

**RADYAL SICAKLIK DAĞILIMI ETKİSİNDE BULUNAN,  
FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEDEN YAPILMIŞ  
İÇİ DOLU BİR SİLİNDİRDE ISIL GERİLME ANALİZİ**

**Serra TOPAL**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2006  
ANKARA**

**RADYAL SICAKLIK DAĞILIMI ETKİSİNDE BULUNAN,  
FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEDEN YAPILMIŞ  
İÇİ DOLU BİR SİLİNDİRDE ISIL GERİLME ANALİZİ**

**Serra TOPAL**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2006  
ANKARA**

Serra TOPAL tarafından hazırlanan RADYAL SICAKLIK DAĞILIMI ETKİSİNDE BULUNAN, FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEDEN YAPILMIŞ İÇİ DOLU BİR SİLİNDİRDE ISIL GERİLME ANALİZİ adlı bu tezin YÜKSEK LİSANS tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Müfit GÜLGEÇ  
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Bedri TUÇ

D. Üye : Prof. Dr. Müfit GÜLGEÇ

Üye : Prof. Dr. Yusuf ORÇAN (ODTÜ)

Üye : Prof. Dr. Levend PARNAS (ODTÜ)

Üye : Y. Doç. Dr. Selim TÜRKBAŞ

Tarih : 02 / 05 / 2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Serra TOPAL

**RADYAL SICAKLIK DAĞILIMI ETKİSİNDE BULUNAN,  
FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMEDEN YAPILMIŞ  
İÇİ DOLU BİR SİLİNDİRDE TERMAL GERİLME ANALİZİ  
(Yüksek Lisans Tezi)**

**Serra TOPAL**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
Haziran 2006**

**ÖZET**

Bu çalışmada, radyal sıcaklık dağılımı etkisinde olan, Fonksiyonel Derecelendirilmiş bir Malzeme'den (FDM) yapılmış içi dolu bir silindir üzerinde oluşan gerilme bileşenleri, gerinimler ve radyal yerdeğiştirme; Hooke kanunu, denge denklemleri ve uygunluk denklemi kullanılarak çözülmüştür. İçi dolu FDM silindirin malzeme özellikleri, radyal yönde değişen fonksiyonlar şeklinde belirlenmiştir. Malzemenin bir FDM olması sebebiyle, içerdiği metal ve seramik malzemelerin karışım oranlarına bağlı olarak değişen Elastisite fonksiyonu, ısı iletim fonksiyonu ve ısı genleşme fonksiyonunun, gerilme ve gerinim bileşenleri ve radyal yerdeğiştirme üzerindeki etkileri incelenmiştir. Tresca akma şartından faydalanılarak homojen izotropik bir silindir ile FDM silindirde referans yüzey sıcaklığı ve konvektif ısı sınır şartından birini içeren koşullarda, ısı yükler nedeniyle meydana gelen gerilme ve gerinim bileşenleri karşılaştırılmış, bu iki tipteki silindirde plastik akmaya neden olan kritik hacimsel iç enerji üretim değerleri bulunmuştur.

**Bilim Kodu** : 914.1.093  
**Anahtar Kelimeler** : Fonksiyonel derecelendirilmiş malzeme, termal gerilme analizi, içi dolu silindir  
**Sayfa Adedi** : 138  
**Tez Yöneticisi** : Prof. Dr. Müfit GÜLGEÇ

**THERMAL STRESS ANALYSIS FOR A FUNCTIONALLY GRADED SOLID  
CYLINDER UNDER THE EFFECT OF A RADIALY VARYING  
TEMPERATURE DISTRIBUTION**

**(M.Sc. Thesis)**

**Serra TOPAL**

**GAZI UNIVERSITY  
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

**June 2006**

**ABSTRACT**

**In this study, the stress, strain components and radial displacement are analytically calculated for a functionally graded solid cylinder, which is under the effect of a radially varying temperature distribution with the use of Hooke's Law, equations of equilibrium and compatibility equation. Material properties for the functionally graded cylinder are defined to be functions which depend on radius. Since the material is functionally graded, the effects of elasticity function, thermal conductivity function and thermal expansion coefficient on the stress and strain components are examined. By using Tresca's yield criterion, stress and strain components which arise in a homogenous isotropic and a FGM cylinder under the same working conditions which include either reference surface temperature or convective thermal boundary conditions are compared with each other, and critical values of volumetric internal energy generation parameters which cause plastic yielding at these two types of cylinder are calculated.**

**Science Code : 914.1.093**

**Key Words : Functionally Graded Material, thermal stress analysis, solid cylinder**

**Page Number : 138**

**Adviser : Prof. Dr. Mufit GULGEC**

## TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren sayın Hocam Prof. Dr. Müfit GÜLGEÇ'e, FDM üzerine çalışmalar yaparken birbirimize hep destek olduğumuz, Makine Yüksek Mühendisi Celal EVCİ'ye, Makine Yüksek Mühendisi Nihat ÖZKAN'a, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

## İÇİNDEKİLER

	<b>Sayfa</b>
ÖZET .....	iv
ABSTRACT .....	v
TEŞEKKÜR .....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ .....	xi
ŞEKİLLERİN LİSTESİ .....	xii
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	xv
1. GİRİŞ.....	1
2. FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMELER.....	7
2.1. Genel Özellikler .....	7
2.2. FDM'lerin Mekanik Özellikleri .....	9
3. FDM'LERİN POTANSİYEL KULLANIM ALANLARI .....	12
3.1. Uzay Taşıtları.....	12
3.2. Endüstriyel Malzemeler.....	12
3.3. Termoelektrik Soğutma Sistemleri .....	13
3.4. Biyomalzemeler .....	13
3.5. Isıl Bariyer Kaplamalar .....	14
4. FDM'LERİN ÜRETİM YÖNTEMLERİ .....	16
5. HOMOJEN İZOTROPİK SİLİNDİR İÇİN SICAKLIK DAĞILIMI.....	20
5.1. Homojen İzotropik Silindirin Isıl Özellikleri.....	20
5.1.1. Isıl iletim katsayısı.....	20



	<b>Sayfa</b>
5.1.2. Lineer ısı genleşme katsayısı .....	20
5.2. Sıcaklık Dağılımı ve Isıl Sınır Şartları .....	20
5.2.1. Referans yüzey sıcaklığındaki homojen izotropik silindir için sıcaklık dağılımı.....	23
5.2.2. Konvektif ısı sınır şartına sahip homojen izotropik silindir için sıcaklık dağılımı.....	25
6. FDM SİLİNDİR İÇİN SICAKLIK DAĞILIMI.....	30
6.1. FDM Silindirin Malzeme Özellikleri .....	30
6.1.1. Isıl iletkenlik fonksiyonu .....	30
6.1.2. Elastisite fonksiyonu .....	34
6.1.3. Isıl genleşme fonksiyonu .....	36
6.2. Metal ve Seramiklerin Isıl ve Mekanik Özellikleri ile Bu Problemdeki FDM Silindir için Belirlemeler.....	41
6.3. Sıcaklık Dağılımı ve Isıl Sınır Şartları .....	43
6.3.1. Referans yüzey sıcaklığındaki FDM silindir için sıcaklık dağılımı.....	46
6.3.2. Konvektif ısı sınır şartına sahip FDM silindir için sıcaklık dağılımı.....	49
7. İKİ UCU SABİT FDM SİLİNDİR İÇİN GERİLME-GERİNİM ANALİZİ .....	53
7.1. Gerilme-Gerinim Analizinde Bilinmeyen Parametreler.....	53
7.2. Kullanılacak Denklemler .....	55
7.3. Silindirdeki Dış Yüklemeler ve Gövde Kuvvetleri .....	57
7.4. Yönetici Denklem .....	59
8. BOYUTSUZLAŞTIRMA VE ÇÖZÜMLER .....	63
8.1. Homojen Kısımın Boyutsuzlaştırılması .....	64

	<b>Sayfa</b>
8.2. Boyutsuz Homojen Çözüm.....	65
8.3. Homojen Olmayan Kısımın Boyutsuzlaştırılması .....	66
8.4. Boyutsuz Özel Çözüm.....	68
8.5. Boyutsuz Genel Çözüm.....	70
8.5.1. Mekanik sınır şartları ve integral sabitleri .....	71
9. GERİLME VE GERİNİM BİLEŞENLERİ .....	74
9.1. Gerilme Bileşenleri .....	74
9.2. Gerinim Değerleri .....	76
10. HOMOJEN İZOTROPİK SİLİNDİRDE GERİLME-GERİNİM ANALİZİ .....	80
10.1. Yönetici Denklem .....	81
10.2. Boyutsuz Homojen Çözüm.....	83
10.3. Boyutsuz Özel Çözüm .....	83
10.4. Boyutsuz Genel Çözüm .....	85
10.4.1. Mekanik sınır şartları ve integral sabitleri .....	85
10.5. Gerilme Bileşenleri.....	86
10.6. Gerinim Değerleri .....	87
11. $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3$ VE DİĞER PARAMETRELERİN GERİLME VE GERİNİM BİLEŞENLERİ İLE YERDEĞİŞTİRME DEĞERLERİNE ETKİSİ .....	90
11.1. Problemdaki Bazı Büyüklükler için Sayısal Değer Seçimleri.....	91
11.2. Homojen İzotropik Silindir için İncelemeler .....	92
11.3. FDM Silindir için İncelemeler .....	96
11.4. FDM Silindirde $\bar{\beta}$ Parametrelerinin Etkileri .....	101

	<b>Sayfa</b>
11.4.1. $\bar{\beta}_1$ parametresinin etkisi.....	101
11.4.2. $\bar{\beta}_2$ parametresinin etkisi .....	105
11.4.3. $\bar{\beta}_3$ parametresinin etkisi .....	111
11.5. FDM Silindirde $\bar{n}$ ve $\bar{h}$ Parametrelerinin Etkisi .....	116
11.5.1. $\bar{n}$ parametresinin etkisi.....	116
11.5.2. $\bar{h}$ parametresinin etkisi.....	120
12. SONUÇ .....	125
KAYNAKLAR.....	128
EKLER.....	133
EK-1 Hipergeometrik fonksiyon .....	134
EK-2 Laguerre fonksiyonu.....	136
ÖZGEÇMİŞ.....	138

## ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 6.1. Seramik ve çeşitli metal alaşımlarının ısı ve mekanik özellikleri .....	42
Çizelge 11.1. Homojen izotropik silindir ile FDM silindir üzerindeki kritik ısı yük değerleri.....	97
Çizelge 11.2. Çeşitli $\bar{\beta}_1$ değerleri ile FDM silindirin uçlarında oluşan $\bar{F}_z$ .....	105
Çizelge 11.3. Çeşitli $\bar{\beta}_2$ değerleri ile FDM silindirin uçlarında oluşan $\bar{F}_z$ .....	111
Çizelge 11.4. Çeşitli $\bar{\beta}_3$ değerleri ile FDM silindirin uçlarında oluşan $\bar{F}_z$ .....	115
Çizelge 11.5. Çeşitli $\bar{n}$ değerleri ile FDM silindirin uçlarında oluşan $\bar{F}_z$ .....	119
Çizelge 11.6. Çeşitli $\bar{h}$ değerleri ile FDM silindirin uçlarında oluşan $\bar{F}_z$ .....	124

## ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Kesit ve üst görünüm: a) kompozit, b) FDM, c) yüzey kompoziti .....	7
Şekil 2.2. Sürekli derecelenmiş mikro yapı .....	8
Şekil 2.3. Fonksiyonel dereceli çeşitli mikro yapılara örnekler .....	8
Şekil 2.4. Fonksiyonel dereceli bir şerit.....	10
Şekil 3.1. Mitsubishi Materials Corp. üretimi kalemler.....	13
Şekil 4.1. FDM'lerin plazma spreyleme ile üretimi .....	18
Şekil 4.2. Tek püskürtücüde karışım yöntemleri.....	18
Şekil 4.3. Çok-püskürtücülü plazma spreyleme sistemi .....	19
Şekil 5.1. Referans yüzey sıcaklığındaki homojen izotropik silindirde sıcaklık dağılımı .....	24
Şekil 5.2. Akış yönüne paralel tutulan içi dolu silindirde sıcaklık gradyanı.....	25
Şekil 5.3. Taşınım varlığında homojen izotropik silindir için çeşitli $\bar{h}$ değerlerine göre boyutsuz sıcaklık dağılımı .....	27
Şekil 5.4. Taşınım varlığında homojen izotropik silindir için çeşitli $\bar{h}$ değerlerine göre boyutsuz sıcaklık dağılımı .....	29
Şekil 6.1. Çeşitli $\bar{\beta}_1$ değerleri için ısı iletim fonksiyonu .....	32
Şekil 6.2. Çeşitli pozitif daha büyük $\bar{\beta}_1$ değerleri için ısı iletim fonksiyonu .....	33
Şekil 6.3. Negatif $\bar{\beta}_1$ değerleri için ısı iletim fonksiyonu .....	34
Şekil 6.4. $\bar{n} = \pm 0,1$ ve pozitif ve negatif $\bar{\beta}_3$ değerleri için ısıl genleşme fonksiyonu.....	37
Şekil 6.5. $\bar{n} = 0,1$ ile pozitif ve negatif $\bar{\beta}_3$ değerleri için ısıl genleşme fonksiyonu.....	38

<b>Şekil</b>	<b>Sayfa</b>
Şekil 6.6. $\bar{n} = -0,1$ ile pozitif ve negatif $\bar{\beta}_3$ değerleri için ısı genleşme fonksiyonu.....	39
Şekil 6.7. $\bar{n} = \pm 0,1$ ile pozitif $\bar{\beta}_3$ değerleri için ısı genleşme fonksiyonu.....	40
Şekil 6.8. Ekspansiyonel integralin değişimi .....	45
Şekil 6.9. Referans yüzey sıcaklığındaki FDM silindirde çeşitli pozitif $\bar{\beta}_1$ değerleri için boyutsuz sıcaklık dağılımı .....	47
Şekil 6.10. Referans yüzey sıcaklığındaki FDM silindirde çeşitli negatif $\bar{\beta}_1$ değerleri için boyutsuz sıcaklık dağılımı .....	48
Şekil 6.11. Çeşitli $\bar{h}$ ve 2,8 değerinde sabit tutulmuş $\bar{\beta}_1$ değerlerinin FDM silindirdeki sıcaklık dağılımına etkileri .....	51
Şekil 6.12. Çeşitli $\bar{h}$ ve $\bar{\beta}_1$ değerlerinin FDM silindirdeki sıcaklık dağılımına etkileri.....	52
Şekil 11.1. FDM silindirin iki ve üç boyutlu şematik gösterimi .....	92
Şekil 11.2. Homojen izotropik kırıta kritik $\bar{q}''' = 4,6805$ ve $\bar{h} \rightarrow \infty$ değerinde radyal, teğetsel ve eksenel gerilme bileşenleri.....	94
Şekil 11.3. Homojen izotropik kırıta kritik $\bar{q}''' = 4,6805$ ve $\bar{h} \rightarrow \infty$ değerinde radyal, teğetsel gerinimler ve yerdeğiştirme değerleri .....	95
Şekil 11.4. $\bar{\beta}_1 = 0,1$ , $\bar{\beta}_2 = 0,1$ , $\bar{\beta}_3 = 0,1$ ve sabit uçlu FDM silindirde akmaya sebep olan $\bar{q}''' = 4,72044$ ve $\bar{h} \rightarrow \infty$ değeri için boyutsuz gerilme bileşenleri .....	99
Şekil 11.5. $\bar{\beta}_1 = 0,1$ , $\bar{\beta}_2 = 0,1$ , $\bar{\beta}_3 = 0,1$ ve sabit uçlu FDM silindirde akmaya sebep olan $\bar{q}''' = 4,72044$ ve $\bar{h} \rightarrow \infty$ değeri için boyutsuz gerinim bileşenleri ile yerdeğiştirme .....	100
Şekil 11.6. Değişik $\bar{\beta}_1$ değerleri için radyal gerilme bileşeni.....	101
Şekil 11.7. Değişik $\bar{\beta}_1$ değerleri için teğetsel gerilme bileşeni.....	102

<b>Şekil</b>	<b>Sayfa</b>
Şekil 11.8. Değişik $\bar{\beta}_1$ değerleri için aksenal gerilme bileşeni.....	103
Şekil 11.9. Değişik $\bar{\beta}_1$ değerleri için radyal ve teğetsel gerinim ile yerdeğiştirme.....	104
Şekil 11.10. Değişik $\bar{\beta}_2$ değerleri için radyal gerilme bileşeni .....	106
Şekil 11.11. Değişik $\bar{\beta}_2$ değerleri için teğetsel gerilme bileşeni .....	107
Şekil 11.12. Değişik $\bar{\beta}_2$ değerleri için aksenal gerilme bileşeni.....	108
Şekil 11.13. Değişik $\bar{\beta}_2$ değerleri için radyal gerinim bileşeni .....	109
Şekil 11.14. Değişik $\bar{\beta}_2$ değerleri için teğetsel gerinim ile yerdeğiştirme .....	110
Şekil 11.15. Değişik $\bar{\beta}_3$ değerleri için radyal gerilme bileşeni .....	112
Şekil 11.16. Değişik $\bar{\beta}_3$ değerleri için teğetsel gerilme bileşeni .....	113
Şekil 11.17. Değişik $\bar{\beta}_3$ değerleri için aksenal gerilme bileşeni.....	114
Şekil 11.18. Değişik $\bar{\beta}_3$ değerleri için radyal yerdeğiştirme .....	115
Şekil 11.19. Değişik $\bar{n}$ değerleri için radyal gerilme bileşeni.....	116
Şekil 11.20. Değişik $\bar{n}$ değerleri için teğetsel gerilme bileşeni.....	117
Şekil 11.21. Değişik $\bar{n}$ değerleri için aksenal gerilme bileşeni.....	118
Şekil 11.22. Değişik $\bar{n}$ değerleri için radyal yerdeğiştirme .....	119
Şekil 11.23. Değişik $\bar{h}$ değerleri için FDM silindirde gerilme bileşenleri ile radyal yerdeğiştirme ( $\bar{q}''' = 5,700$ ).....	123

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$r$	Yarıçap (radyal eksen)
$\bar{r}$	Boyutsuz yarıçap (radyal eksen)
$\lambda(r)$	Isıl iletim fonksiyonu
$\lambda_0$	Isıl iletim fonksiyonu ilk değeri
$\beta_1$	(Isıl iletim fonksiyonunda) sabit katsayı
$\bar{\beta}_1$	(Isıl iletim fonksiyonunda) boyutsuz katsayı
$\bar{\lambda}(\bar{r})$	Boyutsuz ısı iletim fonksiyonu
$E(r)$	Elastisite fonksiyonu
$E_0$	Başlangıçtaki Elastisite değeri
$\bar{E}(\bar{r})$	Boyutsuz Elastisite fonksiyonu
$\beta_2$	(Elastisite fonksiyonunda) sabit katsayı
$\bar{\beta}_2$	(Elastisite fonksiyonunda) boyutsuz katsayı
$\alpha(r)$	Isıl genleşme fonksiyonu
$\alpha_0$	Isıl genleşme fonksiyonu ilk değeri
$\bar{\alpha}(\bar{r})$	Boyutsuz ısı genleşme fonksiyonu
$\beta_3$	Isıl genleşme fonksiyonu sabit katsayısı
$\bar{\beta}_3$	Isıl genleşme fonksiyonu boyutsuz katsayısı
<b>a</b>	Silindir yarıçapı
$\sigma_0$	FDM malzemenin akma gerilmesi
<b>h</b>	Konveksiyon ısı transferi katsayısı
$\bar{h}$	Boyutsuz konveksiyon ısı transferi katsayısı
$q'''$	Hacimsel iç enerji üretimi



<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$\bar{q}'''$	Boyutsuz hacimsel iç enerji üretimi
$\nu$	Poisson oranı
$\mathbf{T}(\mathbf{r})$	Radyal sıcaklık fonksiyonu
$\bar{T}(\bar{r})$	Boyutsuz sıcaklık fonksiyonu
$\mathbf{T}_s$	Silindirin yüzey sıcaklığı
$\mathbf{T}_f$	Akışkanın referans sıcaklığı
$\mathbf{T}_c$	Silindirin merkezindeki sıcaklık
$\rho$	Malzeme yoğunluğu
$c_p$	Malzeme özgül ısısı
$\varepsilon_r$	Radyal gerinim bileşeni
$\varepsilon_\theta$	Teğetsel gerinim bileşeni
$\varepsilon_z$	Eksenel gerinim bileşeni
$\bar{\varepsilon}_r$	Boyutsuz radyal gerinim
$\bar{\varepsilon}_\theta$	Boyutsuz teğetsel gerinim
$\bar{\varepsilon}_z$	Boyutsuz eksenel gerinim
$\mathbf{u}$	Radyal deplasman
$\bar{u}$	Boyutsuz radyal deplasman
$u_\theta$	Teğetsel deplasman
$u_z$	Eksenel deplasman
$\gamma_{r\theta}$	Radyal doğrultuya göre teğetsel kayma gerinimi
$\gamma_{\theta z}$	Teğetsel doğrultuya göre eksenel kayma gerinimi
$\gamma_{rz}$	Radyal doğrultuya göre eksenel kayma gerinimi
$\tau_{r\theta}$	Radyal doğrultuya göre teğetsel kayma gerilmesi

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$\tau_{\theta z}$	Teğetsel doğrultuya göre eksenel kayma gerilmesi
$\tau_{rz}$	Radyal doğrultuya göre eksenel kayma gerilmesi
<b>G</b>	Kayma modülü
<b>Y(r)</b>	Homojen olmayan kısım
<b>f(r)</b>	Düzenlenmiş homojen olmayan kısım
$\bar{f}(\bar{r})$	Boyutsuz homojen olmayan kısım
<b>c<sub>1</sub>, c<sub>2</sub></b>	Termal diferansiyel denklemin integral sabitleri
<b><math>\sigma_r</math></b>	Radyal gerilme, çözüm fonksiyonu
$\bar{\sigma}_r$	Boyutsuz radyal gerilme, genel çözüm fonksiyonu
<b><math>\sigma_{rh}</math></b>	Radyal gerilme homojen çözüm fonksiyonu
$\bar{\sigma}_{rh}$	Boyutsuz radyal gerilme homojen çözüm fonksiyonu
<b><math>\sigma_{rp}</math></b>	Radyal gerilme özel çözüm fonksiyonu
<b><math>\sigma_{\theta}</math></b>	Teğetsel gerilme
$\bar{\sigma}_{\theta}$	Boyutsuz teğetsel gerilme
<b><math>\sigma_z</math></b>	Eksenel gerilme
$\bar{\sigma}_z$	Boyutsuz eksenel gerilme
<b>c<sub>3</sub>, c<sub>4</sub></b>	Mekanik diferansiyel denklem integral sabitleri
<b>m<sub>1</sub>, m<sub>2</sub></b>	Özel çözümün katsayıları
$\bar{m}_1, \bar{m}_2$	Boyutsuz özel çözümün katsayıları
$\bar{P}_1(\bar{r}), \bar{P}_2(\bar{r})$	Herhangi bir homojen diferansiyel denklemin boyutsuz değişken katsayıları
<b>y<sub>1</sub></b>	Homojen çözümdeki birinci fonksiyon

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$\bar{y}_1$	Birinci boyutsuz homojen çözüm fonksiyonu
$y_2$	Homojen çözümdeki ikinci fonksiyon
$\bar{y}_2$	İkinci boyutsuz homojen çözüm fonksiyonu
$W(\mathbf{r})$	Wronskian determinanı
$\bar{W}(\bar{r})$	Boyutsuz Wronskian determinanı
$T_{\text{sıcak}}$	FDM malzemeye etkiyen yüksek sıcaklık
$T_{\text{soğuk}}$	FDM malzemeye etkiyen düşük sıcaklık
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$L(\mathbf{r})$	Laguerre fonksiyonu
$p$	Laguerre fonksiyonu derecesi
$n$	Laguerre fonksiyonu katsayısı
$U(\mathbf{r})$	Hipergeometrik fonksiyon
$a, b, c$	Hipergeometrik fonksiyonu katsayıları
$\theta$	Plazma sprej tabancanın yataya göre açısı
$L$	Plazma sprej tabancasının yüzeye olan dikey uzaklığı

<b>Kısaltmalar</b>	<b>Açıklama</b>
<b>FDM</b>	Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme
<b>FGM</b>	(ing.) Functionally Graded Materials
<b>ITER</b>	Uluslararası Termonükleer Deneysel Reaktörü (International Thermonuclear Experimental Reactor)
<b>PFC</b>	Plazma yüzü elemanları (Plasma Facing Components)
<b>CPF</b>	Santrifüj toz oluşturma (Centrifugal Powder Forming)
<b>EPD</b>	Elektroforez biriktirme (Electrophoresis Deposition)

## 1. GİRİŞ

Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler (FDM) (Functionally Graded Materials (FGM)), farklı malzemelerin üstün özelliklerini birleştirme düşüncesiyle malzeme teknolojisinde doğmuş bir fikirdir ve bu alandaki hızlı gelişmeler ve uygulanabilirliği son derece heyecan vericidir.

FDM'ler sürekli değişen kompozisyonda iki farklı malzeme içerirler. Örneğin bu malzemelerden ilki, yüksek sıcaklıktaki bir çalışma ortamındaki ağır bir ısı yüküne dayanması için seramik ve öteki malzeme ise yapısal rijitliği korumak için hafif bir metaldir [1].

İki farklı malzemenin (seramik ve metal) tek bir yapıda uyumlu şekilde çalışabilmesi için metal-seramik arası geçişler anî değildir. Bu sayede malzemenin yapı özellikleri, sabit sayısal değerler olarak değil, fonksiyonlar ile ifade edilmektedir.

Nükleer reaktörler, kimyasal fabrikalar ve yüksek-hız havacılık alanlarındaki basınçlı tüpler veya borular gibi yapısal bileşenler veya mekanik elemanlar, yüksek sıcaklık, yüksek sıcaklık değişimleri ve çevrimli sıcaklık değişimlerinden meydana gelen ısı yüklerine maruzdurlar. Son yıllarda, uzay taşıtları, ultra/süper/hipersonik uçaklar ve nükleer füzyon reaktörleri tasarlanmaktadır. Steinberg'in numerik hesaplarına göre [2], bir uzay taşıtı 26 800 m yükseklikte uçuş yaparken, farklı noktalardaki dış yüzey sıcaklıkları gövdenin üst kısmında 1033 K değerinden burunda 2066 K değerine dek değişebilmektedir. Yüksek sıcaklık ortamlarına dayanabilme özelliğindeki pek çok gelişmiş yüksek-sıcaklık malzemesi geniş sıcaklık aralıkları için araştırılmıştır.

FDM kavramı olarak ilk önce Ulusal Havacılık Laboratuvarı'ndan Niino ve meslektaşları tarafından ısı bariyer kaplamaları hazırlama amacıyla Sendai, Japonya'da önerilmiştir [3-4]. FDM'lerin asıl amacı, uzay araçlarındaki dış çerçeve ve yakıt sistemleri için, ısı gerilmeleri azaltan ve sıcaklıktan korunma etkisini artıran süper-dayanımlı malzemelerin geliştirilmesidir [1].

FDM kavramı ve FDM'lerde ısı gerilmelerin incelenmeye başlamasını hazırlayan literatür çalışmaları, aşağıdaki gibi özetlenebilir. Tanigawa [5], homojen olmayan yapı malzemelerine ait bazı temel termoelastik problemleri incelemiş, bunu izleyen çalışmada ise Noda, malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olduğu yapısal malzemelerdeki ısı gerilmeleri araştırmıştır [6]. Bunun ardından Tanigawa ve arkadaşları [7-8], homojen olmayan malzeme özelliklerine sahip levhalarda tek eksenli kararsız ısı iletimi ve buna bağlı ısı gerilme problemlerini, ve bunun ardından da malzeme özelliklerinin sıcaklığa bağlı olduğu durum için incelemeler yapmışlardır. Bunların üzerine kararsız bir sıcaklık kaynağına maruz homojen olmayan levhadaki gerilmelerin azaltılması için malzeme bileşiminde optimizasyonun yapıldığı çalışma [9] üzerine, Noda'nın FDM'lerdeki ısı gerilmeleri incelediği ilk çalışması [1] yayımlanmıştır.

Noda bu ilk çalışmada, bir levhadaki tek eksenli kararlı sıcaklık dağılımı etkisinde ısı gerilme problemini çözmüştür. Farklı çatlak tipleri içeren FDM'lerdeki ısı gerilme yoğunluğu faktörleri analitik ve numerik olarak incelenmiştir. Ağır ısı yüklerine maruz olduklarında, FDM'lerde kritik ısı gerilmeler oluşur, seramik yüzeyde çatlaklar oluşmaya başlar. Bu nedenle FDM'lerin en önemli problemlerinden biri, ısı yüklerinin nasıl azaltılabileceği ve sıcaklık dayanımının nasıl artırılabilir [1].

Kararlı ve kararsız ısı şartları altında, çeşitli geometrilerdeki FDM'lerde oluşan ısı ve mekanik gerilmelerin analizlerinde temel olarak dört farklı yöntem kullanılır. İlk yöntemde FDM malzeme, bir çeşit çok-tabakalı malzeme gibi düşünülerek, her elemanda malzeme özellikleri sabit kabul edilir veya son derece basit fonksiyonlarla ifade edilir. Bu yöntem Tanigawa ve arkadaşları tarafından sıklıkla kullanılmıştır. İkinci yöntemde ise malzeme özellikleri uygun fonksiyonlarla ifade edilir, tipik örnekler eksponansiyel veya üstel fonksiyonlardır. Üçüncü yöntem ise düzensizlik (perturbation) metodudur ve Noda ile grubu tarafından kullanılmıştır [1]. Son yöntem ise Green fonksiyonları yaklaşımıdır.

Levhanın ardından fonksiyonel derecelenmiş kalın duvarlı içi boş silindirlerde kararlı sıcaklık dağılımında gerilmeler ve gerinimler incelenmiştir [10]. Bu çalışmayı Obata'nın fonksiyonel derecelenmiş malzemedan yapılmış içi boş silindir ve kürede kararlı ısı gerilmeleri incelediği araştırma izlemiştir [11].

Sıklıkla başvuru olan bir diğer çalışma ise Jabbari ve arkadaşlarının radyal doğrultuda simetrik yüklere maruz içi boş bir FDM silindirde oluşan mekanik ve ısı gerilmeleri inceledikleri çalışmadır [12]. Bu araştırmada tek eksenli ve kararlı ısı gerilmeler söz konusudur. Sıcaklık dağılımının yalnızca radyal doğrultuya bağlı olduğu, iç ve dış yüzeyde genel ısı ve mekanik sınır şartları bulunduğu kabul edilmiştir. Poisson oranı hariç tüm malzeme özellikleri yarıçap değişkeninin üstel yönde değişen fonksiyonları olarak kullanılmıştır.

Xiang da benzer şekilde iç ve dış basınca maruz içi boş heterojen silindirleri incelerken [13],  $N$  farklı tabaka içerdiğini kabul ettiği ve her bir tabakada farklı ve sabit değerler alan bir silindir ile, sürekli dereceli malzeme özellikleri içeren bir silindirin elastik analizlerini yaparak sonuçlarını karşılaştırmıştır. Buna göre dereceli değişim, tabakalı değişim kabulüne göre teğetsel yöndeki asal gerilme ile birim radyal yer değiştirmeler üzerinde belirgin farklar yaratmaktadır.

Tütüncü ve Öztürk [14], fonksiyonel derecelenmiş basınçlı tüplerde gerilmeler için tam çözümleri elde etmişlerdir.

Bu çalışmaların ardından, kararsız ısı gerilmeler için üç boyutlu analizler yapılmaya başlanmıştır [15]. Burada dikdörtgen levha üstten veya alttan olmak üzere zamana bağlı ısı yüklerine maruzdur. Malzeme özellikleri, kalınlık (derinlik) koordinatı cinsinden fonksiyonlar olarak alınmıştır.

FDM'lerde oluşan çatlak tipleriyle ilgili, malzeme özelliklerinin eksponansiyel olarak değiştiği kabulüyle yapılan önemli bir çalışma da Delale ile Erdogan'a aittir [16].

FDM'lerde artık (residual) ısı gerilmeler de analiz edilmiştir [17]. FDM'lerde artık ısı gerilmeler, ısı genleşme katsayısının lineer-olmayan değişimlerinden oluşmaktadır fakat Elastisite modülündeki değiştirmelerle etkin biçimde azaltılabilmektedir.

Literatürde, fonksiyonel derecelendirilmiş dönen disklere ait araştırmalar da bulunmaktadır [18-19].

İç enerji üretimi olan içi boş silindirler ile ilgili çalışmalar, malzeme özelliklerinin sıcaklığa veya konuma bağlı olarak değişmesi veya sabit (sıcaklıktan veya konumdan bağımsız) kabul edilmesiyle, bu özelliklerdeki silindirlerin karşılaştırmasını yapmaya odaklanmıştır. Gittikçe daha fazla malzeme özelliğinin değişken kabul edilmesi problemleri daha da karmaşıklaştırırsa da gerçek malzemelere ve gerçek çalışma ortamlarına yakınsayan bu araştırmalar, bu yeni kabullere göre incelenen malzemelerin, idealize malzemelere göre aynı çalışma koşullarında daha iyi dayanım göstermelerini irdelemektedirler.

Orcan ve Eraslan [20], sıcaklığa bağlı olarak değişen termo-mekanik özelliklere sahip iç enerji üreten elastik-plastik tüplerde meydana gelen termoelastik-plastik deformasyonları incelemiştir. Burada sadece malzemenin akma gerilme değerinin değil, aynı zamanda ısı iletim katsayısının, Young modülünün ve ısı genleşme katsayısının da sıcaklığa bağlı olarak değiştiği kabul edilmiş ve çözümler buna göre yapılmıştır. Sonuçlar, sıcaklıkla değişmediği kabul edilen termo-mekanik özelliklere sahip bir malzeme ile karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak gösterilmiştir ki, sıcaklıktan bağımsız veya sıcaklığa bağlı olarak değişen özelliklere sahip bu malzemelere dair çözümlerin arasındaki farklılıklar yüksek sıcaklıklarda son derece önemli hale gelmektedir.

Orcan ve Gulgec [21], zamanla artan bir uniform iç enerji üretimi olan, uçları serbest bir tüpteki elastik-plastik deformasyonları Tresca şartı ve yardımcı akma kuralını kullanarak incelemiştir. Bu çalışmaya göre akma dayanımı sıcaklığa bağlıdır ve akma, dış sınırda başlamakta ve daha sonra merkezde bir plastik bölge oluşmaktadır.

Her iki plastik bölge de Tresca prizmasının kenar rejiminde yer almaktadır. Artan ısı yüklemesi nedeniyle plastik bölgelerin genişlemesi ve gerilmeler ile plastik şekil değiştirmeler, grafikler halinde gösterilmiş ve tartışılmıştır.

Ayrıca Eraslan ve Orcan [22], uniform olmayan bir ısı üretimi altındaki, lineer sertleşme özelliği gösteren, taşınım (convection) sınır şartına sahip bir silindirdeki termoplastik tepkiyi incelemişlerdir. Bu çalışmada, silindirde eksende başlayan bir plastik bölge ve konveksiyon ısı sınır şartına bağlı olarak oluşan ikinci bir akma bölgesi olduğu gösterilmiş ve yüzeyde üçüncü bir akma bölgesi oluşmasına meydan vermeyen kritik ısı transferi katsayısı değerleri araştırılmıştır. Ayrıca yüklemenin kaldırılması sonucu oluşan artık gerilmeler de incelenmiştir.

Başka bir çalışmada ise Gulgeç [23], Ref. [21]'de açıklanan çalışmayı geliştirerek, radyal sıcaklık dağılımının zamana bağlı olarak değiştiğini de göz önünde bulundurmıştır. Bilinen radyal ısı iletim denklemine, sıfır ve birinci dereceden Bessel fonksiyonları da zaman faktörü nedeniyle dahil olmuşlardır. Akma dayanımının sıcaklığa lineer bağımlı olduğu kabul edilmiştir. Buna göre akmanın sıcaklığa bağlı olmaması durumunda akma silindirin dış yüzeyinde başlamaktadır. Akma dayanımı sıcaklığa bağlı olduğunda silindir merkezindeki akma dayanımı değeri azalmaktadır. Buna göre hem silindirin merkezinde hem de dış yüzeyinde plastik akmanın başlayacağı kritik ısı yük değeri bu çalışmada hesaplanmıştır.

Bir başka akma şartı olan Von Mises akma şartını kullanarak Eraslan ve Argeso [24], lineer olmayan sertleşme gösteren elastik-plastik eksenel-simetrik sistemlerdeki ısı gerilmeleri belirlemiştir. Silindirler ve tüpler için farklı numerik örnekler ile düzlem gerinim ve genelleştirilmiş düzlem gerinim problemleri ele alınmıştır. Tresca akma şartının uygulandığı elastik-ideal plastik ve elastik-lineer sertleşen sistemler için hazır bulunan analitik çözümlerle karşılaştırmalar yapılmıştır. Gerilme ve şekil değiştirmeler üzerinde model-parametrelerin yaptığı etkilerin belirlenebilmesi için parametrik analizler yapılmıştır.



Bu çalışmada, iki ucu ankastre içi dolu bir silindirde ısı gerilme analizi, gerilme-gerinim denklemleri kullanılarak analitik olarak yapılmıştır. Silindir radyal doğrultuda değişen bir sıcaklık dağılımının etkisindedir ve bir taşınım ısı sınır şartına sahiptir.

Malzemenin bir FDM olması sebebiyle fonksiyon olarak ifade edilen Elastisite modülü, ısı iletkenlik ve ısı genleşme özelliklerinin iki tanesi doğal logaritma, bir tanesi ise üstel fonksiyona göre değişmektedir.

