

**BİR DIRICHLET-TÜRÜ PROBLEMİN SEMBOLİK HESAPLAMA
KURAMINDA YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜNÜN HESAPLANMASI**

123562

Tolga GÜYER

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK**


**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

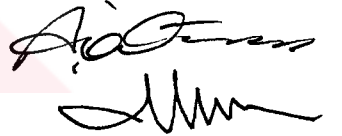

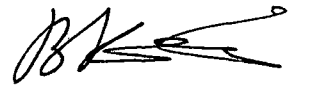


Haziran 2002

ANKARA

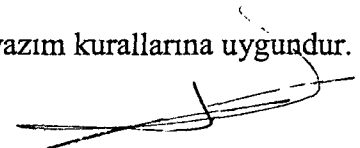
Tolga GÜYER tarafından hazırlanan BİR DIRICHLET-TÜRÜ PROBLEMİN SEMBOLİK HESAPLAMA KURAMINDA YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜNÜN HESAPLANMASI adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.


Prof. Dr. Şeref Mirasyedioğlu
Tez Yöneticisi

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Abdullah ALTIN 
Üye : Prof. Dr. Şeref MİRASYEDİOĞLU 
Üye : Prof. Dr. Vargha KALANTAROV 
Üye : Prof. Dr. Aydın TIRYAKI 
Üye : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR 

Bu tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM, TEOREM VE GÖSTERİMLER	4
2.1. Hilbert Uzayları	5
2.2. L_p Uzayları ve Zayıf Türev	7
2.3. Sobolev Uzayları	12
2.4. Sınır-Değer Problemleri	15
2.4.1. Sınır-değer problemlerinin zayıf çözümleri	17
2.4.2. Zayıf çözümlerin varlığı ve tekliği	20
2.4.3. Galerkin metodu	25
2.4.4. Zayıf çözümlerin regülaritesi (düzgünlüğü)	28
3. PROBLEMİN YAKLAŞIK ANALİTİK ÇÖZÜMÜNÜN HESAPLANMASI	30
3.1. Problemin Çözümünün Varlığı ve Tekliği	32
3.2. Algoritmalar	41
3.3. Maple Kodları ve Bazı Sonuçlar	54
KAYNAKLAR	59
EKLER	62
ÖZGEÇMİŞ	82

**BİR DIRICHLET-TÜRÜ PROBLEMİN SEMBOLİK HESAPLAMA
KURAMINDA YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜNÜN HESAPLANMASI
(Doktora Tezi)**

Tolga GÜYER

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2002**

ÖZET

Bu tez çalışmasında, integral geometri için tanımlanmış bir ters problemden indirgenmiş, üçüncü mertebeden kısmi diferensiyel denklemler için Dirichlet-türü bir problemin yaklaşık analitik çözümünü hesaplayacak sembolik algoritmalar geliştirilmiştir.

Bilim Kodu : 403.06.00

Anahtar Kelimeler : Galerkin metodu, sembolik hesaplama, ters problem

Sayfa Adedi : 82

Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Şeref Mirasyedioğlu

**COMPUTATION OF THE APPROXIMATED SOLUTION TO A
DIRICHLET-TYPE PROBLEM IN SYMBOLIC COMPUTATION THEORY
(Ph.D.Thesis)**

Tolga GÜYER

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

June 2002

ABSTRACT

In this thesis, the symbolic algorithms for computing the approximated analytical solution to a Dirichlet-type problem for the third order partial differential equations which reduced from an inverse problem described for integral geometry are developed.

Science Code : 403.06.00

Key Words :Galerkin method, symbolic computation, inverse problem

Page Number : 82

Adviser : Prof. Dr. Şeref Mirasyedioğlu

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında, bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her konuda yol gösteren danışmanım Prof.Dr. Sn. Şeref MİRASYEDİOĞLU'na; yararlandığım çalışmalarını ve desteği ile ufkumu açan değerli hocam Prof.Dr. Sn. Arif AMİROV'a; yapıcı eleştirileri ile tezime yadsınamaz katkılarda bulunan Prof.Dr. Sn. Aydın TİRYAKİ'ye; engin deneyimlerini paylaşmaktan gurur duyduğum Prof.Dr Sn. Varga KALANTOROV'a; manevi desteği ve gösterdiği sabrı için sevgili eşim Sn. Sevgi GÜYER'e teşekkür ederim...



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil		Sayfa
Şekil 2.1.	$\psi: B_r(\xi) \rightarrow B_1(0)$ C^k -diffeomorfizması	5
Şekil 3.1.	Ω bölgesinin dış birim normal vektörleri	51
Şekil 3.2.	Teorem 3.4.1.in ispatında (1) ve (2) durumları	53



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\ell^+(x, \varphi)$	Pozitif φ açılı doğru
$B_r(x)$	x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\text{supp } f$	f fonksiyonunun desteği
$\overline{\Omega}$	Ω bölgesinin kapanışı
$\partial\Omega$	Ω bölgesinin sınırı
$C(\Omega)$	Ω üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar kümesi
$C^k(\Omega)$	Ω üzerinde tanımlı, kendisi ve k 'nci mertebeye kadar tüm kısmi türevleri sürekli fonksiyonlar kümesi
$C_0^k(\Omega)$	Ω üzerinde tanımlı, kendisi ve k 'nci mertebeye kadar tüm kısmi türevleri sürekli ve kompakt destekli fonksiyonlar kümesi
$\ u\ _X$	$(X, \ \cdot\)$ normlu uzayında $u \in X$ elemanının normu
$(x, y)_X$	$(X, (\cdot, \cdot)_X)$ iç çarpım uzayında x ve y elemanlarının iç çarpımı
$B(X, Y)$	X uzayından Y uzayına tanımlı tüm sınırlı lineer operatörler
$B(X)$	X uzayı üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer operatörler
M^\perp	$M \subset H$ altuzayının ortogonal tamlayanı
T^*	T operatörünün eşleniği
$L_p(\Omega)$	Ω üzerinde p -integrallenebilir fonksiyonlar kümesi
$L_2(\Omega)$	Ω üzerinde karesi integrallenebilir fonksiyonlar kümesi
$D^\alpha u(x)$	$u(x)$ fonksiyonunun α -türevi
$W^{m,p}(\Omega)$	Ω üzerinde tanımlı, m 'nci mertebeden Sobolev uzayı
$W_0^{m,p}(\Omega)$	$C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $\ \cdot\ _{W^{m,p}(\Omega)}$ normuna göre tamamlanışı
$H^m(\Omega)$	$W^{m,2}(\Omega)$
$H_0^m(\Omega)$	$C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $\ \cdot\ _{H^m(\Omega)}$ normuna göre tamamlanışı
$H_\pi^1(\Omega)$	$C_\pi^3(\Omega)$ uzayının $\ \cdot\ _\pi^{1,x}$ normuna göre tamamlanışı

$H_{\pi,0}^1(\Omega)$	$C_{\pi,0}^3(\Omega)$ uzayının $\ \cdot\ _{\pi}^{1,x}$ normuna göre tamamlanışı
$H_{\pi}^2(\Omega)$	$C_{\pi}^3(\Omega)$ uzayının $\ \cdot\ _{H^2(\Omega)}$ normuna göre tamamlanışı
$H^{-1}(\Omega)$	$H_0^1(\Omega)$ uzayının duali
Δ	Lagrange operatörü
∇	Gradient vektörü
∇_x	x_1, x_2 deęişkenlerine göre gradient vektörü
$\operatorname{div}(\bar{V})$	\bar{V} vektörünün divergensi
$\ \cdot\ _e$	Euclid normu
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Euclid iç çarpımı



1. GİRİŞ

Ters problem kavramı, uygulamalı matematiğin, mühendislik bilimlerinde ve temel bilimlerde oldukça önemli uygulamaları olan bir araştırma alanıdır. En genel biçimiyle bir ters problemi,

$$\int_{\Omega} [\text{giriş verileri}] \times [\text{sistem}] d\Omega = [\text{çıkış verileri}] \quad (1.1)$$

biçiminde ifade edebiliriz [18]. Bu ifade için doğrudan tanımlanan problem, giriş verileri ve sistemin matematiksel tanımı verildiğinde, çıkış verilerinin hesaplanmasıdır. Ters problem ise çıkış verilerinden yola çıkılarak sistemin belirlenmesi ya da giriş verilerinin hesaplanması prensibine dayanır.

İntegral geometriyle ilişkili ters problemlerin Dirichlet-türü problemlere indirgenmesi çalışmaları ilk olarak Lavrent'ev ve Anikonov tarafından gerçekleştirilmiştir [25]. Bu çalışmaları Amirov'un [2], [3], [4], [5], [6], [7] ve Anikonov'un [8], [9], [10] teorik çalışmaları; uygulama alanlarında Kireitov'un çalışmaları [22], [23]; ve genel olarak matematiksel fiziğin ters problemleri konusunda Romanov'un çalışmaları [35] ile diğer çalışmalar takip etmiştir.

Tez çalışmamızda, $\ell^+(x, \varphi)$ pozitif yönde φ açılı bir doğru olmak üzere,

$$U(x, \varphi) = \int_{\ell^+(x, \varphi)} \lambda(x, \varphi) dS \quad (1.2)$$

doğrusal integrali ile tanımlanan ters problemden indirgenen,

$$\Omega = \{(x, \varphi): x \in D \subset \mathbb{R}^2, \varphi \in (0, 2\pi), \partial D \in C^3\} \quad (1.3)$$

bölgesinde,

$$L U(x, \varphi) \equiv \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x_1} U(x, \varphi) + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x_2} U(x, \varphi) = \lambda(x, \varphi) \quad (1.4)$$

denklemini ve $\Gamma = \partial D \times (0, 2\pi)$ olmak üzere,

$$U(x, \varphi)|_{\Gamma} = u_0(x, \varphi) \quad (1.5)$$

ve her $\eta \in H^1_{\pi,0}(\Omega)$ fonksiyonu için,

$$\left(\lambda(x, \varphi), \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \ell} \eta(x, \varphi) \right)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad (1.6)$$

koşulları ile tanımlanan problem ele alınmıştır. Üçüncü bölümde problem belirli (determined) biçime getirildiğinde Dirichlet-türü olarak nitelenmesinin sebebi, sınır koşulunun Ω bölgesinin sınırının tamamında değil sadece silindirik bölgenin yanal yüzeyinde (Γ üzerinde) tanımlanmış olmasıdır.

(1.4)-(1.5) probleminin (1.6) koşulu ile uygun uzaylardaki çözümünün varlığı ve tekliği Amirov tarafından gösterilmiştir [6], [7].

Bu çalışmada, $u_0(x, \varphi)$ fonksiyonu bilindiğinde, (1.4)-(1.5) probleminin yaklaşık (u, λ) çözüm ikilisini, Galerkin yaklaşımı yöntemini kullanarak analitik olarak hesaplayacak sembolik algoritmalar geliştirilmiştir. Bu amaçla,

- i. Problemin sınır koşulu, çözüm fonksiyonu sınırda sıfır olacak şekilde düzenlenmiştir.
- ii. Belirli olmayan (undetermined) problem, belirli (determined) olarak ifade edilmiştir.

Tez çalışması üç ana bölüm ve eklerden oluşmuştur.

Birinci bölüm giriştir.

İkinci bölümde tez kapsamında kullanılan temel tanım, teorem ve gösterimler verilmiştir.

Üçüncü bölümde ele alınan problem ayrıntılı olarak tanıtılmış, varlık ve teklik teoremleri verilmiştir. Problemin çözüm aşamaları açıklanarak yaklaşık (u, λ) çözüm ikilisini hesaplayacak sembolik algoritmalar verilmiştir. Ana algoritmanın her N için tek bir u_N yaklaşık çözüm fonksiyonu hesaplayacağı ispatlanmış ve geliştirilen algoritmaların Maple V bilgisayar cebiri sistemindeki kodlamaları ve hesaplanan bazı çözümler verilmiştir.

Ekler bölümünde ise, sembolik hesaplama kuramı ve bilgisayar cebiri sistemleri (CAS) konuları genel olarak ele alınmış, problemin fiziksel modeli açıklanmış ve bir uygulama alanı olan transmisyon bilgisayarlı tomografi hakkında genel bilgi verilmiştir. Ayrıca, geliştirilen Maple kodu çalıştırılarak hesaplanan bir tam çözümün uygulamasına yönelik görüntü simulasyonunu gerçekleştiren bir Pascal programı ve çıktısı verilmiştir.

2. TEMEL TANIM, TEOREM VE GÖSTERİMLER

Bu bölümde, tez çalışması kapsamında kullanılan bazı temel kavramlar ve gösterimler verilmiştir.

\mathbb{R}^n , n-boyutlu Euclidean uzayı olmak üzere,

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\} \quad (2.1)$$

x merkezli, r yarıçaplı açık yuvar gösterir.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $\bar{\Omega}$, Ω bölgesine tüm limit noktalarının da katıldığı kapanışı gösterir. $\partial\Omega$, Ω bölgesinin içermediği limit noktalarının kümesidir ve Ω bölgesinin sınırı olarak adlandırılır. Diğer bir deyişle $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$ olur. $\partial\Omega$ kümesi genellikle (n-1) boyutlu bir hiperyüzey gösterir.

$C(\Omega)$, Ω bölgesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar kümesini gösterir. $C^1(\Omega)$, kendisi ve birinci mertebeden tüm kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar kümesini gösterir. Genel olarak $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $C^k(\Omega)$, kendisi ve k'nci mertebeye kadar tüm kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlar kümesini gösterir.

Tanım 2.1: \mathbb{R}^n üzerinde tanımlı, sürekli bir $f(x)$ fonksiyonunun desteği, $f(x)$ fonksiyonunun sıfırdan farklı olduğu noktaların kümesinin kapanışdır. Yani,

$$\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}} \quad (2.2)$$

olur.

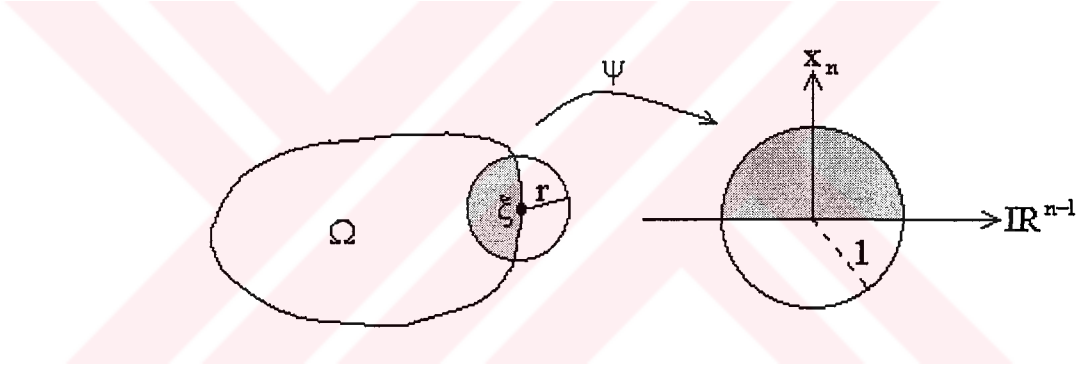
Tanım 2.2: Eğer $\text{supp } f$ sınırlı ise f fonksiyonunun kompakt desteği vardır denir. Bu türdeki fonksiyonların kümesi $C_0(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3: Eğer C^k sınıfından bir dönüşüm terslenebilir ise ve tersi de C^k sınıfından oluyorsa bu dönüşüme bir C^k -diffeomorfizma adı verilir [28].

Tanım 2.4: Ω sınırlı bir bölge olsun. Eğer $\xi \in \partial\Omega$ için $\psi: B_r(\xi) \rightarrow B_1(0)$ olan bir C^k -diffeomorfizma ve bir $B_r(\xi)$ yuvarı,

- i. $\psi(\partial\Omega \cap B_r(\xi)) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$
- ii. $\psi(\Omega \cap B_r(\xi)) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$

koşulları sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa Ω bölgesinin sınırı C^k sınıfındandır denir ve bu durum $\partial\Omega \in C^k$ biçiminde gösterilir (Şekil 2.1) [28].



Şekil 2.1. $\psi: B_r(\xi) \rightarrow B_1(0)$ C^k -diffeomorfizması

2.1. Hilbert Uzayları

Tanım 2.1.1: $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ bir Hilbert uzayı ve $x, y \in H$ olsun. Eğer $(x, y)_H = 0$ oluyorsa x ve y ortogonaldir denir. $M \subset H$ altuzayının ortogonal tamlayını,

$$M^\perp = \{x \in H \mid (x, y)_H = 0, \forall y \in M\} \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.2: $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ bir Hilbert uzayı ve $\{x_i\}_{i \in I}$ bu uzayın ikişer ikişer ortogonal elemanlarından oluşan bir ailesi olsun. Eğer her $i \in I$ için $\|x_i\|_H = 1$ oluyorsa $\{x_i\}_{i \in I}$ ailesine ortonormal denir.

Tanım 2.1.3: $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ bir Hilbert uzayı ve $\{x_i\}_{i \in I}$, H uzayının bir ailesi olsun. Eğer her $x \in H$ ve her $i \in I$ için $(x, x_i)_H = 0 \Rightarrow x = 0$ oluyorsa $\{x_i\}_{i \in I}$ ailesine tamdır denir.

Tanım 2.1.4: $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ bir Hilbert uzayı ve $(x_n) \in H$ bir dizi olsun. Eğer her $f \in H$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, f)_H = (x, f)_H$ oluyorsa (x_n) dizisi x elemanına zayıf yakınsıyor denir.

Tanım 2.1.5: $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ bir Hilbert uzayı, M bu uzayın kapalı bir altuzayı olsun. Bu durumda, her $x \in H$ için,

$$x = P(x) + Q(x), P(x) \in M, Q(x) \in M^\perp \quad (2.4)$$

$$\|x\|_H^2 = \|P(x)\|_H^2 + \|Q(x)\|_H^2 \quad (2.5)$$

olan $P, Q \in B(H)$ operatörleri vardır [34]. Ayrıca,

$$P(H) = M, Q(H) = M^\perp, P^2 = P, Q^2 = Q, \|P\|_H \leq 1, \|Q\|_H \leq 1 \quad (2.6)$$

olur. Burada P operatörüne bir ortogonal projeksiyon adı verilir.

