

YÜKSEK GERİLİM KABLolarININ
ELEKTRİK ALAN ANALİZİ

133375

Zehra ÇEKMEN

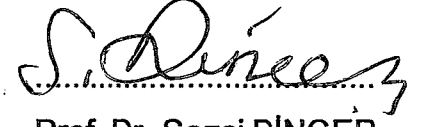
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2003
ANKARA

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ


Zehra ÇEKMEN tarafından hazırlanan YÜKSEK GERİLİM KABLOLARININ ELEKTRİK ALAN ANALİZİ adlı bu tezin yüksek lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.


Prof. Dr. Sezai DİNÇER
Tez Yönetmeni

Bu çalışma, jürimiz tarafından Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Cem NAKİBOĞLU 

Üye : Prof. Dr. Sezai DİNÇER 

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasan SAKIR BİLGE 

Üye :

Üye :

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	iv
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. GÜÇ KABLOLARI	3
2.1. Giriş.....	3
2.2. Tarihsel Gelişim.....	3
2.3. Kablo Başlıkları ve Ekleri.....	8
2.4. Kablo Başlık Ve Eklerinde Elektrik Alan Kontrolü	10
3. SONLU ELEMANLAR METODU	14
3.1. Giriş.....	14
3.2. Sınır Değer Problemlerinin Çözümü	15
3.3. Sonlu Elemanlar Metodunun Çözüm Yöntemi.....	15
3.4. Sonlu Elemanlar Metodunda İzlenecek Adımlar	17
3.4.1. Çözüm bölgesinin ayrıklaştırılması	17
3.4.2. Enterpolasyon fonksiyonunun seçimi.....	19
3.4.3. Elemen özelliklerinin belirlenmesi	19
3.4.4. Çözüm bölgesindeki elemanların birleştirilmesi	21
3.4.5. Sınır koşullarının probleme dahil edilmesi	21

3.4.6. Sistem denklemlerinin çözülmesi.....	22
3.5. Sonlu eleman denklemlerinin türetilmesi.....	22
3.6. Tek Boyutlu Sonlu Elemanlar Metoduyla Analiz.....	27
3.6.1. Sınır değer probleminin tanımlanması.....	27
3.6.2. Sonlu elemanlar metodu analizi.....	28
3.7. İki Boyutlu Sonlu Elemanlar Metoduyla Analiz.....	31
3.7.1. Sınır değer probleminin tanımlanması.....	31
3.7.2. Sonlu elemanlar metodu analizi.....	32
3.8. İki Boyutlu Alan Problemi İçin Bir Örnek.....	44
3.9. Silindirik Koordinatlarda Sonlu Elemanlar Analizi.....	49
3.9.1. Sınır değer probleminin tanımlanması.....	49
3.9.2. Problemin sonlu elemanlar metoduyla modellenmesi.....	50
3.10. Elektrik Alan Hesabı.....	55
3.10.1. Kartezyen koordinatlarda elektrik alan hesabı.....	55
3.10.2. Silindirik koordinatlarda elektrik alan hesabı.....	56
3.10.3. Düğüm noktalarında elektrik alan hesabı.....	58
4. MODELLEME VE PROGRAMLAMA.....	60
4.1. Giriş.....	60
4.2. Ağ Üretimi.....	61
4.2.1. Bölge ve blok şeması.....	61
4.2.2. Düğümlerin numaralandırılması.....	64
4.2.3. Koordinatların ve süreklilik bilgisinin üretilmesi.....	67
4.2.4. Otomatik ağ üreten program.....	69
4.3. Eşpotansiyel Eğrilerin Elde Edilmesi ve Çizimi.....	73

4.4. Kablo Başlık ve Eklerinin Modellenmesi.....	76
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	133
KAYNAKLAR	137
EKLER.....	139
ÖZGEÇMİŞ.....	159



YÜKSEK GERİLİM KABLOLARININ ELEKTRİK ALAN ANALİZİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Zehra ÇEKMEN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Aralık 2003

ÖZET

Mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılan sayısal yöntemler, son yıllarda bilgisayar kullanımının artması sonucu geniş çapta kullanılmaktadır. Bu yöntemler içinde sonlu elemanlar metodu, özellikle eğrisel alanlara kolayca uyum sağlaması, hızlı ve doğru sonuçlar vermesi gibi nedenlerle en çok tercih edilenlerden biridir.

Bu çalışmada sonlu elemanlar metodu kullanılarak yüksek gerilim kablolarının potansiyel dağılımı analiz edilmiştir. İncelemeyi gerçekleştirmek için Matlab'ta bir program geliştirilmiştir. Daha sonra geliştirilen program kullanılarak yüksek gerilim kablo başlığı ve kablo ekinin potansiyel dağılımı incelenmiş ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Bilim Kodu :6080207
Anahtar Kelimeler :Sonlu Elemanlar Metodu, Elektrostatik Alan
Kablo Eki, Kablo Başlığı
Sayfa Adedi :159
Tez Yöneticisi :Prof. Dr. Sezai DİNÇER

ELECTRIC FIELD ANALYSIS OF HIGH VOLTAGE CABLES**(M. Sc. Thesis)****Zehra ÇEKMEN****GAZI UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****December 2003****ABSTRACT**

The numeric methods in solving engineering problems, have been widely used in recent years as a result of increased computer usage. The finite elements method is one of the most preferred one in numeric methods especially because of its ease of adaptation to curved fields, speed and correct results.

In this study the potential distribution of high voltage cables is analyzed using finite elements method. To implement this examination, a program is developed using MATLAB. Then employing the developed program, the potential distribution of high voltage cable termination and cable splice have been examined and the results are compared.

Science Code :6080207
Key Words :Finite Element Method, Electrostatic Field
Cable Splice, Cable Termination
Page Number :159
Adviser :Prof. Dr. Sezai DİNÇER

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım süresince değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren tez hocam Prof. Dr. Sezai DİNÇER'e ve kıymetli tecrübelerinden faydalandığım hocam Yrd. Doç. Dr. Cem NAKİBOĞLU'na göstermiş oldukları ilgi ve yardımlarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Yine çalışmalarıml boyunca manevi destekleri ve yardımlarıyla beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan eşime ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.



ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Kablo yalıtkanlarının karşılaştırılması	7
Çizelge 3.1. Elemanlar için lokal ve global numaralandırma.....	38



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1.	11kV'luk Ferranti kablosu (kağıt yalıtkanlı kablo).....4
Şekil 2.2.	Kauçuk kablo5
Şekil 2.3.	35kV'luk XLPE yalıtkanlı kablo6
Şekil 2.4.	Şekil bozukluğunun sıcaklıkla değişimi.....7
Şekil 2.5.	10kV-35kV dahili tip kablo başlığı.....8
Şekil 2.6.	10kV-35kV harici tip kablo başlığı.....9
Şekil 2.7.	12kV-36kV kablo eki.....10
Şekil 2.8.	Alan kontrol tüpü.....11
Şekil 2.9.	Elektrik alan kontrolü yapılmamış kablo başlığı.....12
Şekil 2.10.	Elektrik alan kontrolü yapılmış kablo başlığı.....12
Şekil 2.11.	Elektrik alan kontrolü yapılmamış kablo eki.....13
Şekil 2.12.	Elektrik alan kontrolü yapılmış kablo eki.....13
Şekil 3.1.	Tek boyutlu bölgenin elemanlara ayrılması28
Şekil 3.2.	İncelenen S alanının üçgensel elemanlara ayrıştırılması33
Şekil 3.3.	Lokal ve global numaralandırma.....37
Şekil 3.4.	Genelleştirilmiş [K] matrisini elde eden alt programa ait akış şeması40
Şekil 3.5.	Sınır koşullarını programa dahil eden alt programa ait akış şeması43
Şekil 3.6.	Üçgensel kesitli ring eleman.....50
Şekil 3.7.	Üçgensel kesitli ring eleman için düğüm notasyonu51
Şekil 4.1.	(a) Bölge ve (b) blok şeması.....62
Şekil 4.2.	Düğüm, blok ve kenarların numaralandırılması63

Şekil 4.3.	Düğüm numaralandırması	65
Şekil 4.4.	Düğüm numaralandırması	66
Şekil 4.5.	Düğümlerin numaralandırılması.....	66
Şekil 4.6.	Model örneği (a) bölge, (b) blok şeması	68
Şekil 4.7.	Oluşturulan ağlar (a) dörtgensel ağ, (b) üçgensel ağ.....	68
Şekil 4.8.	Örnek.....	69
Şekil 4.9.	Otomatik ağ üreten programa ait akış şeması	72
Şekil 4.10.	Eşpotansiyel eğrilerini elde eden ve çizen programın akış şeması	75
Şekil 4.11.	Kablo başlığı fiziksel modeli.....	76
Şekil 4.12.	Kablo eki fiziksel modeli.....	77
Şekil 4.13.	$r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.11$ p.u, $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.15$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü.....	78
Şekil 4.14.	$r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.11$ p.u, $r_{sct}=0.13$ p.u $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.15$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü.....	79
Şekil 4.15.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{by}=2.7$, $l_{yis}=0.15$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış başlık için potansiyel dağılımı.....	80
Şekil 4.16.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=10$, $\epsilon_{by}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı	81
Şekil 4.17.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{by}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı	82
Şekil 4.18.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=50$, $\epsilon_{by}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı	83
Şekil 4.19.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=100$, $\epsilon_{by}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı	84
Şekil 4.20.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{by}=2.0$, $l_{yis}=0.15$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış başlık için potansiyel dağılımı	85

Şekil 4.21.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=10$, $\epsilon_{by}=2.0$ olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı	86
Şekil 4.22.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{by}=2.0$ olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı	87
Şekil 4.23.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=50$, $\epsilon_{by}=2.0$ olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı	88
Şekil 4.24.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=100$, $\epsilon_{by}=2.0$ olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı	89
Şekil 4.25.	$r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.11$ p.u, $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.25$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü	90
Şekil 4.26.	$r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.11$ p.u, $r_{sct}=0.13$ p.u $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.25$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü.....	91
Şekil 4.27.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{by}=2.7$, $l_{yis}=0.25$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış başlık için potansiyel dağılımı.....	92
Şekil 4.28.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{by}=2.7$, $l_{yis}=0.25$ p.u olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı.....	93
Şekil 4.29.	$r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.11$ p.u, $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.05$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü.....	94
Şekil 4.30.	$r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.11$ p.u, $r_{sct}=0.13$ p.u $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.05$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü.....	95
Şekil 4.31.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{by}=2.7$, $l_{yis}=0.05$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış başlık için potansiyel dağılımı.....	96
Şekil 4.32.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{by}=2.7$, $l_{yis}=0.05$ p.u olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı	97
Şekil 4.33.	$r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.101$ p.u, $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.15$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü.....	98
Şekil 4.34.	$r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.101$ p.u, $r_{sct}=0.12$ p.u $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.15$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış	

	kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü.....	99
Şekil 4.35.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{by}=2.7$, $r_{yis}=0.101$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış başlık için potansiyel dağılımı.....	100
Şekil 4.36.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{by}=2.7$, $r_{yis}=0.101$ p.u olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı.....	101
Şekil 4.37.	$r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.11$ p.u, $r_{sct}=0.15$ p.u, $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.15$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü.....	102
Şekil 4.38.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{by}=2.7$, $r_{sct}=0.15$ p.u olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı.....	103
Şekil 4.39.	$r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.16$ p.u, $r_{yis}=0.17$ p.u, $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.15$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü.....	104
Şekil 4.40.	$r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.16$ p.u, $r_{yis}=0.17$ p.u, $r_{sct}=0.19$ p.u, $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.15$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü.....	105
Şekil 4.41.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{by}=2.7$, $r_{ky}=0.16$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış başlık için potansiyel dağılımı.....	106
Şekil 4.42.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{by}=2.7$, $r_{ky}=0.16$ p.u olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı.....	107
Şekil 4.43.	$r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.12$ p.u, $r_{yis}=0.13$ p.u, $r_{sct}=0.15$ p.u, $r_e=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.10$ p.u, $l_e=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ve yapılmamış kablo ekinin incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü.....	108
Şekil 4.44.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmamış ek için potansiyel dağılımı.....	109
Şekil 4.45.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=10$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı	110
Şekil 4.46.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı	111
Şekil 4.47.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=50$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı	112

Şekil 4.48.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=100$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı	113
Şekil 4.49.	$\epsilon_{ky}=5$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmamış ek için potansiyel dağılımı.....	114
Şekil 4.50.	$\epsilon_{ky}=5$, $\epsilon_{sct}=10$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı	115
Şekil 4.51.	$\epsilon_{ky}=5$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı	116
Şekil 4.52.	$\epsilon_{ky}=5$, $\epsilon_{sct}=50$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı	117
Şekil 4.53.	$\epsilon_{ky}=5$, $\epsilon_{sct}=100$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı	118
Şekil 4.54.	$r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.12$ p.u, $r_{yis}=0.13$ p.u, $r_{sct}=0.15$ p.u $r_e=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.20$ p.u, $l_e=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ve yapılmamış kablo ekinin incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü.....	119
Şekil 4.55.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{ey}=2.7$, $l_{yis}=0.20$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış ek için potansiyel dağılımı.....	120
Şekil 4.56.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{yis}=20$, $\epsilon_{ey}=2.7$, $l_{yis}=0.20$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı	121
Şekil 4.57.	$r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.12$ p.u, $r_{yis}=0.13$ p.u, $r_{sct}=0.15$ p.u $r_e=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.05$ p.u, $l_e=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ve yapılmamış kablo ekinin incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü.....	122
Şekil 4.58.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{ey}=2.7$, $l_{yis}=0.05$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış ek için potansiyel dağılımı.....	123
Şekil 4.59.	$\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{yis}=20$, $\epsilon_{ey}=2.7$, $l_{yis}=0.05$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı	124
Şekil 4.60	$r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.12$ p.u, $r_{yis}=0.121$ p.u, $r_{sct}=0.14$ p.u $r_e=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.10$ p.u, $l_e=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ve yapılmamış kablo ekinin incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü.....	125

- Şekil 4.61. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{ey}=2.7$, $r_{yis}=0.121$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış ek için potansiyel dağılımı 126
- Şekil 4.62. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{ey}=2.7$, $r_{yis}=0.121$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı 127
- Şekil 4.63. $r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.12$ p.u, $r_{yis}=0.13$ p.u, $r_{sct}=0.17$ p.u $r_e=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.10$ p.u, $l_e=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış kablo ekinin incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü..... 128
- Şekil 4.64. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{ey}=2.7$, $r_{sct}=0.17$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı 129
- Şekil 4.65. $r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.12$ p.u, $r_{yis}=0.13$ p.u, $r_{sct}=0.15$, p.u, $r_{yie}=0.14$ p.u $r_e=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.10$ p.u, $l_e=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ve yapılmamış kablo ekinin incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü..... 130
- Şekil 4.66. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{ey}=2.7$, $r_{yie}=0.14$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış ek için potansiyel dağılımı 131
- Şekil 4.67. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{ey}=2.7$, $r_{yie}=0.14$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı 132

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
D	Elektrik akı yoğunluğu, C/m^2
E	Elektrik alan şiddeti, V/m
ϵ_{ky}	Kablo yalıtkanı dielektrik sabiti, F/m
ϵ_{by}	Başlık yalıtkanı dielektrik sabiti, F/m
ϵ_{ey}	Ek yalıtkanı dielektrik sabiti, F/m
ϵ_{sct}	Alan kontrol tüpü dielektrik sabiti, F/m
ϵ	Yalıtkan madde için dielektrik sabiti, F/m
Φ	Elektrostatik potansiyel, V
Δ	Laplacien operatörü
J	Enerji fonksiyoneli, $Joule/m$
N_i, N_j, N_k	Şekil fonksiyonları
l^e	Doğrusal elemanın uzunluğu
Δ^e	Üçgensel elemanın alanı
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	Skalar katsayılar
$[K^e]$	Eleman matrisi
$[K^{genel}]$	Sistem matrisi
L_1, L_2, L_3	Doğal koordinatlar
r_i	İletken yarıçapı
r_{ky}	Kablo yalıtkanı yarıçapı
r_{yis}	Yarı iletken siper yarıçapı
r_b	Başlık yarıçapı
r_e	Ek yarıçapı
l_{yis}	Yarı iletken siper uzunluğu
l_{yie}	Yarı iletken elektrot uzunluğu
l_b	Başlık uzunluğu

l_e**Ek uzunluğu****Kısaltmalar****Açıklama****SEM****Sonlu Elemanlar Metodu****PE****Poly Ethylen****PVC****Poly Vinyl Chloride****EPR****Ethylen Propylene Rubber****XLPE****Crosslinked Poly Ethylen****LPDE****Low Density PE****SCT****Alan kontrol tüpü****YİS****Yarı iletken siper****YİE****Yarı iletken elektrot**

1. GİRİŞ

Günümüzde büyük elektrik güçlerinin uzak mesafelere iletimi önem kazanmaktadır. Bilindiği gibi çok büyük güçte elektrik enerjisinin çok uzun mesafelere iletimi teknolojik ve ekonomik bakımdan ancak yüksek gerilimli sistemlerle mümkündür. Yüksek gerilimli sistemlerde elektrik alan analizi yüksek gerilim iletim hatlarının ve cihazlarının tasarımı açısından çok önemlidir. Bu nedenle yüksek gerilim cihazlarının ekonomik ve dengeli tasarlanabilmesi için elektrostatik alan hesaplamalarında bazı metotlar kullanılır. Bunlar; analitik metotlar, analog (deneysel) metotlar ve nümerik (sayısal) metotlardır.

Analitik metotlar problemin analitik çözümünün olduğu durumlarda en kullanışlı ve en doğru olanıdır. Ancak bu çözümler sadece çok basit konfigürasyonlar için geçerli olup karmaşık sınırlı ve çok dielektrikli sistemlerde kullanımı zorlaşmaktadır. Analog metotlarda ise elektrostatik tanklar, iletken kağıtlar veya rezistans devreleri kullanılır. Analog çözümler kesin olmadığı gibi uygulaması zor ve pahalıdır. Ayrıca dikkatli ölçümlere rağmen hassas sonuçlar elde edilememektedir. Analitik ve analog metotların bu dezavantajlarına karşın 1960'lı yıllardan itibaren yüksek hızlı bilgisayarların da devreye girmesiyle nümerik metotlar kullanılmaya başlanmıştır. Bu nümerik metotlar; sonlu elemanlar metodu, sonlu farklar metodu, sınır elemanları metodu, yük simülasyonu metodu ve Monte Carlo metodu olarak sınıflandırılabilir. Bunlar içerisinde yüksek geometrik esnekliğe sahip olan sonlu elemanlar metodu en dikkat çekici olanıdır.

Elektrostatik alan incelemelerinde hangi sayısal metot kullanılarak analiz yapılacağına karar vermede, problem için en kısa sürede en doğru sonucu verme, kolay programlanabilme ve kolay kullanılabilme özellikleri etkilidir.

Sonlu elemanlar metodu (SEM) öteki nümerik metotların aksine incelenen

bölgenin geometrisine fazlaca bağlı değildir. Ve bu da özellikle tasarım aşamasında çok önemlidir. Bu gibi sebeplerden dolayı bu çalışmada sonlu elemanlar metodu tercih edilmiştir. Metodun probleme uygulanmasında karşılaşılan en büyük güçlük incelenen bölgenin elemanlara ayrıştırılmasıdır. Ağ üretme işlemi Zienkiewicz tarafından önerilen yöntem kullanılarak yazılan bir bilgisayar programı ile gerçekleştirilmiştir. İncelenen bölge istenen sayıda elemana ayrıldıktan sonra elde edilen koordinat ve süreklilik gibi bilgiler dosyalara aktarılmış ve bu dosyalar problemin sonlu elemanlar metoduyla çözümünü gerçekleştiren diğer bir program tarafından kullanılmıştır. Problemin sonlu elemanlar metoduyla çözümünü gerçekleştiren programdan elde edilen sonuçlar (potansiyel) yine dosyalara aktarılmış ve bu dosyalar da eş potansiyel eğrilerini çizen bilgisayar programı tarafından kullanılmıştır. Bu üç program kullanılarak yüksek gerilim kablo başlıkları ve kablo eklerinin potansiyel dağılımları alan kontrolü yapılarak ve alan kontrolü yapılmaksızın elde edilmiş ve bu sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Birinci bölümde yapılan bu girişten sonra ikinci bölümde güç kabloları incelenmiş, üçüncü bölümde sonlu elemanlar metodu anlatılmış ve dördüncü bölümde metodun probleme uygulanması ve programlama açıklanmıştır. Beşinci bölüm sonuç bölümüdür.

2. GÜÇ KABLolarI

2.1. Giriş

Kablolar enerjinin üretim iletim ve dağıtım aşamalarında, çeşitli yerlerde kullanılır. İletim hatlarına göre pahalı olmaları nedeniyle enerjinin çok uzak mesafelere taşınmasında kullanılmazlar. Ayrıca, kapasitif etki ve kaçak akımlarının iletim hatlarına göre büyük olması, trafo ve jeneratörleri boşa çalışırken saf bir kapasitif yük gibi yüklemeleri tercih edilmemelerine yol açmaktadır (1). Ancak kablolar;

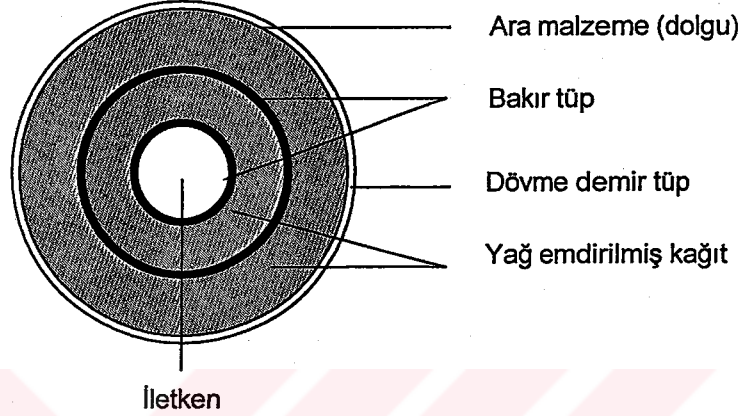
- Hatlarla enerji iletiminin güç ve tehlikeli olduğu yerlerde,
- Şehir içerisinde görünümün ön planda olduğu ve can güvenliğinin söz konusu olduğu yerlerde,
- Göl ve akarsu geçişlerinde, adalar arasında ve benzeri bazı yerlerde iletim için kullanılacak tek vasıtaadır.

Kablo iletkenleri bakır, alüminyum veya süper iletken malzemelerden olabilir. İletken malzeme olarak bakır yerine giderek alüminyum tercih edilmektedir. Bunun nedeni alüminyumun hafif ve ucuz olmasıdır. Ancak yüksek akım yoğunluğu kablo iletkeni için bakır seçilmesini gerektirir. Kablo iletkeni tek telli veya örgülü çok telli olabilir. Gerek alüminyum gerekse bakır örgülü, çok telli halde kullanılarak kabloya bükülme özelliği kazandırılır.

2.2. Tarihsel Gelişim

Kabloların tarihi gelişimi yalıtkan malzemelerin gelişimine paralel olmuştur. İlk kablo 1890-1933 yılları arasında Londra'da kullanılmaktaydı (2). Yağ emdirilmiş kağıt yalıtkanlı 11KV'luk kablonun kesiti Şekil 2.1'de

görülmektedir. Bu kabloya Ferranti kablosu denilmektedir. 6 metre boyunda imal edilen bu kablolar pek çok sayıda ek kullanılarak arzu edilen boylara getirilmekteydi.



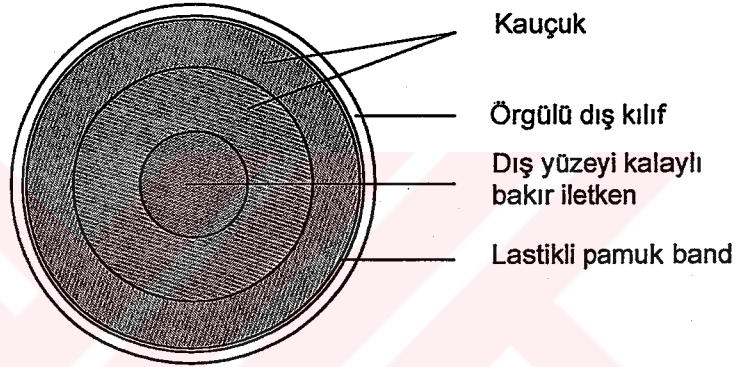
Şekil 2.1. 11kV'luk Ferranti kablosu (kağıt yalıtkanlı kablo)

Yağ emdirilmiş kağıt, termoplastik malzemelerde yeni gelişmeler olana kadar en yaygın kullanılan kablo yalıtkanıydı. Bugünlerde alçak ve orta gerilim kablolarının yalıtımında kağıt yerini tamamen plastik (PVC, PE)'e, yüksek gerilim kablolarının yalıtımında ise PE'e bırakmıştır.

Kağıt yalıtkanlı kablolarda kullanılan kağıt, yağ emdirilmiş kağıt olup yağ nedeniyle delinme dayanımı normal kağıda göre daha büyüktür. Örneğin 70kV/cm delinme dayanımlı bir kağıt yağ emdirildikten sonra 600kV/cm'lik bir delinme dayanımına sahip olur. Emdirilen yağın işletme sıcaklığının ve yer çekiminin etkisiyle kablonun alt tarafına yığılmasını önlemek için yağ içine reçine katılarak viskozitesi artırılır.

1kV'un altındaki işletme gerilimlerinde plastik yalıtkanlı kablolar çıkana kadar kağıt kablolarla göre kauçuk kablolar tercih edilirdi. Kauçuk kablolar her ne kadar 25kV'a kadar normalize edilmişlerse de genellikle 1kV'un altındaki işletme geriliminde kullanılmışlardır. Kauçuk kabloların işletme gerilimleri küçük olup kullanılan kauçuğun sertlik derecesini arttırmak için vulkanizasyon

işlemine tabi tutulur. Bu işlemde katkı maddesi olarak kükürt kullanılır. Kauçuğun bakırla teması iletken yüzeyinde, kimyasal etkileşim sonucunda bozulmalara yol açar. Bunu önlemek için kablo iletkeni olarak bakır kullanılmışsa iletkenin yüzeyi kalayla kaplanır Daha yüksek gerilimlerde bunların yerine kağıt, plastik gibi kablolar kullanılmıştır. Kauçuk kablolar, dıştan gelecek mekanik darbelere karşı korumak için iç yüzeyleri yalıtkanlı borular içerisinde kullanılır.

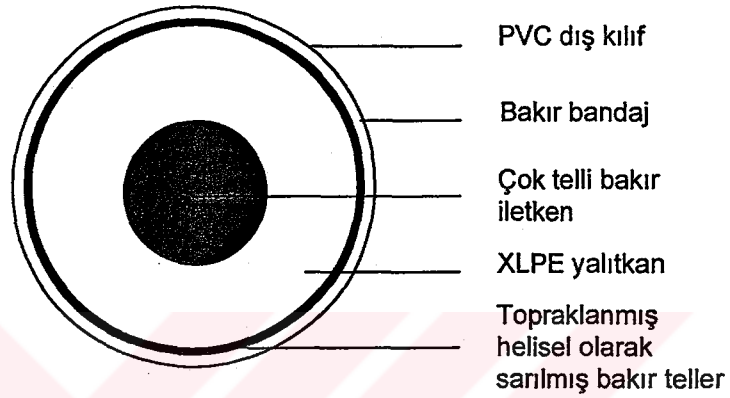


Şekil 2.2: Kauçuk kablo

Plastik maddelerdeki gelişmelerle, yağ emdirilmiş kağıtlı kablolar ve özellikle kauçuk kablolar artık uygulamadan kalkmış ve yerini plastik yalıtkanlı kablolarla bırakmıştır. Bunun nedenleri; plastik görünüm olarak iyi, ağırlık olarak hafif, nem emmez, su çekmez, kağıt ve kauçuğa göre mekanik darbelere ve tutuşmaya daha dayanıklı, daha ucuz ve daha kolay elde edilebilir. Plastik malzeme olarak PVC (Poly Vinyl Chloride), PE (Poly Ethylen), XLPE (Crosslinked Poly Ethylen), EPR (Ethylen Propylene Rubber) kullanılmaktadır.

PVC çok sert, kırılabilir, ısıl kararsızlığa sahip ve soğuk ortamlarda mekanik darbelere karşı duyarlı bir yapıya sahiptir. PVC'nin içine uygun katkı maddeleri katılarak yumuşak, ısıl kararlılığa sahip ve daha dayanıklı bir özellik kazandırılır. Kullanıldıkları işletme gerilimlerine göre PVC/A ve PVC/B olmak üzere sınıflandırılır. PVC/A 3kV'dan düşük gerilimlerde ve PVC/B'de

3kV'dan yüksek gerilimlerde kullanılır. PVC malzemeler, birçok üstün özelliklerine (voltaj, nem ve ısı dayanımı gibi) karşın dielektrik kayıplarının oldukça yüksek olması nedeniyle 15kV'dan daha yüksek gerilimlerde pek kullanılmazlar.

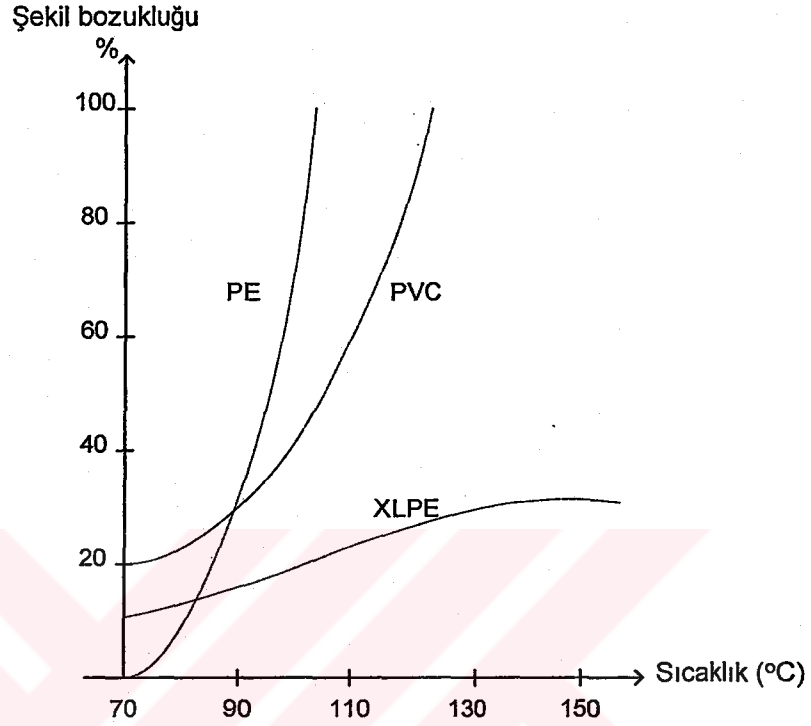


Şekil 2.3. 35kV'luk XLPE yalıtkanlı kablo

PE saf olarak kullanılabilir bir malzemedir. PE yüksek elektriksel dayanıma, düşük dielektrik sabitine, düşük dielektrik kayıplara sahiptir. LDPE (Low Density PE)'lerin yoğunlukları küçük olduğu için kolay işlenip kolay şekil verilebilen bir PE türüdür. XLPE, moleküler yapıda çapraz bağlı bir PE türüdür. Moleküler yapısındaki bu bağdan dolayı yüksek sıcaklıklarda bile bir yapısal değişiklik, yani bir şekil bozukluğu ortaya çıkmaz. Bu nedenle yüksek gerilimlerde de kullanılabilir.

PVC, PE ve XLPE yalıtkan malzemelerden yapılmış bir cismin biçimi sıcaklıkla bozulmaktadır. Şekil 2.1'de görüldüğü gibi bu malzemelerden en çok PE, daha sonra PVC ve en az da XLPE sıcaklıktan etkilenmektedir.

Çizelge 2.1'de karşılaştırma amacıyla kağıt, sert kauçuk ve plastik (PVC, PE, XLPE) malzemelerin bazı özellikleri verilmektedir. Bu tablodan, ϵ_r ve $tg\delta$ 'nın küçük olması nedeniyle XLPE'nin kayıplarının daha küçük olacağı görülmektedir.



Şekil 2.4. Şekil bozukluğunun sıcaklıkla değişimi

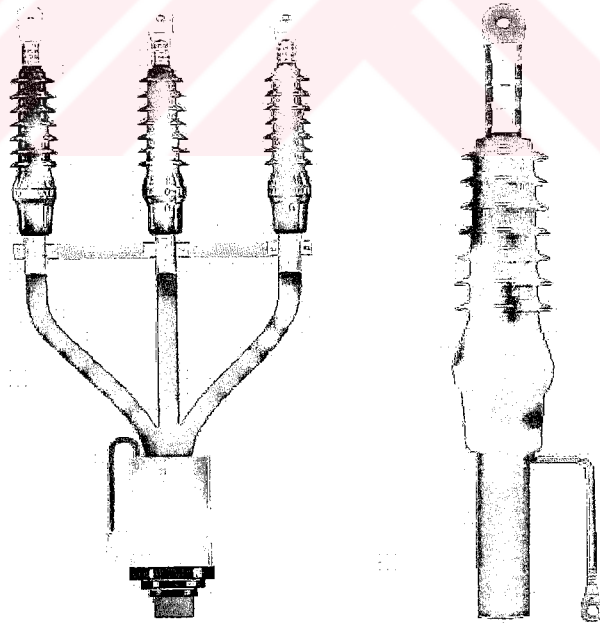
Çizelge 2.1. Kablo yalıtkanlarının karşılaştırılması

Malzeme	İletken Sıcaklığı (°C)		Elektriksel Özellikler	
	Devamlı İşletmede	Kısa Devrede	ϵ_r	$10^{-3} \cdot tg\delta$
Kağıt	65	250	3,5	3-10
Sert Kauçuk	85	250	3-4	50-80
PVC	70	140-160	4-8	90
PE	70	150	3	10
XLPE	90	250	2,4	4

Nominal gerilimi 15kV'a kadar olan kablolar PVC, PE, XLPE yalıtkanlı olmasına rağmen daha yüksek gerilimli kablolar PE veya XLPE yalıtkanlıdır.

2.3. Kablo Başlıkları ve Ekleri

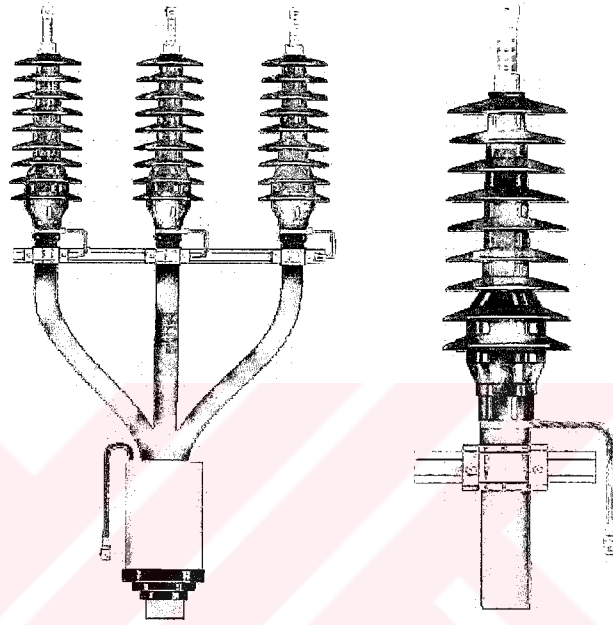
Kablonun bağlantı yapmak için kesilmiş olan uçlarından nem almaması ve yüksek gerilim kablolarında elektrik alanının düzgünlüğünün sağlanması için kablo uçları kablo başlıkları ile donatılır. Kablo başlıkları ile aynı zamanda damarlar desteklendiğinden, bağlantı uçlarında kısa devrenin mekanik zorlamalarına karşı da dayanım sağlanmış olur. Kablo başlıklarını dahili tip başlıklar ve harici tip başlıklar olmak üzere sınıflandırabiliriz. Bunlardan dahili başlık kablo uçlarını bina içinde veya diğer kapalı yerlerde irtibatlandırmak için kullanılan başlıklardır. 1kV'luk kablolarda dahili başlık kullanımına gerek yoktur. 1kV'un üstündeki kablolarda ise elektrik alanının kontrol altına alınması için ve kısa devre dinamik ve mekanik zorlamalarına karşı başlık kullanılması gerekir(3).



Şekil 2.5. 10kV-35kV dahili tip kablo başlığı

Harici başlıklar açık yerlerdeki kablo uçlarını irtibatlandırmak için kullanılır. 1kV'luk kablolarda yağmur suyu ve nemin kablo içine sızmasını önlemek için kablo ucunda, damarların birbirinden ayrıldığı noktaya harici kablo başlığı

monte edilmelidir. 1kV'un üzerindeki kablolarda ise kablo başlığı aynı zamanda elektrik alan kontrolü ve kısa devre zorlanmalarına karşı dayanım sağlar.



Şekil 2.6. 10kV-35kV harici tip kablo başlığı

Kablo ekleri kabloların birbirine eklenmesinde kullanılır. Kablo döşeneceği geçek üzerinde yeterli uzunlukta değilse veya kablodan ayırım yapılacaksa, kabloya ek yapılır. Bu ekler kablolarda bağlantı noktasını bütün dış etkilere karşı tamamen korur. 1 km uzunluğundaki kabloya 6'dan fazla ek yapılması istenmez. Kablo eklerinde kablo nem almamalı, ek yeri elektrik, mekanik zorlanmalara ve korozyona karşı dayanıklı olmalıdır. İki kabloyu birbirine eklemek için düz ek, ana kablodan bir kabloya ayırım almak için T veya K ek, ana kablodan iki kabloya ayırım almak için X, K veya H ek, iki ayrı tür kablonun birbirine eklenmesi için geçit ek kullanılır.

Kablo başlıkları ve kablo eklerinde aranan en önemli özellik, başlık veya ekin tatbik edildiği noktada, kablonun gerek mekaniksel ve gerekse elektriksel özelliklerinin aynen muhafaza edilmesidir. Başlıklar ve ekler elektrik ve

mekanik bakımdan en az uygulandığı kablo kadar güvenilir olmalı, özelliklerini kablonun ömrü boyunca koruyabilmeli, uygulaması çabuk ve kolay olmalıdır.