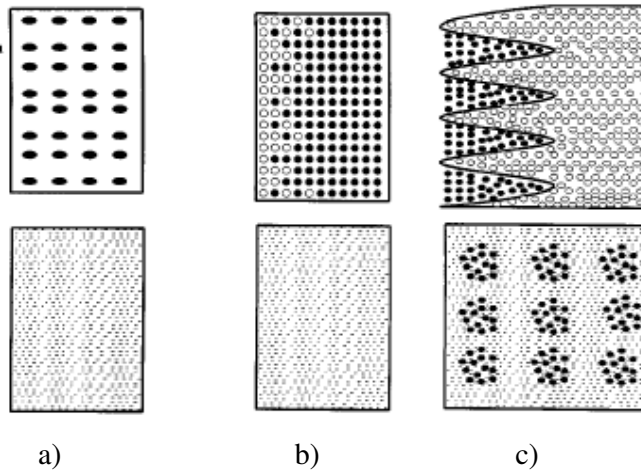
Ağır çalışma koşullarında bulunduğu kabul edilen FDM silindir için gerilme ve gerinim değerleri bulunmuştur. Taşınım sınır şartı olan ve olmayan homojen izotropik bir silindir için kritik ısı yük değerleri, taşınım sınır şartı bulunan ve bulunmayan bir FDM silindirde akmaya sebep olacak kritik ısı yük değeri ile karşılaştırılmıştır. Tresca akma şartı uygulanırken kullanılan akma dayanımının sıcaklığa bağlı olmadığı kabul edilmiştir.

Homojen izotropik malzemedeki bir silindirde akmaya neden olabilecek bir hacimsel iç enerji sınır değerinde FDM silindirin güvenle çalışmaya devam edip etmediği irdelenmek istenmektedir.

## 2. FONKSİYONEL DERECELENDİRİLMİŞ MALZEMELER

Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemeler (FDM)'de, malzeme yapı ve kompozisyonu cismin içerisinde kademeli/dereceli olarak değişir ve bunun sonucunda malzeme özellikleri değişir. Amaca uygun olarak FDM kavramı uygulanarak, malzemelerin gelişmesi ve yeni fonksiyonlarının oluşturulması amaçlanmaktadır.

Şekil 2.1'de, normal kalın bir kompozit ile FDM ve yüzey kompozitlerinin kesit görünümündeki farklar incelenebilir.



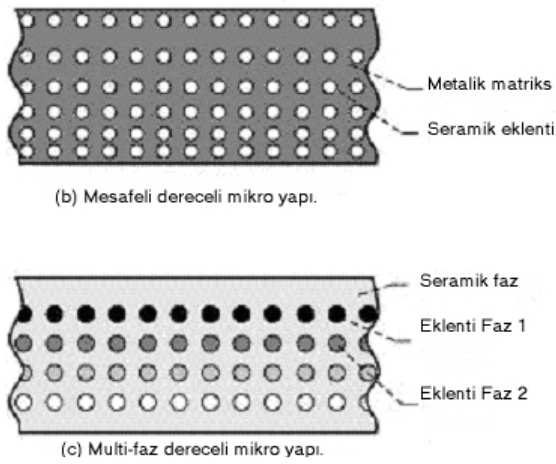
Şekil 2.1. Kesit ve üst görünüm: a) Kompozit, b) FDM, c) yüzey kompoziti [26]

### 2.1. Genel Özellikler

En çok kullanılan FDM, bir metalden bir seramiğe doğru geçişin olduğu yapıdır. Özellikleri itibariyle birbirinden farklı fonksiyonlar bu şekilde birleştirilebilir, örneğin metallerin yüksek toklukları, işlenebilirlikleri ve bağ kurma yetenekleri ile seramiklerin ısı, aşınma ve oksitlenme dirençleri gibi [27].



Şekil 2.2. Sürekli derecelenmiş mikro yapı [27]



Şekil 2.3. Fonksiyonel dereceli çeşitli mikro yapıya örnekler [27]

Geleneksel kompozitler, homojen karışımlardır ve bu nedenle içerik malzemelerinin arzulanan özellikleri arasında uzlaşma içerirler. Bunun aksine FDM, yapısal bir derecelenmeyle karakterize edilmiş iki-elemanlı bir kompozittir. FDM'in bazı özel bölgeleri, her bir maddenin saf formunu içerdiği için, uzlaşma gereksinimi elimine olur ve her iki maddenin özelliklerinden de faydalanılabilir. Tabakaların sürekliliğindeki ayrılmalar, belli bir değere kadar sınırlanmıştır: her bir tabakanın kalınlığı, 1-10 mikrometre ile sınırlanmıştır. Bu nedenle, eğer tek bir tabaka 30 mikrondan kalınsa, bu ayırık mikroskopik ara yüzlerle (interface) sonuçlanır. Her tabakanın kalınlığı, lineer, parabolik veya adımlı profil

derecelendirme elde etmek için değiştirilebilir. Basamaklı ve lineer dereceli FDM'lere ek olarak, başka profiller de oluşturulabilir: parabolik ve eksponansiyel gibi. 5 farklı dereceli ara yzey (interlayer) tasarımı incelenmiştir [27]:

- Basamaklı (Stepped)
- Dar çizgisel (Narrow Linear)
- Geniş çizgisel (Wide Linear)
- Parabolik
- Exponansiyel.

Malzeme içerikleri özel bir alan (ara yz, yzey ya da birleşim yeri) ile sınırlı olsa bile, fonksiyonel derecelendirilmiş bir malzeme olarak kabul edilebilir çünkü FDM kavramını içermektedir.

Dereceli ara yzey tipi, malzeme ozeliklerini değiştirir ve fonksiyonları geniş olarak etkiler. Pek çok durumda Young modülü önemli bir değişken faktördür.

## **2.2. FDM'lerin Mekanik Ozellikleri**

FDM'ler gibi yapay malzemeler gerçek durumda homojen değildirler ve pek çok durumda, lineer olmayan, dereceli 3-boyutlu faz dağılımları ve buna bağlı ozellikler gosterirler.

Dereceli ara yzey tipi, malzeme ozeliklerini değiştirir ve fonksiyonları geniş olarak etkiler.

FDM'ler, yapıdaki dereceleri, faz dağılımları, gozeneklilik, doku ve ilgili ozellikleri nedeniyle:

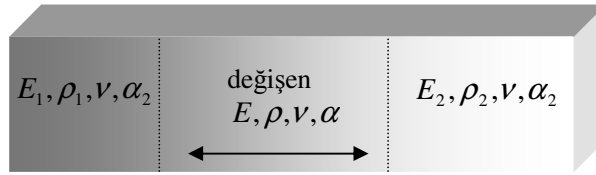
- Sertlik,
- yoğunluk,
- direnç,
- ısı iletkenlik, vb

ile geleneksel izotropik malzemelerden ayrılırlar.

Pek çok durumda Young modülü önemli bir değişken faktördür.

### 2.2.1. Elastisite modülü

Pek çok durumda elastisite fonksiyonu, üstel katsayılara göre değişen fonksiyonlar halinde tercih edilmektedir. Basamaklı veya mesafeli derecelendirmelere nazaran üstel değişimler daha yumuşak bir geçiş sağlarlar.



Şekil 2.4. Fonksiyonel dereceli bir şerit [28]

### 2.2.2. Isıl iletkenlik ve ısıl genleşme

Üretilen TiC-Ni FDM örneklerde, ısıl iletkenlik ve ısıl genleşme katsayıları sıcaklıkla düzgün olarak artmaktadır ve bu katsayıların büyük ölçüde Ni yüzdesine bağlı olduğu görülmüştür [29].

### 2.2.3. Mikro sertlik

Toz metalurjisiyle üretilen FDM'lerde yapılan analizler sonucu, FDM malzemelerin mikro sertlikleri FDM olmayan aynı tür malzemelerden daha yüksektir.

Ayrıca öğütme ve sinterleme işlemleri vakum ortamlarda gerçekleşirse, yüzey gözenekliliği ve bu gözenekliliğin azalttığı sertlik etkileri düzeltilebilir [30].

### **3. FDM'LERİN POTANSİYEL KULLANIM ALANLARI**

FDM'ler, yüksek malzeme performansı gerektiren ısı bariyer kaplamalar [32, 34], kemik ve dental implantlar [33], Piezoelektrik ve termoelektrik aygıtlar [27] gibi uygulamalarda tercih edilmektedir.

Ayrıca ileri uçak ve uzay sanayinde, roket ısı başlıkları, motor ısı yapıları, füzyon reaktörlerinin plazma yüzleri gibi kullanımları vardır [31].

#### **3.1. Uzay Taşıtları**

FDM ilk bu alan için tasarlanmıştır. FDM yapısal malzeme ve enerji değiştirici malzeme olarak roket yapılarında ve motorun dış duvarında uygulanmaktadır.

Örneğin, Uluslar arası Termonükleer Deneysel Reaktörü'nde (ITER) plazma yüzü elemanlarını (PFC's) koruyan saptırıcılar, W-Cu FDM'lerden yapılmaktadır [35]. Füzyon reaktörünün akışkanla soğutulan bu elemanları, yüksek ısıl gerilmelere maruzdurlar.

#### **3.2. Endüstriyel Malzemeler**

Kesici ve şekillendirici kalemlerde, kesilecek malzemelerin gelişmesi sonucunda mukavemet ve ısıl dirençlerin artması nedeniyle FDM'ler kullanılmaktadır.

Sumitomo Elektrik Endüstriyel Ltd. FDM tekniğini karbit kalemlerinde uygulamaktadır [25].



Şekil 3.1. Mitsubishi Materials Corp. üretimi kalemler [25]

### 3.3. Termoelektrik Soğutma Sistemleri

Her termoelektrik malzeme, belli bir sıcaklık aralığında yüksek performans gösterir. Yüksek performans sıcaklık aralıkları, farklı tepe sıcaklıkları olan malzemeler birleştirilerek genişletilebilir [32]. Bu, termoelektrik malzemeler için FDM kavramıdır.

FDM'in sadece termoelektrik ısıtma üretiminde değil, aynı zamanda termoelektrik soğutmada da üstün olduğu FGM2002 Pekin'de bildirilmiştir [32].

### 3.4. Biyomalzemeler

Biyomedikal uygulamalarda, kaybedilen veya onarılamayan (kemik, diş gibi) sert yapıların yerine nakledilebilecek, geleneksel malzemelerden farklı malzemeler aranmaktadır. Çünkü geleneksel tipteki malzemeleri, insan bünyesi reddeder. Bu aranan malzemeler, biyolojik malzemelerdir.

Fonksiyonel derecelenme, yaşayan dokunun temel bir karakteristiğidir [33].

Bu yeni malzemeler, kaybedilen biyolojik yapılarda olduğu gibi, karmaşık fonksiyonellik ve hiyerarşik yapı değişimi içermek zorundadır.



Örneğin, yoğun ve sert bir dış yapıdan gözenekli bir içyapıya doğru değişen insan kemiği, FDM kavramına girmektedir. Kemik, bu yapısıyla, dış yüklemelere karşı tepkisini optimize eder.

Bu nedenle yapay bir implant malzemesinin optimize edilmiş yapısı da benzer bir derecelenme göstermelidir.

Omuz ve diz eklem naklinde, biyopolimerlerin fonksiyonel derecelendirilmiş ara tabakaları tercih edilir. Bu da, iyileştirilmiş mekanik davranışlar ve çevresel dokulardaki yaşayan hücrelerle daha iyi bir etkileşim demektir.

### **3.5. Isıl Bariyer Kaplamalar**

Isıl bariyer kaplama uygulaması, sıcak bölümleri ısıdan ve yanma gazlarının oksitleyici bölümlerinden korumada daha etkilidir [32].

Bu kaplama kavramı, güç sistemleri ve jet motorlarında kullanılır. Isıl bariyer kaplamalar gaz türbinleri ve diğer enerji üreten elemanlarda, şu amaçlarla kullanılmaktadır [34]:

- Motorun çalışma sıcaklığını yükseltmek ve böylece enerji verimini iyileştirmek,
- Motorun sıcak bölümlerinde bulunan metalik elemanların soğutma gereksinimlerini azaltmak,
- Eleman ömrünü uzatmak.

Isıl bariyer kaplamalar, rutin olarak:

- yanma odalarında,
- art yakıcılarında,
- türbin nozullarında,
- hava araçlarının pervane bıçaklarında,
- güç üreten gaz türbinlerinde

kullanılmaktadır.

Genel mekanik özelliklerindeki gelişmelere rağmen, süper alaşımların TBC malzemesi olarak kullanımlarında oksidasyon ve korozyon problemleri henüz çözülememiştir. Bu nedenle TBC'nin problemi, ısı gerilme ve oksidasyonun oluşmasıyla, kaplamanın kırılmasıdır.

TBC'ye FDM kavramı, birkaç yıl önce tanıtılmıştır. Bu kavramda, ısı genleşme katsayısı ve Elastik modülü gibi malzeme özelliklerinin, kaplamadaki ısı gerilmeleri azaltmak için dereceli olarak değişmesi umuluyordu. Isıl çevrim testi altında FDM kaplamalar, FDM olmayan kaplamalardan daha uzun ömürlü olmuşlardır [34].

#### 4. FDM'LERİN ÜRETİM YÖNTEMLERİ

FDM'lerin imalat yöntemleri incelenecek olursa 2 aşamaya odaklanılabilir [36]:

1) Derecelendirme: Homojen olmayan malzemenin oluşturulması aşamasıdır.

a) Oluşturma işlemleri: Ham malzemeler veya tozlardan dereceli malzemeyi oluşturmaya yöneliktir. Gelişen teknolojiyle pek çok yeni yöntem denenmiş ve ekonomik olarak iyileştirilmişlerdir.

i. Toz metalurjisi [36]

- . Toz istifleme
- . Tabakaların kesintisiz biriktirilmesi
- . Tabaka laminasyonu
- . Islak toz spreyleme
- . Plazma spreyleme
- . Slip döküm ve bulamaca batırma
- . Katılaştırma işlemleri
- . Santrifüj toz oluşturma (CPF) ve Pervane kuru karıştırma (IDB)
- . Yerçekimi sedimentasyonu
- . Santrifüj sedimentasyonu
- . Elektroforez biriktirme (EPD) [37]

ii. Eritme içeren yöntemler [36]

- . Santrifüj döküm
- . Kontrollü kalıp doldurma

b) Homojenleştirme: 2 farklı malzemenin anî geçişinin yumuşak bir geçişe dönüştürülmesi, malzeme taşınmasıyla gerçekleştirilir [36].

c) Ayrıştırma işlemleri (Segregation): Makroskopik olarak homojen görünen malzemenin, bir etki alanı ile (ör. Yer çekimi veya elektrik alanı) derecelendirilmesidir.

2) Birleştirme / sağlamlaştırma: Bu yapının ayrılmayan hacimsel bir hale getirilmesi. İşlem koşulları derecelenmenin zarar görmeyeceği bir şekilde seçilmelidir.

- Kurutma
- Sinterleme veya Katılaştırma

#### **4.1. Derecelendirme İşlemleri**

##### **4.1.1 Toz metalurjisi**

Toz metalurjisiyle FDM üretimi,

- düşük maliyetler,
- daha fazla ham madde bulunabilirliği,
- daha basit işlem teçhizatları,
- daha az enerji tüketimi,
- daha kısa işlem süreleri

gibi avantajlar sunmaktadır.

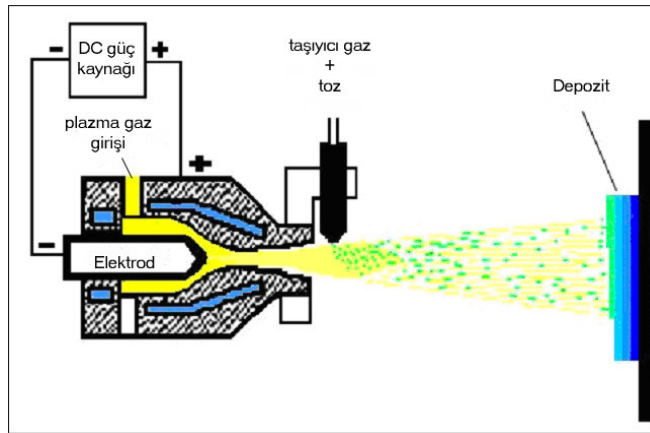
T/M malzemelerindeki avantajlar ise şöyle sıralanabilir [17]:

- daha yüksek bir düzenli özellikteki bileşim,
- çökelti ve karbürler gibi ikincil fazlarda daha iyi ve daha düzenli bir dağılım.

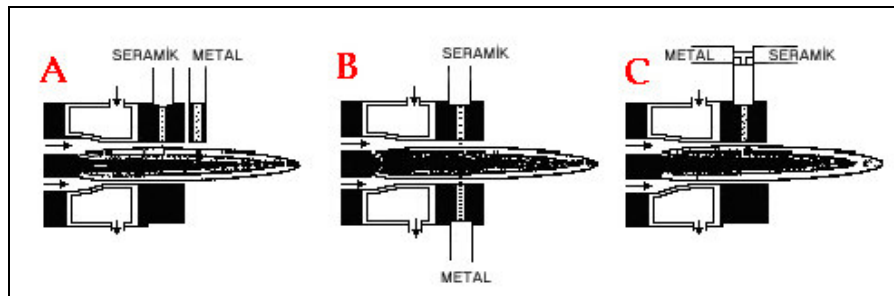
Toz metalurjisinin başarıyla uygulandığı işlemlerden biri olan Plazma spreyleme yöntemi, aşağıda kısaca açıklanmıştır.

*Plazma spreyleme:* Plazma spreyinde, ardışık damlaların birikimiyle bir depozit yüzey oluşturulur. Yöntemin amacı; yoğunluk ve ergime noktaları açısından büyük farklılıkları olan farklı türde malzemelerin arzulanan porsiyonlarda homojen olarak, kalınlık eksenine dik düzlemlerde karıştırılmasıdır. İki çeşit sistem uygulamada yer almaktadır:

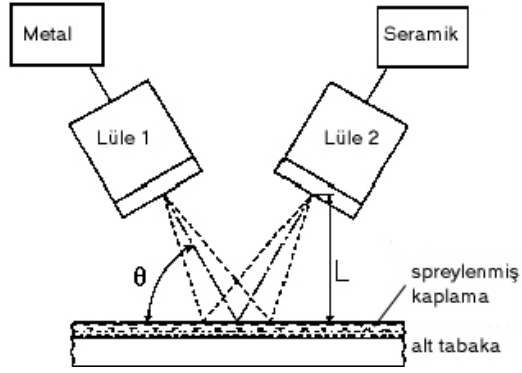
- Tek Püskürtücü sistemler: uygulama kolaylığı ve basitliği nedeniyle tercih edilir.
- Çok-püskürtücü sistemler: her bileşen için birbirinden bağımsız besleme sistemleri içerir.



Şekil 4.1. FDM'lerin plazma spreyleme ile üretimi [25]



Şekil 4.2. Tek püskürtücüde karışım yöntemleri [25]



Şekil 4.3. Çok-Püskürtüclü plazma spreyleme sistemi [25]

Her durumda, her bir püskürtücü için toz besleme hızı, arzulanan dereceyi elde etmek için bağımsız olarak kontrol edilir.

Öteki yöntemler hakkında detaylı bilgi, Kieback'ın çalışmasından edinilebilir [36].

## 5. HOMOJEN İZOTROPİK SİLİNDİR İÇİN SICAKLIK DAĞILIMI

Malzeme özellikleri herhangi bir değişkene (yarıçap veya sıcaklık) bağlı olmayan homojen ve izotropik bir silindir için geçerli olan sıcaklık dağılımının FDM silindir için hesaplanacak olan sıcaklık dağılımıyla karşılaştırılması, sıcaklığın malzemeler üzerindeki net etkisinin anlaşılmasında yardımcı olacaktır.

Her iki silindir için de sıcaklık dağılımı radyal doğrultuda değişmektedir.

### 5.1. Homojen İzotropik Silindirin Isıl Özellikleri

#### 5.1.1. Isıl iletim katsayısı

Belirli bir malzemedan yapılmış ve elastik-mükemmel plastik olduğu kabul edilen silindirdeki ısı iletim (veya difüzyon) katsayısı sabit sayısal bir değerdir:

$$\lambda = \lambda_0 \quad (5.1)$$

Bu değer silindirin yarıçapı veya uzunluğu boyunca aynıdır.

#### 5.1.2. Lineer ısı genleşme katsayısı

FDM malzemeler ilk ortaya çıktıklarında önerilenin aksine [38], homojen izotropik bir silindirde ısı genleşme katsayısı sabit bir değerdir:

$$\alpha = \alpha_0 \quad (5.2)$$

### 5.2. Sıcaklık Dağılımı ve Isıl Sınır Şartları

Silindirik koordinat sisteminde, üç asal doğrultuda ve zamana bağlı ısı iletim denklemleri [39],

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.3)$$

Burada  $T$ , sıcaklık fonksiyonu;  $\lambda$ , ısı iletkenlik katsayısı,  $q'''$ , hacimsel ısı veya iç enerji üretimi;  $\rho$ , malzeme yoğunluğu;  $c$ , malzeme özgül ısı değeri,  $t$ , zamandır.

Kararlı durumda ve sabit  $\lambda$  değerinde, bilinen ısı iletim denklemi meydana çıkar:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q'''}{\lambda} = 0 \quad (5.4)$$

Sıcaklık  $z$  ve  $\theta$  doğrultusundaki değişimlere bağlı olmadığı zaman, ısı iletim denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \lambda r \frac{dT}{dr} \right) + q''' = 0 \quad (5.5)$$

Burada  $\lambda$  katsayısı sabit bir değer olduğu için türevlerin dışına çıkararak sadeleşir.

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{q'''}{\lambda_0} = 0 \quad (5.6)$$

Eş. 5.6 homojen olmayan ikinci dereceden lineer adi bir diferansiyel denklemdir. Çözüldüğü takdirde aşağıdaki denklem elde edilir.

$$T(r) = c_1 \text{Log}(r) + c_2 - \frac{q''' r^2}{4\lambda_0} \quad (5.7)$$

Sıcaklık dağılımındaki integral sabitlerinin belirlenmesi için ısı sınır şartlarına gereksinim vardır.



Buna göre ilk sınır şartı şu şekildedir;

1. Merkezdeki sıcaklık sonlu bir değer olmalıdır.

$$T(r = 0) = \text{sonlu} \quad (5.8)$$

Eş. 5.7 ile verilen sıcaklık dağılımı incelenirse silindir merkezinde sonlu bir sıcaklık değerinin sağlanabilmesi için  $c_1$  integral sabiti sıfır olmalıdır.

$$c_1 = 0 \quad (5.9)$$

Böylece sıcaklık dağılımı için Eş. 5.7, aşağıdaki biçime dönüşür:

$$T(r) = \frac{-q'''}{4\lambda_0} r^2 + c_2 \quad (5.10)$$

Sıcaklık dağılımı zamana bağlı olmadığı için bu aşamada, bir ilk şart yerine, ikinci bir sınır şartı kullanılmalıdır. Bu ikinci sınır şartı araştırılırken, radyal doğrultuda değişen bir sıcaklık dağılımının etkisi altındaki homojen izotropik silindir için iki farklı durum incelenecektir:

- a) Silindirin bir ısı taşınım sınır şartına sahip olmadığı, belirli bir yüzey sıcaklığının referans edildiği durum ve bu durumun sağladığı sınır şartı
- b) Silindirin bir ısı taşınım sınır şartına sahip olduğu durum ve bu durumun sağladığı sınır şartı.

Bu şekilde bir akışkanın varlığının ve taşınımının etkisi, homojen izotropik silindir üzerinde incelenebilecektir.

### 5.2.1. Referans yüzey sıcaklığındaki homojen izotropik silindir için sıcaklık dağılımı

Silindir yüzeyinin sıcaklık değeri, referans bir değer olarak tanımlanırsa ikinci ısı sınır şartı aşağıdaki gibidir:

2. a) Yüzeydeki sıcaklık değeri;

$$T(a) = T_0 = 0^\circ\text{C} \quad (5.11)$$

Bu sınır şartının uygulanmasıyla ikinci integral sabiti aşağıdaki gibi bulunur:

$$c_2 = \frac{q'''a^2}{4\lambda_0} \quad (5.12)$$

$$T(r) = \frac{q'''(a^2 - r^2)}{4\lambda_0} \quad (5.13)$$

Homojen izotropik silindir için bu şekilde tanımlanan sıcaklık dağılımı, Gulgec [40] ile örtüşür.

Eş. 5.13 incelenirse boyutsuzlaştırılmamış sıcaklık dağılımını etkileyen parametrelerin sadece  $q'''$  hacimsel iç enerji üretimi ve  $\lambda_0$  ısı iletim katsayısı olduğu görülür. Bu eşitlikten merkezdeki sıcaklık değeri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$T(0) = T_c = \frac{q'''a^2}{4\lambda_0} \quad (5.14)$$

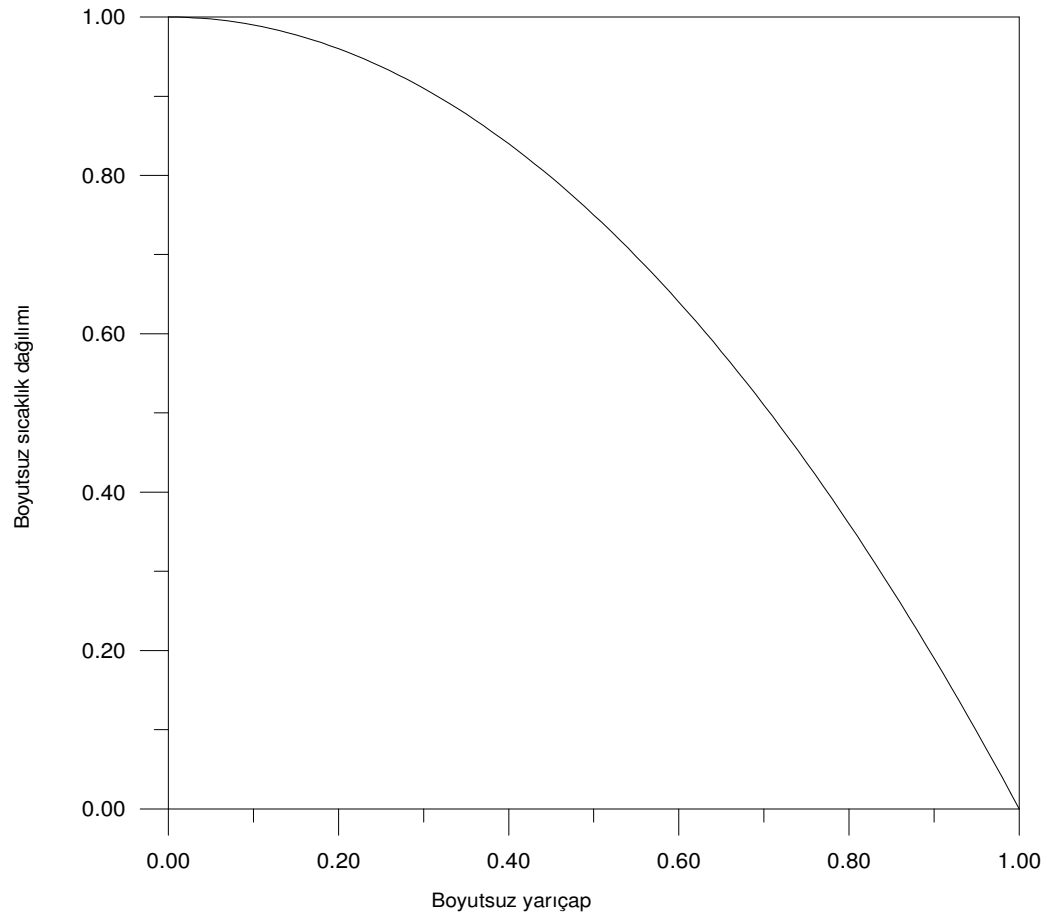
Eş. 5.14'e göre hacimsel iç enerji üretiminin artırılması, silindir merkezinde daha yüksek sıcaklık değerlerinin oluşmasına sebep olacaktır. Tam tersi bir etkiyi ise ısı iletim katsayısı sağlamaktadır: daha yüksek bir katsayı, daha fazla ısının çevreye

iletilmesine, dolayısıyla silindir merkezinde daha düşük sıcaklık değerlerinin sağlanmasına neden olur. Yüzey sıcaklık değeri ise, Eş. 5.13 ile verilen sıcaklık dağılımından aşağıdaki gibi elde edilir ve ısı sınır şartını da sağlar:

$$T(a) = T_w = 0^\circ\text{C} \quad (5.15)$$

Eş. 5.13 ile bulunan sıcaklık dağılım fonksiyonu, merkez sıcaklık değerine (Bkz. Eş. 5.14) bölünmesiyle boyutsuzlaştırılabilir:

$$\bar{T}(\bar{r}) = 1 - \bar{r}^2 \quad (5.16)$$



Şekil 5.1. Referans yüzey sıcaklığındaki homojen izotropik silindirde sıcaklık dağılımı

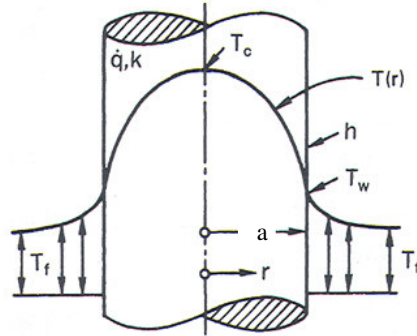
Eş. 5.16'ya ve Şekil 5.1'e göre, boyutsuz sıcaklık değerleri, silindir merkezinden dış yüzeye ilerlendikçe parabolik olarak azalmaktadır. Yüzeyde referans sıcaklık değeri  $0^{\circ}\text{C}$ 'dir.

### 5.2.2. Konvektif ısı sınır şartına sahip homojen izotropik silindir için sıcaklık dağılımı

Isıl taşınımın bahsedildiği bir sınır şartı söz konusu olduğunda, silindirin, akışkanın akış yönüne göre pozisyonu önem kazanır. Silindir eksenine akış yönüne dik tutulursa sıcaklık gradyanı hem teğetsel hem de aksenal yöne bağlı olmaktadır, akış yönüne paralel tutulursa sıcaklık gradyanı sadece aksenal doğrultuya bağlı olacaktır.

Bu problemde silindir, akış yönüne paralel tutulmaktadır.

Böyle bir durum için Şekil 5.2 incelendiğinde,  $T_c$  , merkezdeki sıcaklık;  $h$ , konveksiyon ısı transferi katsayısı;  $T_w$  , yüzey sıcaklığı;  $T_f$  , akışkan sıcaklığı;  $a$  , silindir yarıçapı,  $\lambda$  , ısı iletim katsayısıdır.



Şekil 5.2. Akış yönüne paralel tutulan içi dolu silindirde sıcaklık gradyanı [42]

Bu duruma göre ikinci sınır şartı aşağıdaki gibi olur:

2. b) Yüzeydeki ısı iletimi ile konveksiyon ısı transferi miktarı birbirine eşittir [22].

$$-\left(\lambda \frac{dT}{dr}\right)_{r=a} = h(T(a) - T_f) \quad (5.17)$$

Akışkan sıcaklığı referans sıcaklık olarak  $0^\circ\text{C}$  kabul edilerek, Eş. 5.17 ile ifade edilen sınır şartı, Eş. 5.10 ile bulunan sıcaklık fonksiyonuna uygulandığı zaman ikinci integral sabiti aşağıdaki gibi elde edilir:

$$c_2 = \frac{q'''a}{2h} + \frac{q'''a^2}{4\lambda_0} \quad (5.18)$$

$$T(r) = \frac{q'''(a^2 - r^2)}{4\lambda_0} + \frac{q'''a}{2h} \quad (5.19)$$

Merkez sıcaklık değeri aşağıdaki gibidir:

$$T(r) = \frac{q'''a^2}{4\lambda_0} + \frac{q'''a}{2h} \quad (5.20)$$

Yüzey sıcaklığı aşağıdaki şekilde bulunur.

$$T(a) = T_w = \frac{q'''a}{2h} \quad (5.21)$$

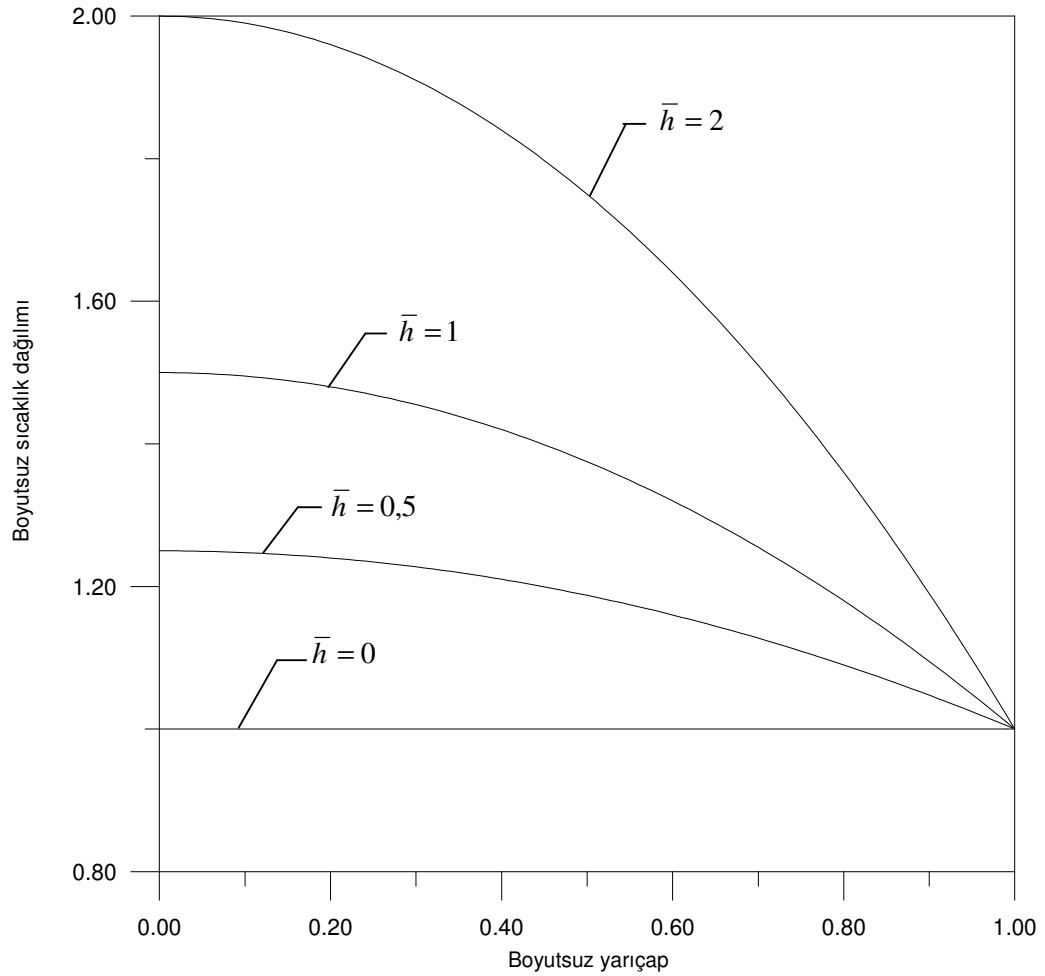
Görüldüğü gibi taşınım ısı sınır şartının varlığında konveksiyon ısı iletim katsayısı sıcaklık değerlerine ters olarak etki etmektedir. Eş. 5.20 ve Eş. 5.21 incelendiğinde,  $h$  katsayısının sayısal değer olarak artması, silindir çevresinde zorlanmış taşınım ve daha etkin bir soğutma anlamını taşır ki, yüzey ve merkez sıcaklık değerlerinde daha yüksek  $h$  değerleriyle elde edilen sıcaklık değerlerine göre düşmeler veya daha yavaş artışlar görülür.

Eş. 5.19 ile tanımlanan homojen izotropik silindir için sıcaklık denklemi, Eş. 5.21 ile verilen yüzey sıcaklığına bölünerek boyutsuzlaştırılır.

$$\bar{T}(r) = 1 + \frac{\bar{h}}{2}(1 - \bar{r}^2) \quad (5.22)$$

$$\bar{h} = \frac{ha}{\lambda_0} \quad (5.23)$$

Eş. 5.23 ile tanımlanan boyutsuz taşınım katsayısı, Eraslan ve Orcan'ın çalışması ile uyumludur [22].



