  zamanlarında  $y(t)$  olarak verilen çıktıyı  $\{y(t_0), y(t_1), \dots\}$  dizini olarak örnekler. D/A konvertörünün girişi  $\{\bar{u}(k)\}$ ,  $k = k_0, k_0+1, \dots$  dizini olarak verilen ayrık-zaman sinyalidir. Çıkışı ise  $u$  olarak verilen sürekli-zaman sinyalidir. Ve bu sinyal

$$u(t) = \bar{u}(k), \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = k_0, k_0+1, \dots \quad (3.30)$$

şeklinde ifade edilir. Bir başka deyişle, D/A konvertörü giriş yapılan dizinin son değerinde çıktıyı sabitleyen bir araçtır. Buna sıfır-dizin bekletme aracı da denebilir.

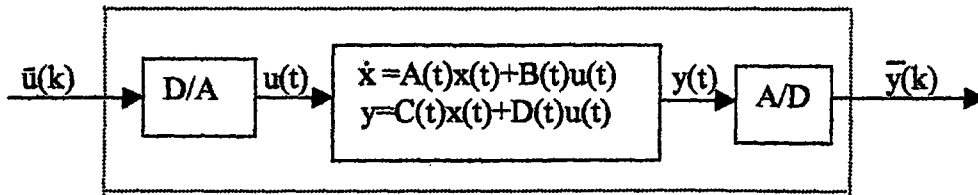
Şekil 3.2' teki sistem, örneklenmiş-veri sistemidir ve ideal bir A/D konvertöründen faydalanarak doğru olarak örneklendirilmiş veri içerir. (yani örneklendirilmiş sinyaller). Pratikte  $S_2$  dijital kontrolü dijital sinyalleri birer değişken olarak kullanır. Bu tip sinyaller numaraları ayrık nokta grubundan oluşan  $R$  alt kümesine ait gerçek-

değerli dizinler tarafından ifade edilir. (Vektör durumunda olduğu gibi, bir önceki ifade vektörün bileşenlerine uygulanır.) Özellikle şu anda  $y(t)$  sinyali örneklendikten sonra, dijital bir sinyal elde etmek için bunun dijitlemesi (ya da nicelemesi) lazımdır. Çünkü bu tip sinyaller ancak dijital bilgisayarlarla ifade edilmektedir. Bir bilgisayar örneğin 8 bitlik kelimeler kullanıyorsa bir değişkeni  $2^8=256$  farklı düzeyde ifade edebilir ki bu da sinyalin dijitlemesini sağlar. Örneğin 9 volttan 25 volta kadar değişen bir sinyalin fonksiyon ifadesini elde etmek için 0,1 voltu niceleme adımı olarak alabiliriz. Sonra 2,3 ve 2,4 volt iki farklı sayı ile ifade edilir (niceleme seviyeleri); bununla beraber 2,315, 2,308 ve 2,3 voltluk ifadelerin hepsi 2,3 voltun bit kombinasyonuna karşılık gelir. Niceleme bir yaklaşımdır ve küçük değerler ciddi hatalara yol açabilir.

Örneklenmiş-veri sistemlerine ek olarak Eş. 3.27' den Eş. 3.30' a kadar olan denklemler bir melez sistemde oluşturulur. Çünkü bu sistemler sıradan diferansiyel ve fark denklemler içerir. Bu tip sistemlerin analiz ve sentezi  $S_1$  alt sistemini sadece  $t_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  zamanındaki ayırık noktalarda geçerli olan basit fark denklemleriyle yer değiştirerek basitleştirilebilir. (Şekil 3.2' deki blokları göz önüne aldığımızda, bunların Şekil 3.3' teki  $\bar{u}(k)$  girişini ve  $\bar{y}(k)$  çıktısını saptamak üzere D/A ve A/D araçlarıyla beraber olan  $S_1$  sistemine karşılık geldiği görülür.) Bunu elde etmek için, Eş. 3.27a' nın çözümü;

$$x(t) = \Phi(t, t_k)x(t_k) + \int_{t_k}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (3.31)$$

kullanılır.



Şekil 3.3. Eş. 3.33 ve Eş. 3.36 formülleri ile tanımlanan sistem



Bu sistemde  $\phi(t, t_k, x(t_k)) = x(t)$  sembol sistemi kullanılmıştır.  $u(t)$  verisi sıfır-dizin bekletme aracının (D/A konvertörünün) çıktısı için Eş. 3.31'den elde edilen ifade

$$x(t_{k+1}) = \Phi(t_{k+1}, t_k)x(t_k) + \left[ \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)B(\tau)d\tau \right] u(t_k) \quad (3.32)$$

şeklindedir.  $\bar{x}(k) = x(t_k)$  ve  $\bar{u}(k) = u(t_k)$  olursa sistemin ayrık-zamanlı şekli

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}(k)\bar{x}(k) + \bar{B}(k)\bar{u}(k) \quad (3.33)$$

biçimindedir. Burada

$$\begin{aligned} \bar{A}(k) &= \Phi(t_{k+1}, t_k) \\ \bar{B}(k) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau)B(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (3.34)$$

dir. Sonra sistem çıktısının  $t'_k$  aralığında örneklendiği varsayalım. Bu aralıklar objenin girişinin ayarladığı aralıklar ile de uyuşmak zorunda değildir.  $t_k \leq t'_k < t_{k+1}$  alındığında Eş. 3.27 ve Eş. 3.31

$$y(t'_k) = C(t'_k)\Phi(t'_k, t_k)x(t_k) + \left[ C(t'_k) \int_{t_k}^{t'_k} \Phi(t'_k, \tau)B(\tau)d\tau \right] u(t_k) + D(t'_k)u(t_k) \quad (3.35)$$

Eş. 3.35' de  $\bar{y}(k) = y(t'_k)$  şeklinde tanımlanır. Böylece Eş. 3.35

$$\bar{y}(k) = \bar{C}(k)\bar{x}(k) + \bar{D}(k)\bar{u}(k) \quad (3.36)$$

şekline dönüşür. Burada

$$\begin{aligned} \bar{C}(k) &= C(t'_k)\Phi(t'_k, t_k) \\ \bar{D}(k) &= C(t'_k) \int_{t_k}^{t'_k} \Phi(t'_k, \tau)B(\tau)d\tau + D(t'_k) \end{aligned} \quad (3.37)$$

dir. Özetle Eş. 3.33 ve Eş. 3.36 durum-uzay ifadesini oluştururlar. Bu ifadeler zamandaki ayrık noktalarda geçerlidir ve bu ifadeler Eş. 3.27a tarafından sağlanan sisteme aittir ve Eş. 3.29 ve Eş. 3.30 tarafından sağlanan A/D ve D/A araçlarını içerir. (bkz. Şekil 3.3) Şekil 3.2' teki tüm sistemler zamanın ayrık noktalarında geçerlidir. Bu sistemler artık Eş. 3.33, Eş. 3.36, Eş. 3.28a, Eş. 3.28b denklemleriyle ifade edilebilir.

$A(t) \equiv A$ ,  $B(t) \equiv B$ ,  $C(t) \equiv C$  ve  $D(t) \equiv D$  olduğu sabit zaman sisteminde tüm  $k=0, 1, 2, \dots$  için  $t_{k+1} - t_k = T$  ve  $t'_k - t_k = \alpha$  olur. Böylece, Eş. 3.33, Eş. 3.34, Eş. 3.36 ve Eş. 3.37' deki ifadeler

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A} \bar{x}(k) + \bar{B} \bar{u}(k) \quad (3.38a)$$

$$\bar{y}(k) = \bar{C} \bar{x}(k) + \bar{D} \bar{u}(k) \quad (3.38b)$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$\begin{aligned} \bar{A} &= e^{AT} & \bar{B} &= \left( \int_0^T e^{A\tau} d\tau \right) B \\ \bar{C} &= C e^{A\alpha} & \bar{D} &= C \left( \int_0^\alpha e^{A\tau} d\tau \right) B + D. \end{aligned} \quad (3.39)$$

$t'_k = t_k$  yada  $\alpha = 0$  ise  $\bar{C} = C$  ve  $\bar{D} = D$  dir. Burada bahsedilen  $T$ ' ye örnekleme periyodu denir ve  $1/T$  örnekleme oranı adını alır.

*Durum 3.4:* Şekil 3.2' teki dijital kontrol sisteminde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1, 0], \quad D = 0$$

olsun.  $T$  'nin örnekleme periyodunu gösterdiğini ve  $\alpha = 0$  olduğunu varsayalım. Öncesinde sıfır-dizin bekletme ( $D/A$  konvertörü) ve sonrasında örnekleyci (ideal bir  $A/D$  konvertörü) bulunan ve her ikisinin de örnekleme oranı  $1/T$  olan bir obje durum-uzay ayrık-zamanlı ifadesi;

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A} \bar{x}(k) + \bar{B} \bar{u}(k)$$

$$\bar{y}(k) = \bar{C} \bar{x}(k) + \bar{D} \bar{u}(k)$$

dir. Burada

$$\bar{A} = e^{AT} = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{T^j}{j!} \right) A^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \left( \int_0^T e^{A\tau} d\tau \right) B = \left( \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d\tau \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & T^2/2 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix}$$

$\bar{C} = C = [1, 0]$  olur.

( $\bar{y}$  'yi  $\bar{u}$  'ya bağlayan) transfer fonksiyonu  $\hat{H}(z)$  ise;

$$\begin{aligned}
\hat{H}(z) &= \bar{C} (zI - \bar{A})^{-1} \bar{B} \\
&= [1, 0] \begin{bmatrix} z-1 & -T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \\
&= [1, 0] \begin{bmatrix} 1/(z-1) & T/(z-1)^2 \\ 0 & 1/z-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} \\
&= \frac{T^2(z+1)}{2(z-1)^2}
\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

Zamanda sürekli sistemin transfer fonksiyonu  $\hat{H}(s) = C(sI - A)^{-1}B = 1/s^2$  çift integraldir. Sistemin  $t_k \leq t < t_{k+1}$  ayırık anlarda davranışı Eş. 3.31' den faydalanarak ve  $x(t_k) = x(k)$  ve  $u(t_k) = u(k)$  alınarak sağlanabilir.  $\bar{A}$  ve  $\bar{B}$  aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$\bar{A} = e^{AT} = I + TA + (T^2/2!)A^2 + \dots = I + TA \Psi(T)$$

ifadesinde

$$\Psi(T) = I + (T/2!)A + (T^2/3!)A^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} (T^j / (j+1)!) A^j$$

dir. Böylece

$$\bar{B} = \left( \int_0^T e^{A\tau} d\tau \right) B = \left( \sum_{j=0}^{\infty} (T^{j+1} / (j+1)!) A^j \right) B = T \Psi(T) B$$

olur. Önce  $\Psi(T)$  bulunduğunda  $\bar{A}$  ve  $\bar{B}$  hesaplanabilir.

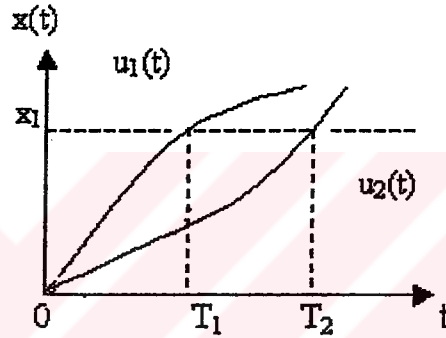
**Durum 3.5:** Durum 3.4' de  $\Psi(T) = I + TA = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  dir. Böylece

$$\bar{A} = I + TA \Psi(T) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \bar{B} = T \Psi(T) B = \begin{bmatrix} T^2 \\ T \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

#### 4. KONTROLEDİLEBİLİRLİK VE GÖZLENEBİLİRLİK

Kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik konusu iki alt bölümde incelenmiştir. İlk alt bölümde, zamanda sürekli sistemlerde birbirine eşdeğer olan kontroledilebilirlik ve erişilebilirlik konusu işlenecektir. Diğer alt bölümde yine zamanda sürekli sistemlerde birbirine eşdeğer olan gözlenebilirlik ve yapılandırılabilirlik konusu incelenmiştir.

##### 4.1. Kontroledilebilirlik ve Erişilebilirlik



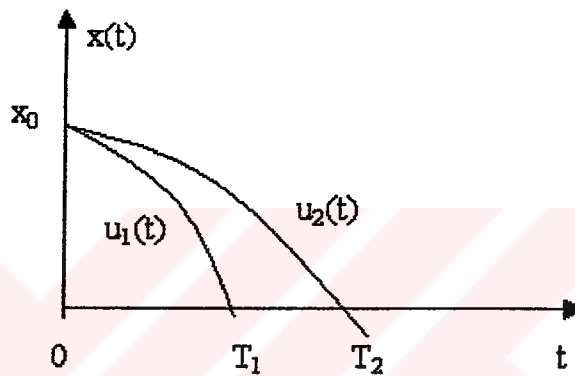
Şekil 4.1. Erişilebilir bir  $x_1$  durumu

Zamanla değişmeyen sistemlerde  $x(t)$ , sistemin sonlu bir  $T$  zamanında sıfırdan  $x_1$  durumuna dönüştüren bir girdi olması halinde  $x_1$  durumu “erişilebilir” olarak tanımlanır. Bu tanım ayrık zamanlı sistemler içinde geçerlidir. Şekil 4.1’ de  $u_1(t)$  ve  $u_2(t)$  kontrol girdileri sürekli bir sistemin orijinden sonlu farklı zamanlarda ve farklı yollar takip ederek  $x_1$  değerine ulaşması zor olabilir. Dikkat edilirse erişilebilirlik, sistemin sonlu zamanda orijinden  $x_1$ ’ e erişebilir olmasını ifade eder. Fakat bu erişilebilirlik durumu zamanı ve onun takip ettiği yolu kesin olarak belirtmez.