Şekil 2.7. 12kV-36kV kablo eki

2.4. Kablo Başlık Ve Eklerinde Elektrik Alan Kontrolü

Güç kabloları sonlandırıldığında veya birbirine eklendiğinde elektrik alan kontrolü gerektirir. Kabloya başlık takılırken veya ek yapılırken izolasyon bandı çıkarıldığında kablonun soyulan ucunda elektrik alan dağılır ve buralarda yüksek elektrik alana neden olur. Bu yüksek elektrik alan da havanın delinmesine neden olur ve bunun sonucu korona oluşur. Yüksek elektrik alan bölgeleri iç deşarja da neden olur. Korona veya iç deşarj sonunda kablo yalıtkanına zarar verir ve ekin veya başlığın vaktinden önce arızalanmasına neden olur. Elektrik alanın denetlenmesi için; yüzey elemanları ile soyulan yarı iletken siper arasındaki C_1 kapasitesi, yüzey elemanları ile iletken arasındaki C_0 kapasitesi göz önüne alınır. Bu

kapasitelerin tersleri, yüzey elemanları ve dış yarı iletken siper arasında beliren potansiyellerle orantılıdır. Yüzey deşarjını başlatan gerilim;

$$U_a = E_d \sqrt{\frac{C_1}{C_0}}$$

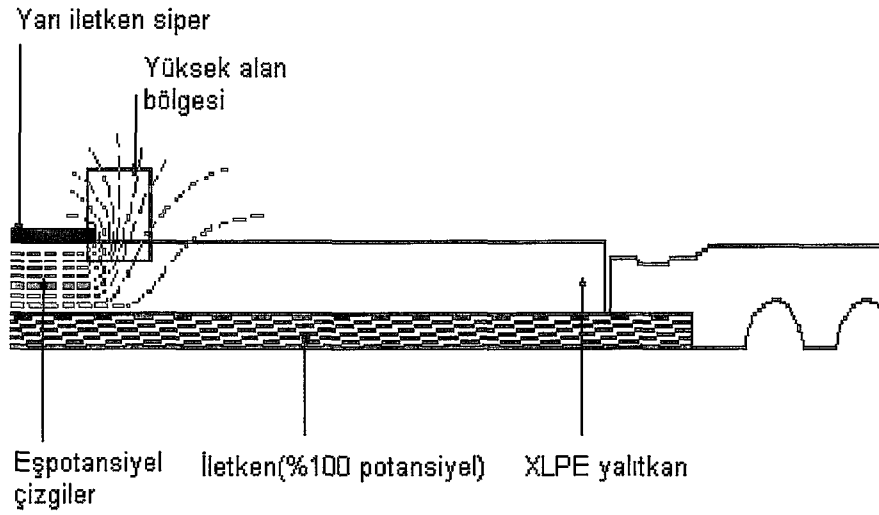
bağıntısıyla verilir. Burada E_d yarı iletken siperin kesilen ucunda delinme gerilimidir. Eğer damarın çevresinde, örneğin hava bulunuyorsa C_0 , C_1 'den daha küçüktür. Bu durumda yüzey elemanı ile yarı iletken siper arasında beliren gerilimin havanın delinme geriliminden büyük olması deşarja yol açar.

Elektrik alanın denetlenmesi C_1 'i büyütmek veya C_0 'ı küçültmekle sağlanır. Bu amaçla genellikle C_0 'ı küçültmek için dış yarı iletken siperin kesik ucuna büküm verilerek alan konisi yaratılır. Veya elektrik alan çizgilerinin kırılması ile C_1 büyütülür. Bunun için yalıtkan kılıfın üzerine dielektrik katsayısı çok yüksek olan yalıtkan maddeden bir boru geçirilir. Bu boru alan kontrol tüpü (SCT-Stress Control Tube) olarak adlandırılır. SCT ısı dengeli çapraz bağlı yüksek dielektrik katsayılı ve yüksek öz dirençli polimetrik materyallerden yapılır.



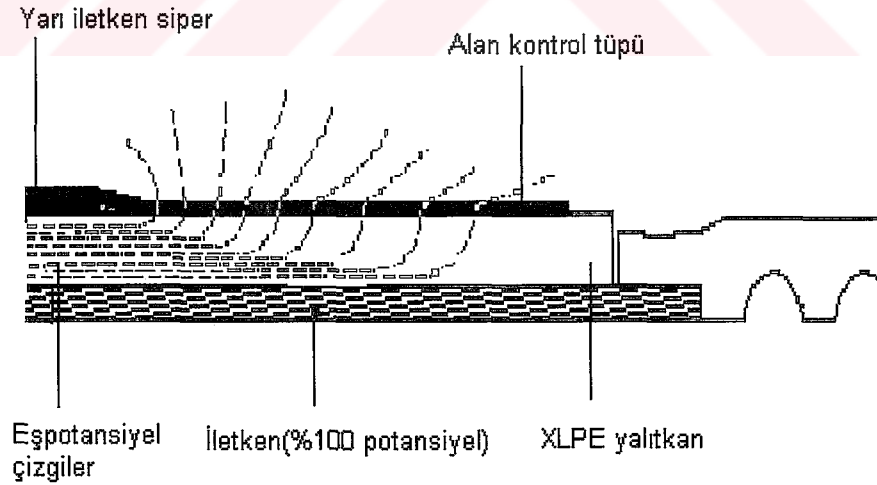
Şekil 2.8. Alan kontrol tüpü

Şekil 2.9 elektrik alan kontrolü yapılmamış bir enerjilendirilmiş kablo başlığı göstermektedir. Elektrik alan yoğunluğunun büyük olduğu yarı iletken siperin yakınındaki bölgelerde eş potansiyel çizgiler yoğunlaşmıştır. Yalıtkan meydana gelebilecek delinme veya deşarja neden olan elektrik alan yoğunluğunu azaltmak için alan kontrolü yapmak gereklidir(4).



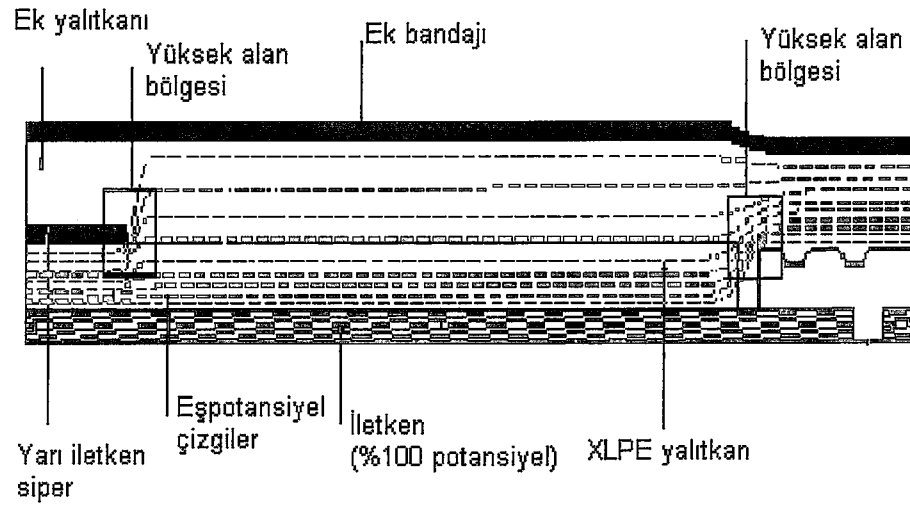
Şekil 2.9. Elektrik alan kontrolü yapılmamış kablo başlığı

Alan kontrol tüpü sisteme eklendiğinde eş potansiyel çizgiler dağılır, elektrik alan yayılır ve çalışma seviyesinde kablo yalıtkanının elektrik alanı azaltılmış olur (Şekil 2.10). Bu yüksek dielektrik katsayılı materyal (SCT) tarafından sağlanır. Aynı işlem alan konisi kullanılarak da yapılabilir.



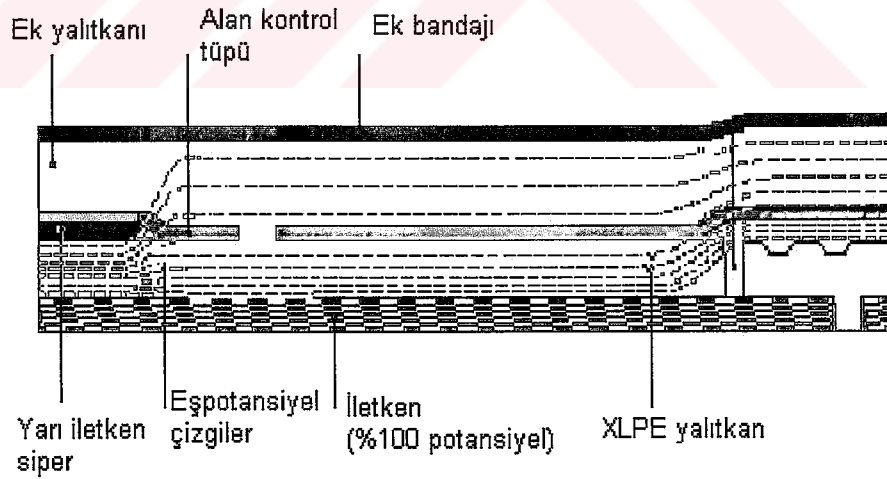
Şekil 2.10. Elektrik alan kontrolü yapılmış kablo başlığı

Şekil 2.11'de alan kontrolü yapılmamış kablo ekine ait potansiyel dağılımı gösterilmiştir.



Şekil 2.11. Elektrik alan kontrolü yapılmamış kablo eki

Şekil 2.12'de ise yalıtkan kılıfın üzerine alan kontrol tüpü yerleştirilmiş ve eş potansiyel çizgiler düzgün olarak dağılmıştır ve ek içindeki elektrik alanlar azaltılmıştır. Böylece kablo ekinin ömrü uzatılmış olur.



Şekil 2.12. Elektrik alan kontrolü yapılmış kablo eki

3. SONLU ELEMANLAR METODU

3.1. Giriş

Sonlu elemanlar metodu matematiksel fiziğin sınır değer problemlerine yaklaşık çözümler elde etmek için kullanılan nümerik bir yöntemdir. Metodun çıkış noktasının ne olduğu tam olarak bilinmemekte olup 1950'li yıllarda denizaltı dizaynında kullanılmaya başlanmıştır. 1960'larda uzay çalışmalarının başlaması ve matematiksel uygulamaların da gelişmesiyle metod gerçek kimliğine kavuşmuş, uçak, uzay kapsülü ve benzeri tasarımlar sayesinde geniş bir kullanım alanı bulmuştur.

Sonlu elemanlar metodu çeşitli mühendislik problemlerinin yaklaşık çözümünü elde etmek için kullanılan bir nümerik analiz tekniğidir. Metodun amacı incelenen bölgedeki belirli noktalara ait alan değerlerinin bulunmasıdır. Bu işlemin hassas bir biçimde yapılabilmesi için incelenen bölgedeki nokta sayısının olabildiğince fazla olması gerekir. Bu da çok fazla sayıda cebirsel denklemin çözümü demektir. Bu nedenle sonlu elemanlar metodu ancak yeterli bilgisayar donanımı ile kullanışlı bir metottur(5).

Bu metodun en büyük avantajı düzensiz şekillerin ve eğrisel sınır koşullarının incelenmesine olanak tanımasıdır. Sonlu elemanlar metodu; karmaşık olan problemlerin daha basit alt problemlere ayrılarak her birinin kendi içinde çözülmesiyle tam çözümün bulunduğu yöntemdir.

Bu çalışmanın amacı herhangi bir geometride potansiyel ve elektrik alan analizini sonlu elemanlar metodu ile yapmaktır. Bunun için bir bilgisayar programı yazılmış ve yüksek gerilim kablo başlık ve eklerinde potansiyel dağılımı ve elektrik alan hesaplamalarında kullanılmıştır.

3.2. Sınır Değer Problemlerinin Çözümü

Diferansiyel denklemlerle tanımlanabilen herhangi bir fizik probleminin en güvenilir çözümü analitik çözümdür. Ancak analitik çözümün çok zor hatta imkansız olduğu pek çok durum söz konusudur. Örneğin incelenen şeklin geometrisi matematiksel olarak ifade edilemeyecek kadar karmaşık ve düzensiz olursa analitik çözüm bulunamayacağı için geçerli değildir. Analitik çözümün bulunmadığı bu gibi durumlarda nümerik yöntemler kullanılarak yaklaşık bir çözüm elde edilebilir. Bütün nümerik çözümler bağımsız parametre takımları için süreksiz noktalarda sonuç bulma prensibine dayanır.

Sonlu elemanlar metodu herhangi bir fizik problemine uygulandığında incelenen bölge sonlu sayıda elemana bölünür ve her bir elemanın köşe noktalarındaki (düğüm noktalarındaki) alan değerleri hesaplanır.

Sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılan iki klasik metot vardır. Bunlardan biri Ritz-Varyasyonel Metodu ve diğeri Galerkin Metodu'dur. Sonlu elemanlar metodu ile çözüm yapılırken bu metotlardan Ritz-Varyasyonel metodu kullanılacaktır.

3.3. Sonlu Elemanlar Metodunun Çözüm Yöntemi

Fizik problemlerinde incelenen bölgeler sürekli olmalarına rağmen çözüme ulaşmak için bu bölgeler ayrıklaştırılmalıdır. Sürekli ortamların serbestlik derecesi sonsuzdur. Bu ortamlarda sonsuz adet nokta olup bu noktaların her biri bir düğüm noktasıdır ve tek tek incelenmeleri mümkün değildir. Ayrıklaştırılmış ortamlarda ise serbestlik derecesi sonludur ve düğüm sayısına eşittir. Böylece incelenecek nokta sayısı sonsuzdan sonluya indirgenmiş olur (6).

Sonlu elemanlar yaklaşımına ulaşmak için farklı matematiksel metotlar vardır. İlgilendiğimiz şey bir bölgedeki alan veya potansiyel Laplace veya Poisson tipindeki bir alan olduğunda sonlu elemanlar metodu tüm alandaki enerjinin minimizasyonu ile ilgilenir.

Laplace Denklemi:

$$\nabla^2 V = 0$$

Basit elektrostatik problemlerin çözümünde kullanılır. Kaynakların bulunmadığı bir ortamda Poisson denkleminin özel halidir. Sınır koşulları genellikle Dirichlet türündendir. Laplace denklemine karşılık gelen fonksiyonel aşağıdaki gibidir.

$$J = \frac{1}{2} \varepsilon \iiint_V \nabla^2 V dv$$

Bu aynı zamanda s yüzeyinde depolanan elektrostatik enerjidir.

Poisson denklemi:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} = -f$$

Daha karmaşık potansiyel problemlerin modellenmesinde kullanılır. Burada permitivite (ε) bazı durumlarda konum ile değişebilir yani çalıştığımız bölge içinde sabit değildir. Burada da sınır koşulları genellikle Dirichlet türündendir. Poisson denklemine karşılık gelen fonksiyonel aşağıdaki gibidir.

$$J = \frac{1}{2} \iiint_V (\nabla^2 V - 2fV) dv$$

3.4. Sonlu Elemanlar Metodunda İzlenecek Adımlar

Elektrik mühendisliğindeki bir çok problem iki boyutlu Laplace denkleminin çözümünü gerektirir. Herhangi bir C ortamında Laplace denklemi ile tanımlı bir Φ alanını ele alalım.

$$\nabla^2 \Phi(x, y) = 0.$$

Bu Φ alanının yani bu sınır değer probleminin çözümü aşağıdaki adımlardan oluşur (7).

3.4.1. Çözüm bölgesinin ayrıklaştırılması

İlk adım eleman tipinin belirlenmesi çözüm bölgesinin elemanlara ayrılması yani ayrıklaştırılmasıdır ve bu adım sonlu elemanlar metodunun en önemli adımıdır. Bu işlem otomatik ağ üreten bir bilgisayar programı yardımı ile yapılır.

Öncelikle çözüm bölgesinin geometrik yapısı belirlenerek bu geometrik yapıya en uygun elemanlar seçilmelidir. Seçilen elemanların çözüm bölgesini temsil etme oranında, elde edilecek neticeler gerçek çözüme yaklaşmış olacaktır. Sonlu elemanlar metodunda kullanılan elemanlar boyutlarına göre dört kısma ayrılabilir.

Tek boyutlu elemanlar: Bu elemanlar tek boyutlu olarak ifade edilebilen problemlerin çözümünde kullanılır. Bu grubun temel elemanı kısa çizgiler olup her iki ucunda birer tane olmak üzere iki düğüm noktasına sahiptir.

İki boyutlu elemanlar: İki boyutlu (düzlem) problemlerin çözümünde kullanılırlar. Bu grubun temel elemanı üç düğümlü üçgen elemandır. Üçgen elemanın altı, dokuz ve daha fazla düğüm ihtiva eden çeşitleri de vardır.

Düğüm sayısı seçilecek enterpolasyon fonksiyonunun derecesine göre belirlenir. İki üçgen elemanın birleşmesiyle meydana gelen dörtgen eleman, problemin geometrisine uyum sağladığı ölçüde kullanışlılığı olan bir elemandır. Dört veya daha fazla düğümlü olabilir.

Dönel Elemanlar: Eksenel simetrik özellik gösteren problemlerin çözümünde bu elemanlar kullanılır. Bu elemanlar bir veya iki boyutlu elemanların simetri eksenini etrafında bir tam dönme yapmasıyla oluşurlar. Gerçekte üç boyutlu olan bu elemanlar, eksenel simetrik problemleri iki boyutlu problem gibi çözme olanağı sağladığı için çok kullanışlıdır.

Üç boyutlu elemanlar: Bu grupta temel eleman üçgen piramittir. Bunun dışında dikdörtgenler prizması veya daha genel olarak altı yüzeyle elemanlar, üç boyutlu problemlerin çözümünde kullanılan eleman tipleridir.

İzoparametrik elemanlar: Çözüm bölgesinin sınırları eğri denklemleri ile tanımlanmışsa, kenarları doğru olan elemanların bu bölgeyi tam olarak tanımlaması mümkün değildir. Bu durumlarda bölgeyi gereken hassasiyette tanımlamak için elemanların boyutlarını küçültmek, dolayısıyla adetlerini arttırmak gerekmektedir. Bu durum çözülmesi gereken eleman sayısını artırır dolayısıyla gereken bilgisayar kapasitesinin ve çözüm zamanının artmasına neden olur. Bu olumsuzluklardan kurtulmak için, çözüm bölgesinin eğri denklemleri ile tanımlanan sınırlarına uyum sağlayacak eğri kenarlı izoparametrik elemanlar kullanılır.

Bu adımda çözüm bölgesini M adet elemana ayırdığımızı kabul edelim ($e=1,2,3,\dots,M$). Çözüm bölgesinin tamamı V ile gösterilirse V^e çözüm bölgesindeki tek bir elemanı ifade eder.

Çözüm bölgesi elemanlara ayrıldıktan sonra her bir elemanın tanımlanması gerekir. Bu da düğüm noktalarının tanımlanması yani düğüm noktalarının koordinatlarının belirlenmesi demektir.

3.4.2. Enterpolasyon fonksiyonunun seçimi

Sonlu elemanlar metoduyla problem analizinin ikinci adımı elemandaki alan değişkeninin değişimini gösteren ve eleman için bilinmeyen çözümlerin bir yaklaşımını sağlayan enterpolasyon fonksiyonu seçmektir. Enterpolasyon fonksiyonu olarak genellikle polinomlar seçilir çünkü integrasyonu ve türevleri kolaydır. Polinomlar birinci(doğrusal), ikinci(quadratik) yada daha yüksek dereceli seçilebilir. Yüksek dereceli polinomlar daha doğru sonuç vermesine karşın daha karmaşık formüller içerir ve çözümleri zordur. Bu nedenle lineer enterpolasyon daha yaygın olarak kullanılır. Polinom seçildikten sonra bir elemanda bilinmeyen çözüm için ifade türetilebilir.

Bir eleman için polinom açılım denklemini

$$\Phi(x, y) = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + \dots$$

Burada alınacak terim sayısı elemanın geometrisine bağlıdır ve elemandaki düğüm noktası sayısına eşittir. Bazı elemanlar için polinomlar aşağıda verilmiştir.

<u>Eleman</u>	<u>Polinom</u>
Doğru	$\Phi(x) = a + bx$
Üçgen	$\Phi(x, y) = a + bx + cy$
Dörtgen	$\Phi(x, y) = a + bx + cy + dxy$

3.4.3. Elemen özelliklerinin belirlenmesi

Üçüncü adım olan eleman özelliklerinin bulunması elemana ait denklemlerin oluşturulması ve eleman matrisinin elde edilmesidir. Elemanlar ve enterpolasyon fonksiyonları bir kere bulunduktan sonra elemanların

kendilerine özgü özelliklerini ifade eden matris denklemleri bulunabilir. Bunun için kullanılacak dört yaklaşım vardır (6). Bunlar; direkt yaklaşım, varyasyonel yaklaşım, ağırlıklı kalan yaklaşımı ve enerji dengesi yaklaşımıdır.

Direkt yaklaşım: Bu yaklaşım daha çok tek boyutlu ve basit problemler için uygundur

Varyasyonel yaklaşım: Bir fonksiyonelin ekstremize yani maksimum ve minimum edilmesi demektir. Elektrik mühendisliğinde en çok kullanılan fonksiyonel elektrostatik enerji prensibidir. Fonksiyonelin birinci türevinin sıfır olduğu noktada fonksiyonu ekstremize eden değerler bulunur. İkinci türevin sıfırdan büyük veya küçük olmasına göre bu değer maksimum veya minimum olduğu anlaşılır.

Ağırlıklı kalanlar yaklaşımı: Bir fonksiyonun çeşitli değerler karşılığında elde edilen yaklaşık çözümü ile gerçek çözüm arasındaki farkların bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak toplamalarını minimize etme işlemidir. Bu yaklaşım kullanılarak eleman özelliklerinin elde edilmesinin avantajı, fonksiyonellerin elde edilemediği problemlerde uygulanabilir olmasıdır.

Enerji dengesi yaklaşımı: Bir sisteme giren ve çıkan elektrik veya mekanik enerjilerin eşitliği ilkesine dayanır. Bu yaklaşım bir fonksiyonele ihtiyaç duymaz.

Sonlu elemanlar metodu ile problem çözümünde kullanılacak olan yaklaşım çözüm işleminde izlenecek yolu değiştirmez. Bunlardan en sık kullanılan varyasyonel yaklaşımdır ve bu çalışmada da kullanılacaktır.

3.4.4. Çözüm bölgesindeki elemanların birleştirilmesi

Sonlu elemanlar analizinin dördüncü adımında eleman ağlarıyla modellenen tüm sisteme ait denklemlerin elde edilmesi için tüm elemanların özelliklerinin birleştirilmesi gerekir. Yani elemanların davranışlarını ifade eden matrisleri birleştirmeliyiz. Tüm sisteme ait matrisin eleman matrislerinden tek farkı daha fazla terim içermesi olacaktır çünkü daha fazla düğüme sahiptir.

Eleman birleştirme prosedürü elemanların iç bağlı oldukları bir düğümde alan değişkeninin değeri bu düğümü paylaşan tüm elemanlarda aynıdır prensibinden yola çıkar. Elemanların birleştirilmesi işlemi rutin bir iştir ve elektronik bilgisayarlarca yapılır.

3.4.5. Sınır koşullarının probleme dahil edilmesi

Metodun beşinci adımında verilen sınır koşulları probleme dahil edilir.

Sınır Koşullarının Sınıflandırılması

Homojen Sınır Koşulları

Dirichlet Sınır Koşulu: $\Phi(\bar{r}) = 0$

Neumann Sınır Koşulu: $\frac{\partial \Phi(\bar{r})}{\partial n} = 0$

Karışık sınır Koşulu: $\frac{\partial \Phi(\bar{r})}{\partial n} + h(\bar{r})\Phi(\bar{r}) = 0$

3.4.6. Sistem denklemlerinin çözülmesi

Sonlu elemanlar metodunda sistem denklemlerinin çözümü son adımdır. Eleman birleştirme işlemi ve daha sonra buna sınır koşullarının eklenmesi alan değişkenlerinin bilinmeyen düğümsel denklemlerini bulmak için çözebileceğimiz eşzamanlı denklemler kümesi verir. Bu denklemler nümerik çözümlene tekniklerinden biri kullanılarak çözülür ve sonuca ulaşılır.

Bu aşamadan sonra eğer isteniyorsa ek hesaplamalar yapılır. Örneğin önce bir bölgedeki potansiyel dağılımı bulunur ve bu dağılımdan yararlanılarak aynı bölge için elektrik alan dağılımı elde edilir.

3.5. Sonlu eleman denklemlerinin türetilmesi

Burada sonlu eleman denklemleri varyasyonel yaklaşım kullanılarak türetilmiştir.

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad [3.1]$$

Laplace denkleminin karşılık gelen fonksiyonel;

$$J = \frac{1}{2} \iiint_V \left[k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dV \quad [3.2]$$

Bu aynı zamanda Laplace denkleminin için incelediğimiz bölgenin tüm V hacmi içinde depolanan elektrostatik enerjisidir. Şöyle ki;

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon (E)^2 dV, \quad E = -\nabla\Phi$$

E: elektrostatik alan

Φ : elektrostatik potansiyel

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon (-\nabla\Phi)^2 dV$$

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon (\nabla^2\Phi) dV$$

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \left[\epsilon \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \epsilon \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)^2 + \epsilon \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dV$$

ϵ : dielektrik katsayısı $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$

$\epsilon = k$ olmak üzere Eş. 3.2'de yazdığımız fonksiyonel, enerji denklemdir.

Bu fonksiyoneli herhangi bir S yüzeyi boyunca tanımlı

$$\Phi = \Phi_0(x, y, z)$$

[3.3]

sınır koşullarını da sağlayacak biçimde minimize eden $\Phi(x, y, z)$ potansiyeli

$\nabla^2\Phi = 0$ şeklinde tanımlanan Laplace denkleminin de çözümüdür. Bunu şöyle ifade edebiliriz.

Minimum enerji koşulunu
sağlayan potansiyel



Laplace denklemini
sağlayan potansiyel

Varyasyonel yaklaşım Eş. 3.2 ile tanımlı J fonksiyonelini minimum yaparak Laplace denkleminin çözümüne ulaşmayı amaçlar(enerjinin minimizasyonu ilkesi). Bu minimizasyon probleminin çözümünü adım-adım inceleyelim.

1.Adım

Potansiyelin tanımlı olduğu V hacmi her biri p adet düğüm içeren M adet elemana ayrıştırılır.

2.Adım

Her bir e elemanı içindeki potansiyel alanın değişimi için bir enterpolasyon fonksiyonu tanımlanır.

$$\Phi^e(x, y, z) = [N(x, y, z)] \vec{\Phi}^e \quad [3.4]$$

Bu N fonksiyonları Şekil Fonksiyonları (Shape Functions) olarak adlandırılır.

$$[N(x, y, z)] = [N_1(x, y, z) N_2(x, y, z) N_3(x, y, z) \dots N_p(x, y, z)]$$

$[N(x, y, z)]$ satır matrisi e elemanın $1, 2, 3, \dots, p$. düğüm noktaları için yazılmış şekil fonksiyonlarından oluşur.

$$\vec{\Phi}^e = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_p \end{bmatrix}$$

$\vec{\Phi}^e$ sütun vektörü ise e elemanın $1, 2, 3, \dots, p$. düğüm noktalarındaki potansiyel değerlerinden oluşur.

$N_i(x, y, z)$: e elemanın i . düğüm noktasındaki enterpolasyon fonksiyonu

Φ_i : e elemanın i. düğüm noktasındaki potansiyel değeri

3.Adım

Eş. 3.2 ile tanımlı J fonksiyonelini her bir eleman için geçerli J^e değerlerinin toplamı olacak şekilde ifade edebiliriz.

$$J = \sum_{e=1}^M J^e \quad [3.5]$$

J^e aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$J^e = \frac{1}{2} \iiint_{V^e} \left[k \left(\frac{\partial \Phi^e}{\partial x} \right)^2 + k \left(\frac{\partial \Phi^e}{\partial y} \right)^2 + k \left(\frac{\partial \Phi^e}{\partial z} \right)^2 \right] dV^e \quad [3.6]$$

V hacminde depolanan enerjinin minimizasyonu için J fonksiyonelini minimize etmemiz gerekir. Bunun için gerekli koşullar şöyle sağlanır.

$$\frac{\partial J}{\partial \Phi} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \Phi_i} = \sum_{e=1}^M \frac{\partial J^e}{\partial \Phi_i} = 0 \quad , \quad i=1,2,3,\dots,n \quad [3.7]$$

Burada n ; potansiyel değeri bilinmeyen toplam düğüm sayısıdır.

$$\frac{\partial J^e}{\partial \Phi_i} = \iiint_{V^e} \left[k \frac{\partial \Phi^e}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \Phi_i} \left(\frac{\partial \Phi^e}{\partial x} \right) + k \frac{\partial \Phi^e}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \Phi_i} \left(\frac{\partial \Phi^e}{\partial y} \right) + k \frac{\partial \Phi^e}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \Phi_i} \left(\frac{\partial \Phi^e}{\partial z} \right) \right] dV^e \quad [3.8]$$

$$\Phi^e(x, y, z) = [N(x, y, z)] \bar{\Phi}^e \quad \text{denkleminden}$$

$$\frac{\partial \Phi^e}{\partial x} = \left[\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} \dots \frac{\partial N_p}{\partial x} \right] \Phi^e \quad [3.9]$$

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_i} \left(\frac{\partial \Phi^e}{\partial x} \right) = \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad [3.10]$$

$$\frac{\partial J^e}{\partial \Phi^e} = [K^e] \bar{\Phi}^e \quad [3.11]$$

denklemini elde edilir.

4.Adım

Eş. 3.6 aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

$$\frac{\partial J}{\partial \Phi} = \sum_{e=1}^M \frac{\partial J_e}{\partial \Phi^e} = \sum_{e=1}^M [K^e] \bar{\Phi}^e = \vec{0} \quad [3.12]$$

Eleman birleştirme yöntemi kullanılarak tüm elemanlar için bulunan $[K^e]$ matrisleri birleştirilir ve genel $[K]$ matrisi elde edilir. Bu durumda Eş. 3.12 genel olarak şöyle ifade edilebilir.

$$[K] \bar{\Phi} = 0 \quad [3.13]$$

5.Adım

Eş. 3.12'ye sınır koşullarının ilave edilmesi ile $[K^e]$ matrisi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$[K^e] = \iiint_{V^e} [B]^T [D][B] dV \quad [3.14]$$

Burada $[B]$ ve $[D]$ matrisleri şu şekildedir.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_2}{\partial z} & \dots & \frac{\partial N_p}{\partial z} \end{bmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} \quad [3.15]$$

3.6. Tek Boyutlu Sonlu Elemanlar Metoduyla Analiz

3.6.1. Sınır değer probleminin tanımlanması

Kartezyen koordinatlarda bir boyutlu düzlemde kararlı durum problemi için geçerli diferansiyel denklem şu şekildedir (7).

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad [3.16]$$

Sınır koşulları herhangi bir L uzunluğunda

$$\Phi = \Phi_0(x)$$

ile tanımlanır. Eş. 3.16 ile tanımlanan diferansiyel denklemin çözümü ilgilendiğimiz bölgede geçerli enerji fonksiyoneli minimum yapan $\Phi(x, y)$ ifadesinin elde edilmesi demektir. Yani enerji fonksiyoneli minimum yapan $\Phi(x, y)$ aynı zamanda bir boyutlu Laplace denkleminin de çözümüdür. Bu durumda minimize edilmesi gereken fonksiyonel;

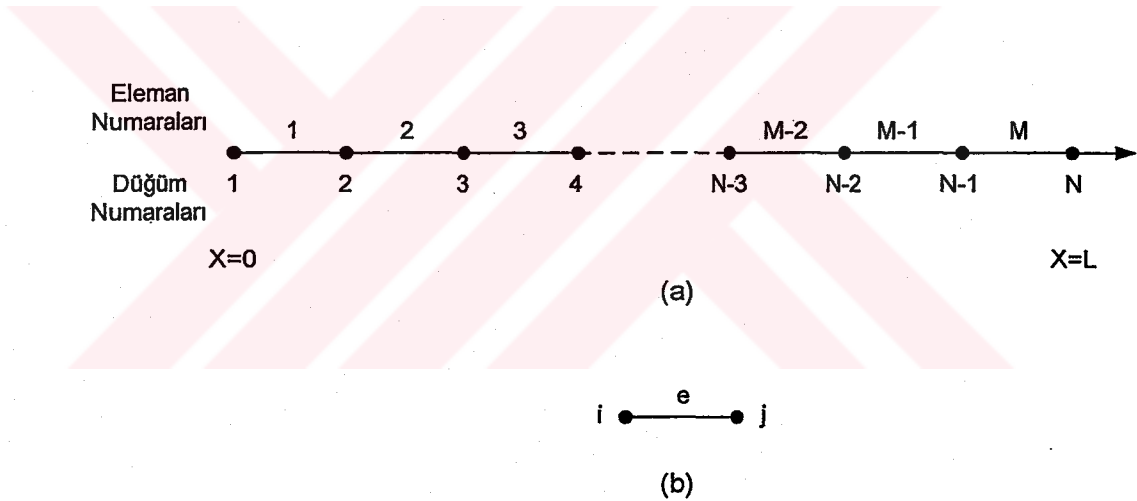
$$J = \frac{1}{2} \int k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^2} \right) dx \quad [3.17]$$

3.6.2. Sonlu elemanlar metodu analizi

Sınır değer problemlerinin sonlu elemanlar analizinde takip edilecek aşamalar ve sonlu eleman denklemlerinin türetilmesi daha önce açıklanmıştı. Şimdi bu adımları sırası ile tek boyutlu probleme uygulayalım.

1.Adım: Tanım kümesinin elemanlara ayrılması

İlk olarak $(0,L)$ tanım kümesinin alt elemanlara ayrılması ve ayrılan elemanların tanımlanması gerekir. Yani elemanların düğüm noktalarını sayılar ile tanımlamak gerekir.



Şekil 2.1. Tek boyutlu bölgenin elemanlara ayrılması

- (a) Global numaralandırma (tüm sistem için düğüm notasyonu)
 (b) Lokal numaralandırma (e elemanı için düğüm notasyonu)

2.Adım: Enterpolasyon fonksiyon (polinom) seçimi

Elemanlar içerisindeki potansiyelin doğrusal değiştiği kabul edilir. Elemanlar için düğüm noktaları seçilir ve eleman içindeki herhangi bir noktada geçerli olan polinom yaklaşımı yazılır.

$$\Phi^e(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$$

[3.18]

Düğüm noktalarındaki potansiyeller aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$i \text{ noktasında } \Phi^e(x_i) = \Phi_i$$

$$j \text{ noktasında } \Phi^e(x_j) = \Phi_j$$

Bu tanımlardan Φ_i ve Φ_j şu şekilde yazılabilir.

$$\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i$$

$$\Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j$$

Buradan α_1 , α_2 katsayıları çekilerek;

$$\alpha_1 = \frac{1}{l^e} (a_i \Phi_i + a_j \Phi_j)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{l^e} (b_i \Phi_i + b_j \Phi_j)$$

[3.19]

$$a_i = x_j$$

$$a_j = -x_i$$

$$b_i = -1$$

$$b_j = 1$$

[3.20]

ve

l^e : eleman uzunluğu;

$$l^e = x_j - x_i = a_i + a_j$$

Bu durumda Eş. 3.18 aşağıdaki hali alır.

$$\Phi^e(x) = \frac{1}{l^e} [(a_i + b_i x) \Phi_i + (a_j + b_j x) \Phi_j]$$

Eş. 3.4 gereğince;

$$\Phi^e(x) = [N(x)]\bar{\Phi}^e \quad [3.21]$$

idi. Son yazdığımız iki denklemin eşitliğinden $[N(x)]$ ve $\bar{\Phi}^e$ aşağıdaki gibi olur.

$$[N(x)] = [N_i(x) \quad N_j(x)] = \frac{1}{l^e} [(a_i + b_i x) \quad (a_j + b_j x)] \quad \text{ve} \quad \bar{\Phi}^e = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{bmatrix} \quad [3.22]$$

$N_i(x)$: e elemanın i. düğüm noktası için yazılmış enterpolasyon fonksiyonudur.

3.Adım: Eleman matrislerinin bulunması

Bu kısımda elemana ait denklem takımı türetilerek eleman matrisi elde edilir.

$[N(x)]$ matrisi Eş. 3.22 denkleminde olduğu gibi tanımlandıktan sonra Eş.

3.15 ile tanımlı $[B]$ ve $[D]$ matrisleri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{l^e} [b_i \quad b_j] \quad [3.23]$$

$$[D] = [k] \quad k = \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad [3.24]$$

Eş. 3.14 ile tanımlı $[K^e]$ matrisi şu şekilde elde edilir.

$$[K^e] = \int_{l^e} [B]^T [D] [B] dl$$

$$[K^e] = \frac{1}{(l^e)^2} \int_{l^e} \begin{bmatrix} b_i \\ b_j \end{bmatrix} [k] \begin{bmatrix} b_i & b_j \end{bmatrix} dl \quad [3.25]$$

$$[K^e] = \frac{k}{l_e} \begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j \\ b_i b_j & b_j^2 \end{bmatrix} \quad [3.26]$$

Tek bir eleman için bulunan eleman matrisi tüm elemanlar için tek tek bulunur ve bu elemanlar, elemanların birleştirilmesi yöntemiyle birleştirilerek sistem matrisi elde edilir. Bu matrise sınır koşulları da ilave edilerek çözülmesi gereken denklem takımına ulaşılır.

Bundan sonraki adımlar olan elemanların birleştirilmesi, sınır koşullarının probleme dahil edilmesi ve elde edilen denklemlerin çözülmesi, iki boyutlu sonlu elemanlar metoduyla analiz kısmında ayrıntılı olarak anlatılacaktır. İki boyutlu analizin tek boyutludan farkı sadece matrislerdeki terim sayısı olacaktır.

3.7. İki Boyutlu Sonlu Elemanlar Metoduyla Analiz

3.7.1. Sınır değer probleminin tanımlanması

Kartezyen koordinatlarda iki boyutlu düzlemde kararlı durum problemi için geçerli diferansiyel denklem aşağıdaki gibidir (7). Bu denklem iki boyutlu Laplace denklemdir.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad [3.27]$$

Sınır koşulları herhangi bir S yüzeyi boyunca aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Phi = \Phi_0(x, y)$$

Yukarıdaki diferansiyel denklemin çözümü ilgilendiğimiz alan boyunca tanımlı olan enerji fonksiyonunu minimum yapan $\Phi(x, y)$ ifadesinin elde edilmesi demektir. Yani; alanda depolanan enerjiyi minimum yapan alan fonksiyonu $\Phi(x, y)$ aynı zamanda iki boyutlu Laplace denkleminin de çözümüdür.

İlgilendiğimiz bölgenin S yüzeyi boyunca depolanan elektrik enerjisi problem çözümünde kullanılacak olan fonksiyondur ve aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$J = \frac{1}{2} \iint_S \left[k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dS \quad [3.28]$$

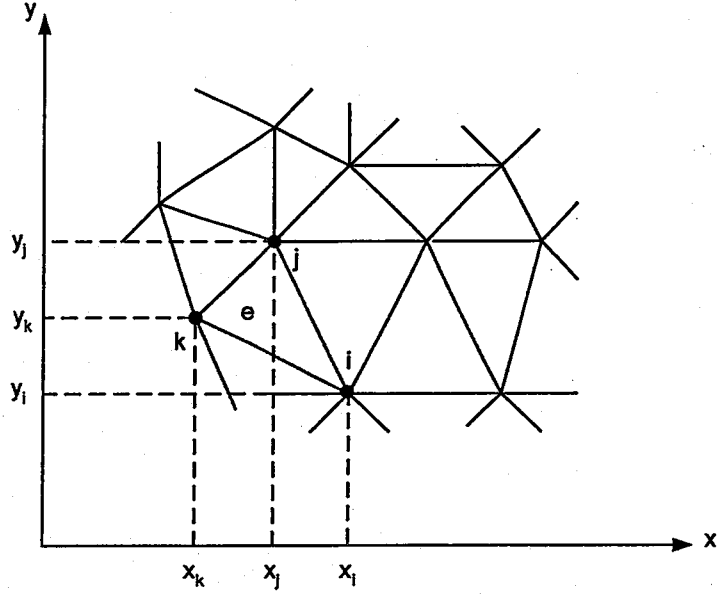
Bu fonksiyonelin sınır koşullarını da sağlayacak şekilde minimize edilmesi Laplace denkleminin çözümünü verir.

3.7.2. Sonlu elemanlar metodu analizi

Bu iki boyutlu alan probleminin sonlu elemanlar çözümü aşağıda adım-adım anlatılmıştır.

1.Adım: Tanım kümesinin elemanlara ayrılması

İki boyutlu alan problemlerinin sonlu elemanlar çözümünde çözüm bölgesi üçgensel veya dörtgensel elemanlara ayrıştırılabilir. Burada üç düğümlü üçgensel elemanlar kullanılacaktır.