Şekil 5.3. Taşınım varlığında homojen izotropik silindir için çeşitli  $\bar{h}$  değerlerine göre boyutsuz sıcaklık dağılımı

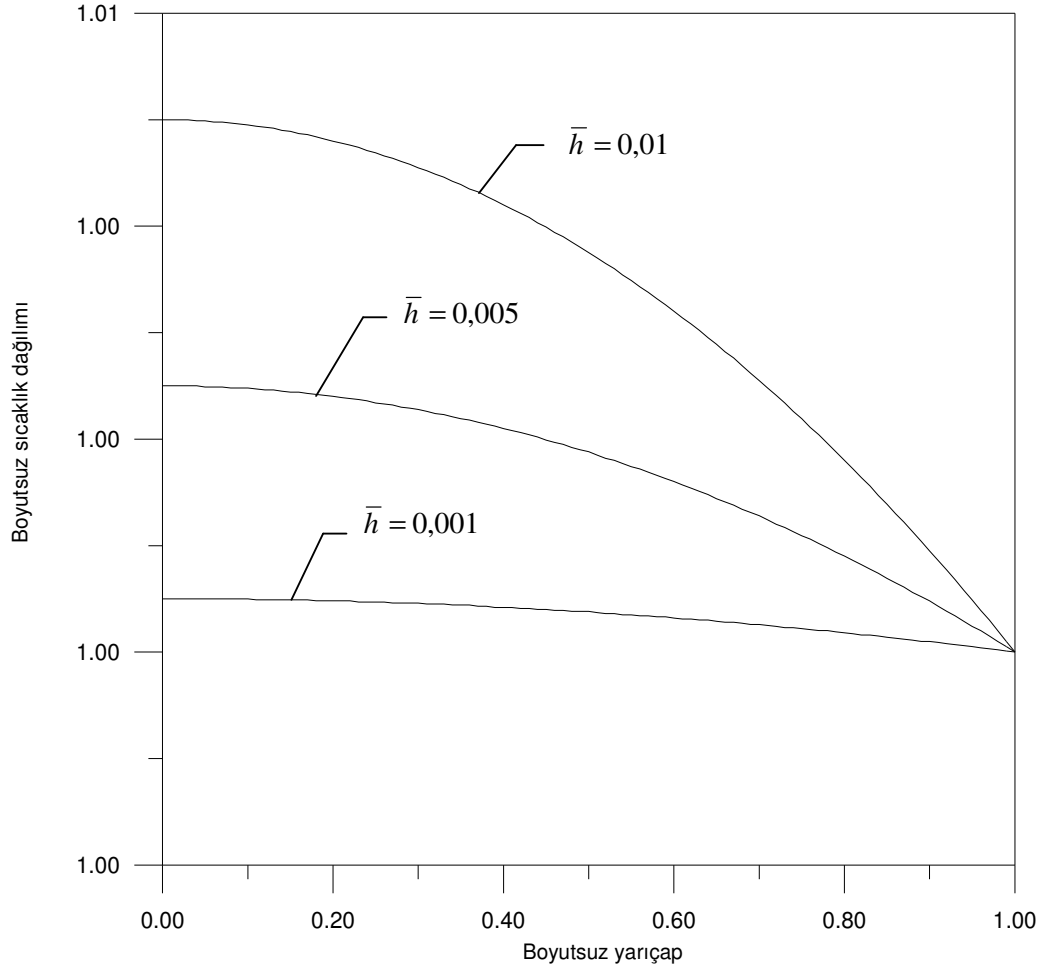
$\bar{h}$  değerinin sıfır olması, Eş. 5.23 incelendiğinde ya taşınımın hiç olmaması ya da  $\lambda_0$  katsayısının  $\infty$  değerinde olması demektir ki ikinci durumda silindir içinde hacimsel iç enerji üretimi o anda çevreye iletilir ve sıcaklık dağılımı merkezden yarıçapa dek 1 değerinde sabit ilerler.

Eş. 5.22 ve Eş. 5.23 uyarınca,  $\bar{h}$  değerinin yüksek olması, h taşınım katsayısının  $\lambda_0$  ısı iletim katsayısına oranla daha büyük olduğunu gösterir. Bu mantık, aşağıdaki denklem ile açıklanabilir.

$$\bar{h} = \frac{h}{\lambda_0} a = \frac{h}{\lambda_0} (0.1) \quad (5.24)$$

Şekil 5.3'te Eş. 5.24'teki oranın sıcaklık dağılımına nasıl etki ettiği görülebilir. Buna göre artan  $\bar{h}$  değeri, aslında daha yüksek bir h veya daha düşük  $\lambda_0$  değerinden kaynaklanmaktadır ve ikinci parametrenin düşüklüğü daha zayıf bir ısı iletimi nedeniyle silindir merkezinden çevreye ısı kaybının azlığı demektir. Bu da silindir merkezinde daha yüksek sıcaklıkların oluşmasına sebeptir; böylece Şekil 5.3'te eğriler daha yüksek değerlerden başlamaktadır.

Tam tersi bir durumda, yani  $\bar{h}$  değerinin 0 ila 1 arasında son derece düşük değerler aldığı bir durum incelenirse, bu kez düşük bir taşınım etkisi ve yüksek bir ısı iletim katsayısı, silindir merkezinde daha düşük değerlerden başlayan bir sıcaklık dağılımını verecektir.



Şekil 5.4. Taşınım varlığında homojen izotropik silindir için çeşitli  $\bar{h}$  değerlerine göre boyutsuz sıcaklık dağılımı

Görüldüğü gibi  $\bar{h}$  değeri küçüldükçe taşınımın etkisi azalmakta, homojen silindir için referans yüzey sıcaklığı modeline (Eş. 5.13, Eş. 5.16) yaklaşılmaktadır.



## 6. FDM SİLİNDİR İÇİN SICAKLIK DAĞILIMI

FDM içi dolu silindir, ağır çalışma şartlarında bulunan kirişlerin modellemesi olarak düşünülebilir. İçi boş silindirler üzerine yapılan çalışmalar ise ağır koşullar altındaki boruların modellemesi olarak kabul edilmektedir. Bu ortamlar ani sıcaklık değişimleri, yüksek ve çok düşük sıcaklıklar içeren ve sıcaklık faktörünün yanında dayanım gerektiren ortamlar, örneğin nükleer reaktör veya uçak gövdeleri olabilir.

Bu bölümde silindire ait özellikler fiziksel anlamlarıyla açıklanırken, ilk değerlerine bölünmüş fonksiyonların grafikleri çizilmiştir. Ardından FDM silindir için sıcaklık fonksiyonu elde edilmiş ve bunu izleyen kısımda ise uniform malzemedeki bir silindir için sıcaklık fonksiyonu elde edilmiştir ve bu fonksiyonların etkileri tartışılmıştır.

Silindirin ısı olarak etkilenmesine neden olan değişkenler, hacimsel iç enerji üretimi ve akışkan içinde bulunması sebebiyle konveksiyon ısı transferi katsayısıdır. İç enerji üretimi, silindir merkezinde yüksek sıcaklık değerlerine sebep olurken akışkan, silindir yüzeyinde düşük sıcaklık değerleri sağlamaktadır. Bu nedenle silindirin akmasına neden olacak değişken öncelikle hacimsel iç enerji üretimi parametresidir.

### 6.1. FDM Silindirin Malzeme Özellikleri

#### 6.1.1. Isıl iletkenlik fonksiyonu

Isıl iletkenlik, moleküller arası boşluklarla ters orantılı olan, serbest elektronların enerji taşıyabilmesini tanımlayan bir malzeme özelliğidir ve bu katsayının artmasıyla, malzemenin ısıyı iletim miktarı artar. Genel olarak bu katsayılar, gazlarda en küçük değerlerdedir, sıvılarda bu değer artmakta ve ardından yalıtım sistemleri, metal olmayan katılar, alaşımlar ve son olarak saf metallerde en yüksek değere ulaşır.

Silindirin bir FDM malzemenen yapılmış olması nedeniyle, sıcaklık fonksiyonu belirlenirken, ısı iletkenlik katsayısı  $\lambda$ 'nın sabit sayısal bir değer olmaması büyük önem kazanacaktır. Bu malzeme özelliği bu problemde, radyal yönde değişen; merkezde ( $r=0$ 'da) bu özellik sıfır olamayacağı için eksponansiyel özellikte bir fonksiyon olarak alınmıştır:

$$\lambda = \lambda_0 e^{r\beta_1} \quad (6.1)$$

$\beta_1$  parametresi, Bölüm 8'de de açıklanacağı gibi ( $1/m$ ) cinsinden bir birime sahiptir. Eş. 6.1'i birimsizleştirme işlemi aşağıdaki gibi yapılmıştır.

$$\bar{r} = \frac{r}{a} \quad (6.2)$$

$$\bar{\beta}_1 = a\beta_1 \quad (6.3)$$

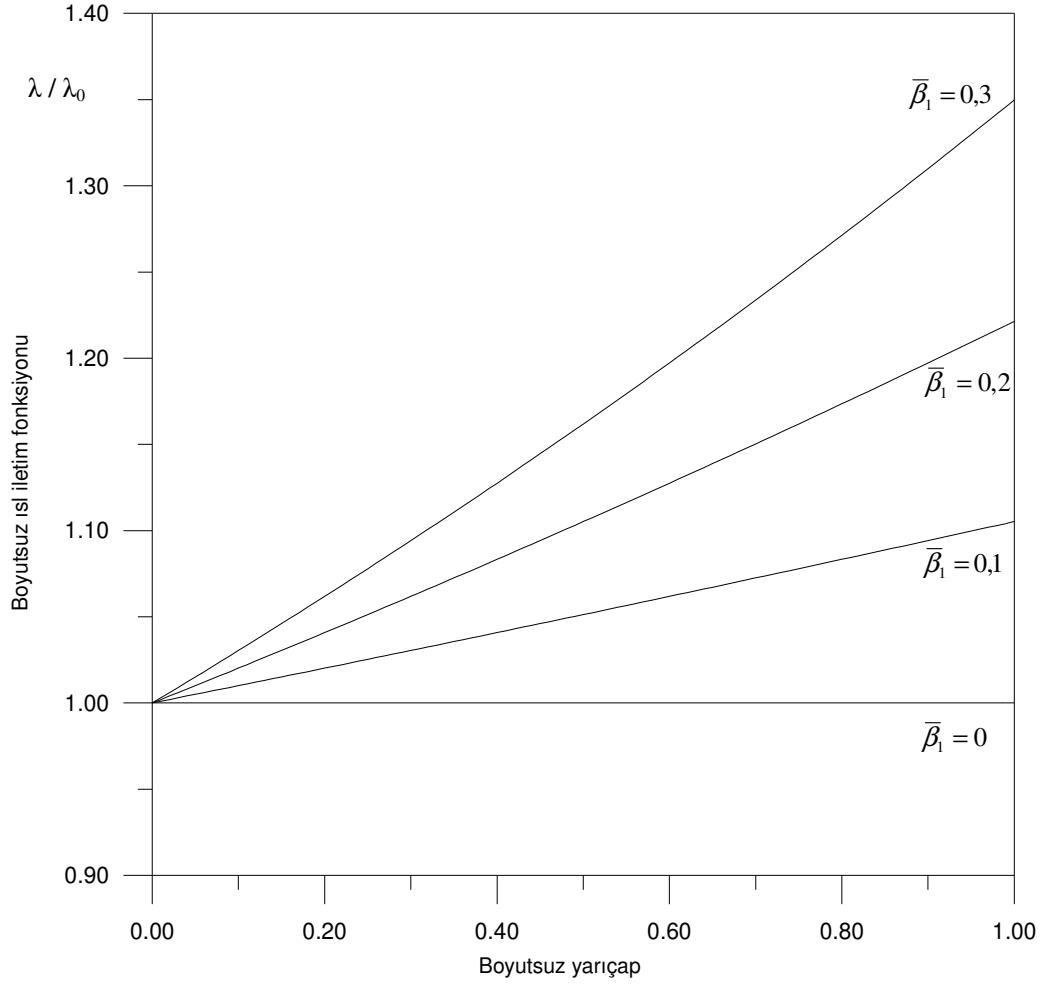
$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = e^{\bar{r}\bar{\beta}_1} \quad (6.4)$$

Eş. 6.4 kullanılarak malzemenin bu özelliğini gösteren grafikler çizilmiştir.  $\bar{\beta}_1 = 0$  seçilirse, elde edilen sonuç homojen izotropik bir malzemenin gösterdiği bir özellik olacaktır.

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = e^0 = 1 \quad (6.5)$$

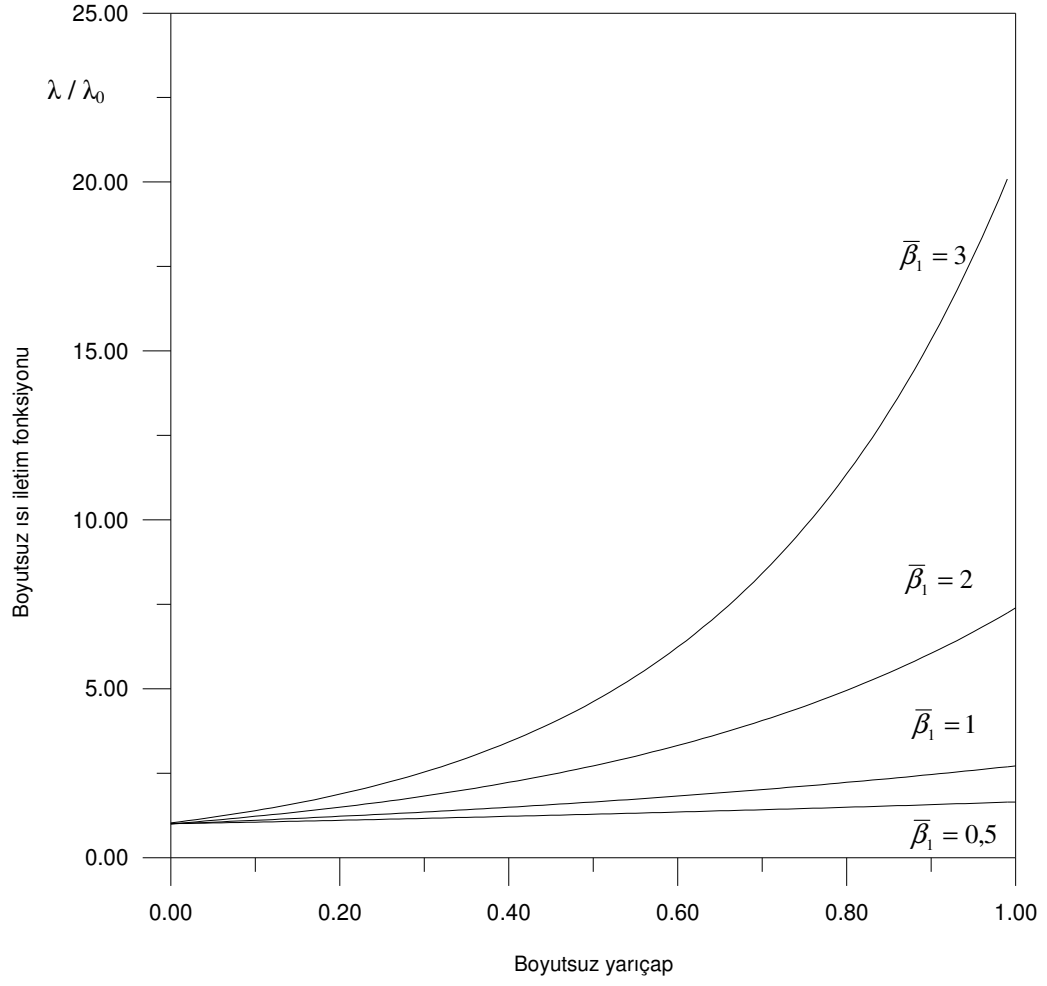
$\bar{\beta}_1 = 1$  seçilirse, görülecektir ki ısı iletkenlik radyal doğru ıtı boyunca eksponansiyel olarak değişmektedir.

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = e^r \quad (6.6)$$

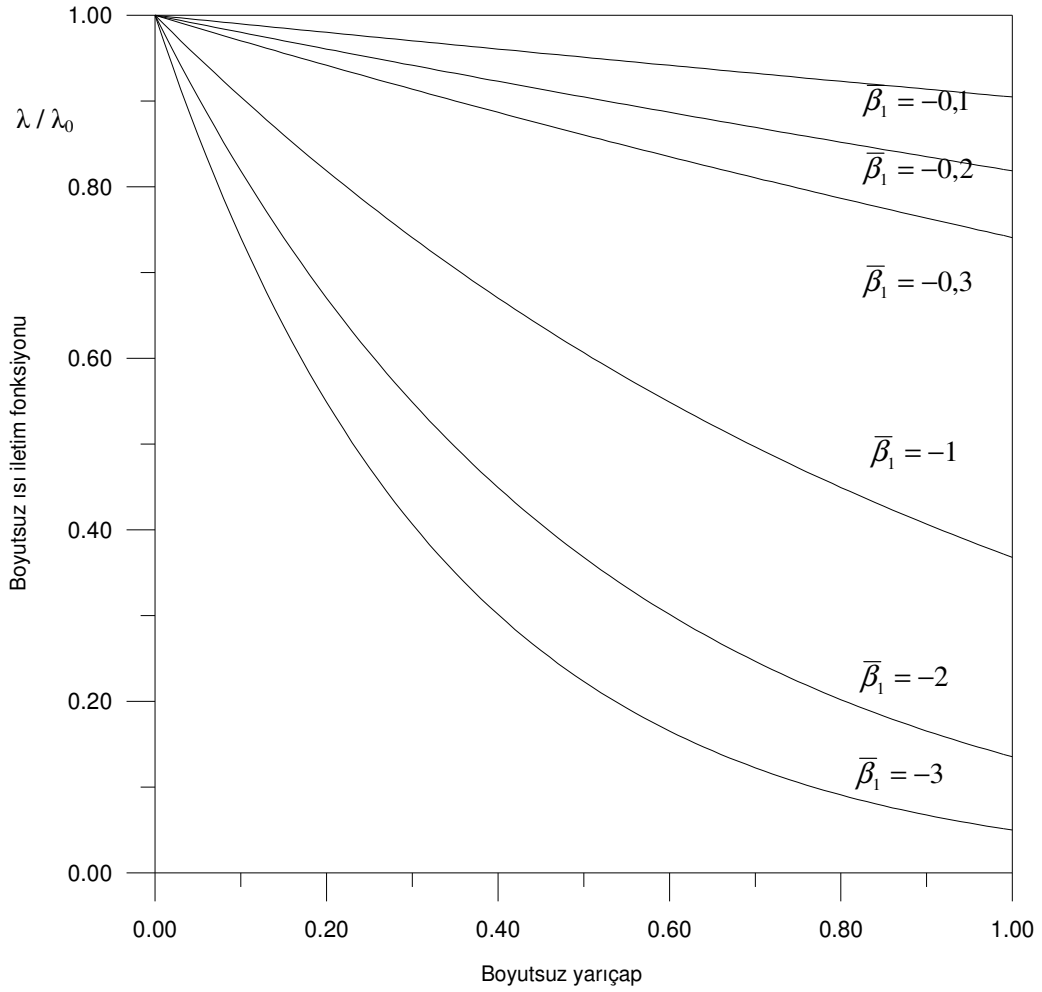


Şekil 6.1. Çeşitli  $\bar{\beta}_1$  değerleri için ısı iletim fonksiyonu

Daha küçük  $\bar{\beta}_1$  değerleri için ısı iletkenlik silindir boyunca doğrusala yakın bir şekilde artarken, daha büyük  $\bar{\beta}_1$  değerlerinde bu değişim daha üst dereceden eğrilerle daha hızlı olmaktadır (Bkz. Şekil 6.2). Bu da, FDM malzemenin üretimi sırasında yapılan malzeme tercihlerine ve üretim yönteminin kendisine bağlıdır.



Şekil 6.2. Çeşitli pozitif daha büyük  $\bar{\beta}_1$  değerleri için ısı iletim fonksiyonu



Şekil 6.3. Negatif  $\bar{\beta}_1$  değerleri için ısı iletim fonksiyonu

Isıl iletim özelliği,  $\bar{\beta}_1$  katsayısının negatif değerler almasıyla silindir merkezinden yüzeye doğru gittikçe azalan bir meyil gösterir. FDM silindir, ısı iletim malzeme özelliği için her biri sabit sayısal değerler alan sonsuz sayıda tabakalar halinde düşünülecek olursa yüzeyde ısı iletim katsayısının merkezde aldığından çok daha düşük bir değer aldığı kabul edilebilir.

### 6.1.2. Elastisite fonksiyonu

Bir malzeme kendisine uygulanan yükler kaldırılınca orijinal yüksüz şekline dönüyorsa elastiktir. Gerilme gerinim arası deneysel bir ilişkiyi veren bu bağıntının

en basit hali, doğrusaldır ve Hooke Kanunu ile ifadelendirilir [25]. Bu özellik, FDM'lerde oluşan termal ve mekanik gerilme incelemelerinde çok önemli bir rol oynamaktadır. Bu problemde de silindirin FDM malzemeden yapılmış olması sonucu, elastisite (Young) modülü radyal yönde bir fonksiyona bağlı olarak değişmektedir.

Silindir içi dolu olduğu için,  $r = 0$ 'da elastisite sonlu bir değerde olmalıdır. Bu nedenle aşağıdaki fonksiyon seçilmiştir:

$$E = E_0 e^{r\beta_2} \quad (6.7)$$

$E_0$ , elastisite modülünün ilk değeridir ve  $\beta_2$ , sabit bir sayıdır. Boyutsuzlaştırma yapıldığı zaman Eş. 6.7, Eş. 6.9'a dönüşür.

$$\bar{\beta}_2 = a\beta_2 \quad (6.8)$$

$$\bar{E} = \frac{E_0}{\sigma_0} e^{\bar{r}\bar{\beta}_2} \quad (6.9)$$

Aşağıdaki grafikler ise fonksiyonun ilk değerine bölünmesine bağlı olarak çizilmiştir. Pozitif ve negatif değerler verildiğinde bu fonksiyonun fiziksel anlamı, ısı iletim fonksiyonuna ait şekillerle aynıdır (Bkz. Şekil 6.1 – Şekil 6.3).

$\bar{\beta}_2 = 0$  olması halinde elastisite modülü  $E_0$  değerine eşit olur, homojen izotropik bir malzeme davranışı söz konusudur.

$\bar{\beta}_2$  değeri pozitif veya negatif değerlerin fonksiyona olan etkileri için Şekil 6.2 ve Şekil 6.3 incelenebilir.

### 6.1.3. Isıl genleşme fonksiyonu

Bu problemde parça ara yüz içermemekte ve malzeme özellikleri yumuşak geçişle (fonksiyonlarla) değişmektedir. Isıl genleşme katsayısı ( $\alpha$ ), bu problemde radyal yönde değişen sıcaklık fonksiyonu ile devreye girecektir.

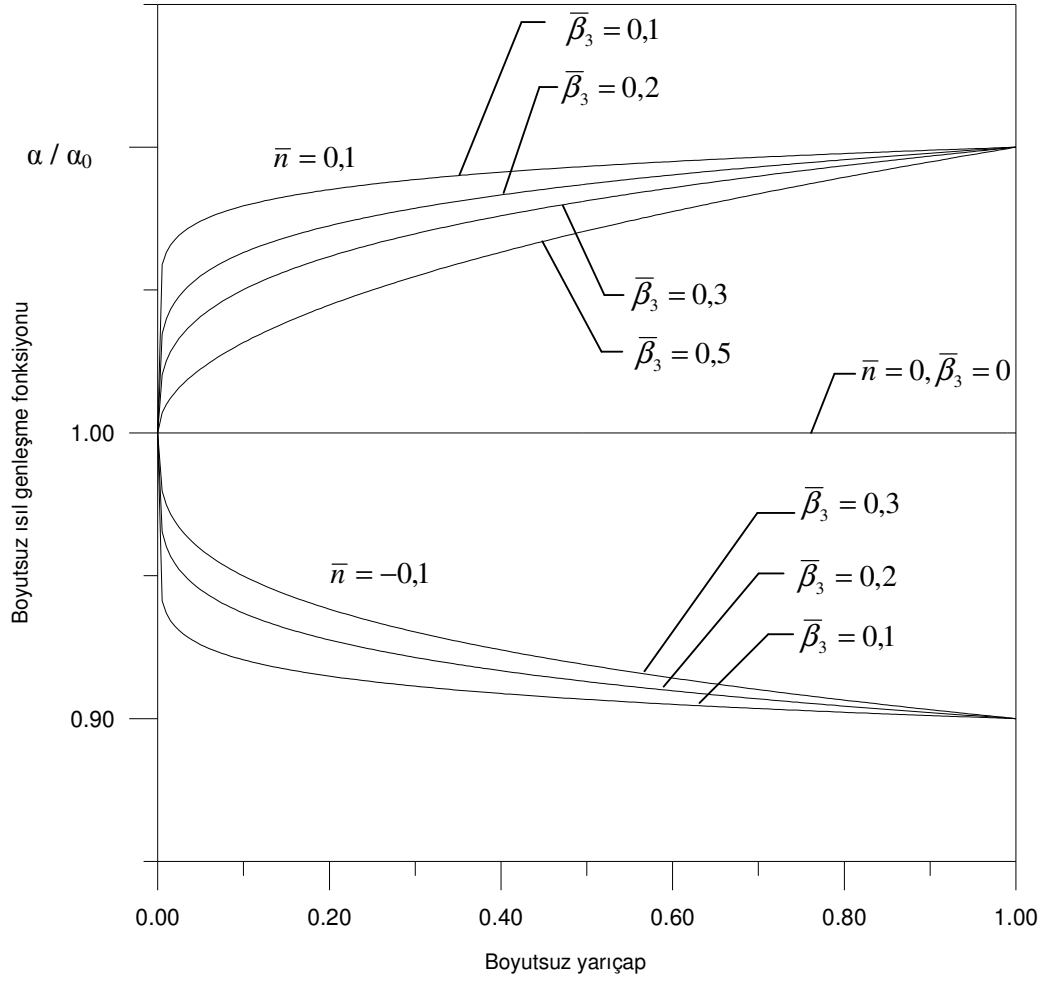
Isıl genleşme katsayısının Elastisite ile birlikte radyal yönde değiştiği kabulüyle yapılmış bir araştırma da Zimmerman ve Lutz'a aittir [38].

Bu fonksiyon da radyal yönde değişecek şekilde seçilmiştir ve  $n$  bir sabit değer olmak üzere ( $1/m$ ) birimine sahiptir.  $n$  parametresi, elastisite veya ısı iletim fonksiyonuna göre bir adet parametre fazladan içermekte, bu da FDM silindirin malzeme özellikleri fonksiyonlarla belirlenirken bu özelliği ifade eden fonksiyon açısından kullanıcıya biraz daha özgürlük veya seçenek sağlamaktadır.

$$\alpha = \alpha_0 (1 + nr^{\beta_3}) \quad (6.10)$$

$$\bar{\beta}_3 = a\beta_3 \quad (6.11)$$

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = 1 + \bar{n}\bar{r}^{\bar{\beta}_3} \quad (6.12)$$

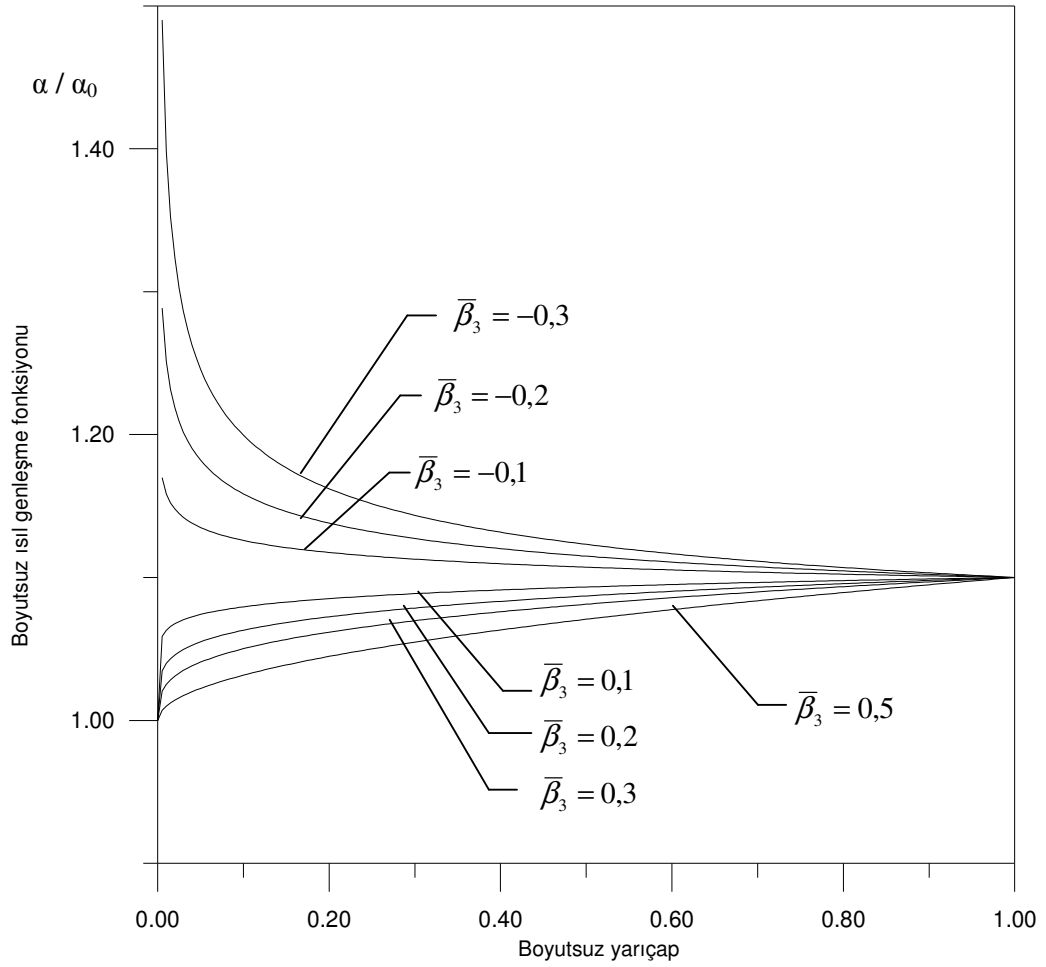


Şekil 6.4.  $\bar{n} = \pm 0,1$  ve pozitif ve negatif  $\bar{\beta}_3$  değerleri için ısı genleşme fonksiyonu

Şekil 6.4'te de görülebileceği gibi ısı genleşme, Eş. 6.12 ile tanımlanan biçimi uyarınca silindir merkezinde belli bir değerden başlamakta ve dış yüzeye doğru gittikçe yavaşlayan bir artış göstermektedir ve dış yüzeyde belli bir değere eşit olmaktadır.

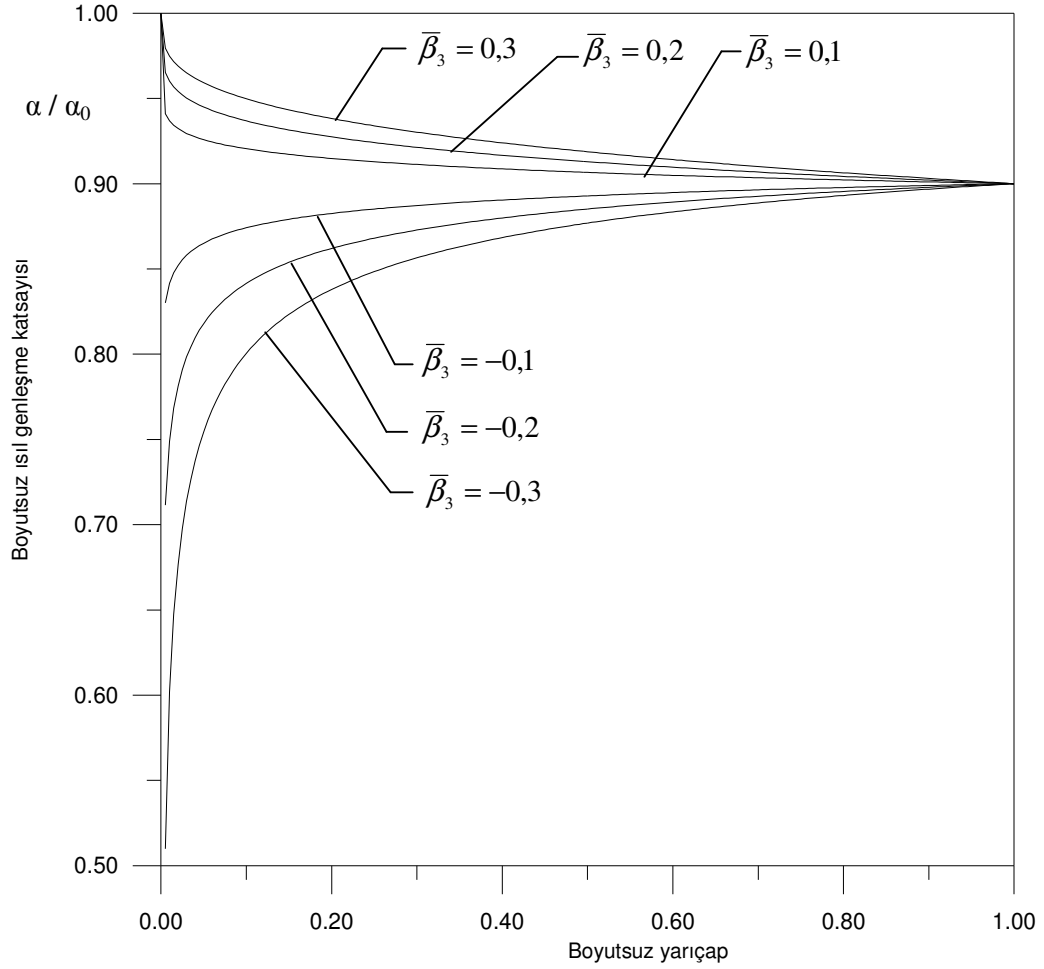
Aynı şekil  $\bar{n}$  parametresinin pozitif veya negatif oluşunun etkisini de göstermektedir.





Şekil 6.5.  $\bar{n} = 0,1$  ile pozitif ve negatif  $\bar{\beta}_3$  değerleri için ısı genleşme fonksiyonu

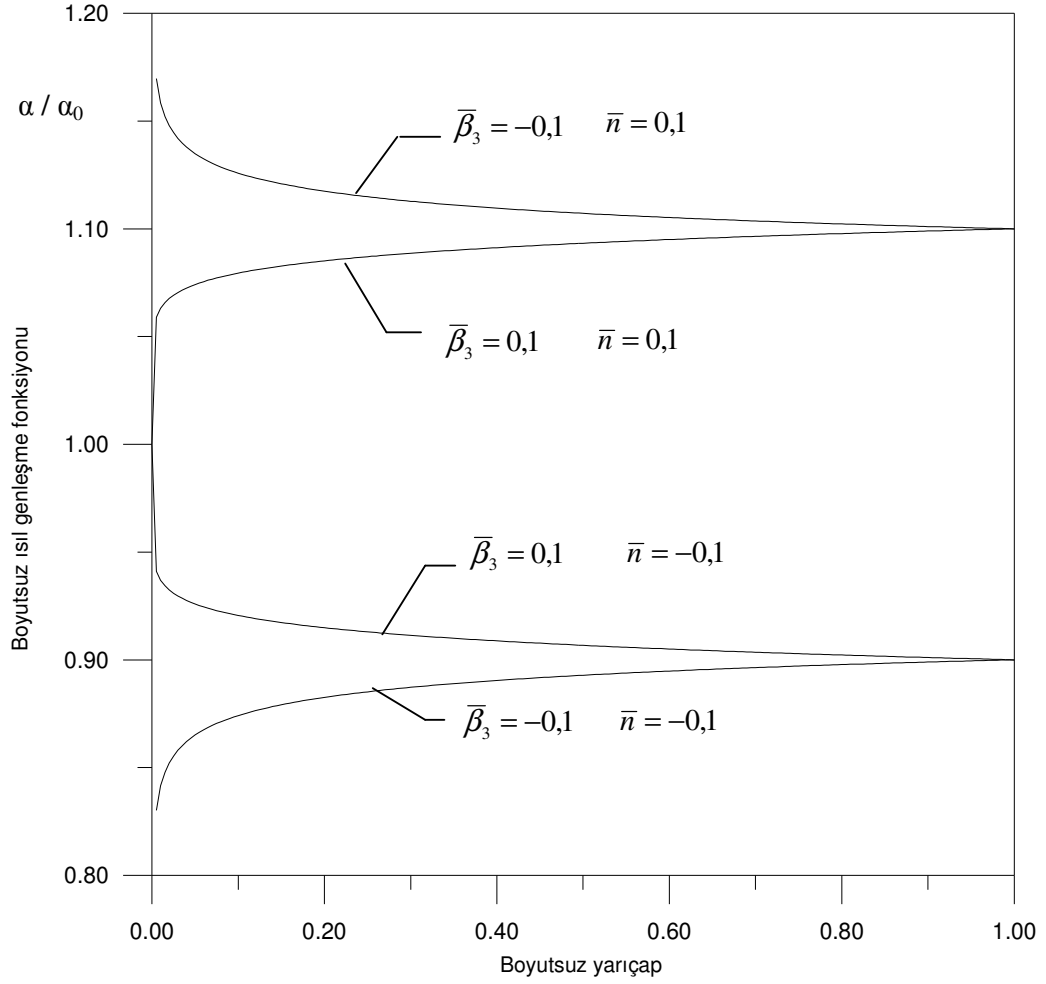
$\bar{n}$  parametresi pozitif olduğu zaman pozitif  $\bar{\beta}_3$  değerleri, beklendiği gibi FDM silindirin yüzeyine doğru ısı genleşme değerleri artar.  $\bar{\beta}_3$  değeri negatif olduğu zaman fonksiyon oldukça yüksek değerlerden azalır tüm eğriler yüzeyde sabit bir değerde birleşirler.



Şekil 6.6.  $\bar{n} = -0,1$  ile pozitif ve negatif  $\bar{\beta}_3$  değerleri için ısı genleşme fonksiyonu

$\bar{n}$  parametresi negatif olduğu zaman pozitif  $\bar{\beta}_3$  değerlerine rağmen FDM silindirin yüzeyine doğru ısı genleşme değerlerinin artışı yavaşlamaktadır. Her iki parametrenin de negatif olduğu durum fonksiyonda genel anlamda artırıcı etki yapmaktadır.

Görüldüğü gibi  $\bar{n}$  ve  $\bar{\beta}_3$ , sırayla pozitif ve negatif oldukları durumlarda birbirlerine göre ters etkiler yaratmaktadırlar. Bu etki Şekil 6.7'de daha net görülebilir.



Şekil 6.7.  $\bar{n} = \pm 0,1$  ile pozitif  $\bar{\beta}_3$  değerleri için ısı genleşme fonksiyonu

Görüldüğü gibi  $\bar{n}$  parametresinin negatif bir değer alması, fonksiyonun başlangıç değerini genel olarak düşürmüştür.

Isıl genleşme katsayısının negatif değerlerde olduğu malzemeler üretilmişse de, bu malzemeler kararlı değildirler [41]. Bu nedenle bu problemde ısı genleşme katsayısı hep pozitif değerler aralığında olacaktır.