Şekil 4.2’ de  $x_0$  durumunu sonlu bir  $T$  zamanında sıfıra dönüştüren bir girdi varsa,  $x_0$  durumu “kontroledilebilir” olarak tanımlanır. Yine bu tanım ayrık zamanlı sistemler içinde geçerlidir. Kontroledilebilirlik de sistemi sonlu bir zamanda  $x_0$  durumundan 0 durumuna dönüştürmeyi ifade eder, o da bu dönüşüm için gereken zaman veya yolu kesin olarak belirtmez.

Kontroledilebilirlik ve erişilebilirlik hakkındaki bilgilerin ışığında şu sonuç elde edilir. Erişebilirlik her zaman kontroledilebilirliği ifade eder. Sürekli zamanlı sistemlerde kontroledilebilirlik durum geçiş matrisi ( $\Phi$ ) tekil olmadığı zaman erişebilirliği ifade eder. Ayrık zamanlı sistemlerde ise A matrisinin tekil olmadığı durumda kontroledilebilirlik erişilebilirliği ifade eder.

Eğer sistem durumu erişebilir ise; o zaman sonlu bir zamanda  $x_0$ ' ı herhangi bir  $x_1$ ' e dönüştüren bir girdi daima vardır.



Şekil 4.2. Kontrol edilebilir bir  $x_0$  durumu

Kontroledilebilirlik matrisi W;

$$W=[B, AB, \dots, A^{n-1}B] \in R^{n \times m} \quad (4.1)$$

şeklinde ifade edilir.  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times m}$  olmak üzere sürekli zamanlı sistemlerde durum denklemleri

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.2)$$

ve kesikli zamanlı sistemlerin durum denklemleri  $k \geq k_0=0$  için

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4.3)$$

olarak tanımlanır.

Sabit zamanlı durumda; bir sistem erişilebilirse orijinden kontroledilebilirdir denir. Kontrol edilebilirlik matrisi W' nin rankı (Bir matrisin rankı o matriste bulunan determinantı sıfırdan farklı en büyük kare matrisin boyutudur.) sistemin boyutuna eşit ise sistem kontroledilebilirdir denir (rank W=n). Diğer bir ifadeyle, (A, B) ikilisi erişilebilirdir denir. W matrisini “erişilebilirlik matrisi” veya “orijinden

kontroledilebilirlik matrisi” olarak adlandırmak daha doğru olacaktır. Ya da sadece “kontroledilebilirlik matrisi” de kullanılabilir. Böylece  $W$  “kontroledilebilirlik matrisi” yada “orijinden kontroledilebilirlik matrisi” olarak adlandırılır.

Erişebilirlik ve kontroledilebilirlik zamanda değişmeyen ayrık zamanlı sistemler için incelenebilir.

$x(0)$  başlangıç vektörü olmak üzere Eş. 4.3’ deki (her  $k > 0$  için)  $x(k)$ ;

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-(i+1)} B u(i) \quad (4.4)$$

dir. Eş. 4.5’ i sağlayan  $n$ -adımlı girdi dizisi  $\{u(0), u(1), \dots, u(n-1)\}$  varsa  $x(0)=x_0$ ’ a  $x(n)=x_1$ ’ e  $n$ -adımda dönüştürmek mümkündür.

$$x_1 - A^n x_0 = W_n U_n \quad (4.5)$$

burada

$$W_n = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = W$$

dir.

$$U_n = [u^T(n-1), u^T(n-2), \dots, u^T(0)]^T \quad (4.6)$$

lineer cebirsel denklemler teorisinden, Eş. 4.5 bir  $U_n$  çözümüne sahiptir.

Ancak ve ancak

$$x_1 - A^n x_0 \in \mathcal{R}(W) \quad (4.7)$$

dir. Burada  $\mathcal{R}(W)$ ,  $W$ ’ nin değer bölgesidir. Kontrol dizisinde  $n$ -adımdan sonrası da gerekir. Çünkü, dönüşüm (durum geçiş)  $n$ -adımda tanımlanamıyorsa, hiçbir durumda tanımlanamaz. Bu Cayley-Hamilton teoreminin bir sonucudur, ki bu teoreme göre  $k \geq n$  için;

$$\mathcal{R}(W_n) = \mathcal{R}(W_k)$$

dir. Aynı zamanda  $k < n$ ;

$$\mathcal{R}(W_n) = \mathcal{R}(W_k)$$

dir. Şimdi görülüyor ki Eş. 4.3 sistemi veya  $(A, B)$  çifti erişilebilir veya orijinden kontroledilebilirdir.  $x_0=0$  durumundan bir  $x_1$  durumuna sonlu bir zamanda ancak ve ancak  $\text{rank } W = n$  durumunda ulaşılır. Çünkü burada  $\mathcal{R}(W) = \mathbb{R}^n$  tam durum uzayıdır. Dikkat edilirse  $x_1 \in \mathcal{R}(W)$  belirli bir  $x_1$  durumu, sıfır durumundan erişilebilirdir.  $\mathcal{R}(W)$  bütün bu şekildeki durumları kapsadığı için sistemin “erişilebilir alt uzayı” olarak

tanımlanır. Bununla beraber Eş. 4.5' den açıkça görüldüğü gibi, eğer sistem erişilebilir ise herhangi bir  $x_0$  durumu başka herhangi bir  $x_1$  durumuna  $n$ -adımında dönüştürülebilir. Buna ilave olarak; dönüşümü sağlayan girdi; Eş. 4.5' in herhangi bir  $u_n$  çözümüdür. Son olarak  $x_1$  ve  $x_0$ ' a dayanarak; bu dönüşüm  $n$ -adımdan daha az olarak tanımlanabilir.

*Durum 4.1:*  $x(k+1)=Ax(k)+Bu(k)$  sistemini ele alalım.

Burada  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  dir. Yine burada (orijinden) kontroledilebilirlik

matrisi  $W = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank } W = 2$  dir. Bu yüzden sistem veya  $(A, B)$

ikilisi erişilebilir yada orijinden kontroledilebilirdir. Yani, sıfır durumundan herhangi  $x_1$  durumuna sonlu adımda, en çok  $n$ -girdi uygulamasıyla  $\{u(0), u(1), \dots, u(n-1)\}$  (şimdilik  $n=2$ ) dönüşecektir.

Bunu görmek için;

$x_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  alınırsa o zaman Eş. 4.5' den

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \text{ veya } \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-a \\ a \end{bmatrix} \text{ dir. Böylece kontrol } u(0)=a$$

ve kontrol  $u(1)=b-a$  durumu (sistem durumunu)  $k=0$ ' da orijinden,  $k=2$ ' de

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  durumuna dönüşecektir.

Bunun ispatı yapılabilir. Şöyle ki;

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} a = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (b-a) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ olduğu görülür.}$$

Sistemin erişilebilirliği aynı zamanda şunu ifade eder. Sistem herhangi bir  $x_0$  durumundan bir  $x_1$  durumuna en çok  $n=2$  adımda ulaşılabilir.

Bunu görmek için  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  olsun.

O zaman Eş. 4.5' ten

$$x_1 - A^2 x_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-2 \\ b-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

$k=0'$  da  $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  durumundan  $k = 2$  de  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  durumuna ulaşmak için

$$\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b-a-1 \\ a-2 \end{bmatrix} \text{ çözümlür.}$$

Herhangi bir  $x_0$  durumu sonlu sayıdaki adımda sıfır durumuna dönüştürülebiliyorsa A sistemi [veya  $[A, B]$  çifti] kontrol edilebilir veya orijine kontrol edilebilirdir. Eş. 4.5' ten görülür ki herhangi bir  $x_0$  için  $A^n x_0 \in \mathcal{R}(W)$  olduğu zaman sistem kontrol edilebilirdir. Bu durumda  $n \times n$  tipindeki matris

$$A^{-n}W = [A^{-n}B, \dots, A^{-1}B] \quad (4.8)$$

kullanılır. Sistem ancak ve ancak  $\text{rank}(A^{-n}W) = \text{rank}W = n$  olduğu zaman kontrol edilebilirdir. Bununla beraber eğer  $\text{rank}A < n$  ise, o zaman kontrol edilebilirlik erişilebilirliği ifade etmez.

*Durum 4.2:* Durum 4.1' deki sistem (orijine) kontrol edilebilirdir.

Bunu göstermek için  $x_1=0$  alarak Eş. 4.5 yazılırsa,

$$-A^2 x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [B, AB] \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \text{ dir. Burada } x_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ dir. Bu}$$

$$\begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ -a-b \end{bmatrix}$$

ifadesinden elde edilir. Girdi,  $k = 0$  da  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$  den  $k = 2$  de  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  'a taşıyacaktır.

## 4.2. Gözlenebilirlik ve Yapılandırılabilirlik

Gözlenebilirlik her zaman yapılandırılabilirliği ifade eder. Fakat yapılandırılabilirlik ancak durum geçiş matrisi  $\Phi$  tekil olmadığı zaman gözlenebilirliği ifade eder. Bu sürekli zamanlı sistemler için doğrudur fakat kesikli zamanlı sistemlerde sistemin A matrisi (veya k değerleri için  $A(k)$  belli ise) tekil olmadığı zaman doğrudur.



Zamanla değişmeyen sistemlerin gözlenebilir olması için gözlenebilirlik matrisi  $V$ 'nin rankı sistemin boyutuna eşit ( $\text{rank}V=n$ ) olması gerekir. Burada  $V$ ,

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n} \quad (4.9)$$

şeklinde tanımlanır.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ve  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  matrisleri

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (4.10)$$

denklemleriyle ifade edilen sürekli zamanlı sistemlerden bulunur. Ayrıca  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ve  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  matrisleri aşağıda ifade edilen kesikli zamanlı sistemden de bulunur.  $k \geq k_0=0$ .

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad (4.11)$$

*Durum 4.3:*  $x(k+1)=Ax(k)$   $y(k)=Cx(k)$  sisteminde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } C = [0 \ 1] \text{ olsun.}$$

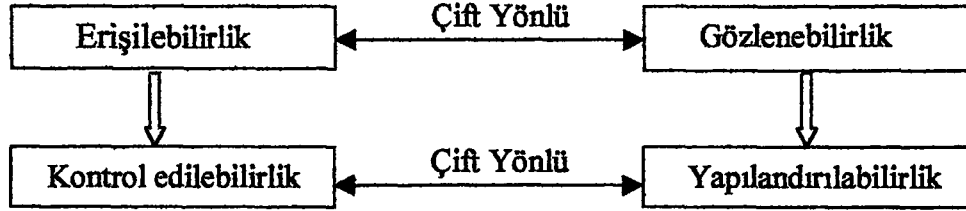
Gözlenebilirlik matrisi  $V = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  dir ve  $\text{rank}V = 2$  olduğundan sistem gözlenebilirdir.

*Durum 4.4:*  $x(k+1)=Ax(k)$   $y(k)=Cx(k)$  sisteminde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } C = [1 \ 0] \text{ olsun.}$$

Gözlenebilirlik matrisi  $V = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  dir ve  $\text{rank}V = 1$  olduğundan sistem gözlenemez.

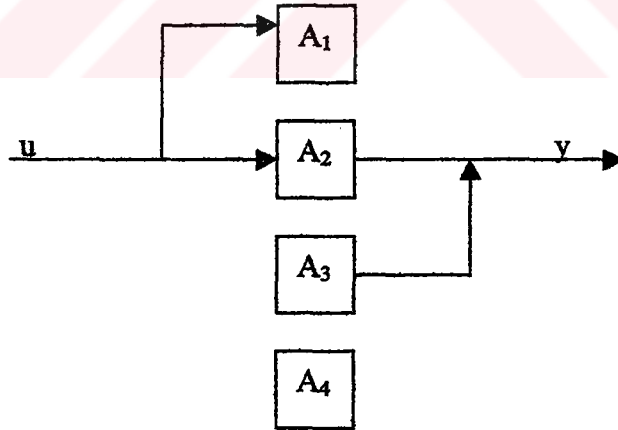
Şekil 4.3' de sürekli ve ayrık zamanlı sistemlerde erişilebilirlik (gözlenebilirlik) ile kontrol edilebilir (yapılandırılabilirlik) arasındaki ilişki verilmiştir.



Şekil 4.3. Lineer sistemlerde kontrol edilebilirlik ile erişilebilirlik ve gözlenebilirlik ile yapılandırılabilirlik arasındaki ilişki

Sürekli zamanlı sistemlerde erişilebilirlik (gözlenebilirlik) her zaman kontrol edilebilirlik (yapılandırılabilirlik) ile ifade edilir. Ayrık zamanlı sistemlerde erişilebilirlik (gözlenebilirlik) her zaman kontrol edilebilirlik (yapılandırılabilirlik) ile ifade edilmez.

Aşağıdaki şekilde kontrol edilebilirlik ile gözlenebilirlik arasında ilişki görülmektedir.



Şekil 4.4. Kontrol edilebilirlik ile gözlenebilirlik arasındaki ilişki

$A_1$  sistemi kontrol edilebilir ancak gözlenemezdir.

$A_2$  sistemi kontrol edilebilir ve gözlenebilirdir.

$A_3$  sistemi kontrol edilemez ancak gözlenebilirdir.

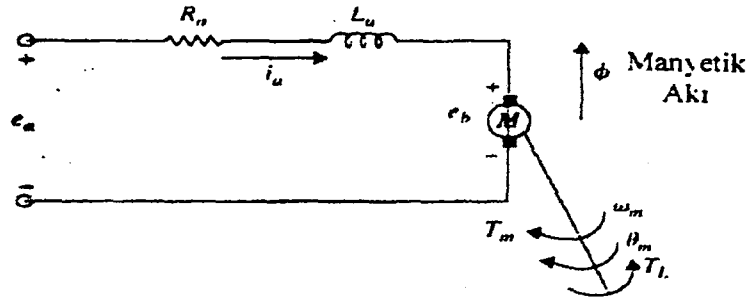
$A_4$  sistemi kontrol edilemez ve gözlenemezdir [1, 4, 7, 8, 9].