Şekil 3.2. İncelenen S alanının üçgensel elemanlara ayrıştırılması

2.Adım: Enterpolasyon fonksiyon seçimi

Her eleman için düğüm noktaları seçilir ve eleman içinde herhangi bir noktada geçerli polinom yaklaşımı yazılır. Elemanlar içerisinde potansiyelin doğrusal değiştiği kabul edilir. Bu elemanlardan biri olan e üçgen elemanını düşünelim. Düğüm noktaları i, j, k olan eleman içindeki potansiyel dağılım fonksiyonu $\Phi(x, y)$ şöyledir;

$$\Phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad [3.29]$$

Bu denklemden her bir eleman içindeki potansiyel dağılımının dorusal olduğu görülür. Bu türdeki bir yaklaşım için e elemanına ait katsayılar olan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i, j, k düğümlerindeki potansiyeller yardımıyla kolayca hesaplanabilir.

$$i \text{ noktasında } \Phi^e(x_i, y_i) = \Phi_i$$

$$j \text{ noktasında } \Phi^e(x_j, y_j) = \Phi_j$$

$$k \text{ noktasında } \Phi^e(x_k, y_k) = \Phi_k$$

Diyecek olursak Φ_i, Φ_j, Φ_k şu şekilde yazılabilir.

$$\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i$$

$$\Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j$$

$$\Phi_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k$$

Buradan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ katsayıları Kramer Kuralı kullanılarak bulunabilir.

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\Delta^e} (a_i \Phi_i + a_j \Phi_j + a_k \Phi_k) \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\Delta^e} (b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_k \Phi_k)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2\Delta^e} (c_i \Phi_i + c_j \Phi_j + c_k \Phi_k)$$

[3.30]

Buradaki a, b, c katsayıları şöyledir.

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j$$

$$a_j = x_k y_i - x_i y_k$$

$$a_k = x_i y_j - x_j y_i$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$b_j = y_k - y_i$$

$$b_k = y_i - y_j$$

$$c_i = x_k - x_j$$

$$c_j = x_i - x_k$$

$$c_k = x_j - x_i$$

[3.31]

Ve

Δ^e : üçgensel elemanın alanı;

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \frac{x_i y_j + x_k y_i - x_j y_i - x_i y_k}{2} = \frac{b_i c_j - b_j c_i}{2}$$

Bu durumda Eş. 3.29 aşağıdaki hali alır.

$$\Phi^e(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} [(a_i + b_i x + c_i y)\Phi_i + (a_j + b_j x + c_j y)\Phi_j + (a_k + b_k x + c_k y)\Phi_k]$$

Eş. 3.4'ü hatırlayacak olursak

$$\Phi^e(x, y) = [N(x, y)]\bar{\Phi} \quad [3.32]$$

idi. İki denklemin eşitliğinden $[N(x, y)]$ ve $\bar{\Phi}$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$[N(x, y)] = [N_i(x, y) \quad N_j(x, y) \quad N_k(x, y)]$$

$$[N(x, y)] = \frac{1}{2\Delta^e} [(a_i + b_i x + c_i y) \quad (a_j + b_j x + c_j y) \quad (a_k + b_k x + c_k y)]$$

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{bmatrix}$$

[3.33]

$N_i(x, y)$: e elemanının i. düğüm noktası için yazılmış enterpolasyon fonksiyonudur.

3.Adım: Eleman matrislerinin bulunması

Bu kısımda eleman özellikleri belirlenir. Yani elemana ait denklem takımları ve matrisler türetilir. $[N(x, y)]$ matrisi Eş. 3.33'de olduğu gibi tanımlandıktan sonra Eş. 3.15 ile tanımlı $[B]$ matrisi elde edilecektir.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta^e} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad [3.34]$$

$[D]$ matrisi ise ortamın dielektrik katsayıları olan ε sayılarından oluşur. ε_0 boşluğun dielektrik katsayısı ve ε_r ortamın bağıl dielektrik katsayısı olduğuna göre $[D]$ matrisi şu şekilde hesaplanır.

$$[D] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad k = \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad [3.35]$$

$$[K^e] = \iint_S [B]^T [D] [B] dS$$

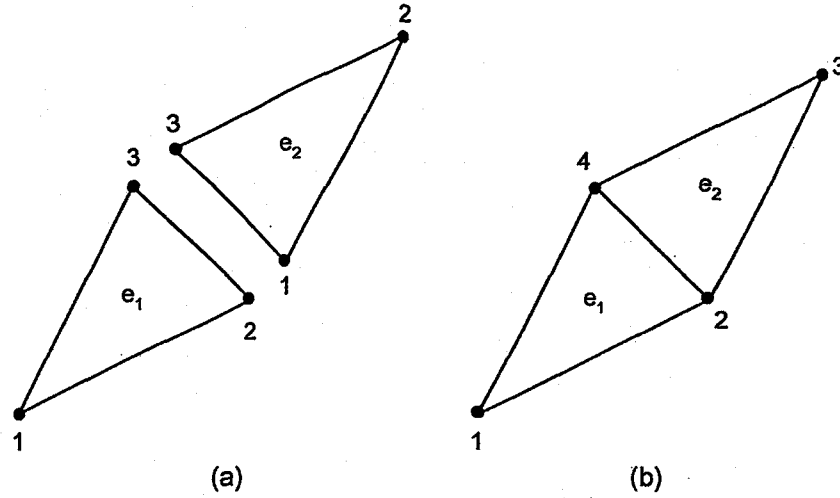
$$[K^e] = \frac{1}{4(\Delta^e)^2} \iint_S \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} dS \quad [3.36]$$

$$[K^e] = \frac{k}{4(\Delta^e)^2} \begin{bmatrix} (b_i^2 + c_i^2) & (b_i b_j + c_i c_j) & (b_i b_k + c_i c_k) \\ (b_i b_j + c_i c_j) & (b_j^2 + c_j^2) & (b_j b_k + c_j c_k) \\ (b_i b_k + c_i c_k) & (b_j b_k + c_j c_k) & (b_k^2 + c_k^2) \end{bmatrix} \quad [3.37]$$

Böylece incelediğimiz i, j, k düğüm noktalarına sahip üçgensel eleman matrisi elde edilmiş olur. Her bir eleman için matrisler aynı şekilde bulunur ve eleman matrislerinin birleştirilmesi yöntemi ile birleştirilerek genel denklem takımı elde edilir.

4.Adım: Elemanların birleştirilmesi

Genelleştirilmiş $[K]$ matrisinin elde edilmesi işlemi lokal düğüm numaralarının global düğüm numaralarına dönüştürülmesi işlemidir.



Şekil 3.3. Lokal ve global numaralandırma

Yukarıdaki şekilde (a) da birbirinden bağımsız iki üçgenel eleman ve lokal düğüm numaraları (b) de ise bu elemanların birleştirilmiş hali ve global düğüm numaraları görülmektedir. Birinci eleman e_1 ve ikinci eleman e_2 için eleman matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$[K_1] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 \end{bmatrix} \quad [3.38]$$

$$[K_2] = \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \quad [3.39]$$

Bu iki matrisin birleştirilmesi sonucu elde edilecek matris sistemde dört global düğüm noktası olduğu için 4x4 boyutunda olacaktır. Ve buradaki amaç bu dört düğüm noktasından alan değeri bilinmeyen düğüm noktalarının alan değerini bulmaktır.

Çizelge 3.1. Elemanlar için lokal ve global numaralandırma

Eleman Numarası	Lokal düğüm Numarası	Global düğüm Numarası
1	1	1
	2	2
	3	4
2	1	2
	2	3
	3	4

Bu iki eleman birleştirilirken dikkat edilecek nokta birinci elemanın 2 numaralı lokal düğümü ile ikinci elemanın 1 numaralı lokal düğümü aslında aynı nokta olup, global düğüm numaraları 2 dir. Ancak bu şekilde alanın sürekliliği sağlanabilir ve elemanlar birleştirilebilir. Çizelge 3.1.'de 1. ve 2. elemanlar için lokal düğüm numaralarına karşılık gelen global düğüm numaraları gösterilmiştir.

Bu dönüşüm tablosu dikkate alınarak $[K_1]$ ve $[K_2]$ matrislerinin $[K^{genel}]$ matrisindeki yerleşimleri aşağıdaki gibi olur.

$$[K_1^{genel}] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & 0 & K_{23}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & 0 & K_{33}^1 \end{bmatrix} \quad [3.40]$$

$$[K_2^{genel}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{bmatrix} \quad [3.41]$$

Genelleştirilmiş K matrisi bu iki matris yardımı ile aşağıdaki şekilde elde edilir.

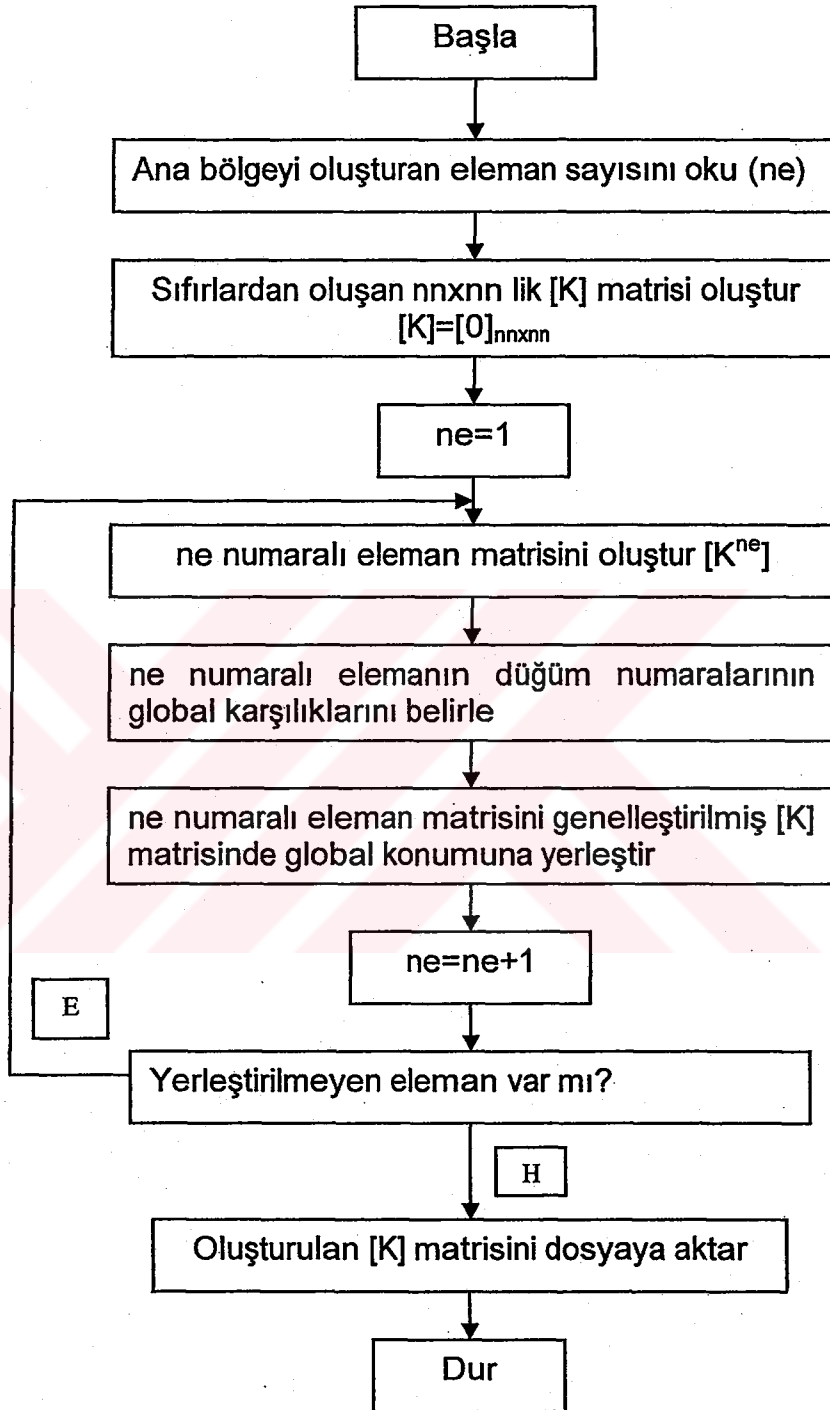
$$[K^{genel}] = \sum_{e=1}^M [K_e^{genel}] = [K_1^{genel}] + [K_2^{genel}] + \dots + [K_M^{genel}] \quad [3.42]$$

Bu durumda genelleştirilmiş matris;

$$[K^{genel}] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{23}^1 + K_{13}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 + K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^1 + K_{33}^2 \end{bmatrix} \quad [3.43]$$

Burada iki eleman için yaptığımız birleştirme işlemi sistemde bulunan bütün elemanlar için yinelenir ve sonuçta boyutları sistemdeki düğüm sayısına eşit bir kare matris elde edilir. Bu incelenen sistemin genelleştirilmiş K matrisidir. Genelleştirilmiş K matrisinin elde edilmesiyle aşağıdaki genel denklem takımı elde edilir.

$$[K_{n \times n}^{genel}] * [\Phi_{n \times 1}] = \vec{0}_{n \times 1} \quad [3.44]$$



Şekil 3.4. Genelleştirilmiş [K] matrisini elde eden alt programa ait akış şeması

Şekil 3.4'de eleman matrislerini birleştirerek genelleştirilmiş K matrisini elde eden alt programın akış diyagramı verilmiştir.

5.Adım: Sınır koşullarının probleme dahil edilmesi

Eleman birleştirme işlemi sonucu tüm sistemin matematiksel model aşağıdaki gibidir.

$$[K_{n \times n}^{genel}] * [\Phi_{n \times 1}] = \vec{P}_{n \times 1} \quad [3.45]$$

Bu denklemin çözülebilmesi için sınır koşullarının sisteme dahil edilmesi gerekir. $\Phi_{n \times 1}$ in çözümü ancak bu şekilde gerçekleştirilebilir. Alan problemlerinde en az bir çoğunlukla da birden fazla sınır koşulu olmalıdır.

Sınır koşulları belli olan düğümlerdeki değerler probleme dahil edildikten sonra diğer düğümlerdeki değerler tespit edilebilir.

Sınır koşullarımızdan biri $\Phi_j = A$ olsun. Bu j noktasındaki alan değerinin A olduğunu gösterir ve bu sınır koşulunun probleme dahil edilmesi aşağıdaki prosedür dahilinde gerçekleştirilebilir.

Eğer Φ_j değeri A olarak değiştirilmek isteniyorsa \vec{P} karakteristik vektörü yeniden düzenlenir.

$$P_i = P_i - K_{ij}A \quad ; \quad i = 1,2,3,\dots,n$$

Bu düzenlemeden sonra Φ_j terimine tekabül eden $[K^{genel}]$ matrisindeki satır ve sütunlar sıfıra eşitlenir. Yalnız köşegen üzerindeki terimler bire eşitlenir.

$$K_{ij} = K_{ji} = 0 \quad ; \quad i = 1,2,3,\dots,n$$

$$K_j = 1$$

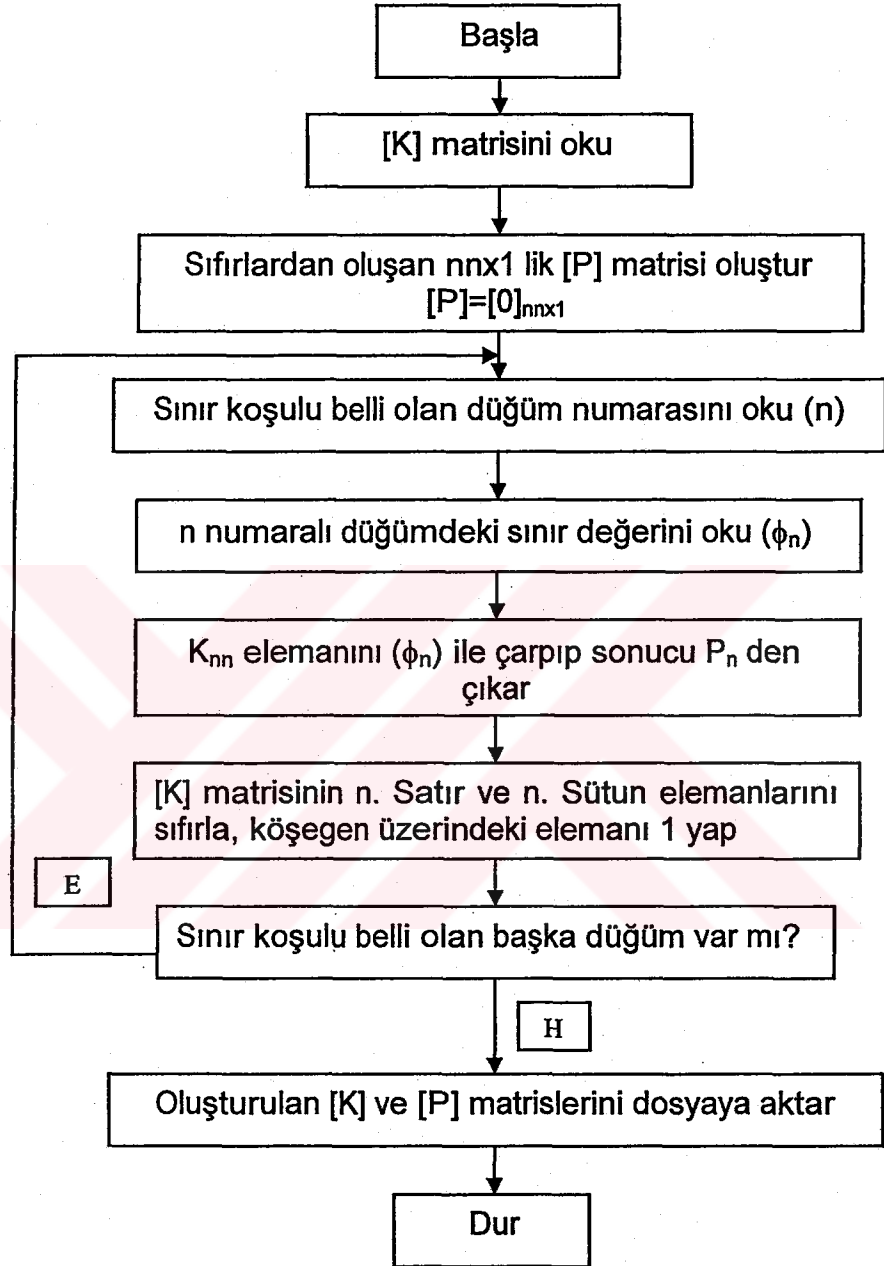
Son olarak sınır değeri olan A , P karakteristik vektörüne dahil edilir.

$$P_j = A$$

Bu üç adımlık prosedür değeri belli olan tüm sınırlara uygulanır. Sınır koşullarını probleme dahil eden alt programın akış şeması Şekil 3.5'de verilmiştir.

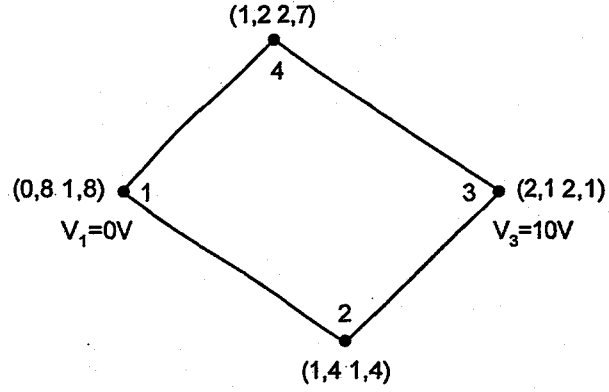
6.Adım: Denklem sisteminin çözümü

Sınır koşullarının da ilave edilmesiyle elde edilen yeni denklem takımı herhangi bir nümerik metot yardımıyla çözümlenebilir.



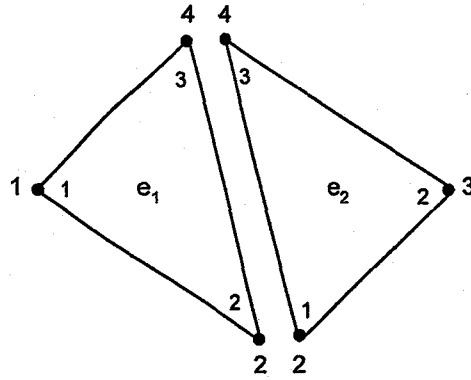
Şekil 3.5. Sınır koşullarını programa dahil eden alt programa ait akış şeması

3.8. İki Boyutlu Alan Problemi İçin Bir Örnek



Yukarıdaki şekilde 1 ve 3 numaralı düğümlerin potansiyel değerleri bilinmektedir. Sonlu elemanlar metodu kullanarak 2 ve 4 numaralı düğümlerin potansiyel değerlerini hesaplayalım.

Çözüm bölgesi üçgenel elemanlara ayrılır ve elemanlar tanımlanır.



Elemanların lokal düğüm numaraları ve bu lokal düğüm numaralarına karşılık gelen global düğüm numaraları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Eleman Numarası	Lokal düğüm numarası	Global düğüm numarası
1	1	1
	2	2
	3	4
2	1	2
	2	3
	3	4

Enterpolasyon polinomu tanımlanır.

$$\Phi^e(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

Üçgensel eleman için lokal düğüm koordinatları aşağıdaki gibi tanımlanır.

Lokal düğüm no	(x, y)
1	(x ₁ , y ₁)
2	(x ₂ , y ₂)
3	(x ₃ , y ₃)

Hesaplamalarda kolaylık sağlaması için aşağıdaki değerler hesaplanır.

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \quad a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3 \quad a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$b_1 = y_2 - y_3 \quad b_2 = y_3 - y_1 \quad b_3 = y_1 - y_2$$

$$c_1 = x_3 - x_2 \quad c_2 = x_1 - x_3 \quad c_3 = x_2 - x_1$$

Elemanın alanı hesaplanır

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = x_2 y_3 + x_1 y_2 + x_3 y_1 - x_2 y_1 - x_3 y_2 - x_1 y_3$$

$$\Delta^e = \frac{1}{2} (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

Bu hesaplamalar yapıldıktan sonra eleman matrisinin oluşturulmasına geçilir.

$$K_{ij} = \frac{1}{4\Delta^e} (b_i b_j + c_i c_j) \quad ; \quad i=1,2,3 \quad j=1,2,3$$

Bu şekilde tüm eleman matrisleri oluşturulur ve bu matrisler birleştirilerek genelleştirilmiş K matrisi bulunur.

(1) nolu eleman için;

Lokal düğüm no	(x y)
1	(0,8 1,8)
2	(1,4 1,4)
3	(1,2 2,7)

$$b_1 = y_2 - y_3 = 1,4 - 2,7 = -1,3$$

$$c_1 = x_3 - x_2 = 1,2 - 1,4 = -0,2$$

$$b_2 = y_3 - y_1 = 2,7 - 1,8 = 0,9$$

$$c_2 = x_1 - x_3 = 0,8 - 1,2 = -0,4$$

$$b_3 = y_1 - y_2 = 1,8 - 1,4 = 0,4$$

$$c_3 = x_2 - x_1 = 1,4 - 0,8 = 0,6$$

(1) numaralı elemanın alanı;

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} (b_1 c_2 - b_2 c_1) = \frac{1}{2} [(-1,3)(-0,4) - (0,9)(-0,2)] = 0,35$$

(1) numaralı eleman matrisinde bulunan terimler;

$$K_{11} = \frac{1}{4\Delta_1}(b_1b_1 + c_1c_1) = \frac{1}{4*0,35}[(-1,3)(-1,3) + (-0,2)(-0,2)] = 1,2357$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{1}{4\Delta_1}(b_1b_2 + c_1c_2) = \frac{1}{4*0,35}[(-1,3)(0,9) + (-0,2)(-0,4)] = -0,7786$$

$$K_{13} = K_{31} = \frac{1}{4\Delta_1}(b_1b_3 + c_1c_3) = \frac{1}{4*0,35}[(-1,3)(0,4) + (-0,2)(0,6)] = -0,4571$$

$$K_{22} = \frac{1}{4\Delta_1}(b_2b_2 + c_2c_2) = \frac{1}{4*0,35}[(0,9)(0,9) + (-0,4)(-0,4)] = 0,6929$$

$$K_{23} = K_{32} = \frac{1}{4\Delta_1}(b_2b_3 + c_2c_3) = \frac{1}{4*0,35}[(0,9)(0,4) + (-0,4)(-0,6)] = 0,0857$$

$$K_{33} = \frac{1}{4\Delta_1}(b_3b_3 + c_3c_3) = \frac{1}{4*0,35}[(0,4)(0,4) + (0,6)(0,6)] = 0,3714$$

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 1,2357 & -0,7786 & -0,4571 \\ -0,7786 & 0,6929 & 0,0857 \\ -0,4571 & 0,0857 & 0,3714 \end{bmatrix}$$

$[K_1]$ birinci eleman matrisi bulundu aynı hesaplamalar ikinci eleman için de yapılarak $[K_2]$ matrisi elde edilir.

$$[K_2] = \begin{bmatrix} 0,5571 & -0,4571 & -0,1 \\ -0,4571 & 0,8238 & -0,3667 \\ -0,1 & -0,3667 & 0,4667 \end{bmatrix}$$

$[K_1]$ ve $[K_2]$ matrisleri birleştirilerek genelleştirilmiş K matrisi bulunur.

$$[K^{genel}] = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{23}^1 + K_{13}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 + K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^1 + K_{33}^2 \end{bmatrix}$$

Gerekli değerler yerine konularak genelleştirilmiş K matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$[K^{genel}] = \begin{bmatrix} 1,2357 & -0,7786 & 0 & -0,4571 \\ -0,7786 & 1,25 & -0,4571 & -0,0143 \\ 0 & -0,4571 & 0,8238 & -0,3667 \\ -0,4571 & -0,0143 & -0,3667 & 0,8381 \end{bmatrix}$$

$$[K^{genel}] \Phi = 0 \quad \text{yani} \quad [K^{genel}] V = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1,2357 & -0,7786 & 0 & -0,4571 \\ -0,7786 & 1,25 & -0,4571 & -0,0143 \\ 0 & -0,4571 & 0,8238 & -0,3667 \\ -0,4571 & -0,0143 & -0,3667 & 0,8381 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$V_1=0$ ve $V_3=10$ bilinen değerleri yerine yazılarak elde edilen aşağıdaki sistem herhangi bir nümerik metot yardımı ile çözülebilir.

$$\begin{bmatrix} 1,2357 & -0,7786 & 0 & -0,4571 \\ -0,7786 & 1,25 & -0,4571 & -0,0143 \\ 0 & -0,4571 & 0,8238 & -0,3667 \\ -0,4571 & -0,0143 & -0,3667 & 0,8381 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ V_2 \\ 10 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1,25V_2 - 0,0143V_4 = 0,4571 \times 10$$

$$-0,0143V_2 + 0,8381V_4 = 0,3667 \times 10$$

Denklemleri çözümlenerek $V_2 = 3,708$ ve $V_4 = 4,438$ olarak bulunur.

3.9. Silindirik Koordinatlarda Sonlu Elemanlar Analizi

3.9.1. Sınır değer probleminin tanımlanması

Dönel silindirik elektrik potansiyel problemlerinde Laplace denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad \text{şeklinde açılır.}$$

Eğer incelediğimiz bölgenin θ ya göre silindirik simetriye sahip olduğunu düşünürsek Laplace denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad [3.46]$$

Problemin sınır koşulu şöyledir.

$$\Phi = \Phi_0(r, z) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

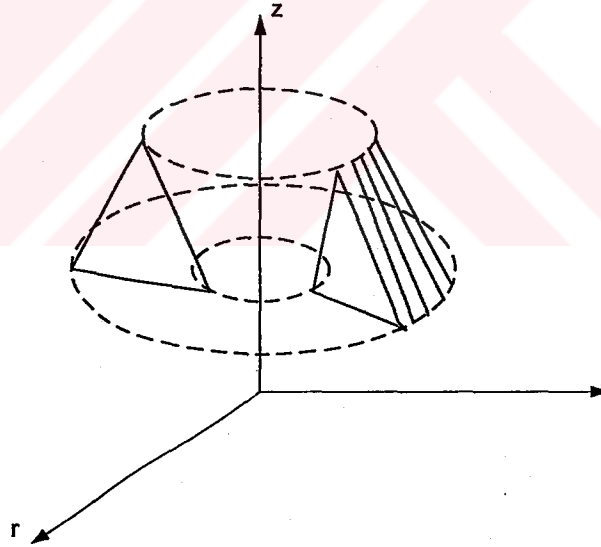
İkinci sınır koşulu yüzey boyunca alanın yüzey normali doğrultusunda sabit olduğunu ifade eder.

3.9.2. Problemin sonlu elemanlar metoduyla modellenmesi

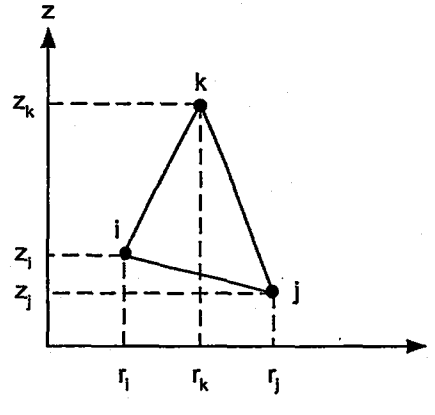
Kartezyen koordinatlarda olduğu gibi dönel silindirik problemlerde de Laplace denkleminin çözümü varyasyonel yaklaşım metodu ile minimizasyon problemine dönüşür. Aşağıda verilen fonksiyoneli minimum yapan $\Phi(r, z)$ potansiyeli hesaplanabilirse Laplace denklemi çözülmüş olacaktır.

$$J = \frac{1}{2} \iiint_V \left[kr \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + kr \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dV \quad [3.47]$$

1.Adım: Silindirik bölgenin üçgensel kesitli ring elemanlara ayrıştırılması.



şekil 3.6. Üçgensel kesitli ring eleman



Şekil 3.7. Üçgensel kesitli ring eleman için düğüm notasyonu

2.Adım: Enterpolasyon fonksiyonunun seçimi

e elemanı içinde potansiyelin doğrusal değiştiği kabul edilerek doğal koordinat sistemi (Ek-2) kullanılırsa, eleman içerisindeki potansiyel değeri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\Phi^e = [N] \vec{\Phi} \quad [3.48]$$

Yani

$$\Phi^e = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k$$

$$N_i = L_1 \quad N_j = L_2 \quad N_k = L_3$$

$$[N] = [N_i \quad N_j \quad N_k] \quad \vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{bmatrix}$$

Düğüm noktalarındaki silindirik koordinatlar aşağıdaki gibi doğal koordinatlara dönüştürülür.

$$\begin{aligned}
r &= L_1 r_i + L_2 r_j + L_3 r_k \\
z &= L_1 z_i + L_2 z_j + L_3 z_k \\
L_1 + L_2 + L_3 &= 1
\end{aligned}
\tag{3.49}$$

L_1, L_2, L_3 Eş.4.4'deki denklemlerden yararlanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
L_1(r, z) &= \frac{1}{2\Delta^e} (a_1 + b_1 r + c_1 z) \\
L_2(r, z) &= \frac{1}{2\Delta^e} (a_2 + b_2 r + c_2 z) \\
L_3(r, z) &= \frac{1}{2\Delta^e} (a_3 + b_3 r + c_3 z)
\end{aligned}
\tag{3.50}$$

Δ^e düğüm noktaları i, j, k olan üçgenin alanıdır.

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (r_i(z_j - z_k) + r_j(z_k - z_i) + r_k(z_i - z_j))
\tag{3.51}$$

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta^e} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ z \end{bmatrix}
\tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= r_j z_k - r_k z_j & b_1 &= z_j - z_k & c_1 &= r_k - r_j \\
a_2 &= r_k z_i - r_i z_k & b_2 &= z_k - z_i & c_2 &= r_i - r_k \\
a_3 &= r_i z_j - r_j z_i & b_3 &= z_i - z_j & c_3 &= r_j - r_i
\end{aligned}
\tag{3.53}$$

3.Adım: Eleman matris ve denklemlerinin türetilmesi.

$$[K^e] = \iiint_V [B]^T [D][B] dV = [B]^T [D][B] V
\tag{3.54}$$

Burada $V = 2\pi \times rA$ dır. Ve bu durumda $[K^e]$ aşağıdaki hale gelir.

$$[K^e] = 2\pi \iint_{\Delta^e} [B]^T [D][B] dA \quad [3.55]$$

$[D]$ ve $[B]$ matrisleri kartezyen koordinatlardaki Eş. 3.34 ve 3.35'e benzer biçimde şöyle ifade edilir,

$$[D] = \begin{bmatrix} rk & 0 \\ 0 & rk \end{bmatrix} \quad [3.56]$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & \frac{\partial N_j}{\partial r} & \frac{\partial N_k}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial r} & \frac{\partial L_2}{\partial r} & \frac{\partial L_3}{\partial r} \\ \frac{\partial L_1}{\partial z} & \frac{\partial L_2}{\partial z} & \frac{\partial L_3}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta^e} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad [3.57]$$

$$[K^e] = \frac{2k\pi}{4(\Delta^e)^2} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ b_1b_2 + c_1c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ b_1b_3 + c_1c_3 & b_2b_3 + c_2c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \iint_{\Delta^e} r^2 dA \quad [3.58]$$

Radyal mesafe r doğal koordinatlar türünden şöyle tanımlanır;

$$r = L_1r_i + L_2r_j + L_3r_k \quad [3.59]$$

$$\bar{r}^{-2} = \iint_{\Delta^e} r^2 dA = \iint_{\Delta^e} \begin{bmatrix} r_i & r_j & r_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1L_2 & L_1L_3 \\ L_1L_2 & L_2^2 & L_2L_3 \\ L_1L_3 & L_2L_3 & L_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_j \\ r_k \end{bmatrix} dA \quad [3.60]$$

Burada \bar{r} üçgensel elemanın merkezine olan radyal uzaklıktır ve aşağıdaki gibi yazılır.

$$\bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_k}{3} \quad [3.61]$$

Doğal koordinatlar için integral formülü şöyledir.

$$\iint_A L_1^\alpha + L_2^\beta + L_3^\gamma dA = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2\Delta^e \quad [3.62]$$

Bu kural kullanılarak Eş. 3.60'daki integral alınabilir.

$$\iint_{\Delta^e} \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & L_1 L_3 \\ L_1 L_2 & L_2^2 & L_2 L_3 \\ L_1 L_3 & L_2 L_3 & L_3^2 \end{bmatrix} dA = \begin{bmatrix} \frac{2!}{4!} & \frac{1!1!}{4!} & \frac{1!1!}{4!} \\ \frac{1!1!}{4!} & \frac{2!}{4!} & \frac{1!1!}{4!} \\ \frac{1!1!}{4!} & \frac{1!1!}{4!} & \frac{2!}{4!} \end{bmatrix} 2\Delta^e = \frac{2\Delta^e}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{r}^2 = \iint_{\Delta^e} r^2 dA = \frac{\Delta^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_j \\ r_k \end{bmatrix} \quad [3.63]$$

Bu ifadeyi Eş. 3.59'da yerine yazarak $[K^e]$ eleman matrisini elde edebiliriz.

$$[K^e] = \frac{-2}{2\Delta^e} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_1 b_3 + c_1 c_3 & b_2 b_3 + c_2 c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \quad [3.64]$$

Bir eleman için elde ettiğimiz $[K^e]$ eleman matrisi bölgeyi oluşturan tüm elemanlar için bulunur ve eleman birleştirilmesi metodu ile birleştirilerek genelleştirilmiş $[K^{genel}]$ matrisi elde edilir.

Bu denkleme sınır koşulları da ilave edilerek çözülmesi gereken denklem takımını elde edilir. Bu aşamadan sonra yapılacak işlemse uygun bir nümerik metot ile bu denklemlerin çözülmesidir. Bu işlemler kartezyen koordinatlarda olduğu gibi yapılır.

3.10. Elektrik Alan Hesabı

3.10.1. Kartezyen koordinatlarda elektrik alan hesabı

Sonlu elemanlar metoduyla incelenen bölgeyi oluşturan üçgensel elemanların düğüm noktalarındaki potansiyel değerleri hesaplandıktan sonra eleman içerisinde sürekli olan enterpolasyon polinomları elde edilebilir ve incelen bölgenin herhangi bir yerindeki potansiyel bulunabilir. Bir noktadaki potansiyel biliniyorsa aynı noktadaki elektrik alan kolayca hesaplanabilir.

Alan şiddeti vektörü ile potansiyel arasında kısmi türevsel bir ilişki vardır ve bu ilişki aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \quad [3.65]$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}\right) \quad [3.66]$$

Bu bağıntı kullanılarak elektrik alan bileşenleri elde edilebilir.

$$E_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad E_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \quad E_z = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad [3.67]$$

İki boyutlu alan problemlerinde sadece x ve y bileşenleri olacağından alan ifadesi,

$$\vec{E} = -(E_x \vec{i} + E_y \vec{j}) \quad [3.68]$$

şeklinde olur. Yani

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j}\right) \quad [3.69]$$

Elektrik alanın bileşenleri elde edildikten sonra genliği aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$|\vec{E}| = \sqrt{|E_r|^2 + |E_z|^2} \quad [3.70]$$

3.10.2. Silindirik koordinatlarda elektrik alan hesabı

Silindirik koordinatlarda kullanılan gradyent ifadesinin açılımı kartezyen koordinatlardan farklıdır.

$$\vec{E} = -\nabla \Phi \quad [3.71]$$

$$\vec{E} = -\left(a_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + a_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + a_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \quad [3.72]$$

İncelediğimiz bölge silindirik simetriye sahip olduğu için θ ya göre değişim yoktur bu nedenle θ ya bağlı terim sıfırdır.

$$\vec{E} = -\left(a_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + a_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \quad [3.73]$$

$$\Phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k$$

N_i, N_j, N_k şekil fonksiyonlarının açık hali şöyledir.