## 6.2. Metal ve Seramiklerin Isıl ve Mekanik Özellikleri ile Bu Problemdeki FDM Silindir için Belirlemeler

Metal ve seramiğin iç içe bulunduğu FDM gibi özel bir malzemeyi incelerken öncelikle bu iki malzeme tipinin özellikleri ayrı ayrı anımsanmalıdır. Bilindiği gibi metaller,

- daha düşük sıcaklıklarda eriyen
- elektrik ve ısıyı oldukça iyi ileten
- çekme deneylerinde sünek davranışlar (akma) gösteren
- elastisite modülleri daha düşük değerlerde olan
- ısıl genleşme özellikleri (plastiklere göre çok iyi olmasa da) ortalama değerlerde bulunan

malzemelerdir. Seramikler ise,

- oldukça yüksek sıcaklıklara dayanan
- elektrik ve ısı iletimi metallere göre oldukça zayıf
- çekme deneyinde kırılma davranış (kopma) gösteren
- elastisite modülleri yüksek
- ısıl genleşme özellikleri de oldukça sınırlı

malzemelerdir.

Bu özelliklerle ilgili bazı karşılaştırmalı sayısal değerler Çizelge 6.1’de verilmiştir.

Pratikte uygulanan FDM üretim yöntemlerinin de etkisiyle genellikle silindir geometrideki FDM parçalar, merkezde metalik, dış yüzeye doğru ise seramikleşen bir yapı şeklinedirler (Bkz. Şekil 2.2). Literatürdeki silindirik FDM parçaların incelemelerinde de benzer bir tercih söz konusudur. Bunun bir nedeni ise parçaların çalıştığı koşullarda çok yüksek sıcaklıkların olmasıdır ve yüzeye doğru seramikleşen bir FDM parça bu koşullarda daha dayanıklı olacaktır.

Dış yüzeyi metal, merkezinde seramik bulunan bir FDM, yüksek sıcaklıklardaki çalışma koşulları için ideal değildir. Çünkü dış yüzeyi ısı yük nedeniyle hemen akma gösterecektir ve kısa sürede seramik malzeme açığa çıkacaktır. Bu da arzulanan bir şey değildir.

Çizelge 6.1. Seramik ve çeşitli metal alaşımlarının ısı ve mekanik özellikleri [51]

	Refraktör Seramikler ( $Al_2O_3$ )	Alüminyum (1060)	Alüminyum alaşımı (2014) <sup>1</sup>	Bakır alaşımı (172) <sup>2</sup>
Isıl özellikler				
Ergime noktası (°C)	2015	646 – 657	510 – 638	860 – 892
Özgül ağırlık ( $g/cm^3$ )	3,45 – 3,85	2,713	2,796	8,1930 – 8,249
Isıl iletim kats. ( $kCal/sa/cm^2C$ )	12,65 – 21,58	190	165	92 – 112
Isıl genişleme kats. $10^6 (1/°C)$	3,1 – 4,7	23,6	23 – 24,5	16,7
Mekanik özellikler				
Elastisite modülü $10^3 (kg/cm^2)$	2250 – 3515	703	745	1335
Çekme dayanımı ( $kg/cm^2$ )	1405 – 2740	703 – 1336	1900	4220 – 5623
Eğilme dayanımı ( $kg/cm^2$ )	2885 – 3305			
Basma dayanımı ( $kg/cm^2$ )	17580 – 28125			
Kesme dayanımı ( $kg/cm^2$ )	-	211 – 457	1265	3515 – 4220
Akma dayanımı ( $kg/cm^2$ )	-	281 – 1266	985	35 – 50
Sertlik	9 Moh	19 HB	45 HB	50 – 65 HB

<sup>1</sup> Cu: 3,9 – 5,0

Si: 0,5 – 1,2

Mn: 0,4 – 1,2

Mg: 0,2 – 0,8

<sup>2</sup> Cu: 97,9

Be: 1,9

Co: 0,20

Bu çalışmadaki FDM silindir de, merkezde metal malzeme yüzeye doğru ise seramik yüzdesi artmaya başlayan bir yapıdadır. Buna göre merkezde akma incelenirken, sünek malzemelerin akması konusunda geçerli olan Tresca akma şartı kullanılmıştır. Silindirin dayanabileceği kritik yük ekseninde akma meydana gelen metal ile sınırlıdır. Seramik yüzey ise o ısıl yük değerinde henüz akmaz.

### 6.3. Sıcaklık Dağılımı ve Isıl Sınır Şartları

Bölüm 5'te de verildiği gibi silindirik koordinat sisteminde, üç asal doğrultuda ve zamana bağlı ısı iletim denklemi [39],

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q''' = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6.13)$$

Sıcaklık  $z$  ve  $\theta$  doğrultusundaki değişimlere bağlı olmadığı ve kararlı bir durum söz konusu olduğu zaman, ısı iletim denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \lambda r \frac{dT}{dr} \right) + q''' = 0 \quad (6.14)$$

Problemimizde ısı iletim katsayısı radyal doğrultuda değişmektedir. Bu nedenle Eş. 6.14 aşağıdaki eşitliğe dönüşür.

$$\frac{d}{dr} \left( \lambda_0 e^{r\beta_1} r \frac{dT}{dr} \right) = -q''' r \quad (6.15)$$

Eşitliğin sol tarafındaki terimlerin türev alınarak açılırsa aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \left( \beta_1 + \frac{1}{r} \right) \frac{dT}{dr} + \frac{q'''}{\lambda_0 e^{r\beta_1}} = 0 \quad (6.16)$$

Yukarıda verilen denklem ikinci mertebeden homojen olmayan bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemde, malzemenin bir FDM olması nedeniyle  $\beta_1$  parametresinin etkisi görülebilir. Denklemin çözümü aşağıda verildiği şekildedir:

$$T(r) = \frac{q'''}{2\lambda_0\beta_1^2} e^{-r\beta_1} (1 + r\beta_1) + c_1 \int \frac{1}{r} e^{-r\beta_1} dr + c_2 \quad (6.17)$$

Denklemden yer alan integral, Eksponansiyel integral ismiyle anılır ve söz konusu integralin ilk dört teriminin seri açılımı aşağıdaki gibidir:

$$Ei(\bar{z}) = \int_{-\bar{z}}^{\infty} \frac{e^{-\bar{t}}}{\bar{t}} d\bar{t} = e^{\bar{z}} \left[ \frac{1}{\bar{z}} + \left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^4 + \dots \right] \quad (6.18)$$

Eş. 6.17'deki  $c_1$  ve  $c_2$  integral sabitleri ısı sınır şartları ile belirlenir.

Bölüm 5'te homojen izotropik silindir için belirlenen sınır şartları FDM silindir için de geçerlidir. Yine, FDM silindir için de taşınım sınır şartının varlığı ve yokluğu olmak üzere iki farklı sıcaklık dağılımı fonksiyonu elde edilecektir.

Isıl sınır şartları iki tanedir ve şu şekildedirler;

1. Merkezdeki sıcaklık sonlu bir değer olmalıdır.

$$T(r=0) = \text{sonlu} \quad (6.19)$$

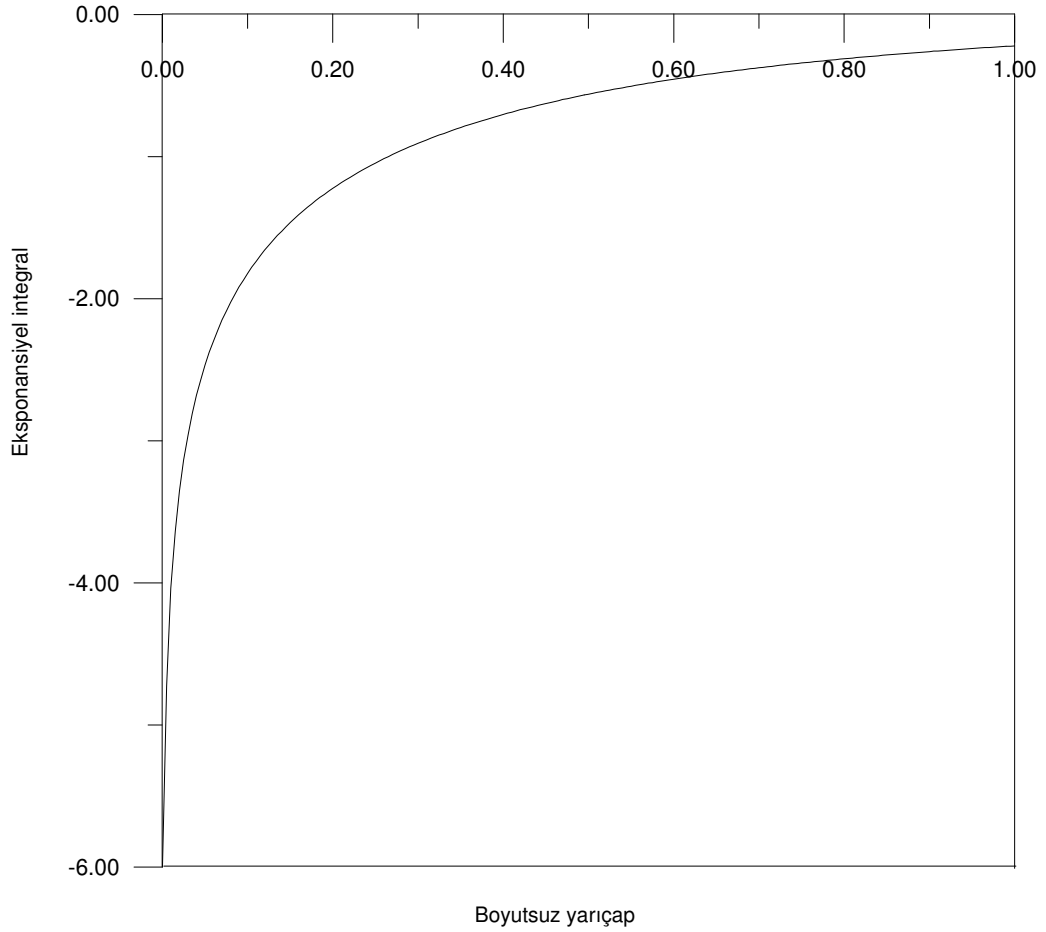
2. a) Belirli ve sabit yüzey sıcaklığı değeri için:

$$T(a) = T_0 = 0^\circ\text{C} \quad (6.20)$$

b) Yüzeydeki ısı iletimi ile konveksiyon ısı transferi miktarı birbirine eşittir.

$$-\left(\lambda \frac{dT}{dr}\right)_{r=a} = h(T(a) - T_f) \quad (6.21)$$

Eş. 5.20 ile verilen ilk ısı sınır şartının uygulanabilmesi için, Eş. 6.17'de yer alan eksponansiyel integralin  $r=0$ 'da nasıl bir değere ulaştığı incelenmelidir.



Şekil 6.8. Eksponansiyel integralin değişimi

Şekil 6.8 incelenirse bu integral değeri, silindir merkezinde yani  $\bar{r}=0$ 'da eksi sonsuz ( $-\infty$ ) değerine gitmektedir. Öyleyse bu sınır şartının sağlanması için bu terimin Eş. 6.17'den elenmesi gereklidir, bu da başındaki integral katsayısının sıfıra eşit olmasıyla sağlanacaktır:



$$c_1 = 0 \quad (6.22)$$

Buradan sıcaklık dağılımı fonksiyonu aşağıdaki hale gelir:

$$T(r) = \frac{q'''}{2\lambda_0} \frac{(1+r\beta_1)}{\beta_1^2} e^{-r\beta_1} + c_2 \quad (6.23)$$

### 6.3.1. Referans yüzey sıcaklığındaki FDM silindir için sıcaklık dağılımı

Herhangi bir akışkanın bulunmadığı referans yüzey sıcaklığı belirtilmiş bir durum için, Eş. 6.20 ile verilen ikinci sınır şartı uygulanırsa ikinci integral sabiti aşağıdaki gibi bulunur:

$$c_2 = \frac{-q'''}{2\lambda_0\beta_1^2} (1+a\beta_1) e^{-a\beta_1} \quad (6.24)$$

Akışkan yokluğunda referans yüzey sıcaklığındaki FDM silindir için sıcaklık dağılımı ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$T(r) = \frac{q'''}{\lambda_0} \frac{1}{2\beta_1^2} \left[ (1+r\beta_1) e^{-r\beta_1} - (1+a\beta_1) e^{-a\beta_1} \right] \quad (6.25)$$

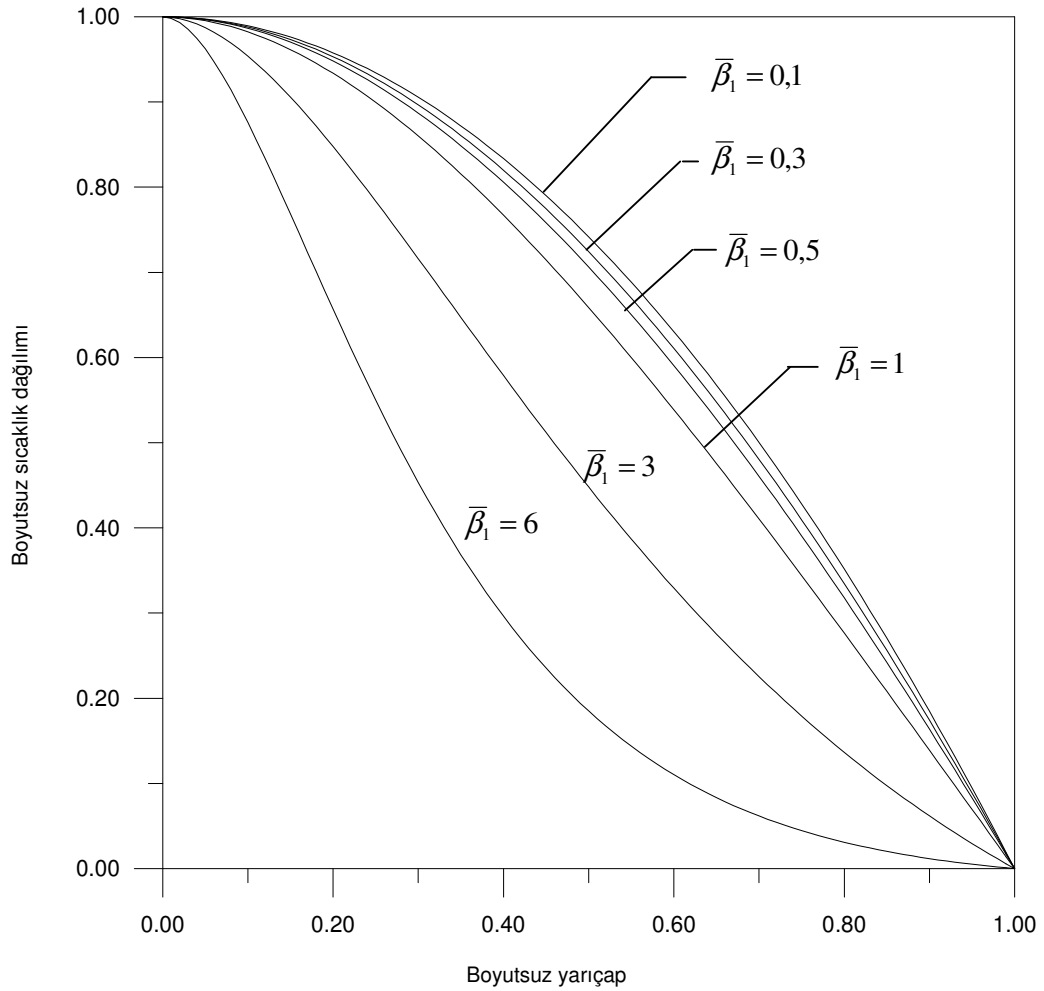
Burada FDM silindirin yüzey ve merkez sıcaklık değerleri, Eş. 6.25'ten aşağıdaki gibi bulunur:

$$T(a) = T_s = 0^\circ\text{C} \quad (6.26)$$

$$T(0) = T_c = \frac{q'''}{\lambda_0} \frac{1}{2\beta_1^2} \left[ 1 - (1+a\beta_1) e^{-a\beta_1} \right] \quad (6.27)$$

Görüldüğü gibi FDM silindirin yüzey sıcaklığı (ısıl sınır şartında da belirtildiği gibi) referans sıcaklıktadır; merkez sıcaklık değerine ise sadece hacimsel iç enerji üretimi ve ısı iletim katsayısı ilk değeri değil, artık  $\beta_1$  parametresi de etki etmektedir. Referans yüzey sıcaklığındaki FDM silindir için Eş. 6.25 ile ifade edilen sıcaklık dağılımı, merkez sıcaklık değerine bölünerek boyutsuzlaştırılabilir:

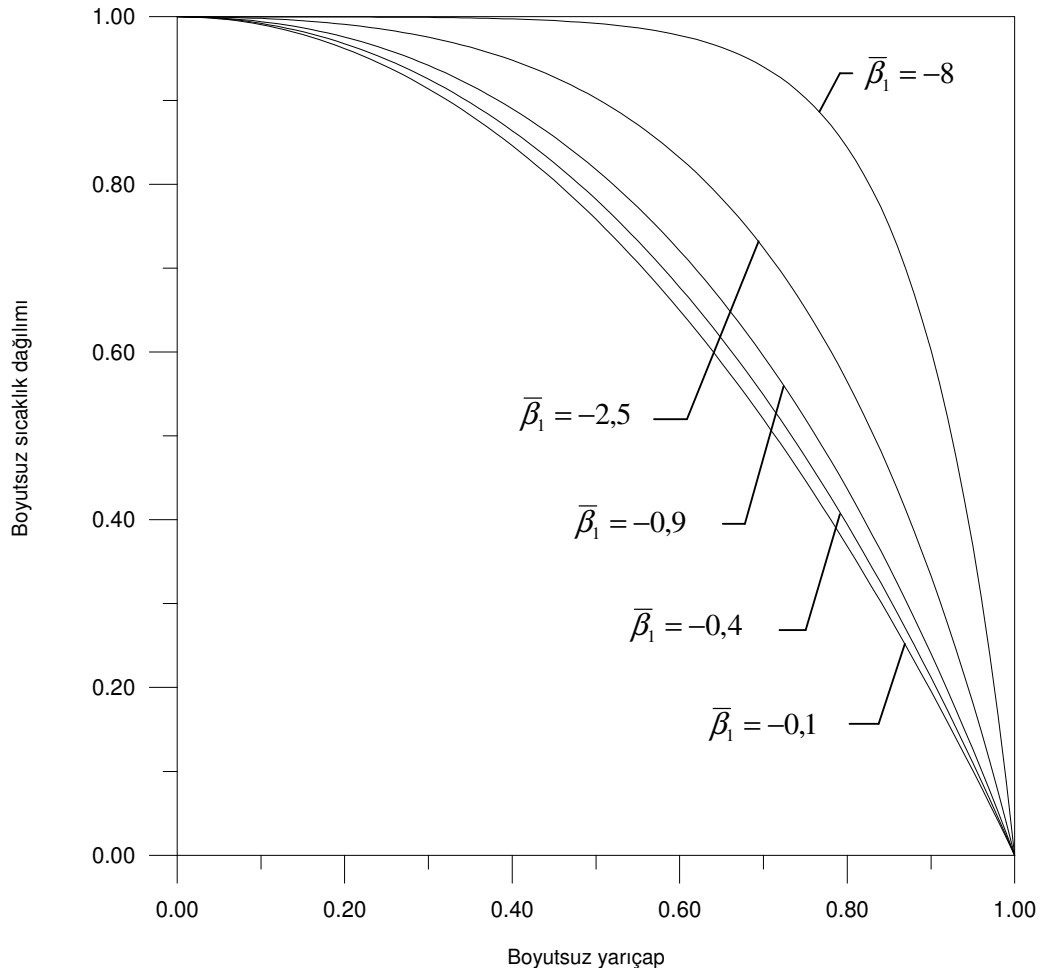
$$\bar{T}(\bar{r}) = \frac{(1 + \bar{r}\bar{\beta}_1)e^{-\bar{r}\bar{\beta}_1} - (1 + \bar{\beta}_1)e^{-\bar{\beta}_1}}{1 - (1 + \bar{\beta}_1)e^{-\bar{\beta}_1}} \quad (6.28)$$



Şekil 6.9. Referans yüzey sıcaklığındaki FDM silindirde çeşitli pozitif  $\bar{\beta}_1$  değerleri için boyutsuz sıcaklık dağılımı

Eş. 6.28'den faydalanılarak, referans yüzey sıcaklığındaki FDM silindirin sıcaklık dağılımı yukarıdaki şekilden incelenebilir. Şekil 6.9'dan da görülebilir ki pozitif olarak artan  $\bar{\beta}_1$  değeri, daha etkin bir ısı iletimine dolayısıyla homojen izotropik silindirin merkezinden yüzeye doğru sıcaklık değerlerinde daha hızlı bir düşüşe sebep olmaktadır. Yüzeye ulaşıldığında ise referans sıcaklık değerine ulaşılmaktadır.

$\bar{\beta}_1$  değerinin negatif değerler aldığı anda sıcaklık dağılımına yaptığı etki aşağıdaki şekilde incelenebilir.



Şekil 6.10. Referans yüzey sıcaklığındaki FDM silindirde çeşitli negatif  $\bar{\beta}_1$  değerleri için boyutsuz sıcaklık dağılımı

$\bar{\beta}_1$  değerinin negatif bir değer alması, ısı iletim fonksiyonunun bildiğimiz mantığının tersi yönde fiziksel etki yapması demektir: bu değer arttıkça silindir bilinenin aksine daha fazla ısıyı çevreye yaymayacak, tam tersine zayıflayan bir ısı iletim varmış gibi silindir merkezinden yüzeye doğru daha yavaş bir soğuma gerçekleşecektir. Şekil 6.10'da da görülebileceği gibi negatif olarak artan  $\bar{\beta}_1$  değeri, sıcaklık dağılımında silindir içinde yükseltici etki yapmaktadır.

### 6.3.2. Konvektif ısı sınır şartına sahip FDM silindir için sıcaklık dağılımı

Herhangi bir akışkanın sebep olduğu ısı taşımının etkin olduğu bir durum için, Eş. 6.21 ile verilen ikinci sınır şartı uygulanırken, akışkan referans sıcaklığının,

$$T_f = 0 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (6.29)$$

olduğu kabul edilmiştir. Böylece Eş. 6.21, aşağıdaki eşitliğe dönüşür:

$$-\left( \lambda_0 e^{r\beta_1} \frac{dT}{dr} \right)_{r=a} = hT(a) \quad (6.30)$$

Eş. 6.30'da yer alan parantez içerisinde yerleştirmek üzere Eş. 6.23 ile ifade edilmiş olan sıcaklık fonksiyonunun radyal yönde birinci dereceden türevi alınır;

$$T'(r) = -\frac{q'''}{2\lambda_0} r e^{-r\beta_1} \quad (6.31)$$

Eş. 6.31'in kullanılmasıyla ikinci integral sabiti aşağıdaki gibi bulunur:

$$c_2 = \frac{q'''a}{2h} - \frac{q'''}{2\lambda_0\beta_1^2} (1 + a\beta_1) e^{-a\beta_1} \quad (6.32)$$

Bulunan  $c_2$  değeri, Eş. 6.23'de yerleştirilirse taşınım sınır şartına sahip FDM silindir için sıcaklık fonksiyonu elde edilir.

$$T(r) = \frac{q'''}{2\lambda_0\beta_1^2} \left( (1+r\beta_1)e^{-r\beta_1} - (1+a\beta_1)e^{-a\beta_1} \right) + \frac{q'''}{2h} \quad (6.33)$$

Birim kontrolleri yapılacak olursa, homojen hale getirilmemiş bu denklemin sonucunda, °C birimi elde edilir. Merkezdeki sıcaklık ise aşağıdaki gibidir:

$$T(0) = T_c = \frac{q'''}{2\lambda_0\beta_1^2} \left( 1 - (1+a\beta_1)e^{-a\beta_1} \right) + \frac{q'''}{2h} \quad (6.34)$$

Yüzey sıcaklık değeri aşağıdaki gibidir:

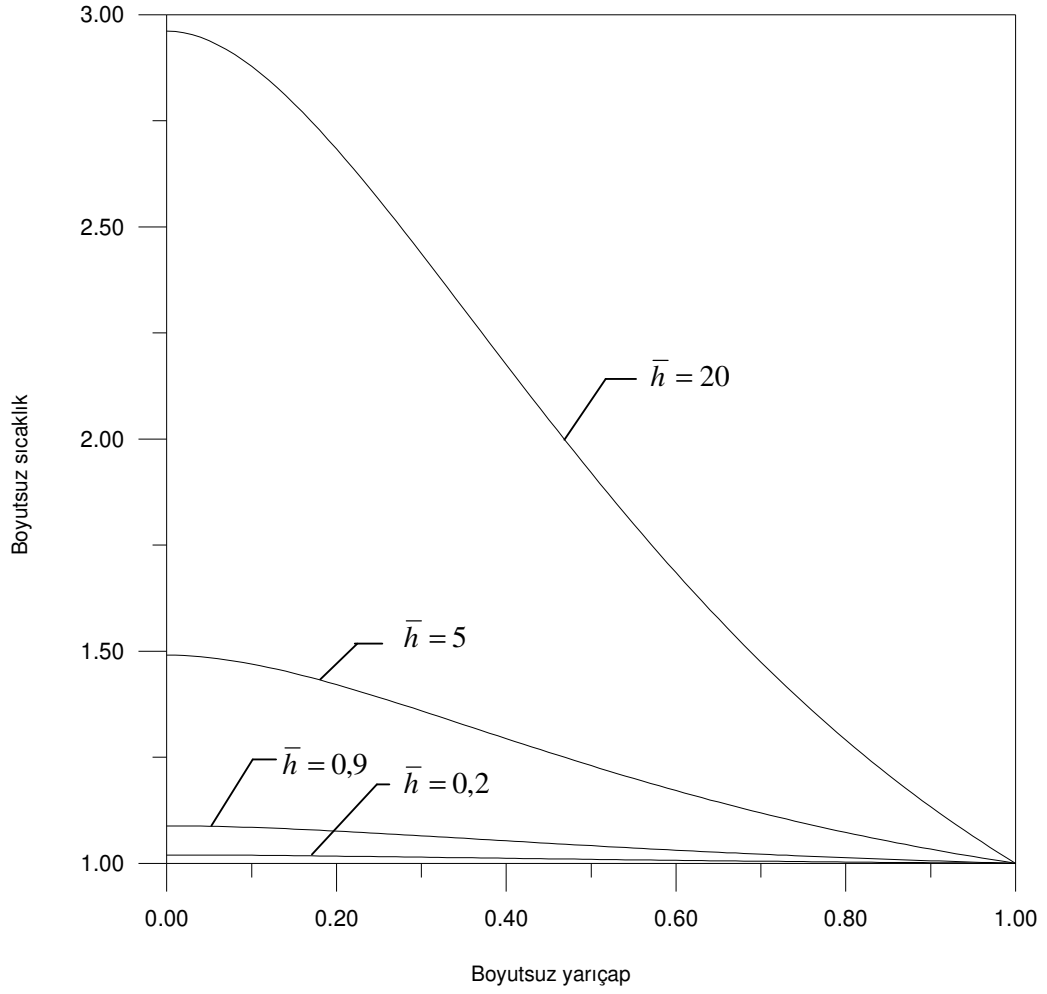
$$T_s = \frac{q'''}{2h} \quad (6.35)$$

Boyutsuz sıcaklık fonksiyonu ise Eş. 6.33 ile verilen yüzey sıcaklık değerine bölünmesiyle elde edilir.

$$\bar{T}(\bar{r}) = 1 + \frac{\bar{h}}{\bar{\beta}_1^2} \left[ (1+\bar{r}\bar{\beta}_1)e^{-\bar{r}\bar{\beta}_1} - (1+\bar{\beta}_1)e^{-\bar{\beta}_1} \right] \quad (6.36)$$

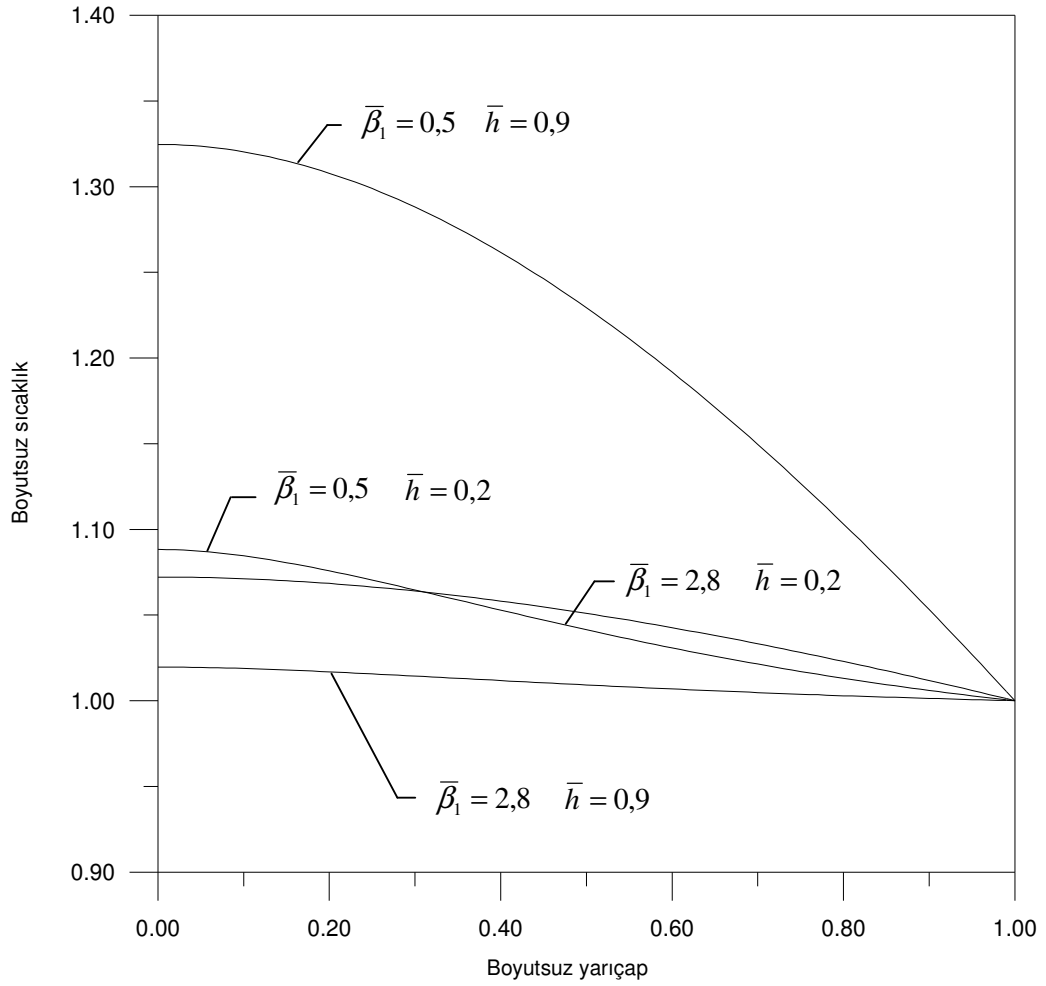
$$\bar{h} = \frac{ha}{\lambda_0} \quad (6.37)$$

Eş. 6.36, FDM silindir için sıcaklık dağılımını hacimsel iç enerji üretimi parametresinden bağımsız olarak ifade etmektedir. Burada dağılımı etkileyen faktörler boyutsuz taşınım katsayısı  $\bar{h}$  ve  $\bar{\beta}_1$ 'dir. Bu iki parametrenin aldığı değerler ve sıcaklık dağılımına etkileri aşağıdaki şekillerde incelenebilir.



Şekil 6.11. Çeşitli  $\bar{h}$  ve 2,8 değerinde sabit tutulmuş  $\bar{\beta}_1$  değerlerinin FDM silindirdeki sıcaklık dağılımına etkileri

Görüldüğü gibi sabit  $\bar{\beta}_1$  değerinde artan  $\bar{h}$  değeri, silindir merkezinde daha yüksek bir sıcaklık değerinden daha hızlı bir düşüşe neden olmaktadır.



Şekil 6.12. Çeşitli  $\bar{h}$  ve  $\bar{\beta}_1$  değerlerinin FDM silindirdeki sıcaklık dağılımına etkileri

Şekil 6.12'den de görülebileceği gibi sabit  $\bar{h}$  değerinde artırılan  $\bar{\beta}_1$  değeri, daha iyi bir ısı iletimi sağlayarak FDM silindirin merkez sıcaklığında daha düşük değerlerden başlamaya sebep olur. Tüm parametreler değiştirilse de yüzey sıcaklığı Eş. 6.35 ile verilen değerdir ve tüm eğriler bu noktada birleşirler.

## 7. İKİ UCU SABİT FDM SİLİNDİR İÇİN GERİLME-GERİNİM ANALİZİ

Bu problemde iki özel durum; uçları sabitlenmiş bir FDM silindir ile, uçları serbest FDM silindir için gerilme-gerinim analizleri yapılacaktır.

Düzlem gerinim durumunda incelenen silindir, uzun bir kiriş gibi düşünülebilir. Eğer parçanın z eksenini yönündeki kalınlığı (ya da derinliği), diğer ölçülerine göre çok büyükse, yani parça çok uzunsa, iki ucu ankastre edilerek aksenel yerdeğiştirme engellendiği zaman,

- uçlarda aksenel gerinimler sıfırdır,
- uzunluk boyunca her kesitte aksenel gerilme sıfır kabul edilemez.

Burada tüm aksenel kesitlerinin aynı şartlarda bulunduğu ve aksenel kesitin özelliklerinin, uzunluk ile değişmediği kabul edilmektedir.

### 7.1. Gerilme-Gerinim Analizinde Bilinmeyen Parametreler

Bir gerilme-gerinim analizi yapılırken, problemde:

- gerilme bileşenleri,
- gerinim bileşenleri,
- deplasmanlar (birim uzamalar),
- ankastre uçlarda oluşan tepki kuvvetleri

bilinmemektedir [43].

Silindirik koordinatlarda, gerilme ve gerinim bileşenleri tansörler cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilirler:



$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \gamma_{r\theta} & \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zr} & \gamma_{z\theta} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Ayrıca yerdeğiştirme bileşenleri:  $u_r, u_\theta, u_z$ , ankastre uçlardaki tepki kuvvetleri:  $F_r, F_\theta, F_z$  olarak gösterilir.

Tansörlerde dokuzar adet, yerdeğiştirme bileşenlerinde üç ve tepki kuvvetlerinde üç adet olmak üzere toplam yirmi dört bilinmeyen bulunmaktadır. Bu bilinmeyen sayısı, incelenen durum özelleştikçe azalacaktır.

Gerilme ve gerinim tansörlerinde, diyagonal üzerindeki gerilme ve gerinimler normal, diğerleri ise kayma gerilmeleri ve gerinimleridir. Bu noktada parçanın geometrisinin simetrikliği incelenmelidir. Eksenel olarak simetrik olan bir silindirde gerilme ve gerinim bileşenlerin indisleri yer değiştirirse bile birbirlerine eşittirler.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad (7.3)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (7.4)$$

Gerilme ve gerinim tansörleri aşağıdaki hale indirgenir ve bilinmeyen sayısı on sekize düşer:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \gamma_{r\theta} & \gamma_{rz} \\ \gamma_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{rz} & \gamma_{\theta z} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Yukarıdaki tansörler altışar bilinmeyen içermektedir. Ayrıca yerdeğiştirme değerleri  $(u_r, u_\theta, u_z)$  ve tepki kuvvetleri  $(F_r, F_\theta, F_z)$  de bilinmeyen değerlerdir.

Bu problemdeki sınır şartları ve geometrik özelliklerin incelenmesiyle on sekiz bilinmeyen sayısını daha da azaltılacaktır.

## 7.2. Kullanılacak Denklemler

On sekiz bilinmeyenli simetrik, genel bir problem için silindirik koordinatlarda yerdeğiştirme bileşenleri cinsinden gerinimleri ifade eden altı adet denklem bulunmaktadır. Normal gerinimler, tanım olarak radyal, teğetsel ve aksenal eksenler cinsinden yerdeğiştirme değerlerinin türevlerine eşittir:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (7.7)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad (7.8)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (7.9)$$

Kayma gerinimleri ise tansörlerin simetrik ve simetrik olmayan kısımlarının tanımı itibariyle aşağıdaki şekildedirler:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \quad (7.10)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (7.11)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (7.12)$$

Sıcaklık etkisindeki bir malzeme için asal gerinimler ile gerilmeler arasındaki ilişkileri veren Hooke kanunu ve kayma gerilmeleri ile kayma gerinimleri arasındaki ilişkileri veren diğer üç denklem de aşağıdaki gibidir:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T \quad (7.13)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T \quad (7.14)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha T \quad (7.15)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} \quad (7.16)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\tau_{\theta z}}{G} \quad (7.17)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G} \quad (7.18)$$

Hooke denklemlerinde geçen Poisson oranı  $\nu$ , gözeneksiz pek çok malzeme için 1/3 ila 1/5 arasında değişen sabit değerler alır. Yana doğru genişlemenin boyca uzamaya olan oranı olarak tanımlanan bu oran, en fazla 0,5 değeri alabilir [44].

Ayrıca, Denge Denklemleri de kullanılacaktır:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0 \quad (7.19)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + S = 0 \quad (7.20)$$

Burada  $R$  ve  $S$ , gövde kuvvetleridir.

### 7.3. Silindirdeki Dış Yüklemeler ve Gövde Kuvvetleri

Bu problemde akışkan içerisinde akış yönüne paralel tutulan silindirin ağırlığı ihmal edilmektedir. Bu nedenle uçlarda herhangi bir eğilme oluşmaz.