Tanım 2.1.6: $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ bir Hilbert uzayı, $T: D(T) \subset H \rightarrow H$ bir lineer operatör olsun. Eğer $D(T)$ altkümesi H içinde yoğun ise T operatörü bir yoğun tanımlı lineer operatör adını alır.

Tanım 2.1.7: $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ bir Hilbert uzayı, T , H üzerinde yoğun tanımlı bir lineer operatör olsun. T operatörünün Hilbert uzayı eşleniği $T^*: D(T^*) \rightarrow H$, aşağıdaki gibi tanımlanır:

$y \in D(T^*)$ olması için gerekli ve yeterli koşul, her $x \in D(T)$ için,

$$(T(x), y)_H = (x, z)_H \quad (2.7)$$

olacak şekilde bir $z \in H$ elemanının bulunmasıdır. $D(T)$ altkümesi H içinde yoğun olduğundan yukarıdaki eşitlik sağlanacak şekilde bir tek $z \in H$ elemanı bulunabilir. Dolayısıyla $T^*(y)=z$ olarak tanımlanabilir. Sonuç olarak aşağıdaki eşitlik elde edilir [34]:

$$(T(x), y)_H = (x, T^*(y))_H \quad (2.8)$$

Tanım 2.1.8: $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ bir Hilbert uzayı, T , H üzerinde yoğun tanımlı bir lineer operatör olsun. Eğer $T=T^*$ oluyorsa T operatörüne kendine-eşlenik (self-adjoint) denir.

Lemma 2.1.1: [Cauchy-Schwartz] $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ bir Hilbert uzayı olsun. Bu durumda, her $x, y \in H$ için,

$$|(x, y)_H| \leq \|x\|_H \|y\|_H \quad (2.9)$$

eşitsizliği sağlanır [21].

2.2. L_p Uzayları ve Zayıf Türev

Tanım 2.2.1: u , Ω üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $1 \leq p < \infty$ için, $\|\cdot\|_e$ Euclid normunu göstermek üzere,

$$\int_{\Omega} (\|u\|_e)^p dx < \infty \quad (2.10)$$

oluyorsa bu durumda u fonksiyonuna Ω üzerinde p -integrallenebilir denir.

Tanım 2.2.2: Ω üzerinde p -integrallenebilir fonksiyonlar kümesi $L_p(\Omega)$ ile gösterilir ve bu küme,

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} (\|u\|_e)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.11)$$

normu ile bir Banach uzayı olur.

Lemma 2.2.1: $u, v \in L_2(\Omega)$ olmak üzere $L_2(\Omega)$ uzayı,

$$(u, v)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} u \cdot v dx \quad (2.12)$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır [21].

Lemma 2.2.2: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olmak üzere,

$$C(\bar{\Omega}) \subset L_2(\Omega) \subset L_1(\Omega) \quad (2.13)$$

olur [21].

Tanım 2.2.3: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$, bir multi-indis, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ bu multi-indisin uzunluğu olmak üzere, bir $u(x)$ fonksiyonunun α -türevi,

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (2.14)$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ ise $D^\alpha u(x) = 0$ olur.

Örnek 2.2.1: $u(x_1, x_2)$ fonksiyonunun $\alpha=(2,3)$ multi-indisi için α -türevi,

$$D^\alpha u(x_1, x_2) = \frac{\partial^5 u(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2^3}$$

olur.

Tanım 2.2.4: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık ve sınırlı bir bölge ve u , Ω üzerinde tanımlı gerçel değerli bir fonksiyon olsun. u fonksiyonunun $i=1,2,\dots,n$ için $\frac{\partial}{\partial x_i} u(x)$ türevleri mevcut olsun.

Bu durumda herhangi bir $\eta \in C_0^1(\Omega)$ fonksiyonu için, bu fonksiyon Ω bölgesinin sınırında ve dışında sıfıra eşit olacağından,

$$\int_{\Omega} \eta(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \eta(x) dx \quad (2.15)$$

eşitliği sağlanır.

Eğer $u \in L_1(\Omega)$ ise (2.15) eşitliğinin sol tarafı anlamsız olacaktır. Ancak her $\eta \in C_0^1(\Omega)$ fonksiyonu için,

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \eta(x) dx = - \int_{\Omega} v_i(x) \eta(x) dx \quad (2.16)$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir $v_i \in L_1(\Omega)$ fonksiyonu bulunabiliyorsa, bu durumda v_i fonksiyonuna u fonksiyonunun x_i değişkenine göre zayıf türevi denir.

Örnek 2.2.2: Bir boyutlu duruma örnek olarak, $u, v \in L_1(0,1)$, $\eta \in C_0^1(0,1)$ fonksiyonlarını ele alalım. v fonksiyonu u fonksiyonunun $(0,1)$ aralığındaki zayıf türevi olsun. Gerçektende,

$$\begin{aligned} \int_0^1 v(x)\eta(x)dx &= \int_0^1 u'(x)\eta(x)dx = u(x)\eta(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 u(x)\eta'(x)dx \\ &= - \int_0^1 u(x)\eta'(x)dx \end{aligned}$$

olur.

Zayıf türev kavramı bölgeye bağlı bir kavramdır. Bir bölgede klasik anlamda türevi bulunmayan bir fonksiyonun aynı bölgede zayıf türevi bulunabilir. Bu duruma örnek aşağıda verilmiştir:

Örnek 2.2.3: $u(x)=|x|$ fonksiyonunun $(-1,1)$ aralığında klasik anlamda türevi yoktur. Ancak herhangi bir $\eta \in C_0^1(0,1)$ fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x| \eta'(x)dx &= \int_{-1}^0 -x \eta'(x)dx + \int_0^1 x \eta'(x)dx \\ &= -x \eta(x)\Big|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \eta(x)dx + x \eta(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \eta(x)dx \\ &= - \int_{-1}^1 \text{sgn}(x)\eta(x)dx \end{aligned}$$

olacağından, u fonksiyonunun $(-1,1)$ aralığındaki zayıf türevi $\text{sgn}(x)$ fonksiyonu olarak bulunmuş olur.

Kısmi integrasyon ardışık olarak uygulanırsa, (2.16) ile verilen zayıf türev tanımı, bir $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ multi-indisi için aşağıdaki gibi genellenebilir.

Tanım 2.2.5: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in L_1(\Omega)$ ve α bir multi-indis olsun. Eğer her $\eta \in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ için,

$$\int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} \eta(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x) \eta(x) dx \quad (2.17)$$

olacak şekilde bir $v \in L_1(\Omega)$ fonksiyonu varsa, v fonksiyonuna u fonksiyonunun Ω bölgesi üzerindeki α -zayıf türevi denir.

Lemma 2.2.3: Bir $u \in L_1(\Omega)$ fonksiyonunun α -zayıf türevi varsa tektir [28].

Lemma 2.2.4: Bir $u \in L_1(\Omega)$ fonksiyonunun klasik anlamda türevi varsa zayıf türevi de vardır ve bu türevler aynıdır [28].

Bir u fonksiyonunun bir bölgede hemen hemen her yerde türevi varsa o bölge üzerinde zayıf türevi varolmayabilir. Bu duruma örnek aşağıda verilmiştir:

Örnek 2.2.4: $u(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-2, 0) \\ 1, & x \in (0, 2] \end{cases}$ fonksiyonunun $\{0\}$ kümesi dışında türevi

vardır ve bu küme sıfır ölçümlüdür. Dolayısıyla u fonksiyonunun $[-2, 2]$ aralığı üzerinde hemen hemen her yerde türevi vardır. Ancak aynı aralıkta zayıf türevi yoktur.

Tanım 2.2.6: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $C^m(\Omega)$ üzerinde aşağıdaki normu tanımlayalım:

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.18)$$

Şimdi $u \in L_p(\Omega)$ olduğunu varsayalım ve $C^m(\overline{\Omega})$ 'dan (2.18) normuna göre Cauchy olan bir $\{u_k\}$ dizisi alalım. Bu durumda,

1. $\|u_k - u_j\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u_k - u_j\|_{m,p}$ olduğundan, $\{u_k\}$ dizisi $L_p(\Omega)$ -normuna göre de Cauchy olacaktır.
2. $L_p(\Omega)$ tam olduğundan, $\{u_k\}$ dizisi bir $u \in L_p(\Omega)$ fonksiyonuna yakınsayacaktır.

Bu şekilde seçilen $\{u_k\}$ dizisine u fonksiyonunun belirleyici dizisi denir.

Artık $L_1(\Omega)$ için yapılan zayıf türev tanımı daha genel olarak $L_p(\Omega)$ için de verilebilir:

Tanım 2.2.7: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\{u_k\}$ dizisi $u \in L_p(\Omega)$ fonksiyonunun belirleyici dizisi ve α bir multi-indis olsun. Bu durumda,

$$D^\alpha u = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial^{|\alpha|} u_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (2.19)$$

fonksiyonuna u fonksiyonunun α -zayıf türevi adı verilir.

2.3. Sobolev Uzayları

Tanım 2.3.1: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve α bir multi-indis olmak üzere $W^{m,p}(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$ için $D^\alpha u$ zayıf türevleri de $L_p(\Omega)$ 'da olan $u \in L_p(\Omega)$ fonksiyonlar sınıfını gösterir. Diğer bir deyişle,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) : D^\alpha u \in L_p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\} \quad (2.20)$$

olur. Bu fonksiyon sınıfına,

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.21)$$

normu ile, m 'nci mertebeden Sobolev uzayı adı verilir.

Teorem 2.3.1: Ω sınırlı bir bölge, $1 \leq p < \infty$ için $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı olsun. Bu durumda,

- i. $W^{m,p}(\Omega)$, (2.21) normu ile bir Banach uzayıdır.
- ii. $W^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.22)$$

normu ile ayrılabilir bir Banach uzayıdır

- iii. $W^{m,p}(\Omega)$, (2.21) normuna göre $C^m(\Omega)$ uzayının tamamlanışıdır.
- iv. $W^{m,p}(\Omega)$, (2.21) normuna göre $C^\infty(\bar{\Omega})$ uzayının tamamlanışıdır.
- v. $W_0^{m,p}(\Omega)$, (2.21) normuna göre $C_0^\infty(\bar{\Omega})$ uzayının tamamlanışıdır [33].

$p=2$ için $W^{m,2}(\Omega)$ uzayı özel olarak $H^m(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzay üzerinde norm, (2.21) normundan indirgenmiş olarak,

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.23)$$

biçiminde verilir.

Teorem 2.3.2: Ω sınırlı bir bölge, $u, v \in H^m(\Omega)$ olsun. Bu durumda,

- i. $H^m(\Omega)$ uzayı,

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v \, dx \quad (2.24)$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayı olur.

- ii. $H^1(\Omega)$ uzayı,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

normu ile ayrılabilir bir Hilbert uzayıdır.

- iii. $H^m(\Omega)$ uzayı, (2.23) normuna göre $C^\infty(\overline{\Omega})$ uzayının tamamlanışıdır.
- iv. $H_0^m(\Omega)$ uzayı, (2.23) normuna göre $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ uzayının tamamlanışıdır
- v. $r \geq m$ ise $H^r(\Omega) \subseteq H^m(\Omega)$ olur [33].

Tanım 2.3.2: X ve Y iki normlu uzay ve $X \subset Y$ olsun. Eğer yakınsak bir (x_n) dizisi Y uzayının normuna göre de yakınsak oluyorsa X uzayı Y uzayına gömülüyor denir.

Tanım 2.3.3: X ve Y iki normlu uzay ve $X \subset Y$ olsun. Eğer her $(x_n) \subset X$ sınırlı dizisi Y uzayının normuna göre yakınsak oluyorsa X uzayı Y uzayına kompakt gömülüyor denir.

Teorem 2.3.3: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $m \geq 0$ bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdaki gömülmeler geçerlidir [26]:

- i. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L_{p^*}(\Omega)$, $1/p^* = 1/p - 1/n$, $1 < n/p$,
- ii. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$, $q \in [1, \infty)$, $m = n/p$,
- iii. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_0^{m-n/p}(\Omega)$, $n/p < m < n/p + 1$,
- iv. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_0^\alpha(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$, $m = n/p + 1$,
- v. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_0^1(\Omega)$, $m > n/p + 1$.

Teorem 2.3.4: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $m \geq 0$ bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu durumda aşağıdaki kompakt gömülmeler geçerlidir [26]:

- i. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$, $1 \leq q < p^*$, $1/p^* = 1/p - 1/n$, $m < n/p$,
- ii. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$, $q \in [1, \infty)$, $m = n/p$,
- iii. $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$, $1 \leq q < p^*$, $1/p^* = 1/p - 1/n$, $m < n/p$,

$$\text{iv. } W^{m,p}(\Omega) \stackrel{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega}), \quad m > n/p.$$

2.4. Sınır-Değer Problemleri

Tanım 2.4.1: Bir kısmi diferensiyel denklem, çok değişkenli bir u fonksiyonu ile onun kısmi türevlerini içeren denklemdir. $u=u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ olmak üzere, en genel şekliyle bir kısmi diferensiyel denklemi,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots) = 0 \quad (2.26)$$

biçiminde ifade edebiliriz.

Tanım 2.4.2: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f_0, f_1, \dots, f_m : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar,

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (0, 0, \dots, 0), \\ \alpha_1 &= (\alpha_1^1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_1^n), \\ &\vdots \\ \alpha_m &= (\alpha_m^1, \alpha_m^2, \dots, \alpha_m^n), \end{aligned}$$

multi-indsler olmak üzere,

$$D^{\alpha_i} u(x) = f_i(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad i=0, 1, \dots, m \quad (2.27)$$

eşitliklerine u fonksiyonu için sınır koşulu adı verilir.

Tanım 2.4.3: Genel olarak (2.26) ile verilen bir kısmi diferensiyel denklemin, (2.27) sınır koşulunu sağlayan $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ çözüm fonksiyonunun bulunması problemine bir sınır-değer problemi adı verilir.

Tanım 2.4.4: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega \quad (2.28)$$

eşitliğine u fonksiyonu için Dirichlet koşulu adı verilir. Bu koşul kısaca,

$$u|_{\partial\Omega} = f(x) \quad (2.29)$$

biçiminde gösterilir. Dolayısıyla Dirichlet koşulu, aranan fonksiyonun türevleri değil doğrudan kendisi üzerinde konmuş özel bir sınır koşuludur.

Tanım 2.4.5: (2.26) ile verilen bir kısmi diferensiyel denklemin, (2.29) Dirichlet koşulunu sağlayan $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ çözüm fonksiyonunun bulunması problemine bir Dirichlet problemi adı verilir.

Tanım 2.4.6: Bir sınır-değer probleminin sınır verilerinde gerçekleşecek küçük değişiklikler çözüm fonksiyonunda yine küçük değişikliklere yol açıyorsa bu sınır-değer probleminin çözümü verilere sürekli bağımlıdır denir.

Tanım 2.4.7: (2.26)-(2.27) sınır-değer problemini göz önüne alalım. Eğer,

- i. Çözüm var ve tek,
- ii. Çözüm verilere sürekli bağımlı,

koşulları sağlanıyorsa (2.26)-(2.27) sınır-değer problemine iyi-konulmuş (well-posed), aksi takdirde kötü-konulmuş (ill-posed) problem adı verilir.

2.4.1. Sınır-değer problemlerinin zayıf çözümleri

Bu kesimde, divergens formda lineer eliptik denklem için tanımlanmış bir sınır-değer problemi ele alınarak sınır-değer problemlerinin zayıf çözümleri hakkında genel bir bilgi verilmesi amaçlanmıştır.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde,

$$Lu \equiv \text{div}(k(x)\nabla u(x)) - a(x)u(x) = f(x) \quad (2.30)$$

eliptik denklemini göz önüne alalım. Burada u ve f , Ω bölgesi üzerinde tanımlı gerçel-değerli fonksiyonlar, $a \in C(\overline{\Omega})$, $k \in C^1(\overline{\Omega})$ ve her $x \in \Omega$ için $k(x) > 0$ dir.

$\varphi(x): \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ verilen bir fonksiyon olmak üzere, u fonksiyonu için konulacak,

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x) \quad (2.31)$$

koşulu ile (2.30)-(2.31) Dirichlet problemi elde edilir.

Tanım 2.4.1.1: (2.30) denklemini (2.31) koşulu ile sağlayan

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$$

fonksiyonuna (2.30)-(2.31) sınır-değer probleminin klasik çözümü adı verilir.

Tanım 2.4.1.2: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$ ve $i=1,2,\dots,n$ için $A_i(x) \in C(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ olmak üzere, $A(x) = (A_1(x), A_2(x), \dots, A_n(x))$, Ω bölgesinde tanımlı bir vektör olsun. Bu durumda,

$$\text{div}A(x) = \frac{\partial A_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial A_n(x)}{\partial x_n} \quad (2.32)$$

fonksiyonu Ω bölgesi üzerinde sürekli ve integrallenebilir olacağından [29], Ostrogradskii formülü olarak bilinen,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} A(x) dx = \int_{\partial\Omega} A(x) n(x) dS \quad (2.33)$$

integral eşitliği sağlanır. Burada n , Ω bölgesinin birim dış normal vektörüdür.