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2\Delta^e} (a_i + b_i r + c_i z) \\ N_j &= \frac{1}{2\Delta^e} (a_j + b_j r + c_j z) \\ N_k &= \frac{1}{2\Delta^e} (a_k + b_k r + c_k z) \end{aligned} \quad [3.74]$$

a, b, c katsayıları r, z koordinatları yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} a_i &= r_j z_k - r_k z_j & b_i &= z_j - z_k & c_i &= r_k - r_j \\ a_j &= r_k z_i - r_i z_k & b_j &= z_k - z_i & c_j &= r_i - r_k \\ a_k &= r_i z_j - r_j z_i & b_k &= z_i - z_j & c_k &= r_j - r_i \end{aligned} \quad [3.75]$$

Bu bağıntılar yardımıyla;

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial N_i}{\partial r} \Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial r} \Phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial r} \Phi_k \quad [3.76]$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial r} = \frac{b_i}{2\Delta^e} \quad \frac{\partial N_j}{\partial r} = \frac{b_j}{2\Delta^e} \quad \frac{\partial N_k}{\partial r} = \frac{b_k}{2\Delta^e}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{2\Delta^e} (b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_k \Phi_k) \quad [3.77]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial N_i}{\partial z} \Phi_i + \frac{\partial N_j}{\partial z} \Phi_j + \frac{\partial N_k}{\partial z} \Phi_k \quad [3.78]$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial z} = \frac{c_i}{2\Delta^e} \quad \frac{\partial N_j}{\partial z} = \frac{c_j}{2\Delta^e} \quad \frac{\partial N_k}{\partial z} = \frac{c_k}{2\Delta^e}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{2\Delta^e} (c_i \Phi_i + c_j \Phi_j + c_k \Phi_k) \quad [3.79]$$

b ve c katsayıları sabittir Φ değerleri ise r ve z koordinatlarından bağımsızdır. Yani türev, ilgili eleman boyunca sabit olup ancak başka bir elemana geçildiğinde değişir. Bu bilgiler doğrultusunda elektrik alan ifadesi şöyle olur.

$$\vec{E}_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} a_r = -\frac{1}{2\Delta^e} (b_i \Phi_i + b_j \Phi_j + b_k \Phi_k) a_r \quad [3.80]$$

$$\vec{E}_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} a_z = -\frac{1}{2\Delta^e} (c_i \Phi_i + c_j \Phi_j + c_k \Phi_k) a_z \quad [3.81]$$

Elektrik alanın bileşenleri bilindiğine göre genliği de elde edilebilir.

$$|\vec{E}| = \sqrt{|\vec{E}_r|^2 + |\vec{E}_z|^2} \quad [3.82]$$

3.10.3. Düğüm noktalarında elektrik alan hesabı

Eleman içerisinde hesaplanan elektrik alan değerleri kullanılarak düğüm noktalarındaki elektrik alanlar hesaplanabilir. İncelenen düğümün hangi elemanların ortak düğümü olduğu belirlenip r ve z yönlerindeki alan bileşenlerinin aritmetik ortalaması alınır.

$$\vec{E}_r = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\vec{E}_r)_i \quad [3.83]$$

$$\vec{E}_z = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\vec{E}_z)_i$$

[3.84]

Alan bileşenleri bulunduktan sonra genlik hesaplanır.

$$|\vec{E}| = \sqrt{|\vec{E}_r|^2 + |\vec{E}_z|^2}$$



4. MODELLEME VE PROGRAMLAMA

4.1. Giriş

Sonlu elemanlar metodunun temel prensibi, öncelikle bir elemana ait sistem özelliklerini içeren denklemlerin çıkartılıp tüm sistemi temsil edecek şekilde eleman denklemlerini birleştirerek sisteme ait lineer denklem takımının elde edilmesi olduğu daha önceki bölümlerde anlatılmıştı. Yöntemde genel olarak kullanılan üç temel basamak vardır. Bunlar; hazırlık işlemleri (preprosesing), çözüm işlemleri (prosesing) ve değerlendirme işlemleri (postprosesing) olarak sıralanabilir (8). Hazırlık işlemleri; düğüm koordinatları, elemanların birbirleri arasındaki süreklilik, sınır şartları, yükler ve malzeme bilgileri ile ilgili dataların hazırlanması ve ağ üretimi safhasıdır. Çözüm işlemleri; problemin özelliğine göre gerekli hesaplamaların yapılarak çözümlerin elde edilmesini içermektedir. Değerlendirme işlemleri ise elde edilen alan değişkenlerinin (potansiyel, elektrik alan vs.) grafik çizimi, değişkenlerin çözüm bölgesindeki dağılımlarının görsel olarak elde edilmesini içermektedir.

Ön ve son işlemlerin sonlu elemanlar metodunda önemli bir ağırlığı vardır. Bu nedenle özellikle sonlu eleman ağ bilgilerinin (düğüm koordinatları ve eleman sürekliliği) otomatik olarak hazırlanması büyük önem taşır. Aksi takdirde basit bir bölgeyi elemanlara ayırmak için bile çok sayıdaki koordinat değerinin programa elle girilmesi gerekecek ve bu da birçok hataya ve zaman kaybına neden olacaktır. Bu durum metodun en büyük avantajı olan geometrik esneklik özelliğini ortadan kaldırır. Çoğu zaman problemin doğru ve yeterince hassas çözümünün elde edilmesi için birçok değişik sonlu eleman ağının denenmesi gerekebilmektedir. Sonlu elemanlara ayırma işlemi ve problemin giriş bilgilerinin hazırlanması eleman sayısı arttıkça hem zaman alıcı olmakta hem de hata yapma oranını arttırmaktadır. Otomatik ağ üretici kullanılması durumunda problemin çözümü oldukça basitleşir ve hata oranı da en aza

indirilmiş olur. Bu yüzden ağ oluşturma işleminin bilgisayarla yapılması için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir.

Sonlu eleman ağları oluşturulurken dikkat edilecek bir diğer nokta da özellikle eğrisel kısımlarda ve elektrik alanın büyüdüğü kısımlarda daha fazla eleman kullanılmasıdır. Bu hata oranını minimuma indirir ancak işlem yükünü artırır. Bilgisayarda hafıza problemi ile karşılaşmamak için elektrik alanın çok değişmediği bölgelerde olabildiğince az eleman kullanılmalı ve ağırlık kritik bölgelere verilmelidir.

Sonlu elemanlar metodu 1920'li yıllardan itibaren kullanılmaya başlanmış olmakla beraber bilgisayar teknolojisindeki gelişmelerle ancak 1960'lı yıllardan itibaren geniş bir kullanım alanı bulabilmiştir. Otomatik ağ oluşturma yöntemleri de bunlara duyulan ihtiyaçla beraber 1970'lerden itibaren geliştirilmeye başlanmıştır. Yapılan çalışmalar iki ve üç boyutlu problemler için sonlu eleman ağı geliştirilmesi, eleman tipine göre ağ optimizasyonu ve ele alınan problemin özelliklerine göre sonlu eleman ağlarının düzenlenmesi şeklinde sınıflamaya tabi tutulabilir.

Bu bölümde Zienkiewicz ve Philips tarafından önerilen ağ oluşturma yöntemi kullanılarak sonlu elemanlar metodu ile elektrik alan analizi için oluşturulan model ve bilgisayar programı ile ilgili bilgiler verilmiş ve yüksek gerilim kablolarına uygulanması açıklanmıştır.

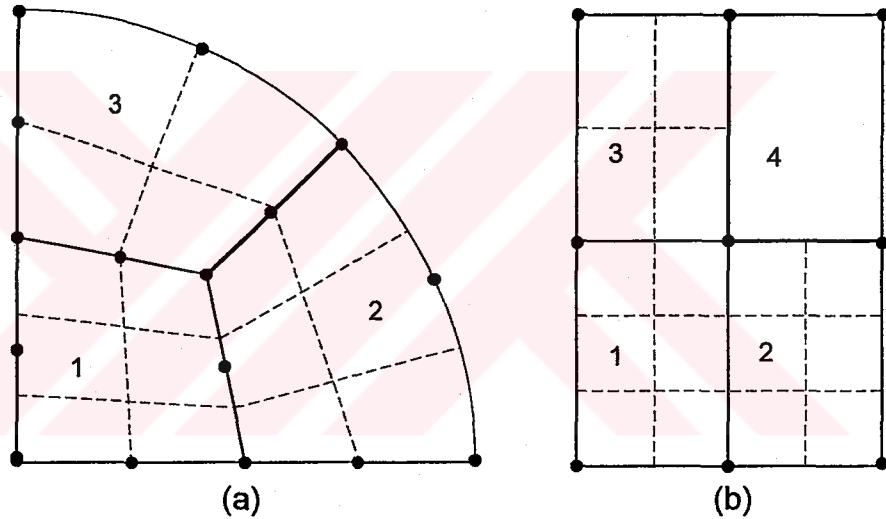
4.2. Ağ Üretimi

4.2.1. Bölge ve blok şeması

Ağ oluşturma işleminin temel mantığı, birkaç anahtar nokta için girilmiş olan verilerden yola çıkarak, elemanların süreklilik ve düğüm koordinat bilgilerini

retme ve işlem yapılan bölgeyi istenen incelikte elemanlara ayırma olarak tanımlanabilir.

Bu yöntemde genel olarak karmaşık bir bölge, sekiz düğümlü dörtgenlere bölünür ve bu dörtgenler daha sonra dikdörtgensel blok modeli halinde gösterilir. Şekil 4.1.a'da görülen bölge göz önüne alınır ve blok şemasını oluşturmak için daha küçük dörtgen bloklardan oluşan bir blok modeli Şekil 4.1.b'de görüldüğü gibi elde edilir.

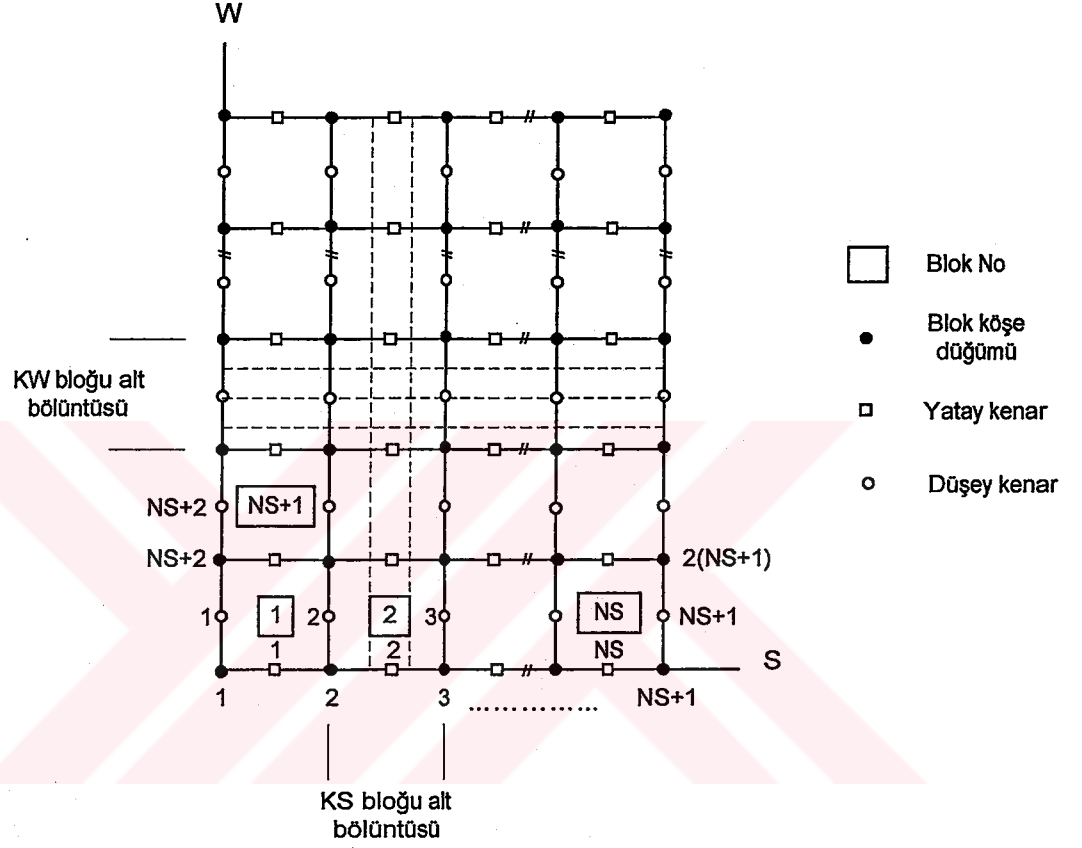


Şekil 4.1. (a) Bölge ve (b) blok şeması

Tüm dikdörtgensel blok modeli, düğüm numaralandırma işlemi için uygundur. Bölgenin tanımlanabilmesi için blok şemasındaki 4 numaralı blok boş kabul edilmeli ve koyu çizgi ile belirtilen kenarlar karşılıklı olarak birleştirilmelidir. Genel olarak karmaşık bölge dikdörtgensel bloklardan oluşan, bazı blokların boş olarak bırakıldığı ve bazı kenarların birleştirildiği bir dikdörtgen olarak görülecektir.

Şekil 4.2'de bloklardan oluşmuş bir tüm dikdörtgen modelin genel konfigürasyonu görülmektedir. Model yatay S ve düşey W eksen takımına yerleştirilmiştir. Aralık numaraları yataydaki aralık sayısı NS ve düşeydeki

aralık sayısı NW olarak adlandırılmıştır. Ağ oluşturulurken her aralık alt bölümlere



Şekil 4.2. Düğüm, blok ve kenarların numaralandırılması

ayrılır. Aralıkların alt bölümleri KS ve KW olmak üzere yataydaki toplam aralık $NSD(KS)$ ve düşeydeki toplam aralık $NWD(KW)$ olarak adlandırılmıştır. Düğümler numaralandırılırken ilk noktadan başlanarak S yönünde ilerlemek şartıyla numara verilir. İlk sıra bittiğinde W yönündeki sonraki satırın ilk düğümünden itibaren aynı işlem tekrar edilir.

S ve W doğrultularındaki toplam düğüm sayısı;

$$NNS = 1 + \sum_{KS=1}^{NS} NSD(KS)$$

$$NNW = 1 + \sum_{KW=1}^{NW} NWD(KW)$$

[4.1]

mümkün olan en fazla düğüm sayısı ise;

$$NNT = NNS * NNW \quad [4.2]$$

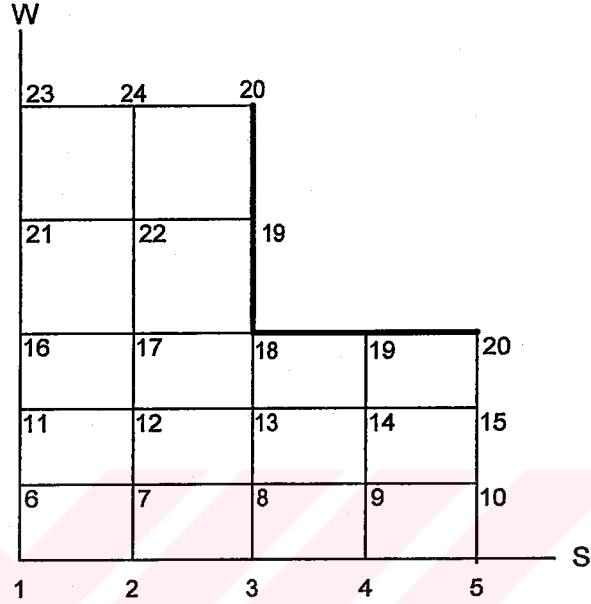
olarak ifade edilir. Problemdaki düğümlerin tanımlanması için bir dizi oluşturulur. Ayrıca blokların tanımlanması için de bir dizi kullanılmaktadır. Bu dizi blokların malzeme numaralarını içermektedir. Eğer bir blok için bu değer sıfır olursa o blok boşaltılmış demektir. Normalde mevcut bloklar için bu değer 1'dir.

Blok şeması üzerinde tanımlamış olduğumuz tüm blok köşe düğümlerine ait x ve y koordinatları ile alt blokların her birinde bulunması muhtemel eğri kenarların orta nokta koordinatları da bilgi olarak verilmelidir. Ayrıca modelde eğri kenarlar mevcut ise bu kenarların orta nokta koordinatları uygun matrisler içinde okunur. Son olarak birleştirilecek olan kenarlar varsa bu kenarların son düğüm numaraları girilir.

4.2.2. Düğümlerin numaralandırılması

Düğüm numaralandırma işlemini bir örnek üzerinde göstermek yerinde olacaktır. Şekil 4.1'de gösterilen bölge ve ona ait blok şemasını ele alalım. Düğüm numaralandırma tasarısı Şekil 4.3'te görülmektedir. Yatayda iki blok ve düşeyde de iki blok vardır ve bunlardan 4 numaralı blok boşaltılmıştır. Eş.4.2 gereği oluşabilecek en büyük düğüm numarası 30'dur. 18-20 ve 18-28 kenarları birleştirilecek kenarlardır. Düğüm numaralarını tutan matristeki her değişkene önce -1 değeri verilir. Bunun anlamı her düğümün mevcut ve bağımsız olduğudur.

bilindiğinden dizideki yeni değeri verilir. Numaralandırma işlemi bu şekilde tamamlanır.



Şekil 4.4. Düğüm numaralandırması

Şekil 4.5 (a)'da düğüm numaraları matrisinin genel hali görülmektedir. Buradaki değerler blok şemasındaki düğümlere hiçbir işlem yapılmadan önce verilmiş numaralardır. Şekil 4.5 (b)'de ise matrisin tüm düğümler için (-1) değeri verildikten sonra, olmayan düğümler için sıfır, taşınmış düğümler için ise karşılık düğümün numarası verilmiş durumu görülmektedir. Son basamakta yapılan işlemden sonra düğümlerin aldığı gerçek numaralar Şekil 4.5 (c)'de görülmektedir.

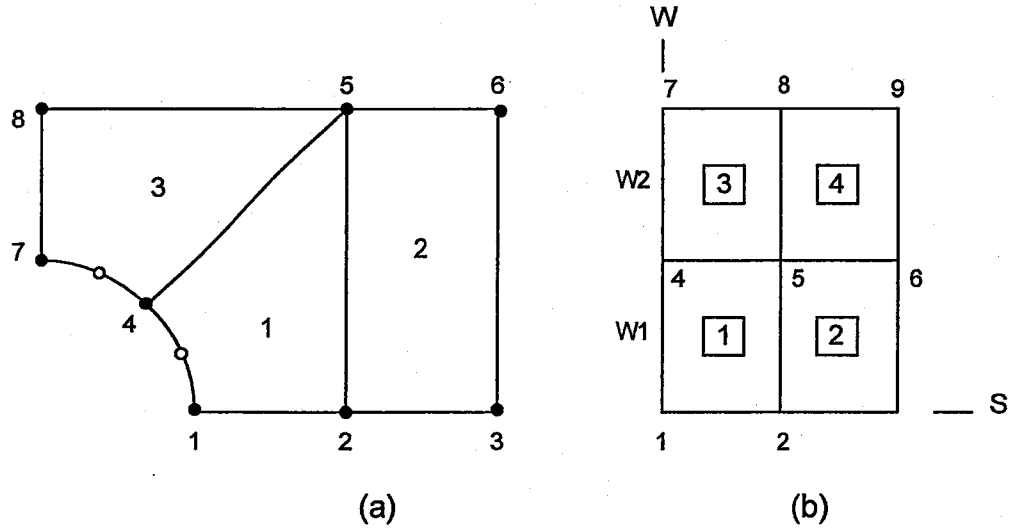
$$\begin{array}{ccc}
 \left. \begin{array}{c} 26 \ 27 \ 28 \ 29 \ 30 \\ 21 \ 22 \ 23 \ 24 \ 25 \\ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \\ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \\ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \\ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \end{array} \right\} &
 \left. \begin{array}{c} -1 \ -1 \ 20 \ 0 \ 0 \\ -1 \ -1 \ 19 \ 0 \ 0 \\ -1 \ -1 \ 18 \ -1 \ -1 \\ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \\ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \\ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \end{array} \right\} &
 \left. \begin{array}{c} 23 \ 24 \ 20 \ 0 \ 0 \\ 21 \ 22 \ 19 \ 0 \ 0 \\ 16 \ 17 \ 18 \ 19 \ 20 \\ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \\ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \\ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \end{array} \right\} \\
 \text{(a)} & \text{(b)} & \text{(c)}
 \end{array}$$

Şekil 4.5. Dğümlerin numaralandırılması

4.2.3. Koordinatların ve süreklilik bilgisinin üretilmesi

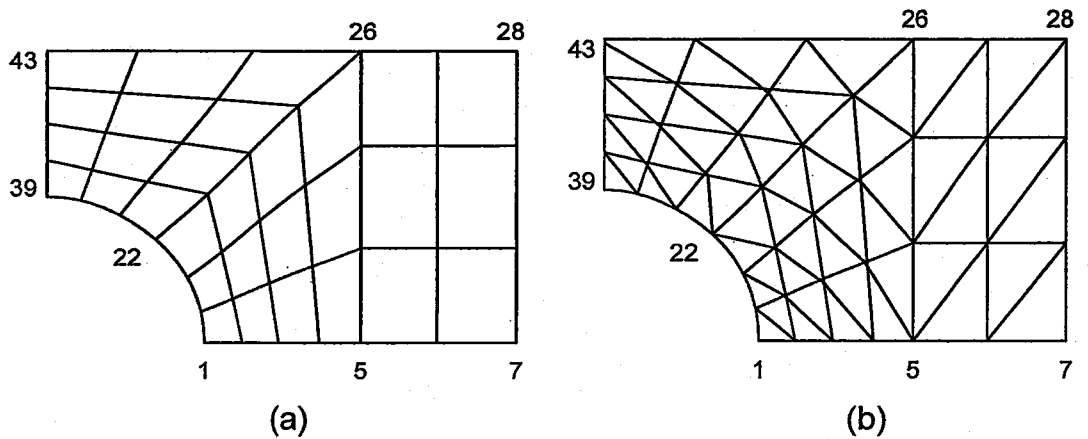
Bölge üzerindeki herhangi bir bloğu alt bölümlere ayırdığımızda oluşan kesişim noktalarındaki alt düğümlerin koordinatlarının hesaplanması gerekir. Bu her bir elemanın düğüm koordinatlarının hesaplanması demektir. İncelenen blok için 8 adet temel düğümün (4'ü köşe, 4'ü orta) x ve y koordinatları (veya r ve z koordinatları) tarafımızdan girilmiş olduğu için bilinmektedir. S-W koordinat sisteminde blok üzerinde bulunan bir N_1 alt düğümünün diğer 8 düğümle ilişkisi biliniyorsa şekil fonksiyonları yardımı ile bu düğümün x ve y koordinatları bulunabilir. Bölge üzerindeki bir blok alt bölümlere ayrıldığında, alt bölümler S-W düzleminde eşit aralıklarla oluşturulur. Bu bilgi, düğümlerin x ve y koordinatlarının hesaplanabilmesi için yeterlidir. Bu şekilde bölge üzerindeki tüm düğümlerin koordinatları hesaplanabilir. Son işlem olarak ilgili noktalar birleştirilir ve ağ oluşturulur.

Ağ oluşturma tekniğini bir örnek üzerinde inceleyelim. İlk önce bölgenin şekli çizilerek muhtemel düğümler tasarlanır. Dikkat edilecek nokta, her dört düğümün oluşturduğu her bir alt bölgenin kendi başına (daha başka bir bölünmeyi gerektirmeden) incelenebiliyor olmasıdır. Bunun için kenarlar tek bir fonksiyonla ifade edilebiliyor olmalıdır. Doğrusal olan kenarlar bunu sağlamaktadır. Eğrisel kenarların bu şartı sağlayabilmesi için, tek bir tepe noktası bulunan eğrisel kenarlar elde edilene kadar ilgili kenarın bölünmesi gerekir. Daha sonra oluşturulan elemanlara göre blok şeması tasarlanır. Şekil 4.6 (a)'da verilen bölge için blok şeması Şekil 4.6 (b)'de görüldüğü gibidir. Blok şeması 4 tane bloktan oluşmuştur. Blokların varsayılan materyal numaraları 1'dir. Bu bloklardan 4 numaralı blok boştur ve bu nedenle bu blok için materyal numarası 0'dır.



Şekil 4.6. Model örneği (a) bölge, (b) blok şeması

Programa 4 numaralı blok için materyal numarası sıfır olarak girilir. Materyal numarası 1 olan bloklar için giriş bilgisine gerek yoktur. S aralıkları sırasıyla 4'er ve 2'şer altbölüme bölünmüştür. W aralıkları ise 3'er altbölüme ayrılmıştır. İncelenen bölgedeki düğüm noktaları ve eğri kenarların orta noktalarına ait x ve y koordinatları programa veri olarak girilmelidir. Blok diyagramında bulunan 9 numaralı düğüm hariç diğer tüm düğümlerin x ve y koordinatları ile eğri W1, W2 kenarlarının orta noktalarına ait x ve y koordinatları programa girilir. Bu örnekte birleştirilecek kenar çifti bulunmamaktadır.

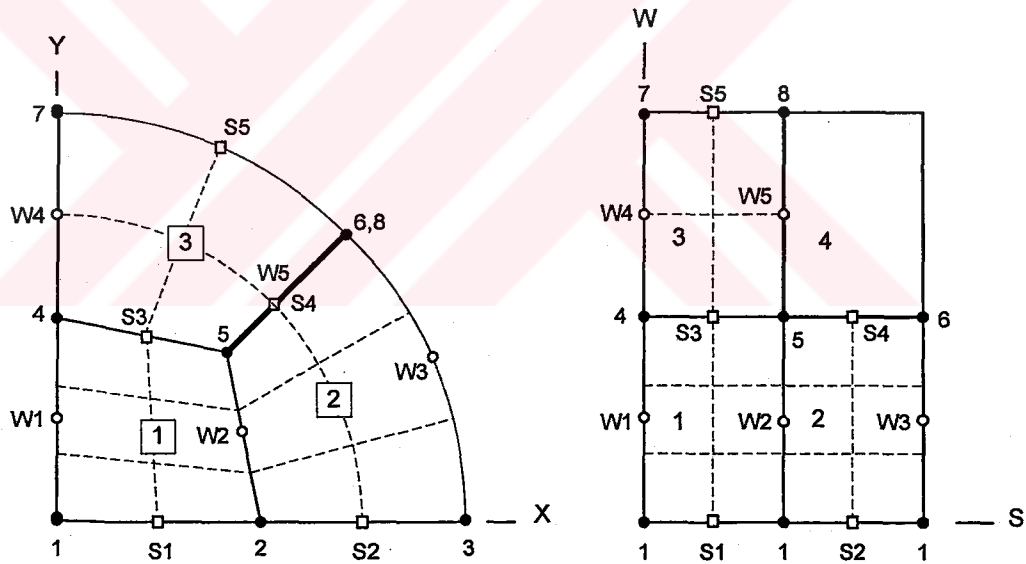


Şekil 4.7. Oluşturulan ağlar (a) dörtgensel ağ, (b) üçgensel ağ

Bundan sonra istenen eleman tipine göre ağ elde etmek mümkündür. Şekil 4.7 (a) ve (b)'de dörtgensel ve üçgensel elemanlar kullanılarak oluşturulan ağlar gösterilmiştir.

4.2.4. Otomatik ağ üreten program

Geliştirilen ağ üretim programının akış şeması Şekil 4.9'da gösterilmiştir. Bu programın kullanımına ilişkin bir örnek aşağıda verilmiştir. Şekil 4.8'de görülen çeyrek daire otomatik ağ programı kullanılarak elemanlara ayrıştırılacaktır. Bunun için program çalıştırdıktan itibaren bazı bilgiler kullanıcıdan istenecektir.



Şekil 4.8. Örnek

S doğrultusundaki alt bölüm sayısını giriniz

W doğrultusundaki alt bölüm sayısını giriniz

Boş bloklar için blok numarası ve materyal numarasını giriniz (0 ile blok bilgisi tamamlanır)

Blok numarası ? 4

Materyal numarası ? 0

Blok numarası ? 0

S ve W doğrultularındaki alt bölümlerin bölüntü sayılarını giriniz

1 numaralı S alt bölümündeki bölüntü sayısı ? 4

2 numaralı S alt bölümündeki bölüntü sayısı ? 4

1 numaralı W alt bölümündeki bölüntü sayısı ? 3

2 numaralı W alt bölümündeki bölüntü sayısı ? 4

Düğüm numarası ve x,y koordinatlarını giriniz (0 ile düğüm bilgisi tamamlanır)

Düğüm numarası ? 1

x, y koordinatları ? 0 , 0

Düğüm numarası ? 2

x, y koordinatları ? 2.5 , 0

Düğüm numarası ? 3

x, y koordinatları ? 5 , 0

Düğüm numarası ? 4

x, y koordinatları ? 0 , 2.5

Düğüm numarası ? 5

x, y koordinatları ? 1.8 , 1.8

Düğüm numarası ? 6

x, y koordinatları ? 3.536 , 3.536

Düğüm numarası ? 7

x, y koordinatları ? 0 , 5

Düğüm numarası ? 8

x, y koordinatları ? 3.536 , 3.536

Düğüm numarası ? 0

Eğri kenar numaralarını ve bu kenarların orta nokta koordinatlarını giriniz

Eğri S kenarlarını giriniz (0 ile eğri S kenar bilgisi tamamlanır)

Eğri S kenar numarası ? 5

x, y koordinatları ? 1.913 , 4.619

Eğri S kenar numarası ? 0

Eğri W kenarlarını giriniz (0 ile eğri W kenar bilgisi tamamlanır)

Eğri W kenar numarası ? 3

x, y koordinatları ? 4.619 , 1.913

Eğri W kenar numarası ? 0

Birleştirilecek kenar çifti sayısını ve bu kenarların düğüm noktalarını giriniz

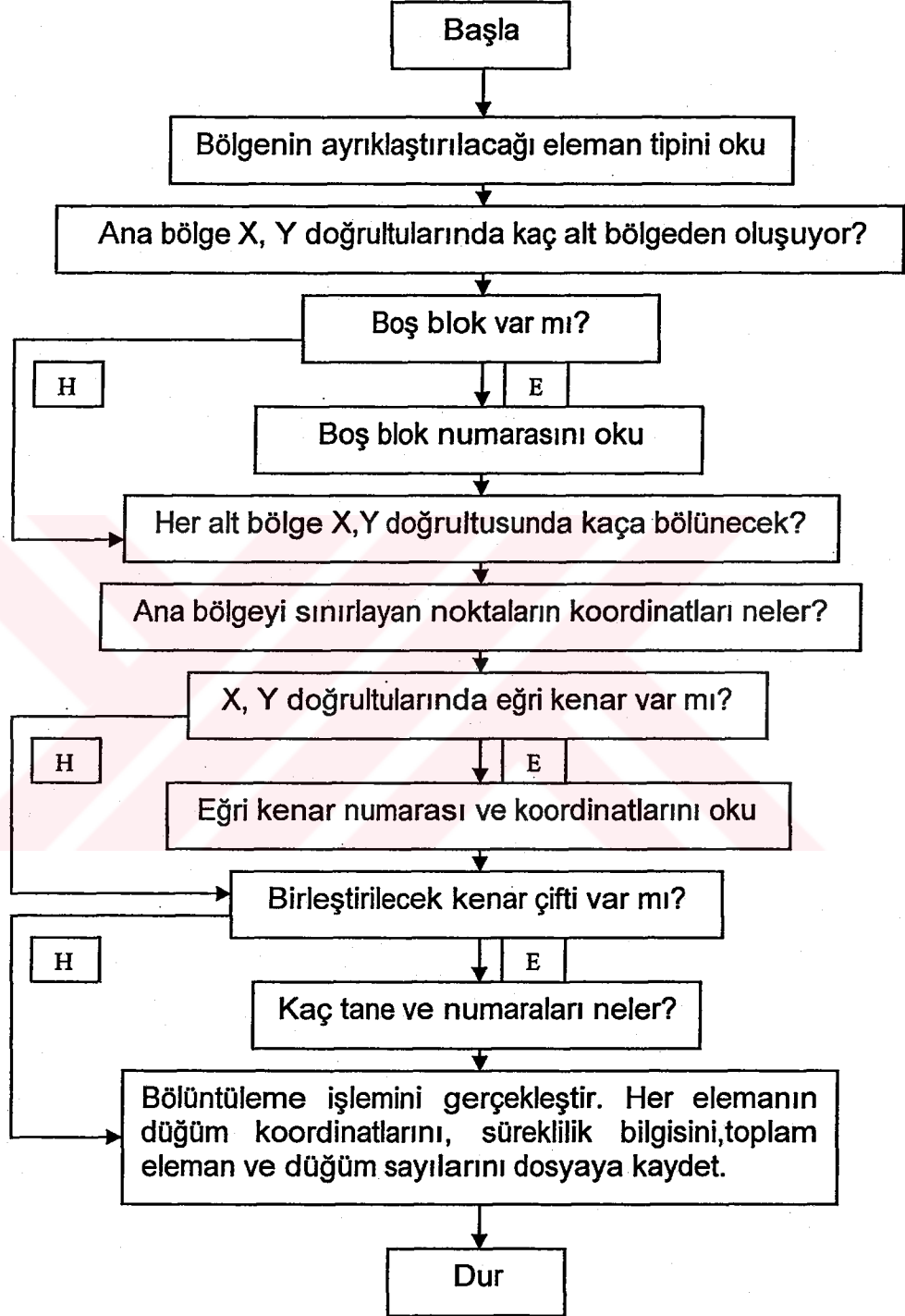
Birleştirilecek kenar çifti sayısı ? 1

1.Kenarın düğüm numaraları ? 5 , 6

2.Kenarın düğüm numaraları ? 5 , 8

Bu veriler girildikten sonra program ağ üretimini gerçekteştirir ve elde edilen toplam eleman sayısı, toplam düğüm sayısı, düğümlerin koordinat değerleri, süreklilik gibi çıktı verilerini dosyaya kaydeder. Bu dosya ağ çizen program tarafından kullanılarak elde edilen sonlu eleman ağı görüntülenebilir. Ayrıca bu dosya sonlu elemanlar çözümlünü yapan ve eşpotansiyel eğrilerini çizen diğer programlar tarafından da kullanılır.





Şekil 4.9. Otomatik ağ üreten programa ait akış şeması

4.3. Eşpotansiyel Eğrilerin Elde Edilmesi ve Çizimi

Eşpotansiyel eğrilerin elde edilmesi ve çizimi sonlu elemanlar metodunun değerlendirme işlemleri (postprosesing) olarak adlandırılan son basamağıdır. Bu çalışmada incelenen problemler silindirik simetriye sahip olduğu için üç boyutlu eşpotansiyel yüzeyler yerine iki boyutlu eşpotansiyel eğrileri kullanılmıştır. Alan problemlerinin çözümünde Φ potansiyeli biliniyorsa eşpotansiyel yüzeyler elde edilebilir.

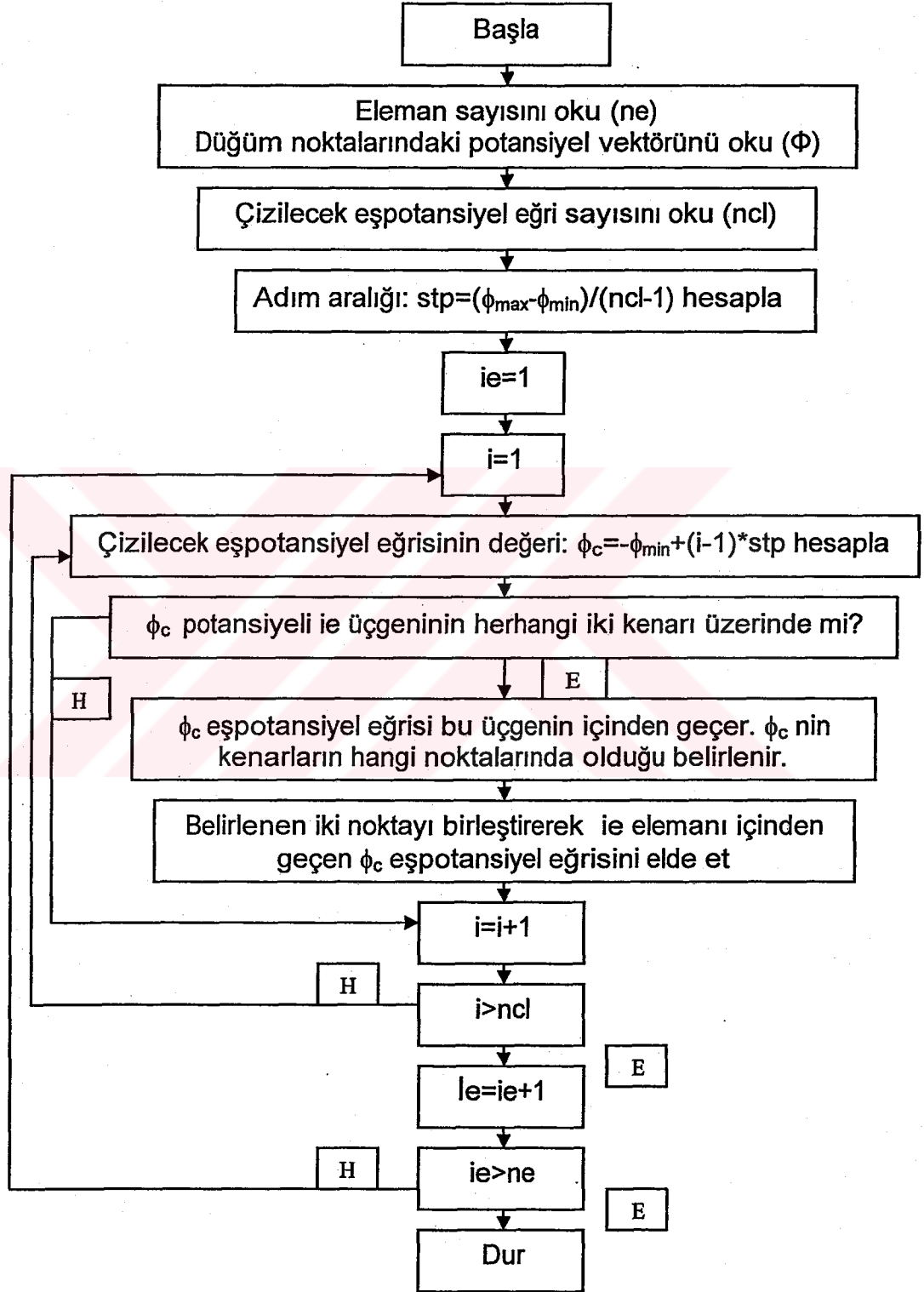
Şekil fonksiyonları eşpotansiyel eğriler ile ilgili ipuçları vermektedir. N_i, N_j, N_k şekil fonksiyonları için önemli iki özellik vardır. Bunlardan ilki şekil fonksiyonunun kendi noktasını diğer iki noktaya bağlayan kenarlar boyunca lineer değiştiğidir. Yani N_i şekil fonksiyonu ij ve ik kenarları boyunca lineer olarak azalır ve j ve k düğümlerinde sıfır olur. İkinci özellik ise her şekil fonksiyonunun kendi noktasının karşısında yer alan kenar boyunca sıfır olmasıdır. Yani N_i şekil fonksiyonu jk kenarında, N_j şekil fonksiyonu ik kenarında ve N_k şekil fonksiyonu da ij kenarında sıfırdır.

Bu özellikler göz önüne alınarak Φ 'nin her kenar boyunca doğrusal değiştiği sonucuna varılır. Φ ile ilgili diğer önemli bir sonuç da Φ 'nin sabit bir değeri için çizilen Eşpotansiyel eğrisinin, üçgensel elemanın iki kenarı arasında düz bir çizgi olduğudur. Bu iki önemli özellik Eşpotansiyel eğrilerin oluşturulmasını oldukça kolaylaştırır. İncelediğimiz üçgen elemanın köşe koordinatları; $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$ ve eleman düğümlerindeki potansiyel değerleri Φ_i, Φ_j, Φ_k 'nin bilindiğini varsayalım. Φ_c eşpotansiyel eğrisinin bu elemanın içinden geçmesi için Φ_c değerinin üçgenin en az iki kenarı üzerinde bulunması gerekir. Bu şart sağlanıyorsa Φ_c 'nin her iki kenar üzerinde bulunduğu noktaların koordinatları belirlenir. Bulunan iki nokta Φ_c eşpotansiyel eğrisi ile kenarların kesim noktasıdır. Bu noktalar birleştirilerek Φ_c eşpotansiyel eğrisi elde edilir. Φ_c eğrisinin ij ve jk kenarlarını kestiğini varsayalım. Bu durumda ij kenarı üzerinde bulunan kesim noktasının koordinatları (x_c, y_c) Eş.4.3 yardımıyla bulunabilir.

$$\frac{\Phi_j - \Phi_c}{\Phi_j - \Phi_i} = \frac{x_j - x_c}{x_j - x_i}, \quad \frac{\Phi_j - \Phi_c}{\Phi_j - \Phi_i} = \frac{y_j - y_c}{y_j - y_i} \quad [4.3]$$

Aynı işlem jk kenarı için de tekrarlanır. Ve bulunan bu noktalar birleştirilir bu işlem bölgedeki bütün elemanlar için tekrarlanarak tüm probleme ait eşpotansiyel eğrileri elde edilebilir.