Akışın paralel olması sayesinde de aksenal veya açısall yönde bir dış kuvvet silindire etkimez. Bu nedenle Eş. 7.19 ve Eş. 7.20 kinematik denklemlerinde geçen  $R$  ve  $S$  gövde kuvvetleri sıfır olur. Aynı sebep nedeniyle ankastre uçlardaki tepki kuvvetlerinden radyal ve teğetsel kuvvetler sıfır olurken, silindirin sıcaklık etkisiyle aksenal olarak genişmesi engellendiği için sadece aksenal kuvvet sıfırdan farklıdır.

$$F_r = 0 \quad (7.21)$$

$$F_\theta = 0 \quad (7.22)$$

Malzemenin mekanik özellikleri sadece radyal yönde değişmektedir. Parçanın aksenal simetrik olması nedeniyle, oluşan gerilme ve gerinimler sadece normal gerilme ve gerinimlerdir ve bunlar da sadece radyal yönde etkili bir değişme gösterirler. Bu demektir ki denklemlerde geçen gerilme ve gerinimlerin açısall ve aksenal yöndeki her türlü kısmi türevi de sıfırdır. Bu sonuçlar yukarıdaki Eş. 7.7 – Eş. 7.20 ile verilen denklemlere uygulanır.

Bu problemde, sadece radyal yönde yerdeğiştirme vardır:

$$u_{\theta} = 0 \quad (7.23)$$

$$u_z = 0 \quad (7.24)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} \quad (7.25)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (7.26)$$

Eş. 7.10 – Eş. 7.12 ile tanımlanan kayma gerinimleri de sifıra eşit olur:

$$\gamma_{r\theta} = 0 \quad (7.27)$$

$$\gamma_{rz} = 0 \quad (7.28)$$

$$\gamma_{\theta z} = 0 \quad (7.29)$$

Kayma gerinimleri sifıra eşit olunca, Eş. 7.16 – Eş. 7.18 ile tanımlanan kayma gerilmeleri de sifıra eşit olur. Böylece bilinmeyen sayısı on bire düşer.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

Eksenel tepki kuvveti ( $F_z$ ) de bir adet bilinmeyeni oluşturmaktadır ve aşağıdaki denklem ile hesaplanır. Uçlar ankastre olduğu için bu değer sıfıra eşit değildir.

$$F_z = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma_z 2\pi r dr d\theta \quad (7.32)$$

Bu sadeleşmeler son olarak Kinematik denklemlere de yansır. Eş. 7.20 tamamen sıfır olurken, Eş. 7.19 şu forma dönüşür:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (7.33)$$

#### 7.4. Yönetici Denklem

Gerilme-gerinim analizine, Eş. 7.13 – Eş. 7.15 ile verilen Hooke kanunu ile başlanabilir. Bu üç gerinim denklemi arasında, düzlem gerinim özelliği kullanılarak bir ilgi kurulmuştur. Düzlem gerinim durumunda eksenel gerinim sıfıra eşittir.

$$\varepsilon_z = 0 \quad (7.34)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) - E\alpha T \quad (7.35)$$

Eş. 7.13 ve Eş. 7.14'te Eş. 7.35 yazılırsa, gerinim bileşenleri gerilmeler ve sıcaklık cinsinden ifade edilir.

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_r - \nu(1+\nu)\sigma_\theta] + (1+\nu)\alpha T \quad (7.36)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_\theta - \nu(1+\nu)\sigma_r] + (1+\nu)\alpha T \quad (7.37)$$

Aynı zamanda, gerilmeler şu şekilde hesaplanır:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta - (1+\nu)\alpha T] \quad (7.38)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r - (1+\nu)\alpha T] \quad (7.39)$$

Eksenel simetrik bir problem için Uygunluk denklemi, aşağıdaki gibidir:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta + r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} \quad (7.40)$$

Eş. 7.36 ve Eş. 7.37 ile bulunan denklemler Eş. 7.40 içerisinde yerleştirilir.

$$\begin{aligned} \left( \frac{1-\nu^2}{E} \right) \sigma_r - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_\theta + (1+\nu)\alpha T &= \left( \frac{1-\nu^2}{E} \right) \sigma_\theta - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_r + (1+\nu)\alpha T \\ &+ r \frac{d}{dr} \left\{ \left( \frac{1-\nu^2}{E} \right) \sigma_\theta - \frac{\nu(1+\nu)}{E} \sigma_r + (1+\nu)\alpha T \right\} \end{aligned} \quad (7.41)$$

Denklem düzenlenirse, gerilmeler, elastisite fonksiyonu ve türevlerinden oluşan bir denklem bulunur.

$$\sigma_\theta' - \left( \frac{\nu}{1-\nu} \right) \sigma_r' + \left( \left( \frac{1}{1-\nu} \right) \frac{1}{r} - \frac{E'}{E} \right) \sigma_\theta - \left( \frac{1}{1-\nu} \right) \left( \frac{1}{r} - \frac{\nu E'}{E} \right) \sigma_r = \frac{-E}{(1-\nu)} (\alpha T)' \quad (7.42)$$

Homojen olmayan kısım ise  $Y(r)$  olarak tanımlanan bir fonksiyon şeklinde gösterilmiştir.

$$Y(r) = \frac{-E}{(1-\nu)} (\alpha T' + T\alpha') \quad (7.43)$$

Eş. 7.42, seçilecek olan herhangi bir  $E(r)$  fonksiyonu ile, şimdiye kadar yapılmış olan bir kısım mekanik ve termal gerilme analizlerinde başvuru olan diferansiyel denklemleri veren en genel gerilme denklemidir. Yine, seçilecek olan  $\alpha(r)$  ve  $T(r)$  fonksiyonları ile analizlerin homojen olmayan kısmı birbirinden farklılaşır.

Eş. 7.42, aynı zamanda homojen ve izotropik bir malzeme için de kullanılabilir. Malzemenin elastisite modülü fonksiyonel olmadığı zaman  $E'$  terimleri sifıra eşit olur ve denklem çözümlerse homojen izotropik silindir için gerilmeler elde edilir. FDM ile homojen izotropik silindirler arasında karşılaştırmalar yapılabilmesi için bu çözümler Bölüm 8'de verilmiştir.

Bu aşamadan sonra uygulanabilecek yöntem, Eş. 7.42'nin tek bir gerilme formuna dönüştürülmesiyle daha doğrudan çözümler aranmasıdır.

Eş. 7.42, denge denklemi olan Eş. 7.33 kullanılarak sadece radyal gerilmeler cinsinden ifade edilecektir. Eş. 7.33'ten teğetsel gerilme çekilir ve türevi alınır, Eş. 7.42'de kullanılmaya hazır hale gelirler:

$$\sigma_{\theta} = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} \quad (7.44)$$

$$\sigma_{\theta}' = r\sigma_r'' + 2\sigma_r' \quad (7.45)$$

Böylece Eş. 7.42'nin ifade ettiği diferansiyel denklem şu şekle dönüşür:

$$\sigma_r'' + \left(\frac{3}{r} - \frac{E'}{E}\right)\sigma_r' - \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)\frac{E'}{E}\frac{\sigma_r}{r} = \frac{1}{r}\left[\frac{-E}{(1-\nu)}(\alpha T)'\right] \quad (7.46)$$

Bu eşitlik, Orcan ile Eraslan'ın çalışmasında bulunan denklem ile örtüşmektedir [20].

Bu denklemde Eş. 5.7 ile verilen elastisite fonksiyonunun türevi yerleştirilecektir:



$$E' = \beta_2 E_0 e^{r\beta_2} \quad (7.47)$$

$$\sigma_r'' - \left( \beta_2 - \frac{3}{r} \right) \sigma_r' - \beta_2 \left( \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \frac{\sigma_r}{r} = f(r) \quad (7.48)$$

$$f(r) = \frac{1}{r} \left[ \frac{-E}{(1-\nu)} (\alpha T' + T \alpha') \right] \quad (7.49)$$

Eş. 7.48 sadece radyal gerilme ve türevlerini içermektedir, homojen ve özel çözümleri yapılnca elde edilecek genel çözüm doğrudan doğruya radyal gerilmenin kendisine eşit olacaktır.

Ayrıca homojen olmayan kısım Eş. 7.43 ile verilen formundan da bir derece azalmıştır.

## 8. BOYUTSUZLAŞTIRMA VE ÇÖZÜMLER

Boyutsuzlaştırma, bir denklemi veya bağıntıyı birimsiz hale getirmektir. Bir diferansiyel denkleme uygulanabileceği gibi, bir çözüm fonksiyonuna da uygulanabilir.

Birimsiz hale gelen çözümler, parametrelerin sadece o probleme mahsus olan sayısal değerlerinden arınmıştır ve bu parametrelerin öteki değişkenler üzerindeki etkileri daha yalın olarak ortaya çıkar. Çizilen grafikler de aynı şekilde son derece büyük veya küçük değerlerden daha sınırlı değerler arasında belirir.

Çözümü yapılmış problemde daha sonradan herhangi bir büyüklük değiştirilmek istenirse, boyutsuzlaştırma işlemlerinde bazı küçük değişiklikler yapılması yeterlidir.

Bu problemde çözüm fonksiyonları Hipergeometrik ve Laguerre gibi sonsuz sayıda terime açılacak seriler içeriği için, aşağıda tekrar verilen Eş. 7.48 ile bulunmuş olan diferansiyel denklem ile Eş. 6.62 homojen olmayan kısmını birimsizleştirmek, bize doğrudan doğruya boyutsuzlaştırılmış homojen ve özel çözümler vereceği için daha pratik olacaktır.

$$\sigma_r'' - \left( \beta_2 - \frac{3}{r} \right) \sigma_r' - \beta_2 \left( \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \frac{\sigma_r}{r} = \frac{Y(r)}{r}$$

Eş. 7.48'de bulunan terimlerin birimleri sırasıyla,  $\sigma_r$ : gerilme değeri,  $N/m^2$ ;  $\nu$ : Poisson oranı, boyutsuzdur;  $r$ : yarıçap, m;  $\beta_2$ : malzeme özelliği katsayısı,  $1/m$ 'dir.

Bu belirlemelerden sonra denklemin homojen kısmının içerdiği birim şu şekilde gösterilir:

$$\text{Birim} = \frac{N}{m^2} - \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \right) \frac{N}{m^2} - \frac{1}{m} \left( \frac{\text{boyutsuz}}{\text{boyutsuz}} \right) \frac{N/m^2}{m} = \frac{N/m^2}{m^2} \quad (8.1)$$

### 8.1. Homojen Kısımın Boyutsuzlaştırılması

Öncelikle denklemin asıl değişkeni olan  $r$ 'nin birimsizleştirilmesi önemlidir. Yarıçapı silindirin yarıçap değeri olan ve birimi de (m) olan  $a$  değerine bölersek birimsiz bir değişken elde edilir. Böylece çözümler, sıfır değeri ile problemde belirlenmiş olan yarıçap sayısal değeri arasında sınırlı olmayacaktır.

$$\bar{r} = \frac{r}{a} \quad (8.2)$$

$r$  'ye bağlı olarak değişen  $\sigma_r$  parametresini birimsizleştirmek için bu değer, silindirin birimi yine (N/m<sup>2</sup>) olan akma gerilmesi değerine bölünmesiyle birimsizleştirilebilir.

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0} \quad (8.3)$$

Burada göz önüne alınması gereken bir nokta, Eş. 8.3 ile ifade edilen radyal gerilmenin birinci ve ikinci türevlerinin nasıl olacağıdır.

$$\sigma_r = \sigma_0 \bar{\sigma}_r \quad (8.4)$$

Eş. 8.4'ün türevi alınırken  $\sigma_0$  katsayısı aynen kalsa bile,  $r$  'ye değil  $\bar{r}$  'ne göre türev alınacağı zaman Eş. 8.2 ifadesindeki ilişki göz önüne alınmalıdır. Buna göre,

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_0}{a} \frac{d\bar{\sigma}_r}{d\bar{r}} \quad (8.5)$$

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} = \frac{\sigma_0}{a^2} \frac{d^2\bar{\sigma}_r}{d\bar{r}^2} \quad (8.6)$$

Homojen kısımdaki boyutlu son değişken  $\beta_2$ 'dir. Bu değerin  $a$  ile çarpımı da onu birimsizleştirecektir.

$$\bar{\beta}_2 = a\beta_2 \quad (8.7)$$

Eş. 7.48'de yerleştirilmek üzere aşığıdaki ifadeler de yazılır:

$$\beta_2 = \frac{\bar{\beta}_2}{a} \quad (8.8)$$

$$r = a\bar{r} \quad (8.9)$$

Eş. 7.48'de Eş. 8.4 – Eş. 8.6, Eş. 8.8 ve Eş. 8.9 yerleştirilirse, aşığıdaki gibi bir denklem oluşur.

$$\frac{\sigma_0}{a^2} \bar{\sigma}_r'' - \left( \bar{\beta}_2 - \frac{3}{\bar{r}} \right) \frac{1}{a} \frac{\sigma_0}{a} \bar{\sigma}_r' - \frac{\bar{\beta}_2}{a} \left( \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \frac{\sigma_0 \bar{\sigma}_r}{a\bar{r}} = f(r) \quad (8.10)$$

İkinci türevin başındaki ve ortak olan katsayılar, (homojen olmayan kısım yok sayılmadan) elenirse,

$$\bar{\sigma}_r'' - \left( \bar{\beta}_2 - \frac{3}{\bar{r}} \right) \bar{\sigma}_r' - \bar{\beta}_2 \left( \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \frac{\bar{\sigma}_r}{\bar{r}} = \frac{a^2}{\sigma_0} f(r) \quad (8.11)$$

## 8.2. Boyutsuz Homojen özüm

Bu denklemin homojen çözümü aşığıdaki gibi bulunur:

$$\bar{\sigma}_{rh} = c_3 U^{\frac{3}{-1+\nu}} (\bar{r} \bar{\beta}_2) + c_4 L_{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}^2 (\bar{r} \bar{\beta}_2) \quad (8.12)$$

### 8.3. Homojen Olmayan Kısımın Boyutsuzlaştırılması

Eş. 7.48 ile verilen homojen olmayan diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümü, Eş. 8.12 ile verilmiştir. Özel çözümün boyutsuzlaştırılabilmesi için  $f(r)$  özel kısmının boyutsuzlaştırılması gereklidir.

$$f(r) = \frac{a^2}{\sigma_0} \frac{1}{r} \left[ \frac{-E}{(1-\nu)} (\alpha T)' \right] \quad (8.13)$$

Bu fonksiyon, önceki bölümlerde belirlenmiş olan elastisite, ısıl genleşme ve sıcaklık fonksiyonları ile türevlerinin kullanılmasıyla açılır.

Taşıyım ısı iletimine sebep olan bir akışkanın varlığında homojen olmayan fonksiyon aşağıdaki şekildedir:

$$f(r) = \frac{a^2}{\sigma_0} \frac{q''' \alpha_0 E_0 e^{r\beta_2}}{2\lambda_0(1-\nu)} \left\{ \left( (1 + nr^{\beta_3}) e^{-r\beta_1} - n \frac{\beta_3}{\beta_1^2} r^{\beta_3-2} ((1 + r\beta_1) e^{-r\beta_1} - (1 + a\beta_1) e^{-a\beta_1}) + \frac{\beta_1^2 \lambda_0 a}{h} \right) \right\} \quad (8.14)$$

Referans yüzey sıcaklığında olan FDM silindir için homojen olmayan fonksiyon ise şu şekildedir:

$$f(r) = \frac{a^2}{\sigma_0} \frac{q''' \alpha_0 E_0 e^{r\beta_2}}{2\lambda_0(1-\nu)} \left\{ \left( (1 + nr^{\beta_3}) e^{-r\beta_1} - n \frac{\beta_3}{\beta_1^2} r^{\beta_3-2} ((1 + r\beta_1) e^{-r\beta_1} - (1 + a\beta_1) e^{-a\beta_1}) \right) \right\} \quad (8.15)$$

Bu denklemdaki değişken ve sabitlerin birimleri incelenmelidir:

$$\begin{array}{ll}
q''' \rightarrow W/m^3 & a, r \rightarrow m \\
E_0 \rightarrow N/m^2 & \sigma_0 \rightarrow N/m^2 \\
\alpha_0 \rightarrow 1/^\circ C & \lambda_0 \rightarrow W/m^\circ C \\
h \rightarrow W/m^2 \cdot ^\circ C & \beta_1 \rightarrow 1/m \\
\beta_2 \rightarrow 1/m & n \rightarrow 1/m
\end{array}$$

Eş. 8.14'te bir ekleme, çıkarma, yeni değerlerle çarpma veya bölme yapmadan denklemin bütünlüğü korunarak, radyal yönde değiştiği bilinen her parametre birimsizleştirilecektir. İlk olarak hacimsel iç enerji üretimi aşağıdaki gibi birimsizleştirilmiştir. Bu yöntem literatürde sıklıkla uygulanmaktadır [20-23].

$$\bar{q}''' = \frac{a^2 q''' E_0 \alpha_0}{\sigma_0 \lambda_0} \quad (8.16)$$

Yarıçap boyutsuzlaştırması Eş. 8.2'de verilmiştir. Radyal gerilme de Eş. 8.3'te birimsizleştirilmiştir.  $\beta_3$  ve  $\beta_1$  katsayıları Eş. 8.7'ye benzer şekilde boyutsuzlaştırılır:

$$\bar{\beta}_3 = a\beta_3 \quad (8.17)$$

$$\bar{\beta}_1 = a\beta_1 \quad (8.18)$$

Taşıma ısı transferi katsayısı, Bölüm 5 ve 6'da da uygulandığı gibi aşağıdaki şekilde boyutsuzlaştırılır:

$$\frac{1}{\bar{h}} = \frac{\lambda_0}{ha} \quad (8.19)$$

Böylece akışkan varlığındaki homojen olmayan kısım aşağıdaki gibi birimsizleşir:

$$\bar{f}(\bar{r}) = \bar{q}''' \frac{e^{\bar{r}\bar{\beta}_2}}{2(1-\nu)} \left\{ \left(1 + \bar{n}\bar{r}^{\bar{\beta}_3}\right) e^{-\bar{r}\bar{\beta}_1} - \frac{\bar{\beta}_3}{\bar{\beta}_1^2} \bar{n}\bar{r}^{\bar{\beta}_3-2} \left[ \left(1 + \bar{r}\bar{\beta}_1\right) e^{-\bar{r}\bar{\beta}_1} - \left(1 + \bar{\beta}_1\right) e^{-\bar{\beta}_1} + \frac{1}{h} \bar{\beta}_1^2 \right] \right\} \quad (8.20)$$

Referans yüzey sıcaklığındaki FDM silindir için birimsiz özel kısım şu şekildedir:

$$\bar{f}(\bar{r}) = \frac{\bar{q}''' e^{\bar{r}\bar{\beta}_2}}{2(1-\nu)} \left\{ \left(1 + \bar{n}\bar{r}^{\bar{\beta}_3}\right) e^{-\bar{r}\bar{\beta}_1} - \frac{\bar{\beta}_3}{\bar{\beta}_1^2} \bar{n}\bar{r}^{\bar{\beta}_3-2} \left[ \left(1 + \bar{r}\bar{\beta}_1\right) e^{-\bar{r}\bar{\beta}_1} - \left(1 + \bar{\beta}_1\right) e^{-\bar{\beta}_1} \right] \right\} \quad (8.21)$$

Homojen çözüm Eş. 8.12 ile, özel kısım Eş. 8.20 ve Eş. 8.21 ile boyutsuz olarak ifade edildikten sonra, boyutsuz genel çözüm elde edilecektir.

#### 8.4. Boyutsuz Özel Çözüm

Özel çözümün yapılabilmesi için “Değişken değiştirme yöntemi” kullanılacaktır [45, 50]. Bu yöntemin özeti aşağıdadır. Eş. 8.11 ile verilen homojen olmayan boyutsuz diferansiyel denklem aşağıdaki formdadır,

$$\bar{L}(\bar{\phi}) = \bar{y}'' + \bar{P}_1(\bar{r})\bar{y}' + \bar{P}_2(\bar{r})\bar{y} = \bar{f}(\bar{r}) \quad (8.22)$$

Böyle bir denklemin homojen ve özel çözümleri aşağıdaki gibidir:

$$\bar{y}_h(\bar{r}) = c_1 \bar{y}_1 + c_2 \bar{y}_2 \quad (8.23)$$

$$\bar{y}_p(\bar{r}) = \bar{m}_1(\bar{r})\bar{y}_1 + \bar{m}_2(\bar{r})\bar{y}_2 \quad (8.24)$$

Burada  $\bar{m}_1$  ve  $\bar{m}_2$  katsayıları araştırılmaktadır. Bunların bulunmasıyla özel çözüm de bulunmuş olacaktır. Bu amaçla özel çözüm olarak tanımlanan özel çözümün türevi

alınır, bu türevler Eş. 8.24'te yerleştirilir ve  $\bar{f}(\bar{r})$  'ye eşitlenir. Türevlerinin alınmasıyla, aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$\bar{m}_1' \bar{y}_1' + \bar{m}_2' \bar{y}_2' = \bar{f} \quad (8.25)$$

$$\bar{m}_1' \bar{y}_1 + \bar{m}_2' \bar{y}_2 = 0 \quad (8.26)$$

Bu iki denklem Wronskian determinanı ile çözülür [50].

$$\bar{W}(\bar{r}) = \begin{vmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 \\ \bar{y}_1' & \bar{y}_2' \end{vmatrix} = \bar{y}_1 \bar{y}_2' - \bar{y}_1' \bar{y}_2 \quad (8.27)$$

$$\bar{m}_1'(\bar{r}) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \bar{y}_2 \\ \bar{f} & \bar{y}_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 \\ \bar{y}_1' & \bar{y}_2' \end{vmatrix}} = \frac{\bar{W}_1(\bar{r})}{\bar{W}(\bar{r})} = \frac{-\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} \quad (8.28)$$

$$\bar{m}_1(\bar{r}) = \int_0^{\bar{r}} \frac{-\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \quad (8.29)$$

$$\bar{m}_2'(\bar{r}) = \frac{\begin{vmatrix} \bar{y}_1 & 0 \\ \bar{y}_1 & \bar{f} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \bar{y}_1 & \bar{y}_2 \\ \bar{y}_1' & \bar{y}_2' \end{vmatrix}} = \frac{\bar{W}_2(\bar{r})}{\bar{W}(\bar{r})} = \frac{\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} \quad (8.30)$$

$$\bar{m}_2(\bar{r}) = \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \quad (8.31)$$

Değişken değiştirme yönteminin uygulanabilmesi için, öncelikle Eş. 8.12 ve Eş. 8.13 boyutsuz homojen çözüm fonksiyonlarının türevleri bulunur.



$$\bar{y}_1' = \bar{\beta}_2 \left( \frac{1-2\nu}{-1+\nu} \right) U_{\frac{-2+3\nu}{-1+\nu}}^4 (\bar{r}\bar{\beta}_2) \quad (8.32)$$

$$\bar{y}_2' = -\bar{\beta}_2 L_{\frac{2-3\nu}{-1+\nu}}^3 (\bar{r}\bar{\beta}_2) \quad (8.33)$$

Eş. 8.27 ile verilen Wronskian determinantı ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$\bar{W}(\bar{r}) = \left[ -\bar{\beta}_2 U_{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}^3 (\bar{r}\bar{\beta}_2) L_{\frac{2-3\nu}{-1+\nu}}^3 (\bar{r}\bar{\beta}_2) - \bar{\beta}_2 \left( \frac{1-2\nu}{-1+\nu} \right) U_{\frac{2-3\nu}{-1+\nu}}^4 (\bar{r}\bar{\beta}_2) L_{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}^2 (\bar{r}\bar{\beta}_2) \right] \quad (8.34)$$

### 8.5. Boyutsuz Genel Çözüm

Böylece boyutsuz genel çözüm aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\bar{\sigma}_r = c_3 \bar{y}_1 + c_4 \bar{y}_2 + \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{-\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \bar{y}_1 + \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \bar{y}_2 \quad (8.35)$$

Eş. 8.35 daha açık bir ifadeyle yazılacak olursa genel çözüm bu formuyla da kullanılabilir:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r = c_3 U_{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}^3 (\bar{r}\bar{\beta}_2) + c_4 L_{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}^2 (\bar{r}\bar{\beta}_2) + & \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{-\bar{f}(\bar{r}) L_{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}^2 (\bar{r}\bar{\beta}_2)}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) U_{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}^3 (\bar{r}\bar{\beta}_2) \\ & + \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r}) U_{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}^3 (\bar{r}\bar{\beta}_2)}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) L_{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}^2 (\bar{r}\bar{\beta}_2) \end{aligned} \quad (8.36)$$

İntegral sabitleri olan  $c_3$  ve  $c_4$ 'ün bulunması için mekanik sınır şartları kullanılacaktır.

### 8.5.1. Mekanik sınır şartları ve integral sabitleri

FDM silindirin iki ucu da ankastredir. Bu nedenle mekanik sınır şartları şu şekildedir:

1. Silindir merkezindeki radyal yerdeğiştirme sonlu bir değer olmalıdır.

$$u(0) = \text{sonlu bir değer} \quad (8.37)$$

2. Silindir yüzeyinde herhangi bir dış basınç veya yükleme olmadığı için, yüzeyde radyal gerilme sıfıra eşit olmalıdır.

$$\sigma_r(a) = 0 \quad (8.38)$$

Boyutsuz ifadeyle;

$$\bar{\sigma}_r(1) = 0 \quad (8.39)$$

Eş. 8.37 ile verilen ilk sınır şartını uygulamak için Eş. 8.36 ile bulunmuş olan genel çözüm fonksiyonu incelenir ve  $\sigma_r$  'nin bünyesinde Hipergeometrik ve Laguerre fonksiyonlarını içerdiği görülür. İlk sınır şartına göre, bu iki özel fonksiyonun silindir merkezinde alabilecekleri değerlerin sonluluğu araştırılmalıdır.

Radyal gerilme cinsinden radyal gerinimi veren Eş. 7.36'nın sonlu olması gerekir ki,  $u$  deplasmanı da sonlu bir değer olabilsin. Ancak EK-1'de verilmiş olan Hipergeometrik fonksiyonu gösteren Şekil 1.1 incelenirse, bu fonksiyonun sonsuz değerine gittiği görülür. Yine EK-1'de Şekil 1.2 ile gösterilen Laguerre fonksiyonu ise merkezde sonlu değerler almaktadır.

$$\left[ U_{-1+\nu}^{3-2\nu}(\bar{r}\bar{\beta}_2) \right]_{\bar{r}=0} \rightarrow +\infty \quad (8.40)$$

Bu nedenle bu fonksiyonu içeren ilk integral sabiti  $c_3$  sifira eşit olmalıdır, böylece bu fonksiyon genel çözümde bulunmaz:

$$c_3 = 0 \quad (8.41)$$

Bunun sonucunda Eş. 8.35 ile ifade edilmiş olan boyutsuz genel çözüm, şu şekle gelir:

$$\bar{\sigma}_r = c_4 \bar{y}_2 + \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r}) \bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \bar{y}_1 + \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r}) \bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \bar{y}_2 \quad (8.42)$$

Eş. 8.39 ile verilen diğer sınır şartı uygulanırsa ikinci integral sabiti  $c_4$ , aşağıdaki boyutsuz şekliyle bulunur:

$$\bar{c}_4 = \frac{\left( \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{y}_2 \bar{f}(\bar{r})}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right)_{\bar{r}=\bar{a}} \bar{y}_1(\bar{a}) - \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{y}_1 \bar{f}(\bar{r})}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right)_{\bar{r}=\bar{a}} \bar{y}_2(\bar{a})}{\bar{y}_2(\bar{a})} \quad (8.43)$$

Biraz sadeleştirme yapılırsa  $\bar{c}_4$  integral sabiti aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\bar{c}_4 = \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{y}_2 \bar{f}(\bar{r})}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right)_{\bar{r}=1} \frac{\bar{y}_1(1)}{\bar{y}_2(1)} - \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{y}_1 \bar{f}(\bar{r})}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right)_{\bar{r}=1} \quad (8.44)$$

$$\bar{c}_4 = \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r}) L_{-1+\nu}^{1-2\nu}(\bar{r} \bar{\beta}_2)}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right)_{\bar{r}=1} \frac{U_{-1+\nu}^3(\bar{\beta}_2)}{L_{-1+\nu}^{1-2\nu}(\bar{\beta}_2)} - \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r}) U_{-1+\nu}^3(\bar{r} \bar{\beta}_2)}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right)_{\bar{r}=1} \quad (8.45)$$

Eş. 8.44'teki formuyla boyutsuzlaştırılan ikinci integral sabiti Eş. 6.28'de yerleştirilirse genel çözüm aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_r = c_4 L_{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}^2(\bar{r}\bar{\beta}_2) + \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{-\bar{f}(\bar{r})L_{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}^2(\bar{r}\bar{\beta}_2)}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) U^{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}(\bar{r}\bar{\beta}_2) \\
+ \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r})U^{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}(\bar{r}\bar{\beta}_2)}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) L_{\frac{1-2\nu}{-1+\nu}}^2(\bar{r}\bar{\beta}_2) \tag{8.46}
\end{aligned}$$

Radyal gerilmenin bu şekilde bulunmasından sonra sırasıyla:

- Boyutsuz teğetsel ve aksenal gerilme bileşenleri
- Boyutsuz radyal ve teğetsel gerinim değerleri
- Boyutsuz radyal yerdeğiştirme değeri
- Boyutsuz aksenal tepki kuvveti  $\bar{F}_z$

bulunacaktır.

## 9. GERİLME VE GERİNİM BİLEŞENLERİ

### 9.1. Gerilme Bileşenleri

Radyal gerilme bileşeni Eş. 8.42 ile ifade edilmiştir. Bundan sonraki hesaplamalarda referans değer olarak kullanılacaktır.

#### 9.1.1. Teğetsel gerilme bileşeni

Teğetsel gerilme bileşenini bulmak için denge denkleminde faydalanılmıştır.

$$\sigma_{\theta} = \sigma_r + r\sigma_r' \quad (9.1)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta} = \frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_0} \quad (9.2)$$

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0} \quad (9.3)$$

Eş. 8.2'de verilen boyutsuz yarıçap ile Eş. 8.5'te ifade edilen boyutsuz radyal gerilme türevi de Eş. 9.1'in birimsizleştirilmesinde kullanılır. Sonuçta aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\bar{\sigma}_{\theta} = \bar{\sigma}_r + \bar{r}\bar{\sigma}_r' \quad (9.4)$$

Eş. 8.42'deki formuyla radyal gerilmenin türevi alınır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\bar{\sigma}_r' = \left\{ \bar{c}_4 + \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \right\} \bar{y}_2' + \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{-\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \bar{y}_1' + \left( \frac{-\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} \right) \bar{y}_1 + \left( \frac{\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} \right) \bar{y}_2 \quad (9.5)$$

Ortak terimlerin paranteze alınmasıyla teğetsel gerilme bileşeni aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\theta = & \left( \bar{r} \frac{-\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} + \int_0^{\bar{r}} \frac{-\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \bar{y}_1 + \left( \bar{r} \frac{\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} + c_4 + \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \bar{y}_2 \\ & + \left( \bar{r} \int_0^{\bar{r}} \frac{-\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \bar{y}_1' + \left( \bar{r} c_4 + \bar{r} \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \bar{y}_2' \end{aligned} \quad (9.6)$$

### 9.1.2. Eksenel gerilme bileşeni

Silindir iki ucundan sabitlenmiş olduğu için eksenel yönde bir gerinim yoktur ancak gerilme vardır. Eksenel doğrultudaki gerilme değeri Eş. 7.7 ile verilmiştir.

$$\bar{\sigma}_z = \frac{1}{\sigma_0} \sigma_z \quad (9.7)$$

$$\bar{\sigma}_z = [\nu(\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta)] - \overline{\left( \frac{1}{\sigma_0} E \alpha T \right)} \quad (9.8)$$

Buradaki son terimde  $E(r)$ ,  $\alpha(r)$  ve  $T(r)$ 'nin çarpımı boyutsuzlaştırılmıştır. Bu fonksiyonların tek tek boyutsuz çarpımları kullanılmamıştır. Çünkü bu terimlerin çarpımı  $\sigma_0$  terimine bölünecektir ve bu terim bütün olarak birimsiz olmalıdır. Sonlu bir taşınım katsayısının söz konusu olduğu bir ısı koşulu bu terim;

$$\overline{\left( \frac{1}{\sigma_0} E \alpha T \right)} = \bar{q}''' \frac{1}{2\bar{\beta}_1^2} e^{\bar{r}\bar{\beta}_2} (1 + \bar{n}\bar{r}^{\bar{\beta}_3}) \left[ (1 + \bar{r}\bar{\beta}_1) e^{-\bar{r}\bar{\beta}_1} - (1 + \bar{\beta}_1) e^{-\bar{\beta}_1} + \frac{1}{h} \bar{\beta}_1^2 \right] \quad (9.9)$$

şeklinde olacaktır. Referans yüzey sıcaklığıyla tanımlanan FDM silindir için bu terim şu şekilde olur:

$$\overline{\left(\frac{1}{\sigma_0} E \alpha T\right)} = \bar{q}''' \frac{1}{2\bar{\beta}_1^2} e^{\bar{r}\bar{\beta}_2} (1 + \bar{n}\bar{r}^{\bar{\beta}_3}) \left[ (1 + \bar{r}\bar{\beta}_1) e^{-\bar{r}\bar{\beta}_1} - (1 + \bar{\beta}_1) e^{-\bar{\beta}_1} \right] \quad (9.10)$$

Daha önce birimsizleştirilen hacimsel iç enerji üretimi, burada da aynı eşitlikle boyutsuzlaştırılır.

$$\bar{q}''' = \frac{E_0}{\sigma_0} \frac{q''' \alpha_0 a^2}{\lambda_0} \quad (9.11)$$

$$\frac{1}{\bar{h}} = \frac{\lambda_0}{ah} \quad (9.12)$$

Sonuç olarak aksenal gerilme aşağıdaki biçimiyle bulunur.

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z = & \left\{ - \left( \bar{r} \frac{\bar{f}(r)\bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} + 2 \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(r)\bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \bar{y}_1 + \left( \bar{r} \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(r)\bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \bar{y}_1' \right. \\ & + \left. \left( 2c_4 + \bar{r} \frac{\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} + 2 \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \bar{y}_2 + \left( \bar{r} c_4 + \bar{r} \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \bar{y}_2' \right\} \\ & - \overline{\left(\frac{1}{\sigma_0} E \alpha T\right)} \quad (9.13) \end{aligned}$$

## 9.2. Gerinim Değerleri

### 9.2.1. Radyal gerinim değeri

Eş. 7.36'da radyal gerinim, radyal ve teğetsel gerilmeler cinsinden ifade edilmiştir. Bu bileşen, teğetsel gerilmenin de radyal gerilme ve türevi cinsinden ifade edildiği Eş. 7.51'in de kullanılmasıyla aşağıdaki forma dönüştürülür:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left[ (1 - \nu - \nu^2) \sigma_r - r \nu (1 + \nu) \sigma_r' \right] + (1 + \nu) \alpha T \quad (9.14)$$

Boyutsuz olarak radyal gerinim aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{E_0}{\sigma_0} \varepsilon_r \quad (9.15)$$

Eş. 9.2 ve 9.3'ün de kullanılmasıyla radyal gerinim değeri şu şekilde birimsizleşir:

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{1}{e^{\bar{r}\beta_2}} \left[ (1 - \nu - \nu^2) \bar{\sigma}_r - \bar{r} \nu (1 + \nu) \bar{\sigma}_r' \right] + (1 + \nu) \overline{\left( \frac{1}{\sigma_0} \alpha T \right)} \quad (9.16)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_r = & \frac{1}{e^{\bar{r}\beta_2}} \left\{ \left[ \nu(1 + \nu) \bar{r} \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r}) \bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} + (1 - \nu - 2\nu^2) \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{-\bar{f}(\bar{r}) \bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \right] \bar{y}_1 \right. \\ & + \left( \nu(1 + \nu) \bar{r} \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r}) \bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \bar{y}_1' + \left[ -\nu(1 + \nu) \bar{r} \frac{\bar{f}(\bar{r}) \bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} + (1 - \nu - 2\nu^2) c_4 \right. \\ & + (1 - \nu - 2\nu^2) \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r}) \bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \bar{y}_2 + \left. \left. \left[ -\nu(1 + \nu) \bar{r} c_4 - \nu(1 + \nu) \bar{r} \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r}) \bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right] \bar{y}_2' \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 + \nu) \overline{\left( \frac{E_0}{\sigma_0} \alpha T \right)} \right\} \quad (9.17) \end{aligned}$$

Eş. 9.17'ye ait son terimin açılımı, referans yüzey sıcaklığındaki veya taşınım katsayısının sonlu olduğu durumlar için aşağıda verilmiştir.

$$\overline{\left( \frac{E_0}{\sigma_0} \alpha T \right)} = \bar{q}''' \frac{1}{2\bar{\beta}_1^2} \left( 1 + \bar{n}\bar{r}\bar{\beta}_3 \right) \left[ (1 + \bar{r}\bar{\beta}_1) e^{-\bar{r}\bar{\beta}_1} - (1 + \bar{\beta}_1) e^{-\bar{\beta}_1} + \frac{1}{h} \bar{\beta}_1^2 \right] \quad (9.18)$$



$$\overline{\left(\frac{E_0}{\sigma_0} \alpha T\right)} = \bar{q}'' \frac{1}{2\bar{\beta}_1^2} (1 + \bar{n}\bar{r}^{\bar{\beta}_3}) \left[ (1 + \bar{r}\bar{\beta}_1) e^{-\bar{r}\bar{\beta}_1} - (1 + \bar{\beta}_1) e^{-\bar{\beta}_1} \right] \quad (9.19)$$

### 9.2.2. Teğetsel gerinim değeri

Eş. 7.14'te  $\varepsilon_\theta$  radyal ve teğetsel gerilmeler cinsinden ifade edilmiştir. Boyutsuz olarak teğetsel gerinim aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \frac{E_0}{\sigma_0} \varepsilon_\theta \quad (9.20)$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \frac{E_0}{\sigma_0} \frac{1}{E} \left[ (1 - \nu^2) \sigma_0 \bar{\sigma}_\theta - \nu(1 + \nu) \sigma_0 \bar{\sigma}_r \right] + (1 + \nu) \overline{\left(\frac{E_0}{\sigma_0} \alpha T\right)} \quad (9.21)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_\theta = & \frac{1}{e^{\bar{r}\bar{\beta}_2}} \left\{ \left[ - (1 - \nu^2) \bar{r} \frac{\bar{f}(\bar{r}) \bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} + (1 - \nu - 2\nu^2) \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{-\bar{f}(\bar{r}) \bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \right] \bar{y}_1 \right. \\ & + \left[ (1 - \nu^2) \bar{r} \int_0^{\bar{r}} \frac{-\bar{f}(\bar{r}) \bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right] \bar{y}_1' + \left[ (1 - \nu^2) \bar{r} \frac{\bar{f}(\bar{r}) \bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} + (1 - \nu - 2\nu^2) c_4 \right. \\ & \left. \left. + (1 - \nu - 2\nu^2) \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r}) \bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right] \bar{y}_2 + \left[ (1 - \nu^2) \bar{r} c_4 + (1 - \nu^2) \bar{r} \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r}) \bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right] \bar{y}_2' \right\} \\ & + (1 + \nu) \overline{\left(\frac{E_0}{\sigma_0} \alpha T\right)} \quad (9.22) \end{aligned}$$

### 9.2.3. Radyal yerdeğiştirme değeri

Birim radyal yerdeğiştirme olan  $u$  yerdeğiştirme değeri, yapılan kabuller ve problem özellikleri nedeniyle dönüştüğü Eş. 6.26'dan faydalanılarak, boyutsuz olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\bar{\epsilon}_\theta = \frac{\bar{u}}{r} \quad (9.23)$$

$$\bar{u} = r\bar{\epsilon}_\theta \quad (9.24)$$

Eş. 9.24 aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$\bar{u} = \frac{E_0}{\sigma_0} \frac{r}{a} \epsilon_\theta \quad (9.25)$$

Ayrıca, radyal yerdeğiştirmenin türevinin, radyal gerinim bileşenine eşit olduğu daha önce belirtilmişti. Bu bilgiye dayanarak birim yer değiştirmenin, radyal gerinime göre bir derece daha üst bir eğri şeklinde sonuçlar vereceği de tahmin edilebilir. Teğetsel gerinimi doğrudan etkileyen ortam ve malzeme parametreleri, yerdeğiştirme değerinde de belirgin farklar yaratacaktır.