Ω üzerinde tanımlı u ve v fonksiyonlarının durumuna göre, (2.33) eşitliği kullanılarak elde edilen bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir [29]:

1. $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $v \in C^1(\bar{\Omega})$ ve Δu fonksiyonu Ω bölgesi üzerinde integrallenebilir olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(v\nabla u) &= \operatorname{div}(vu_{x_1}, \dots, vu_{x_n}) \\ &= v_{x_1}u_{x_1} + vu_{x_1x_1} + v_{x_2}u_{x_2} + vu_{x_2x_2} + \dots + v_{x_n}u_{x_n} + vu_{x_nx_n} \\ &= v\operatorname{div}(\nabla u) + \nabla u \nabla v \end{aligned}$$

olduğundan,

$$v\operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{div}(v\nabla u) - \nabla u \nabla v \quad (2.34)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanını Ω üzerinden integrallersek, (2.33) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v\operatorname{div}(\nabla u) dx &= \int_{\Omega} v\Delta u dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v\nabla u) dx - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \\ &= \int_{\partial\Omega} v\nabla u \cdot n dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \end{aligned}$$

elde edilir. $\nabla u \cdot n|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}$ olduğundan [29], sonuç olarak,

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \quad (2.35)$$

eşitliği elde edilmiş olur.

2. $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ve $\Delta u, \Delta v$ fonksiyonları Ω bölgesi üzerinde integrallenebilir olsunlar. Bu durumda, (2.35) eşitliğinde u ve v fonksiyonlarının yerleri değiştirilebileceğinden,

$$\int_{\Omega} u \Delta v dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx \quad (2.36)$$

elde edilir. (2.36) eşitliği (2.35) eşitliğinden taraf tarafa çıkartılırsa, Green formülü olarak bilinen,

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \quad (2.37)$$

eşitliği elde edilmiş olur.

Şimdi (2.30)-(2.31) sınır-değer problemini göz önüne alalım. (2.30) denkleminin her iki yanını keyfi bir $v \in C_0^1(\Omega)$ fonksiyonu ile çarpılıp, Ω üzerinden integrali alınırsa, (2.34) ve (2.35) eşitlikleri de kullanılarak,

$$\int_{\Omega} (v \cdot \text{div}(k \nabla u) - a u v) dx = \int_{\Omega} f v dx$$

$$\int_{\Omega} (v \cdot k \cdot \Delta u + v \nabla k \nabla u - a u v) dx = \int_{\Omega} f v dx$$

$$\int_{\partial\Omega} (v \cdot k \frac{\partial u}{\partial n}) dS - \int_{\Omega} (\nabla u \nabla (vk) - v \nabla k \nabla u + auv) dx = \int_{\Omega} f v dx$$

$$- \int_{\Omega} (\nabla u (k \nabla v + v \nabla k) - v \nabla k \nabla u + auv) dx = \int_{\Omega} f v dx$$

$$\int_{\Omega} (k \nabla u \nabla v + auv) dx = - \int_{\Omega} f v dx \quad (2.38)$$

integral eşitliği elde edilir.

Eğer $u \in H^1(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$ ise (2.38) eşitliği keyfi bir $v \in C_0^1(\Omega)$ fonksiyonu için sağlanacağı gibi her $v \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu için de sağlanacaktır. Dolayısıyla (2.30)-(2.31) sınır-değer probleminin klasik çözümü aynı zamanda her $v \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu için (2.38) integral eşitliğini de sağlayacaktır. Ancak bunun tersi her zaman doğru olmayabilir.

Tanım 2.4.1.3: Eğer $u \in H^1(\Omega)$ fonksiyonu her $v \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu için (2.38) integral eşitliğini ve (2.31) sınır koşulunu sağlıyorsa (2.30)-(2.31) sınır-değer probleminin zayıf (genelleştirilmiş) çözümü adını alır.

2.4.2. Zayıf çözümlerin varlığı ve tekliği

Bu kesimde sınır-değer problemlerinin zayıf çözümlerinin varlık ve teklik sorunları ele alınmış, bu konuyla ilgili temel teorem ve metotlar verilmiştir.

Teorem 2.4.2.1: [Poincaré Eşitsizliği] $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olsun. Bu durumda her $u \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu için,

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|_e^2 dx \quad (2.39)$$

olacak biçimde bir $C=C(\Omega)$ sabiti vardır [28].

Teorem 2.4.2.2: [Riesz Gösterim] H bir Hilbert uzayı, F, H üzerinde sınırlı ve lineer bir fonksiyonel olsun. Bu durumda her $v \in H$ için,

$$F(v) = (u, v)_H \quad (2.40)$$

olacak şekilde bir tek $u \in H$ elemanı vardır. Ayrıca $\|F\|_H = \|u\|_H$ olur [21].

Örnek 2.4.2.1: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir küme, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ verilen bir fonksiyon olmak üzere,

$$\Delta u = f \quad (2.41)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.42)$$

Sınır-değer problemini göz önüne alalım.

Bu problemin klasik çözümü, (2.41) denklemini (2.42) koşulu ile sağlayan $u \in C^2(\overline{\Omega})$ fonksiyonudur.

Şimdi (2.41) denkleminin her iki yanını keyfi bir $v \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu ile çarpalım ve Ω üzerinden integralleyelim:

$$\int_{\Omega} \Delta u \cdot v dx = \int_{\Omega} f \cdot v dx \quad (2.43)$$

v fonksiyonunun $\partial\Omega$ üzerinde sıfır olduğunu göz önüne alarak Green eşitliğini kullanırsak,

$$-\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad (2.44)$$

elde edilir.

Bu eşitliğe (2.41)-(2.42) probleminin zayıf formulasyonu adı verilir. Bu eşitliği her $v \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu için sağlayan $u \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu ise (2.41)-(2.42) probleminin zayıf çözümü olacaktır.

Teorem 2.4.2.3: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir küme, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ verilen bir fonksiyon olmak üzere, (2.41)-(2.42) sınır-değer probleminin, (2.44) eşitliğini her $v \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu için sağlayan bir tek $u \in H_0^1(\Omega)$ zayıf çözümü vardır [28].

İspat: $H_0^1(\Omega)$ uzayını,

$$(u, v)_1 = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad (2.45)$$

iç çarpımı ve

$$\|u\|_1 = [(u, u)_1]^{1/2} \quad (2.46)$$

normu ile göz önüne alalım. Bu durumda,

$$F(v) = - \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \quad (2.47)$$

alırsak, sırasıyla Cauchy-Schwartz ve Poincaré eşitsizliklerini kullanarak,

$$|F(v)| = \left| \int_{\Omega} f \cdot v \, dx \right| \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq C^{1/2} \|v\|_1 \quad (2.48)$$

elde edilir. Dolayısıyla F lineer ve sınırlı bir fonksiyonel olacağından Teorem 2.4.2.2 gereğince,

$$F(v) = (u, v)_1 \quad (2.49)$$

eşitliğini, her $v \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu için bir tek $u \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu sağlar. ■

Teorem 2.4.2.4: [Lax-Milgram] H bir Hilbert uzayı, $a: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif ve sınırlı bilineer form, F sınırlı ve lineer fonksiyonel olsun. Bu durumda her $v \in H$ için,

$$F(v) = a(u, v) \quad (2.50)$$

olacak şekilde bir tek $u \in H$ elemanı vardır [28].

Örnek 2.4.2.2: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir küme, $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) ve $c \in C(\overline{\Omega})$ fonksiyonları,

$$\text{Her } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n \text{ için } \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \varepsilon |\xi|^2 \quad (\varepsilon > 0) \quad (2.51)$$

$$\text{Her } x \in \Omega \text{ için } c(x) \leq 0 \quad (2.52)$$

koşullarını sağlasın.

$$L = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x) \quad (2.53)$$

olmak üzere,

$$Lu=f \quad (2.54)$$

$$u|_{\partial\Omega}=0 \quad (2.55)$$

sınır-değer problemini göz önüne alalım.

(2.54) denkleminin her iki yanını keyfi bir $v \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu ile çarpıp Ω üzerinden integrallersek, verilen problemin zayıf formülasyonu olan,

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \quad (2.56)$$

elde edilir.

Teorem 2.4.2.5: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı ve açık bir küme, $f \in L_2(\Omega)$ olsun. Bu durumda (2.54)-(2.55) probleminin her $v \in H_0^1(\Omega)$ fonksiyonu için (2.56) eşitliğini sağlayan bir tek $u \in H_0^1(\Omega)$ zayıf çözümü vardır [21].

İspat : (2.56) eşitliğini,

$$B_L(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} c(x)u(x)v(x)dx, \quad (2.57)$$

$$F(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \quad (2.58)$$

olmak üzere,

$$F(v)=B_L(u, v) \quad (2.59)$$

biçiminde yazabiliriz. $B_L(u,v)$ simetrik olmadığından bir iç çarpım tanımlamaz, dolayısıyla zayıf çözümün varlığını doğrudan Teorem 2.4.2.2'nin bir sonucu olarak söyleyemeyiz.

Ancak $B_L(u,v)$ pozitif ve sınırlı bir bilinear form olduğundan, Teorem 2.4.2.4 gereğince (2.54)-(2.55) probleminin bir tek $u \in H_0^1(\Omega)$ zayıf çözümü vardır. ■

Buraya kadar ele alınan problemlerin zayıf çözümlerinin varlıkları ve teklikleri, hipotezler sağlandığından doğrudan bilinen teoremlerin sonucu olarak gösterilebilmiştir. Ancak problemlerin bu temel teoremlerin hipotezlerinden bir ya da daha fazlasını sağlamadığı durumlar da olabilir. Bu gibi durumlarda, problemin zayıf çözümünün varlığını ve tekliğini bazı özel metotlar kullanarak gösterebiliriz. Bunların en önemlilerinden birisi olan ve bizim problemimizin çözümünde de kullanılan Galerkin metodu, bir sonraki kesimde özetlenmiştir.

2.4.3. Galerkin metodu

$V = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ olmak üzere, $u = (u_1, u_2) \in V$ için aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

$$-\Delta u_2 + u_1 = f_1 \in L_2(\Omega) \quad (2.60)$$

$$\Delta u_1 + u_2 = f_2 \in L_2(\Omega) \quad (2.61)$$

$$u_1|_{\partial\Omega} = 0, u_2|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.62)$$

Problemin zayıf formulasyonunu, önceki örneklerdekine benzer işlemleri uygulayarak,

$$\int_{\Omega} (\nabla u_2 \cdot \nabla v_1 - \nabla u_1 \cdot \nabla v_2 + u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2) dx = \int_{\Omega} (f_1 \cdot v_1 + f_2 \cdot v_2) dx \quad (2.63)$$

biçiminde elde edebiliriz. Bu formulasyona karşılık gelen bilineer form,

$$B_L(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u_2 \cdot \nabla v_1 - \nabla u_1 \cdot \nabla v_2 + u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2) dx \quad (2.64)$$

olur.

$B_L(u, v)$ bilineer formu sınırlıdır. Ancak,

$$B_L(u, u) \leq \|u\|_V$$

olacağından pozitif (V-eliptik) değildir. Dolayısıyla zayıf çözümün varlığını, doğrudan Lax-Milgram teoremini kullanarak gösteremeyiz. Bu durumda, aşağıda açıklanan Galerkin metodu kullanılır:

$H_0^1(\Omega)$ bir ayrılabilir Hilbert uzayı, dolayısıyla V 'de ayrılabilir Hilbert uzayı olacağından, V 'nin sayılabilir ortonormal bir $\{e_1, e_2, \dots, e_m, \dots\}$ tabanı vardır. Her $m > 0$ için V_m kümesini,

$$V_m = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_m\} \quad (2.65)$$

biçiminde tanımlayalım.

Bu küme içinden, (2.63) eşitliğini sağlayan, yani her $v \in V_m$ için,

$$B_L(u_m, v) = (f, v) \quad (2.66)$$

olan,

$$u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i e_i \quad (2.67)$$

biçiminde bir yaklaşık çözüm arıyoruz. Bu çözümün bulunması ve problemin zayıf çözümü ile ilişkilendirilmesi, aşağıda adım adım açıklanmıştır [21]:

1. Adım : Yaklaşık çözümün varlığı gösterilir.

V_m sonlu boyutlu bir uzaydır, dolayısıyla üzerinde tanımlanan bütün normlar denktir. Bu durumda V_m uzayını $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ topolojisi ile ele alacak olursak,

$$B_L(u_m, u_m) \geq \|u_m\|_{(L_2(\Omega))^2}^2$$

olacağından, $B_L(\cdot, \cdot)$ bilineer formu pozitif, yani V_m -eliptik olacaktır. Lax-Milgram teoreminin hipotezleri sağlanacağından, 1. adım tamamlanmış olur.

2. Adım : $\{u_m\}$ yaklaşık çözümler dizisinin V uzayında m 'den bağımsız olarak sınırlı olduğu gösterilir.

$u_m = (u_m^{(1)}, u_m^{(2)})$ olmak üzere $v = (u_m^{(2)}, -u_m^{(1)})$ seçip bunları (2.66) eşitliğinde yerine koyup, sırasıyla Cauchy-Schwartz ve Poincaré eşitsizlikleri kullanılarak bu adım gösterilebilir.

3. Adım : Bir önceki adımın bir sonucu olarak, $\{u_m\}$ dizisinin öyle bir $\{u_{m_k}\}$ alt dizisi vardır ki, bu dizi bir $u \in V$ elemanına zayıf yakınsar. Bu zayıf limitin problemin zayıf çözümüne yakınsadığı gösterilir.

V bir Hilbert uzayı olduğundan, $\{u_m\}$ dizisinin $u_{m_k} \rightharpoonup u \in V$ olan bir $\{u_{m_k}\}$ alt dizisi vardır. $v \in V$ alalım. Bu durumda bir $\{v_m\} \in V_m$ dizisi bulunabilir,

öyle ki $v_m \rightarrow v$ (kuvvetli) olur. Diğer yandan (2.66) eşitliği her $v \in V$ için sağlanacağından,

$$B_L(u_m, v_m) = (f, v_m)$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikte $m \rightarrow \infty$ için limite geçilirse, istenen elde edilmiş olur.

4. Adım : Bulunan zayıf çözümün tekliği gösterilir.

$u^{(1)}$ ve $u^{(2)}$ nin iki zayıf çözüm olduğu varsayılırsa, bilinen eşitlikler kullanılarak olmayana erilebilir.

Böylece (2.60)-(2.61)-(2.62) probleminin zayıf çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiş olur. ■

2.4.4. Zayıf çözümlerin regülaritesi (düzgünlüğü)

Kısmi diferensiyel denklemlerde zayıf çözümlerin düzgünlüğü ve klasik çözüm olarak denklemleri sağlamaları, probleme ve bölgeye bağlı bir konu olarak araştırılmaktadır. Bu çalışmalar genel olarak $n=1$ durumunda (bir boyutlu durumda) ve $n>1$ durumunda ayrı ayrı yürütülmektedir [29]. $n=1$ durumunda sonuçların elde edilmesi daha kolayken, genellikle bu durumda elde edilen sonuçların $n>1$ durumunda geçerliliği kalmamaktadır.

Bulunan zayıf çözümün düzgünlüğünün incelenmesinde ilk adım, bu çözümün daha yüksek mertebeli bir Sobolev uzayı tarafından içerilip içerilmediğinin araştırılmasıdır. Eğer bu sağlanırsa çözümün bu Sobolev uzayı ile aynı mertebeli düzgün fonksiyonlar sınıfından olup olmadığı araştırılır. Bütün bu çalışmaları kapsayan teoreme, problemin zayıf çözümü için regülarite teoremi adı verilir.

Regülerite teoreminin kanıtlanması en az iki faktöre bağlıdır: Verilerin düzgünlüğü ve bölgenin düzgünlüğü.

Özel olarak bir boyutlu durumda sınır-değer problemlerinin $H^1(\alpha,\beta)$ içinde kalan çözümleri $[\alpha,\beta]$ üzerinde sürekli fonksiyonlardır [29]. Dolayısıyla sınırda tanımlı bir fonksiyonun, $H^1(\alpha,\beta)$ uzayında tanımlı bir fonksiyon kullanılarak tüm bölgeye genişletilmesi problemi bu durumda daha kolay çözülmektedir.



3. PROBLEMİN YAKLAŞIK ANALİTİK ÇÖZÜMÜNÜN HESAPLANMASI

Bu bölümde, tez çalışmasında ele aldığımız Dirichlet-türü problemin ifade edilmesine yönelik temel tanım ve gösterimler ile problemin çözümünün varlık ve tekliliğine ilişkin teoremler ve ispatları verilmiştir. Ayrıca, problemin yaklaşık analitik çözümünün bulunmasına yönelik olarak geliştirilen sembolik algoritmalar ile bu algoritmaların Maple bilgisayar cebiri sisteminde simülasyonunu gerçekleştiren kodlar da bu bölümde yer almaktadır.

$\Omega = \{(x, \varphi) \mid x \in D \subset \mathbb{R}^2, \varphi \in (0, 2\pi), \partial D \in C^3\}$ ve $\Gamma = \partial D \times (0, 2\pi)$ olmak üzere, $C_\pi^3(\Omega)$ ve $C_{\pi,0}^3(\Omega)$ kümeleri,

$$C_\pi^3(\Omega) = \{U(x, \varphi) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid U \in C^3; U, \varphi' \text{ ye göre } 2\pi\text{-periyodik}\} \quad (3.1)$$

$$C_{\pi,0}^3(\Omega) = \{\psi \mid \psi \in C_\pi^3(\Omega), \psi|_{\Gamma} = 0\} \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır.

$C_\pi^3(\Omega)$ üzerinde iç çarpım ve norm,

$$(U, V)_\pi^{1,x} = \sum_{i=1}^2 (U_{x_i}, V_{x_i})_{L_2(\Omega)} \quad (3.3)$$

$$\|U\|_\pi^{1,x} = [(U, U)_\pi^{1,x}]^{1/2} \quad (3.4)$$

biçiminde tanımlanır.

$C_\pi^3(\Omega)$ ve $C_{\pi,0}^3(\Omega)$ uzaylarının (3.4) normuna göre tamamlanışları sırasıyla $H_\pi^1(\Omega)$ ve $H_{\pi,0}^1(\Omega)$ ile gösterilir.