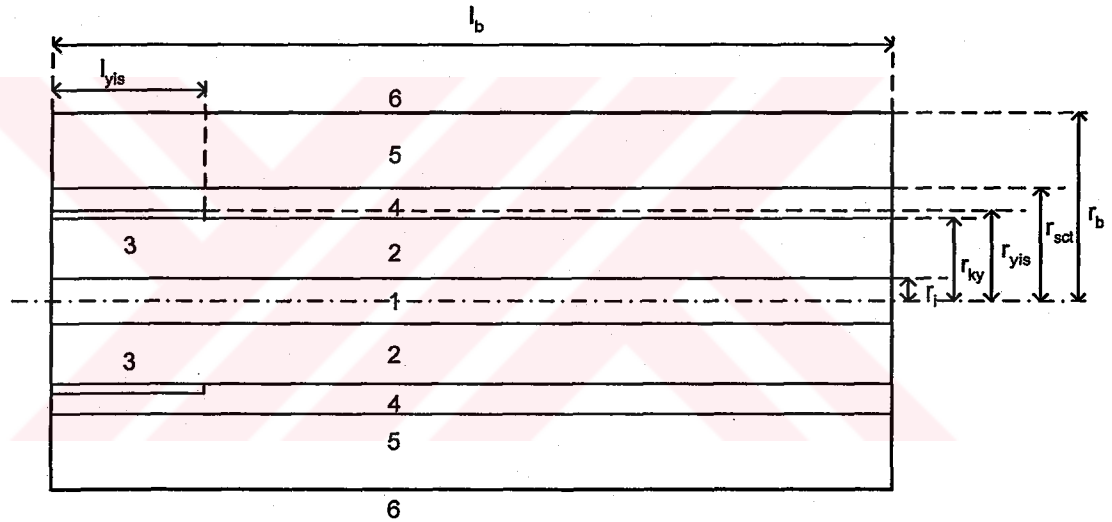
Eşpotansiyel eğrileri sabit bir potansiyel farkı esas alınarak çizilirse elde edilen dağılım elektrik alan hakkında bilgi verir. Bu çizgiler sıklaştıkça elektrik alan büyür, seyredikçe küçülür. Geliştirilen bilgisayar programı ağ üreten programdan elde edilen toplam eleman sayısı, toplam düğüm sayısı, düğüm noktalarının koordinatları ve süreklilik bilgisi gibi verileri ve problemin sonlu elemanlar çözümünü yapan programdan da elde edilen düğüm noktalarındaki potansiyel değerlerini dosyalardan okur. Ve kullanıcıdan bölgede çizilecek eşpotansiyel eğrisi sayısını sorar ve bu sayıya göre iki eşpotansiyel eğri arasındaki potansiyel farkını hesaplar. Program daha sonra Şekil 4.10'da verilen akış şemasını takip ederek incelenen probleme ait hesaplanan sıklıktaki eşpotansiyel eğrilerini çizer.



Şekil 4.10. Eşpotansiyel eğrilerini elde eden ve çizen programın akış şeması

4.4. Kablo Başlık ve Eklerinin Modellenmesi

Bu çalışmada kablo başlığı ve kablo eki, sonlu elemanlar metodu kullanılarak modellenmiş ve potansiyel dağılımları elde edilmiştir. Kablo başlığına ait fiziksel model Şekil 4.11'de ve başlık ölçüleri de Şekil 4.12'de gösterilmiştir. Model z eksenine göre simetriktir, bu nedenle sadece z ekseninin üzerinde veya altında kalan kısmın modellenmesi yeterli olacaktır. Bu modelde yer alan yarı iletken siperin iletken kısmı modellenmez, toprak olarak modellenir (9). Bu nedenle yarı iletken siper gerilimi 0 p.u olarak alınmıştır.



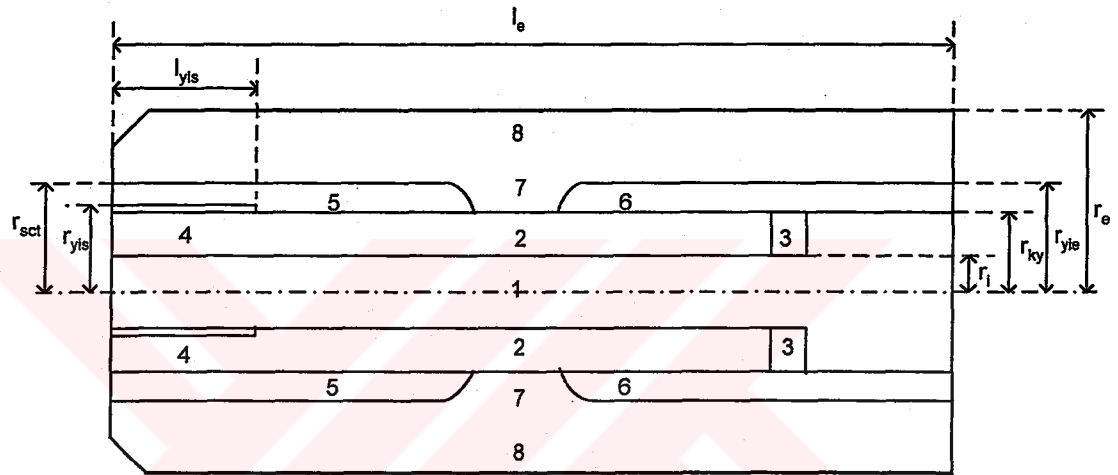
Şekil 4.11. Kablo başlığı fiziksel modeli

- 1 Kablo iletkeni ($V=1$ p.u)
- 2 Kablo Yalıtkanı (ϵ_{ky})
- 3 Yarı iletken kablo siperi ($V=0$ p.u)
- 4 Yüksek permitiviteli eleman (SCT, ϵ_{sct})
- 5 Başlık yalıtkanı (ϵ_{by})
- 6 Dış yarı iletken kılıf ($V=0$ p.u)

Bu modelde r_i iletken yarıçapını, r_{ky} Kablo yalıtkan yarıçapını, r_{yis} yarı iletken siper yarıçapını, r_{sct} alan kontrol tüpü yarıçapını, r_b başlık yarıçapını ve l_{yis} yarı iletken siper uzunluğunu, l_b başlık uzunluğunu göstermektedir.

Şekil 4.13'den 4.42'ye kadar kablo başlığı için kullanılan sonlu eleman ağ örgüleri ve bu ağ örgüleri kullanılarak yapılan çözümden elde edilen potansiyel dağılımları gösterilmiştir.

Kablo ekine ait fiziksel model Şekil 4.12'de verilmiştir. Bu model de z eksenine göre simetriktir ve yine sadece z ekseninin üzerinde veya altında kalan kısım modellenecektir.

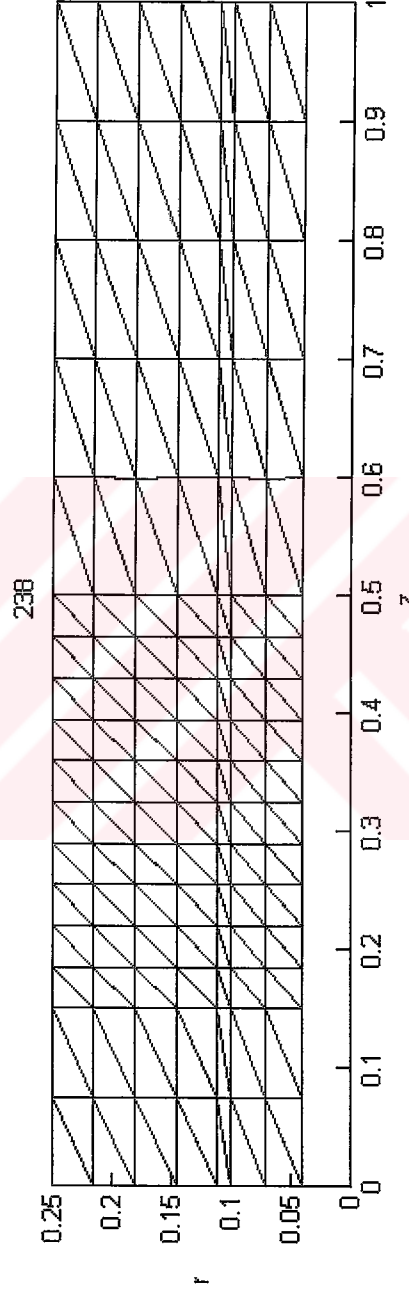


Şekil 4.12. Kablo eki fiziksel modeli

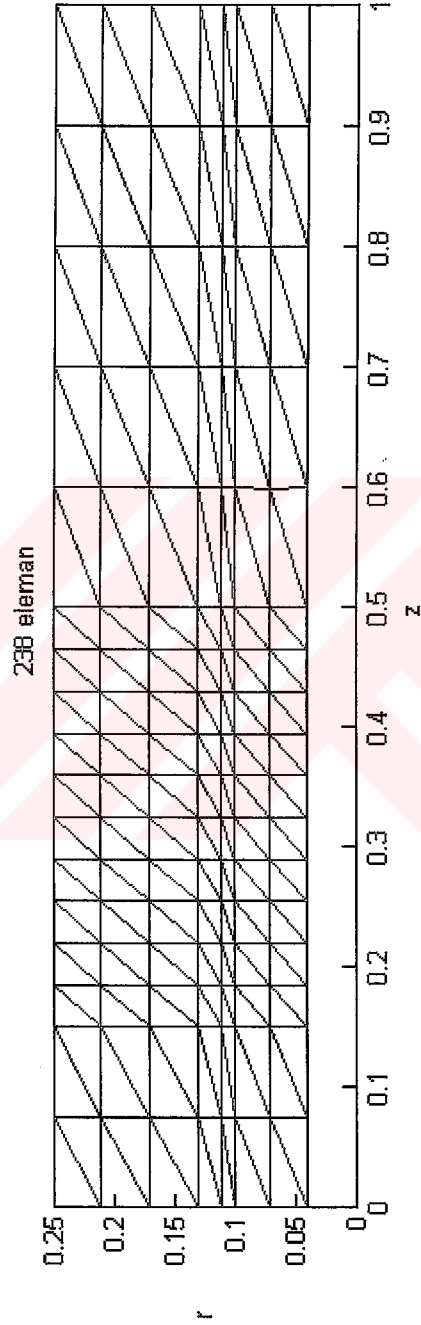
- 1 Kablo iletkeni ($V=1$ p.u)
- 2 Kablo yalıtkanı (ϵ_{ky})
- 3 Hava ($\epsilon_b = 1$)
- 4 Yarı iletken kablo siperi ($V=0$ p.u)
- 5 Yüksek permitiviteli eleman (SCT, ϵ_{sct})
- 6 Ek iç yarı iletken elektrodu ($V=1$ p.u)
- 7 Ek yalıtkanı (ϵ_{ey})
- 8 Dış yarı iletken kılıf ($V=0$ p.u)

Bu modelde r_i iletken yarıçapını, r_{ky} Kablo yalıtkan yarıçapını, r_{yis} yarı iletken siper yarıçapını, r_{sct} alan kontrol tüpü yarıçapını, r_e ek yarıçapını ve l_{yis} yarı iletken siper uzunluğunu, l_e ek uzunluğunu göstermektedir.

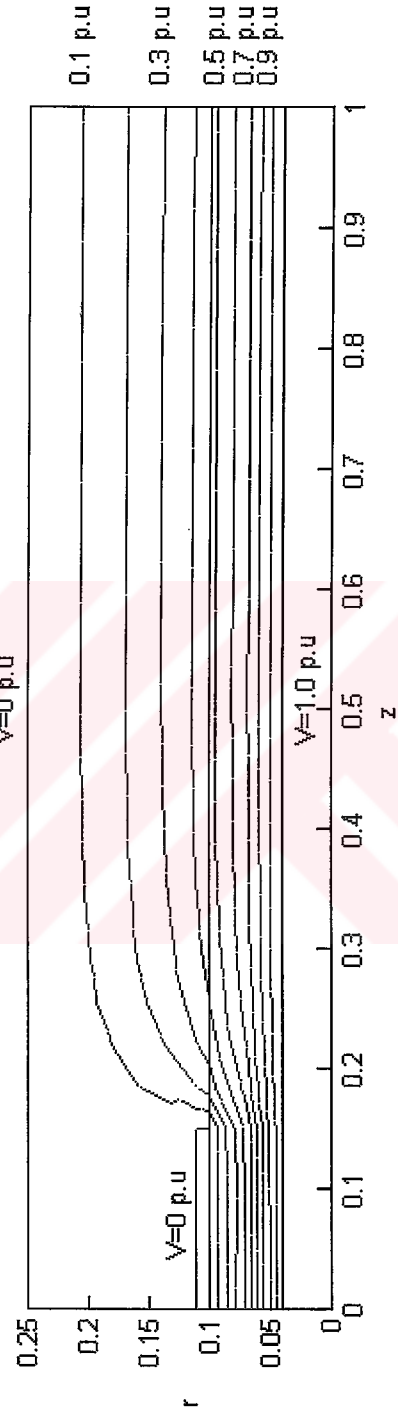
Şekil 4.43'den 4.53'e kadar kablo eki için kullanılan sonlu eleman ağ örgüleri ve bu ağ örgüleri kullanılarak yapılan çözümden elde edilen potansiyel dağılımları gösterilmiştir.



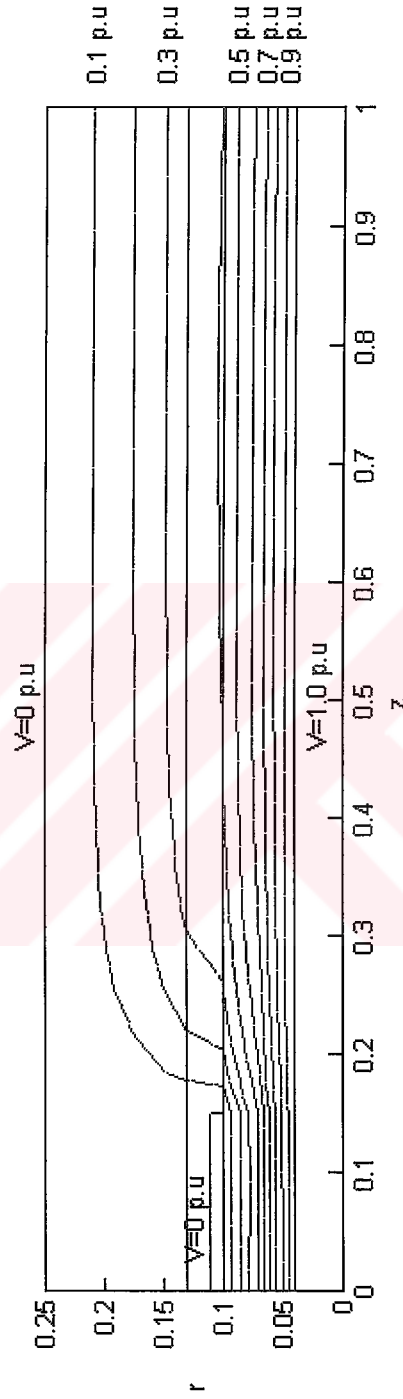
Şekil 4.13. $r_f=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.11$ p.u, $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.15$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü



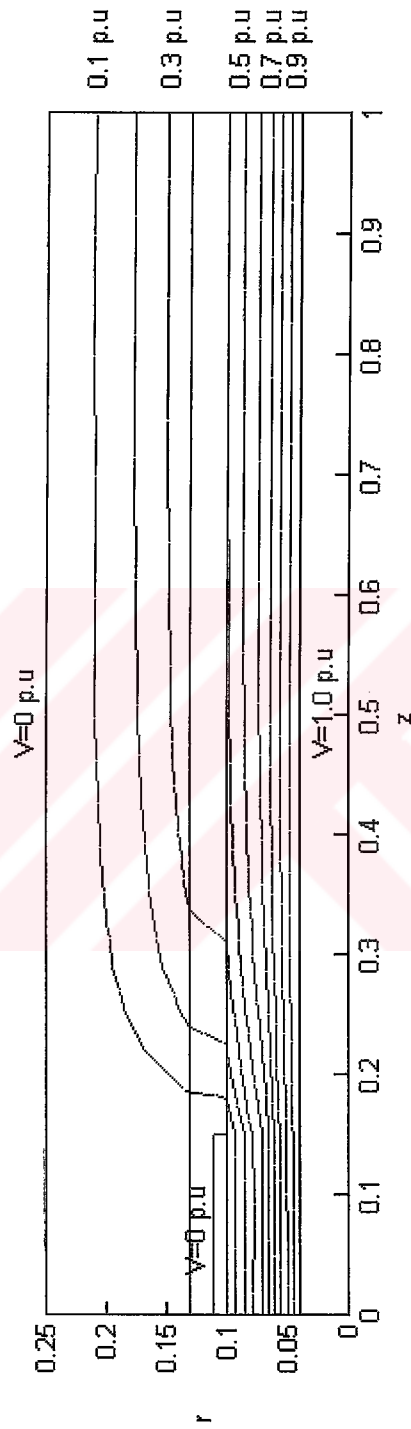
Şekil 4.14. $r_j=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.11$ p.u, $r_{sct}=0.13$ p.u $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.15$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü



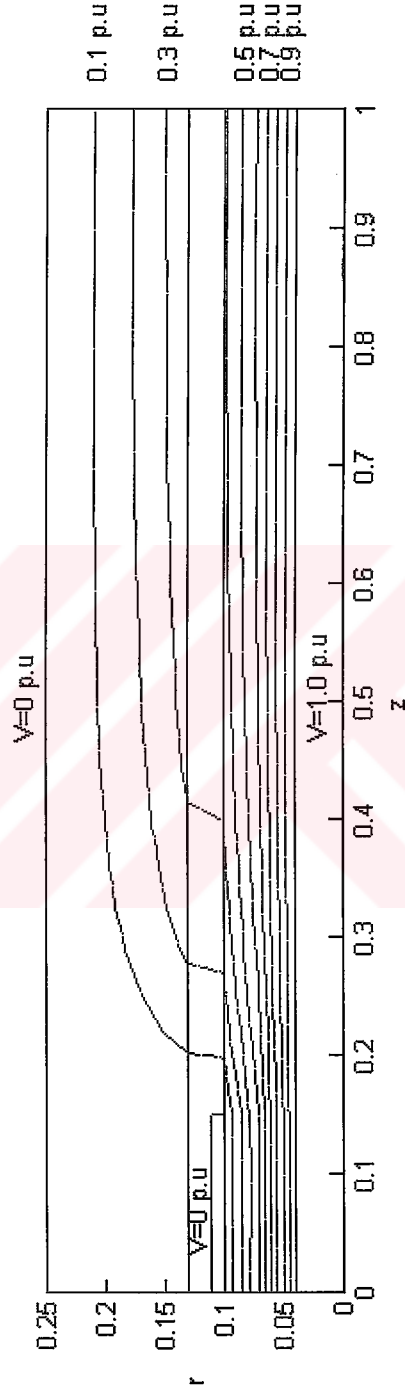
Şekil 4.15. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{by}=2.7$, $I_{yis}=0.15$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış başlık için potansiyel dağılımı



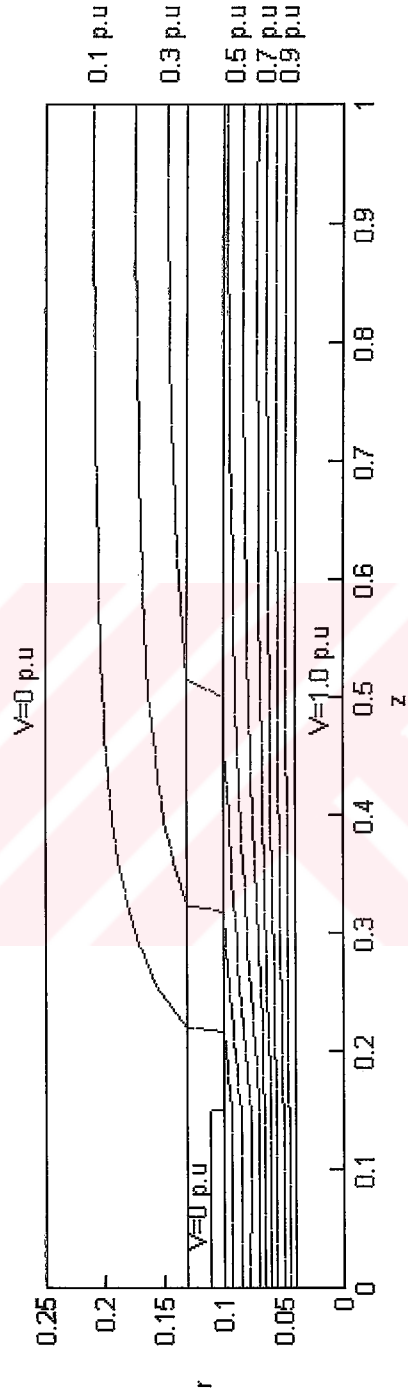
Şekil 4.16. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=10$, $\epsilon_{by}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı



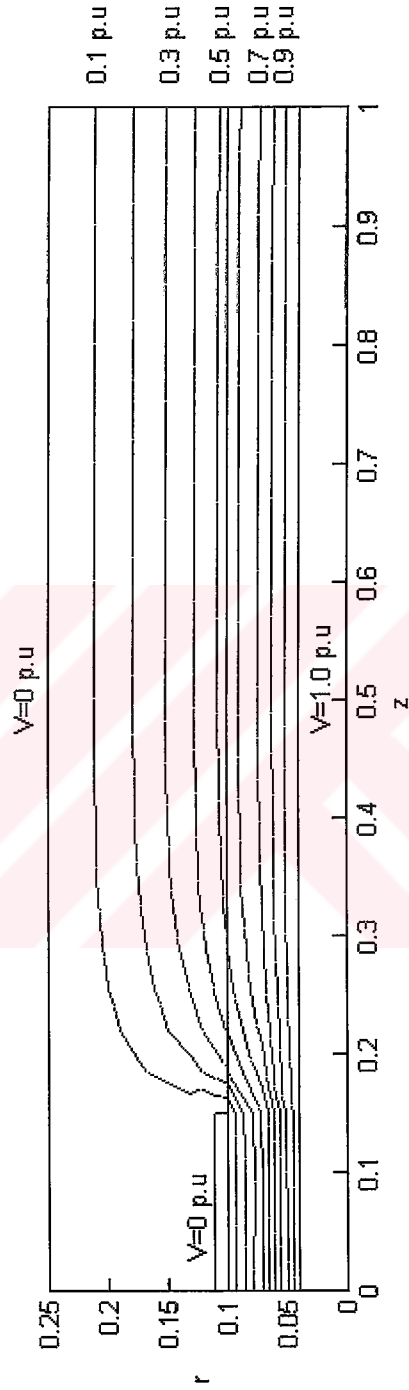
Şekil 4.17. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{by}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı



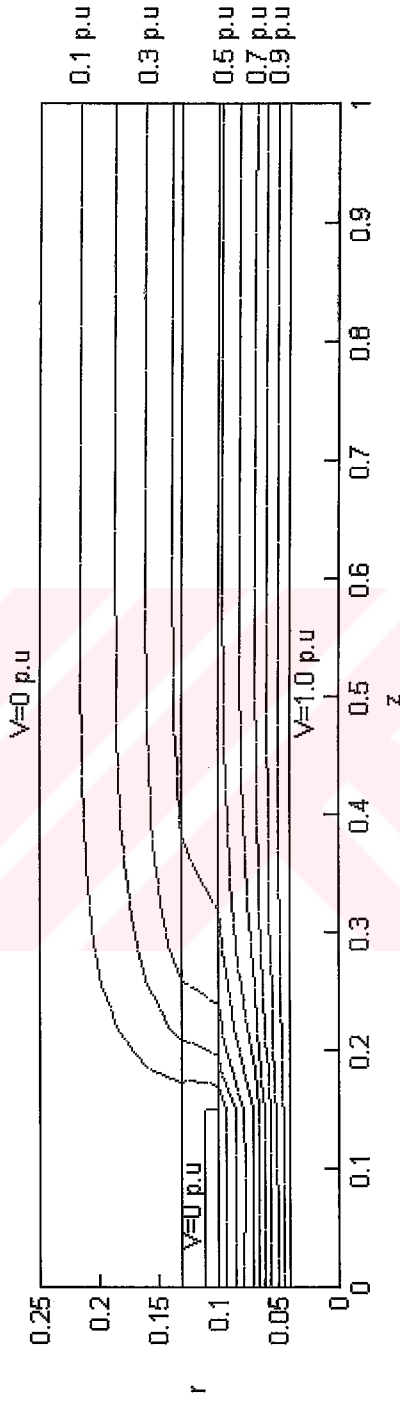
Şekil 4.18. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=50$, $\epsilon_{by}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı



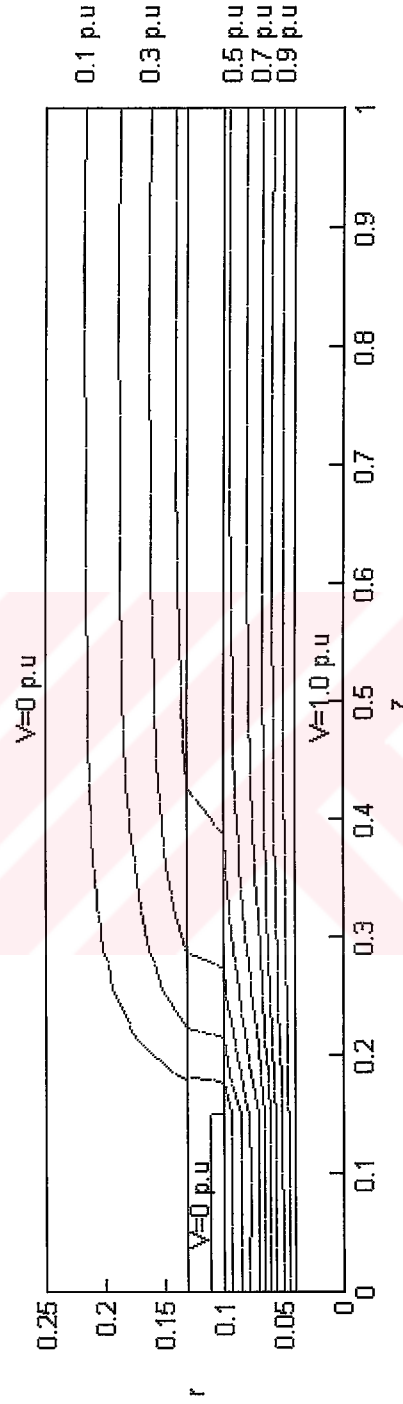
Şekil 4.19. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=100$, $\epsilon_{by}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı



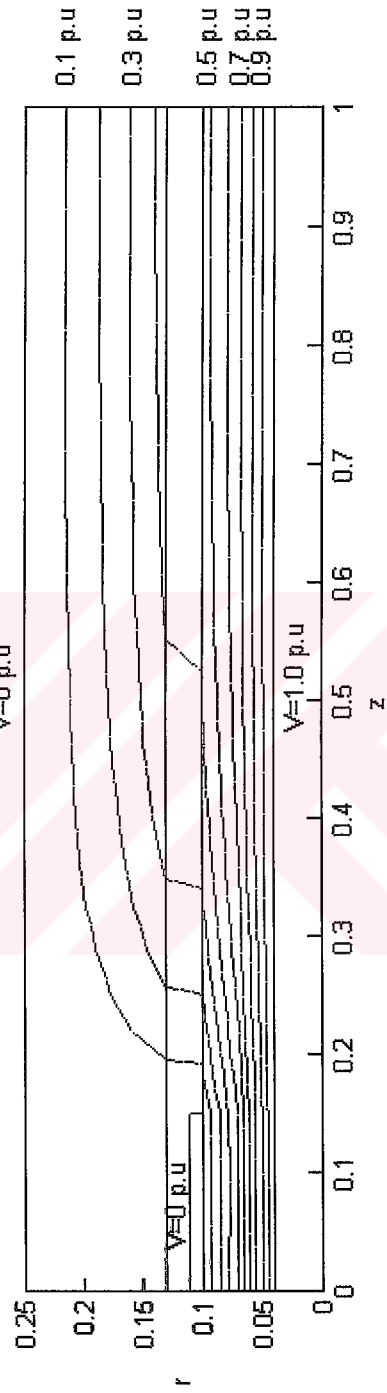
Şekil 4.20. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{by}=2.0$, $l_{yis}=0.15$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış başlık için potansiyel dağılımı



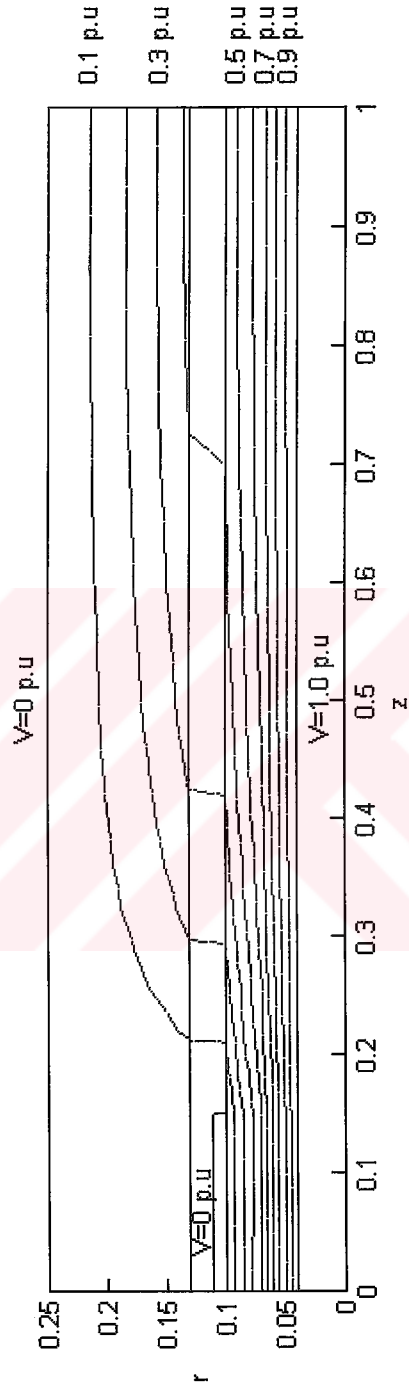
Şekil 4.21. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=10$, $\epsilon_{by}=2.0$ olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı



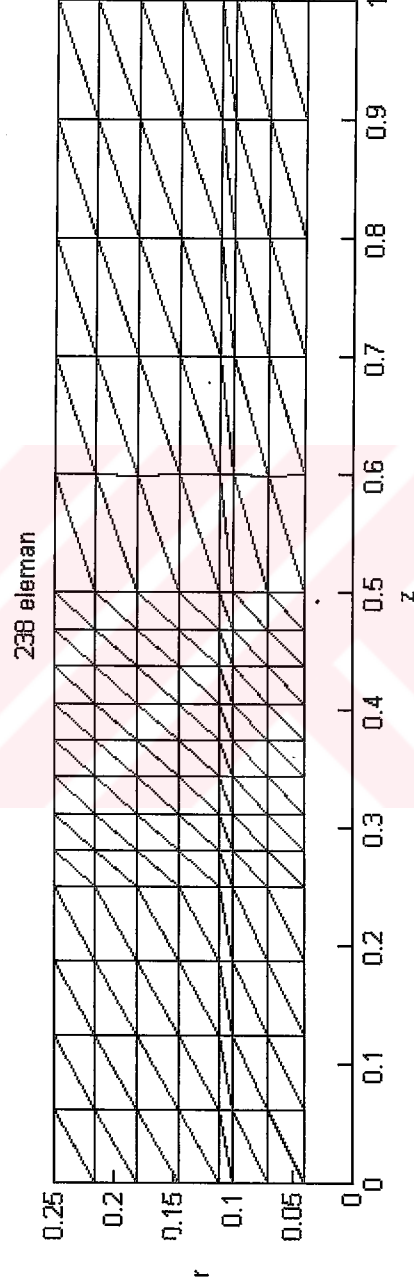
Şekil 4.22. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{by}=2.0$ olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı



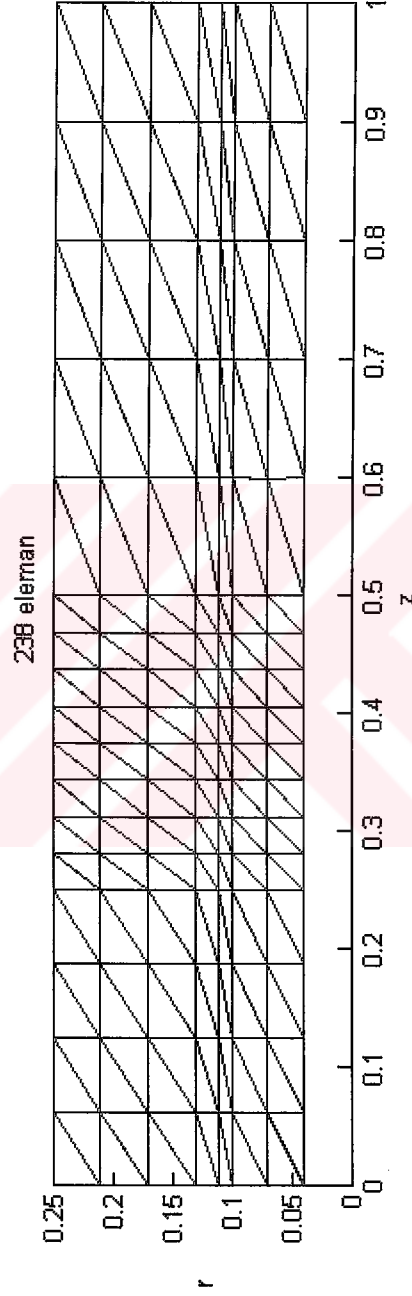
Şekil 4.23. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=50$, $\epsilon_{by}=2.0$ olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı



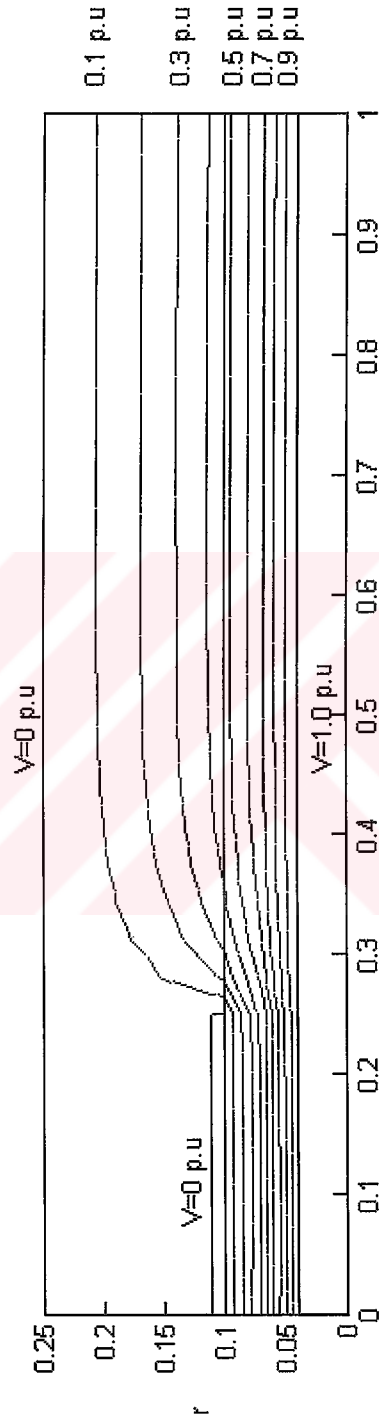
Şekil 4.24. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=100$, $\epsilon_{by}=2.0$ olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı



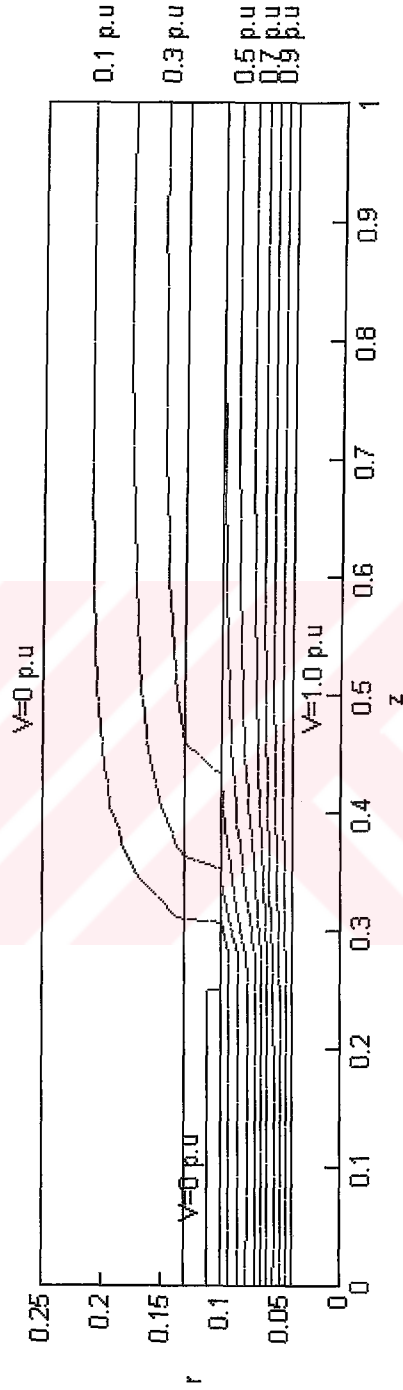
Şekil 4.25. $r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.11$ p.u, $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.25$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü



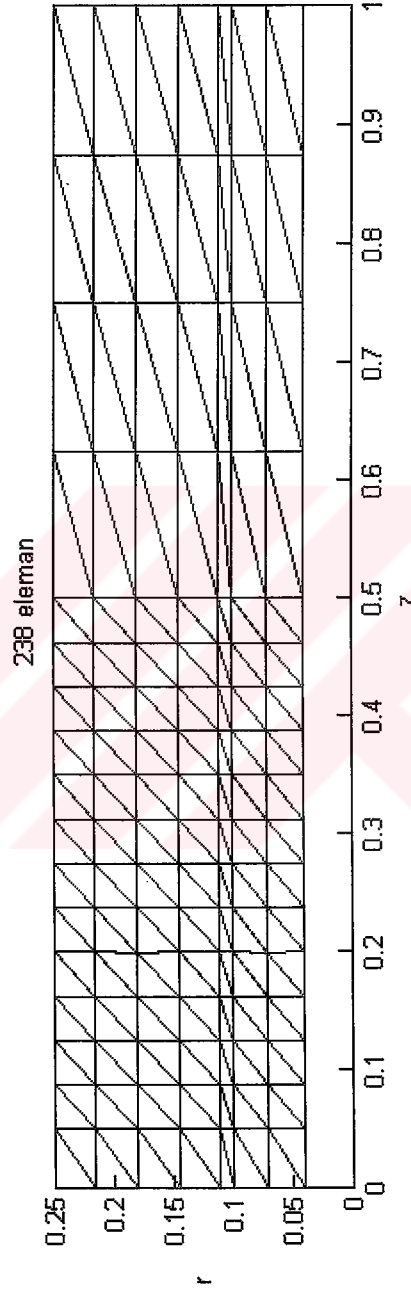
Şekil 4.26. $r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.11$ p.u, $r_{sct}=0.13$ p.u $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.25$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü



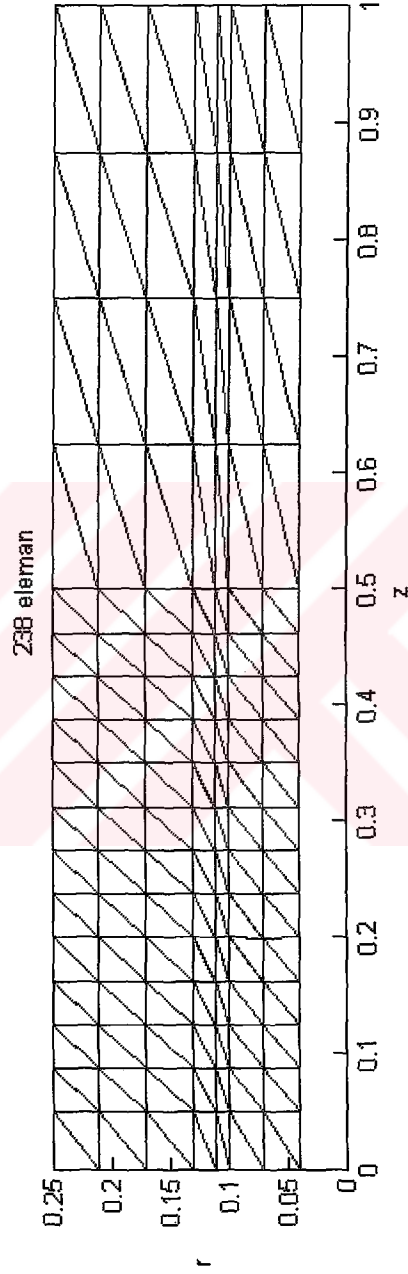
Şekil 4.27. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{by}=2.7$, $I_{yis}=0.25$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış başlık için potansiyel dağılımı