## 5. DA MOTORUN MATEMATİKSEL MODELLEMESİ

### 5.1. DA Motorun Durum Denklemleri

DA motorlar büyük ölçüde kontrol sisteminde kullanıldığından, çözümleme ile ilgili amaçlar için kontrol uygulamalarında DA motorlarının matematiksel modellerini kullanmak gereklidir. Yabancı uyarımlı ve kalıcı mıknatıslı DA motorun matematiksel modeli sadece manyetik alanın tanımında farklılık gösterir. Bir DA motoru temsil için, Şekil 5.1' deki eşdeğer devre kullanılır. Endüvi,  $L_a$  sargısının endüktansına, rotor döndüğü zaman endüvi de oluşan zıt elektromotor kuvvetini gösteren  $e_b$  zıt elektromotor kuvveti ve gerilim kaynağına seri bağlı  $R_a$  direnci ile modellenmiştir. Hava boşluğu akısı,  $\phi(t)$  ile gösterilir. Aşağıda DA motorda kullanılan parametreler verilmiştir.

$i_a$	:	Endüvi akımı (A)
$R_a$	:	Endüvi direnci ( $\Omega$ )
$e_a(t)$	:	Endüvi gerilimi (V)
$L_a$	:	Endüvi sargısının endüktansı (H)
$K_i$	:	Moment sabiti (Nm/Amp)
$T_L(t)$	:	Yük momenti (Nm)
$K_b$	:	Zıt elektromotor kuvvet sabiti (V/(rad/s))
$T_m(t)$	:	Motor momenti (Nm)
$\omega_m$	:	Rotor açısal hızı (rad/sn)
$\theta_m(t)$	:	Rotor yer değiştirmesi
$B_m$	:	Sürtünme katsayısı (Nms)
$J_m$	:	Motorun rotor eylemsizliği ( $\text{kg m}^2 / \text{s}^2$ )
$\phi(t)$	:	Hava boşluğundaki manyetik akı (Weber)
$e_b(t)$	:	Zıt elektromotor kuvvet (V)



Şekil 5.1. Yabancı uyarımlı DA motorun elektrik devresi

Şekil 5.1' deki devre referans alınarak, DA motor kontrolü, endüvi uçlarına uygulanan  $e_a(t)$  gerilimi ile yapılır. Hava boşluğu akısı  $\phi(t)$ ' nin sabit olduğu ve  $\phi$  ile gösterildiği kabul edilir. Doğrusal analiz için, motor tarafından üretilen momentin, hava boşluğu akısı ve endüvi akımıyla orantılı olduğunu kabul edilir.

$$T_m(t) = K_m \phi i_a(t) = K_i i_a(t) \quad (5.1)$$

Böylece  $e_a(t)$  giriş gerilimi kullanarak Şekil 5.1.' deki sistemin denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{di_a(t)}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} i_a(t) - \frac{1}{L_a} e_b(t) + \frac{1}{L_a} e_a(t) \quad (5.2)$$

$$T_m(t) = K_i i_a(t) \quad (5.3)$$

$$e_b(t) = K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt} = K_b \omega_m(t) \quad (5.4)$$

$$\frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} = \frac{1}{J_m} T_m(t) - \frac{1}{J_m} T_L(t) - \frac{B_m}{J_m} \frac{d\theta_m(t)}{dt} \quad (5.5)$$

Buradaki  $T_L(t)$ , yük sürtünme momentini temsil eder. Eş. 5.2 ve Eş. 5.5' e kadar olan denklemler,  $e_a(t)$ ' nin tüm olayların sebebi olduğunu gösterir. Eş. 5.2,  $di_a(t)/d(t)$ ' nin  $e_a(t)$ ' den dolayı ani etki olduğu kabul edilir. Eş. 5.3' deki  $i_a(t)$ ,  $T_m(t)$  momentinin oluşmasına neden olur. Eş. 5.4, zıt elektromotor kuvvetini tanımlar ve son olarak Eş. 5.5' deki moment, açısal yer değiştirmeye sebep olur.

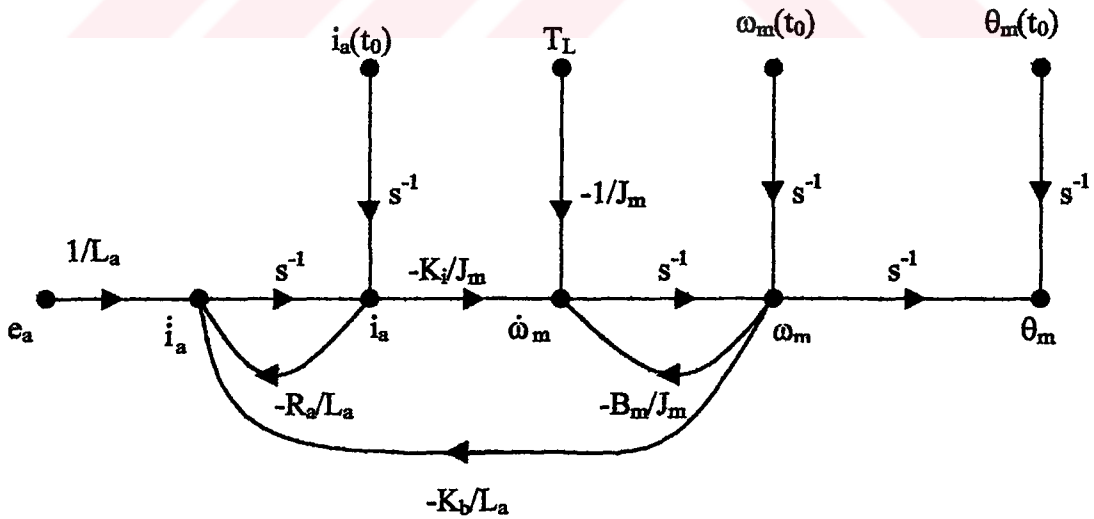
Sistemin durum değişkenleri,  $i_a(t)$ ,  $\omega_m(t)$  ve  $\theta_m(t)$  ile tanımlanır. Direkt yerine koyma ve sadeleştirme ile Eş. 5.2' den Eş. 5.5' ye kadar olan tüm durum değişkenleri, DA motor sisteminin durum denklemleri olan vektör matrisi şeklinde yazılır.

$$\begin{bmatrix} \frac{di_a(t)}{dt} \\ \frac{d\omega_m(t)}{dt} \\ \frac{d\theta_m(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_i}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega_m(t) \\ \theta_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_a(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_m} \\ 0 \end{bmatrix} T_L(t) \quad (5.6)$$

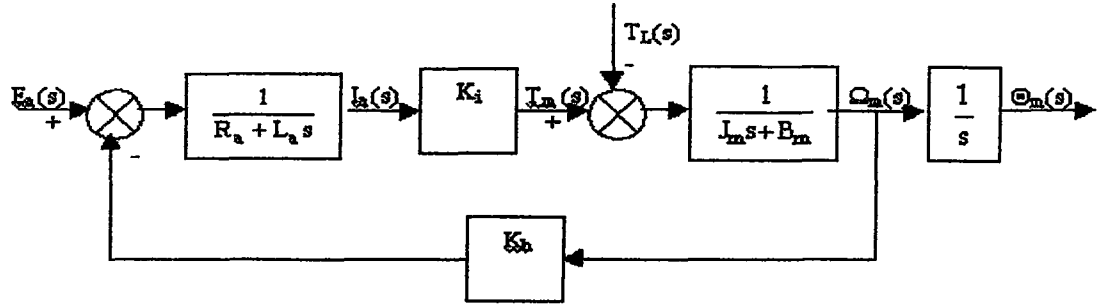
Belirtilen bu duruma göre  $T_L(t)$ , durum denklemlerinde bir ikinci giriş gibi ele alınır. Sistemin durum diyagramı, Eş. 5.6' yı kullanarak Şekil 5.2' de gösterilmiştir. Motor yer değiştirmesi ve giriş gerilimi arasındaki transfer fonksiyonu aşağıdaki gibi durum diyagramından elde edilir. Buradaki  $T_L$  sıfır olarak alınmıştır.

$$\frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_i}{L_a J_m s^3 + (R_a J_m + B_m L_a) s^2 + (K_b K_i + R_a B_m) s} \quad (5.7)$$

Şekil 5.3' te DA motor sistemini temsil eden bir blok diyagramı gösterilmiştir. Blok diyagramının kullanım avantajı, sistemin her bir bloğu transfer fonksiyonuyla durum diyagramı arasındaki ilişkiyi verir.



Şekil 5.2. DA motorun durum modeli



Şekil 5.3. DA motorun blok diyagramı

s Eş. 5.7' nin paydasını etkileyebildiği için, transfer fonksiyonu  $\theta_m(s)/E_a(s)$ ' nin işareti DA motordaki bu iki değişken arasındaki integral sürücüdür. Eğer  $E_a$  bir giriş sabiti ise, sistemin çıkışı olan motor sapması zamanla doğrusal artacak olan integral alıcının çıkışı gibi davranır.

DA motor tek başına basitçe açık döngü sistemi olmasına rağmen Şekil 5.2' nin durum diyagramı ve Şekil 5.3' nun blok diyagramı, motorun zıt elektromotor kuvvetinden dolayı iç geri besleme döngüsüne sahip olduğunu gösterir. Fiziksel olarak zıt elektromotor kuvveti, motor hızıyla ters orantılı bir geri besleme sinyalini gösterir. Eş. 5.7' de görüldüğü gibi, zıt elektromotor kuvveti sabiti  $K_p$ ,  $R_a$  direnci ve  $B_m$  sürtünme kuvvetine eklenmiş bir ifadeyi gösterir. Bu nedenle zıt elektromotor kuvvetin etkisi, motorun kararlılığı geliştirme eğiliminde olan elektrik sürtünmesine eşittir.

## 5.2. $K_i$ ve $K_b$ arasındaki ilişki

Fonksiyonel moment sabiti  $K_i$  ve elektromotor kuvveti sabiti  $K_b$ , verilen bir motor için iki ayrı parametredir. Bu değişkenler değerleri arttıkça anlatılmamıştır.  $K_i$  ve  $K_b$  arasındaki ilişkiyi göstermek için aşağıdaki şekilde matematiksel güç yazılır.

$$P = e_b(t) i_a(t) \quad (5.8)$$

Mekaniksel güç şu şekilde ifade edilir,

$$P = T_m(t) \omega_m(t) \quad (5.9)$$

$T_m(t)$  N.m ve  $\omega_m(t)$  ise radyan/s' dir. Eş. 5.3 ve Eş. 5.4' deki eşitlikler, Eş. 5.8' de yerine konulursa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$P = T_m(t)\omega_m(t) = K_b\omega_m(t)\frac{T_m}{K_i} \quad (5.10)$$

Buradan şu sonuç çıkar,

$$K_b(V/(rad/s))= K_i(N\cdot m/A) \quad (5.11)$$

SI birim sisteminde  $K_b=V/(rad/s)$  ve  $K_i=N\cdot m/A$  olur.

### 5.3. Bir DA Motorun Moment Hız Eğrisi

Bir DA motorun hız eğrisi, uygulanan gerilim ve motor hızıyla ilgili olarak motorun statik moment gösterimini anlatır. Şekil 5.1.' deki sabit durum referans alınursa, motor moment denklemi şu şekildedir. Burada bobinin etkisi sıfırdır.

$$T_m = K_i i_a = \frac{K_i(E_a - K_b\Omega_m)}{R_a} \quad (5.12)$$

Burada:

$T_m$  : Motor momentinin kararlı hal değeri (N.m)

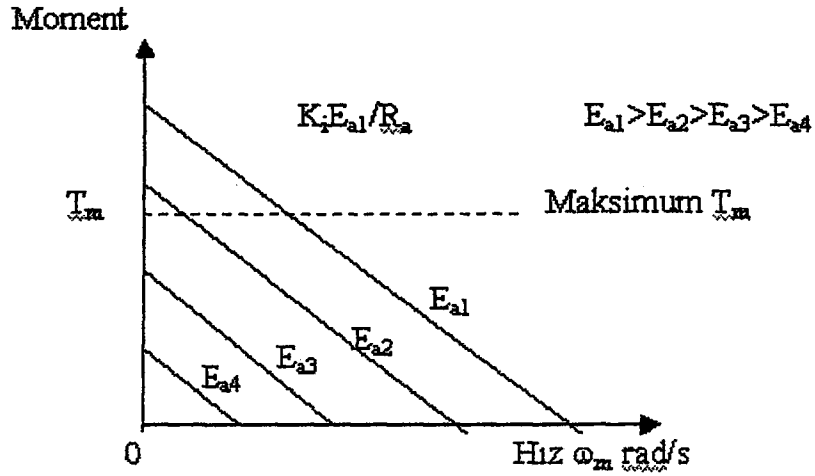
$i_a$  : Akım (Amp.)

$E_a$  : Uygulanan gerilim (Volt)

$\Omega_m$  : Hız (rad/sn)

Uygulanan gerilim  $E_a$ , DA motorun moment hız karakteristiğinin düz doğru ilişkisini tanımlar. Gerçekte motor, iki tip doyuma ya da sınıra bağlı olabilir.

İlk sınır, endüvi akım artışındaki gibi  $E_a$  artışından kaynaklanır. Manyetik devre doyuma uğrar. Bundan dolayı motor momenti belirtilen maksimum değeri aşar. İkinci sınır, motorun ısınma derecesine göre kullanılan motorun maksimum akımına bağlıdır.