$\{w_i\}_{i=1}^{\infty} \subset C_{\pi,0}^3(\Omega)$ tam ve $L_2(\Omega)$ uzayında ortogonal olan bir fonksiyon ailesi ve M_N , $\{w_i\}_{i=1}^N$ elemanlarının lineer germe kümesi olmak üzere, P_N ile, $L_2(\Omega)$ uzayından M_N üzerine bir ortogonal projektör gösterilir.

$$\frac{\partial}{\partial \ell} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x_1} - \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (3.5)$$

ve

$$L = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (3.6)$$

olmak üzere A operatörü,

$$A = \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi} L \quad (3.7)$$

biçimine tanımlanır.

$\Gamma'(A)$ ile, her $y \in L_2(\Omega)$ fonksiyonu için, A^* , A operatörünün eşleniği olmak üzere,

$$\forall \eta \in C_{\pi,0}^3(\Omega) \text{ için } (U, A^* \eta)_{L_2(\Omega)} = (y, \eta)_{L_2(\Omega)} \quad (3.8)$$

koşulunu sağlayan $U \in H_{\pi}^1(\Omega)$ fonksiyonlarının kümesi gösterilir. Burada $y=AU$ olarak tanımlandığından, $\Gamma'(A)$ kümesinin seçimi ile, A operatörü altındaki görüntüsü $L_2(\Omega)$ kümesine düşen $U \in L_2(\Omega)$ fonksiyonları ifade edilmektedir.

$\Gamma(A) \subset \Gamma'(A)$ altkümesi, her $U \in \Gamma(A)$ fonksiyonu için aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\{U_k\} \subset C_{\pi,0}^3(\Omega)$ dizisi varolacak şekilde tanımlanır [7]:

$$i. U_k \rightarrow U \text{ (} L_2(\Omega) \text{'da zayıf)} \quad (3.9)$$

$$ii. (AU_k, U_k)_{L_2(\Omega)} \rightarrow (AU, U)_{L_2(\Omega)} \quad (3.10)$$

3.1. Problemin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

(1.4)-(1.5) problemin bir yaklaşık çözümünü elde edebilmek için öncelikle tam çözümün varlığı gösterilmelidir. Varlık ispatı için Galerkin yaklaşım yöntemi kullanılmıştır [6], [7]. Bu yöntem, aynı zamanda bize yaklaşık analitik çözümün genel formunu da verir.

Teorem 3.1.1: $\{f_n\} \in L_2(\Omega)$ ve

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n|^2 d\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\inf_{n \leq k} \int_{\Omega} |f_k|^2 d\Omega \right] < \infty$$

olmak üzere $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ olsun. Bu durumda $f \in L_2(\Omega)$ ve,

$$\int_{\Omega} |f|^2 d\Omega \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n|^2 d\Omega$$

olur [32].

Aşağıdaki teorem, uygun uzaylarda (1.4)-(1.5) probleminin çözümünün tekliğini garantilemektedir.

Teorem 3.1.2: (1.4)-(1.5) problemi (1.6) koşulu ile $\lambda \in H^{-1}(\Omega)$, $U \in \Gamma(A)$ olacak şekilde bir tek (U, λ) çözüm ikilisine sahip olabilir [7].

İspat : (1.4)-(1.5) probleminin homojen biçimi olan,

$$LU(x, \varphi) = \lambda(x, \varphi) \quad (3.11)$$

$$U(x, \varphi)|_{\Gamma} = 0 \quad (3.12)$$

probleminin $\Gamma(A) \times H^1(\Omega)$ uzayında sadece sıfır çözümünün bulunduğunu göstermek teoremin ispatı için yeterli olacaktır. (3.11) denkleminin her iki yanına $\frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi}$ operatörü uygulanırsa,

$$\frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi} LU(x, \varphi) = \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi} \lambda(x, \varphi) \quad (3.13)$$

elde edilir. (1.6) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} (U, A^* \eta)_{L_2(\Omega)} &= (U, L^* \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi} \eta)_{L_2(\Omega)} = (LU, \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi} \eta)_{L_2(\Omega)} \\ &= (\lambda, \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi} \eta)_{L_2(\Omega)} = 0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

bulunur. Diğer yandan (3.8) eşitliğinden, $\forall \eta \in C_{\pi, 0}^3(\Omega)$ için,

$$(U, A^* \eta)_{L_2(\Omega)} = (AU, \eta)_{L_2(\Omega)} = (\frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi} \lambda, \eta)_{L_2(\Omega)} \quad (3.15)$$

olduğu bilinmektedir. Bu durumda, (3.14) ve (3.15) eşitliklerinden,

$$\frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi} \lambda = 0 \quad (3.16)$$

olur. O halde (3.13) denklemini,

$$AU(x, \varphi) = 0 \quad (3.17)$$

biçiminde yazabiliriz.

$U \in \Gamma(A)$ olduğundan, $\Gamma(A)$ kümesinin tanımı ve (3.17) eşitliği gereğince,

$$i. U_k \rightarrow U \text{ (} L_2(\Omega) \text{'da zayıf)} \quad (3.18)$$

$$ii. (AU_k, U_k)_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (3.19)$$

koşulları sağlanacak biçimde bir $\{U_k\} \subset C_{\pi,0}^3(\Omega)$ dizisi bulabiliriz.

$U_k \in C_{\pi,0}^3(\Omega)$ olduğundan, $U_k|_{\Gamma} = 0$ ve U_k fonksiyonunun φ değişkenine göre 2π periyodik olduğu bilgileri kullanılarak,

$$-(AU_k, U_k)_{L_2(\Omega)} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla_x U_k\|_e^2 d\Omega \quad (3.20)$$

olduğu görülebilir. Poincaré eşitsizliğinden,

$$\|U_k\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Omega} \|\nabla_x U_k\|_e^2 d\Omega \quad (3.21)$$

olur. Bu durumda, sırasıyla Teorem 3.1.1, (3.21) eşitsizliği, (3.20) eşitliği ve (3.19) yakınsaması kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|U\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|U_k\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|\nabla_x U_k\|_e^2 d\Omega \\ &= -2C \liminf_{k \rightarrow \infty} (AU_k, U_k)_{L_2(\Omega)} = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

elde edilir.

O halde, $\|U\|_{L_2(\Omega)} = 0 \Rightarrow U = 0$ olur ki, bu da ispatı tamamlar. ■

(1.4)-(1.5) probleminin $U \in \Gamma(A)$, $\lambda \in L_2(\Omega)$ olan bir çözüm ikilisinin varlığı, problem, çözüm fonksiyonu Γ üzerinde sıfır değerini alacak şekilde düzenlenerek ispatlanmıştır [2], [6], [7]. Bunun için, aşağıdaki genişleme teoremi kullanılmıştır.

Teorem 3.1.3: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ve $k \geq 1$ için $\partial\Omega \in C^k$ olsun. Bu durumda herhangi bir $f \in C^k(\partial\Omega)$ fonksiyonunun $C^k(\overline{\Omega})$ içinde kalan bir $F(x)$ genişlemesi vardır [29].

$C_\pi^3(\Gamma)$, $C_\pi^3(\Omega)$ uzayına ait U fonksiyonlarının Γ üzerinde aldıkları değerlere karşılık gelen iz (*trace*) fonksiyonların kümesini gösterebiliriz ve $u_0 \in C_\pi^3(\Gamma)$ olsun. Bu durumda, Teorem 3.1.3 gereğince $\exists W \in C_\pi^3(\overline{\Omega})$ fonksiyonu vardır, öyle ki Γ üzerinde $W(x, \varphi) = U(x, \varphi)$ olur.

O halde,

$$u(x, \varphi) = U(x, \varphi) - W(x, \varphi) \quad (3.23)$$

biçiminde bir u fonksiyonu tanımlanırsa, $f(x, \varphi) = -LW(x, \varphi)$ olmak üzere,

$$LU(x, \varphi) = Lu(x, \varphi) + LW(x, \varphi) = \lambda(x)$$

$$Lu(x, \varphi) = \lambda(x) + f(x, \varphi),$$

ve

$$u(x, \varphi)|_\Gamma = U(x, \varphi)|_\Gamma - W(x, \varphi)|_\Gamma = u_0(x, \varphi) - u_0(x, \varphi) = 0$$

elde edilir. Böylece problemimiz,

$$Lu(x, \varphi) = \lambda(x) + f(x, \varphi) \quad (3.24)$$

$$u(x, \varphi)|_{\Gamma} = 0 \quad (3.25)$$

biçiminde çözüm fonksiyonu Γ üzerinde sifira eşit olacak şekilde düzenlenmiş olur.

Aşağıdaki teorem, Teorem 3.1.2 ile aynı koşullar altında (3.24)-(3.25) probleminin çözümünün varlığını ve bu çözümün verilere sürekli bağımlılığını ifade etmektedir.

Teorem 3.1.3: $H_{\pi}^2(\Omega)$, $C_{\pi}^3(\Omega)$ kümesinin $\|\cdot\|_{H^2(\Omega)}$ normuna göre tamamlanışı olmak üzere, (1.6) koşulu ile (3.24)-(3.25) probleminin, $f \in H_{\pi}^2(\Omega)$ fonksiyonu verildiğinde, $u \in \Gamma(A)$, $\lambda \in L_2(\Omega)$ olan bir (u, λ) çözüm çifti vardır ve

$$\|u\|_{\pi}^{1,x} + \|\lambda\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\|f_{\varphi}\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)}) \quad (3.26)$$

olacak şekilde bir $C=C(D)>0$ sabiti bulunabilir [7].

İspat : (3.24) denkleminin her iki yanına $\frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi}$ operatörünü uygulayıp (3.16)

eşitliğini kullanırsak, $F(x, \varphi) = \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi} f(x, \varphi)$ olmak üzere (3.24)-(3.25) problemi,

$$A u(x, \varphi) = F(x, \varphi) \quad (3.27)$$

$$u(x, \varphi)|_{\Gamma} = 0 \quad (3.28)$$

şeklinde belirli formda bir üçüncü mertebeden kısmi diferensiyel denklem için tanımlanmış Dirichlet-türü probleme indirgenmiş olur.

(3.27)-(3.28) probleminin zayıf çözümü için N' nci basamaktan bir yaklaşık çözüm,

$$u_N = \sum_{i=1}^N \alpha_i w_i(x, \varphi) \quad (3.29)$$

biçiminde tanımlanır. Bu çözüm, aşağıdaki problemin çözümü olarak aranmaktadır:

$$(Au_N, w_j)_{L_2(\Omega)} = (F, w_j)_{L_2(\Omega)}, j=1,2,\dots,N \quad (3.30)$$

ya da

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i (Aw_i, w_j)_{L_2(\Omega)} = (F, w_j)_{L_2(\Omega)}, j=1,2,\dots,N \quad (3.31)$$

biçiminde tanımlanan lineer denklem sisteminden $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ vektörünün hesaplanması.

Şimdi, (3.30) sisteminde her bir j 'nci denklemi $-2\alpha_j$ ile çarpıp $j=1,2,\dots,N$ için toplama geçerseniz,

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi} (Lu_N), u_N\right)_{L_2(\Omega)} = -(Au_N, u_N)_{L_2(\Omega)} = 2(F, u_N)_{L_2(\Omega)} \quad (3.32)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafını ele alalım:

$$\left| 2(F, u_N)_{L_2(\Omega)} \right| = 2 \left| \int_{\Omega} F u_N d\Omega \right| = 2 \left| \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \ell} f_{\varphi} u_N d\Omega \right|$$

olur. Son ifadeye $\frac{\partial}{\partial \ell}$ 'ye göre kısmi integrasyon uygularsak,

$$= 2 \left| u_N f_{\varphi} \Big|_{\partial\Omega} - \int_{\Omega} f_{\varphi} \frac{\partial}{\partial \ell} u_N d\Omega \right|$$

$$= 2 \left| \left(f_\varphi, \frac{\partial}{\partial \ell} u_N \right)_{L_2(\Omega)} \right| \leq 2 \|f_\varphi\|_{L_2(\Omega)} \cdot \left\| \frac{\partial}{\partial \ell} u_N \right\|_{L_2(\Omega)} \leq 2 \|f_\varphi\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\nabla_x u_N\|_{L_2(\Omega)}$$

olur. O halde (3.32) eşitliğinin sol tarafını sınırlamış olduk. Yani,

$$-(Au_N, u_N)_{L_2(\Omega)} \leq 2 \|f_\varphi\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\nabla_x u_N\|_{L_2(\Omega)} \quad (3.33)$$

olur. (3.20) ve (3.33) den,

$$\frac{1}{2} \|\nabla_x u_N\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 2 \|f_\varphi\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|\nabla_x u_N\|_{L_2(\Omega)} \quad (3.34)$$

olur. Buradan, genelleştirilmiş Cauchy eşitsizliğini [32] kullanırsak, $\beta > 4$ için,

$$\frac{1}{4} \|\nabla_x u_N\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \beta \|f_\varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\beta} \|\nabla_x u_N\|_{L_2(\Omega)}^2$$

ve $K = \left(\frac{4\beta^2}{\beta - 4} \right)^{\frac{1}{2}}$ olmak üzere,

$$\|\nabla_x u_N\|_{L_2(\Omega)} = \|u_N\|_{\pi}^{1,x} \leq K \|f_\varphi\|_{L_2(\Omega)} \quad (3.35)$$

olur.

O halde $\{u_N\}$ fonksiyonlar dizisi $H_{\pi,0}^1(\Omega)$ da sınırlı, dolayısıyla zayıf kompakttır [33]. O halde bu dizinin bir $u \in H_{\pi,0}^1(\Omega)$ fonksiyonuna $H_{\pi,0}^1(\Omega)$ içinde zayıf yakınsayan bir alt dizisi vardır. Genelliği bozmadan bu diziyi de $\{u_N\}$ ile gösterelim. (3.35) eşitsizliği ve Teorem 3.1.1 kullanılarak,

$$\|u\|_{\pi}^{1,x} \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \|u_N\|_{\pi}^{1,x} \leq K \|f_{\varphi}\|_{L_2(\Omega)} \quad (3.36)$$

elde edilir. Böylece u fonksiyonunu da sınırlamış olduk. $u \in H_{\pi,0}^1(\Omega)$ olduğundan, $H_{\pi,0}^1(\Omega)$ uzayının tanımı gereğince $u|_{\Gamma} = 0$ olur.

Öte yandan yine (3.35) eşitsizliğinden, $\{u_N\}$ dizisinin $\{u_{N_{x_1}}\}$ ve $\{u_{N_{x_2}}\}$ alt dizileri bulunabilir; öyle ki $L_2(\Omega)$ 'da $N \rightarrow \infty$ iken $u_{N_{x_1}} \xrightarrow{\text{zayıf}} u_{x_1}$ ve $u_{N_{x_2}} \xrightarrow{\text{zayıf}} u_{x_2}$ olur.

Şimdi (3.30) eşitliğinde w_j 'nin uygun türevlerine geçerek, $u_N|_{\Gamma} = 0$, u_N ve tüm kısmi türevleri 2π periyodik olduğundan,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi} Lu_N, w_j\right)_{L_2(\Omega)} &= (F, w_j)_{L_2(\Omega)}, \quad j=1,2,\dots,N \\ \left(Lu_N, \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \ell} w_j\right)_{L_2(\Omega)} &= \left(f, \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \ell} w_j\right)_{L_2(\Omega)}, \quad j=1,2,\dots,N \\ \left(Lu_N - f, \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \ell} w_j\right)_{L_2(\Omega)} &= 0, \quad N \geq j \end{aligned} \quad (3.37)$$

elde edilir. (3.37) eşitliğinde $N \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse, w_j , $j=1,2,\dots$ fonksiyonlarının lineer germe kümesi $H_{\pi,0}^1(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan,

$$\left(Lu - f, \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \ell} \eta\right)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad \forall \eta \in H_{\pi,0}^1(\Omega) \quad (3.38)$$

bulunur.

(3.38) eşitliğinde $\lambda = Lu - f$ alınırsa;

i) $Lu \in L_2(\Omega)$, $f \in H_\pi^2(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ olduğundan $Lu - f \in L_2(\Omega)$ ve eşitlik her $\eta \in H_{\pi,0}^1(\Omega)$ için sağlandığından, (3.24)-(3.25) problemine bir $(u, \lambda) \in H_{\pi,0}^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$ çözüm ikilisi bulunmuş olur.

ii) λ fonksiyonu üzerindeki (1.6) koşulu sağlanmış olur.

$$\text{iii) } \|\lambda\|_{L_2(\Omega)} = \|Lu - f\|_{L_2(\Omega)} \leq \|Lu\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_\pi^{1,x} + \|f\|_{L_2(\Omega)}$$

ve (3.36) eşitsizliğinden, $C=2K$ olmak üzere,

$$\|\lambda\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_\pi^{1,x} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)}$$

elde edilir. Böylece (3.26) eşitsizliği de gösterilmiş olur.

Şimdi $u \in \Gamma(A)$ olduğu gösterilecektir. Bunun için ilk olarak $u \in \Gamma'(A)$ olduğu gösterilmelidir.

Herhangi bir $\eta \in C_{\pi,0}^3(\Omega)$ fonksiyonu için,

$$\begin{aligned} (u, A^* \eta)_{L_2(\Omega)} &= (u, L^* \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \ell} \eta)_{L_2(\Omega)} = (Lu, \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \ell} \eta)_{L_2(\Omega)} \\ &= (f, \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial \ell} \eta)_{L_2(\Omega)} = (F, \eta)_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

ve $Au = F = \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi} f \in L_2(\Omega)$ olduğundan, $u \in \Gamma'(A)$ olur.

$\{u_N\} \rightarrow u$ zayıf yakınsaması daha önce gösterildiğinden, $u \in \Gamma(A)$ olduğunu göstermek için $(Au_N, u_N)_{L_2(\Omega)} \rightarrow (Au, u)_{L_2(\Omega)}$ yakınsamasını göstermek yeterli olacaktır.