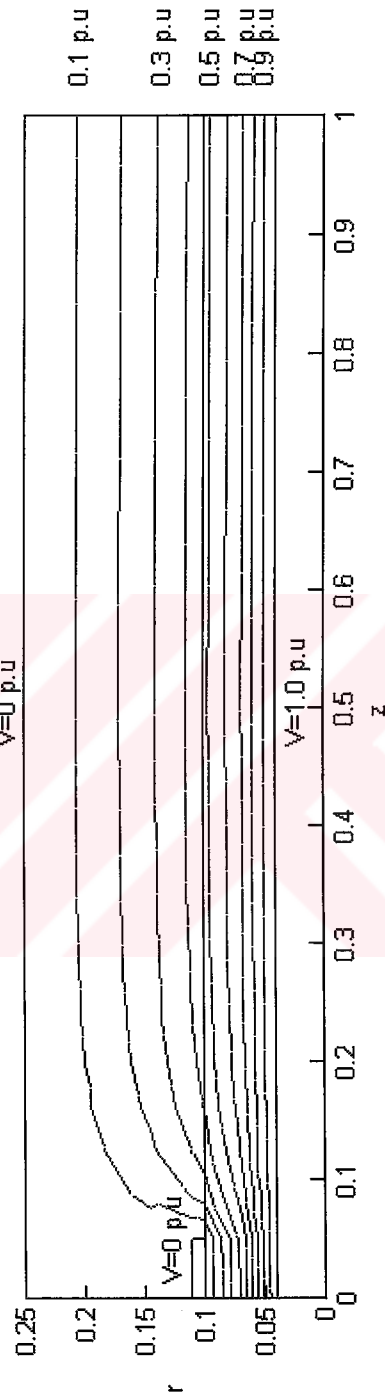
Şekil 4.28. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{by}=2.7$, $l_{yis}=0.25$ p.u olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı



Şekil 4.29. $r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.11$ p.u, $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.05$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü



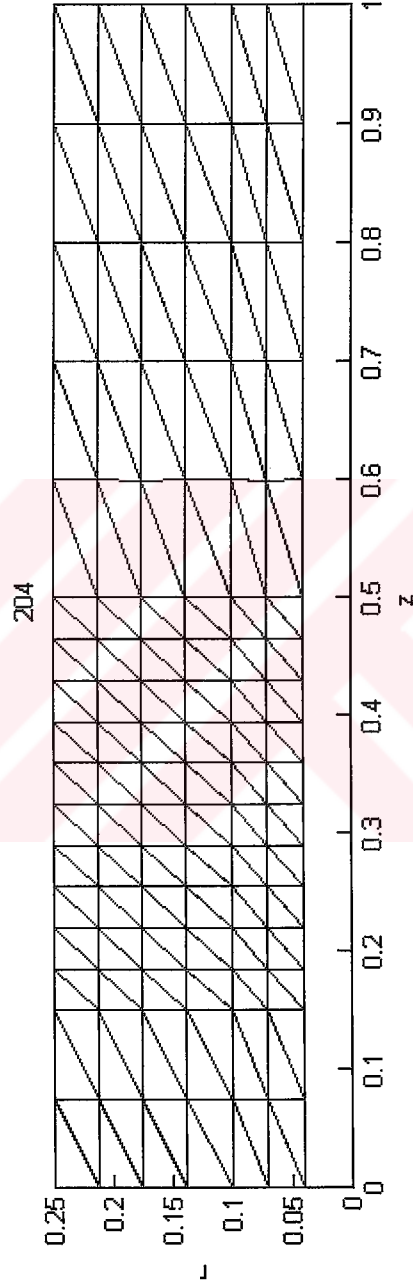
Şekil 4.30. $r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.11$ p.u, $r_{sct}=0.13$ p.u $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.05$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü



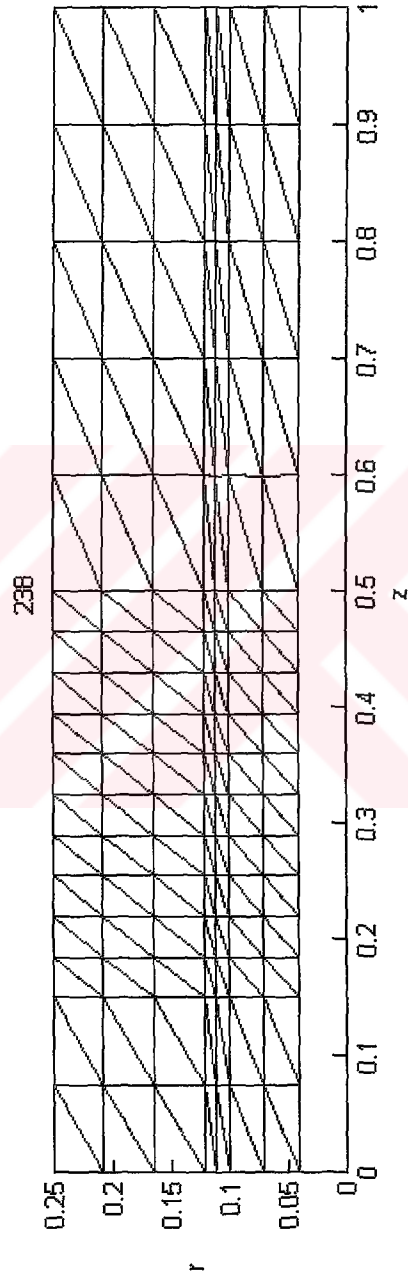
Şekil 4.31. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{by}=2.7$, $I_{yis}=0.05$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış başlık için potansiyel dağılımı



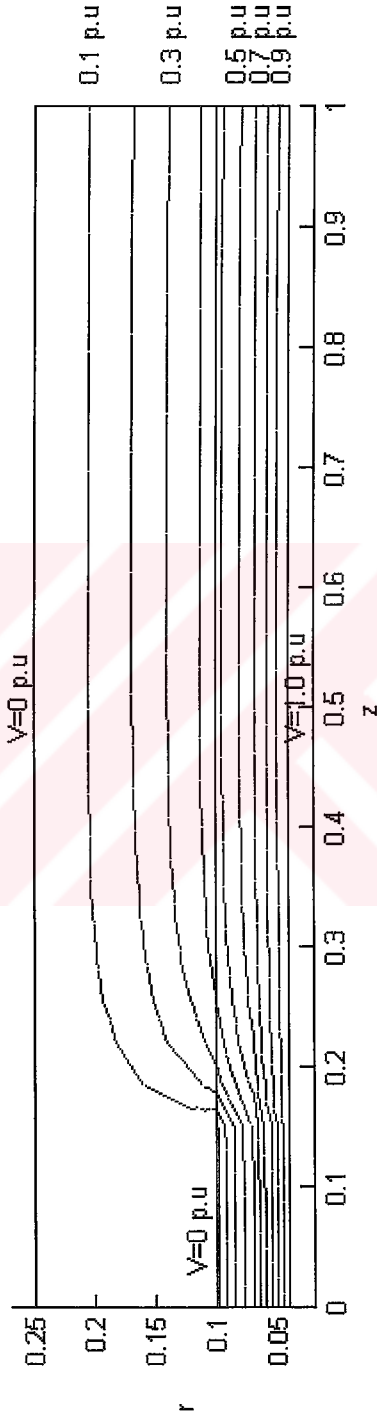
Şekil 4.32. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{by}=2.7$, $l_{yis}=0.05$ p.u olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı



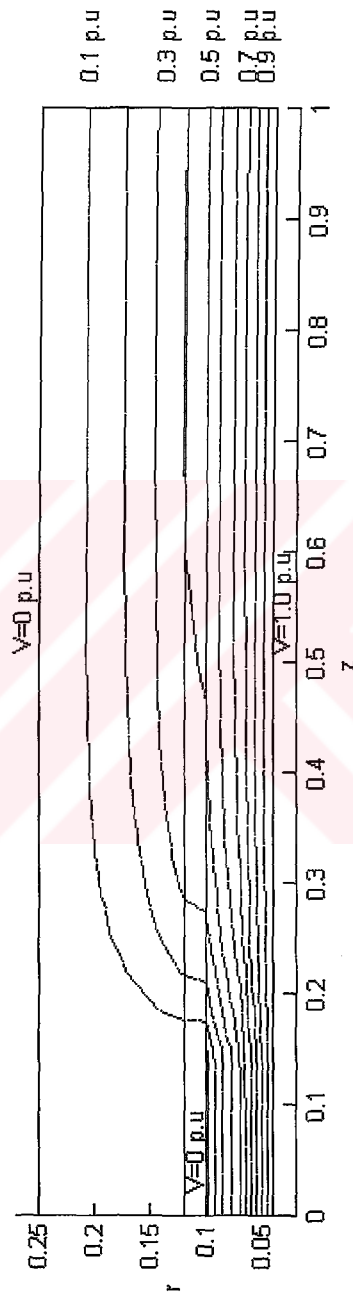
Şekil 4.33. $r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.101$ p.u, $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.15$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü



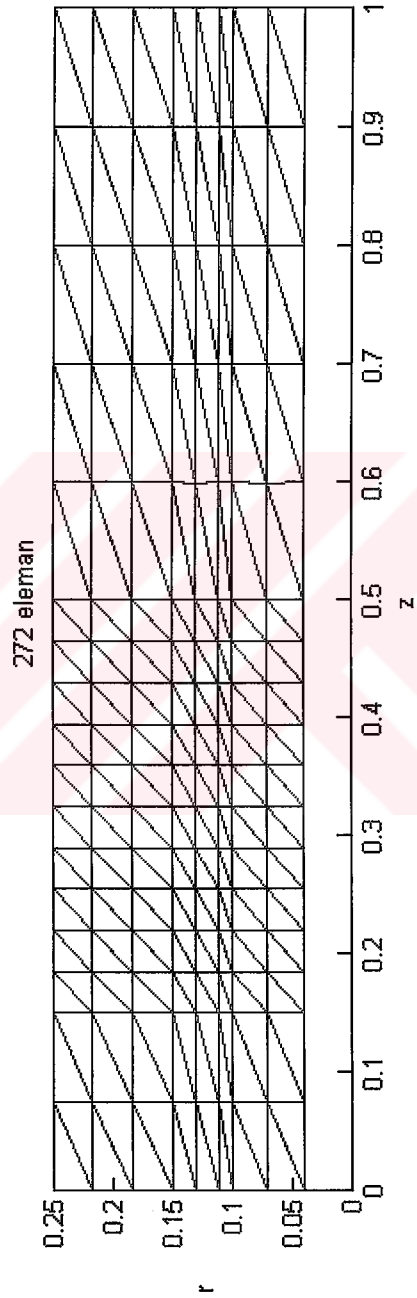
Şekil 4.34. $r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.101$ p.u, $r_{sct}=0.12$ p.u $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.15$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü



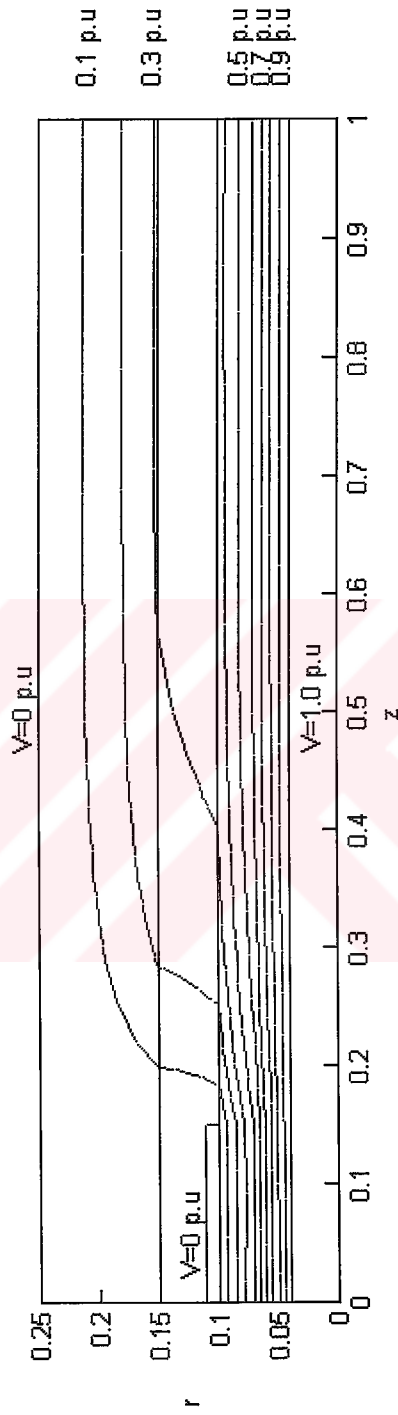
Şekil 4.35. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{by}=2.7$, $r_{yis}=0.101$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış başlık için potansiyel dağılımı



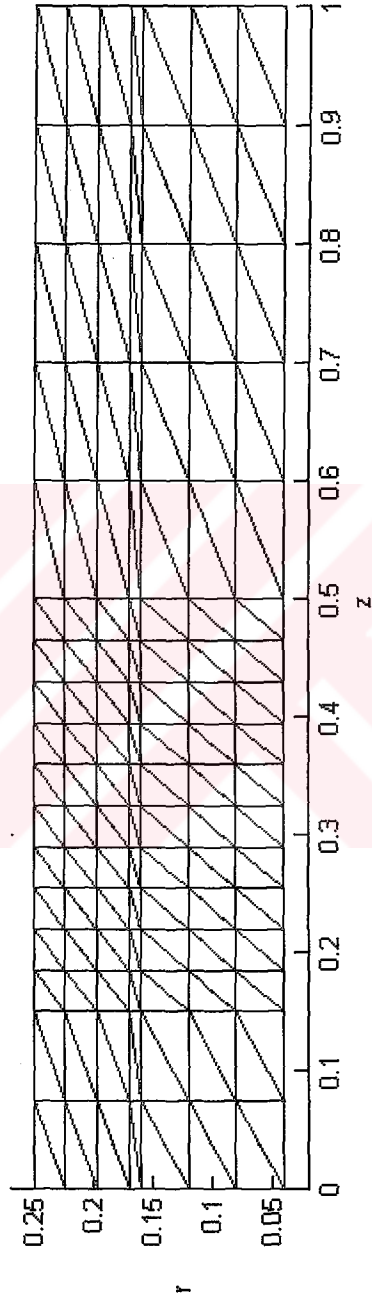
Şekil 4.36. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{by}=2.7$, $r_{yis}=0.101$ p.u olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı



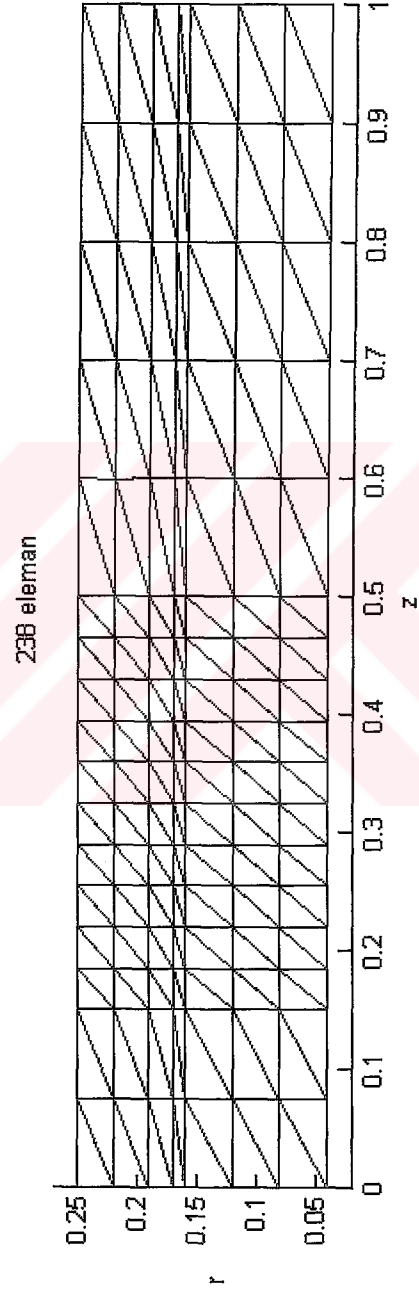
Şekil 4.37. $r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.1$ p.u, $r_{yis}=0.11$ p.u, $r_{sct}=0.15$ p.u, $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.15$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü



Şekil 4.38. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{by}=2.7$, $r_{sct}=0.15$ p.u olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı



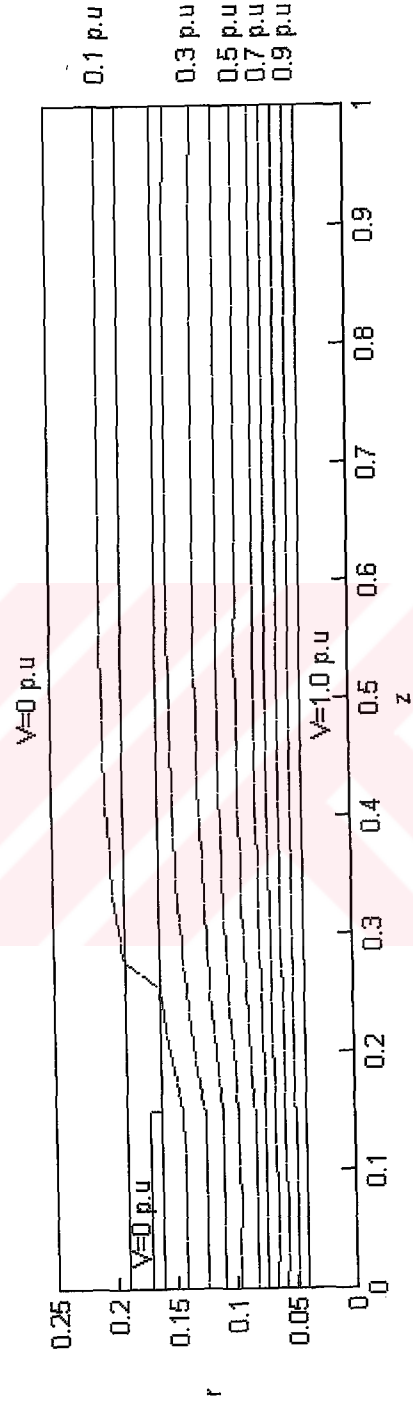
Şekil 4.39. $r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.16$ p.u, $r_{yis}=0.17$ p.u, $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.15$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü



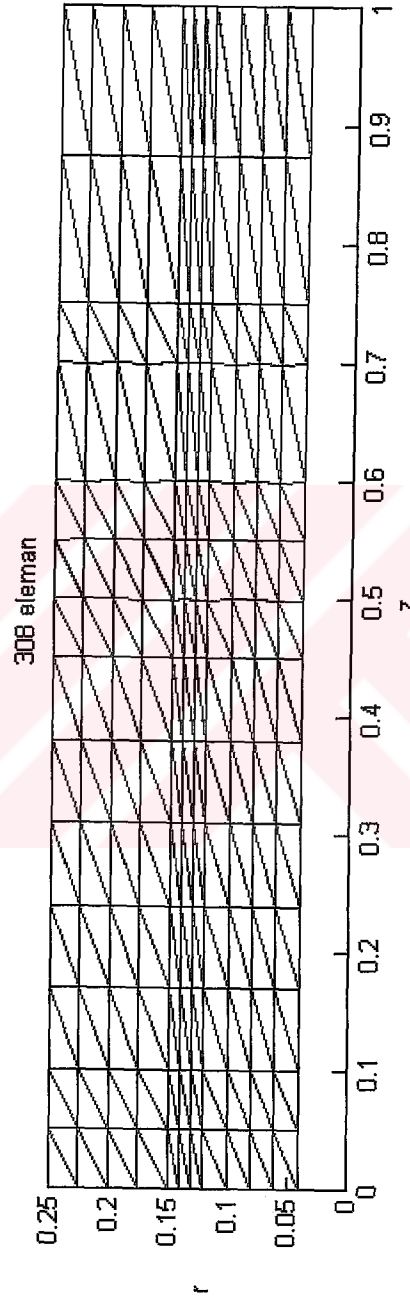
Şekil 4.40. $r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.16$ p.u, $r_{yis}=0.17$ p.u, $r_{sct}=0.19$ p.u, $r_b=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.15$ p.u, $l_b=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış kablo başlığının incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü



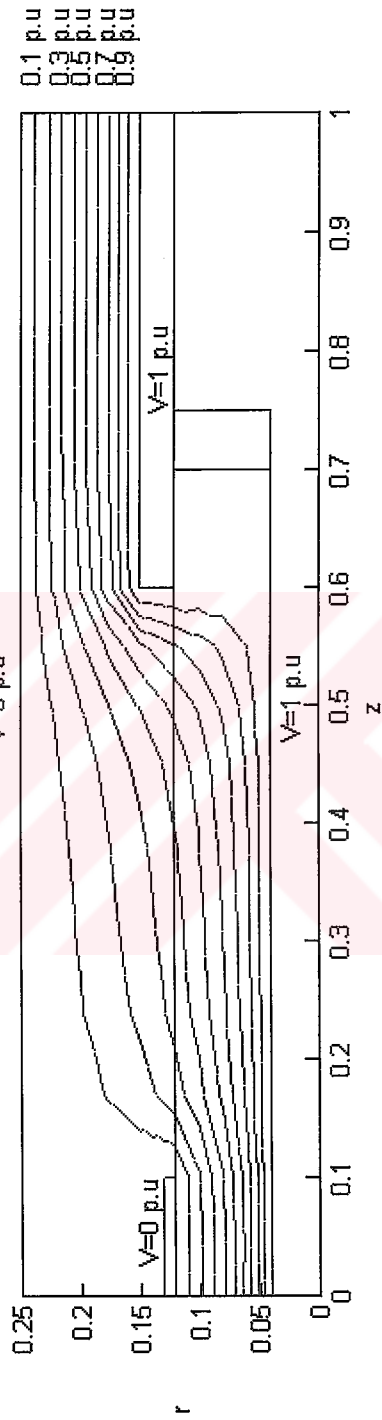
Şekil 4.41. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{by}=2.7$, $r_{ky}=0.16$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış başlık için potansiyel dağılımı



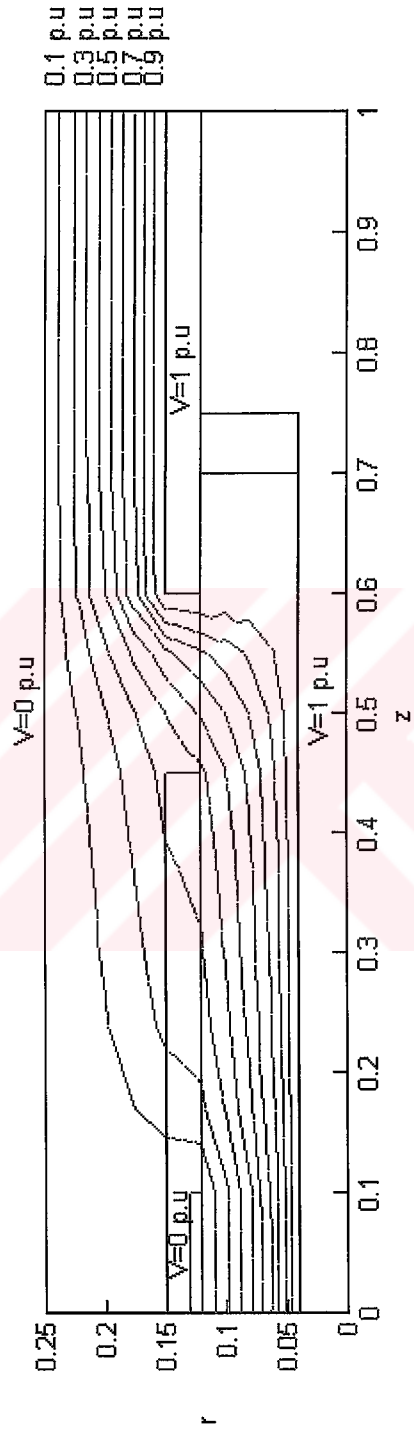
Şekil 4.42. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{by}=2.7$, $r_{ky}=0.16$ p.u olan alan kontrolü yapılmış başlık için potansiyel dağılımı



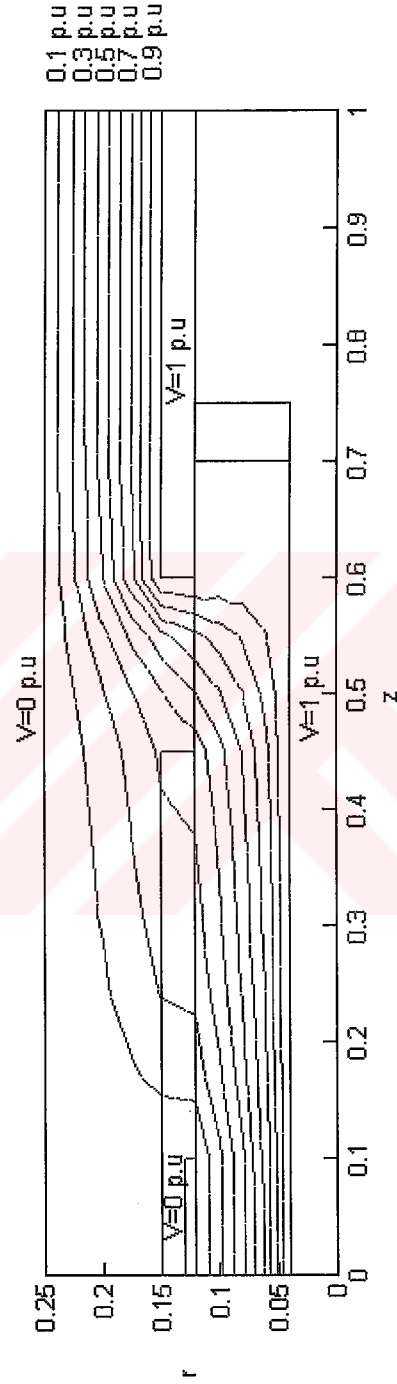
Şekil 4.43. $r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.12$ p.u, $r_{yis}=0.13$ p.u, $r_{scf}=0.15$ p.u $r_e=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.10$ p.u, $l_e=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ve yapılmamış kablo ekinin incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü



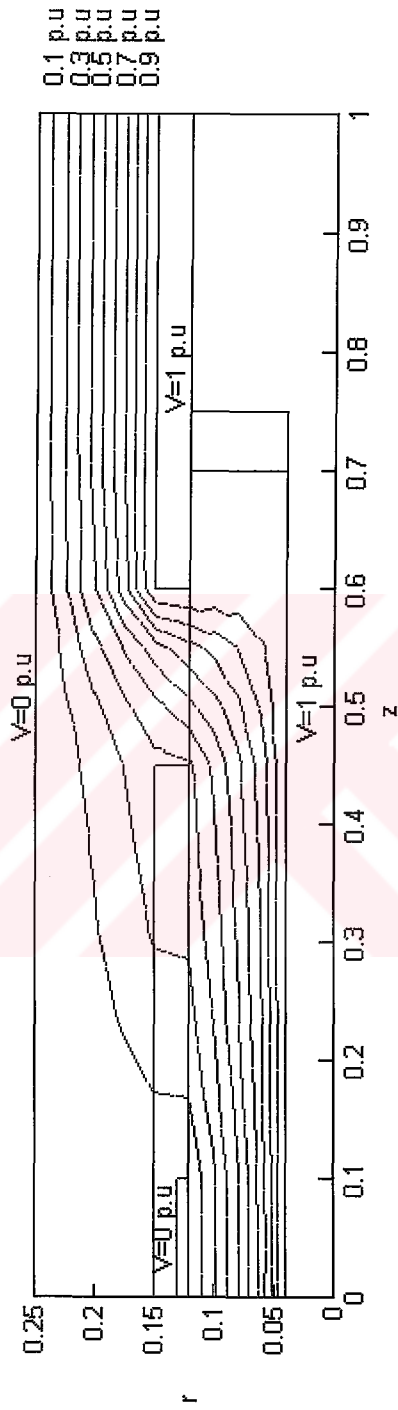
Şekil 4.44. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmamış ek için potansiyel dağılımı



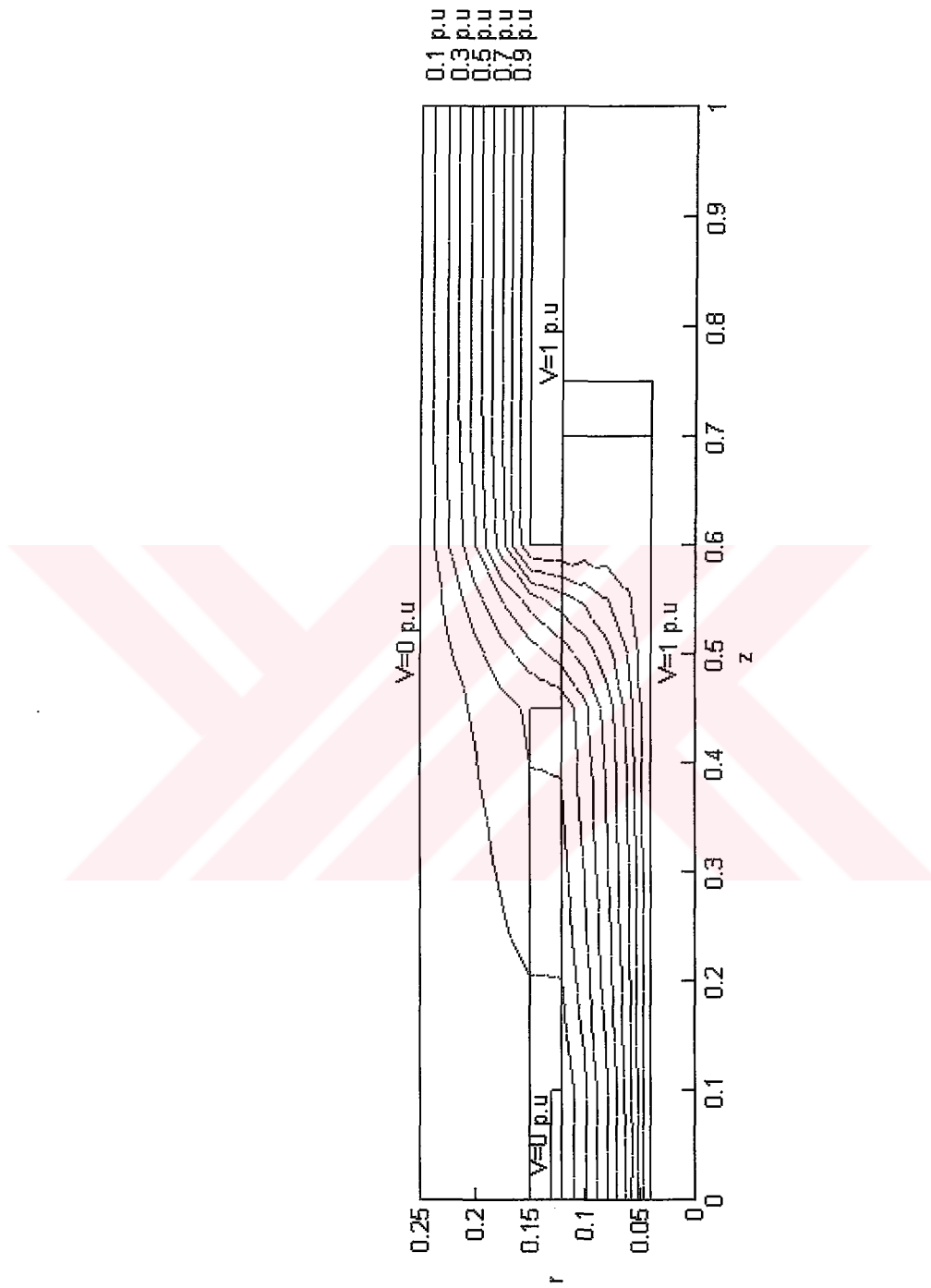
Şekil 4.45. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=10$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı



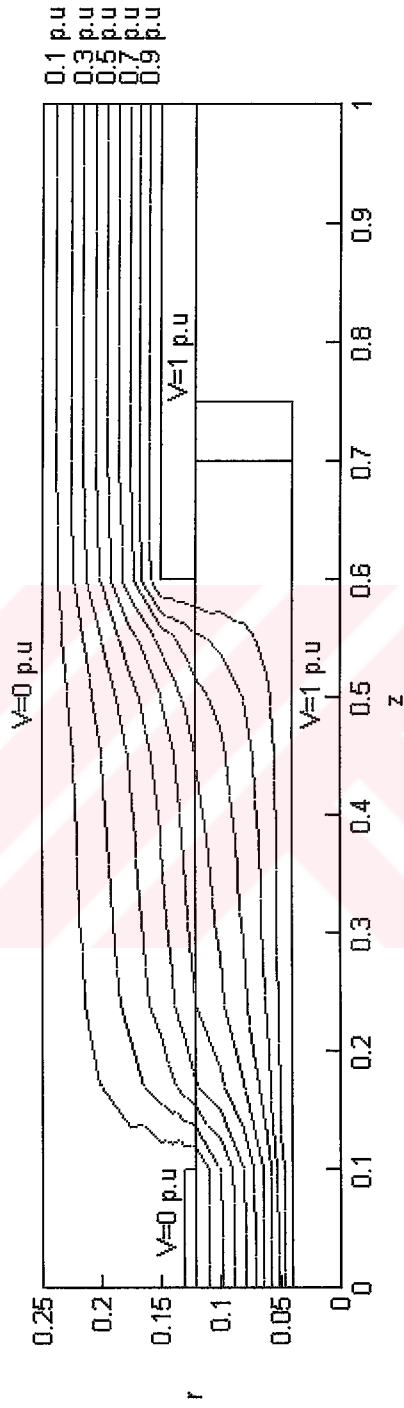
Şekil 4.46. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı



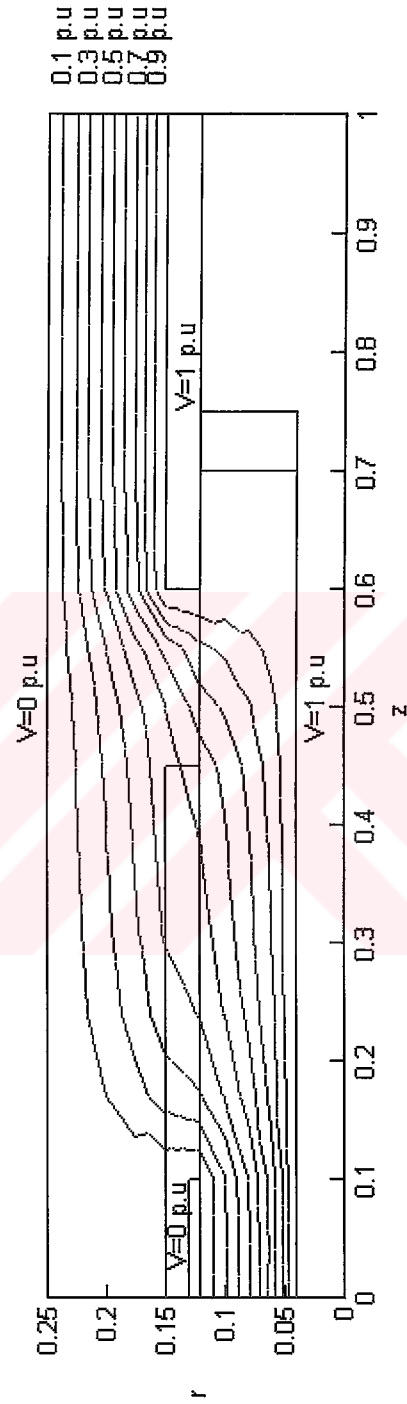
Şekil 4.47. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=50$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı



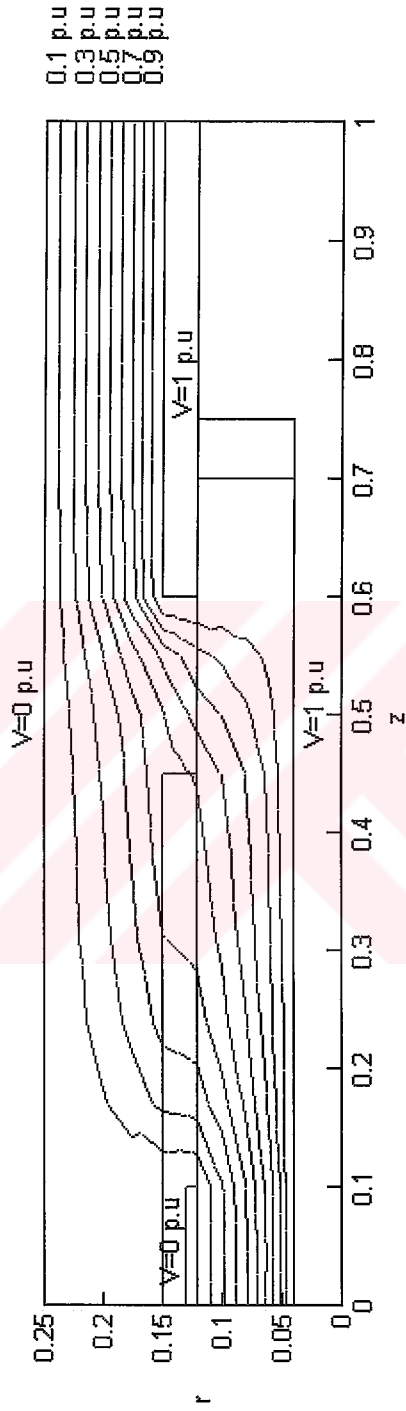
Şekil 4.48. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=100$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı



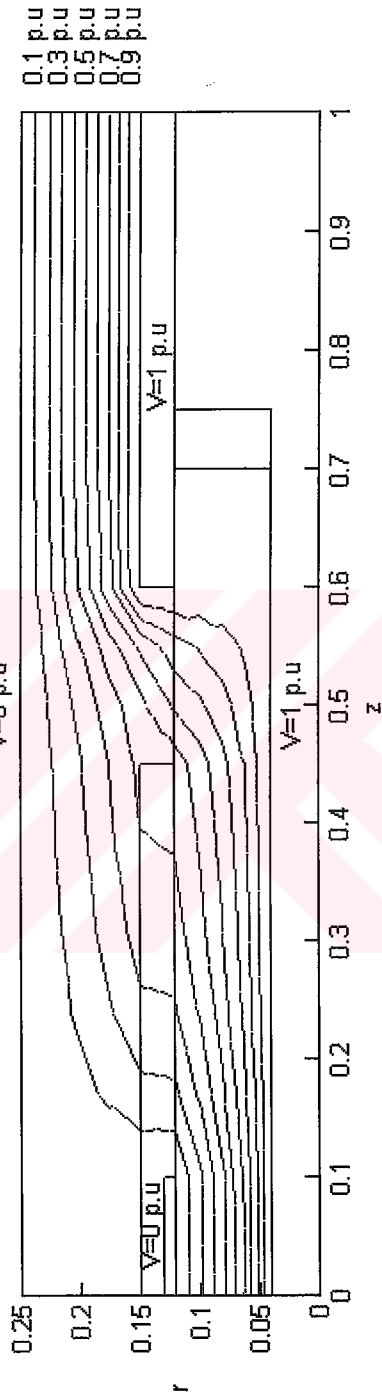
Şekil 4.49. $\epsilon_{ky}=5$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmamış ek için potansiyel dağılımı