Şekil 5.4. DA motorun tipik moment hız eğrileri

Şekil 5.4' de uygulanan farklı gerilimler için tipik moment hız eğrisini gösterir. Eş. 5.12' den, bu eğrinin eğimi karardır ve şu şekilde ifade edilir.

$$k = \frac{dT_m}{d\omega_m} = -\frac{K_i K_b}{R_a} \quad (5.13)$$

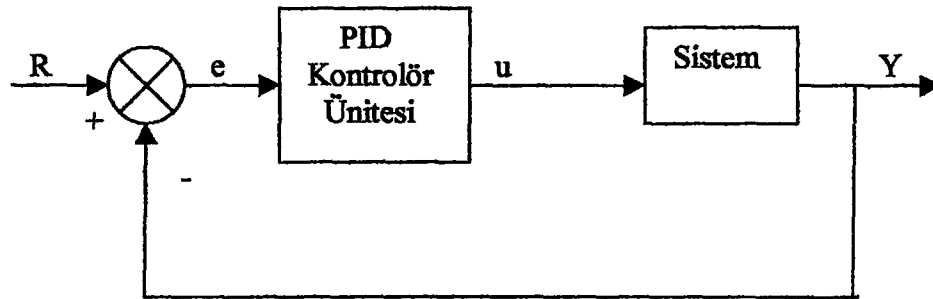
Moment sınır manyetik doyuma göre, şekildeki kesikli çizgi ile gösterilir. Pratikte, DA motorun moment hız eğrisi, dinamometre ile deneysel olarak karardlı hale getirilebilir [2, 3, 5, 10].



## 6. PID KONTROL

### 6.1. Giriş

Günümüzde kullanılan tüm endüstriyel kontrollerin yarısından daha fazlası PID veya düzenlenmiş PID yapısı kullanılmaktadır. P oransal anlamındadır ve çıkışa hataya orantılı olarak katkı sağlar. I ise integral anlamındadır. Sadece oransal kullanıldığında mutlaka çıkış ile set değeri arasında bir kalıcı hata mevcuttur. Bu kalıcı hatayı yok etmek için ise integral kullanılmaktadır. Gelen hataların toplamını sürekli olarak çıkışa yansıtır. D ise türevi temsil eder. Hatanın değişimi durumunda etkili olur. Hatayı bir an önce azaltıcı yönde katkısı olur. Sonuç olarak PID bu üç etkenin çıkışta toplanması ile elde edilir. Analog PID kontroller genellikle hidrolik, pnömatik, elektrik ve elektronik veya bunların kombinasyonlarından oluşur. Ayrıca bunlar mikroişlemciler ve PLC' ler kullanılarak sayısal forma dönüştürülmüştür. PID kontrollerin pek çoğu kullanım yerine göre düzenledikleri için literatürde pek çok farklı ayar- kuralı tanımlanmıştır. Bu kuralları kullanarak, PID kontrollerin hassas ve doğru ayarları kullanım yerine göre düzenlenebilir. Ayrıca otomatik ayar yöntemleri geliştirilmiştir. PID kontrollerin bazıları çalışma esnasında otomatik ayarlama sahiptir. PID kontrolün en büyük faydası birçok kontrol sistemlerine uygulanabilmesidir [3].



Şekil 6.1. Bir sistemin PID kontrolü

PID kontrolde transfer fonksiyon aşağıdaki gibidir.

$$K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right).$$

Burada  $T_i = \frac{K_p}{K_i}$ ,  $T_d = \frac{K_d}{K_p}$  dir.

$K_p$  = Oransal kazancı       $T_i$  = İntegral zaman sabiti

$K_i$  = İntegral Kazancı       $T_d$  = Türev zaman sabiti

$K_d$  = Türev kazancı

Şekildeki PID kontrollü kapalı döngü sistemde kullanılan semboller şu anlama gelir. Burada “e” izleme hatasıdır ve PID kontrolün girişine uygulanır, e giriş R ile çıkış Y arasındaki farktır. Burada hata sinyali e, PID kontrole uygulanarak ve kontrol ünitesi hata sinyalinin integral ve türevini hesaplar. Kontrol ünitesinden çıkan u sinyali e hata sinyalinin  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ , kez katıdır.

$$u = K_p \cdot e + K_i \int e \cdot dt + K_d \frac{de}{dt}$$

## 6.2. P, I ve D Kontrolünün Özellikleri

P kontrolü, yükselme zamanına etki eder ve azaltır. Fakat asla sabit durum hatasını yok etmez. I (integral) kontrol, sabit durum hatasını yok edilmesine etki eder, fakat o daha kötü geçici tepkilere neden olur. D (türev) kontrol, sistem kararlılığındaki artmaya etki eder, aşımı azaltır ve geçici tepkiyi düzeltir. P, D, I, kontrolleri her birinin kapalı döngü sisteme etkisi aşağıda çizelgede gösterilmiştir.

Çizelge 6.1. P, I, D kontrollerin etkileri

Kontrol Kazançları	Yükselme Zamanı (Rise Time)	Aşım (Overshoot)	Yerleşme Zamanı (Settling Time)	S-S (sabit-durum) hatası (S-S Error)
$K_p$	Azalır	Artar	Küçük Değişim	Azalır
$K_i$	Azalır	Artar	Artar	Yok eder
$K_d$	Küçük Değişim	Azalır	Azalır	Küçük Değişim

Burada değişkenlerin birbiri ile bağıntısı tamamen doğru olmayabilir.  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ ' ler birbiri ile bağlantılıdır. Burada önemli olan birindeki değişme diğer iki değişkenin tepkisine etki eder. Bu nedenle, bu çizelge  $K_i$ ,  $K_p$  ve  $K_d$  değerleri için bir değer belirlediğimiz zaman referans olarak başvurulabilir [5].

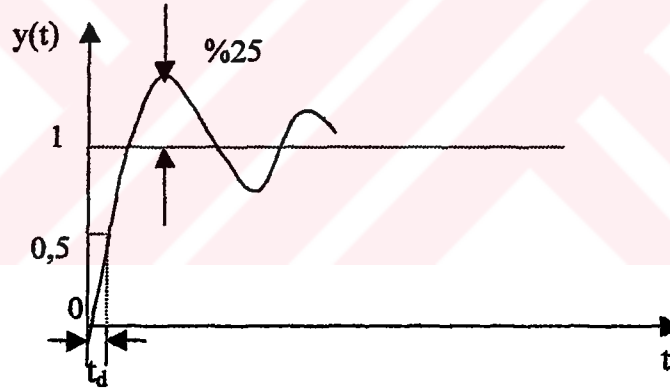
Şekildeki sisteme ait bir matematiksel model geliştirilebilirse, bu kapalı çevrim sistemin geçici ve sürekli durum özelliklerini tanımlayacak kontrolörün parametrelerini hesaplamak için çeşitli tasarım teknikleri uygulamak mümkün olur. Bununla birlikte, eğer sistem çok karmaşıksa ve matematiksel modeli kolaylıkla çıkartılamıyorsa, PID kontrolörün tasarımında analitik yaklaşım mümkün olmaz. Böylece PID kontrollerin tasarımında deneysel sonuçlar kullanılır. Verilen performans tanımlarını elde edebilmek için kontrolör parametrelerinin seçilme süreci kontrolör ayarı olarak adlandırılır. Ziegler ve Nichols, yalnız oransal kontrol işlemi uygulandığında elde edilen marjinal kararlılık sonuçları için  $K_p$  değerine veya deneysel basamak cevabına bağlı olarak PID kontrolörün ayarı için ( $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$ , değerleri) kurallar önermiştir. Ziegler-Nichols kuralları sistem matematiksel modeli bilinmediğinde oldukça çok kullanılır. Ama matematiksel modeli bilinen sistemlere de uygulanabilir.

### 6.3. PID Kontrolörler için Ayar Kuralları

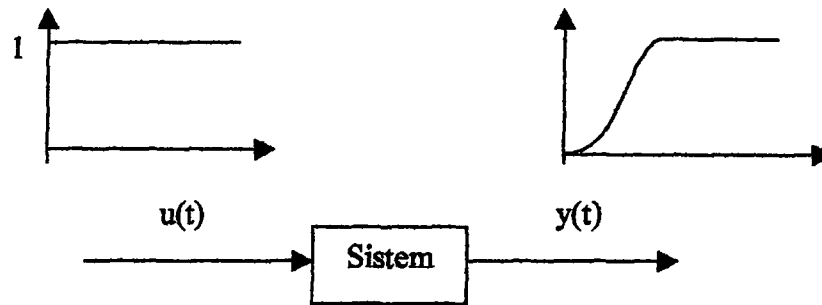
PID kontrolörde, seçilen değişkenin en kısa zamanda ve en az aşım ile set değerine oturması istenir. Bunun için  $K_p$ ,  $T_i$  ve  $T_d$  değerlerinin tam değerine getirilmeleri gerekmektedir.

#### 6.3.1. PID kontrolör ayarı için Ziegler-Nichols kuralları

Ziegler-Nichols verilen bir sistemin geçici cevap karakteristiklerini baz alarak,  $T_d$  türev zamanı,  $T_i$  integral zamanı,  $K_p$  oransal kazanç değerinin hesaplanması için kurallar önerdiler. PID kontrolör parametrelerinin bu şekilde hesaplanması sistem üzerindeki ölçümlerle verilir. Ziegler-Nichols ayar kuralları için iki yöntem kullanılır. Her iki yöntem de, basamak cevabında %25 maksimum aşım hedeflenir.



Şekil 6.2. Basamak cevabı eğrisi, maksimum aşım %25



Şekil 6.3. Sistemin girişine uygulanan birim basamak sinyaline tepkisi

### 6.3.1.1. Birinci yöntem

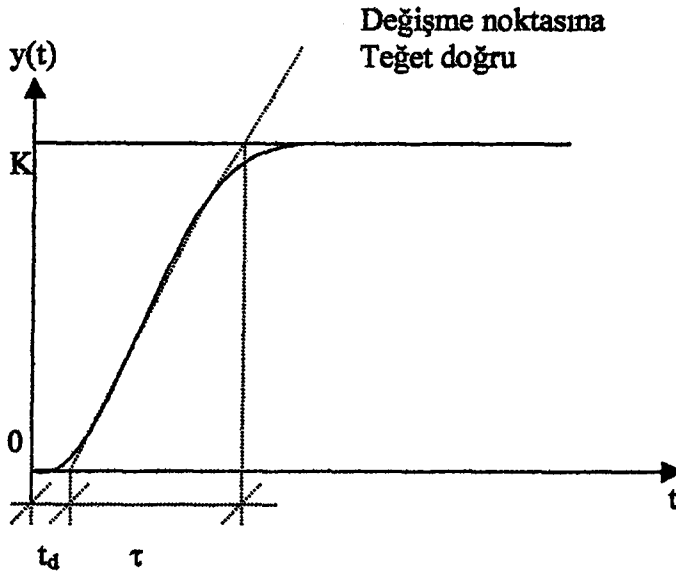
İlk yöntemde Şekil 6.3' de gösterildiği gibi sistemin girişine birim basamak uygulanır ve cevabı deneysel olarak elde edilir. Eğer sistem ne integratörler ne de karmaşık kökler içermiyorsa, bu tip bir birim- basamak cevap eğrisi Şekil 6.4' de gösterildiği gibi S- biçimli bir eğriye benzemiyorsa yöntem uygulanamaz. Bu tipler basamak cevabı eğrisi deneysel veya sistemin dinamik simülasyonu ile elde edilebilir.

S biçimli bir eğri, gecikme zamanı  $t_d$  ve zaman sabiti  $\tau$  ile tanımlanan iki sabitle tanımlanabilir. Gecikme zamanı ve zaman sabiti S-biçimli eğrinin değişme noktasındaki teğet doğrunun çizilmesi ve bu doğrunun zaman eksenini kestiği noktanın bulunması ile hesaplanır.

$Y(s)/U(s)$  transfer fonksiyonuna, birinci dereceden bir sistem ile yaklaşıtırlırsa,

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-t_d s}}{\tau_s + 1} \quad (6.1)$$

elde edilir. Ziegler- Nichols Çizelge 6.1' de verilen formüle göre  $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_d$  değerleri hesaplanır.



Şekil 6.4. S biçimli cevap eğrisi

Çizelge 6.2. Sistemin basamak cevabına göre Ziegler-Nichols ayar kuralı

Kontrolör Tipi	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$\tau/t_d$	$\infty$	0
PI	$0,8\tau/t_d$	$t_d/0,3$	0
PID	$1,2\tau/t_d$	$2t_d$	$0,5t_d$

Ziegler-Nichols kurallarının ilk yöntemiyle ayarlanan PID kontrolörün transfer fonksiyonu şöyledir.

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (6.2)$$

$$G_c(s) = 1,2 \frac{\tau}{t_d} \left( 1 + \frac{1}{2t_d s} + 0,5t_d s \right) \quad (6.3)$$

$$G_c(s) = 0,6\tau \frac{\left( s + \frac{1}{t_d} \right)^2}{s} \quad (6.4)$$

Yani, PID kontrolör orjinde bir kutbu ve  $s = -1/t_d$  noktasında çift sıfır vardır.

Ziegler-Nichols ayar kuralları sistem dinamiklerinin tam olarak bilinmediği süreç kontrol sistemlerinde PID kontrolörlerin ayarında yaygın olarak kullanılırlar. Yıllar boyunca, bu tip ayar kurallarının oldukça yararlı olduğu ispatlanmıştır. Eğer sistem dinamikleri biliniyorsa, PID kontrolörlerin tasarımı için pek çok analitik ve grafiksel yaklaşımlar ve tabii ki Ziegler-Nichols ayar kuralları uygulanabilir.

Eğer sistem için transfer fonksiyonu biliniyorsa, bir birim basamak cevabı veya  $K_{cr}$  kritik kazanç ve kritik periyot  $P_{cr}$  hesaplanabilir. Yani bu hesaplamalar kullanılarak Çizelge 6.1 ve 6.2 ile  $K_p$ ,  $T_i$  ve  $T_d$  parametrelerini hesaplamak mümkündür. Bununla birlikte Ziegler-Nichols ayar kurallarının gerçek yararı, sistem dinamikleri bilinmediğinde analitik veya grafik yaklaşımların tasarımında kullanılmadığı durumlarda görülür.