Ayrıca, Eş. 7.32 ile verilen aksenal kuvvet, boyutsuz olarak aşağıdaki gibi hesaplanacaktır:

$$\bar{F}_z = \int_0^{2\pi} \int_0^a \bar{\sigma}_z 2\pi r dr d\theta \quad (9.26)$$

## 10. HOMOJEN İZOTROPİK SİLİNDİRDE GERİLME- GERİNİM ANALİZİ

Malzeme özellikleri fonksiyonel olarak değişmeyen homojen ve izotropik bir silindir için gerilme bileşenleri ve gerinim değerleri, FDM silindir için kullanılan analitik hesaplama yöntemiyle aynıdır. Ancak burada elastisite, ısı iletim ve ısı genleşme özellikleri sabit birer katsayıdır ve bunların etkisi, çözüm fonksiyonlarında görülecektir.

$$\lambda = \lambda_0 \quad (10.1)$$

$$E = E_0 \quad (10.2)$$

$$\alpha = \alpha_0 \quad (10.3)$$

Görüldüğü gibi FDM silindir için tanımı yapılmış olan  $\beta$  ve  $n$  parametreleri homojen izotropik silindir modelinde sıfıra eşittir. Bu, elastisitenin, ısı iletim katsayısının ve ısı genleşme katsayısının silindir merkezinden yarıçapına dek sabit olduğu anlamına gelmektedir. Analitik hesaplamalarda kullanılacak denklemler özetle aşağıdaki gibidir:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \alpha T \quad (10.4)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \alpha T \quad (10.5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \alpha T \quad (10.6)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} \quad (10.7)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (10.8)$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_{\theta}}{r} = 0 \quad (10.9)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{\theta} + r \frac{d\varepsilon_{\theta}}{dr} \quad (10.10)$$

Sabit uçlu homojen ve izotropik silindir için aksenal gerinim değerinin sıfır olmasıyla Eş. 10.4 – Eş. 10.6 ile verilmiş olan radyal ve teğetsel gerinimler aşağıdaki şekle dönüşürler.

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_r - \nu(1+\nu)\sigma_{\theta}] + (1+\nu)\alpha T \quad (10.11)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{E} [(1-\nu^2)\sigma_{\theta} - \nu(1+\nu)\sigma_r] + (1+\nu)\alpha T \quad (10.12)$$

### 10.1. Yönetici Denklem

Elastisitenin sabit bir değer olduğu kabulü henüz kullanılmadan, Eş. 10.11 ve Eş. 10.12, Eş. 10.10'da yerleştirilirse Bölüm 7'de bulunan yönetici diferansiyel denklem aynen bulunur (Bkz. Eş. 10.13). Bu denklem,  $E$  değeri bir fonksiyonsa denklemi farklılaştırır, sabit bir değerse daha da sadeleştirir.

$$\sigma_{\theta}' - \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)\sigma_r' + \left(\left(\frac{1}{1-\nu}\right)\frac{1}{r} - \frac{E'}{E}\right)\sigma_{\theta} - \left(\frac{1}{1-\nu}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{\nu E'}{E}\right)\sigma_r = \frac{-E}{(1-\nu)}(\alpha T)' \quad (10.13)$$

$$Y(r) = \frac{-E}{(1-\nu)}(\alpha T)' \quad (10.14)$$

Eş. 10.14 ile verilen denklemdeki türev, malzeme özelliklerinin ve sıcaklık dağılımının sabit veya radyal doğrultuda değişiyor olup olmamasıyla doğrudan etkilenir.

Eş. 10.13, elastisite modülünün türevinin sıfır olması nedeniyle aşağıdaki şekle dönüşür. Özel kısım da sadece sıcaklık dağılımı radyal yönde değiştiği için türevi sifira eşit olmayarak aşağıdaki gibi değişir:

$$\sigma_{\theta}' - \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)\sigma_r' + \left(\frac{1}{1-\nu}\right)\frac{1}{r}\sigma_{\theta} - \left(\frac{1}{1-\nu}\right)\frac{1}{r}\sigma_r = \frac{-E\alpha}{(1-\nu)}T' \quad (10.15)$$

Eş. 10.9 ile verilen denge denklemi yukarıdaki eşitlikte kullanılırsa, radyal gerilme bileşeninin türevlerini içeren ikinci dereceden homojen olmayan değişken katsayılı lineer adi bir diferansiyel denklem elde edilir.

$$\sigma_r'' + \left(\frac{3}{r}\right)\sigma_r' = \frac{1}{r}\left(\frac{-E\alpha}{(1-\nu)}\alpha T'\right) \quad (10.16)$$

Eş. 10.16, Bölüm 7'de verilen Eş. 7.46'da, Elastisite fonksiyonları ve türevlerinin bölümünü ifade eden terimlere doğrudan sıfır verilmesiyle de elde edilebilir. Bu eşitliğin homojen ve özel çözümüne geçmeden önce, önceki bölümlerde açıklanan boyutsuzlaştırma işlemleri Eş. 10.16'ya da uygulanır.

$$\bar{r} = \frac{r}{a} \quad (10.17)$$

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0} \quad (10.18)$$

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} = \frac{\sigma_0}{a^2} \frac{d^2\bar{\sigma}_r}{d\bar{r}^2} \quad (10.19)$$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_0}{a} \frac{d\bar{\sigma}_r}{d\bar{r}} \quad (10.20)$$

Eş. 10.17 – Eş. 10.20, Eş. 10.16’da yerleştirilirse yönetici diferansiyel denklem aşağıdaki gibi boyutsuzlaştırılmış olur.

$$\bar{\sigma}_r'' + \left(\frac{3}{\bar{r}}\right)\bar{\sigma}_r' = \frac{a^2}{\sigma_0} \frac{1}{r} \left( \frac{-E}{(1-\nu)} \alpha T' \right) \quad (10.21)$$

## 10.2. Boyutsuz Homojen Çözüm

Eş. 10.21 değişken katsayılı, lineer, homojen olmayan adi bir diferansiyel denklemdir. Çözümü doğrudan radyal gerilmeyi verecektir<sup>1</sup>. Homojen kısmı birimsizleştirilmiştir. Bu denklemin boyutsuz homojen çözümü aşağıdaki şekildedir:

$$\bar{\sigma}_{rh} = c_3 + \frac{c_4}{\bar{r}^2} \quad (10.22)$$

## 10.3. Boyutsuz Özel Çözüm

Eş. 10.21’deki özel kısmın boyutsuzlaştırılabilmesi için öncelikle Bölüm 5’te incelenen ve Eş. 5.13 ve Eş. 5.20 ile verilen sırasıyla referans yüzey sıcaklığında ve taşınım etkisindeki homojen izotropik silindir için sıcaklık dağılımı burada tekrar ele alınır ve her iki durum için de birinci dereceden sıcaklık dağılımı türevi aşağıdaki gibidir:

<sup>1</sup> Farklı bir yöntem olarak Eş. 10.9’da yerleştirilmek üzere Eş. 10.11 ve 10.12, u yer değiştirme değeri cinsinden ifade edilebilir ve böylece Eş. 10.21’e göre bir derece daha üst bir diferansiyel denklem bulunabilir;

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = r^2 \frac{E}{(1-2\nu)(1-\nu)} \alpha T'$$

Bu eşitliğin homojen çözümü de aşağıdaki şekilde olur ve doğrudan radyal yer değiştirme değerini verir [22]:

$$u_h = c_1 r + \frac{c_2}{r}$$

$$T'(r) = \frac{-\bar{q}''' r}{2\lambda_0} \quad (10.23)$$

Bu şekilde, yönetici diferansiyel denklemin özel kısmı aşağıdaki şekilde bulunur:

$$f(r) = \frac{a^2 E_0 \alpha_0 \bar{q}'''}{\sigma_0 \lambda_0} \frac{1}{2(1-\nu)} \quad (10.24)$$

Bu fonksiyondaki terimler aşağıda verilen ve önceki bölümlerde de aynen kullanılmış olan boyutsuz hacimsel iç enerji üretimi terimi için toparlanırsa, özel fonksiyon aşağıdaki şekilde birimsizleştirilir.

$$\bar{f}(\bar{r}) = \frac{\bar{q}'''}{2(1-\nu)} \quad (10.25)$$

$$\bar{q}''' = \frac{\bar{q}''' E_0 \alpha_0 a^2}{\sigma_0 \lambda_0} \quad (10.26)$$

Özel çözüm ise Wronskian yöntemiyle elde edilir, özel çözüm ise aşağıdaki gibi olur.

$$\bar{\sigma}_r = m_1(\bar{r})\bar{y}_1 + m_2(\bar{r})\bar{y}_2 \quad (10.27)$$

$$\bar{y}_1 = 1 \quad (10.28)$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{\bar{r}^2} \quad (10.29)$$

$$m_1(\bar{r}) = \int_0^{\bar{r}} \frac{-\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} = \frac{\bar{q}'''}{8(1-\nu)} \bar{r}^2 \quad (10.30)$$

$$m_2(\bar{r}) = \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} = -\frac{\bar{q}'''}{16(1-\nu)} \bar{r}^4 \quad (10.31)$$

$$\bar{W}(\bar{r}) = \bar{y}_1 \bar{y}_2' - \bar{y}_1' \bar{y}_2 = \frac{-2}{\bar{r}^3} \quad (10.32)$$

#### 10.4. Boyutsuz Genel Çözüm

Genel çözüm, Eş. 10.22 ile verilen homojen çözüm ile Eş. 10.27 ile bulunan özel çözümün toplamıdır. Buna göre genel çözüm şu şekildedir:

$$\bar{\sigma}_r = c_1 + c_2 \frac{1}{\bar{r}^2} + \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_2}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) + \left( \int_0^{\bar{r}} \frac{\bar{f}(\bar{r})\bar{y}_1}{\bar{W}(\bar{r})} d\bar{r} \right) \left( \frac{1}{\bar{r}^2} \right) \quad (10.33)$$

Eş. 10.28 – Eş. 10.32, Eş. 10.33'te yerleştirilerek sadeleştirmeler yapılır ve integraller alınırsa boyutsuz radyal gerilme bileşeni aşağıdaki gibi bulunur:

$$\bar{\sigma}_r = c_1 + \frac{c_2}{\bar{r}^2} + \frac{\bar{q}'''}{16(1-\nu)} \bar{r}^2 \quad (10.34)$$

##### 10.4.1. Mekanik sınır şartları ve integral sabitleri

Özel çözümdeki terimler de bu şekilde ifade edildikten sonra mekanik sınır şartları Eş. 10.34 ile verilen genel çözüme uygulanır. Homojen izotropik silindir için mekanik sınır şartları, FDM silindir modelindeki yüklemeler ve uç şartları değişmediği için aynıdır.

- 1) Merkezde birim radyal yerdeğiştirme sonlu olmalıdır.
- 2) Dış yüzeyde ( $\bar{r} = 1$ ) radyal gerilme (herhangi bir radyal yükleme veya basınç bulunmadığı için) sifıra eşittir.



İlk sınır şartı uyarınca Eş. 10.34 ile verilen genel çözüm incelenirse, silindir merkezinde  $c_2$  katsayısı nedeniyle denklem sonsuz değerine gitmektedir. Bu nedenle integral sabiti şu şekilde bulunur:

$$c_2 = 0 \quad (10.35)$$

İkinci sınır şartı uygulanırsa ikinci integral sabiti aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\bar{c}_1 = -\frac{\bar{q}'''}{16(1-\nu)} \quad (10.36)$$

Bunun sonucunda boyutsuz radyal gerilme, homojen izotropik silindir için aşağıdaki gibi bulunur ve bu eşitlik, Eraslan ve Argeso ile örtüşmektedir [24].

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\bar{q}'''}{16(1-\nu)} [\bar{r}^2 - 1] \quad (10.37)$$

## 10.5. Gerilme Bileşenleri

### 10.5.1. Teğetsel gerilme bileşeni

Eş. 10.9 ile verilen radyal ve teğetsel gerilmeler ilişkisinden faydalanılarak, Eş. 10.37 ile verilen radyal gerilme bileşeninin birinci mertebeden türevi alınır ve böylece teğetsel gerilme aşağıdaki gibi bulunur.

$$\bar{\sigma}_\theta = \frac{\bar{q}'''}{16(1-\nu)} [3\bar{r}^2 - 1] \quad (10.38)$$

### 10.5.2. Eksenel gerilme bileşeni

Eksenel gerilme bileşeninin araştırılmasıyla, silindirin homojen izotropik olması önem kazanarak son terimde sadeleşmelere sebep olur. Bu sadeleşmeler, Eş. 10.2 ve

Eş. 10.3 ile yeniden tanımlanan elastisite modülü ve ısı genleşme katsayısının sabit değerler almaları sonucu meydana gelir.

$$\bar{\sigma}_z = [\nu(\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta)] - \overline{\left(\frac{1}{\sigma_0} E \alpha T\right)} \quad (10.39)$$

$$\bar{\sigma}_z = \nu \left[ \frac{\bar{q}'''}{16(1-\nu)} (\bar{r}^2 - 1) + \frac{\bar{q}'''}{16(1-\nu)} (3\bar{r}^2 - 1) \right] - \overline{\left(\frac{1}{\sigma_0} E \alpha T\right)} \quad (10.40)$$

$$\bar{\sigma}_z = \nu \left[ \frac{\bar{q}'''}{8(1-\nu)} (2\bar{r}^2 - 1) \right] - \overline{\left(\frac{1}{\sigma_0} E \alpha T\right)} \quad (10.41)$$

$$\overline{\left(\frac{1}{\sigma_0} E \alpha T\right)} = \bar{q}''' \frac{1}{4} (1 - \bar{r}^2) \quad (10.42)$$

$$\overline{\left(\frac{1}{\sigma_0} E \alpha T\right)} = \bar{q}''' \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (1 - \bar{r}^2) + \frac{1}{h} \right] \quad (10.43)$$

Referans yüzey sıcaklığı ya da konvektif sınır şartı bulunan durumlar için yapılacak olan karşılaştırmalarda, Eş. 10.42'den ve Eş. 10.43'ten faydalanılacaktır.

$\bar{q}'''$  terimi, Eş. 10.26'da verildiği gibi kullanılmıştır.

## 10.6. Gerinim Değerleri

### 10.6.1. Radyal gerinim değeri

Homojen izotropik silindir için radyal gerinim aşağıdaki şekilde verilir ve boyutsuzlaştırılır.

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{E_0}{\sigma_0} \varepsilon_r \quad (10.44)$$

$$\bar{\varepsilon}_r = \left[ (1-\nu^2) \bar{\sigma}_r - \nu(1+\nu) \bar{\sigma}_\theta \right] + (1+\nu) \overline{\left( \frac{E_0}{\sigma_0} \alpha T \right)} \quad (10.45)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_r = & \left[ (1-\nu^2) \frac{\bar{q}'''}{16(1-\nu)} (\bar{r}^2 - 1) - \nu(1+\nu) \frac{\bar{q}'''}{16(1-\nu)} (3\bar{r}^2 - 1) \right] \\ & + (1+\nu) \overline{\left( \frac{E_0}{\sigma_0} \alpha T \right)} \end{aligned} \quad (10.46)$$

Son terimdeki boyutsuz çarpım, Eş. 10.42 ve Eş. 10.43 ile verildiği gibidir.

### 10.6.2. Teğetsel gerinim değeri

Homojen izotropik silindir için teğetsel gerinim aşağıdaki şekilde bulunur.

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \frac{E_0}{\sigma_0} \varepsilon_\theta \quad (10.47)$$

$$\bar{\varepsilon}_\theta = \left[ (1-\nu^2) \bar{\sigma}_\theta - \nu(1+\nu) \bar{\sigma}_r \right] + (1+\nu) \overline{\left( \frac{E_0}{\sigma_0} \alpha T \right)} \quad (10.48)$$

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_\theta = & \left[ (1-\nu^2) \frac{\bar{q}'''}{16(1-\nu)} (3\bar{r}^2 - 1) - \nu(1+\nu) \frac{\bar{q}'''}{16(1-\nu)} (\bar{r}^2 - 1) \right] \\ & + (1+\nu) \overline{\left( \frac{E_0}{\sigma_0} \alpha T \right)} \end{aligned} \quad (10.49)$$

### 10.6.3. Radyal yerdeğiştirme değeri

Radyal yerdeğiştirme değeri, önceki bölümlerde verilmiş olan genel tanımıyla aşağıdaki şekliyle kullanılır.

$$\bar{u} = \bar{r}\bar{\epsilon}_\theta \quad (10.50)$$

Eş. 10.50'de geçen teğetsel gerinim değeri, Eş. 10.49'da verilmiş haliyle kullanılır.

Ayrıca, Eş. 9.26 ile FDM silindir için hesaplanmış olan aksenal kuvvet değeri, homojen izotropik silindir için de aynı şekilde tanımlanır ve hesaplanır.

## 11. $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3$ VE DİĞER PARAMETRELERİN GERİLME VE GERİNİM BİLEŞENLERİ İLE YERDEĞİŞTİRME DEĞERLERİNE ETKİSİ

Radyal yönde değişen bir sıcaklık altında bir akışkan içerisinde tutulan FDM kirişin üzerinde oluşan gerilme ve gerinimlerin bulunması probleminde, sonuca etki eden parametre sayısı oldukça fazladır.

Bu parametreler, kirişin bir FDM olması sebebiyle metal ve seramik karışım oranlarıyla ortaya çıkan elastisite, ısı iletkenlik ve ısı genleşme gibi özellikler olabileceği gibi, kirişin içinde bulunduğu ortamla belirlenen konveksiyon ısı transferi katsayısı gibi harici olarak belirlenebilen ısı özellikler de olabilirler.

Bu parametrelerin kiriş üzerinde meydana gelen gerilme ve gerinim bileşenleri üzerindeki etkilerinin daha açık anlaşılabilmesi için, her birine değişik değerler verilerek ve öteki değerler sabit tutularak grafikleri elde edilmiştir.

Ayrıca elde edilmiş olan boyutsuz gerilmelerden herhangi ikisinin, silindir merkezinde aldıkları değerlerinin arasındaki farkın tam olarak 1 değerine eşit olduğu noktada Tresca akma şartına göre akmanın başlaması nedeniyle, bu değeri sağlayan kritik hacimsel iç enerji değeri de hesaplanmıştır.

Düzlem gerinim ve genelleştirilmiş düzlem gerinim halleri için yapılmış olan analitik çözümlerde, sayısal değer verilmemiş olan değişkenler ve sabitler bulunmaktadır. Bu büyüklüklere verilecek değerlerin gerçeğe yakın olması gerekmektedir.

Bu parametrelerden, boyutsuz gerilme ve gerinim eşitliklerinde sayısal değeri değiştirilecek olanlar ise şunlardır:

- $\bar{q}'''$  değeri
- $\bar{h}$  değeri
- $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3$  değerleri

- $\bar{n}$  değeri
- $E_0$ , elastisite fonksiyonu ilk değeri
- $\sigma_0$ , malzemenin akma gerilmesi.

$\bar{q}'''$  ve  $\bar{h}$  parametreleri için sayısal değerler seilmeyecek, homojen izotropik silindir ve FDM silindir için Tresca akma şartını sağlayan ve literatürde belirtilen kritik değerleri kullanılacak veya hesaplanacaktır.

### 11.1. Problemdeki Bazı Büyüklükler için Sayısal Değer Seçimleri

#### 11.1.1. Elastisite fonksiyonu ilk değeri ve akma gerilmesi değeri seçimi

$E_0$  ilk değeri ortalama olarak,

$$E_0 = 200 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \quad (11.1)$$

seçilmiştir.

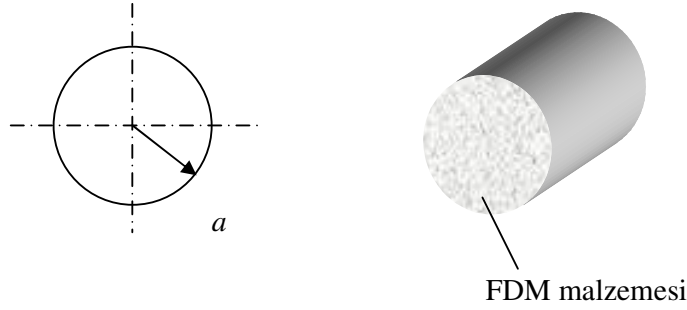
Ayrıca akma gerilmesinin elastisite modülü ilk değerinden ortalama bin kat düşük olduğu kabul edilirse aşağıdaki gibi seçilir.

$$\sigma_0 = 400 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \quad (11.2)$$

#### 11.1.2. Silindir yarıçap değeri seçimi

Ağır alışma koşulları altında tutulan FDM silindir, herhangi bir delik içermemektedir.

Malzemenin kesit boyunca sürekli olduğu kabul edilirse aşağıdaki şekil incelenebilir.



Şekil 11.1. FDM silindirin iki ve üç boyutlu şematik gösterimi

Silindir yarıçapı aşağıdaki değerde seçilmiştir.

$$a = 0,1 \text{ m} \quad (11.3)$$

## 11.2. Homojen İzotropik Silindir için İncelemeler

$\bar{\beta}$  parametrelerinin sıfır değerine eşit olması durumu, silindirin homojen izotropik yapıya sahip bir kiriş olması anlamına gelmektedir.

Hacimsel iç enerji üretimi parametresi olan  $\bar{q}'''$  değeri, kiriş malzemesi için gerilme değerlerini artıran kritik bir değişkendir. FDM'in tanımı gereği akmaya sebep olan  $\bar{q}'''$  değeri, homojen izotropik kirişe ait kritik  $\bar{q}'''$  sınırından çok daha yüksek olmalıdır. Çünkü FDM'ler yüksek sıcaklıklarda daha iyi dayanmaları yönünde tasarlanmışlardır.

Boyutsuz hacimsel iç enerji üretimi, önceki bölümlerde de tanımlandığı ve kullanıldığı gibi şu şekildedir:

$$\bar{q}''' = \frac{q''' E_0 \alpha_0 a^2}{\sigma_0 \lambda_0} \quad (11.4)$$

Bu eşitlik, literatürdeki hacimsel iç enerji üretimine sahip ve akma koşulları incelenen silindirik malzemeleri içeren çalışmalarla örtüşmektedir.

Bölüm 10'da hesaplanmış olan radyal (Bkz. Eş. 10.37), teğetsel (Bkz. Eş. 10.38) ve aksenal gerilme (Bkz. Eş. 10.41) bileşenleri kullanılarak, iki ucu sabit homojen izotropik silindir için silindir merkezinde radyal veya teğetsel gerilme bileşeni ile aksenal gerilme bileşeni arasındaki fark akma gerilmesine eşit olduğu zaman akma gerçekleşeceğine göre, aşağıdaki işlemler yapılabilir:

$$\sigma_{\theta}(0) - \sigma_z(0) = \sigma_0 \quad (11.5)$$

$$\bar{\sigma}_{\theta}(0) - \bar{\sigma}_z(0) = 1 \quad (11.6)$$

$$\left[ \frac{\bar{q}'''}{16(1-\nu)} (3\bar{r}^2 - 1) \right]_{\bar{r}=0} - \left\{ \nu \frac{\bar{q}'''}{8(1-\nu)} (2\bar{r}^2 - 1) - \frac{\bar{q}'''}{2} \left[ \frac{1}{2} (1 - \bar{r}^2) + \frac{1}{\bar{h}} \right] \right\}_{\bar{r}=0} = 1 \quad (11.7)$$

İşlemler ve sadeleştirmeler yapılırsa,  $\bar{h}$  parametresini de içeren kritik  $\bar{q}'''$  değeri, aşağıdaki gibi bulunur ve Orcan ile Eraslan'ın çalışmasıyla örtüşür [22]:

$$\bar{q}''' = \frac{16(1-\nu)}{(3-2\nu) + \frac{8(1-\nu)}{\bar{h}}} \quad (11.8)$$

Referans yüzey sıcaklığındaki homojen izotropik bir silindirde  $\bar{h} \rightarrow \infty$  değerine gider; bu şartlara göre Eş. 11.8'den de faydalanılarak ısı yük aşağıdaki şekle indirgenir ve Orcan (1994) tarafından bulunmuştur:

$$\bar{q}''' = \frac{16(1-\nu)}{(3-2\nu)} \quad (11.9)$$

Poisson oranının aşağıdaki sayısal değer ile kullanıldığı kabul edilirse;

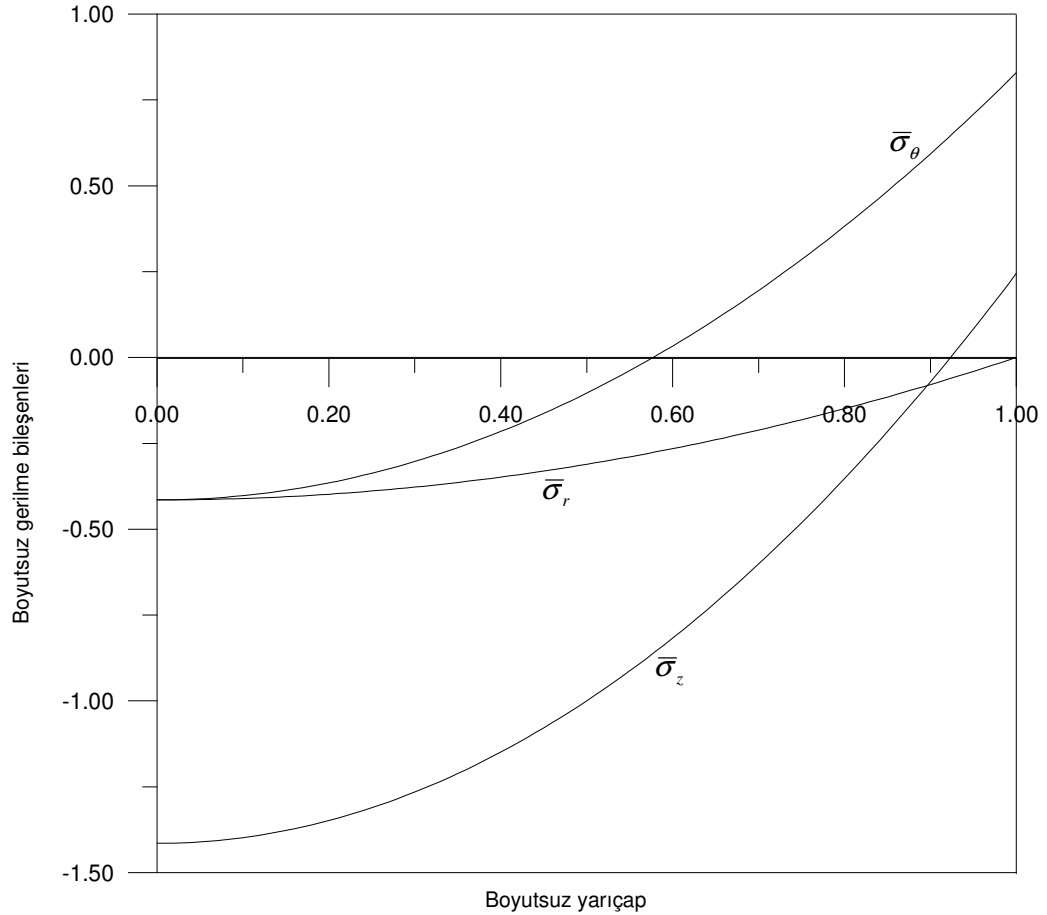
$$\nu = 0.295 \quad (11.10)$$



$$\bar{q}''' = 4,6805 \quad (11.11)$$

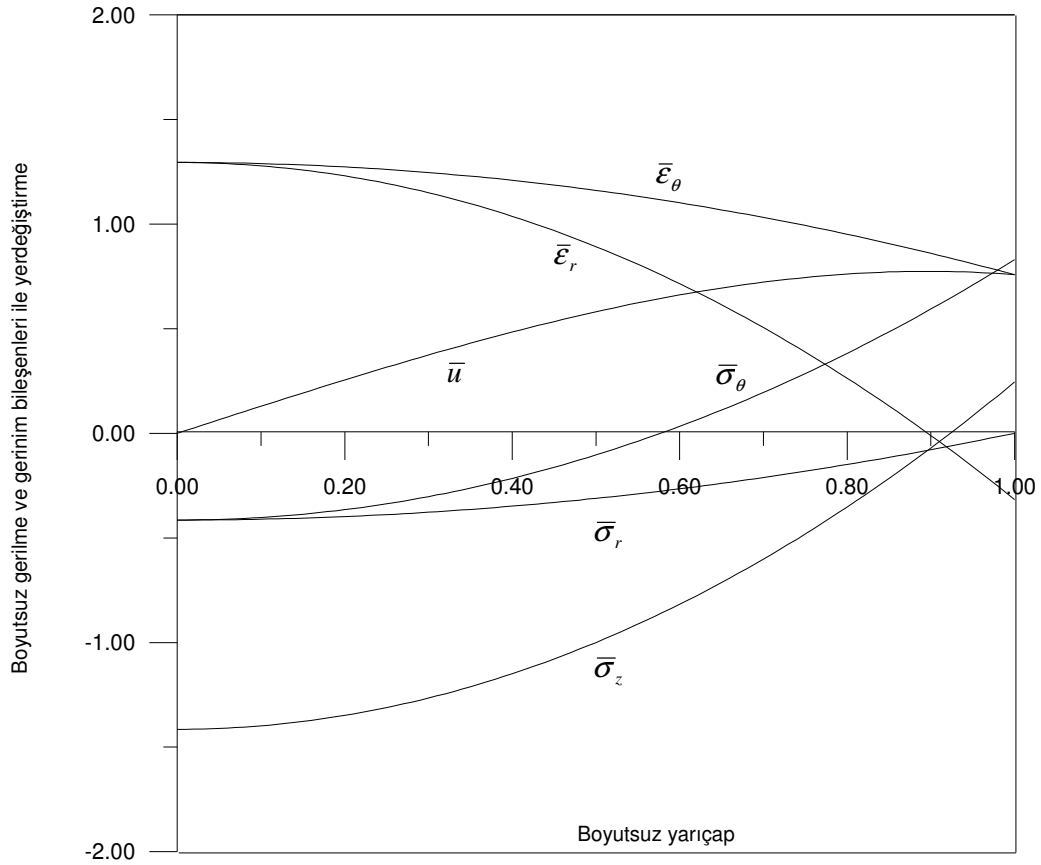
bulunur. Eş. 11.11 ile hesaplanmış olan bu değer, homojen izotropik ve hacimsel iç enerji üretimi bulunan silindirde plastik akmayı sağlayan değerdir ve Orcan ile Eraslan'ın çalışmasıyla örtüşmektedir [22].

Bu kritik değer uygulandığı homojen izotropik silindirdeki gerilme bileşenleri aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 11.2. Homojen izotropik kirişte kritik  $\bar{q}''' = 4,6805$  ve  $\bar{h} \rightarrow \infty$  değerinde radyal, teğetsel ve eksenel gerilme bileşenleri

Ayrıca silindirde, merkezinden yarıçapa doğru sıfır değerine doğru azalan bir radyal gerilme izlenmektedir. Bunun nedeni, dış yüzeyde herhangi bir radyal yükleme olmamasıdır. Merkezde ise hacimsel iç enerji üretiminin varlığı, gerilme bileşenlerinin sonlu değerlerden başlamalarına neden olmaktadır. Teğetsel gerilmenin ise yarıçapa yaklaştıkça basma özelliğinden çekme gerilmesine ulaştığı görülmektedir.



Şekil 11.3. Homojen izotropik kırıta kritik  $\bar{q}''' = 4,6805$  ve  $\bar{h} \rightarrow \infty$  değerinde radyal, teğetsel gerinimler ve yerdeğiştirme değerleri

Yukarıdaki şekil incelenirse sabit uçlu homojen izotropik silindirde radyal ve teğetsel gerinim, silindir merkezinde maksimum değerlerinden başlamak üzere, yarıçapa doğru azalmaktadır. Bunda hacimsel iç enerji üretiminin merkezde en yüksek değerlerde bulunup, yarıçapa doğru akışkan nedeniyle sıcaklık değerlerinde düşme olması sebep olarak gösterilebilir.

Birim yerdeğiştirme ise merkezde son derece küçük bir değerden başlayarak gittikçe artmaktadır.

Eş. 11.8'de, Eş. 11.10 ile sayısal değeri verilen Poisson oranının yerleştirilmesiyle homojen izotropik silindirde akmaya sebep olacak  $\bar{q}'''$  değeri, aşağıdaki biçime dönüşür:

$$\bar{q}''' = \frac{11,28}{2,41 + \frac{5,64}{\bar{h}}} \quad (11.12)$$

Bu mantığa göre  $\bar{h}$ ,  $\infty$  değerine gitmediği zaman, alacağı her sonlu ve küçük değer ile  $\bar{q}'''$  değerinin düşmesine sebep olur.

### 11.3. FDM Silindir için İncelemeler

Bu bölümde yapılan analizler, boyutsuzlaştırılmış çözümler üzerinden yapılmıştır. Bu nedenle  $\bar{\beta}_1 = 0,1$ ,  $\bar{\beta}_2 = 0,1$ ,  $\bar{\beta}_3 = 0,1$  seçilmiştir ve başlangıçta bu değerler kullanılacaktır.

Bu değerlerden  $\bar{\beta}_2$ , Bölüm 6.2'de açıklanan metal merkezli, yüzeye doğru gittikçe seramikleşen FDM silindir modeli için uygundur. Buna göre merkezdeki elastisite değeri, yüzeydeki elastisite değerinden daha düşüktür ve bu da tüm homojen çözümler olmak üzere genel çözümlerin temelini etkilemektedir.  $\bar{\beta}_2$  değerinin bu şekilde (pozitif) seçilmesinin ardından  $\bar{\beta}_1$  ve  $\bar{\beta}_3$  değerleri, silindirin içine karıştırılacak farklı malzemelerin etkilerinin kabulüyle biraz daha rasgele seçilebilir ve burada 0,1 seçilmişlerdir. Bu iki parametrenin negatif olduğu durumlar da incelenmiştir ve yorumlanmıştır.

Öncelikle, homojen izotropik silindir için hesaplanmış olan kritik ısı yük değerinin FDM silindirde gerilme bileşenlerinde nasıl bir sonuç doğurduğu incelenmiştir.

Buna göre Çizelge 11.1 incelenecek olursa FDM silindirin, homojen izotropik silindirde akmaya neden olan ısı yük değerinde akmadığı anlaşılabilir. Bu nedenle FDM silindir için daha yüksek ısı yük değerleri araştırılmalıdır. Ayrıca, homojen izotropik silindirin merkezinde,

$$\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_\theta \bar{\sigma}_z \quad (11.13)$$

şeklinde bir gerilme durumu varken, yüzeyde,

$$\bar{\sigma}_\theta \bar{\sigma}_z \bar{\sigma}_r = 0 \quad (11.14)$$

durumu gözlenmektedir. Bu durum literatürdeki çalışmalarla uyum sağlamaktadır. FDM silindirde ise, Eş. 11.13 ile tanımlanan durum sağlanmaz. Silindir merkezinde teğetsel gerilme bileşeni radyal gerilme değerinden biraz daha yüksektir.