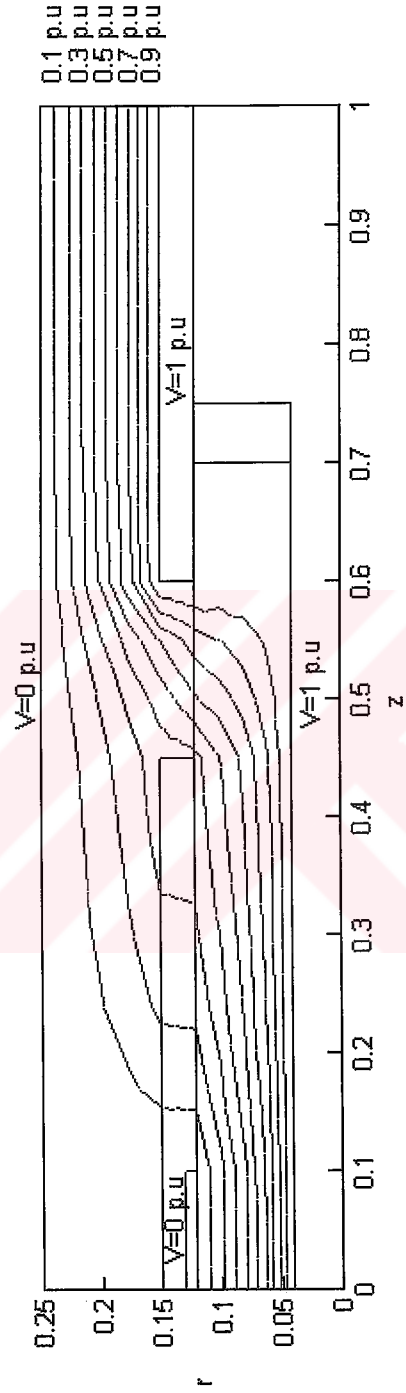
Şekil 4.50. $\epsilon_{ky}=5$, $\epsilon_{sct}=10$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı



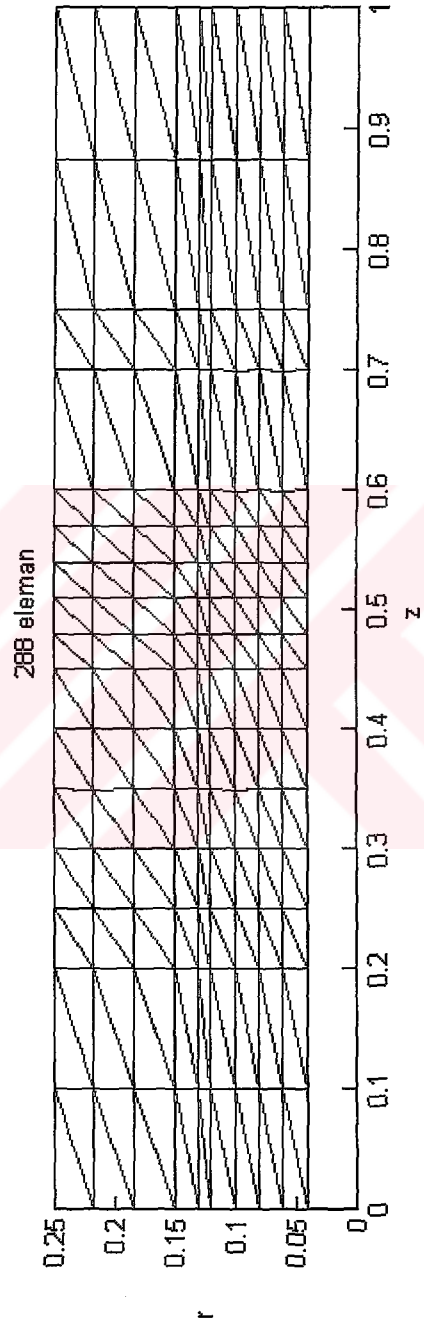
Şekil 4.51. $\epsilon_{ky}=5$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı



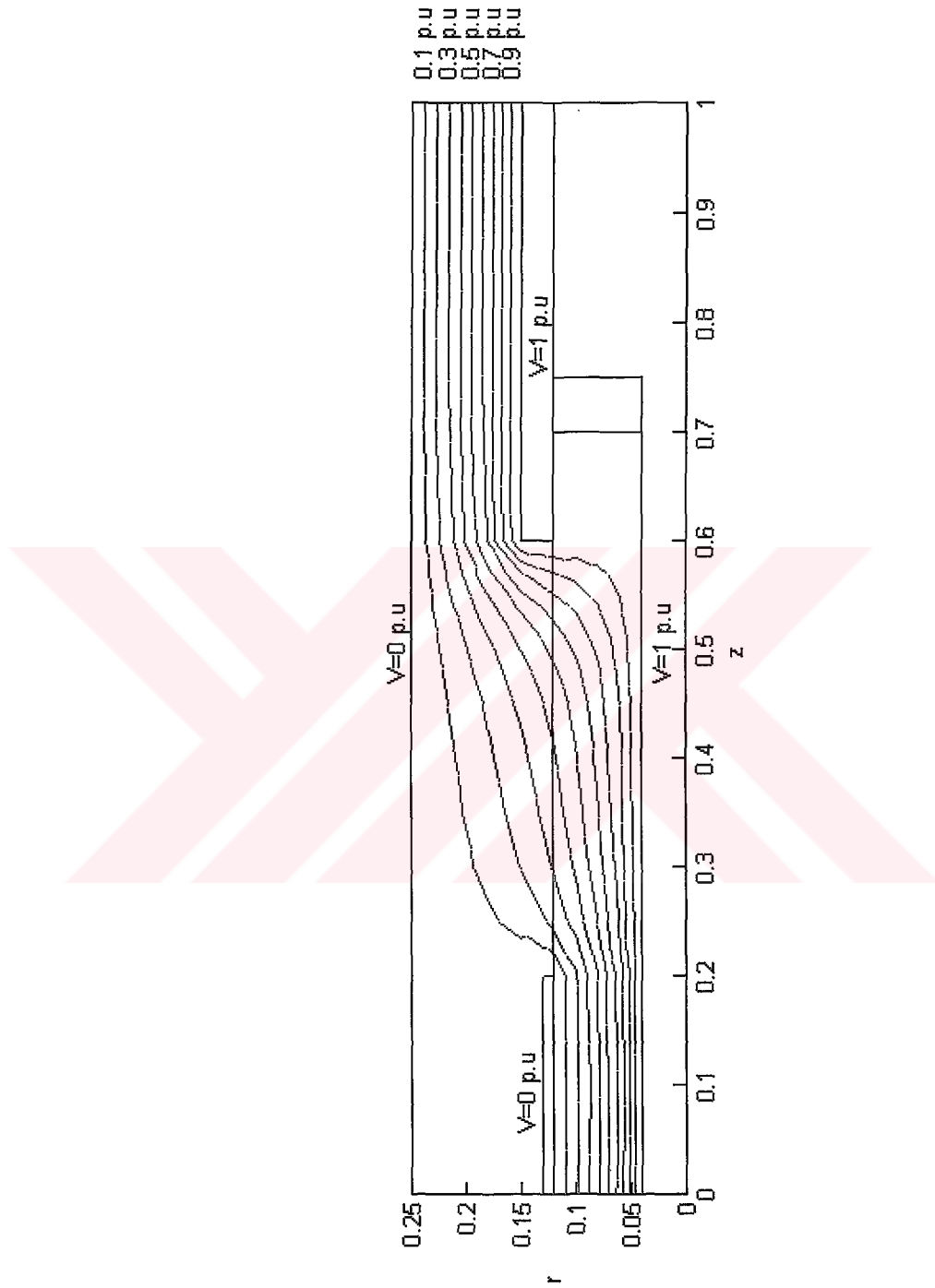
Şekil 4.52. $\epsilon_{ky}=5$, $\epsilon_{sct}=50$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı



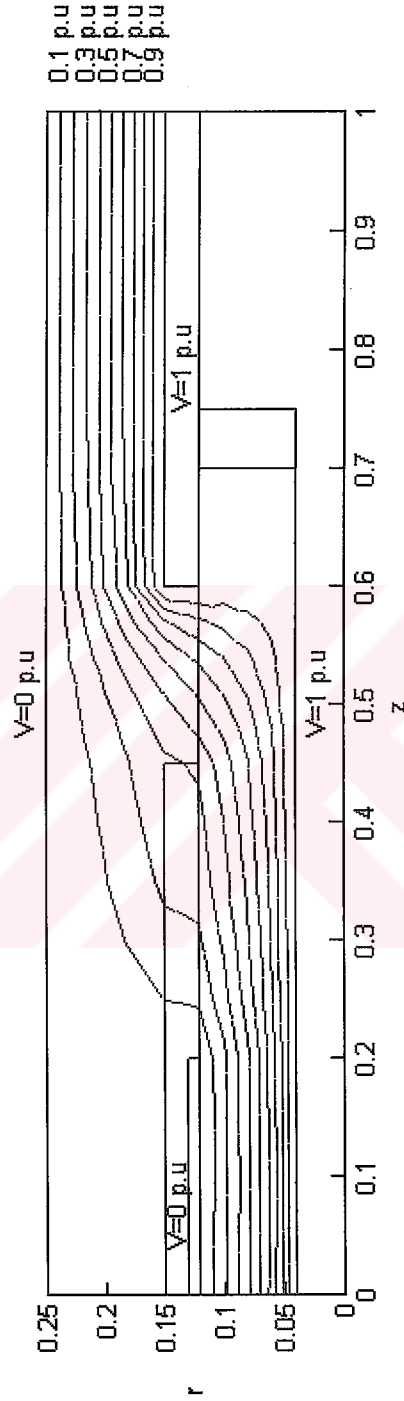
Şekil 4.53. $\epsilon_{ky}=5$, $\epsilon_{sct}=100$, $\epsilon_{ey}=2.7$ olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı



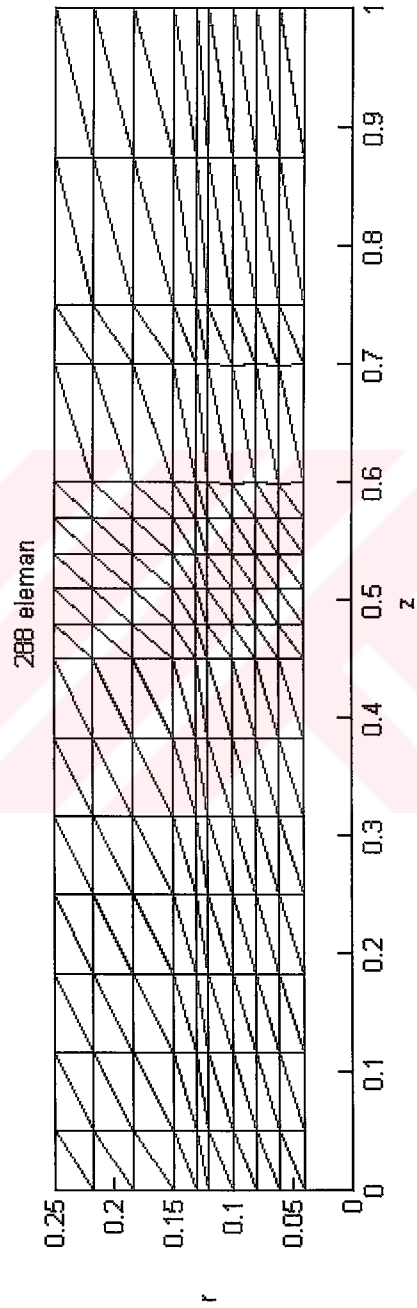
Şekil 4.54. $r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.12$ p.u, $r_{yis}=0.13$ p.u, $r_{sct}=0.15$ p.u $r_e=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.20$ p.u, $l_e=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ve yapılmamış kablo ekinin incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü



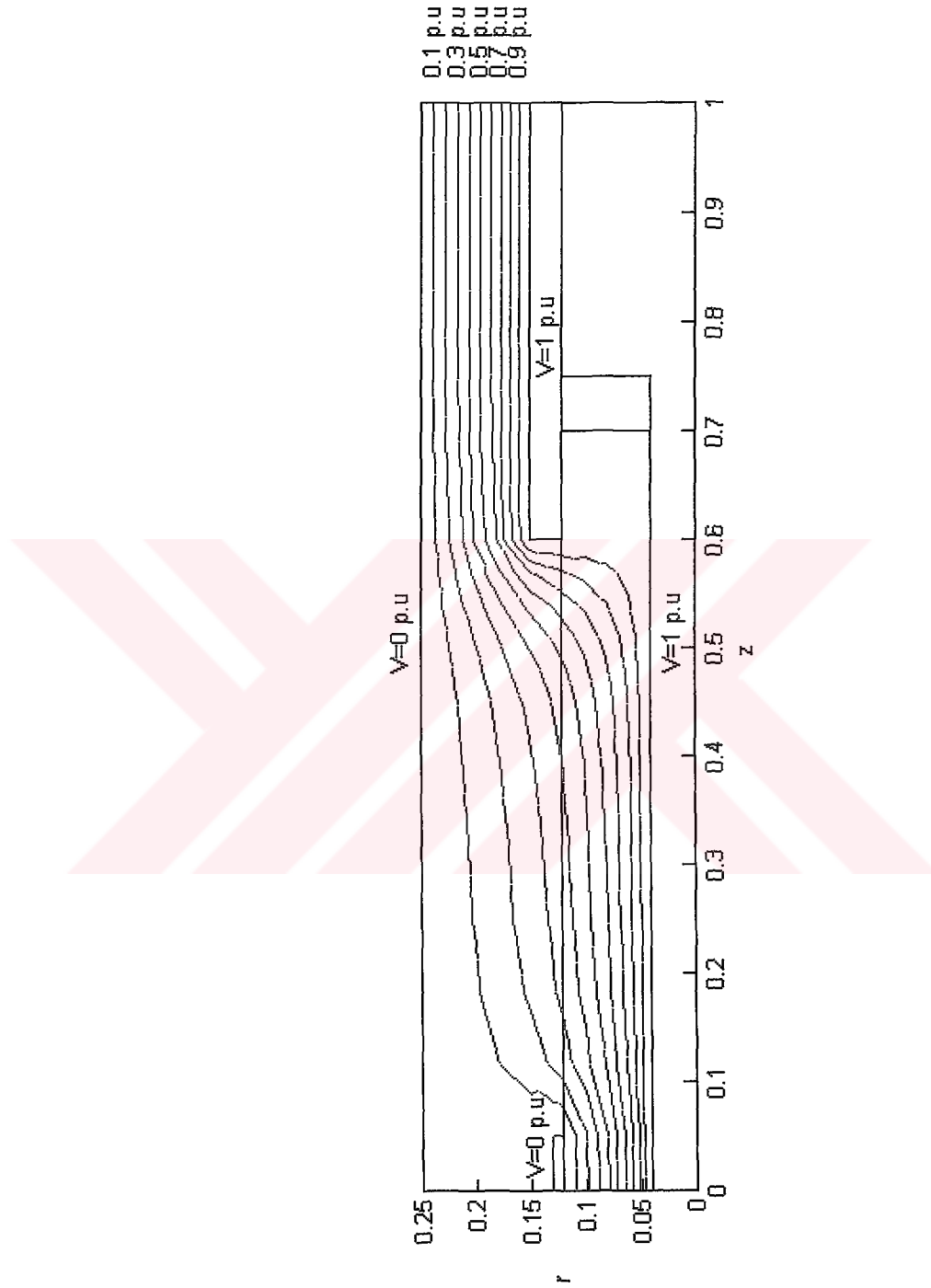
Şekil 4.55. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{ey}=2.7$, $l_{yis}=0.20$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış ek için potansiyel dağılımı



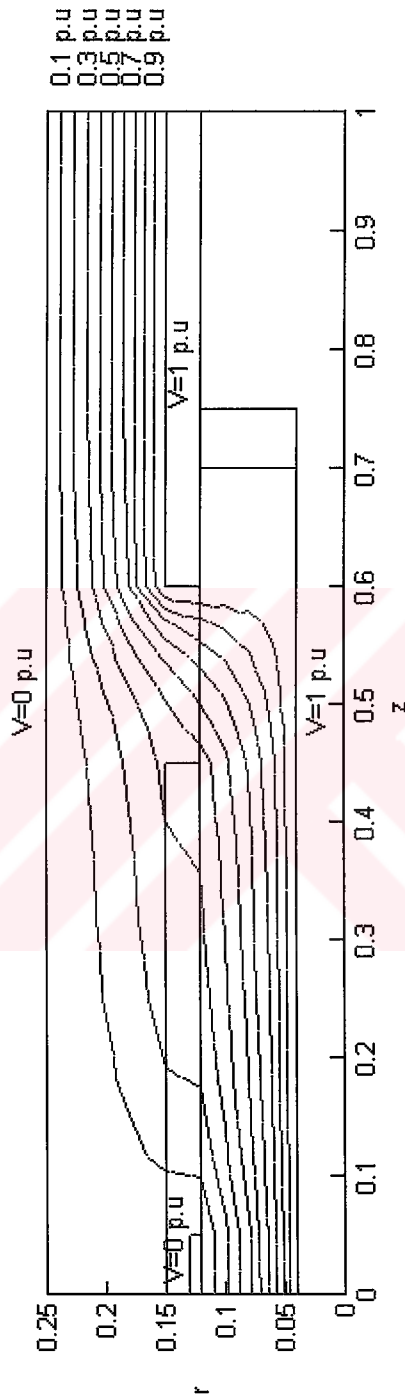
Şekil 4.56. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{yis}=20$, $\epsilon_{ey}=2.7$, $l_{yis}=0.20$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı



Şekil 4.57. $r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.12$ p.u, $r_{yis}=0.13$ p.u, $r_{sct}=0.15$ p.u $r_e=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.05$ p.u, $l_e=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ve yapılmamış kablo ekinin incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü



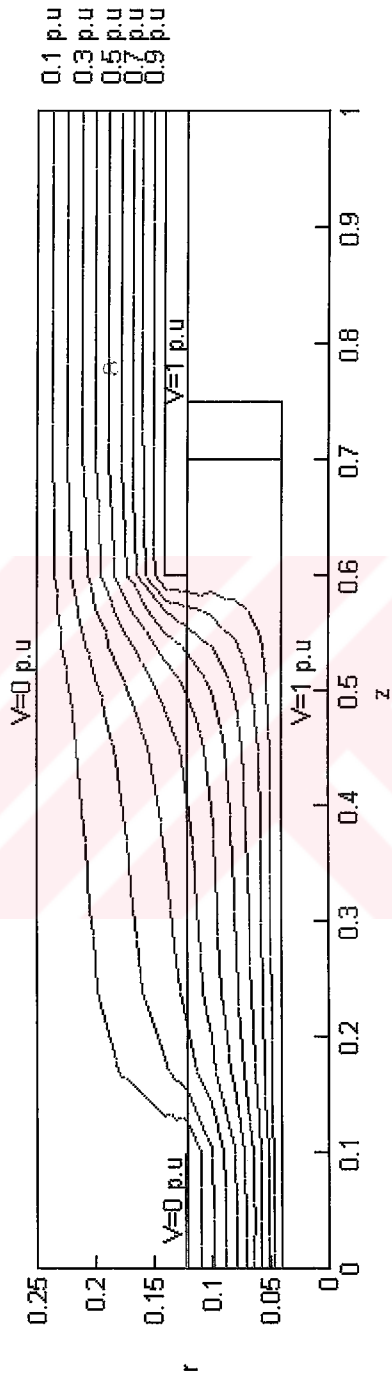
Şekil 4.58. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{ey}=2.7$, $I_{yis}=0.05$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış ek için potansiyel dağılımı



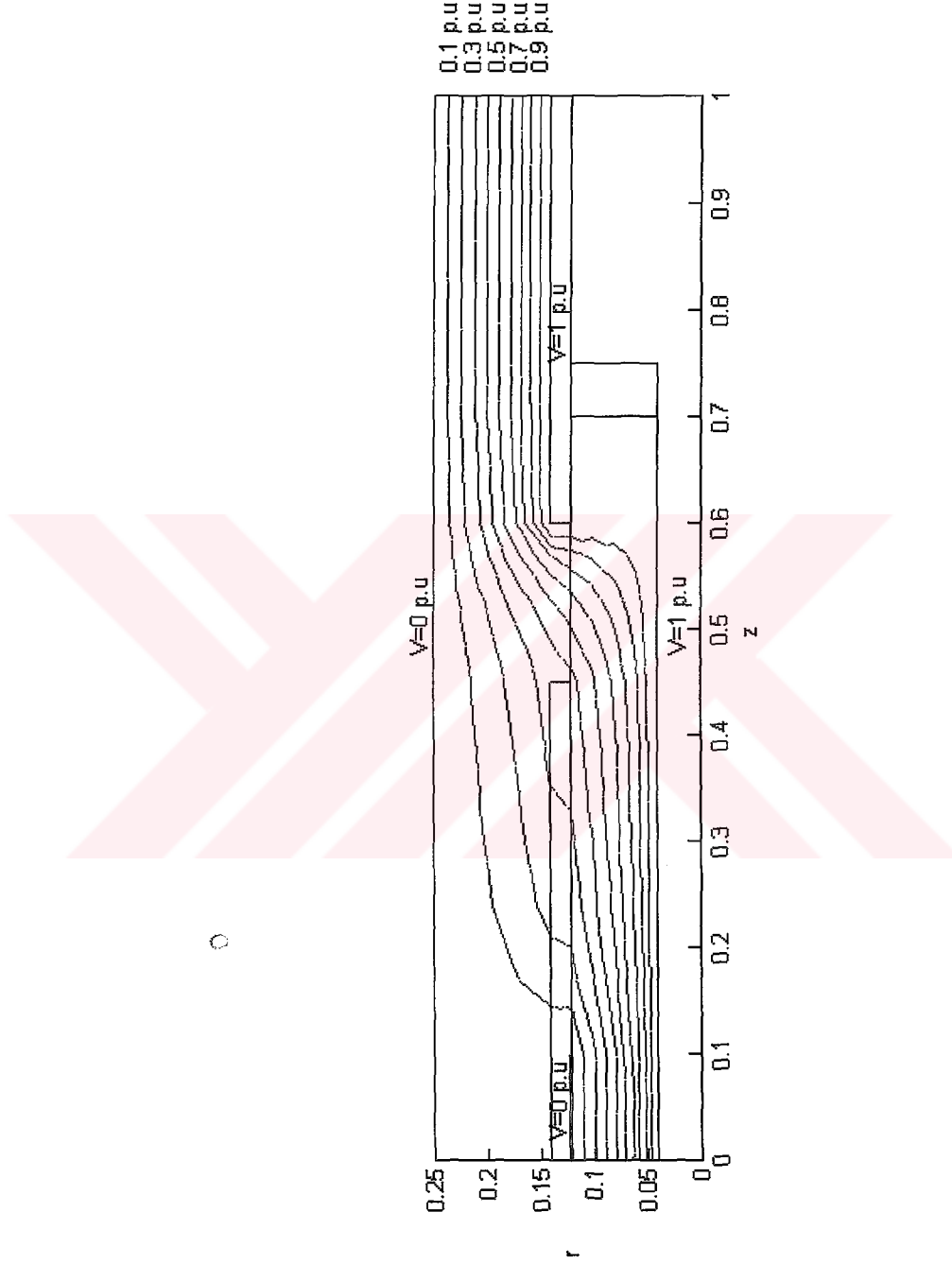
Şekil 4.59. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{yis}=20$, $\epsilon_{ey}=2.7$, $l_{yis}=0.05$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı



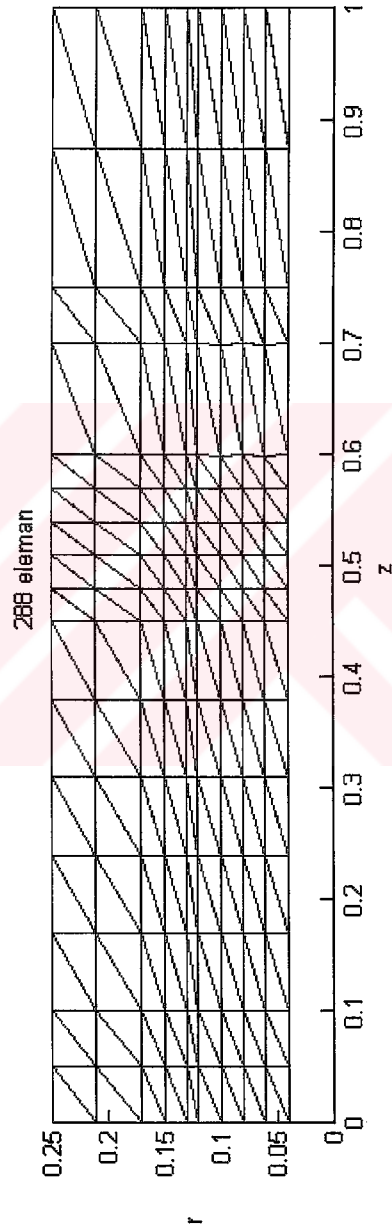
Şekil 4.60. $r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.12$ p.u, $r_{yis}=0.121$ p.u, $r_{sct}=0.14$ p.u $r_e=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.10$ p.u, $l_e=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ve yapılmamış kablo ekinin incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü



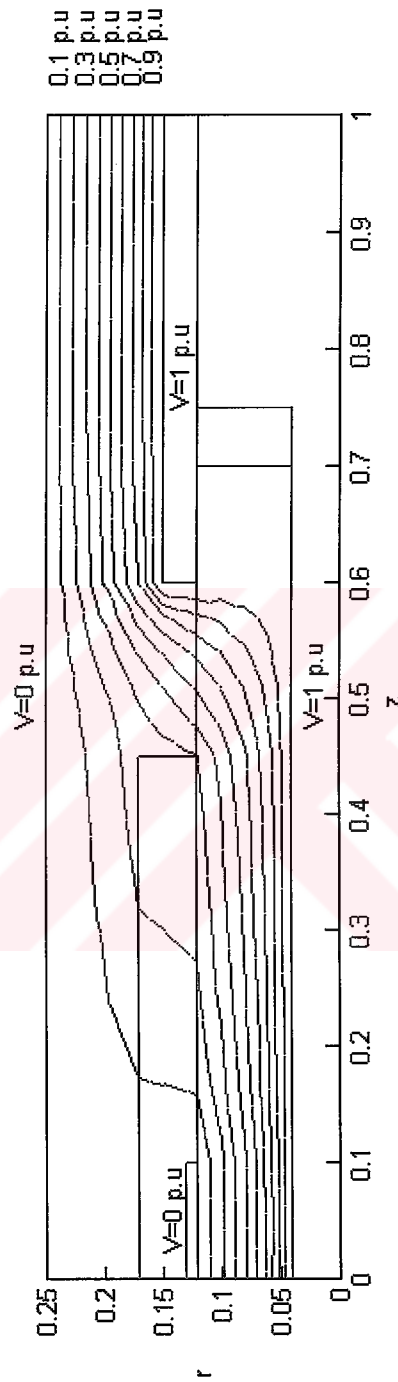
Şekil 4.61. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{ey}=2.7$, $r_{yis}=0.121$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış ek için potansiyel dağılımı



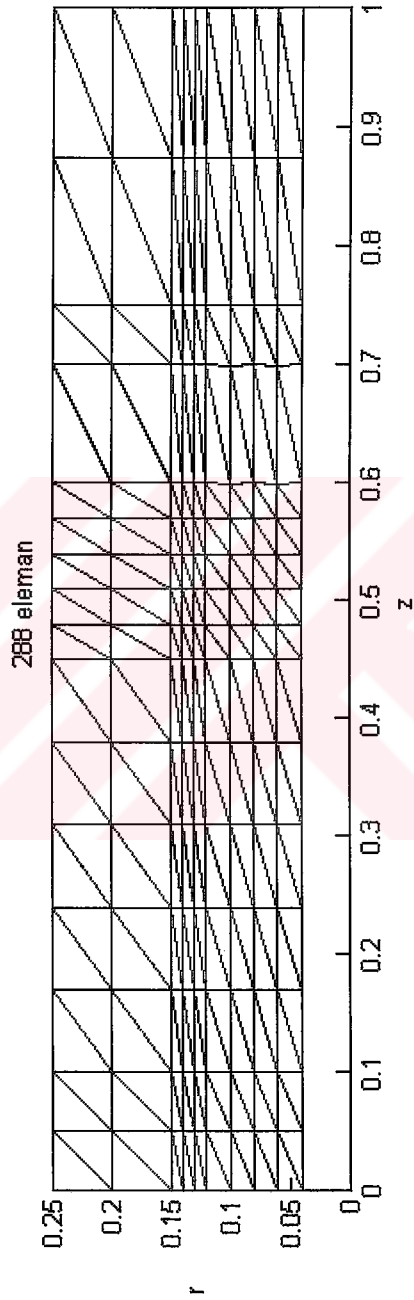
Şekil 4.62. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{ay}=2.7$, $r_{yis}=0.121$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı



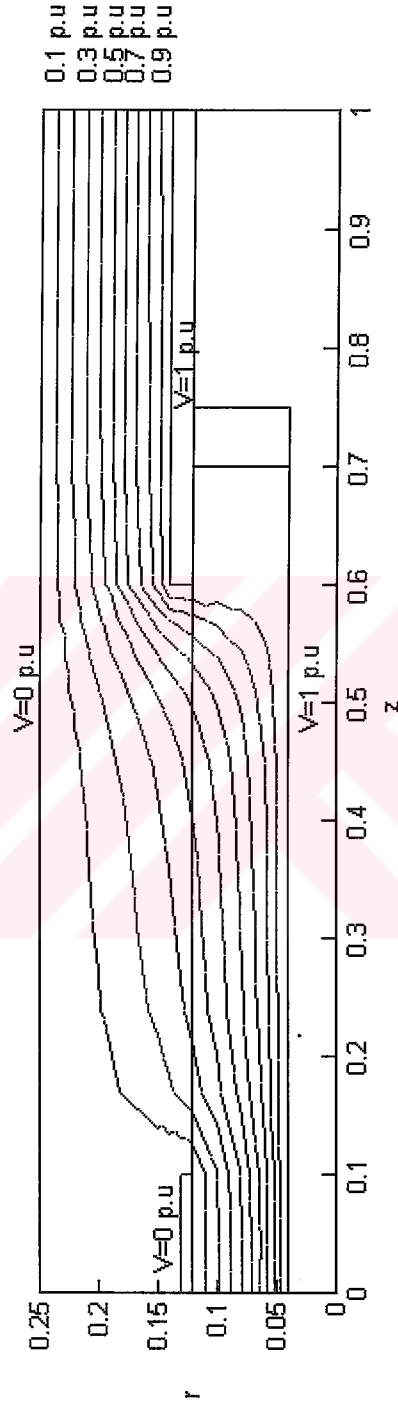
Şekil 4.63. $r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.12$ p.u, $r_{yis}=0.13$ p.u, $r_{sct}=0.17$ p.u $r_e=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.10$ p.u, $l_e=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış kablo ekinin incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü



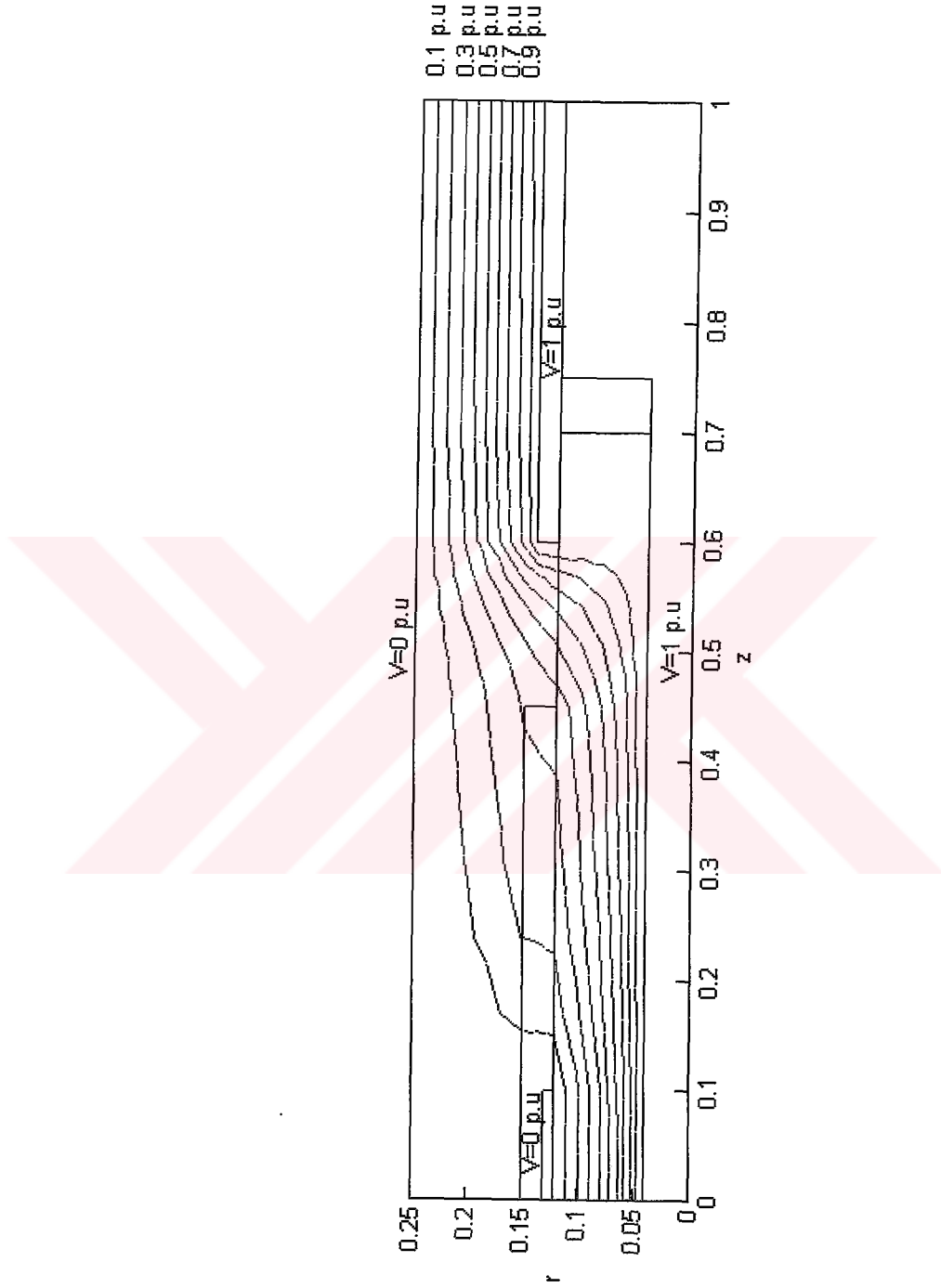
Şekil 4.64. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{ey}=2.7$, $r_{sct}=0.17$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı



Şekil 4.65. $r_i=0.04$ p.u, $r_{ky}=0.12$ p.u, $r_{yis}=0.13$ p.u, $r_{sct}=0.15$ p.u, $r_{yie}=0.14$ p.u, $r_e=0.25$ p.u ve $l_{yis}=0.10$ p.u, $l_e=1$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ve yapılmamış kablo ekinin incelenmesinde kullanılan ağ örgüsü



Şekil 4.66. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{ey}=2.7$, $r_{yie}=0.14$ p.u olan alan kontrolü yapılmamış ek için potansiyel dağılımı



Şekil 4.67. $\epsilon_{ky}=2.3$, $\epsilon_{sct}=20$, $\epsilon_{ey}=2.7$, $r_{ye}=0.14$ p.u olan alan kontrolü yapılmış ek için potansiyel dağılımı

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Laplace ve Poisson tipinde kısmi diferansiyel denklemlerle tanımlanabilen ve analitik çözümü yapılamayan elektrik alan problemlerinin çözümünde kullanılan sayısal analiz metotlarından sonlu elemanlar metodu, yüksek gerilim kablo başlıkları ve kablo eklerinin potansiyel dağılımının saptanmasında kullanılmıştır.

Sonlu elemanlar metodu ile problem çözümünün en önemli adımı, çözüm bölgesinin elemanlara ayrılmasıdır. Nümerik çözümde hassasiyeti arttırmak veya tam çözüme yakın bir çözüm elde etmek için kullanılan eleman sayısını arttırmak gerekir. Ancak çok fazla sayıda elemanın kullanılması da çok fazla sayıda denklem çözümünü gerektirecek ve bu da hataya ve zaman kaybına neden olacaktır. Bu nedenle bu çalışmada kullanılan ağ örgüleri elektrik alanın çok değiştiği kısımlarda daha fazla eleman ve alanın az değiştiği veya hiç değişmediği kısımlarda daha az eleman içermektedir. İncelenen kablo başlık ve ekinde elektrik alan daha çok yarı iletken siperin ucunda değişime uğramaktadır ve diğer kısımlarda az değişmekte veya hiç değişmemektedir. Bu nedenle yarı iletken siper ucundaki kısımlarda daha küçük elemanlar ve diğer kısımlarda daha büyük elemanlar kullanılarak elde edilen çözümün tam çözüme yakın olması amaçlanmıştır.

Çözüm bölgesi elemanlara ayrıldıktan sonra kablo başlığı ve kablo eki içindeki potansiyel dağılımları Şekil 4.13-53 arasında verilmiştir. Bunlardan elde edilen sonuçlar şöyle sıralanabilir.

Öncelikle kablo başlığı için kablo yalıtkanı ve başlık yalıtkanı dielektrik sabitleri sabit tutularak alan kontrolü yapılmamış ve alan kontrolü yapılmış durumlar için potansiyel dağılımları elde edilmiştir (Şekil 4.13-4.19). Kablo yalıtkanı olarak XLPE ($\epsilon_{ky} = 2.3$) ve başlık yalıtkanı olarak da silikon ($\epsilon_{ky} = 2.7$) kullanılmıştır. Alan kontrolü yapılmayan kablo başlığında eşpotansiyel

çizgileri yarı iletken siper ucunda yoğunlaşmıştır. Bu istenen bir durum değildir. Çünkü potansiyel çizgilerinin sıklaşması elektrik alanın büyüdüğünü gösterir ve bu büyük alan yarı iletken siper ucunda korona veya iç deşarj neden olabilir. Bu da kullanılan kablo başlığının ömrünü azaltır. Bu nedenle bu bölgede artan elektrik alanı azaltmak ve kablo ekinin servis süresini arttırmak için alan kontrolü yapılması gerekir. Alan kontrolü yüksek dielektrik katsayılı materyal (SCT) kullanılarak yapılır. Alan kontrol tüpü dielektrik sabiti $\epsilon_{sct}=10, 20, 50$ ve 100 olarak değiştirilmiştir. Elde edilen potansiyel dağılımlarından $\epsilon_{sct}=20$ seçilmesi gerektiği sonucuna varılmıştır. Bunun nedeni $\epsilon_{sct}=10$ alındığında yarı iletken siper ucundaki alan yeterince küçülmemiş, $\epsilon_{sct}=50$ ve 100 alındığında ise yarı iletken siper ucunda eşpotansiyel çizgilerinin oldukça dağıldığı ve seyrekleştiği ancak kablo yalıtkanı içinde eşpotansiyel çizgilerinin yoğunlaştığı görülmektedir. Bu durumda başlık içinde elektrik alan azalacak ve kablo içinde elektrik alanı artacağından kablo başlığının ömrünün uzamasına ancak kablonun ömrünün kısılmasına neden olur.

Başlık yalıtkanı olarak silikon ve kablo yalıtkanı olarak XLPE kullanılması durumunda en uygun alan kontrol tüpü dielektrik sabitinin 20 olacağı saptanmıştır. Başlık yalıtkanı olarak kağıt ve kablo yalıtkanı olarak XLPE kullanılması durumunda incelemeler tekrarlanmış ve yine en uygun alan kontrol tüpü dielektrik sabitinin 20 olacağı görülmüştür. Öyle ise SCT dielektrik sabiti seçimini başlık yalıtkanı etkilememektedir. Kablo yalıtkanının etkileyip etkilemediği kablo ekinde incelenecektir. Ve bundan sonraki kablo yalıtkanının XLPE olduğu incelemelerde $\epsilon_{sct}=20$ olarak alınmıştır.