(3.30) eşitliğini, P_N projektörünün tanımı gereğince,

$$P_N A u_N = P_N F \quad (3.39)$$

biçiminde yazabiliriz. P_N bir ortogonal projektör olduğundan, $P_N F$, $L_2(\Omega)$ 'da F 'ye kuvvetli yakınsar. Diğer yandan $\{u_N\} \rightarrow u$ (zayıf) olduğunu biliyoruz. Bir dizi zayıf yakınsak, diğeri kuvvetli yakınsak ise bu dizilerin iç çarpımı yakınsak olacağından,

$$\left. \begin{array}{l} P_N A u_N \text{ kuvvetli } F = A u \\ u_N \text{ zayıf } u \end{array} \right\} \Rightarrow (P_N A u_N, u_N)_{L_2(\Omega)} \rightarrow (A u, u)_{L_2(\Omega)} \quad (3.40)$$

olur. $P_N u_N = u_N$ ve P_N kendine-eşlenik olduğundan,

$$(A u_N, u_N)_{L_2(\Omega)} = (A u_N, P_N u_N)_{L_2(\Omega)} = (P_N A u_N, u_N)_{L_2(\Omega)} \quad (3.41)$$

bulunur. (3.40) ve (3.41) den,

$$(A u_N, u_N)_{L_2(\Omega)} \rightarrow (A u, u)_{L_2(\Omega)}$$

elde edilir. ■

3.2. Algoritmalar

Bu bölümde, u_N yaklaşık çözümünü ve bu çözüme karşılık gelen $\lambda(x, \varphi)$ fonksiyonunu analitik olarak hesaplayacak sembolik algoritmalar verilecektir. Öncelikle, hesaplamalar sonlu algoritmalar kullanılarak bilgisayar ortamında gerçekleştirileceğinden, uygun bölge ve fonksiyonların seçilmesi gerekmektedir:

$$D = \{x : |x| < 1\} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned} w_{m,k,n}^1 &= \left\{ x_1^k x_2^n \sin(m\varphi) \right\}_{m,k,n=0}^N \\ w_{m,k,n}^2 &= \left\{ x_1^k x_2^n \cos(m\varphi) \right\}_{m,k,n=0}^N \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 - x_1^2 - x_2^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (3.44)$$

olmak üzere, yaklaşık çözüm,

$$u_N = \sum_{k,n,m=0}^N (a_{m,k,n} w_{m,k,n}^1 + b_{m,k,n} w_{m,k,n}^2) \eta(x) \quad (3.45)$$

olarak yazılabilir. Burada D bölgesinin birim daire olarak seçilmesi bize hesaplamalarda kolaylık sağlayacağı gibi $\partial D \in C^3$ olan herhangi bir bölgeyi en küçük daire içine alabileceğimizden uygun olacaktır. $\eta(x)$ fonksiyonu ise çözümü birim daire içine kısıtlamaktadır.

(3.45)'deki bilinmeyen $a_{m,k,n}$ ve $b_{m,k,n}$, $m,k,n=0,1,\dots,N$ katsayıları aşağıdaki denklem sistemlerinin çözüm kümeleri olarak hesaplanır:

$$\begin{aligned} \sum_{m,k,n=0}^N (A(a_{m,k,n} w_{m,k,n}^1 + b_{m,k,n} w_{m,k,n}^2) \eta(x), w_{m',k',n'}^1)_{L_2(\Omega)} \\ = (F, w_{m',k',n'}^1)_{L_2(\Omega)}, \quad m',k',n'=0\dots N. \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m,k,n=0}^N (A(a_{m,k,n} w_{m,k,n}^1 + b_{m,k,n} w_{m,k,n}^2) \eta(x), w_{m',k',n'}^2)_{L_2(\Omega)} \\ = (F, w_{m',k',n'}^2)_{L_2(\Omega)}, \quad m',k',n'=0\dots N. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Yaklaşık çözümün hesaplanmasında üç algoritma kullanılmıştır. Bunlardan ilk ikisi olan SolTarafl1 ve SolTarafl2, sırasıyla (3.46) ve (3.47) denklemlerinin sol taraflarını hesaplayan yardımcı algoritmalarıdır.

Son algoritma olan *Çözüm* ise, Algoritma 3.2.1 ve Algoritma 3.2.2'yi kullanan genel algoritmadır. Bu algoritma, öncelikle (3.46) ve (3.47) sistemlerini oluşturup, bu sistemleri $a_{m,k,n}$, $b_{m,k,n}$ katsayılarına göre çözmekte, daha sonra bu katsayıları (3.45) eşitliğinde kullanarak problemin yaklaşık u_N çözümü analitik olarak hesaplamaktadır.

Yaklaşık u_N çözümünün analitik olarak nitelenmesinin sebebi, bu çözümün elde edilmesi için hesaplanması gereken $a_{m,k,n}$, $b_{m,k,n}$ katsayılarının, nümerik metotlarla yaklaşık olarak değil, sembolik metotlarla tam olarak elde edilmesidir.

Algoritma 3.2.1: SolTarafl

Girdi : $m', k', n', N, \eta(x)$

Çıktı : Sol1

Değer Atama

Sol1:=0

$w_{m,k,n}^1 := x_1^k x_2^n \sin(m\varphi)$

$w_{m,k,n}^2 := x_1^k x_2^n \cos(m\varphi)$

Ana Döngü

For m:=0 to N do

For k:=0 to N do

For n:=0 to N do

Sol1:=Sol1+(A($a_{m,k,n} w_{m,k,n}^1 + b_{m,k,n} w_{m,k,n}^2$) $\eta(x)$, $W_{m',k',n'}^1$) $_{L_2(\Omega)}$)

End n

End k

End m

Algoritma Sonu

Algoritma 3.2.2: SolTarafl

Girdi : $m', k', n', N, \eta(x)$

Çıktı : Sol2

Değer Atama

Sol2:=0

$$w_{m,k,n}^1 := x_1^k x_2^n \sin(m\varphi)$$

$$w_{m,k,n}^2 := x_1^k x_2^n \cos(m\varphi)$$

Ana Döngü

For m:=0 to N do

For k:=0 to N do

For n:=0 to N do

$$\text{Sol2} := \text{Sol2} + (A(a_{m,k,n} w_{m,k,n}^1 + b_{m,k,n} w_{m,k,n}^2) \eta(x), w_{m',k',n'}^2)_{L_2(\Omega)}$$

End n

End k

End m

Algoritma Sonu

Algoritma 3.2.3: Çözüm

Girdi : N, f(x, φ)

Çıktı : u_N

Değer Atama

Sys := { }

$$F := \frac{\partial^2}{\partial \ell \partial \varphi} f(x, \varphi)$$

$u_N := 0$

$$\eta(x) := 1 - x_1^2 - x_2^2$$

$$w_{m,k,n}^1 := x_1^k x_2^n \sin(m\varphi)$$

$$w_{m,k,n}^2 := x_1^k x_2^n \cos(m\varphi)$$

Döngü

For $m' := 0$ to N do

For $k' := 0$ to N do

```

For n':=0 to N do
  Sys := Sys ∪ { SolTaraf1(m',k',n',N,η(x)) = (F,w1m',k',n')L2(Ω) ,
                SolTaraf2(m',k',n',N,η(x)) = (F,w2m',k',n')L2(Ω) }
End n'
End k'
End m'
Solve(Sys, { am,k,n, bm,k,n })

```

Ana Döngü

```

For m:=0 to N do
  For k:=0 to N do
    For n:=0 to N do
      uN := uN + (amk,n w1m,k,n + bmk,n w2m,k,n)η(x)
    End n
  End k
End m

```

$$\lambda := \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x_1} u_N + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x_2} u_N - f(x, \varphi)$$

Algoritma Sonu

Teorem 3.2.1: Algoritma 3.2.3, $\{a_{m,k,n}, b_{m,k,n}\}_{m,k,n=0}^N$ çözüm kümesini tek olarak hesaplar.

İspat: Algoritmanın ilk döngüsünde $a_{m,k,n}, b_{m,k,n}, m,k,n=0..N$, katsayılarına göre denklem kümesinin inşası, (3.46) ve (3.47) bağıntıları kullanılarak gerçekleştirilmektedir. Dolayısıyla teoremin doğruluğunu göstermek için, $m',k',n'=0..N$ olmak üzere,

$$\sum_{m,k,n=0}^N (A(a_{m,k,n} w_{m,k,n}^1 + b_{m,k,n} w_{m,k,n}^2) \eta(x), w_{m',k',n'}^1)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad (3.48)$$

$$\sum_{m,k,n=0}^N (A(a_{m,k,n} w_{m,k,n}^1 + b_{m,k,n} w_{m,k,n}^2) \eta(x), w_{m',k',n'}^2)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad (3.49)$$

homojen sistemlerinin sadece sıfır çözümünün var olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $\{\bar{a}_{m,k,n}, \bar{b}_{m,k,n}\}_{m,k,n=0}^N$, (3.48)-(3.49) sistemlerinin sıfırdan farklı başka bir çözümü olsun. Bu sistemlerde $a_{m,k,n}$ ve $b_{m,k,n}$ katsayılarını $\bar{a}_{m,k,n}$ ve $\bar{b}_{m,k,n}$ ile değiştirelim. Eğer (3.48) sisteminde (m',k',n') indisli her denklemi $\bar{a}_{m',k',n'}$ ile ve (3.49) sisteminde (m',k',n') indisli her denklemi $\bar{b}_{m',k',n'}$ ile çarparsak,

$$\sum_{m,k,n=0}^N (A(\bar{a}_{m,k,n} w_{m,k,n}^1 + \bar{b}_{m,k,n} w_{m,k,n}^2) \eta(x), \bar{a}_{m',k',n'} w_{m',k',n'}^1)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad (3.50)$$

$$\sum_{m,k,n=0}^N (A(\bar{a}_{m,k,n} w_{m,k,n}^1 + \bar{b}_{m,k,n} w_{m,k,n}^2) \eta(x), \bar{b}_{m',k',n'} w_{m',k',n'}^2)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad (3.51)$$

$$m',k',n' = 0 \dots N.$$

sistemlerini elde ederiz. Bu denklemleri (m',k',n') indislerine göre taraf tarafa toplarsak,

$$\bar{u}_N = \sum_{k,n,m=0}^N (\bar{a}_{m,k,n} w_{m,k,n}^1 + \bar{b}_{m,k,n} w_{m,k,n}^2) \eta(x) \quad (3.52)$$

olmak üzere,

$$(A\bar{u}_N, \bar{u}_N)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad (3.53)$$

elde edilir.

Şimdi (3.53) eşitliğinin sol tarafında bazı hesaplamalar gerçekleştirelim:

$$\begin{aligned}
A\bar{u}_N \cdot \bar{u}_N &= \bar{u}_N \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) \\
&\quad - \bar{u}_N \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\bar{u}_N \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) \right] \\
&\quad - \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\bar{u}_N \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\bar{u}_N \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) \right] \\
&\quad - \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \cos(\varphi) \left(\cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \sin(\varphi) \frac{\partial^2 \bar{u}_N}{\partial x_1 \partial \varphi} - \sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} + \cos(\varphi) \frac{\partial^2 \bar{u}_N}{\partial x_2 \partial \varphi} \right) \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\bar{u}_N \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) \right] \\
&\quad - \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \sin(\varphi) \left(\cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \sin(\varphi) \frac{\partial^2 \bar{u}_N}{\partial x_1 \partial \varphi} - \sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} + \cos(\varphi) \frac{\partial^2 \bar{u}_N}{\partial x_2 \partial \varphi} \right)
\end{aligned}$$

Bu aşamada,

$$1. \ a) \quad \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \bar{u}_N}{\partial x_1 \partial \varphi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \right)^2$$

$$b) \quad h(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \bar{u}_N}{\partial x_1 \partial \varphi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \varphi} h(\varphi)$$

$$\begin{aligned}
2. \text{ a) } \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \bar{u}_N}{\partial x_2 \partial \varphi} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi} \right) \\
\text{ b) } h(x_1, x_2, \varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \bar{u}_N}{\partial x_2 \partial \varphi} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(h(x_1, x_2, \varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} h(x_1, x_2, \varphi) \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi} h(x_1, x_2, \varphi) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x_2} h(x_1, x_2, \varphi) - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \varphi} h(x_1, x_2, \varphi) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial x_1} h(x_1, x_2, \varphi)
\end{aligned}$$

diferensiyel eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
A \bar{u}_N \cdot \bar{u}_N &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\bar{u}_N \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) \right] \\
&\quad - \cos^2(\varphi) \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin(\varphi) \cos(\varphi) \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \right)^2 \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \cos^2(\varphi) \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \sin^2(\varphi) \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \right)^2 \\
&\quad + \sin(\varphi) \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\cos^2(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\cos^2(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\cos^2(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi} \right] \\
&\quad - \sin(\varphi) \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\bar{u}_N \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin(\varphi) \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sin^2(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi} \right] \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\sin^2(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin^2(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right] \\
& - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\sin^2(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi} \right] - \sin(\varphi) \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} - \sin^2(\varphi) \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right)^2 \\
& + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin(\varphi) \cos(\varphi) \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \cos^2(\varphi) \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sin^2(\varphi) \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right)^2 \\
& = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\bar{u}_N \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) \right] \\
& - \frac{1}{2} \cos^2(\varphi) \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \sin^2(\varphi) \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1}{2} \cos^2(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi} \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[-\frac{1}{2} \cos^2(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi} \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[-\frac{1}{2} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \cos^2(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right] \\
& - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\bar{u}_N \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) \right] \\
& - \frac{1}{2} \cos^2(\varphi) \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right)^2 - \frac{1}{2} \sin^2(\varphi) \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1}{2} \sin^2(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi} \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[-\frac{1}{2} \sin^2(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi} \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{2} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sin^2(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right]
\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak,

$$A\bar{u}_N \cdot \bar{u}_N = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \text{div}(\bar{V}(x, \varphi)) \quad (3.54)$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} \bar{V}(x, \varphi) &= \left(\bar{u}_N \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi}, \right. \\ &\bar{u}_N \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi}, \\ &\left. - \frac{1}{2} \sin(\varphi) \cos(\varphi) \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} (\sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi)) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

olarak tanımlanır. O halde, \bar{N} , Ω bölgesinin dış birim normali olmak üzere,

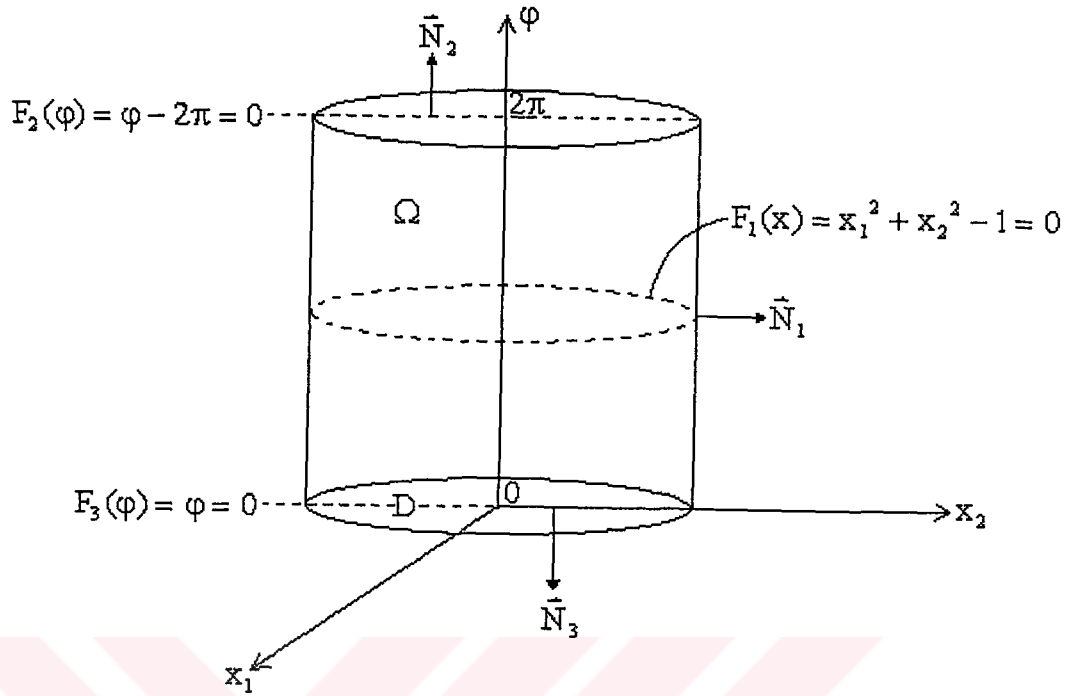
$$\begin{aligned} (A\bar{u}_N, \bar{u}_N)_{L_2(\Omega)} &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\Omega + \int_{\Omega} \text{div}(\bar{V}(x, \varphi)) d\Omega \\ (A\bar{u}_N, \bar{u}_N)_{L_2(\Omega)} &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla_x \bar{u}_N\|_e^2 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \langle \bar{V}(x, \varphi), \bar{N} \rangle d\Omega \end{aligned} \quad (3.56)$$

olur.

Şimdi Γ üzerinde $\bar{u}_N = 0$ olması ve \bar{u}_N 'in (ve tüm kısmi türevlerinin) φ değişkenine göre 2π periyodik olması bilgilerini kullanarak,

$$\int_{\partial\Omega} \langle \bar{V}(x, \varphi), \bar{N} \rangle d\Omega = 0 \quad (3.57)$$

olduğunu gösterelim.