Çizelge 11.1. Homojen izotropik silindir ile FDM silindir üzerindeki kritik ısı yük değerleri

	$\bar{q}'''$	$\bar{\sigma}_r$	$\bar{\sigma}_\theta$	$\bar{\sigma}_z$	$\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_z$	$\bar{\sigma}_\theta - \bar{\sigma}_z$
Homojen İzotropik Silindir	4,6805	- 0,414938	- 0,414938	- 1,414938	= 1	= 1
FDM Silindir	4,6805	- 0,426655	- 0,431432	- 1,4182	< 1	< 1
FDM Silindir	4,7204	- 0,430295	- 0,435	- 1,430295	= 1	< 1
FDM Silindir	4,74279	- 0,432333	- 0,437060	-1,43706	> 1	=1

Bu karşılaştırmadan, aynı çalışma koşulları altında referans yüzey sıcaklığındaki FDM silindirin, homojen izotropik silindire göre daha yüksek iç enerji üretimlerine dayandığı sonucu çıkarılır.

FDM silindir için akmaya neden olan kritik hacimsel iç enerji üretimi parametresi seçilen  $\bar{\beta}$  değerleri için aşağıdaki gibi bulunur.

$$\bar{q}''' = 4,72044 \quad (11.15)$$

$$\bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_z = 1 \quad (11.16)$$

Kritik ısı yük bu değeri aldığı anda, merkezde Eş. 11.16 sağlanır ve akma silindir ekseninde başlar. Bununla ilgili gerilme bileşenlerinin aldıkları değerler Şekil 11.4'ten de incelenebilir.

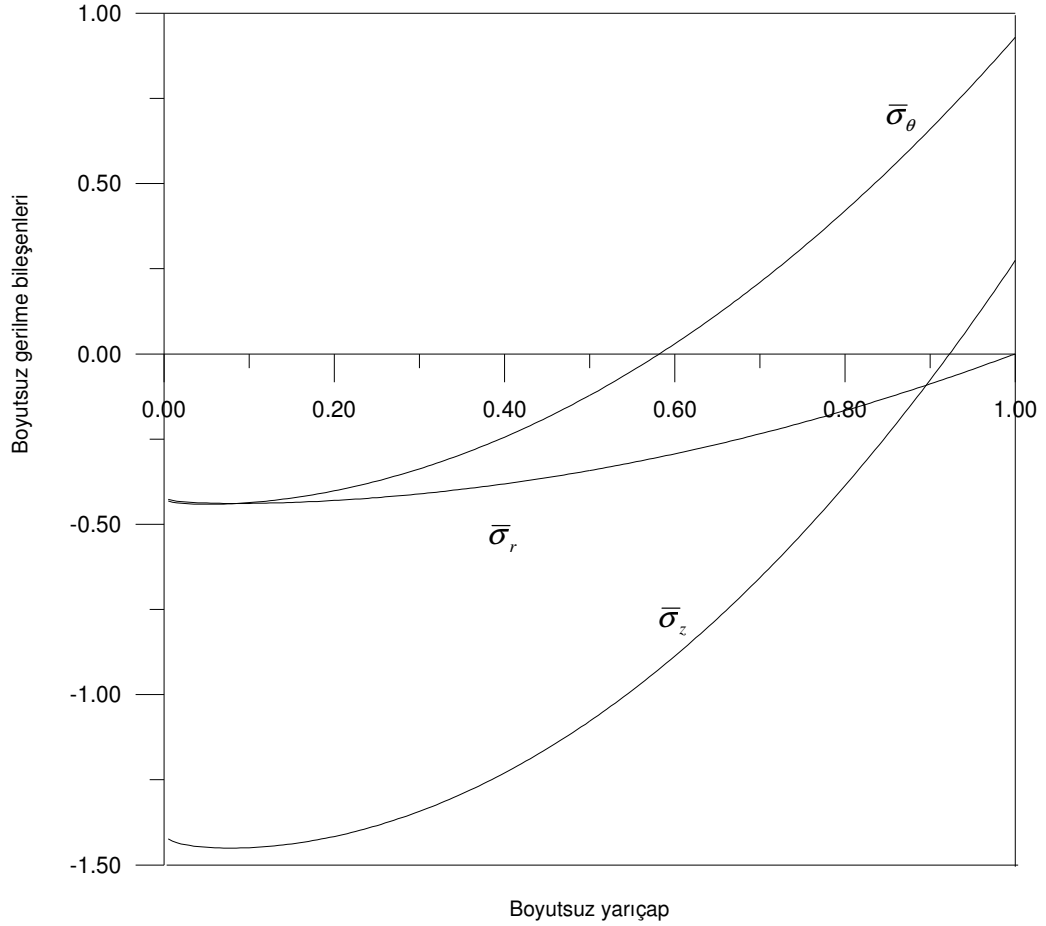
Buna göre FDM silindirin merkezinde Eş. 11.17 ile verilen durum sağlanır.

$$\bar{\sigma}_\theta \rangle \bar{\sigma}_r \rangle \bar{\sigma}_z \quad (11.17)$$

FDM silindirin yüzeyinde ise Eş. 11.18 ile verilen durum sağlanır:

$$\bar{\sigma}_\theta \rangle \bar{\sigma}_z \rangle \bar{\sigma}_r \quad (11.18)$$

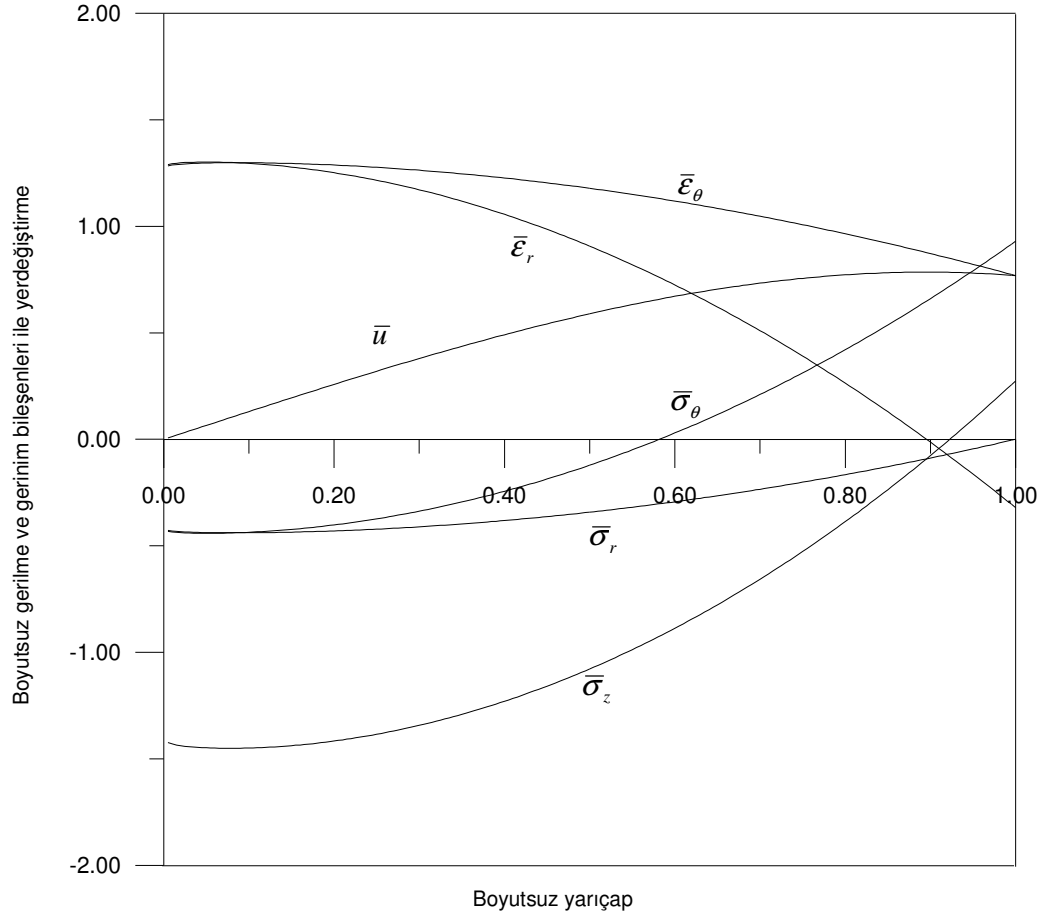
Burada gerilme bileşenleri arasındaki sayısal farklar, merkezde meydana gelen farklardan çok daha azdır.



Şekil 11.4.  $\bar{\beta}_1 = 0,1$  ,  $\bar{\beta}_2 = 0,1$  ,  $\bar{\beta}_3 = 0,1$  ve sabit uçlu FDM silindirde akmaya sebep olan  $\bar{q}''' = 4,72044$  ve  $\bar{h} \rightarrow \infty$  değeri için boyutsuz gerilme bileşenleri

Aşağıdaki şekillerde, kritik  $\bar{q}'''$  değerinin varlığında sabit uçlu FDM silindirde meydana gelen gerinim değerleri ve yerdeğiştirme değeri de incelenebilir.

FDM silindirin uçları sabit olduğu için Şekil 11.5'te aksenal gerinim sıfırdır. Radyal ve teğetsel gerinim silindir merkezinden dış yüzeye doğru düzgün olarak azalmaktadır, birim radyal yerdeğiştirme ise merkezden yüzeye doğru artmaktadır.



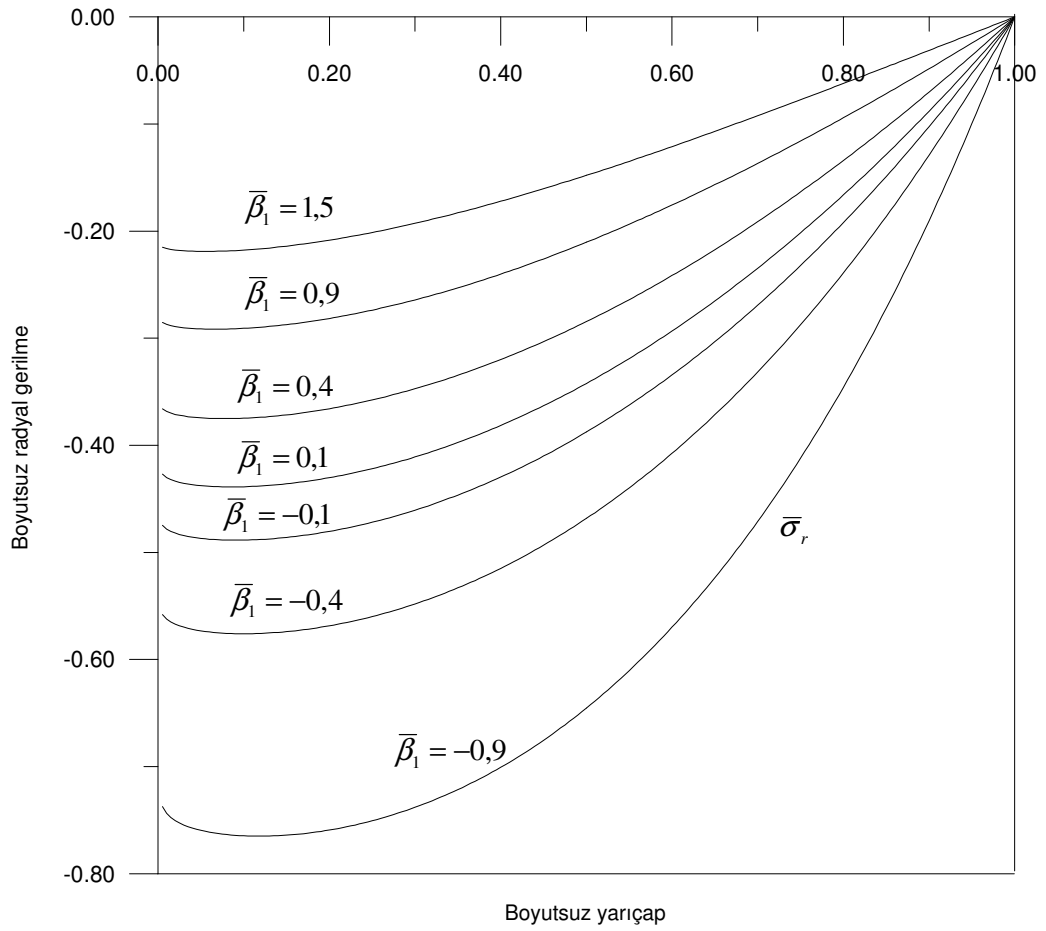
Şekil 11.5.  $\bar{\beta}_1 = 0,1$  ,  $\bar{\beta}_2 = 0,1$  ,  $\bar{\beta}_3 = 0,1$  ve sabit uçlu FDM silindirde akmaya sebep olan  $\bar{q}''' = 4,72044$  ve  $\bar{h} \rightarrow \infty$  değeri için boyutsuz gerinim bileşenleri ile yerdeğiştirme

Silindir merkezinde plastik akma kontrolü yapıldıktan sonra, silindir dış yüzeyi için de akma kontrolü yapılmıştır. Buna göre merkezde metal malzemeden yüzeyde seramik malzemeye doğru geçiş yapan FDM silindirde yüzeye göre akma kontrolü yapıldığı zaman, merkezde akmaya neden olan  $\bar{q}''' = 4,72044$  değeri, yüzeyde plastik akmaya sebep olmamaktadır. Seramik dış yüzeyde akmaya sebep olacak kritik ısıl yük son derece yüksek olacağı ve bu değer, merkezdeki metalin çoktan akmasına sebep olacağı için, silindir merkezine göre yapılmış olan akma kontrolü referans alınacaktır.

#### 11.4. FDM Silindirde $\bar{\beta}$ Parametrelerinin Etkileri

Bu bölümdeki tüm incelemeler, FDM silindirde  $\bar{q}''' = 4,72044$  ve  $\bar{h} \rightarrow \infty$  değerleri için yapılmıştır.

##### 11.4.1. $\bar{\beta}_1$ parametresinin etkisi

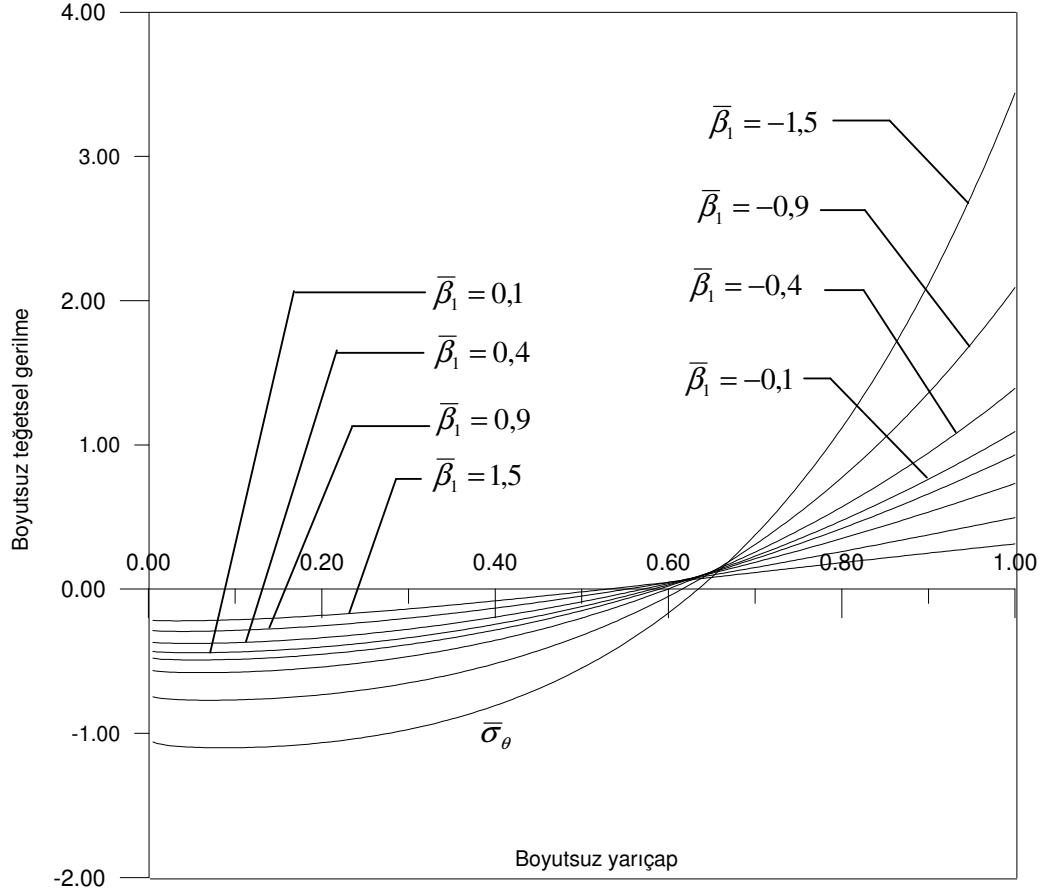


Şekil 11.6. Değişik  $\bar{\beta}_1$  değerleri için radyal gerilme bileşeni

$\bar{\beta}_1$  değişkeni, FDM kirişin ısı iletim fonksiyonunda önemli bir katsayıdır ve silindirin fonksiyonel olarak değişen ısı iletimi önem kazanmaktadır. Görülmektedir ki ısı iletimi artıran pozitif  $\bar{\beta}_1$  değerindeki artış, daha iyi bir ısı yayımı ve bunun

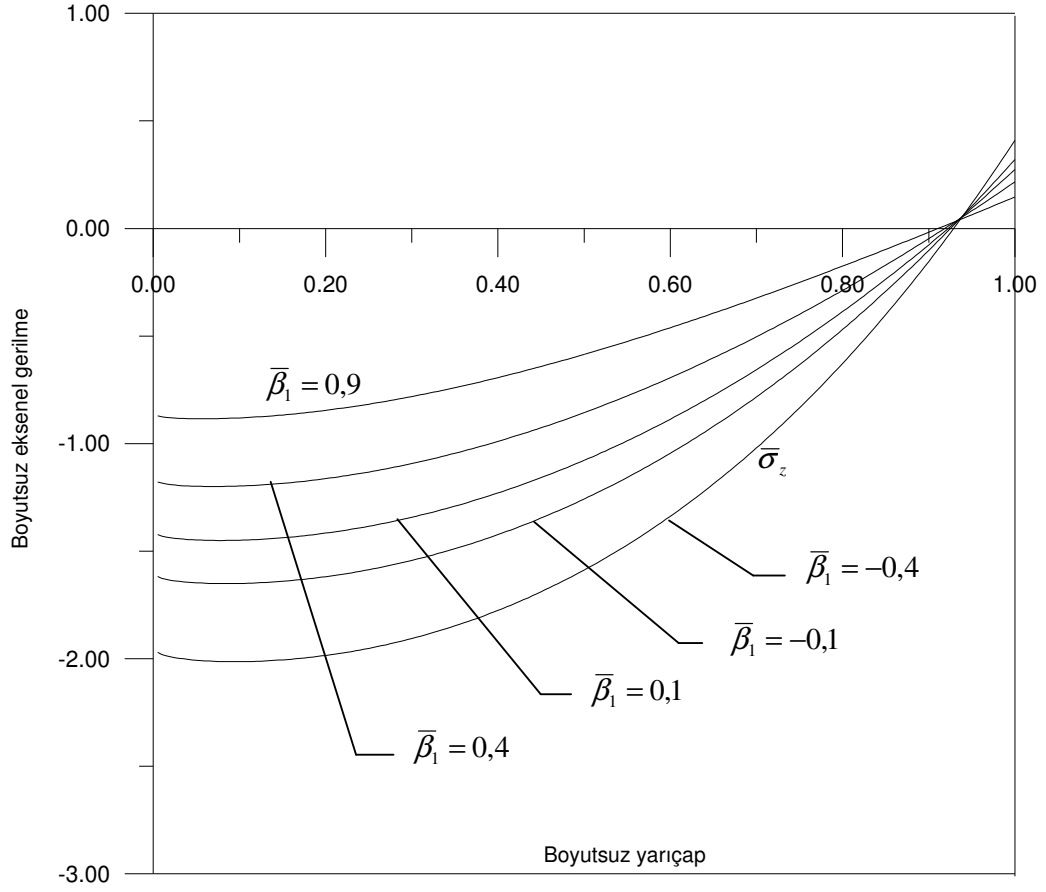


sonucunda kirişte radyal gerilme bileşeninde azalmaya neden olmaktadır. Negatif  $\bar{\beta}_1$  değerindeki artış, tam tersi bir etki yaratarak silindir merkezine doğru azalan bir ısı iletimi demektir ki merkezdeki ısıl gerilmelerde daha yüksek değerlere kaymaya sebep olur.



Şekil 11.7. Değişik  $\bar{\beta}_1$  değerleri için teğetsel gerilme bileşeni

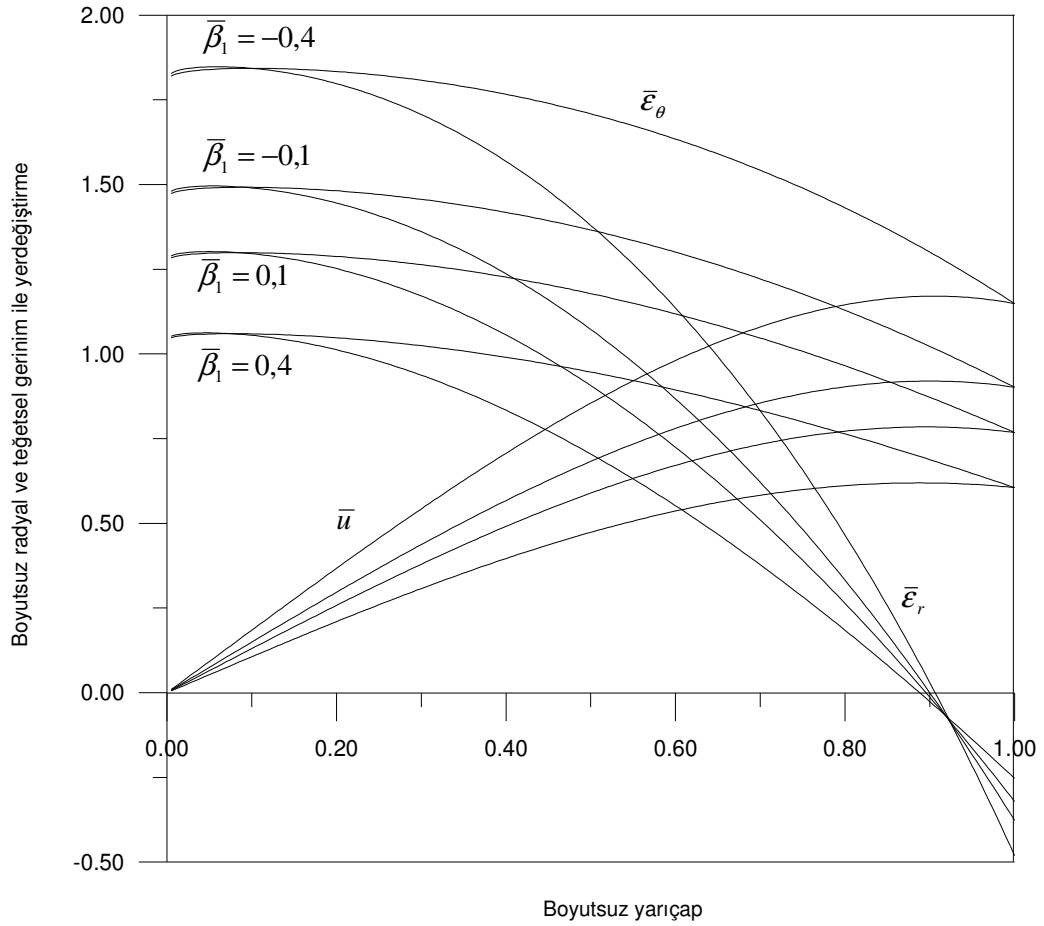
Şekil 11.7 incelenirse teğetsel gerilme silindir merkezinde en büyük değerlerdedir ve dış yüzeyde her zaman zıt bir işarete sahiptir ve yarıçapın ara bir değerinde işaret değiştirmektedir [38]. Isı iletim katsayısı  $\bar{\beta}_1$  artırıldıkça ısı iletimi de artmakta ve teğetsel gerilme silindir merkezinde daha düşük değerlerden başlamakta yani bir başka deyişle eğriler daha yukarıdan başlamaktadır.



Şekil 11.8. Değişik  $\bar{\beta}_1$  değerleri için aksenal gerilme bileşeni

$\bar{\beta}_1$  parametresinin negatif değerleri için teğetsel gerilme bileşeni de, radyal gerilme bileşenine benzer meyilde sonuçlar vermekte, bu parametre negatif yönde daha büyük değerler aldıkça teğetsel gerilme bileşeni negatif yönde artmaktadır. Benzer bir etki, daha belirgin olarak aksenal gerilme bileşeni için de söz konusudur (Bkz. Şekil 11.8).

Ayrıca, radyal ve teğetsel gerilme bileşenleri ile yerdeğiştirme değeri üzerinde  $\bar{\beta}_1$  parametresinin etkisi, aşağıdaki şekillerle incelenebilir. Şekil değiştirmeler, kendileriyle ilişkili gerilme bileşenleri ile paralel etkileniş gösterirler.



Şekil 11.9. Değişik  $\bar{\beta}_1$  değerleri için radyal ve teğetsel gerinim ile yerdeğiştirme

Görüldüğü gibi pozitif olarak artan  $\bar{\beta}_1$  değeri, silindir merkezindeki sıcaklık değerinin düşmesine sebep olduğu için gerilme değerlerinde de azalmaya sebep olur, böylece gerinim değerleri de daha küçük değerlerden başlar.

Son olarak, FDM silindirin ankastre uçlarındaki boyutsuz aksel kuvvet değerleri ile  $\bar{\beta}_1$  değerlerinin sayısal değerleri Çizelge 11.2'de verilmiştir.

Gerinim ve yer değiştirme değerleri ile  $\bar{F}_z$  değerleri arasındaki mantıksal bağlantı da, FDM silindir ne kadar uzama ya da kısalmaya çalışırsa, uçları sabit olduğu için tepki kuvvetleri de o kadar artacağı şeklindedir.

Çizelge 11.2. Çeşitli  $\bar{\beta}_1$  değerleri ile FDM silindirin uçlarında oluşan  $\bar{F}_z$ 

$\bar{\beta}_1$	$\bar{F}_z/(2\pi)$	$\bar{\beta}_1$	$\bar{F}_z/(2\pi)$
0,1	- 5,74032	- 0,1	- 6,65315
0,4	- 4,6143	- 0,4	- 8,32562
0,9	- 3,23382	- 0,9	- 12,1869
1,5	- 2,1423	-1,5	- 19,466

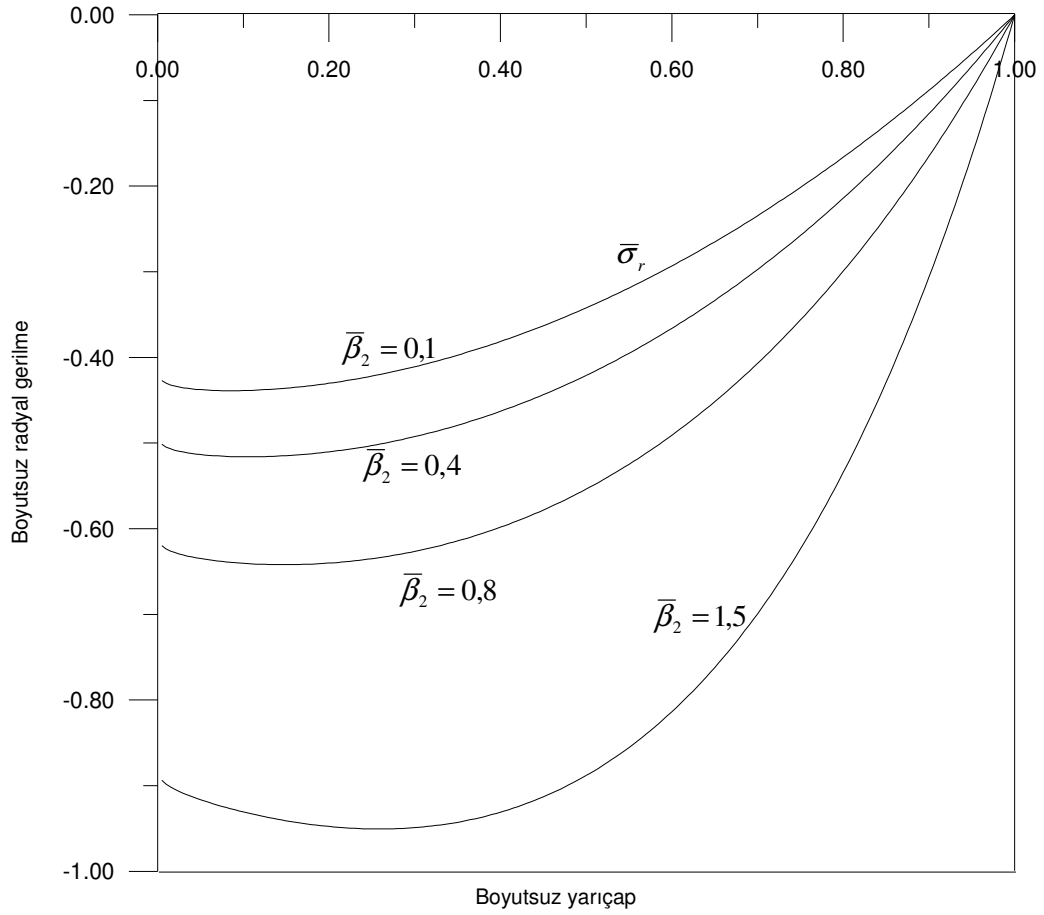
Görüldüğü gibi uçlardaki tepki kuvvetleri, negatif yönde artırılan  $\bar{\beta}_1$  değeriyle belirgin bir şekilde artmaktadır. Buna sebep olarak, silindirde maksimum yerdeğiştirmenin maksimum negatif  $\bar{\beta}_1$  değeriyle oluştuğu gösterilebilir.

#### 11.4.2. $\bar{\beta}_2$ parametresinin etkisi

$\bar{\beta}_2$  parametresi, FDM silindirde elastisite fonksiyonunu belirler. Bu parametrenin etkisi yalnızca özel çözümde değil homojen çözüm fonksiyonunda da görüldüğü için son derece kritiktir.

Bu parametre, özel çözümde bulunan Hipergeometrik fonksiyon nedeniyle, negatif bir değer alamaz. Yoksa çözüm sonsuz değerine gitmektedir. Bu nedenle bu bölümde bu parametreye sadece pozitif sonlu değerler verilmiş ve etkileri incelenmiştir.

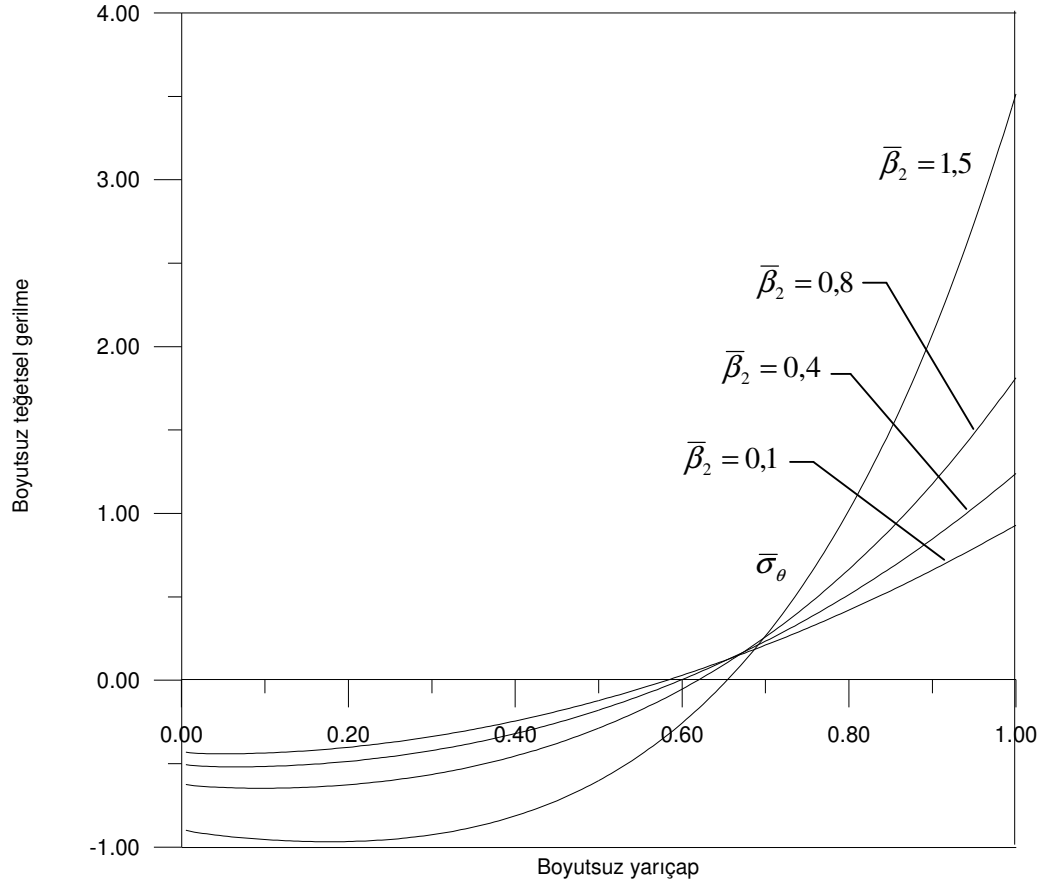
Silindir merkezinden dış yarıçapına doğru artan tokluk, dış yüzeyin gerilmelere olan dayanımının daha iyi olmasına sebep olur, bu da radyal gerilmenin, merkezde daha yüksek bası değerlerinden yüzeye doğru daha hızlı bir düşüş göstermesi demektir. Ya da kısaca,  $\bar{\beta}_2$  değeri arttıkça radyal gerilme eğrisi merkeze doğru gidildikçe artma eğilimi göstermektedir denilebilir.



Şekil 11.10. Değişik  $\bar{\beta}_2$  değerleri için radyal gerilme bileşeni

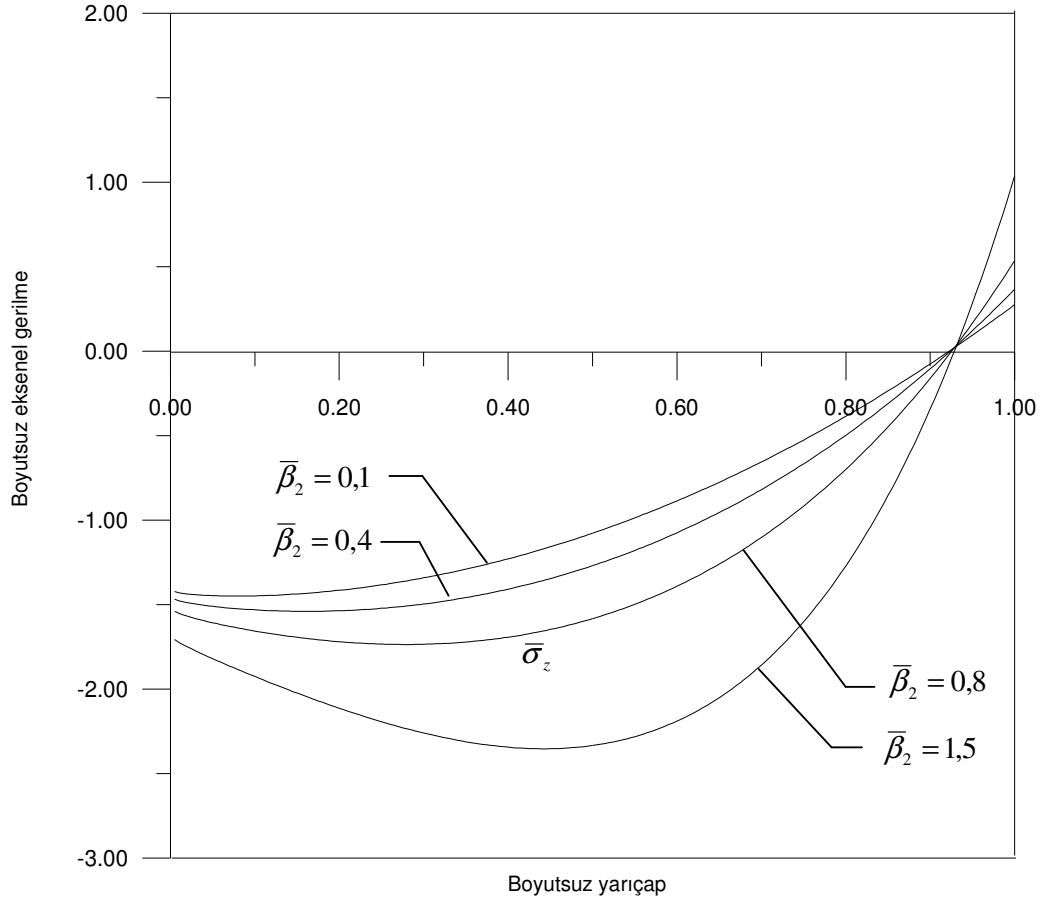
Yüzeyde herhangi bir radyal yükleme bulunmadığı için tüm eğriler silindirik yarıçapında, sıfır değerinde birleşmektedir.

$\bar{\beta}_2$  parametresinin teğetsel gerilme bileşeni üzerindeki etkisi de radyal gerilme eğrilerinde olduğu gibi merkezde (negatif yönde) azaltırken dış yüzeyde artırıcıdır (Bkz. Şekil 10.11). Teğetsel gerilme, basma özelliğinden çekme özelliğine silindirin bir ara yarıçap değerinde ulaşır. Dış yüzeye doğru son derece belirgin şekilde artan tokluk nedeniyle en yüksek  $\bar{\beta}_2$  değeri, en yüksek teğetsel gerilme değerine dayanımı sağlar.