Genel olarak, integratörlerin olmadığı karmaşık dinamiklere sahip sistemler için Ziegler-Nichols ayar kuralları uygulanabilir. Bununla birlikte, eğer sistem bir integratör içeriyorsa, bu kurallar bazı durumlarda uygulanmayabilir. Ziegler-Nichols kurallarının uygulanmayacağı bu tip bir durumu göstermek için transfer fonksiyonu

$$G_c(s) = \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+1)(s+5)}$$

olan bir birim-geri besleme kontrol sistemini ele alalım. Bir integratör olduğu için ilk metot uygulanamaz. Şekil 6.3' e göre bu sistemin birim basamak cevabı bir S-biçimli eğri olmayacak ve cevap zamanla artacaktır. Ayrıca, eğer ikinci metot uygulanırsa (Şekil 6.5) bir oransal kontrolör ile kapalı-çevrim sistemi, ( $K_p$  kazancı hangi değeri alırsa alsın) osilasyonlar gösterecektir. Bu aşağıdaki analizden görülebilir.

$$s(s+1)(s+5) + K_p(s+2)(s+3) = 0$$

veya

$$s^3 + (6+K_p)s^2 + (5+5K_p)s + 6K_p = 0$$

ve Routh dizisi de

$s^3$	1	$5 + 5K_p$	
$s^2$	$(6 + K_p)$	$6K_p$	
$s^1$	$\frac{30 + 29K_p + 5K_p^2}{6 + K_p}$	0	
$s^0$	$6K_p$		

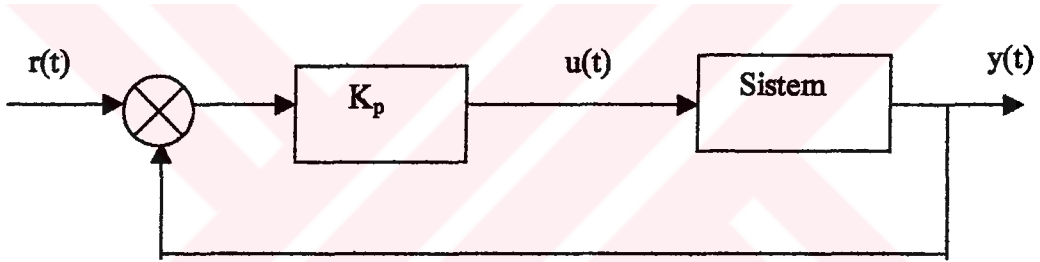
olur. İlk kolonun katsayıları pozitif  $K_p$ ' nin tüm değerleri için pozitiftir. Yani, bu durumda, kapalı-çevrim sistemi osilasyonları göstermeyecek ve bundan dolayı,  $K_{cr}$  kritik kazanç değeri olmayacaktır. Yani, ikinci metot uygulanamaz.

Eğer Ziegler-Nichols kurallarının uygulanabileceği bir sistem ise, Ziegler-Nichols kuralları ile ayarlanan PID kontrolörlü sistem basamak cevabında %10 - %60 arası bir maksimum aşım gösterecektir. Farklı sistemlerde yapılan ölçümler sonucu maksimum aşımın yaklaşık %25 ortalama değeri olduğu görülmüştür. Çizelge 6.1 ve 6.2 değerleri ortalamaya bağlı olduğunda kabul edilebilir. Verilen bir durumda, eğer maksimum aşım yüksek ise, daha hassas ve doğru bir ayarlama yapmak, böylece kapalı çevrim sistemi tatmin edici bir geçici cevabı elde etmek mümkündür.

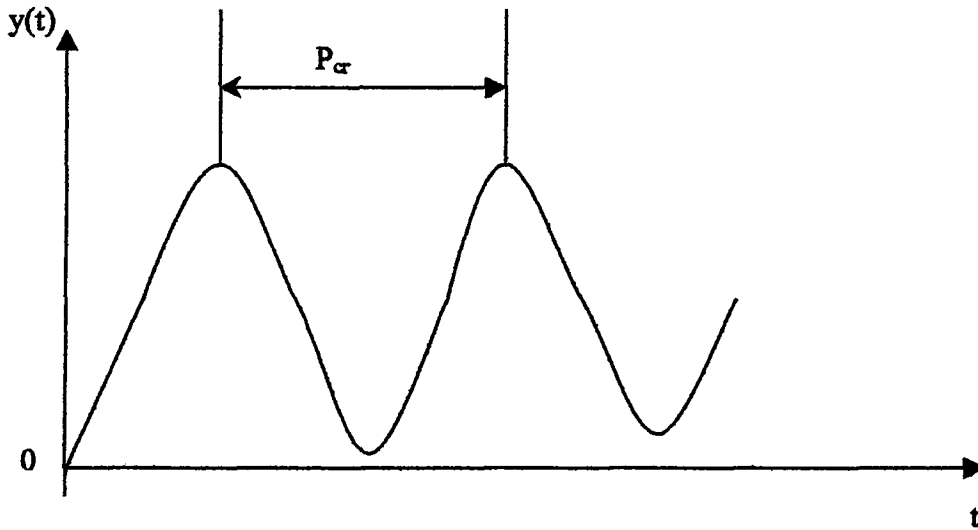
Ashında, Ziegler-Nichols ayar kuralları parametre değerleri için eğitilmiş tahminler ve hassas ayar için bir başlatma noktası sağlar.

### 6.3.1.2. İkinci yöntem

İkinci yöntemde, ilk olarak  $T_i = \infty$  ve  $T_d = 0$  yapılır. Yalnız oransal kontrol kullanılarak (Şekil 6.5)  $K_p$  değeri 0' dan başlayarak çıkışın osilasyon yapmaya başladığı  $K_{cr}$  değerine kadar artırılır. Eğer çıkış osilasyon yapmazsa bu metod uygulanamaz. Yani,  $K_{cr}$  kritik kazanç ve karşılık gelen periyot  $P_{cr}$  deneysel olarak hesaplanır (Şekil 6.6). Ziegler-Nichols, Çizelge 6.2' ye göre  $K_p$ ,  $T_i$  ve  $T_d$  parametrelerinin hesaplanmasını belirtmişlerdir.



Şekil 6.5. Bir sistemin P kontrolü



Şekil 6.6.  $P_{cr}$  periyotlu devamlı osilasyon



Çizelge 6.3.  $K_{\alpha}$  kritik kazanç ve  $P_{\alpha}$  kritik periyodu tabanlı Ziegler-Nichols ayar kuralı.

Kontrolör Tipi	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0,5 K_{\alpha}$	$\infty$	0
PI	$0,45K_{\alpha}$	$\frac{1}{1,2} P_{\alpha}$	0
PID	$0,6 K_{\alpha}$	$0,5P_{\alpha}$	$0,125P_{\alpha}$

Ziegler-Nichols kurallarının ikinci yöntemi ile ayarlanan PID kontrolün transfer fonksiyonu

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (6.5)$$

$$G_c(s) = 0,6K_{\alpha} \left( 1 + \frac{1}{0,5P_{\alpha}s} + 0,125P_{\alpha}s \right) \quad (6.6)$$

$$G_c(s) = 0,075K_{\alpha}P_{\alpha} \frac{\left( s + \frac{4}{P_{\alpha}} \right)^2}{s} \quad (6.7)$$

ile tanımlanır. Yani PID kontrolör orijinde bir kutup ve  $s = -4/P_{\alpha}'$  de ise çift sifra sahiptir [2, 3, 11].

## 7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada zamanda sürekli ve ayrık lineer sistemler için kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik esas alınmıştır. DA motorunun matematiksel modelinin parametreleri olan R (direnç), L (sargı endüktansı), J (Motorun rotor eylemsizliği),  $K_i$  (Moment sabiti),  $K_b$  (Zıt elektromotor sabiti),  $B_m$  ( Sürtünme katsayısı)' nin kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik üzerine etkilerinin ne olduğu araştırılmıştır. Bu parametrelerin sistemi hangi aralıklarda kontrol edilebilir ve gözlenebilir yaptığı üzerine sınırlandırmalar getirilmiştir. Buna göre; pratik uygulamalar açısından

R; 4 ile 9 463 $\Omega$

L; 42.10<sup>-3</sup> ile 9,3898.10<sup>-6</sup> H

J; 0,06 ile 21 683 361 424 kgm<sup>2</sup>

K; 0,543 ile 5416,2 V.s/rad ve -0.543 ile -5416,2 V.s/rad

$B_m$ ; 0 ile 402 561 Nm/rad/sn

aralıklarında değiştiğinde sistemin hem kontrol edilebilir hem de gözlenebilir olduğu görülmüştür. Buradaki herhangi bir parametre için bir sınırlandırma yapılırken sistemin diğer parametreleri, sistemi kontrol edilebilir ve gözlenebilir yapan aralıkların başlangıç değerleri olarak alınmıştır.  $J=8,2398.10^{14}$  kg.m<sup>2</sup> değerinden daha büyük değerlerde motorun hem kontrol edilemez ve hem de gözlenemez olduğu görülmüştür.

Bu veriler sonucunda DA motorunun kontroledilebilirliği ve gözlenebilirliği sistemin modelinde bulunan R, L,  $B_m$ , J ve K değerlerine pek bağlı olmadığı görülmüştür. Çünkü motorun kontrol edilemez ve gözlenemez durumundaki R, L, b, J ve K değerleri pratikte ulaşılması güç değerlerdir. Sonuç olarak DA motoru olağanüstü bir durum olmadıkça her zaman kontroledilebilir ve gözlenebilirdir.

Bu çalışmada ayrıca DA motorun kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik yapan aralıkların başlangıç değerlerinde PI ve PID kontrolü yapılmıştır. PID kontrol aracılığıyla DA motorun birim basamak tepkisinde daha hassas ayar yapılabildiği ve ayrık zamandaki PID kontrolde elde edilen birim basamak tepkileri ile sürekli

kuralları kullanarak bulunan  $K_i$ ,  $K_p$  ve  $K_d$  kazanç değerleri için birim basamak tepkileri çıkartılmıştır. Elde edilen bu tepkiler DA motoru için uygun değildir. Fakat bulunan bu değerler, DA motorun PI ve PID kontrolünde kullanılacak kazançlar konusunda bizlere bir fikir vermektedir.

$K_p$  kazancının yükselme zamanını azalttığı fakat asla yok etmediği,  $K_d$  kazancının sistemin kararlılığını artırdığı, aşmayı azalttığı, geçici tepkiyi düzelttiği görülmüştür.

Bu sonuçların grafik yorumu ekte verilmiştir.

Bu çalışmada sistem uygulanabilirlikten ziyade kontrol teori açısından ele alınmıştır. Zira pratikte örneğin R direncinin  $4\Omega$  ile  $9463\Omega$  arasında değişmesi gibi bir durum söz konusu değildir. Bu nedenle bu çalışmaya uygulanabilirlikten ziyade kontrol teori açısından bakmakta yarar vardır.

## KAYNAKLAR

1. Anstsaklis P.J., Michel N.A., 1997, **Linear Systems, The Mc Graw-Hill Companies, Inc.**, 165-223, New York.
2. Kuo B.C., 1999, **Otomatik Kontrol Sistemleri, Literatür Yayıncılık, Çeviri: Atilla BİR**, 181-189, İstanbul ,
3. Kuo B.C, 1995, **Automatic Control Systems.**, 171-176, **Wiley, John & Sons, Incorporated**, New Jersey, United States of America, Fifth Edition.
4. Petkov p.Hr., Christov N.D. and Konstantinov M., 1991, **Computational Methods for Linear Control Systems, Printice Hall İnternational.**
5. Mellon C., 1997, **Control Tutorials for Matlab, The University of Michigan, Ann Arbor, USA.**
6. Sayan, H.H., 1999, **Garanti Yaklaşım Yöntemi İle Sabit Katsayılı Adi Diferansiyel Denklemler Sistemleri İçin İki-Nokta Sınır Değer Probleminin Numerik Çözümü, Ankara Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara.**
7. Ge S.S., Sun Z., Lee T.H., September 2001, **Reachability and Controllability of Switched Linear Discrete-Time Systems, IEEE transactions on automatic control**, Vol. 46, No. 9,,1438-1441
8. Marc van de Wall, Bram de Jager, April 2001, **A review of methods for input/output selection., Automatica** Vol. 37, No.4
9. Sarioğlu M.K., 1996, **Otomatik Kontrol II, Sistem Yayıncılık, 347-408, İstanbul.**
10. Palm J.W., **Modelling Analysis And Control of Dynamic System., The University of Rhode Island., 313-466.**
11. Yüksel İ., 1995, **Otomatik Kontrol, İTÜ Mühendislik ve Mimarlık Fak. Makina Mühendisliği Bölümü, 175-208, İstanbul.**
12. Yüksel İ., 2000, **Matlab ile Mühendislik Sistemlerinin Analizi ve Çözümü, Vipaş A.Ş., Uludağ Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Bursa.**
13. Ogata K., 1994, **Designing Linear Control Systems with MATLAB, Prentice Hall, Outside North America.**

**E K L E R**



**Ek-1**

DA motorun kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik testini yapan matlab programıdır.

```
%DA motorun verilen J, Bm, K, R, L değerleri için
%kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik testi

J=0.06;      % kg/m2
Bm=0.0207;   % N.m/rad/s
K=0.543;     % V.s/rad
R=1.4;       % ohm
L=42E-3;     % H

A=[0 1 0;
  0 -Bm/J K/J;
  0 -K/L -R/L];
B=[0;0;1/L];
C=[1 0 0];
D=[0];

W=ctrb(A,B);
V=obsv(A,C);

n=length(A)

W_rank=rank(W)
V_rank=rank(V)

if W_rank==n
disp('sistem kontroledilebilir')
else('sistem kontroledilemez')
end
if V_rank==n
disp('sistem gözlenebilir')
else('sistem gözlenemez.')
end
```

## Ek-2

DA motorun kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik testini yapan matlab programının çıktısıdır.

```

» kontroledilebilirlik

J =

    0.0600

Bm =

    0.0207

K =

    0.5430

R =

    1.4000

L =

    0.0420

A =

     0  1.0000     0
     0 -0.3450  9.0500
     0 -12.9286 -33.3333

B =

     0
     0
    23.8095

C =

     1     0     0

D =

     0

W =

    1.0e+004 *
     0     0  0.0215
     0  0.0215 -0.7257
    0.0024 -0.0794  2.3669

V =

    1.0000     0     0
     0  1.0000     0
     0 -0.3450  9.0500

n =

     3

W_rank =

     3

V_rank =

     3

sistem kontroledilebilir
sistem gözlenebilir
»

```

Sonuç-1: Sistem verilen bu  $J$ ,  $B_m$ ,  $K$ ,  $R$ ,  $L$  değerleri için kontroledilebilir ve gözlenebilirdir.