Şekil 3.1. Ω bölgesinin dış birim normal vektörleri

Dış birim normal vektörleri,

$$\begin{aligned}\tilde{N}_1 &= \frac{1}{\|\nabla F_1(\mathbf{x})\|_e} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} F_1(\mathbf{x}), \frac{\partial}{\partial x_2} F_1(\mathbf{x}), \frac{\partial}{\partial \varphi} F_1(\mathbf{x}) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} (2x_1, 2x_2, 0) = (x_1, x_2, 0)\end{aligned}$$

$$\tilde{N}_2 = \frac{1}{\|\nabla F_2(\varphi)\|_e} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} F_2(\varphi), \frac{\partial}{\partial x_2} F_2(\varphi), \frac{\partial}{\partial \varphi} F_2(\varphi) \right) = (0, 0, 1)$$

$$\tilde{N}_3 = \frac{1}{\|\nabla F_3(\varphi)\|_e} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} F_3(\varphi), \frac{\partial}{\partial x_2} F_3(\varphi), \frac{\partial}{\partial \varphi} F_3(\varphi) \right) = (0, 0, -1)$$

olarak hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \langle \bar{V}(x, \varphi), \bar{N} \rangle d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \langle \bar{V}(x, \varphi), \bar{N}_1 \rangle d\Omega \\
&\quad + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \langle \bar{V}(x, \varphi), \bar{N}_2 \rangle d\Omega + \int_{\partial\Omega} \langle \bar{V}(x, \varphi), \bar{N}_3 \rangle d\Omega}_{=0} \\
&= \int_{\partial\Omega} \underbrace{\left[\bar{u}_N \cos(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) \right]}_{(*)} x_1 \\
&\quad + \underbrace{\left[\bar{u}_N \sin(\varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} + \cos(\varphi) \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \right) \right]}_{(*)} x_2 \\
&\quad + \underbrace{\left[\frac{x_1}{2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi} - \frac{x_2}{2} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi} \right]}_{(**)} d\Omega
\end{aligned}$$

olur.

(*): Γ üzerinde (yani silindirin yan yüzeyinde) $\bar{u}_N = 0$ olduğu bilinmektedir. Alt ve üst kapaklarda ise, yani $\varphi=0$ ve $\varphi=2\pi$ için, \bar{u}_N ve tüm kısmi türevleri, φ 'ye göre 2π periyodik olduklarından aynı değerleri alacaklardır. Dolayısıyla bu toplamın $\partial\Omega$ üzerinden integrali sıfır değerini alır.

(**): Bu toplam \bar{u}_N fonksiyonunu içermediğinden Γ üzerinde doğrudan sıfıra eşit olduğunu söyleyemeyiz. Şimdi $\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi}$ türevini $\partial\Omega$ üzerinde inceleyelim.

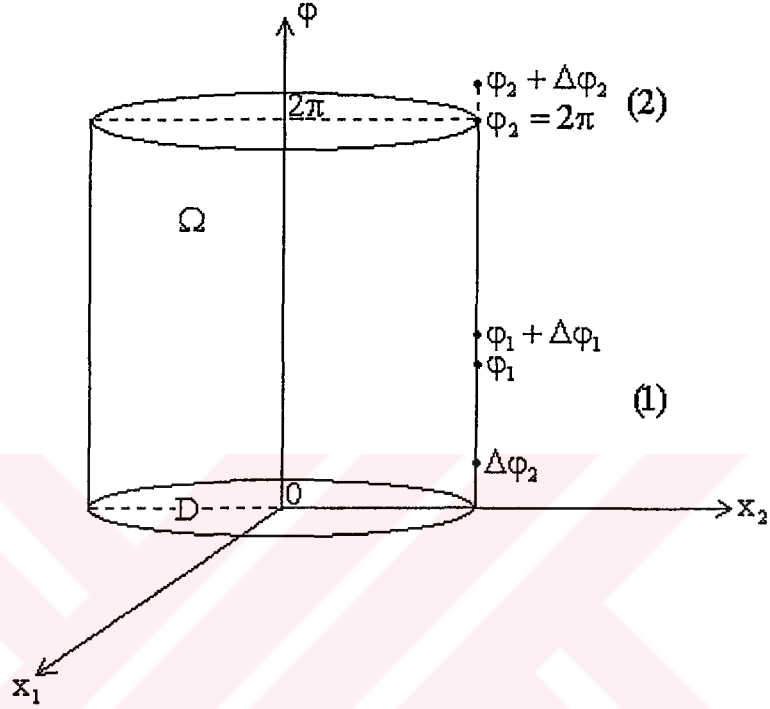
Γ üzerinde iki durum söz konusudur. Bu durumlar Şekil 3.2.'de gösterilmiştir.

Bunlardan ilki $\varphi_1 < 2\pi$ gibi bir noktada türev almaktır:

$$(1) \quad \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \bar{u}_N(x, \varphi) \right|_{\varphi=\varphi_1} = \lim_{\Delta\varphi_1 \rightarrow 0} \frac{\bar{u}_N(x, \varphi_1 + \Delta\varphi_1) - \bar{u}_N(x, \varphi_1)}{\Delta\varphi_1} = 0 \quad \text{olur. Çünkü } \Gamma$$

üzerinde kaldıklarından

$$\bar{u}_N(x, \varphi_1 + \Delta\varphi_1) = \bar{u}_N(x, \varphi_1) = 0 \text{ dir.}$$



Şekil 3.2. Teorem 3.2.1.in ispatında (1) ve (2) durumları

İkinci durumda ise $\varphi_2=2\pi$ noktasında türev değerini hesaplıyoruz:

$$\begin{aligned} (2) \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \bar{u}_N(x, \varphi) \right|_{\varphi=\varphi_2} &= \lim_{\Delta\varphi_2 \rightarrow 0} \frac{\bar{u}_N(x, 2\pi + \Delta\varphi_2) - \bar{u}_N(x, 2\pi)}{\Delta\varphi_2} \\ &= \lim_{\Delta\varphi_2 \rightarrow 0} \frac{\bar{u}_N(x, \Delta\varphi_2) - \bar{u}_N(x, 2\pi)}{\Delta\varphi_2} = 0 \end{aligned}$$

olur. Çünkü Γ üzerinde kaldıklarından, $\bar{u}_N(x, \Delta\varphi_2) = \bar{u}_N(x, 2\pi) = 0$ olacaktır.

Diğer kısımlarda, yani silindirin alt ve üst kapaklarında ise \bar{u}_N ve tüm kısmi

türevlerinin 2π periyodikliğinden $\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial x_2}$ ve $\frac{\partial \bar{u}_N}{\partial \varphi}$ değerleri eşit olacak, dolayısıyla

toplama bu ifadeler birbirlerini götüreceklerdir. Sonuç olarak bu toplamın da $\partial\Omega$ üzerinden integrali sıfır değerini alır.

O halde (3.57) sağlanır ve,

$$(A\bar{u}_N, \bar{u}_N)_{L_2(\Omega)} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \|\nabla_x \bar{u}_N\|_e^2 d\Omega \quad (3.58)$$

bulunur. Diğer yandan (3.53) ile (3.58) eşitliklerinden

$$\int_{\Omega} \|\nabla_x \bar{u}_N\|_e^2 d\Omega = 0 \quad (3.59)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\|\bar{u}_N\|_{\pi}^{1,x} = 0 \Rightarrow \bar{u}_N = 0$$

olur. O halde $\{w_{m,k,n}^1, w_{m,k,n}^2\}_{m,k,n=0}^N$ sistemi lineer bağımsız olduğundan tüm $\{\bar{a}_{m,k,n}, \bar{b}_{m,k,n}\}_{m,k,n=0}^N$ katsayıları sıfıra eşit olur. Bu da hipotezimizle çelişir, dolayısıyla (3.48)-(3.49) sistemi her N için tek bir çözüm kümesine sahiptir ve algoritma $\{a_{m,k,n}, b_{m,k,n}\}_{m,k,n=0}^N$ çözüm kümesini Sys denklem kümesinin çözüldüğü adımda tek olarak hesaplar. ■

3.3. Maple Kodları ve Bazı Sonuçlar

Bu kesimde, algoritmalar baz alınarak hazırlanmış Maple kodları ve bazı örnek girdilerin sonuçları verilmiştir.

```

U := Proc(N, f)
Local t;
Global a, b, k, n, m, m1, k1, n1, EquSet, Lft, F, EquSimplify, EquConstruct,
LeftHand1, LeftHand2, W1, W2, eta, A, Loperator, Doperator, InnerProdL2;
Option Remember;
eta := 1 - x1^2 - x2^2;

InnerProdL2 := proc(u, v)
RETURN(int(int(int(u*v, x1 = -sqrt(1 - x2^2) .. sqrt(1 - x2^2)),
x2=-1..1), psi=0..2*Pi));
end;

Doperator := proc(u)
RETURN(- sin(psi)*diff(u, x1) + cos(psi)*diff(u, x2));
end;

Loperator := proc(u)
RETURN(diff(u, x1)*cos(psi) + diff(u, x2)*sin(psi));
end;

A := proc(u)
RETURN(Doperator(diff(Loperator(u), psi));)
end;

F := Doperator(diff(f, psi));
W1 := proc(m, k, n) RETURN(x1^k*x2^n*sin(m*psi)); end;

W2 := proc(m, k, n) RETURN(x1^k*x2^n*cos(m*psi)); end;

LeftHand1 := proc(m1, k1, n1)
Lft := 0;
for m from 0 to N do

```



```

    for k from 0 to N do
        for n from 0 to N do
            Lft := Lft + InnerProdL2(A((a[m, k, n]
                *W1(m, k,n)+ b[m, k, n]*W2(m, k, n))
                *eta),W1(m1, k1, n1));
        od;
    od;
od;
RETURN(Lft);
end;

```

```

LeftHand2 := proc(m1, k1, n1)
    Lft := 0;
    for m from 0 to N do
        for k from 0 to N do
            for n from 0 to N do
                Lft := Lft + InnerProdL2(A((a[m, k, n]
                    *W1(m, k, n)+ b[m, k, n]*W2(m, k, n))
                    *eta),W2(m1, k1, n1));
            od;
        od;
    od;
    RETURN(Lft);
end;

```

```

EquSimplify := proc(S)
    local i, S1;
    for i to nops(S) do
        S1[i] := simplify(S[i]/Pi^2);
    od;
    RETURN(convert(S1, set));
end;

```

```

EquConstruct := proc()
  EquSet := {};
  for m1 from 0 to N do
    for k1 from 0 to N do
      for n1 from 0 to N do
        EquSet := {op(EquSet), LeftHand1(m1, k1, n1)
          =InnerProdL2(F, W1(m1, k1, n1)),
          LeftHand2(m1, k1, n1)
          =InnerProdL2(F, W2(m1, k1, n1))};
      od;
    od;
  od;
  RETURN(EquSimplify(EquSet));
end;

t := 0;
for m from 0 to N do
  for k from 0 to N do
    for n from 0 to N do
      t := t + (a[m, k, n]*W1(m, k, n)
        + b[m, k, n]*W2(m, k, n))*eta;
    od;
  od;
od;
UN := subs(solve(EquConstruct()), t);
lambdaX := Loperator(UN) - f;
print(`U[N]`, UN);
if UN <> 0 then
  print(lambda, lambdaX);
fi;
End;

```

Maple prosedürleri kullanılarak elde edilen bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir:

>U(1, x2*cos(psi)+x1*sin(psi));

$$U[N], 0$$

>U(2, x2*cos(psi)+x1*sin(psi));

$$U[N], \frac{1}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2) \sin(2\varphi)$$

$$\lambda, -\sin(2\varphi)x_1 \cos(\varphi) - \sin(2\varphi)x_2 \sin(\varphi) - x_2 \cos(\varphi) - x_1 \sin(\varphi)$$

Bu sonuç, verilen girdi değerleri için problemin tam çözümüdür. Çözümün tekliğinden her $i > 2$ değeri için aynı çıktı değerinin elde edileceğini söyleyebiliriz. Bu çözümün yazılan bir Pascal programı ile elde edilmiş görüntü simülasyonu ve gerekli açıklamalar tezin ekler bölümünde sunulmuştur.

KAYNAKLAR

1. Adams, R.A., 1975, Sobolev Spaces, **Academic Press**.
2. Amirov, A.Kh., 1986, Theorems of existence and uniqueness of a solution to the inverse problem for the transport equation, **Siberian Math.J.**, 27.
3. Amirov, A.Kh., 1986, On the solvability of inverse problems for equations of the second order, **Funksional. Analiz i Prilozhen.**, 20, No.6, s 3-20.
4. Amirov, A.Kh., 1986, To the question of solvability of inverse problems, **Dokl.Akad.Nauk SSSR**, 290, No.2, s 268-270.
5. Amirov, A.Kh., 1987, One class of inverse problems for the special kinetic equation, **Methods of Study of Inverse and Ill-Posed Problems**, s 4-21, Novosibirsk.
6. Amirov, A.Kh., 1988, Integral Geometry and Inverse Problems for kinetic equations, **Doctor. Dissert.**, Novosibirsk.
7. Amirov, A.Kh., 1993, Existence of a solution to integral geometry problem, **Siberian Math. J.**, 34, No:2.
8. Anikonov, Yu.E., 1976, On the solvability of an integral geometry problem, **Mat. Sbornik**, 101(143), No.2, s 271-279.
9. Anikonov, Yu.E., 1987, New mathematical models and inverse problems, **Mathematical modelling in Geophysics**, s 4-42, Nauka, Novosibirsk.
10. Anikonov, Yu.E., 1997, Multidimensional Inverse and Ill-Posed Problems for Differential Equations, **VNU Science Press BV**, Utrecht, The Netherlands.
11. Articulo, G.A., 1998, Partial Differential Equations & Boundary Value Problems with MAPLE V, **Academic Press**.
12. Batut, C., Bernardi, D., Cohen, H., Olivier, M., 1995, User's Guide to PARI-GP, version 1.39, **Université Bordeaux I**.
13. Butler, G., Cannon, J., 1990, The Design of Cayley-A Language for Modern Algebra, Design and Implementation of Symbolic Computation Systems, Lecture Notes in Computer Science, 42, **Springer-Verlag**, s 10-19.
14. Capani, A., Niesi, G., 1995, CoCoA User's Manual, **University of Genova**.
15. Davenport, J.H., Siret, Y., Tournier, E., 1993, Computer Algebra, Systems and Algorithms for Algebraic Computation, **Academic Press**.

16. Flavin, J.N., Rionero, S., 1996, Qualitative Estimates for Partial Differential Equations, An Introduction, **CRC Press**.
17. Gilbarg, D., Trudinger, 1983, N.S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, **Springer-Verlag**.
18. Hansen, P.C., 1998, Rank-deficient and discrete ill-posed problems : numerical aspects of linear inversion, **SIAM**, Philadelphia.
19. Heck, A., 1996, Introduction to Maple, **Springer-Verlag**.
20. Hollinger, C., Serf, P., 1991, SIMATH-a Computer Algebra System, Computational Number Theory, **de Gruyter**, s 331-342.
21. Kesavan, S., 1989, Functional Analysis and Applications, **John Wiley & Sons**.
22. Kireitov, V.R., 1975, On the problem of reconstruction of an optical surface from its images, **Funktsional. Analiz i Prilozhen**, 10, No.3, s 45-54.
23. Kireitov, V.R., 1983, Inverse Problems of Photometry, **Computing Center of the USSR Acad. Sci.**, Novosibirsk.
24. Lavrent'ev, M.M., Romanov, V.G., Shishatskii, S.P., 1986, Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis, **American Mathematical Society**.
25. Lavrent'ev, M.M., Anikonov, Yu.E., 1967, On one class of problems of integral geometry, **Dokl.Akad.Nauk SSSR**, 176, No:5, s 1240-1241.
26. Lebedev, V.J., 1996, An Introduction to Functional Analysis and Computational Mathematics, **Birkhäuser**.
27. Leeuwen, van M.A., Cohen, A.M., Lisser, B., 1992, LiE : A Package for Lie Group Computations, **CAN Expertise Center**.
28. McOwen, R., 1995, Partial Differential Equations, Methods and Applications, **Prentice Hall**.
29. Mikhailov, V.P., 1978, Partial Differential Equations, Translated from the Russian by Sinha, P.C., **MIR Publishers**, Moscow.
30. Miklavčič, M., 1998, Applied Functional Analysis and Partial Differential Equations, **World Scientific**.
31. Natterer, F., 1986, The Mathematics of Computerized Tomography, **Stuttgart and John Wiley&Sons Ltd.**, Teubner.
32. Naylor, A.W., Sell, G.R., Linear Operator Theory in Engineering and Science, **Holt, Rinehart and Winston INC**.

33. Reddy, D., 1998, Introductory Functional Analysis with Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements, **Springer-Verlag**.
34. Renardy, M., Rogers, R.C., 1992, An Introduction to Partial Differential Equations, **Springer-Verlag**.
35. Romanov, V.G., 1984, Inverse Problems of Mathematical Physics, **VNU Science Press BV**, Utrecht, The Netherlands.
36. Schmettow, G.v.J., 1991, KANT- a Tool for Computations in Algebraic Number Fields, Computational Number Theory, **de Gruyter**, s 321-330.
37. Schoenert, M., et al, 1994, GAP: Groups, Algorithms and Programming, **RWTH Aachen**.
38. Sobolev, S.L., 1963, Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, **American Mathematical Society**.
39. Stillman, M., Bayer, D., 1989, Macaulay User Manual.
40. Tikhonov, A.N., Arsenin, V. Ya., Timonov, A.A., 1987, Mathematical Problems in Computerized Tomography, Moscow, Nawka.
41. Wloka, J., 1987, Partial Differential Equations, **Cambridge University Press**.

EKLER



EK-1. Bilgisayar Cebiri Sistemleri ve Sembolik Hesaplama

Bilgisayar Cebiri Sistemleri

Sayısal yöntemlerde kullanılan hesaplamalar, temel aritmetik işlemlerin yanı sıra matematiksel fonksiyonların sayısal değerlerinin hesaplanması, polinomların köklerinin bulunması, başlangıç-değer problemlerinin çözülmesi, sayısal integrasyon ve matrislerin sayısal özdeğerlerinin hesaplanması gibi daha karmaşık işlemleri de içerirler. Ancak bütün bu işlemlerin ortak bir noktası vardır: *sayılar*. Hesaplamalar sadece sayılar üzerinde gerçekleştirilmektedir. Ayrıca bu hesaplamalar çoğunlukla “kesin” değildirler. Çünkü veriler kayan-noktalı (floating-point) sayılar içerirler ve yapılan işlemler, adım sayısı arttıkça aynı oranda büyüyen bir hata payını da beraberlerinde getireceklerdir.