Yarı iletken siper (YİS) boyutlarının başlık içindeki potansiyel dağılımına etkisini görmek için önce YİS uzunluğu 0.15 p.u'dan 0.25 p.u'ya çıkarılarak elde edilen ağ örgüsü ve potansiyel dağılımları Şekil 4.25-4.28'de gösterilmiştir. Daha sonra YİS uzunluğu 0.15 p.u 'dan 0.05 p.u'ya indirilerek elde edilen ağ örgüsü ve potansiyel dağılımları Şekil 4.29-4.32'de

gösterilmiştir. Şekil 4.33-4.36'da verilen ağ örgüsü ve potansiyel dağılımları ise YİS genişliğinin 0.01 p.u'dan 0.001 p.u'ya indirilmiş halidir. Buradan çıkan sonuç, YİS boyutlarının değişiminin, başlık içindeki kritik elektrik alan noktalarının yerini değiştirdiğidir.

Alan kontrolü yapılması durumunda kullanılacak alan kontrol tüpü genişliğinin 0.02 p.u'dan 0.04 p.u'ya çıkarılarak elde edilen ağ örgüsü ve potansiyel dağılımı Şekil 4.37-4.38'de verilmiştir. Bu durumda eşpotansiyel çizgileri kablo ekinde sıklaşmaktadır ve buradaki elektrik alan artmaktadır. Bu yüzden daha dar SCT kullanılması uygundur.

Şekil 4.43 -4.53 'da kablo eki ağ örgüsü ve potansiyel dağılımları verilmiştir. Seçilecek SCT dielektrik sabitine başlık veya ek yalıtkanının etkisi olmadığı belirlenmişti. Kablo yalıtkanının etkisi olup olmadığını anlamak için önce kablo yalıtkanı olarak XLPE ($\epsilon_{ky}=2.3$) ve ek yalıtkanı olarak silikon ($\epsilon_{ey}=2.7$) kullanılmış (Şekil 4.43-4.48), sonra kablo yalıtkanı olarak PVC ($\epsilon_{ky}=5$) ve ek yalıtkanı olarak silikon ($\epsilon_{ey}=2.7$) kullanılmış (Şekil 4.48-4.53) ve elde edilen potansiyel dağılımlarından SCT dielektrik sabitinin XLPE kullanıldığı durumda 20 ve PVC kullanıldığı durumda da 50 olması gerektiği sonucuna varılmıştır. Öyle ise seçeceğimiz SCT dielektrik sabiti kablo yalıtkanı dielektrik sabiti ile orantılı ve yaklaşık 10 katı olmalıdır.

Yarı iletken siper (YİS) boyutlarının ek içindeki potansiyel dağılımına etkisini görmek için önce YİS uzunluğu 0.10 p.u'dan 0.25 p.u'ya çıkarılarak elde edilen ağ örgüsü ve potansiyel dağılımları Şekil 4.54-4.56'da gösterilmiştir. Daha sonra YİS uzunluğu 0.10 p.u 'dan 0.05 p.u'ya indirilerek elde edilen ağ örgüsü ve potansiyel dağılımları Şekil 4.57-4.59'da gösterilmiştir. Şekil 4.60-4.62'de verilen ağ örgüsü ve potansiyel dağılımları ise YİS genişliğinin 0.01 p.u'dan 0.001 p.u'ya indirilmiş halidir. Buradan çıkan sonuç, YİS boyutlarının değişiminin, ek içindeki kritik elektrik alan noktalarının yerini değiştirdiğidir.

Alan kontrolü yapılması durumunda kullanılacak alan kontrol tüpü genişliğinin 0.02 p.u'dan 0.04 p.u'ya çıkarılarak elde edilen ağ örgüsü ve potansiyel dağılımı Şekil 4.63-4.64'de verilmiştir. Bu durumda eşpotansiyel çizgileri kablo ekinde sıklasmaktadır ve buradaki elektrik alan artmaktadır. Bu yüzden daha dar SCT kullanılması uygundur.

Şekil 4.65-4.67'de ise 1 p.u'luk potansiyele sahip yarı iletken elektrot genişliği azaltılmış ve dağılıma etkisi incelenmiştir.



KAYNAKLAR

1. Akpınar, S., "Yüksek Gerilim Tekniğinin Temelleri", **K.T.Ü**, Trabzon, 189-200 (1997)
2. Barnes, C. C., "Power Cables Their Design and Installation 2nd ed.", **Chapman and Hall**, London, 1-27 (1966)
3. Saner, Y., "Güç Dağıtımı", **Birsen Yayınevi**, İstanbul, 211 (1998)
4. Nikolajevic, S., Kartalovic, N., "Development of High Dielectric Constant Materials for Cable Accesories and Design of XLPE MV Cable Terminations", **IEEE International Symposium on Electrical Insulation**, Pittsburg 570-573 (1994)
5. Segerlind, L. J., "Applied Finite Element Analysis", **John Wiley and Sons**, New York, 1-230 (1984)
6. Huebner, K. H., "The Finite Element Method for Engineers", **John Wiley and Sons**, New York, 1-15 (1975)
7. Rao, S. S., "The Finite Element Method in Engineering 2nd ed.", **Pergamon Press**, Oxford, 101-198 (1992)
8. Chandrupatla, T. R., Belegundu, A. D., "Introduction to Finite Elements in Engineering", **Prentice Hall**, New Jersey, 372-387 (1991)
9. Boggs, S. A., "Failure Mechanisms of Shielded Power Cable Related to High Ground Shield Resistance and/or Insulation of Neutral Wires From the Ground Shield", **IEEE Transactions on Pover Delivery**, 17(2): 295-301 (2002)
10. Silvester, P. P., Ferrari, R. L., "Finite Elements for Electrical Engineers", **Cambridge University Press**, 1-70 Cambridge, (1983)
11. Chari, M. V. K., Silvester, P. P., "Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems", **John Wiley and Sons**, New York, 11-105 (1980)
12. Reece, A. B. J., Preston, T. W., "Finite Element Methods in Electrical Power Engineering", **Oxford University Press**, Oxford, 267-273 (2000)
13. Raicevic, N. B., "Electric Field Modeling of Cable Terminations", **Proc. Of the Fourth International Symposium of Applied Electrostatics**, 45-48 (1996)

14. Rhyner, J., Bou-Diab, M. G., "One-dimensional Model for Nonlinear Stres Control in Cable Terminations", **IEEE Transactions on Dilelectrics and Electrical Insulation**, 4(6): 785-791 (1997)
15. Kuffel, E. Zaengl, W. S., Kuffel, J., "High Voltage Engineering: Fundamentals 2nd ed.", **Newness**, Oxford, 201-280 (2001)
16. Cheng, D. K., "Field and Wave Electromagnetics 2nd ed.", **Addison-Wesley**, New-York, 72-192 (1989)
17. Özkaya, M., "Yüksek Gerilim Tekniği, Statik Elektrik Alanı ve Boşalma Olayları 2. baskı", **Birsen Yayınevi**, İstanbul 1-11 (1996)
18. Tycoelectronics, "Cable Accesories Catalog", 57,97 (2003)





EKLER

EK-1

STATİK ELEKTRİK ALAN VE TEMEL BİLGİ

Yüksek gerilim tekniğinde statik elektrik alanın önemi çok büyük olup delinme ve atlama olaylarında veya ortamların yüksek gerilim altında davranışlarını belirlemede statik elektrik alan bilgisine başvurulur.

Bir araştırmacı parçacık elektrik alanın bulunduğu bir bölgede hareket ettirilmektedir. Bu parçacık başladığı noktaya gelecek şekilde kapalı bir yol boyunca hareket ettirilirse, toplam olarak ne bu parçacığa karşı ne de bu parçacık tarafından bir iş yapılmış olur. Bu deneyden elde edilen sonuç araştırmacı parçacığın izlediği yolun şekline bağlı değildir. Daire, elips, kare veya herhangi bir kapalı eğri olabilir. Ayrıca sonuç elektrik alanın kaynağından da bağımsızdır. Elektrik alanını meydana getiren elektrik yükü, deney sırasında değişmemelidir (17).

Enerji kuvvetle yolun skaler çarpımına eşit ve toplam enerji de kapalı yol boyunca her bir küçük yol parçası üzerinde meydana gelen enerjilerin toplamı veya integrali olduğundan;

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad [1.1]$$

dir. \vec{F} yerine $q\vec{E}$ yazılırsa ve $q = 1$ olarak kabul edilirse;

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad [1.2]$$

elde edilir. Burada \vec{s} integrasyon yolunu göstermektedir. Eş. 1.2'ye vektörel analizden bilinen Stokes teoremi uygulanırsa;

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{s} = \int (\text{rot } \vec{E}) \cdot d\vec{s} = 0 \quad [1.3]$$

elde edilir. Burada ∇ (nabla) operatörünün kartezyen koordinat sistemindeki ifadesi;

$$\nabla = \frac{d}{dx} \vec{i} + \frac{d}{dy} \vec{j} + \frac{d}{dz} \vec{k} \text{ dir.}$$

Eş. 1.2'nin bütün kapalı yollara, dolayısıyla Eş. 1.3'ün bütün kapalı yollara karşılık olan yüzeylere uygulandığı düşünülürse,

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad \text{veya} \quad \text{rot } \vec{E} = 0 \quad [1.4]$$

olduğu görülür. Bundan çıkan sonuç, elektrik alanın rotasyonelsiz bir alan olduğudur. Vektör analizinden bilindiği üzere, rotasyonelsiz bir alan, skaler bir V potansiyel alanından türer. Yani elektrik alan eksi işaretiyle V potansiyel alanının gradyanına eşittir.

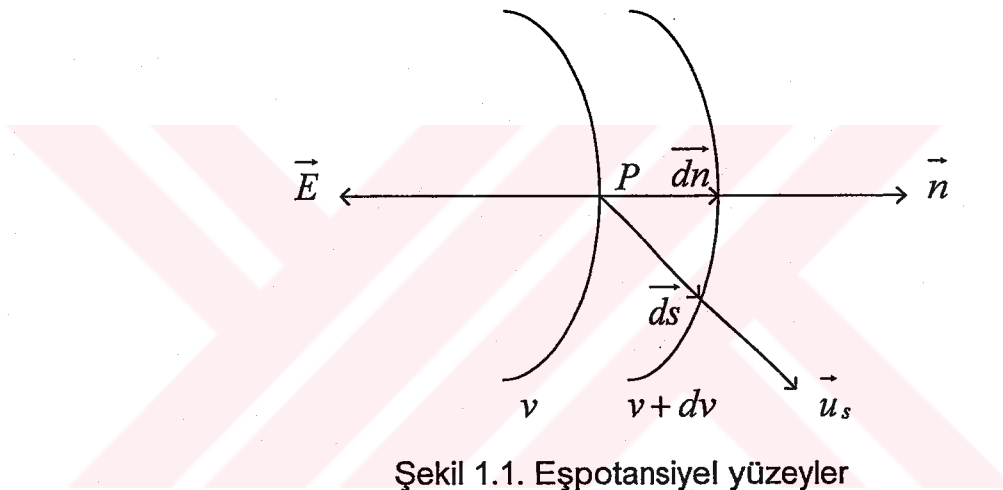
$$\vec{E} = -\nabla V = -\text{grad}V \quad [1.5]$$

Bilindiği gibi potansiyelleri birbirine eşit olan noktaları birleştiren yüzeylere eşpotansiyel yüzeyler denir. Eşpotansiyel yüzeylerin belirli bir yüzey üzerindeki izleri, eşpotansiyel çizgileri verir. Bir eşpotansiyel yüzey üzerinde iki nokta arasındaki potansiyel fark ve dolayısıyla bu iki nokta arasındaki yapılan iş sıfıra eşittir.

Bir elektrik alanı, alan çizgileri ile gösterilebilir, aynı zamanda eşpotansiyel çizgiler ile de elektrik alanını ifade edebiliriz. Eşpotansiyel çizgiler sabit bir potansiyel farkı esas alınarak çizildiği takdirde elde edilen şekil, elektrik alan hakkında fikir verebilir. Bu çizgilerin sık veya seyrek olması, söz konusu noktalarda alan şiddetinin büyük veya küçük olduğunu gösterir.

Çok kez bir statik elektrik alanı probleminin çözümünde V potansiyel alanı bilinir. Dolayısıyla Eş.1.5 yardımıyla \vec{E} bulunur. V sabit eşpotansiyel yüzeyleri verir. Eş. 1.5, elektrik alanın eşpotansiyel yüzeylere dik ve potansiyelin azaldığı yönde olduğunu gösterir.

Şekil 1.1'den görüldüğü üzere V ve $V+dV$ eşpotansiyel yüzeyler verilmiş olsun;



Şekil 1.1. Eşpotansiyel yüzeyler

Potansiyel \vec{n} yönünde \vec{dn} kadar kaydırılırsa;

$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dn} = -E_n dn \quad [1.6]$$

olur. Burada E_n , \vec{E} 'nin normal yönündeki bileşenidir ve mutlak değeri kendi değerine eşittir. Buradan;

$$E_n = -\frac{dV}{dn} \quad [1.7]$$

elde edilir.

Genel olarak potansiyel, koordinat sisteminin bir fonksiyonu olduğundan, Eş. 1.7 kısmi türev şeklinde;

$$E_n = -\frac{\partial V}{\partial n} \quad [1.8]$$

yazılabilir. Bu eşitlik vektörel olarak,

$$\vec{E} = -\vec{n} \frac{\partial V}{\partial n} \quad [1.9]$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki eksi işareti potansiyelin, alan şiddeti yönünde azaldığını gösterir.

Alan şiddeti vektörünün silindirik koordinat sistemindeki bileşenleri;

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial s_r}, \quad E_\theta = -\frac{\partial V}{\partial s_\theta}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial s_z} \quad [1.10]$$

bağıntıları yardımıyla bulunur.

$$\partial s_r = \partial r, \quad \partial s_\theta = r \partial \theta, \quad \partial s_z = \partial z$$

olacağını göz önüne alarak potansiyel gradyan vektörünü şu şekilde ifade edebiliriz.

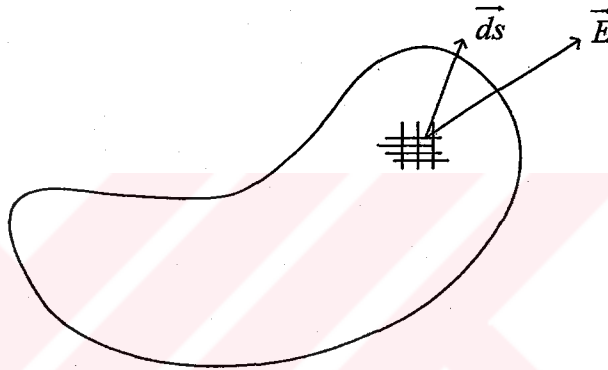
$$\text{grad}V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z \quad [1.11]$$

Bu durumda potansiyel ile alan şiddeti arasında Eş. 1.5 ile verilen bağıntı elde edilir.

$$\vec{E} = -\text{grad}V \quad \text{veya} \quad \vec{E} = -\nabla V$$

Bu eşitlikler, elektrik alanının eşpotansiyel yüzeylere dik ve potansiyelin azaldığı yönde olduğunu gösterir.

Şimdi uzay içine kapalı bir yüzey konulduğunu kabul edelim. Bu yüzey küp, küre, elipsoid veya herhangi bir yüzey olabilir (Şekil 1.2).



Şekil 1.2. Kapalı yüzey

Yüzeyin şeklinden bağımsız olarak, her türlü kapalı yüzey boyunca eğrisel integralin değeri;

$$Q = \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad [1.12]$$

olacaktır. Burada, ϵ_0 - bir sabit

Q - kapalı yüzey içindeki elektrik yükü

s - kapalı yüzeyin alanı

Kapalı yüzeyin içinde hiç elektrik yükü yoksa veya pozitif elektrik yüküne eşit miktarda negatif elektrik yükü varsa, eşitliğin sol tarafı sıfır alınır.

$$\epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = 0 \quad [1.13]$$

Kapalı yüzeyin herhangi bir yalıtkan madde içerisinde bulunduğunu göz önüne alarak Eş. 1.12'nin bütün yalıtkan maddelere uygulanabilmesi için, bu eşitliği yalıtkan maddelerin bir karakteristiği olan ϵ_r ile çarpmak gerekir, aynı zamanda bu karakteristiğe yalıtkan maddenin bağlı dielektrik katsayısı adı verilmektedir. Bu durumda Eş. 1.12;

$$\epsilon_r \epsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q \quad [1.14]$$

şeklinde yazılır. ϵ_r 'nin değeri, yalıtkan maddenin cinsine bağlıdır, sıcaklıkla ve diğer fiziksel koşullarda biraz değişir. Eğer birçok yalıtkan madde içerisinde geçen kapalı bir yüzey düşünülürse, ϵ_r bir yalıtkan maddeden diğer bir yalıtkan maddeye geçişte değişecektir. Dolayısıyla Eş. 1.14 daha genel olarak;

$$\oint \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad [1.15]$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\epsilon_r \epsilon_0$ yerine ϵ konularak,

$$\oint \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \quad [1.16]$$

elde edilir. Burada ϵ - mutlak dielektrik sabitidir.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad [1.17]$$

olarak gösterecek olursak, Eş. 1.16;

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0 \quad [1.18]$$

şeklini alır. Burada D - elektriksel akı yoğunluğunu gösterir. Eş. 1.18'e Green teoremi uygulanırsa;

$$\nabla \cdot \bar{D} = 0 \quad [1.19]$$

yazılır. Eğer $Q \neq 0$ ise, diverjans sıfır değildir ve bunu ρ ile gösterilen hacimsel yük yoğunluğu cinsinden ifade etmek uygun olacaktır. Böylece kapalı bir yüzey içindeki elektrik yükü, yük yoğunluğunun bu yüzey içindeki hacimsel integraline eşittir.

$$\int \rho \cdot dr = \int (\nabla \cdot \bar{D}) dr = \int (\text{div} \bar{D}) \cdot dr = Q \quad [1.20]$$

O halde,

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad [1.21]$$

elde edilir. Bu eşitlik dielektrik sabitinin noktadan noktaya değişmediği homojen bir madde için,

$$\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad [1.22]$$

şeklinde yazılır. Eş. 1.22 elektrik alanı ile yük arasındaki bağıntıyı vermektedir. Eş. 1.12 ile Eş. 1.22'den potansiyel ile yük yoğunluğu arasındaki bağıntı elde edilir.

$$\nabla(\nabla V) = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{veya} \quad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad [1.23]$$

Eş. 1.23 ikinci dereceden diferansiyel bir denklemdir ve Poisson denklemi olarak adlandırılır.

İçinde elektrik yükü bulunmayan bir uzay parçası için Eş. 1.23;

$$\nabla^2 V = 0 \quad [1.24]$$

şeklinde ifade edilir ve Laplace denklemi olarak adlandırılır.

Laplace denkleminin koordinat sistemleri için açık hali;

Kartezyen koordinatlarda;

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad [1.25]$$

Silindirik koordinatlarda;

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \quad [1.26]$$

şeklindedir.

EK-2

KOORDİNAT SİSTEMLERİ

Bütün sonlu elemanlar çözümleri bazı integrallerin hesaplanmasını gerektirir. Bu integrallerden bazıları kolaylıkla hesaplanırken bazıları oldukça zor, hatta çoğunlukla imkansızdır. Çözümün mümkün olmadığı durumlarda analitik metotların yerine sayısal metotlar kullanılır.

Integralin hesaplanmasında karşılaşılan güçlükler, integral değişkenlerinin değiştirilmesiyle azaltılabilir. Bunun anlamı, integralin yeni bir koordinat sisteminde ifade edilmesidir. Bu kısımda sonlu elemanlar integrallerinin alınabilmesini kolaylaştırmak amacı ile yerel ve doğal koordinat sistemlerini inceleyeceğiz (5).

1. Yerel koordinat sistemleri:

Tek boyutlu doğrusal bir eleman için şekil fonksiyonları şu şekildedir.

$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{L}, \quad N_j(x) = \frac{x - x_i}{L} \quad [2.1]$$

Bu şekil fonksiyonları bütün doğrusal elemanlar için geçerli olup, elemanın koordinat sistemindeki pozisyonundan bağımsızdır. Bu şekil fonksiyonlarının dezavantajı, çarpımlarının integrallerinin hesabının zor olmasıdır.

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i(x)N_j(x)dx \quad \text{veya} \quad \int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x)dx \quad [2.2]$$

Bu integrallerin hesabını kolaylaştırmak amacıyla koordinat sisteminin yeniden tespit edilmesi mümkündür. Yeni seçilecek koordinat sisteminin

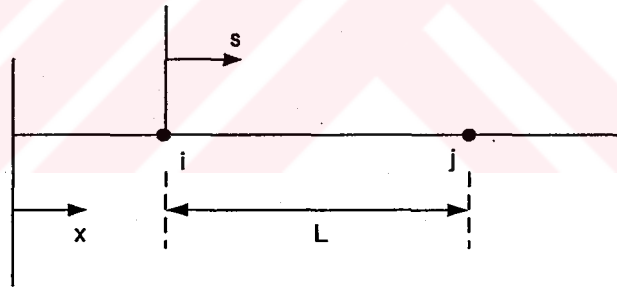
orijini, elemanın içerisinde olacaktır. Bu şekilde seçilecek koordinat sistemi, yerel koordinat sistemi olarak adlandırılır. Tek boyutlu elemanlar için en sık kullanılan yerel koordinat sistemleri, orijinin elemanın düğüm noktalarında veya ortasında yer aldığı sistemlerdir.

Orijinin ' i ' düğüm noktasında yer aldığı koordinat sistemi için $x = x_i + s$ olarak yeni şekil fonksiyonlarını yazmaya çalışırsak;

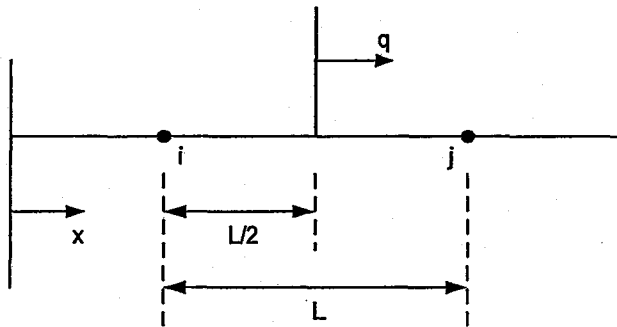
$$N_i(x) = \frac{x_j - x}{L} = \frac{x_j - (x_i + s)}{L} = 1 - \frac{s}{L} \quad [2.3]$$

$$N_i(x) = \frac{x - x_i}{L} = \frac{(x_i + s) - x_i}{L} = \frac{s}{L} \quad [2.4]$$

ifadeleri elde edilir.



(a)



(b)

Şekil 2.1. Tek boyutlu eleman için yerel koordinat sistemleri

Dikkat edilirse her şekil fonksiyonu kendi düğüm noktasında 1, diğer düğüm noktasında 0 dır. Toplamları ise Eş. 2.1'de görüldüğü gibi her zaman 1' dir.

Yerel orijin noktasının elamın ortasında bulunduğu yerel koordinat sistemini elde etmek için $x = x_i + \frac{L}{2} + q$ dönüşümü yapılır. Bu durumda yeni orijin noktasına göre şekil fonksiyonları şu şekilde belirlenir;

$$N_i(q) = \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{L} \right) \quad \text{ve} \quad N_j(q) = \left(\frac{1}{2} + \frac{q}{L} \right) \quad [2.5]$$

Eş. 2.3, 2.4, 2.5'teki şekil fonksiyonları ancak integral değişkeni dönüşümü uygulandığında kullanışlı hale gelir. Integral değişkeni dönüşümü ifadesi ise;

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{p_1}^{p_2} f(g(p)) \left[\frac{d(g(p))}{dp} \right] dp \quad [2.6]$$

olarak verilir. Burada p yeni integral değişkeni olup, g (p) fonksiyonu x ile p arasındaki bağıntıdır. (x=g(p))

Eş. 2.6'nın, Şekil 2.1' de görülen yeni koordinat sistemleri için uygulaması yapılabilir. $x = x_i + s$ dönüşümünden sonra yeni integral değişkeni s olur.

$$\int_{x_i}^{x_j} f(x) dx = \int_{s_i}^{s_j} \frac{d(x_i + s)}{ds} ds = \int_0^L h(s) ds \quad [2.7]$$

Burada h (s) ifadesi f (x)'in s' e göre düzenlenmiş halidir. Integral sınırları ise;

$$x = x_i + s \Rightarrow s = x - x_i, \quad x = x_i \Rightarrow s = 0, \quad x = x_j \Rightarrow s = L \quad [2.8]$$

olarak belirlenir. $x = x_i + \frac{L}{2} + q$ bağıntısı ile tanımlı q koordinati için şu bağıntılar türetilir:

$r(q)$, $f(x)$ 'in q 'ya göre düzenlenmiş halidir. Eş. 2.7 ve Eş. 2.8 ifadelerinin önemi, çarpımların integralinde ortaya çıkar.

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x) dx \quad [2.9]$$

Eğer s değişkeni kullanılırsa yukarıdaki ifade şu hali alır:

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x) dx = \int_0^L N_i^2(s) ds = \int_0^L \left(1 - \frac{s}{L}\right)^2 ds = \frac{L}{3} \quad [2.10]$$

q değişkeninin kullanılması durumunda ise;

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x) dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} N_i^2(q) dq = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{L}\right)^2 dq = \frac{L}{3} \quad [2.11]$$

sonucu elde edilir.

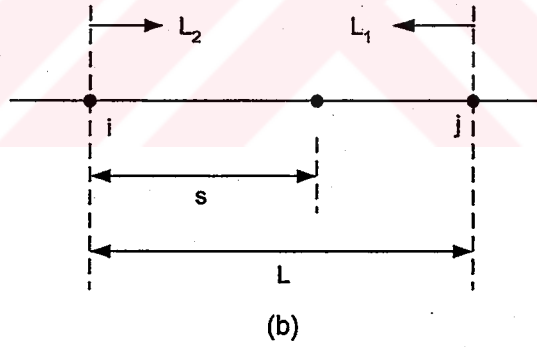
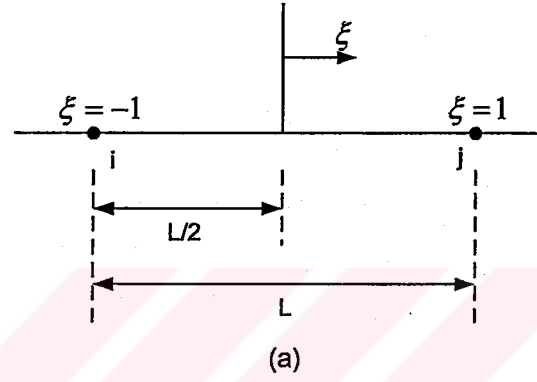
2. Doğal Koordinat Sistemleri:

Yerel koordinat değişkenleri s ve q , doğal koordinat sistemine çevrilebilir. Doğal koordinat sistemi, noktanın yerini birimsiz aralıklarla ifade edebilen ve mutlak değeri hiçbir zaman 1'i aşmayan yerel koordinat sistemidir.

Şekil 2.1'de yer alan q koordinatını ele alalım ve aşağıdaki dönüşümü yapalım:

$$\frac{q}{L} = \frac{2q}{L} = \xi \quad [2.12]$$

Şekil 2.2.a'da görüldüğü gibi, yeni koordinat değişkeni ξ , -1 ile +1 arasında değişir.



Şekil 2.2. Tek boyutlu eleman için doğal koordinat sistemleri

Eş. 2.5'teki şekil fonksiyonları, $q = \xi \frac{L}{2}$ alınarak yeni değişken ξ göre düzenlenirse;

$$N_i(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad \text{ve} \quad N_j(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad [2.13]$$

integral değişkeni de değiştirilirse ifadeler şu hali alır:

$$\int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r(q) dq = \int_{\xi_1}^{\xi_2} g(\xi) \frac{d(\xi \frac{L}{2})}{d\xi} d\xi = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \quad [2.14]$$

Burada $g(\xi)$ fonksiyonu, $r(q)$ 'nun ξ değişkenine göre düzenlenmiş halidir.

ξ değişkeninin kullanılmasının en önemli avantajı, integral sınırlarının -1 ile $+1$ arasında değişmesidir. Bir çok bilgisayar programı bu integrali hesaplayıp eleman matrislerini elde etmek için sayısal metotlar kullanır.

Diğer ilginç bir doğal koordinat sistemi, bir oran çiftinden oluşan ve Şekil 2.2.b de gösterilen sistemdir. ' s ' uzaklığı, incelenen noktanın ' i ' düğümünden olan uzaklık olarak tanımlanırsa l_1 ve l_2 oransal olarak şöyle ifade edilebilir:

$$l_1 = \frac{L-s}{L} \quad \text{ve} \quad l_2 = \frac{s}{L} \quad [2.15]$$

Bu iki koordinat birbirinden bağımsız değildir.

$$l_1 + l_2 = 1 \quad [2.16]$$

Bu iki ifadenin en önemli özelliği l_1 ve l_2 'nin şekil fonksiyonları ile özdeş olmasıdır. Bu koordinatların avantajı yine şekil fonksiyonlarının çarpımını içeren aşığıdaki tip integrallerde ortaya çıkar.

$$\int_0^L N_i^a(s) N_j^b(s) ds \quad [2.17]$$

Eş. 2.17'de yeni tanımlanan oransal koordinatlar kullanılırsa bu integral basit bir formülle hesaplanabilir.

$$N_i(s) = l_1, \quad N_j(s) = l_2 \quad s = Ll_2 \quad \text{ve} \quad \frac{ds}{dl_2} = L \quad [2.18]$$

Dönüşümleri yapılırsa;

$$\int_0^L N_i^a(s) N_j^b(s) ds = \int_0^1 l_1^a l_2^b L dl_2 \quad [2.19]$$

Bu durumda integralin sağ tarafı şu hali alır:

$$L \int_0^1 (1-l_2)^a l_2^b dl_2 \quad [2.20]$$

Bu integralin aşağıdaki formda olduğu açıktır:

$$\int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad [2.21]$$

Burada $\Gamma(n+1) = n!$ olarak hesaplanır. Böylece;

$$L \int_0^1 l_1^a l_2^b dl_2 = L \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1+1)} = L \frac{a!b!}{(a+b+1)!} \quad [2.22]$$

elde edilir. Bu sayede karmaşık bir integral hesabı basit bir faktöriyel hesabına dönüşür.

$$\int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x) dx = \int_0^L N_i^2(s) ds \quad [2.23]$$

Eş. 2.16 yardımıyla;

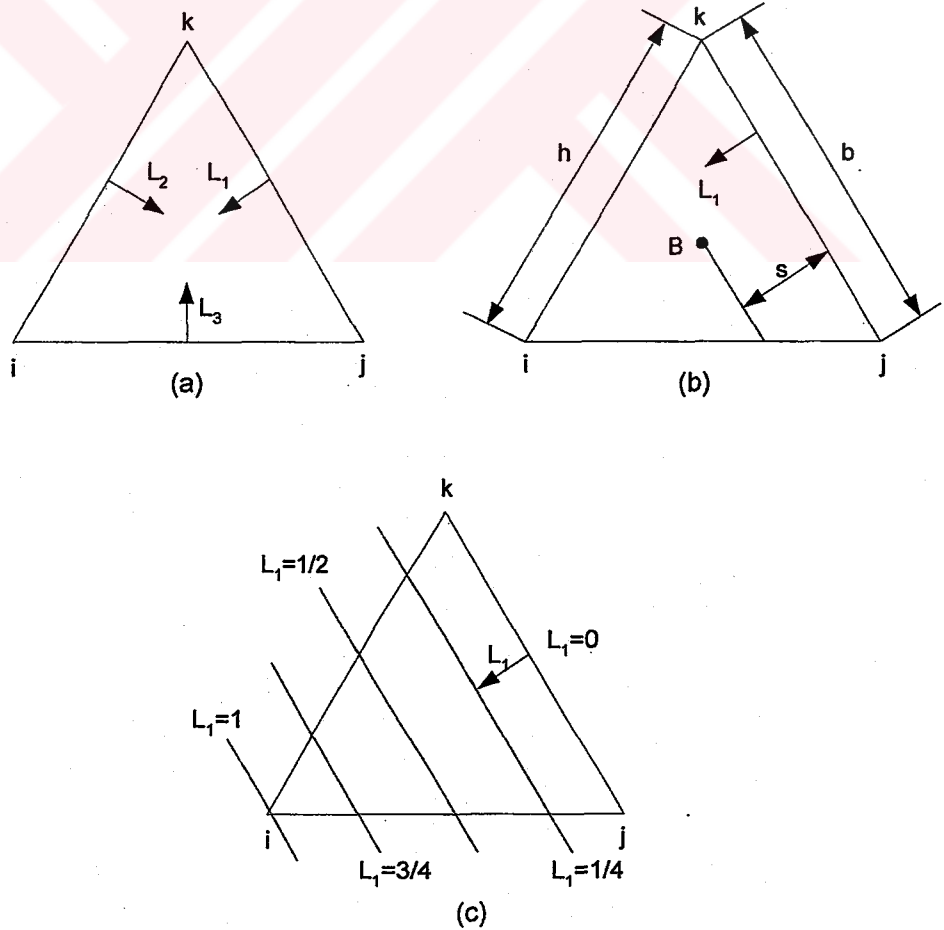
$$\int_{x_i}^{x_j} N_i^2(x) dx = \int_0^L N_i^2(s) ds = L \int_0^1 l_1^2 l_2^0 dl_2 = L \frac{2!0!}{(2+0+1)!} = \frac{L}{3} \quad [2.24]$$

diğer bir örnek şöyle verilebilir:

$$\int_0^L N_i^4(s) N_j^2(s) ds = L \int_0^1 l_1^4 l_2^3 dl_2 = L \frac{4!2!}{(4+2+1)!} = \frac{L}{105} \quad [2.25]$$

3. Üçgensel Elemanlar İçin Alan Koordinatları:

Şekil 2.3.a'da gösterilen üçgensel eleman için L_1 , L_2 ve L_3 olarak üç adet uzunluk oranı tanımlanarak doğal bir koordinat sistemi elde edilebilir.



Şekil 2.3. Üçgensel bir eleman için üç alan koordinatının gösterimi

Her koordinat, üçgenin bir kenarına olan dik uzaklığın, o kenara ait yüksekliğe oranıdır (Şekil 2.3.b). Bu koordinatlar 0 ile 1 arasında değerler alır. Şekil 2.3.c'de değişik L_1 değerleri için koordinat değerleri gösterilmiştir.

L_1 , L_2 ve L_3 koordinatları, alan koordinatları olarak adlandırılabilir. Çünkü bunların değerleri aynı zamanda üçgenin alt alanlarının bütün elemanın alanına oranıdır. Şekil 2.4'deki B noktasını ele alalım. Bu şekilde yer alan üçgensel elemanın alanı şudur :

$$A = \frac{bh}{2}$$

(B, j, k) taralı alt üçgeninin alanı ise;

$$A_1 = \frac{bs}{2}$$

ifadesi ile tanımlıdır. Buradan;

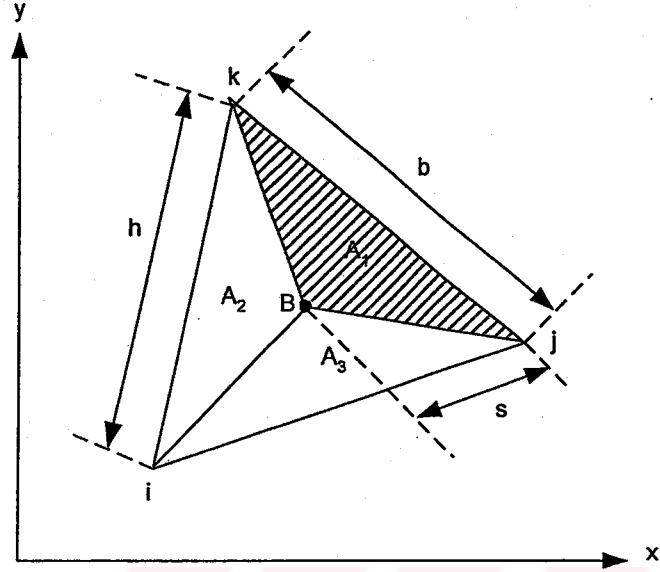
$$\frac{A_1}{A} = \frac{s}{h} = L_1 \quad [2.26]$$

L_1 alan koordinatı Şekil 2.4'teki taralı alanın bütün alana oranıdır. Benzer ifadeler L_2 ve L_3 içinde yazılabilir.

$$L_2 = \frac{A_2}{A}, \quad L_3 = \frac{A_3}{A} \quad [2.27]$$

alt alanlar toplamı A'ya eşit olduğu için,

$$A_1 + A_2 + A_3 = A \Rightarrow L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad [2.28]$$



Şekil 2.4. Alan koordinatlarına uygun olarak alt alanlara bölünmüş bir üçgensel eleman

İki boyutlu düzlemde bir noktanın yeri iki koordinat ile belli olduğuna göre bu üç koordinatın birbirine bağlı olması beklenen bir sonuçtur. Eş. 2.26 yeniden ele alınarak alt ve üst taraflar iki ile çarpılırsa;

$$L_1 = \frac{2A_1}{2A} \quad [2.29]$$

A1 alanını koordinatlar yardımı ile hesaplayabiliriz.

$$2A_1 = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

veya determinantın açık hali ile;

$$2A_1 = [(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y] \quad [2.30]$$

Burada x ve y değerleri Şekil 2.4'teki B noktasının koordinatlarıdır. Eş. 2.30 Eş. 2.29'da yerine konursa (B, j, k) taralı alt üçgenin alanı ise;

$$L_1 = \frac{1}{2A} [(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y] \quad [2.31]$$

elde edilir. Eş. 2.30 ile Eş. 2.31 birbirinin aynısıdır. O halde;

$$L_1 = N_i \quad [2.32]$$

aynı işlemler L_2 ve L_3 içinde yapılırsa;

$$L_2 = N_j \quad \text{ve} \quad L_3 = N_k \quad [2.33]$$

elde edilir.

Üçgensel eleman için şekil fonksiyonları ve alan koordinatları birbirinin aynı olduğuna göre, birbirlerinin yerine kullanılabilirler.

Alan koordinatlarının kullanılmasının avantajı alan integrallerini almayı kolaylaştıran bir integrasyon formülünün varlığı ile ortaya çıkar. Daha önce tek boyutlu doğrusal eleman için kullanılan Eş. 2.22 ile bağıntılı olan bu formül şöyledir:

$$\int_A I_1^a I_2^b I_3^c dA = 2A \frac{a!b!c!}{(a+b+c+1)!} \quad [2.34]$$

Eş. 2.34 yardımı ile şekil fonksiyonlarının çarpımını kapsayan integraller alınabilir.

$$\int_A N_i(x, y) N_j(x, y) dA \quad [2.35]$$

Bu durumda alan integralleri şöyle hesaplanabilir:

$$\int_A N_i N_j dA = \int_A L_1^1 L_2^1 L_3^0 dA = \frac{1!+1!+0!}{(1+1+0+2)} 2A = \frac{2A}{4!} = \frac{A}{12} \quad [2.36]$$

Çarpımda N_k terimi yer almadığı için üssü sıfır alınmış ve bu durumda bire eşit olduğu için sonuç değişmemiştir.



ÖZGEÇMİŞ

Zehra Çekmen 1978 yılında Bursa'da doğdu. İlk öğrenimini Susurluk'ta orta öğrenimini Bursa'da tamamladıktan sonra 1995-2001 yıllarında Gazi Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünde lisans eğitimini tamamladı. 2001 yılında Gazi Üniversitesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümünde yüksek lisans eğitimine başladı. Halen bu bölümde öğrenimini sürdürmekte ve aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