**Ek-3**

DA motorun endüvi direnci R değişkeni için kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik testini yapan matlab programıdır.

```

% Endüvi direnci R değişkeni için
% (diğer değişkenler sabittir)
% DA motorun kontroledilebilirlik ve
% gözlenebilirlik
% testi.

J=0.06;
Bm=0.0207;
K=0.543;
L=42E-3;
for R=9463:1:9465;
R
A=[0 1 0;
  0 -Bm/J K/J;
  0 -K/L -R/L];
B=[0;0;1/L];
C=[1 0 0];
D=[0];

W=ctrb(A,B);

V=obsv(A,C);

n=length(A)

W_rank=rank(W)
V_rank=rank(V)

if W_rank==n
  disp('sistem kontroledilebilir')
else('sistem kontroledilemez')
end
if V_rank==n
  disp('sistem gözlenebilir')
else('sistem gözlenemez.')
end
end

```



## Ek-4

DA motorun endüvi direnci R değişkeni için kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik testini yapan matlab program çıktısıdır.

```

» r

R =

    9463

n =

     3

W_rank =

     3

V_rank =

     3

sistem kontroledilebilir
sistem gözlenebilir

R =

    9464

n =

     3

W_rank =

     2

V_rank =

     3

sistem kontroledilemez
sistem gözlenebilir

```

```

R =

    9465

n =

     3

W_rank =

     2

V_rank =

     3

sistem kontroledilemez
sistem gözlenebilir
»

```

Sonuç-2:

$0 < R < 9465$  aralığında R tamsayı değerleri için sistem kontroledilebilir ve gözlenebilirdir.  
 $R \geq 9465$  için sistem kontroledilemezdir.

**Ek-5**

DA motorun endüvi sargı endüktansı L değeri için kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik testini yapan matlab programıdır.

```

% Endüvi sargısı endüktansı L değişkeni için
% (diğer değişkenler sabittir)
% DA motorun kontroledilebilirlik ve
% gözlenebilirlik testi.

J=0.06;
Bm=0.0207;
K=0.543;
R=1.4;

for L=9.3893E-6:1.001E-10:9.3903E-6;
    L
    A=[0 1 0;
        0 -Bm/J K/J;
        0 -K/L -R/L];
    B=[0;0;1/L];
    C=[1 0 0];
    D=[0];

    W=ctrb(A,B);

    V=obsv(A,C);

    n=length(A)

    W_rank=rank(W)
    V_rank=rank(V)

    if W_rank==n
        disp('sistem kontroledilebilir')
    else('sistem kontroledilemez')
    end
    if V_rank==n
        disp('sistem gözlenebilir')
    else('sistem gözlenemez.')
    end
end
end

```

**Ek-6**

DA motorun endüvi sargı endüktansı L değeri için kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik testini yapan matlab program çıktısıdır.

```

» 1
L =
    9.3897e-006
n =
    3
W_rank =
    2
V_rank =
    3
sistem kontroledilemez
sistem gözlenebilir
L =
    9.3898e-006
n =
    3
W_rank =
    2
V_rank =
    3
sistem kontroledilemez
sistem gözlenebilir

```

```

L =
    9.3899e-006
n =
    3
W_rank =
    3
V_rank =
    3
sistem kontroledilebilir
sistem gözlenebilir
L =
    9.3900e-006
n =
    3
W_rank =
    3
V_rank =
    3
sistem kontroledilebilir
sistem gözlenebilir
»

```

**Sonuç-3:**

DA motoru L değerinin  $9,3898 \cdot 10^{-6}$  değerinden daha küçük değerleri için kontrol edilemez.

**Ek-7**

DA motorun atalet momenti  $J$  değişkeni için kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik testini yapan matlab programıdır.

```
% Atalet momenti J değişkeni için
% (diğer değişkenler sabittir)
% DA motorun kontroledilebilirlik ve
% gözlenebilirlik testi.

Bm=0.0207;
K=0.543;
R=1.4;
L=42E-3;

for J= 21683361422:1:21683361425;
    J
    A=[0 1 0;
        0 -Bm/J K/J;
        0 -K/L -R/L];
    B=[0;0;1/L];
    C=[1 0 0];
    D=[0];

    W=ctrb(A,B);

    V=obsv(A,C);

    n=length(A)

    W_rank=rank(W)
    V_rank=rank(V)

    if W_rank==n
        disp('sistem kontroledilebilir')
    else('sistem kontroledilemez')
    end
    if V_rank==n
        disp('sistem gözlenebilir')
    else('sistem gözlenemez.')
    end
end
```

## Ek-8

DA motorun atalet momenti J değışkeni için kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik testini yapan matlab program çıktısıdır.

```

» ata
J=
    2.1683e+010
n=
     3
W_rank=
     3
V_rank=
     3
sistem kontroledilebilir
sistem gözlenebilir
J=
    2.1683e+010
n=
     3
W_rank=
     3
V_rank=
     3
sistem kontroledilebilir
sistem gözlenebilir

```

```

J=
    2.1683e+010
n=
     3
W_rank=
     2
V_rank=
     3
sistem kontroledilemez
sistem gözlenebilir
J=
    2.1683e+010
n=
     3
W_rank=
     2
V_rank=
     3
sistem kontroledilemez
sistem gözlenebilir
»

```

Sonuç-4: DA motoru J atalet momentinin 21683361424 değerinden daha büyük değerleri için kontrol edilemezdir.

## Ek-9

DA motorun sürtünme katsayısı  $B_m$  değişkeni için kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik testini yapan matlab programıdır.

```

% Sürtünme katsayısı Bm değişkeni için
% (diğer değişkenler sabittir)
% DA motorun kontroledilebilirlik ve
% gözlenebilirlik testi.

J= 0.06;
R=1.4;
L=42E-3;
K=0.543;
for Bm=402560:1:402563;
Bm

A=[0 1 0;
  0 -Bm/J K/J;
  0 -K/L -R/L];
B=[0;0;1/L];
C=[1 0 0];
D=[0];

W=ctrb(A,B);
V=obsv(A,C);
n=length(A)

W_rank=rank(W)
V_rank=rank(V)

if W_rank==n
    disp('sistem kontroledilebilir')
else('sistem kontroledilemez')
end
if V_rank==n
    disp('sistem gözlenebilir')
else('sistem gözlenemez.')
end
end

```

**Ek-10**

DA motorun sürtünme katsayısı  $B_m$  değişkeni için kontrol edilebilirlik ve gözlenebilirlik testini yapan matlab program çıktısıdır.

```

» b1
Bm =
    402560
n =
    3
W_rank =
    3
V_rank =
    3
sistem kontrol edilebilir
sistem gözlenebilir
Bm =
    402561
n =
    3
W_rank =
    3
V_rank =
    3
sistem kontrol edilebilir
sistem gözlenebilir

```

```

Bm =
    402562
n =
    3
W_rank =
    2
V_rank =
    3
sistem kontrol edilemez
sistem gözlenebilir
Bm =
    402563
n =
    3
W_rank =
    2
V_rank =
    3
sistem kontrol edilemez
sistem gözlenebilir
»

```

**Sonuç-5:** DA motoru sürtünme katsayısı  $B_m$  değerinin 402561 N.m/rad/s değerinden sonraki değerlerde kontrol edilemezdir.

**Ek-11**

DA motorun J değişkeni için kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik testini yapan programdır.

```
% Atalet momenti J değişkeni için
% (diğer değişkenler sabittir)
% DA motorun kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik
% testi.

Bm=0.0207;
K=0.543;
R=1.4;
L=42E-3;
for J= 8.0398e+014:10000000000000:8.4398e+014;
    J
    A=[0 1 0;
        0 -Bm/J K/J;
        0 -K/L -R/L];
    B=[0;0;1/L];
    C=[1 0 0];
    D=[0];

    W=ctrb(A,B);

    V=obsv(A,C);

    n=length(A)

    W_rank=rank(W)
    V_rank=rank(V)

    if W_rank==n
        disp('sistem kontrol edilebilir')
        else('sistem kontrol edilemez')
    end
    if V_rank==n
        disp(' sistem gözlemlenebilir')
        else(' sistem gözlemlenemez.')
    end
end
```



## Ek-12

DA motorun J değışkeni için kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik testini yapan matlab program çıktısıdır.

```

» ata2
J=
 8.0398e+014
n=
 3
W_rank =
 1
V_rank =
 3
sistem kontrol edilemez
sistem gözlemlenebilir
J=
 8.1398e+014
n=
 3
W_rank =
 1
V_rank =
 3
sistem kontrol edilemez
sistem gözlemlenebilir

```

```

J=
 8.2398e+014
n=
 3
W_rank =
 1
V_rank =
 2
sistem kontrol edilemez
sistem gözlemlenemez.
J=
 8.3398e+014
n=
 3
W_rank =
 1
V_rank =
 2
sistem kontrol edilemez
sistem gözlemlenemez.
»

```

Sonuç-6: DA motoru atalet momenti J değeri için  $8,2398 \cdot 10^{14}$  daha büyük değerlerinde kontroledilemez ve aynı zamanda gözlemlenemezdir.

## Ek-13

DA motorun K değeri için kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik testini yapan matlab programıdır.

```

% Motor sabiti K değışkeni için
% (diğer değışkenler sabittir)
% DA motorun kontroledilebilirlik ve
% gözlenebilirlik testi.

J= 0.06;
Bm=0.0207;
R=1.4;
L=42E-3;

for K=5416.1:0.1:5416.4;
    K
    A=[0 1 0;
        0 -Bm/J K/J;
        0 -K/L -R/L];
    B=[0;0;1/L];
    C=[1 0 0];
    D=[0];

    W=ctrb(A,B);

    V=obsv(A,C);

    n=length(A)

    W_rank=rank(W)
    V_rank=rank(V)

    if W_rank==n
        disp('sistem kontroledilebilir')
    else('sistem kontroledilemez')
    end
    if V_rank==n
        disp('sistem gözlenebilir')
    else('sistem gözlenemez.')
    end
end

```

### Ek-14

DA motorun motor sabiti K değeri için kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik testini yapan matlab program çıktısıdır.

```

» kp
K =
    5.4161e+003
n =
    3
W_rank =
    3
V_rank =
    3
sistem kontroledilebilir
sistem gözlenebilir
K =
    5.4162e+003
n =
    3
W_rank =
    3
V_rank =
    3
sistem kontroledilebilir
sistem gözlenebilir

```

```

K =
    5.4163e+003
n =
    3
W_rank =
    2
V_rank =
    3
sistem kontroledilemez
sistem gözlenebilir
K =
    5.4164e+003
n =
    3
W_rank =
    2
V_rank =
    3
sistem kontroledilemez
sistem gözlenebilir
»

```

Sonuç -7: DA motoru K değişkeni için  $5,4163 \cdot 10^3$  değerinden daha büyük değerlerde kontrol edilemez.

## Ek-15

DA motorun negatif K değerleri için kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik testini yapan matlab programıdır.

```

% Motor sabiti K değişkeni için
% (diğer değişkenler sabittir)
% DA motorun kontroledilebilirlik ve
% gözlenebilirlik testi.

J= 0.06;
Bm=0.0207;
R=1.4;
L=42E-3;

for K=-5.4161e+003:-0.1:-5.4164e+003;
    K
    A=[0 1 0;
        0 -Bm/J K/J;
        0 -K/L -R/L];
    B=[0;0;1/L];
    C=[1 0 0];
    D=[0];

    W=ctrb(A,B);
    V=obsv(A,C);

    n=length(A)
    W_rank=rank(W)
    V_rank=rank(V)

    if W_rank==n
        disp('sistem kontroledilebilir')
        else('sistem kontroledilemez')
    end
    if V_rank==n
        disp('sistem gözlenebilir')
        else('sistem gözlenemez.')
    end
end

```

## Ek-16

DA motorun negatif K değerleri için kontroledilebilirlik ve gözlenebilirlik testini yapan matlab program çıktısıdır.

<pre> » kn K = -5.4161e+003 n = 3 W_rank = 3 V_rank = 3 sistem kontroledilebilir sistem gözlenebilir K = -5.4162e+003 n = 3 W_rank = 3 V_rank = 3 sistem kontroledilebilir sistem gözlenebilir </pre>	<pre> K = -5.4163e+003 n = 3 W_rank = 2 V_rank = 3 sistem kontroledilemez sistem gözlenebilir K = -5.4164e+003 n = 3 W_rank = 2 V_rank = 3 sistem kontroledilemez sistem gözlenebilir » </pre>
---	--

Sonuç-8: DA motoru K değişkeni için  $-5,4163 \cdot 10^3$  değerinden daha küçük değerlerde kontrol edilemez.