Matematiksel hesaplamanın diğer bir araştırma alanı, “Sembolik ve Cebirsel Hesaplama” ya da “Bilgisayar Cebiri” olarak adlandırılan ve kısaca, “matematiksel nesnelere gösteriminde kullanılan semboller üzerinde işlem yapma” şeklinde tanımlanan yöntemleri içerir. Bu semboller tamsayılar, rasyonel sayılar, gerçel sayılar ya da karmaşık sayılar gibi sayıları gösteren semboller olabilecekleri gibi, polinomlar, rasyonel fonksiyonlar, denklem sistemleri gibi matematiksel nesnelere ya da gruplar, halkalar, cisimler gibi çok daha soyut cebirsel nesnelere gösteren semboller olabilirler [15].

Sembolik kelimesi matematiksel problem çözümede ulaşılmak istenen son noktanın çoğu zaman kapalı ve simgesel bir formül biçiminde olduğunu vurgulamaktadır. Diğer bir deyişle ulaşılmak istenen sonuç, analitik olarak ifade edilebilmelidir. *Cebirsel* kelimesiyle ise hesaplamaların kayan-nokta aritmetiği yerine kesin sonuç adımları üzerine kurulu olduğu kastedilmektedir.

Örneğin $\sqrt{2}$ sembolü ondalık kısmı sonsuza kadar uzayıp giden 1,4142135623730... irrasyonel sayısını göstermektedir. Ancak bu sayısal değerini hiç kullanmadan bu

sayıyı 2 ile çarpabilir, dolayısıyla yine bir irrasyonel sayı olan 2,82842712474619... sayısını gösteren yeni bir sembol, $2\sqrt{2}$ elde edilebilir. Görüldüğü gibi burada sayısal değerini hiç kullanmadan doğrudan *sembolleri* kullanarak bir *hesaplama* gerçekleştirdik.

Aşağıdaki tabloda, karşılaştırmalı olarak sayısal ve sembolik metotlar kullanılarak gerçekleştirilmiş bazı hesaplama örnekleri verilmiştir:

Örnek 1: Sayısal ve sembolik metotların karşılaştırılması:

Sayısal	Sembolik
$2/6 \rightarrow 0.333333$	$2/6 \rightarrow 1/3$
$x+2x \rightarrow x=?$	$x+2x \rightarrow 3x$
$\cos(3.14159) \rightarrow -0.999999$	$\cos(\pi) \rightarrow -1$
$\int_0^{1/2} \frac{x}{x^2-1} dx \rightarrow 0.1438$	$\int \frac{x}{x^2-1} dx \rightarrow \frac{\ln x^2-1 }{2} + c$
$\left. \frac{dx^2}{dx} \right _{x=2} \rightarrow 4$	$\frac{dx^2}{dx} \rightarrow 2x$

Amaçları sembolik hesaplama işlemlerini gerçekleştirmek olan, ancak bunun yanı sıra sayısal hesaplamaları da yapabilen bilgisayar yazılımları genel olarak bilgisayar cebiri sistemleri olarak adlandırılırlar [15]. Günümüzde yaygın olarak kullanılan başlıca bilgisayar cebiri sistemleri,

- Maple
- Mathematica
- Matlab
- MathCad
- Reduce
- Macsyma

- Magma
- Axiom

olarak sıralanabilir.

Genel amaçlı bilgisayar cebiri sistemlerinin yanı sıra, matematik ya da fiziğin belirli bir alanında problem çözmek için geliştirilmiş bazı özel amaçlı yazılımlar da bulunmaktadır. Bunlara örnek olarak grup teorisi için geliştirilen Cayley [36] ve GAP [13], sayılar teorisi için geliştirilen PARI [12], SIMATH [20], ve KANT [35], komutatif cebir için geliştirilen CoCoA [14], cebirsel geometri için geliştirilen Macaulay [38] ve Lie teorisi için geliştirilen LiE [27] sayılabilir.

Maple

Maple , bilgisayar ile matematik çalışmalarında kullanılan en güçlü hesaplama sistemlerinden birisidir. Kullanım kolaylığı, genişleyebilirliği, işlem hızı ve minimum düzeyde bellek ve donanım kapasitesi gereksinimi ile Maple, MapleV, Maple6 ve Maple7, çeşitli düzenlemeleri ile 10 yılı aşkın bir süredir dünya üzerinde başta matematikçiler ve mühendisler olmak üzere 100.000'in üzerinde kayıtlı kullanıcı sayısına sahiptir.

Maple'in başlıca özellikleri arasında sayısal ve sembolik hesaplama, her türlü matematiksel notasyonu yazabilme, 2 ve 3 boyutlu grafik çizimleri ve grafik animasyonları sayılabilir. Bu özellikleri ile Maple, yoğunlukla analiz (calculus) ve diferensiyel denklemler olmak üzere geometri, lineer cebir, olasılık ve istatistik, ayrık matematik, sayılar teorisi ve nümerik analiz gibi matematiğin pek çok dalında etkin olarak kullanılabilir. Bunların yanı sıra, 2500 dolaylarında hazır matematiksel yordam Maple V'in yordam kütüphanesinde kullanılabilir durumdadır. Ayrıca Pascal benzeri yüksek-düzeyle bir programlama dili sayesinde amaca uygun olarak istenilen uygulamaların geliştirilmesi ve böylelikle kütüphanenin genişletilmesi mümkündür.

Maple, Waterloo Üniversitesinde 1980 yılının Aralık ayında Keith Geddes ve Gaston Gonnet tarafından kurulmuş olan *Symbolic Computation Group (SGC)* tarafından geliştirilmeye başlanmıştır. Bilgisayar Cebiri alanında birçok ispatlanmış teorem ve bunlar baz alınarak yazılmış bilimsel makalenin üzerine kurulan sistem, C programlama dili kullanılarak kodlanmıştır. Günümüzde Maple, Maple V Release 5 ve Maple 6 sürümleri ile Macintosh, MS Windows, Unix, VMS, NeXT, Ultrix ve UNICOS gibi en popüler ve yaygın işletim sistemleri ortamlarında çalışabilmektedir. Maple çalışma sayfaları (worksheet) bu sistemlerin tümünde ortak bir görünüme sahip olduğundan, işlemler bir platformdan diğerine kolaylıkla taşınabilmektedir [19].

Aşağıda, Maple6 kullanılarak gerçekleştirilmiş bazı çalışma sayfası örnekleri verilmiştir:

Örnek 2: Maple'da aritmetik işlemler:

Aritmetik işlemler, tanımlı aritmetik operatörler kullanılarak tek-satır matematiksel yazım kuralına uygun girildiklerinde, eğer tam olarak hesaplanabiliyorsa, işlemin sonucu yazılır:

$$\begin{aligned} > 2*5+3^2+(5-3)/2; \\ & 20 \end{aligned}$$

Ancak aritmetik işlemin sonucu kesin olarak hesaplanamıyorsa, hesaplanamayan ifade aynen bırakılır:

$$\begin{aligned} > 2\sqrt{2}; \\ & 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Bu örnek, matematiksel ifadelere sayısal hesaplama ve sembolik hesaplama yaklaşımları arasındaki farkı açık olarak sergilemektedir. $\sqrt{2}$, sonsuz ondalık

basamağa sahip irrasyonel bir sayıdır. Bu sayı bilgisayar tarafından sayısal olarak ancak sonlu bir ondalık basamağa kadar olan kısmı ile hesaplanabilir. Oysa sembolik hesaplama, sayıyı $\sqrt{2}$ olarak bırakıp, işlemin devam eden adımlarında da bu sembolü koruyarak sonucun tam (analitik) olmasını garantilemektedir. İstenildiği takdirde bu işlemin sayısal sonucu da hesaplanabilir:

```
> evalf( 2*sqrt(2) );
2.828427124
```

Hesaplanan sayı aksi belirtilmediği sürece 10 basamaklıdır. Ancak hesaplanacak sayının basamak sayısı da belirtilebilir:

```
> evalf( 2*sqrt(2), 200 );
2.8284271247461900976033774484193961571393437507538961463533594
75981464956924214077700775068655283145470027692461824594049849
67211170147442528824299419987166282644533185501118551159990100
23055641211430
```

Örnek 3: Maple’da cebirsel denklem çözümlerinin hesaplanması:

Sembolik hesaplamamanın önemli avantajlarından birisi de, denklem çözümlerinde, aranan çözümün denklemdeki bilinmeyenlere bağlı olarak parametrik formda elde edilebilmesidir:

```
> x := solve( y=m*x+c, x );
```

$$x := \frac{-y + c}{m}$$

Daha karmaşık bir örnek olarak denklem sistemlerinin çözümü verilebilir. $y=mx+c$ doğrusu ile $x^2+y^2=r^2$ çemberinin kesim noktaları m , c ve r parametrelerine bağlı olarak hesaplatılabilir:

> $x := 'x'$;
 > $Dogru := y=m*x+c$;
 > $Cember := x^2 + y^2 = r^2$;
 > $allvalues (solve (\{Dogru, Cember\}, \{x,y\}))$;

$$\left\{ x = \frac{1 - 2mc + 2\sqrt{-c^2 + r^2 + m^2 r^2}}{1 + m^2}, y = \frac{1}{2} \frac{m(-2mc + 2\sqrt{-c^2 + r^2 + m^2 r^2})}{1 + m^2} + c \right\}$$

$$\left\{ x = \frac{1 - 2mc - 2\sqrt{-c^2 + r^2 + m^2 r^2}}{1 + m^2}, y = \frac{1}{2} \frac{m(-2mc - 2\sqrt{-c^2 + r^2 + m^2 r^2})}{1 + m^2} + c \right\}$$

Örnek 4: Maple'da adi diferensiyel denklemlerin genel çözümlerinin hesaplanması:

Adi diferensiyel denklemlere örnek olarak, radyoaktif bozulmayı modelleyen diferensiyel denklemi alalım:

> $difdenklem := diff(y(t), t) = k*y(t)$

$$difdenklem := \frac{\partial}{\partial t} y(t) = ky(t)$$

Bu denklemin, $y(0)=2$ başlangıç koşulu ile çözümünü hesaplatırsak:

> $cozum := dsolve (\{difdenklem, y(0)=2\}, y(t))$;

$$cozum := y(t) = 2 e^{(kt)}$$

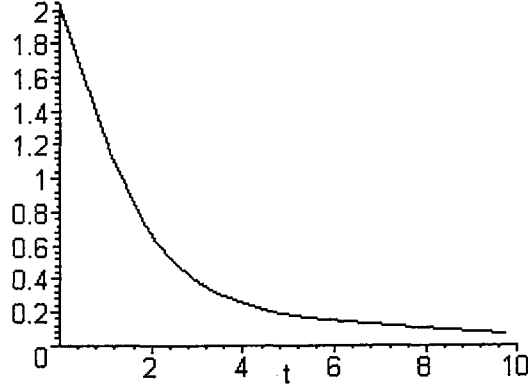
elde edilir. Radyoaktif bozulma sabiti de yerine konursa

> $cozum1 := subs (\{ k=-0.4 \}, cozum)$;

$$cozum := y(t) = 2 e^{(-.4t)}$$

bulunur. Son olarak, $t \in [0, 10]$ için bulunan çözümün grafiğini çizdirebiliriz:

```
> plot( rhs(cozum), t=0..10 );
```



Örnek 5: Maple'da kısmi diferensiyel denklemlerin genel çözümlerinin hesaplanması:

```
> kdifdenklem1 := y*diff(U(x,y),x)+x*diff(U(x,y),y)=0;
```

$$kdifdenklem1 := y \left(\frac{\partial}{\partial x} U(x, y) \right) + x \left(\frac{\partial}{\partial y} U(x, y) \right) = 0$$

Verilen kısmi diferensiyel denklemin genel çözümü hesaplanıyor:

```
> pdsolve( kdifdenklem1, U(x,y) );
```

$$U(x, y) = _F1(-x^2 + y^2)$$

Başka bir kısmi diferensiyel denklem tanımlanıyor:

```
> kdifdenklem2 := y*diff(u(x,y),x,x)+(x-y)*diff(u(x,y),x,y)-x*diff(u(x,y),y,y)=0;
```

$$kdifdenklem2 := y \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) \right) + (x - y) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u(x, y) \right) - x \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) \right) = 0$$

Denklem, sadece bir tek karışık türev içerecek biçimde kanonik forma dönüştürülüyor:

```
> PDEtools [mapde] ( kdifdenklem2 , canom );
```

$$\left(-\xi_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} u(\xi_1, \xi_2) \right) + (\xi_1 - \xi_2) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} u(\xi_1, \xi_2) \right) \right)$$

& where $\{\xi_1 = x + y, \xi_2 = x\}$

Yeni denklemin genel çözümü hesaplanıyor:

> op (%);

$$-\xi_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} u(\xi_1, \xi_2) \right) + (\xi_1 - \xi_2) \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} u(\xi_1, \xi_2) \right),$$

$\{\xi_1 = x + y, \xi_2 = x\}$

> pdsolve (% [1]);

$$u(\xi_1, \xi_2) = F_2(\xi_1) + \frac{F_1\left(-\frac{1}{2}\xi_1(-2\xi_2 + \xi_1)\right)}{\xi_1}$$

> cozum := u(x,y) = subs (%% [2], rhs (%));

$$cozum := u(x, y) = F_2(y + x) + \frac{F_1\left(-\frac{1}{2}(y + x)(-x + y)\right)}{y + x}$$

Bulunan çözüm denklemini sağlıyor mu?

> simplify (subs (cozum, kdifdenklem2));

$$0 = 0$$

Sembolik Hesaplama Kuramının Temelleri

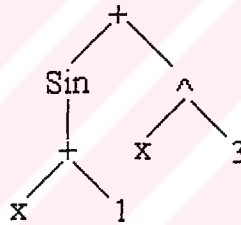
Matematiksel ifadelerin (formüller, denklemler, fonksiyonlar vb.) gösterimi ve bu ifadeler üzerinde işlem yapmak, sembolik hesaplama kuramının en önemli temel taşlarından birisidir. Tek satır matematiksel yazım kuralına göre yazılmış bir matematiksel ifade üzerinde sembolik olarak doğrudan işlem yapmak olanaksızdır [15]. Dolayısıyla, öncelikle matematiksel ifadelerin ikili ağaç gösterimi ya da

düğümsel matematik yapı olarak adlandırılan bir forma dönüştürülmeleri gerekmektedir. Bunu bir örnek üzerinde inceleyelim:

Örnek 6: $\sin(x+1)+x^3$ ifadesi, bu biçimiyle sembolik hesaplama açısından bir anlam taşımaz. Ancak aynı ifade,

$$+(\sin(+x,1),^x,3))$$

biçiminde düğümsel matematik yapı olarak üzerinde her türlü sembolik hesaplamaların yapılabileceği bir matematiksel nesnedir. Aynı yapının ikili ağaç gösterimi aşağıda verilmiştir.



Şekil EK-1.1. Matematiksel ifadelerin ikili ağaç gösterimi.

Düğümsel matematik yapılara dönüştürülen matematiksel ifadeler üzerinde, genel olarak bu ifadeler üzerinde konulacak hesaplama kuralları kullanılarak sembolik hesaplama işlemleri gerçekleştirilebilir. Bu kurallar, işlemin niteliğine göre belirlenir.

Sözgelimi, gerçekleştirilmek istenen hesaplama işlemi türev alma ise, bilinen türev alma kuralları genel düğümsel matematik yapılar üzerinde konulur ve bu kurallar ele alınan probleme uygulanır. Bu işlemleri, bir diferensiyelleme problemi örneği üzerinde gösterelim:

Örnek 7: $\frac{d}{dx}(x \sin(x^2)) = ?$ problemini göz önüne alalım. Öncelikle türevi

hesaplanacak fonksiyonun düğümsel matematiksel yapıya dönüştürülmesi

gerekmektedir. Bu dönüşümü gerçekleştirecek dönüşüme T dönüşümü diyelim. Bu durumda, ele alınan fonksiyona T dönüşümü uygulanırsa,

$$x * \text{Sin}(x^2) \xrightarrow{T} \begin{array}{c} * \\ / \quad \backslash \\ x \quad \text{Sin} \\ \quad \quad / \quad \backslash \\ \quad \quad x \quad 2 \end{array}$$

elde edilir. Burada, kralların uygulanışı daha açık olarak izlenebildiğinden, soyut bir kavram olan ikili ağaç gösterimi kullanılmıştır.