**Ek-17**

DA motorun PI kontrolünü gösteren matlab programıdır.

```
% DA motorun PI kontrolü

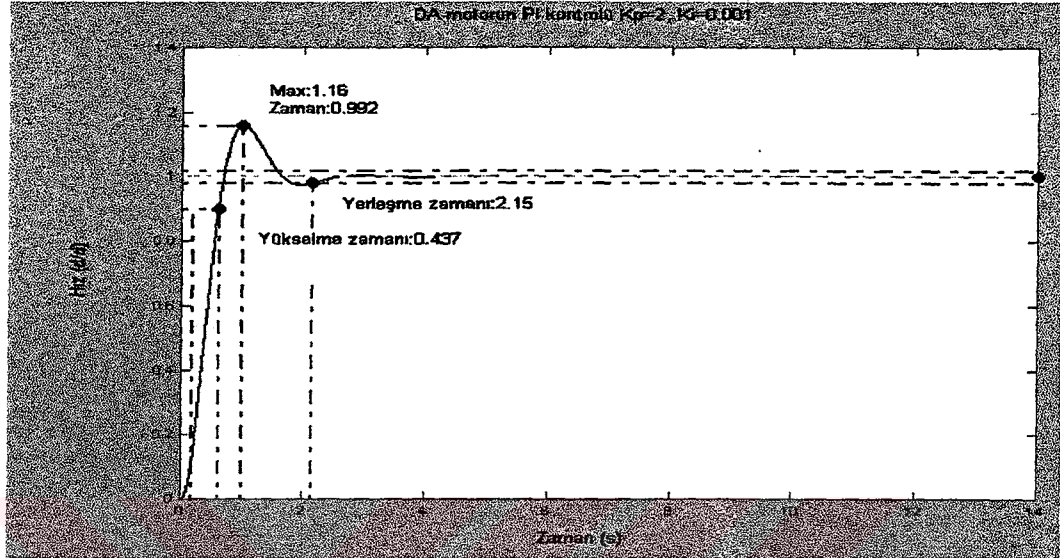
J=0.06;
Bm=0.0207;
K=0.543;
R=1.4;
L=42E-3;

num=K;
den=[(J*L) ((J*R)+(L*Bm)) ((Bm*R)+K^2) 0];

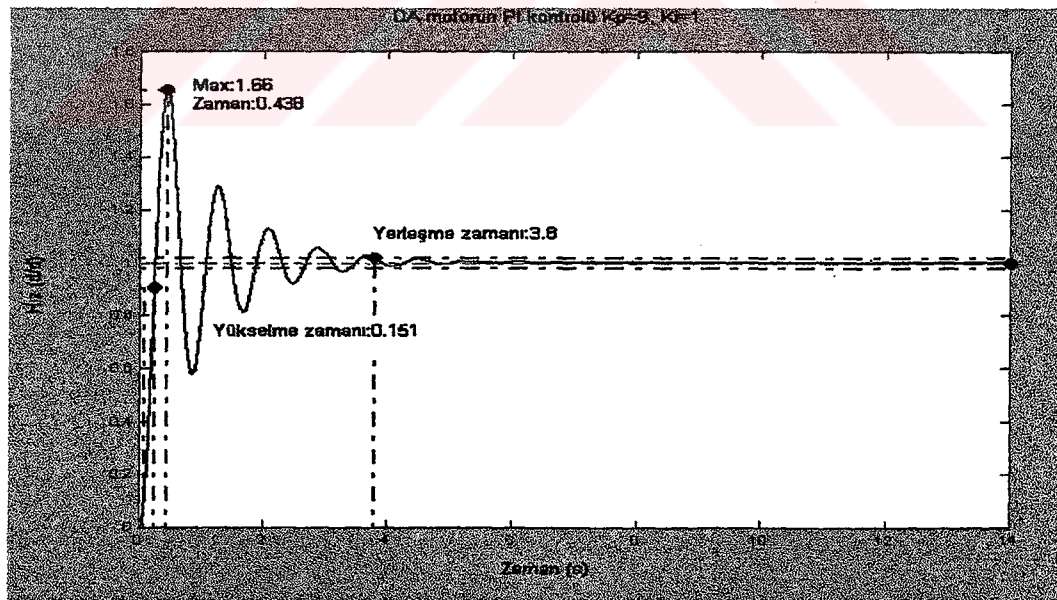
Kp=2;
Ki=0.001;
numcf=[Kp Ki];
dencf=[1 0];
numf=conv(numcf,num);
denf=conv(dencf,den);
[numc,denc]=cloop(numf,denf,-1);
t=0:0.001:14;
step(numc,denc,t)
```

**Ek-18**

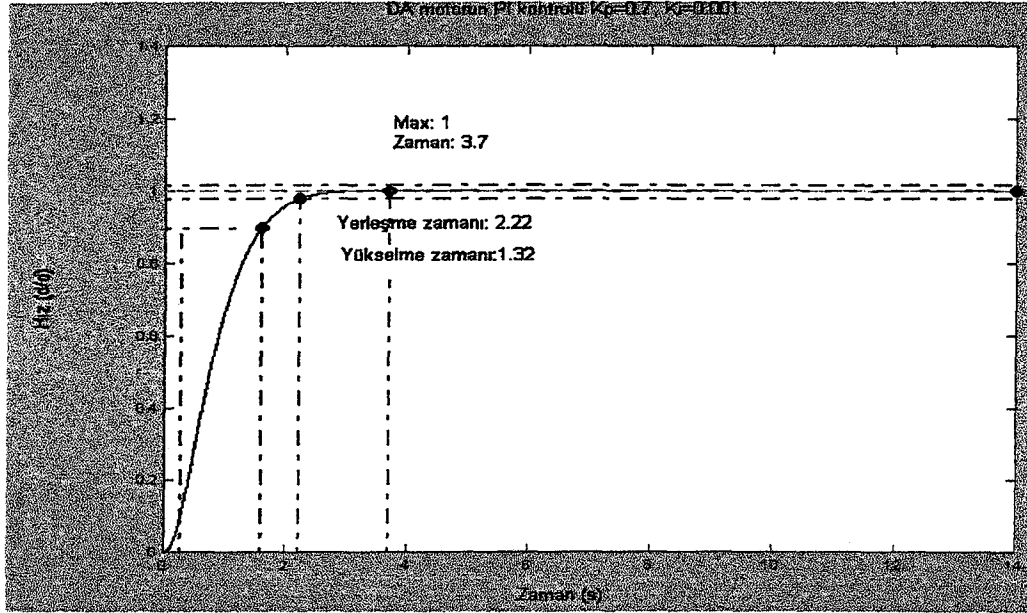
DA motorun PI kontrolü yapıldıktan sonraki birim basamak tepkileridir.



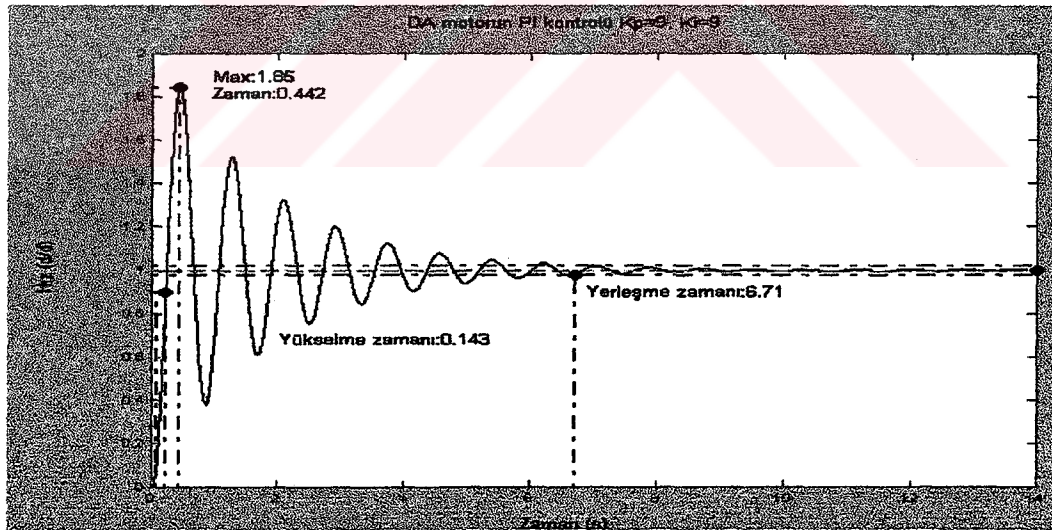
Seçilen  $K_i$  ve  $K_p$  değerleri için şekildeki tepki DA motoru için ideal bir tepkidir. Çünkü aşım ve yerleşme zamanı küçük değerlerdir.



Burada seçilen  $K_i$  ve  $K_p$  değerleri için DA motoru iyi bir tepki vermemektedir.  $K_p$ 'nin artması aşımı ve yerleşme zamanını artırmıştır. Fakat yükselme zamanı küçüktür. Seçilen  $K_i$  ve  $K_p$  değerleri uygun değildir.



Seçilen  $K_i$  ve  $K_p$  değerleri, DA motorunun birim basamak tepkisi için en ideal değerlerdir.  $K_p$  nin azalması aşımı ve yerleşme zamanını azaltmıştır. Fakat yükselme zamanını artırmıştır. Bu istenen bir durum değildir.



$K_i=9$  ve  $K_p=9$  kazançları için DA motorun birim basamak tepkisi görülmektedir. Burada aşım ve yerleşme zamanı çok yüksektir. Bu motorda istenmeyen bir durumdur. Fakat yükselme zamanı düşüktür. (Ziegler-Nichols kurallarına göre hesaplanan değerler  $K_i=19$ ,  $K_p=9$  dir. Bu değerlere göre elde edilen tepki kararsız bir tepki olarak görülmüştür.)



**Ek-19**

DA motorun PID kontrolünü gösteren matlab programıdır.

```
% DA motorun PID kontrolü

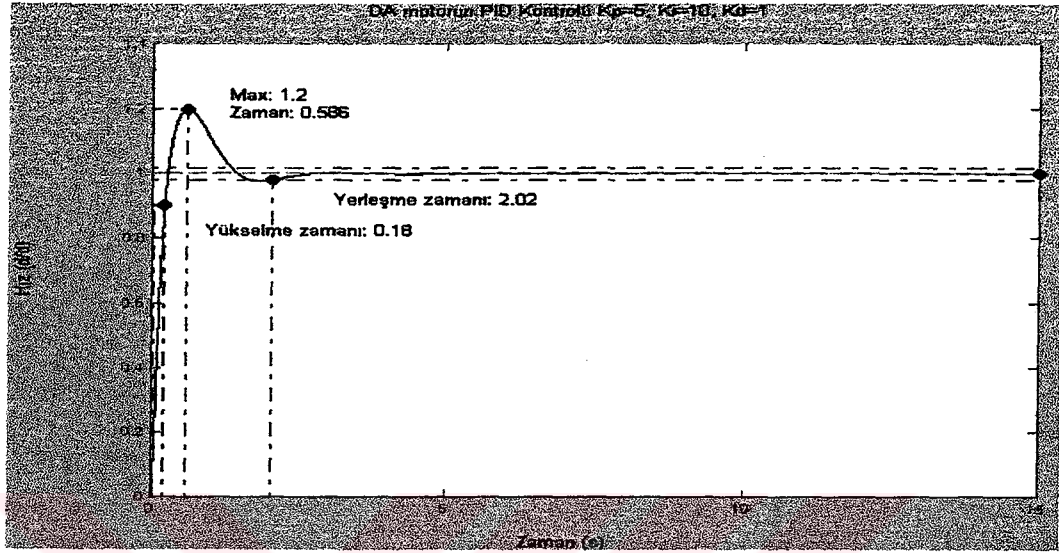
J=0.06;
Bm=0.0207;
K=0.543;
R=1.4;
L=42E-3;

num=K;
den=[(J*L) ((J*R)+(L*Bm)) ((Bm*R)+K^2) 0];

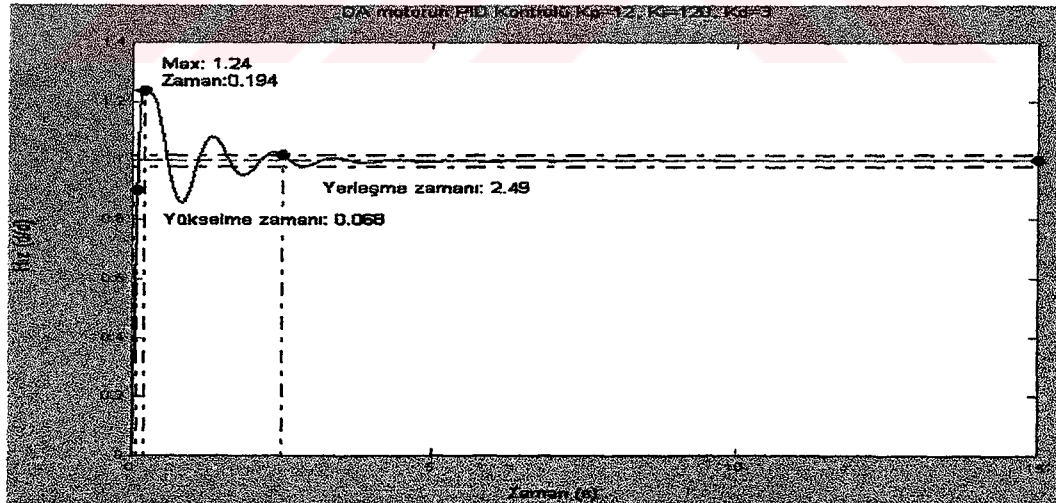
Kp=5;
Ki=10;
Kd=1;
numcf=[Kd Kp Ki];
dencf=[1 0];
numf=conv(numcf,num);
denf=conv(dencf,den);
[numc,denc]=cloop(numf,denf,-1);
t=0:0.001:15;
step(numc,denc,t)
title('DA motorun PID Kontrolü')
```

## Ek-20

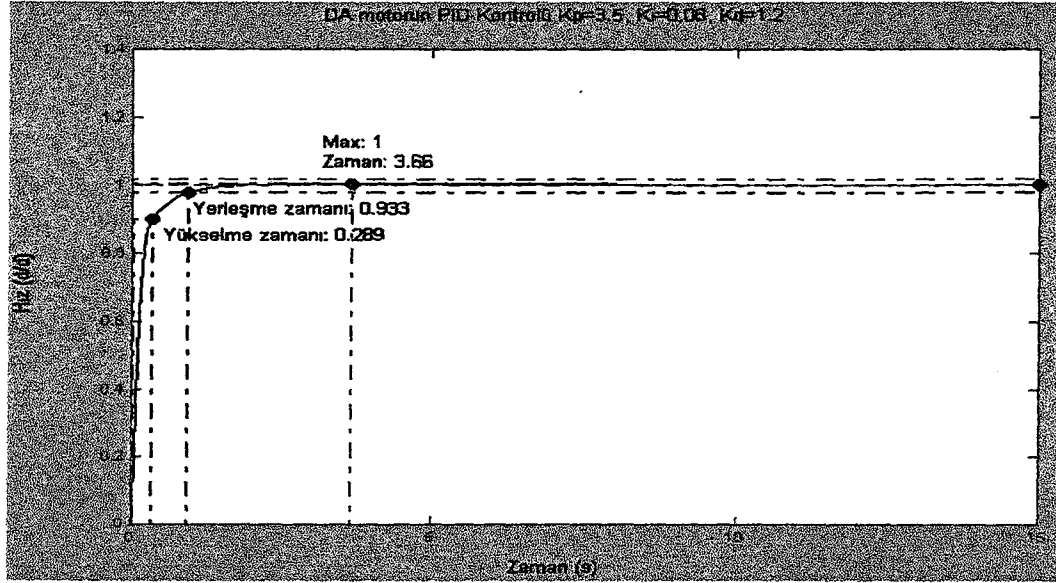
DA motorun PID kontrolü yapıldıktan sonraki birim basamak tepkileridir.



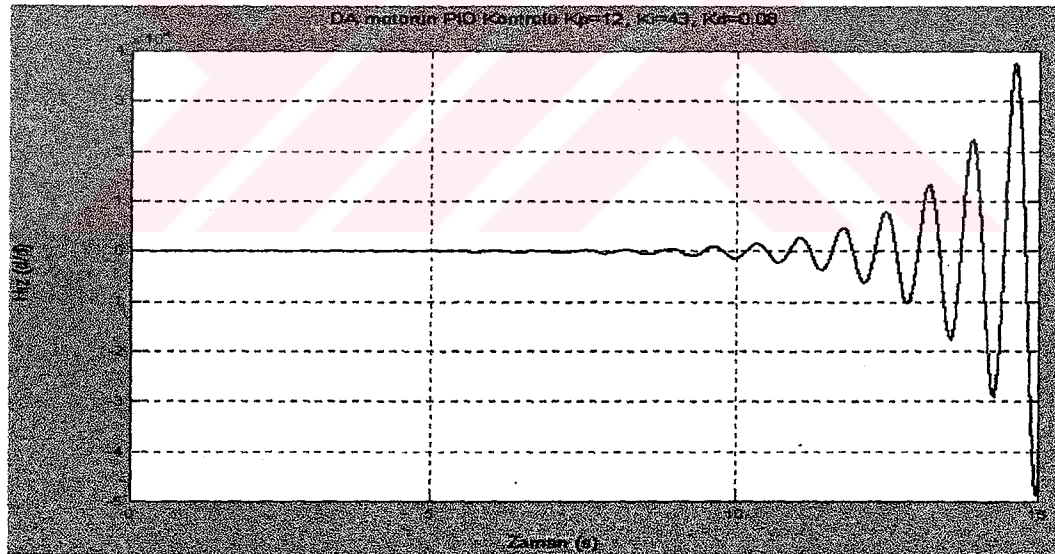
Yukarıdaki DA motorunun PID kontrolünde yerleşme zamanı ve aşım değerleri oldukça iyidir. Yükselme zamanı küçüktür. Dolayısıyla bu  $K_p$ ,  $K_i$  ve  $K_d$  değerleri için DA motorun PID kontrolü yapılması uygundur.



Bu tepkide, DA motor çok kısa bir sürede istenen hıza ulaşmıştır. Fakat salınım yaparak 2,49 saniyede kararlı bir hıza ulaşıyor. Buradaki aşım normal sınırlar içersindedir.



Burada DA motorun PID kontrolünde  $K_p=3,5$ ,  $K_i=0,08$  ve  $K_d=1,2$  olarak seçilerek ideal bir basamak tepkisi elde edilmiştir. Yerleşme zamanı ve yükselme zamanı oldukça küçüktür. Salınım ise yoktur.



Bu tepkide Ziegler –Nichols kuralının ikinci yöntemine göre bulunmuş olan  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$  değerleri kullanılmıştır. Elde edilen tepki hiç arzulanan bir tepkidir. Şekilde görüldüğü motor kalkınmamaktadır.

**Ek-21**

DA motorun ayırık zamanda PID kontrolünü gösteren matlab programıdır.

```
J=0.06;
Bm=0.0207;
K=0.543;
R=1.4;
L=42E-3;

num = K;
den = [(J*L) (J*R)+(L*Bm) (R*Bm)+(K^2) 0];

Ts = 0.012;
[numz,denz] = c2dm(num,den,Ts,'zoh')

[numz_cl,denz_cl] = cloop(numz,denz);

[x1] = dstep(numz_cl,denz_cl,1001);
t=0:0.012:12;
stairs(t,x1)
xlabel('Zaman (s)')
ylabel('Açısal hız (rad/s)')
title('Birim basamak tepkisi:Orjinal')

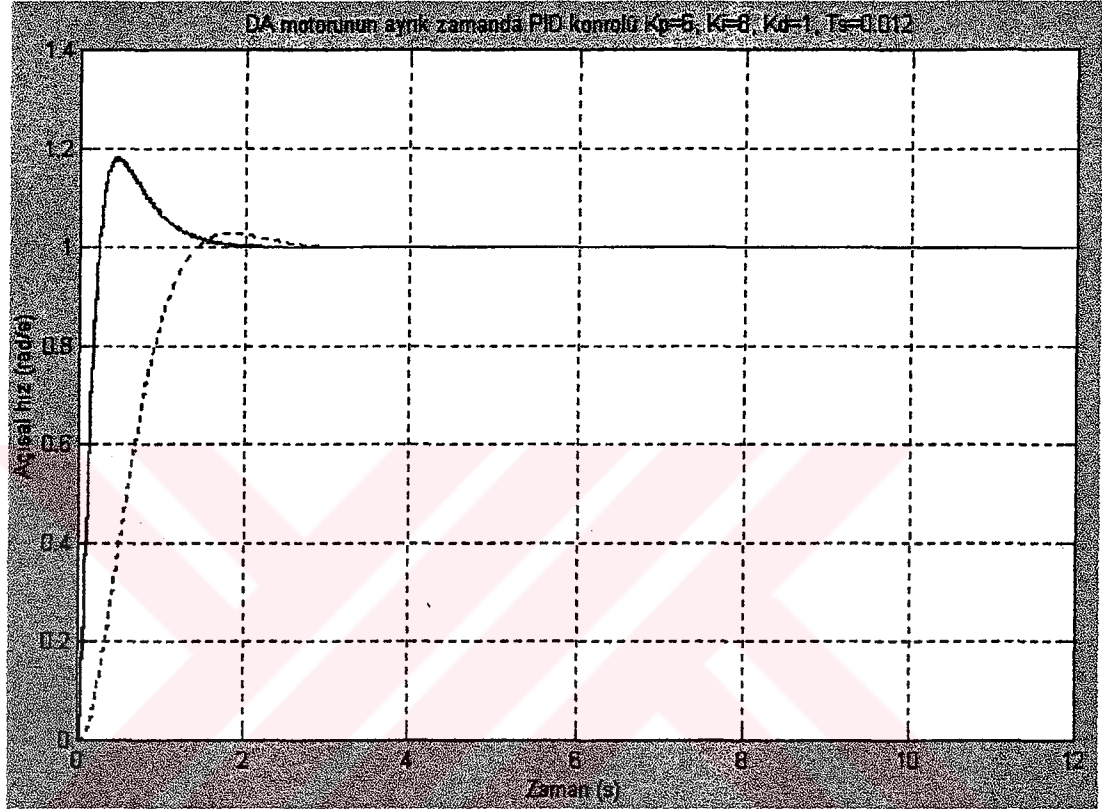
% DA motorun Ayırık PID koontrolü
Kp = 6;
Ki = 6;
Kd = 1;

[dencz,numcz]=c2dm([1 0],[Kd Kp Ki],Ts,'tustin');
numaz = conv(numz,numcz);
denaz = conv(denz,dencz);
[numaz_cl,denaz_cl] = cloop(numaz,denaz);

[x2] = dstep(numaz_cl,denaz_cl,1001);
t=0:0.012:12;
stairs(t,x2)
xlabel('Zaman (s)')
ylabel('Açısal Hız(rad/s)')
title('PID kontrollü birim basamak tepkisi')
hold on
```

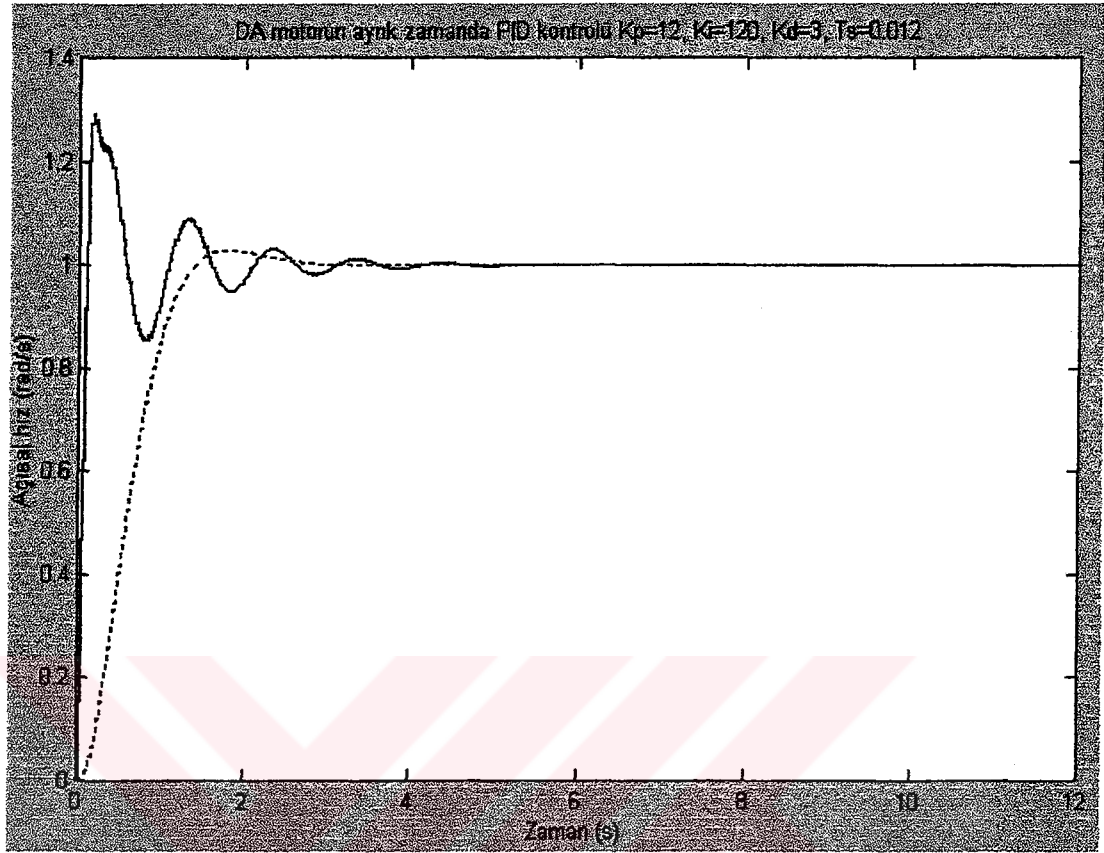
## Ek-22

DA motorun ayırık zamanda PID kontrolü yapıldıktan sonraki birim basamak tepkileridir.



- DA motorun ayırık zamanda PID kontrolü yapıldıktan sonraki tepkisi  
 - - - DA motorun ayırık zamandaki tepkisi

Yukarıda DA motorunun ayırık zamandaki ve PID kontrolü yapıldıktan sonraki tepkileri görülmektedir. Örnekleme aralığı  $T_s=0.012$  olduğundan tepki sürekli zamandaki tepkiye benzemektedir. PID kontrolü yapıldıktan sonra motorun yerleşme zamanı ve yükselme zamanı azalmıştır. Tepkide biraz aşım görülmektedir. Fakat bu aşım değeri normal sınırlar içersindedir.



- DA motorun ayrık zamanda PID kontrolü yapıldıktan sonraki tepkisi  
 - - - DA motorun ayrık zamandaki tepkisi

Burada seçilen  $K_p$ ,  $K_i$  ve  $K_d$  değerleri sürekli zamanda sisteminde seçilen değerlerin aynısıdır. Elde edilen tepki de sürekli zamanda elde edilen tepkiye benzerdir. Burada yükselme zamanı oldukça kısalmıştır. Motor salınım yapmaktadır fakat bu kabul edilebilir sınırlar içersindedir. Yerleşme zamanı da küçüktür.

## ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında İzmir' in Menemen İlçesinde doğdu. İlk öğrenimini Menemen'de, orta ve lise öğrenimini Manisa' da tamamladı. 1995 yılında girdiği Gazi Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Elektrik Eğitimi Bölümü' nden 1999 yılında Elektrik Öğretmeni olarak mezun oldu. Eylül 1999 da girdiği Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik Eğitimi Anabilim Dalı' nda Yüksek Lisans öğrenimine devam etmektedir.

Ekim 1999' dan beri Manisa-Alaşehir Yeşilyurt Çok Programlı Lisesi' nde Elektrik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