Problemin çözülebilmesi için, sırasıyla $*$, Sin ve $^{\wedge}$ düğümleri için türev kurallarına gereksinim vardır. Bu kuralları bir D dönüşümü yardımıyla tanımlarsak, ikili ağaç gösterimleri aşağıdaki gibi olacaktır:

1. $*$ Düğümü için türev kuralı:

$$\begin{array}{c} * \\ / \quad \backslash \\ f \quad g \end{array} \xrightarrow{D} \begin{array}{c} + \\ / \quad \backslash \\ * \quad * \\ / \quad \backslash \quad / \quad \backslash \\ D(f) \quad g \quad f \quad D(g) \end{array}$$

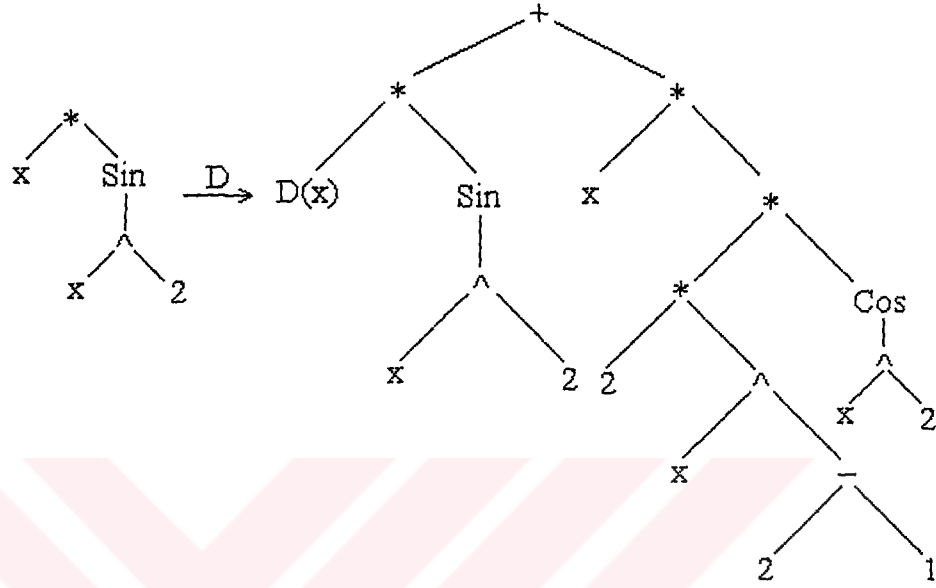
2. Sin Düğümü için türev kuralı:

$$\begin{array}{c} \text{Sin} \\ | \\ f \end{array} \xrightarrow{D} \begin{array}{c} * \\ / \quad \backslash \\ D(f) \quad \text{Cos} \\ \quad \quad | \\ \quad \quad f \end{array}$$

3. $^{\wedge}$ Düğümü için türev kuralı:

$$\begin{array}{c} \wedge \\ / \quad \backslash \\ f \quad n \end{array} \xrightarrow{D} \begin{array}{c} * \\ / \quad \backslash \\ n \quad \wedge \\ \quad \quad / \quad \backslash \\ \quad \quad f \quad - \\ \quad \quad \quad \quad / \quad \backslash \\ \quad \quad \quad \quad n \quad 1 \end{array}$$

Bu kurallar dögümsel matematik yapıya dönüştürülen fonksiyona uygulanırsa, Şekil EK-1.2. deki gibi türev fonksiyonunun ikili ağaç gösterimi elde edilmiş olur.



Şekil EK-1.2. $x \sin(x^2)$ fonksiyonunun türevi için ikili ağaç gösterimi

Bu yapıya T^{-1} dönüşümü uygulanırsa,

$$D(x) * \sin(x^2) + x * 2 * x^{(2-1)} * \cos(x^2)$$

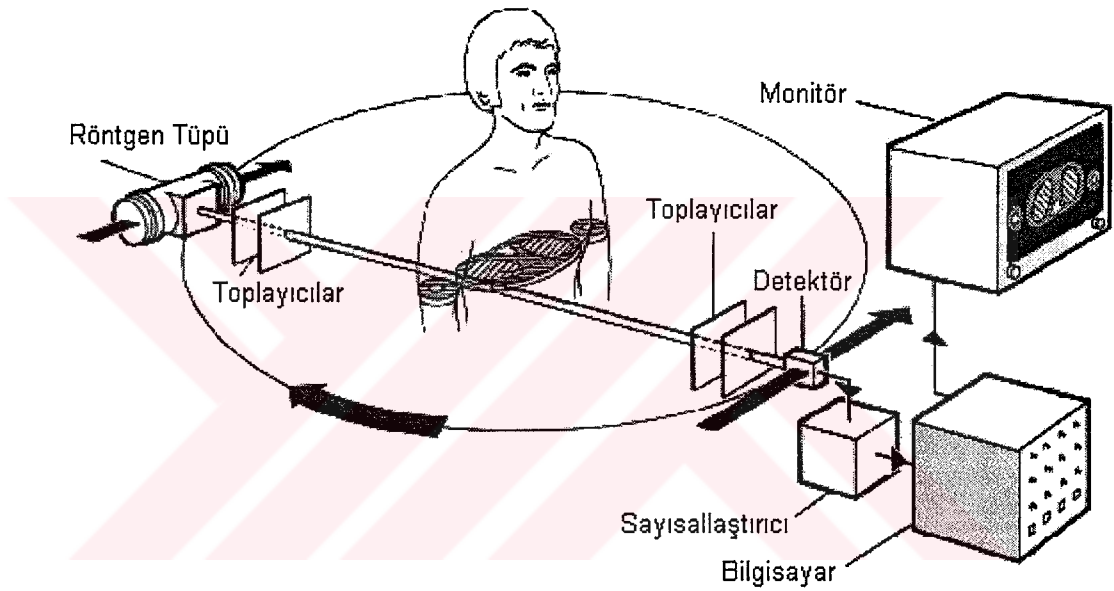
şeklinde, türev fonksiyonunun ilk formu elde edilir. Bu fonksiyon üzerine, tanımlanacak sadeleştirme ve kısaltma kuralları da uygulanırsa, son şekliyle türev fonksiyonu,

$$\sin(x^2) + 2 * x^2 * \cos(x^2)$$

olarak elde edilir.

EK-2. Problemin Fiziksel Modeli ve Bilgisayarlı Tomografiye Uygulanması

Bilgisayarlı tomografinin (BT) en önemli örneklerinden birisi olan transmisyon BT, genel anlamda insan vücudunun bir kesiminin ince bir X-ışını tarafından taranması sonucu ışında meydana gelen yoğunluk kaybının bir detektör tarafından algılanıp kaydedilmesi prensibine dayanır. Elde edilen bu bilgiler daha sonra bir bilgisayar tarafından işlenerek bir ekran üzerinde iki-boyutlu görüntüler üretilir (Şekil EK-2.1).

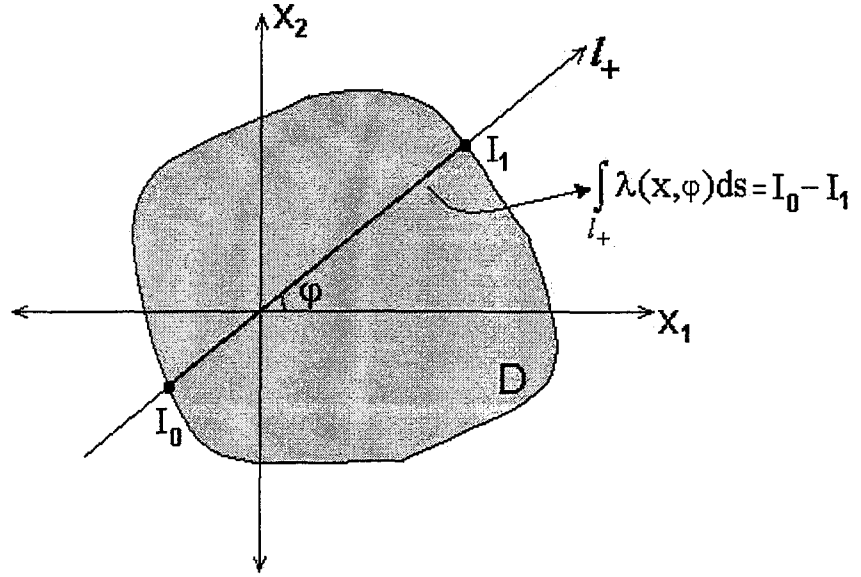


Şekil EK-2.1. Transmisyon bilgisayarlı tomografi

Basit fiziksel modeli şu şekilde tanımlayabiliriz: $\lambda(x, \varphi)$, X ışınının x noktasındaki doku tarafından emilme katsayısını gösterebilir. Bu durumda X-ışınındaki $I_0 - I_1$ yoğunluk kaybını,

$$U(x, \varphi) = \int_{l_1} \lambda(x, \varphi) ds \quad (\text{EK-2.1})$$

doğrusal integrali ile gösterebiliriz (Şekil EK-2.2).



Şekil EK-2.2. Kesit üzerinde fiziksel model

Aşağıdaki tabloda, modeli oluşturan kavramların matematiksel anlamları ve uygulamada bunlara karşılık gelen anlamlar verilmiştir :

Simge	Modeldeki Anlamı	Uygulamadaki Anlamı
l_+	$(\sin(\varphi), \cos(\varphi))$ yönlü doğrusal nesne	X-Işını
D	$D \subset \mathbb{R}^2$, $\partial D \in C^3$ olan bir bölge	Doku kesiti
$\lambda(x, \varphi)$	l_+ doğrusal nesnesinin x noktasındaki yoğunluğu	X-ışınının, doku kesitinin x noktasındaki yoğunluğu (intensity)
I_0	$U(x, \varphi)$ fonksiyonunun D bölgesi üzerindeki başlangıç değeri	X-ışınının, dokuya girmeden önceki yoğunluğu (intensity)
I_1	$U(x, \varphi)$ fonksiyonunun D bölgesi üzerindeki sınır değeri	X-ışınının, dokudan çıktıktan sonraki yoğunluğu (intensity)

$U(x, \varphi)$ fonksiyonunu x noktasında l_+ doğrusu yönünde türevlersek, ya da diğer bir deyişle,

$$L = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (\text{EK-2.2})$$

operatörünü (EK-2.1) eşitliğinin her iki yanına uygularsak,

$$LU(x, \varphi) \equiv \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x_1} U(x, \varphi) + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x_2} U(x, \varphi) = \lambda(x, \varphi) \quad (\text{EK-2.3})$$

denklemini elde ederiz.

X-ışını taraması sonucu elde edilen I_1 verileri toplandığından, $U(x, \varphi)$ fonksiyonunun ∂D üzerinde aldığı değerler bilinmektedir. Bu değerleri $u_0(x, \varphi)$ fonksiyonu ile gösterirsek,

$$U(x, \varphi)|_{\partial D} = u_0(x, \varphi) \quad (\text{EK-2.4})$$

olur. Böylece ele aldığımız Dirichlet-türü problemi sınır koşulu düzenlenmemiş formda elde etmiş oluruz.

EK-3. Hesaplanan Tam Çözümün Bilgisayarla Simulasyonu

$$f(x_1, x_2, \varphi) = x_2 \cos(\varphi) + x_1 \sin(\varphi)$$

için elde edilen

$$\lambda(x_1, x_2, \varphi) = -\sin(2\varphi)x_1 \cos(\varphi) - \sin(2\varphi)x_2 \sin(\varphi) - x_2 \cos(\varphi) - x_1 \sin(\varphi)$$

tam çözümünün bilgisayarla simulasyonunu gerçekleştiren Pascal programı ve çıktısı aşağıda verilmiştir.

Program genel olarak φ açısını 0 ile 2π arasında tararken, x_1 ve x_2 değerleri -1 ve 1 arasında değer almaktadır. Bu değerler için hesaplanan λ fonksiyonunun değeri, uygulamada kesitten geçen X-ışınının yoğunluk katsayısını vermektedir. Dolayısıyla kesitin (x_1, x_2) koordinatlı noktası, bu katsayı ile ters orantılı olarak renklendirildiğinde kesitin o noktadaki kalınlığı hakkında bilgi verecektir.

Program BTGoruntu;

Uses Crt, Dos;

Const Zero = 0;

GetMaxX = 319;

GetMaxY = 199;

GetMidX = GetMaxX Div 2;

GetMidY = GetMaxY Div 2;

Type VGA_Linear = Array [0..63999] Of Byte;

VGA_Array = Array [Zero..GetMaxY, Zero..GetMaxX] Of Byte;

Color_Type = Record

Red : Byte;

Green : Byte;

Blue : Byte;

End;

Color_Table = Array [Byte] Of Color_Type;

Var Save_Palette : Color_Table;

P_Gray : Color_Table;

I : LongInt;

```

    x1,x2,fi,lambda      : Real;
    C, R, G, B           : Byte;
    rgb,x,y              : Integer;
    Screen_Array         : VGA_Array Absolute $A000:$0000;
    Screen_Linear        : VGA_Linear Absolute $A000:$0000;

```

```

Procedure PutPixel (X,Y:LongInt ; Color:Byte);

```

```

Begin

```

```

    If (X >= Zero ) And
      (X <= GetMaxX) And
      (Y >= Zero ) And
      (Y <= GetMaxY) Then Screen_Array [Y, X] := Color;

```

```

End;

```

```

Procedure Fill_Screen (Color:Byte);

```

```

Begin

```

```

    FillChar (Screen_Linear, SizeOf(Screen_Linear), Color);

```

```

End;

```

```

Procedure ClearDevice;

```

```

Begin

```

```

    Fill_Screen (Zero);

```

```

End;

```

```

Procedure InitGraph;

```

```

    Var R      : Registers;

```

```

Begin

```

```

    FillChar (R, SizeOf(R), Zero);
    R.AX := $0013;
    Intr($10, R);
    ClearDevice;

```

```

End;

```

```

Procedure CloseGraph;

```

```

    Var R      : Registers;

```

```

Begin

```

```

    ClearDevice;
    FillChar (R, SizeOf(R), Zero);
    R.AX := $0003;
    Intr($10, R);

```

```

End;

```

```

Procedure Put_Palette (P:Color_Table);

```

```

    Var R      : Registers ;

```

```

    I      : Byte ;

```

```

Begin

```

```

    For I := 0 To 255 Do
        With P[I] Do
            Begin
                Red := Red SHR 2;
                Green := Green SHR 2;
                Blue := Blue SHR 2;
            End;
        FillChar (R, SizeOf(R), Zero) ;
        With R Do
            Begin
                AX := $1012;
                BX := 0;
                CX := 256;
                ES := Seg(P);
                DX := Ofs(P);
            End ;
        Intr($10, R);
    End;

    Procedure ImageReconstruct1(init_fi,bound_fi,init_x1,bound_x1:real; coeff:integer);
    Begin
        fi := init_fi;
        repeat
            x1 := init_x1;
            repeat
                x2 := x1*Sin(fi)/Cos(fi);
                lambda :=
                    -1*(x1*Sin(2*fi)*Cos(fi)+x2*Sin(2*fi)*Sin(fi)+x2*Cos(fi)+x1*Sin(fi));
                rgb := coeff*trunc(100*lambda);
                if rgb>255 then rgb := 255;
                if rgb<-255 then rgb := -255;
                x := trunc(50*x1) + GetMidX;
                y := GetMidY-trunc(50*x2);
                PutPixel(x,y,rgb);
                x1 := x1+0.01;
            until x1>=bound_x1;
            fi := fi+0.001;
        until fi>=bound_fi;
    End;

    Procedure ImageReconstruct2(init_fi,bound_fi,init_x1,bound_x1:real;coeff:integer);
    Begin
        fi := init_fi;
        repeat
            x1 := init_x1;
            repeat
                x2 := x1*Sin(fi)/Cos(fi);

```



```

    lambda :=
    -1*(x1*Sin(2*fi)*Cos(fi)+x2*Sin(2*fi)*Sin(fi)+x2*Cos(fi)+x1*Sin(fi));
    rgb := coeff*trunc(100*lambda);
    if rgb>255 then rgb := 255;
    if rgb<-255 then rgb := -255;
    x := trunc(50*x1)+GetMidX;
    y := GetMidY-trunc(50*x2);
    PutPixel(x,y,rgb);
    x1 := x1-0.01;
    until x1<=bound_x1;
    fi := fi + 0.001;
    until fi>=bound_fi;
End;

Begin
    InitGraph;
    FillChar (P_Gray, SizeOf(P_Gray), Zero);
    For I := 0 To 255 Do
    With P_Gray[I] Do
    Begin
        Red      := I;
        Green    := I;
        Blue     := I;
    End;

    (* Gri tonlar paletini aktif palet yap *)
    Put_Palette (P_Gray);

    (* I. Bölge *)
    ImageReconstruct1(0.0,Pi/2,0.0,1.0,1);

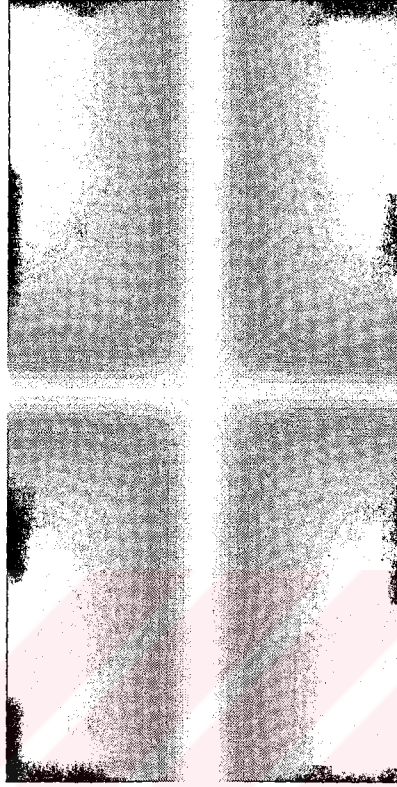
    (* II. Bölge *)
    ImageReconstruct2(Pi/2+0.0000001,Pi,0.0,-1.0,-1);

    (* III.Bölge *)
    ImageReconstruct2(Pi,3*Pi/2,0.0,-1.0,1);

    (* IV. Bölge *)
    ImageReconstruct1(3*Pi/2+0.0000001,2*Pi,0.0,1.0,-1);

    Repeat until keypressed;
    CloseGraph ;
End.

```



Şekil EK-3.1. BT görüntü simülasyonu programının çıktısı

ÖZGEÇMİŞ

Tolga GÜYER, 03.04.1973 tarihinde Tekirdağ-Çorlu'da doğdu. İlk öğrenimini İstanbul Beşiktaş Gazi İlkokulu'nda, orta öğrenimini İstanbul Esentepe Ortaokulu'nda, İstanbul Kabataş Erkek Lisesi'nde ve KKTC Güzelyurt Kurtuluş Lisesi'nde tamamladı.

Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde 1990 yılında başladığı lisans öğrenimini 1994 yılında tamamladı. Aynı yıl Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı.

1995 yılında Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümü'nde araştırma görevlisi oldu. 1996 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamlayarak Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora öğrenimine başladı. 1997 yılında Gazi Üniversitesi'ndeki görevinden ayrılarak, 1997-1999 yılları arasında sırasıyla Halıcı Yazılım A.Ş.'de yazılım ürün sorumlusu ve ASU Yazılım A.Ş.'de bilgisayar programcısı olarak çalıştı.

1999 yılında Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Eğitimi Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2002 yılında aynı bölüme öğretim görevlisi olarak atandı. Halen bu görevini sürdürmektedir.