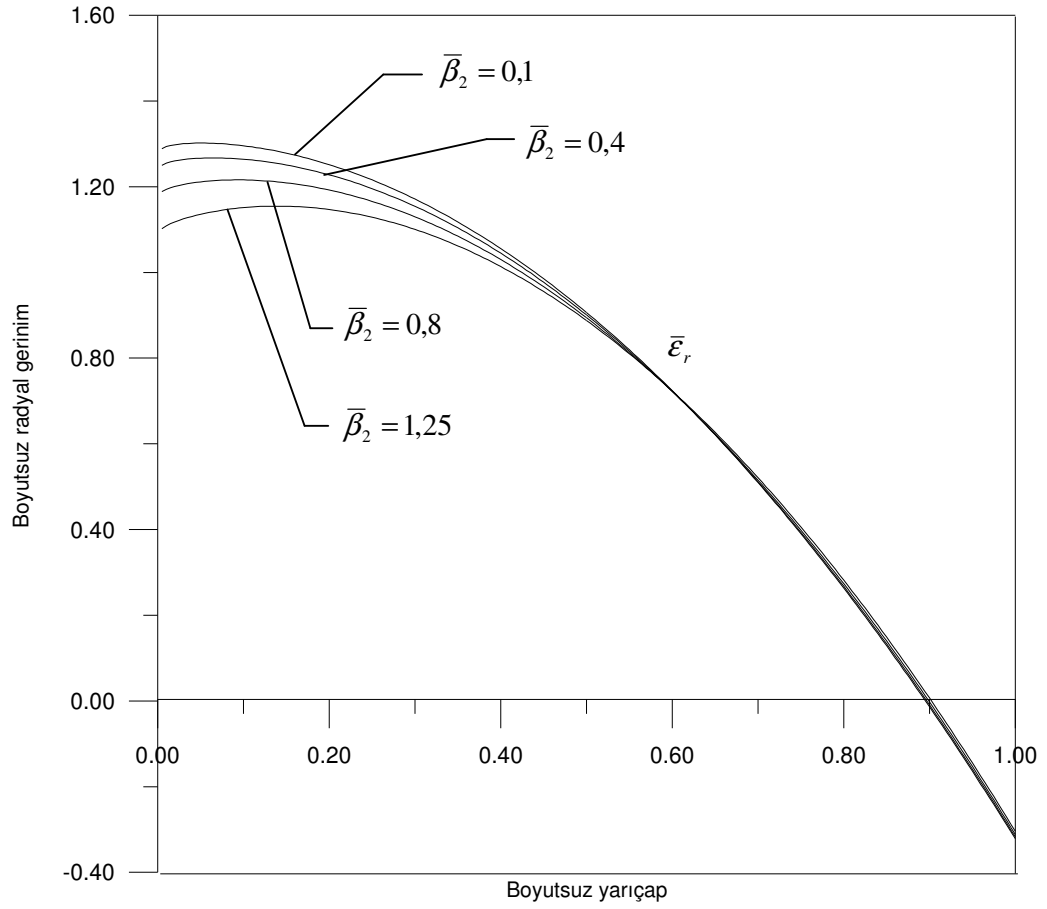
Şekil 11.11. Değişik  $\bar{\beta}_2$  değerleri için teğetsel gerilme bileşeni

FDM silindirde akma şartını sağlayan değerler ( $\bar{q}''' = 4.72044$  ve  $\bar{h} \rightarrow \infty$ ) için  $\bar{\beta}_2$  parametresinin aksenal gerilme üzerindeki etkileri Şekil 11.12'de görülmektedir. Akma koşulu nedeniyle aksenal gerilme bileşeni, radyal gerilme bileşeninden bir tam değer daha farklıdır ve -1,5 civarında bir değerden itibaren başlamakta ve yüzeye doğru azalmaktadır.



Şekil 11.12. Değişik  $\bar{\beta}_2$  değerleri için eksenel gerilme bileşeni

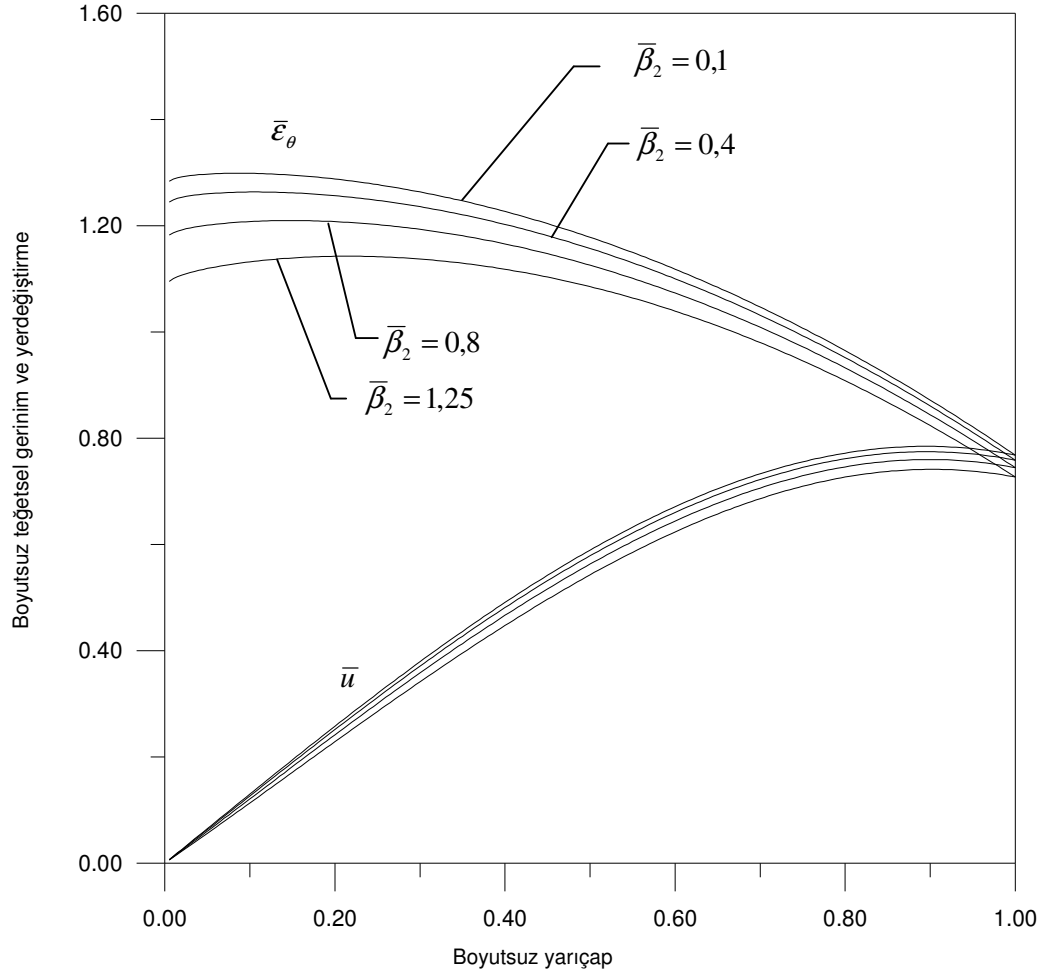
Şekil 11.12 incelenirse,  $\bar{\beta}_2$  değeri, silindir içerisinde eksenel gerilme değerinde azalmaya neden olurken, yüzeyde artmasını sağlamaktadır. Bu değer gerilmenin silindirin merkezinden uzaklaştıkça daha hızlı bir düşüş göstermesine ancak yüzeye yaklaşıırken daha hızlı bir şekilde yükselmesine neden olmaktadır. Bu anlamda eksenel gerilme, silindirin merkeziyle dış yüzeyi arasında ortalara doğru  $\bar{\beta}_2$  artışından daha kritik şekilde etkilenmekte, merkezindeki ve yüzeyindeki ardışık eğriler arasındaki değer farkları daha önemsiz kalmaktadır.



Şekil 11.13. Değişik  $\bar{\beta}_2$  değerleri için radyal gerinim bileşeni

Artan  $\bar{\beta}_2$  değeri, radyal ve teğetsel gerinim ile yerdeğiştirmenin baskı altına alınmasına neden olmaktadır. Bu durum Özkan ile uyumludur [48].





Şekil 11.14. Değişik  $\bar{\beta}_2$  değerleri için teğetsel gerinim ile yerdeğiştirme

Ayrıca  $\bar{\beta}_2$  değerinin artış göstermesi eksenel kuvvetin bası yönünde artmasına neden olmaktadır. Bu durum Çizelge 11.3'ten de görülebilir.

Görüldüğü gibi artan  $\bar{\beta}_2$  değeri, artan  $\bar{\beta}_1$  değerinin eksenel kuvvette yarattığı azalmayı yaratmamaktadır. Tam tersi bir etkiyle, artışa neden olmaktadır.

Çizelge 11.3. Çeşitli  $\bar{\beta}_2$  değerleri ile FDM silindirin uçlarında oluşan  $\bar{F}_z$

$\bar{\beta}_2$	$\bar{F}_z/(2\pi)$
0,1	- 5,74032
0,4	- 6,50364
0,5	- 7,74705
1,25	- 9,541

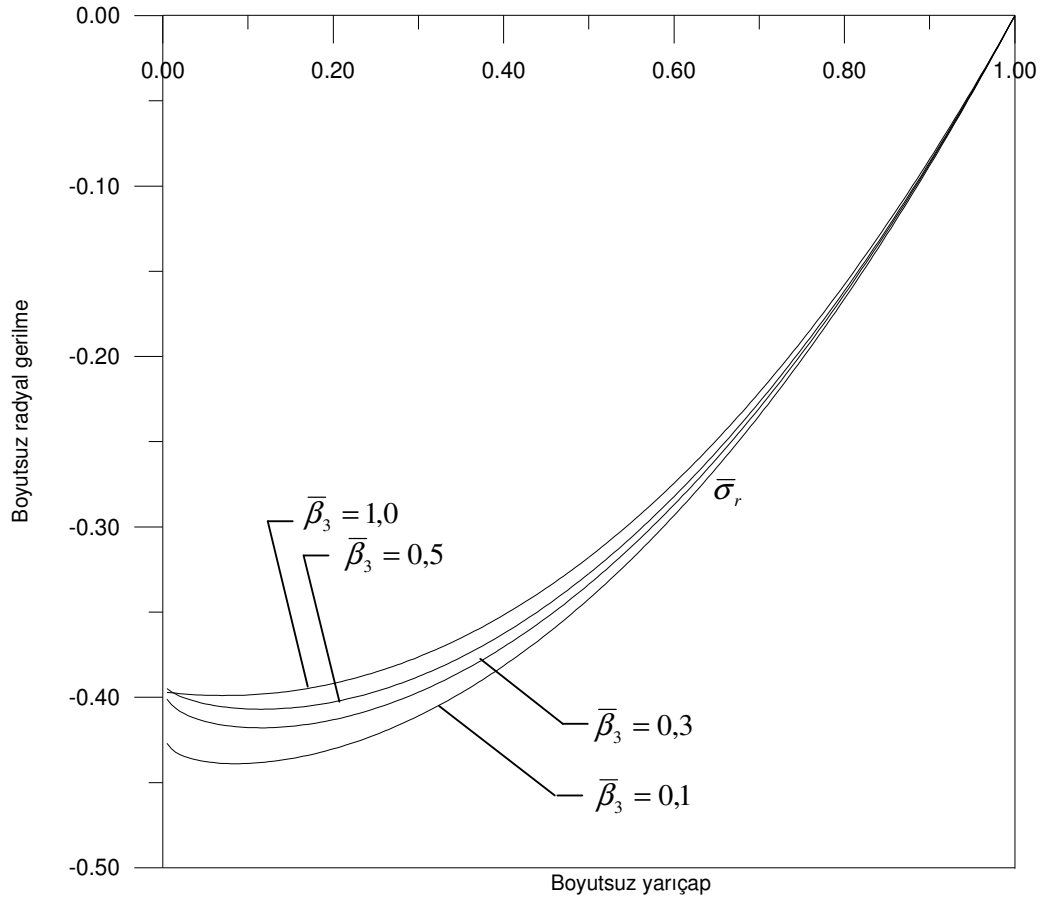
#### 11.4.3. $\bar{\beta}_3$ parametresinin etkisi

$\bar{\beta}_3$  parametresi, FDM silindirin ısı genleşme fonksiyonunu ifade eder ve farklı değerler alması durumunda gerilme bileşenlerini ve radyal yerdeğiştirmeyi ne şekilde etkilediği aşağıda incelenmiştir.

Bölüm 6'da incelendiği gibi  $\bar{\beta}_3$  hem pozitif hem negatif değerler alabilir. Ancak negatif değerler alması sonucunda kendi boyutsuz ifadesi ve FDM silindir de son derece yüksek gerilme değerleri verdiği için bu çalışmada negatif  $\bar{\beta}_3$  değerleri ele alınmamıştır (Bkz. Şekil 6.6).

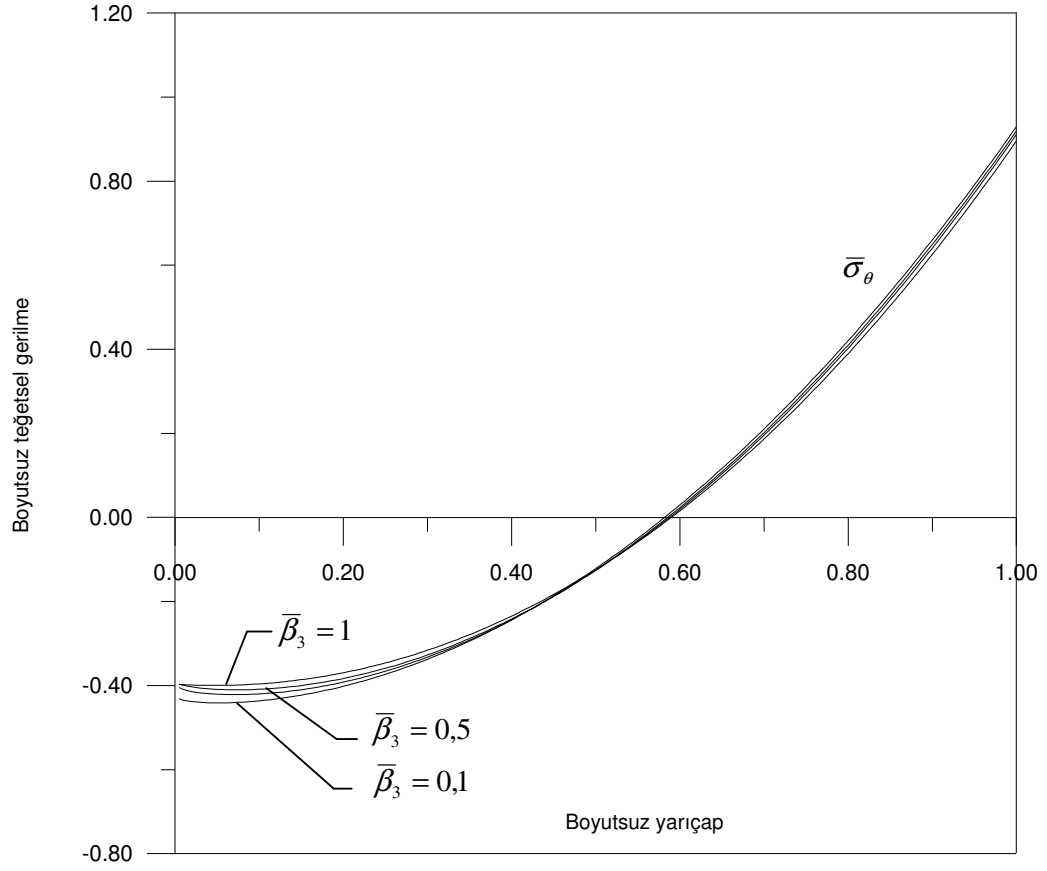
Bölüm 6'da Şekil 6.5'te verilen durum için aşağıda incelemeler yapılmıştır. Buna göre artan  $\bar{\beta}_3$  değerleri, pozitif  $\bar{n}$  değerleri için ısı genleşme eğrilerinde bir önceki eğriye göre azalmaya sebep olmaktadır. Isıl genleşme fonksiyonunun yarıçapla arttığı durumda, uçları sabit FDM silindirin dış kenarları merkez kısımlardan daha fazla genleşmeye çalışacaktır, bu da iç kısımlarda çekme yönünde radyal gerilme oluşmana sebep olur. Tersisi durumda, FDM silindir kendi merkezinden daha az genleşmeye çalışır ve bu da uçları sabitlenmiş FDM silindirin içinde bir bası gerilmesi oluşturur (Bkz. Şekil 11.15).

Dış yüzeyi daha fazla genişleyen FDM silindirde merkezden yüzeye doğru gerilme değerlerinde azalma olur.



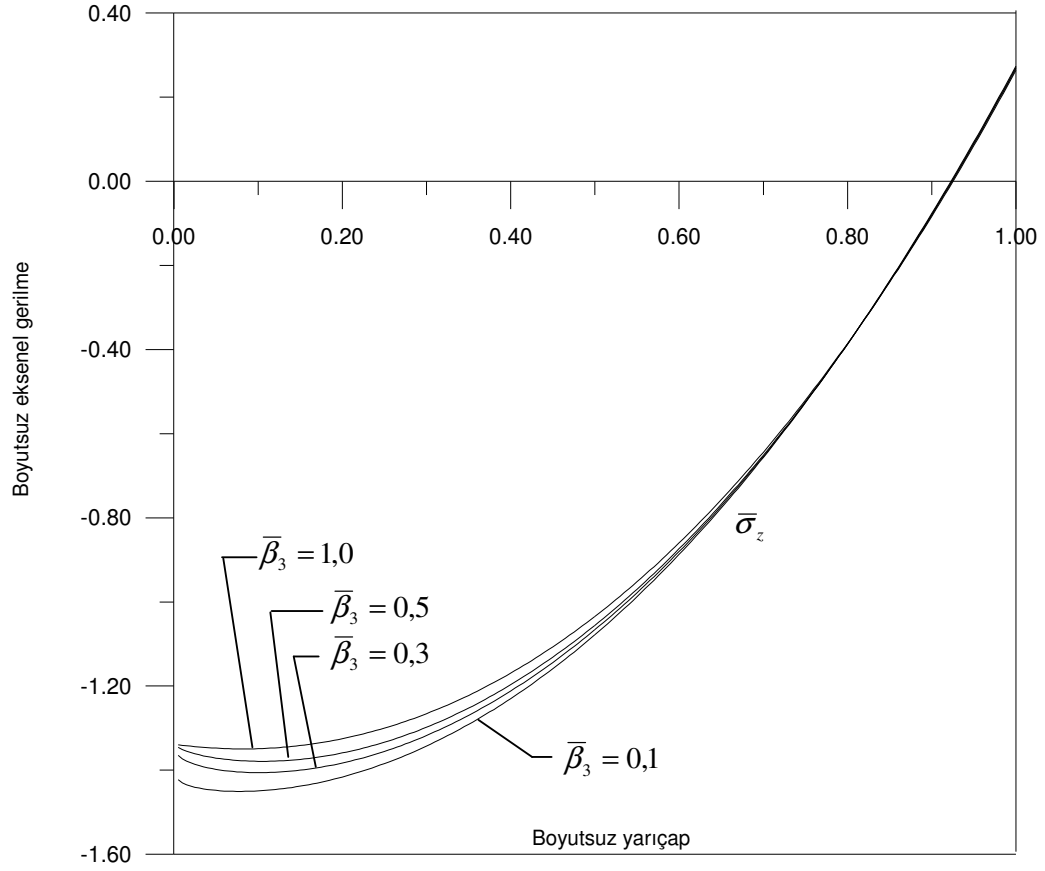
Şekil 11.15. Değişik  $\bar{\beta}_3$  değerleri için radyal gerilme bileşeni

Pozitif  $\bar{\beta}_3$  değerlerindeki artışın radyal gerilme bileşeninde yarattığı etki, teğetsel gerilme bileşeninde de gözlemlenebilir.



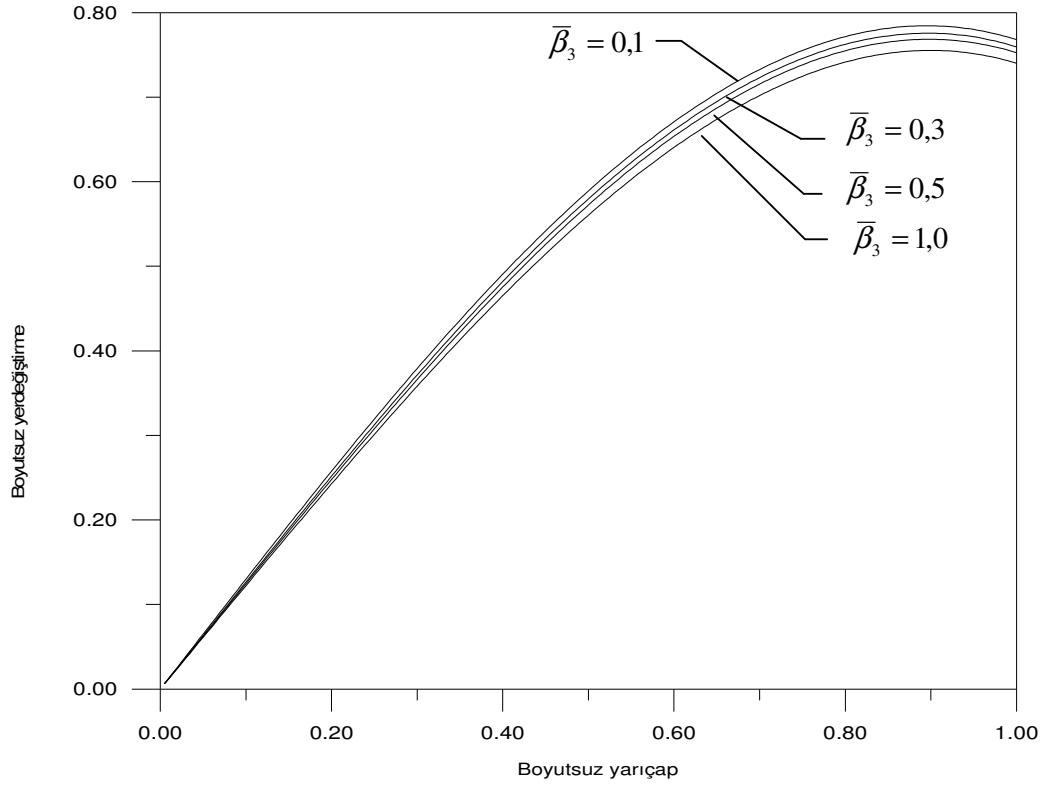
Şekil 11.16. Değişik  $\bar{\beta}_3$  değerleri için teğetsel gerilme bileşeni

Görüldüğü gibi ısı genleşme parametresinin teğetsel gerilme bileşeni üzerindeki etkisi oldukça azdır.



Şekil 11.17. Değişik  $\bar{\beta}_3$  değerleri için aksel gerilme

Bununla birlikte artan  $\bar{\beta}_3$  değeri, radyal değiştirmede azalmaya sebep olmaktadır. Bunun için Şekil 6.4 incelenirse pozitif  $\bar{n}$  değerleri için artan  $\bar{\beta}_3$  değeri, ısıl genleşme eğrilerinin daha düşük değerlerde ilerlemesine neden olmaktadır. Azalan ısıl genleşme radyal yerdeğiştirmede de azalan bir profile sebep olur.



Şekil 11.18. Değişik  $\bar{\beta}_3$  değerleri için radyal yerdeğiştirme

İki ucu sabit FDM silindirde oluşan aksenal kuvvet değerleri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

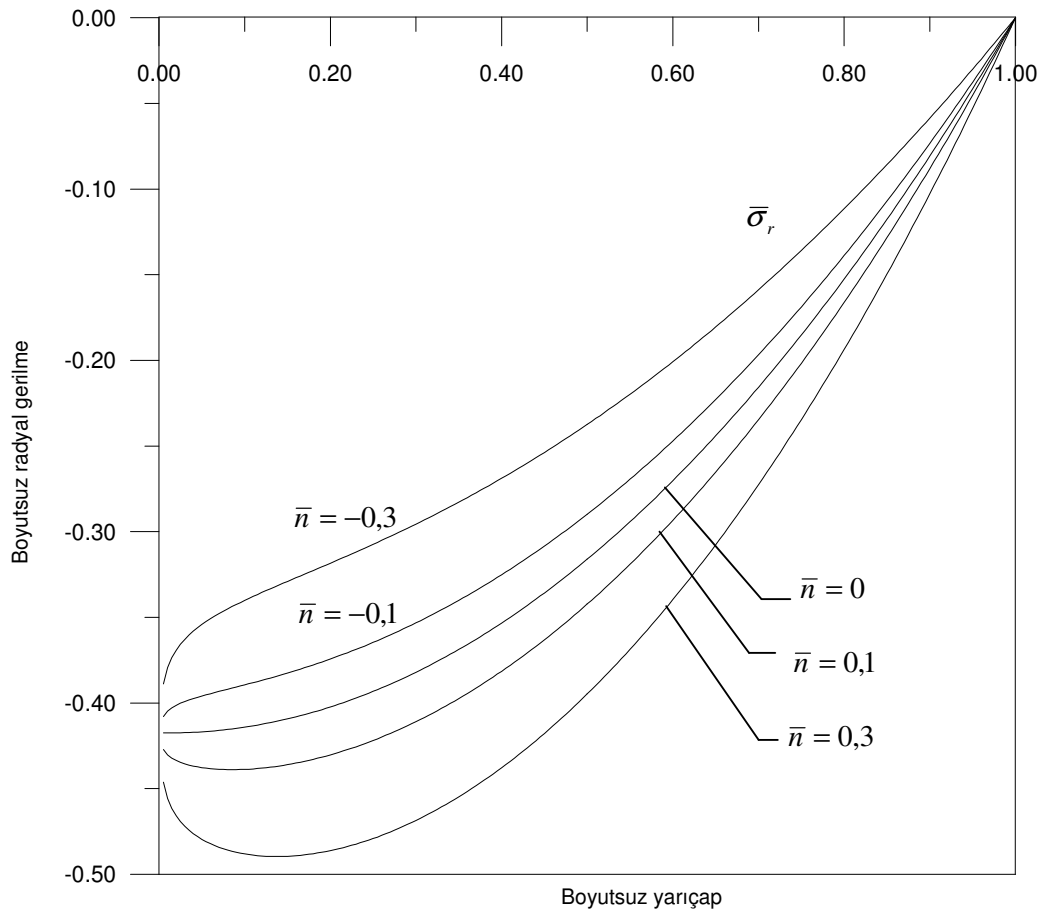
Çizelge 11.4. Çeşitli  $\bar{\beta}_3$  değerleri ile FDM silindirin uçlarında oluşan  $\bar{F}_z$

$\bar{\beta}_2$	$\bar{F}_z/(2\pi)$
0,1	- 5,74032
0,3	- 5,63679
0,5	- 5,56508
1,0	- 5,45861

Buna göre artan  $\bar{\beta}_3$  değeri, uçlardaki boyutsuz aksenal kuvvetlerde bası yönünde azalmaya neden olmaktadır.

## 11.5. FDM Silindirde $\bar{n}$ ve $\bar{h}$ Parametrelerinin Etkileri

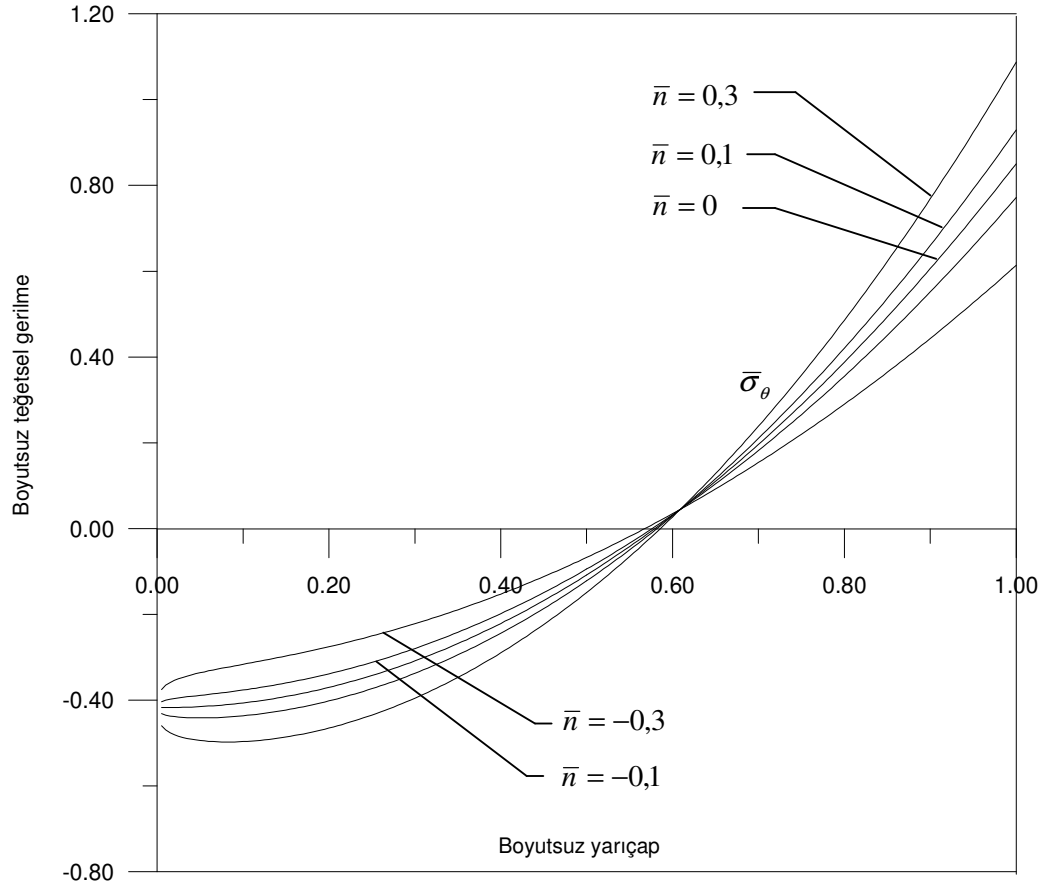
### 11.5.1. $\bar{n}$ parametresinin etkisi



Şekil 11.19. Değişik  $\bar{n}$  değerleri için radyal gerilme bileşeni

Bölüm 6'da da pozitif ve negatif oluşunun etkileri incelenmiş olan  $\bar{n}$  parametresinin, Şekil 11.19'da da görülebileceği gibi pozitif yönde artmasıyla radyal gerilme bileşeninde bası yönünde artışa neden olmaktadır. Şekil 6.5 ve Şekil 6.8 tekrar incelenirse pozitif ve 0,1 değerinde tutulan  $\bar{\beta}_1$ ,  $\bar{\beta}_2$ ,  $\bar{\beta}_3$  değerleri için  $\bar{n}$ , pozitif yönde arttıkça FDM silindirde ısı genleşme fonksiyonu yüzeye doğru artar; bu da

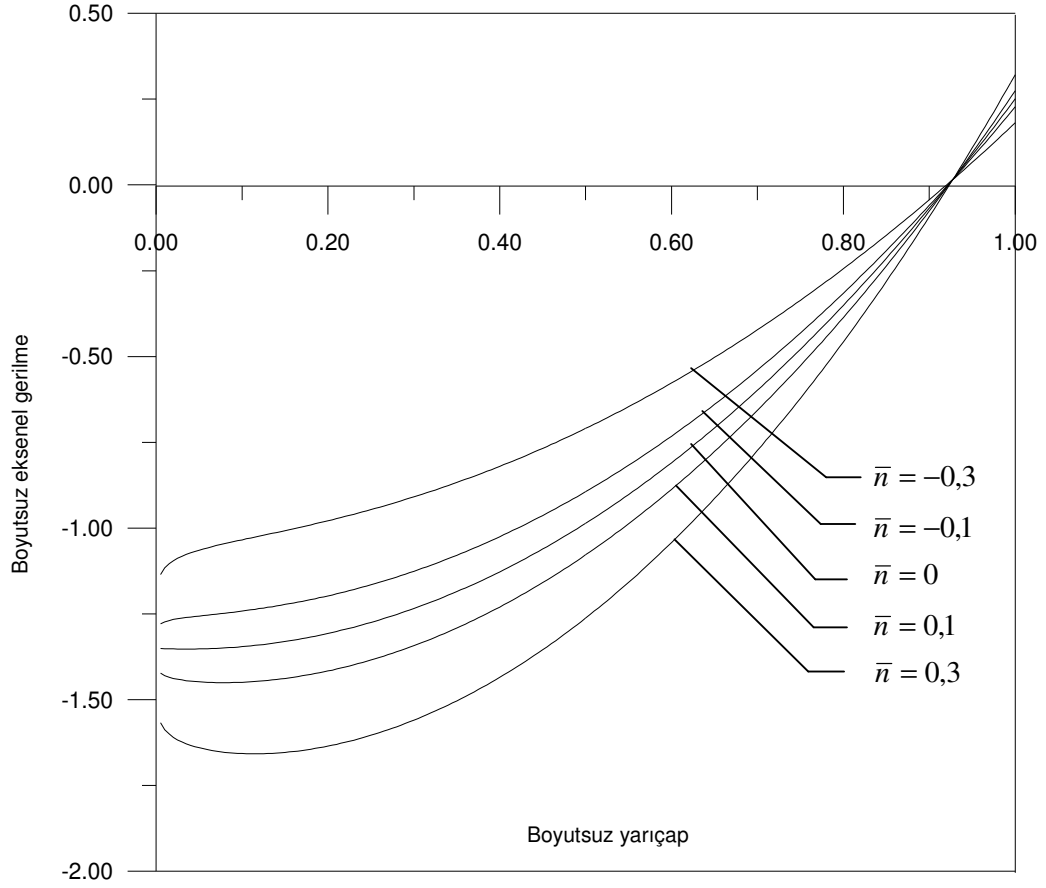
fiziksel anlamda radyal gerilmenin artmasına neden olur, çünkü silindir daha çok genişlemeye çalışmaktadır. Negatif değerleri alan  $\bar{n}$ , gerilme değerlerinde tam tersi etki yaparak düşmeye neden olur. Aynı etki teğetsel gerilme bileşeninde de görülür (Bkz. Şekil 11.20).



Şekil 11.20. Değişik  $\bar{n}$  değerleri için teğetsel gerilme bileşeni

Benzer etki, eksenel gerilme bileşeninde daha belirgin şekilde görülür.



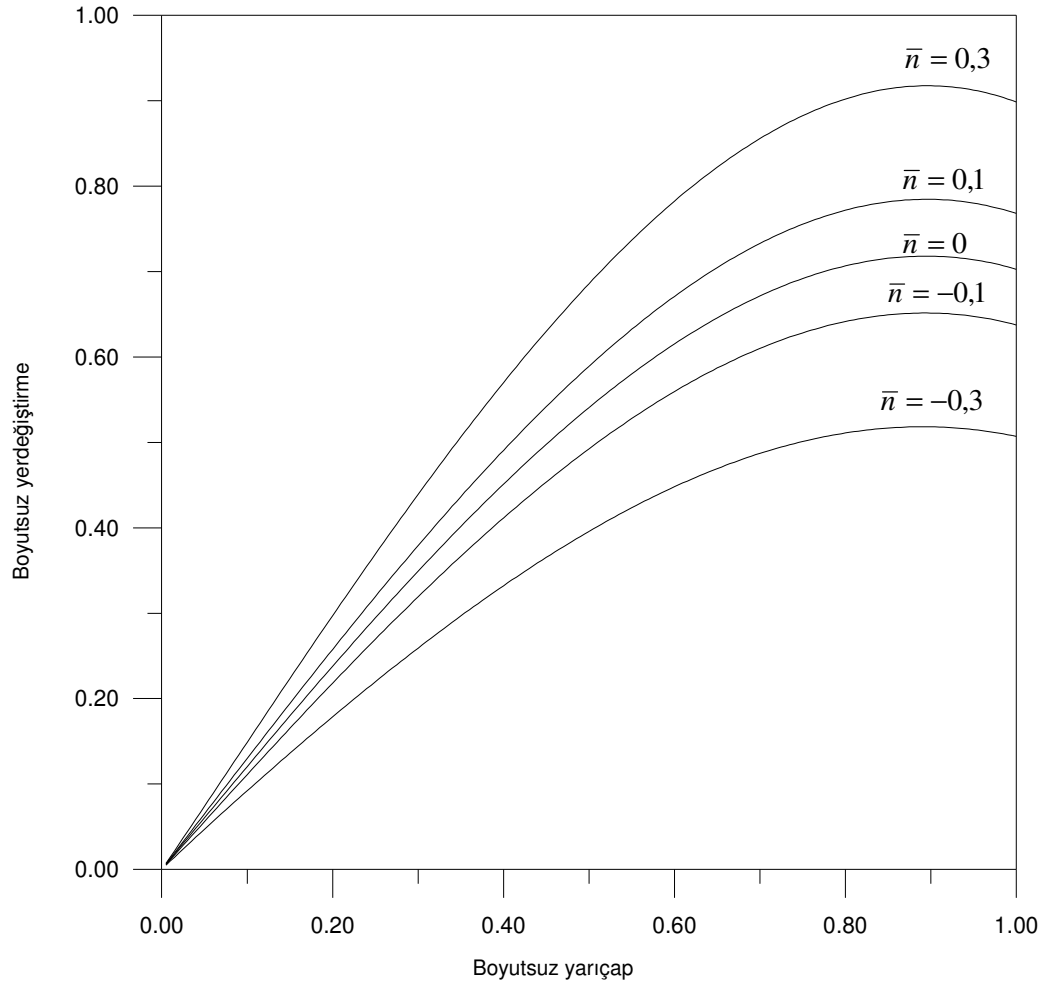


Şekil 11.21. Değişik  $\bar{n}$  değerleri için aksenal gerilme bileşeni

Radyal yerdeğiştirme değerine  $\bar{n}$  parametresinin etkisi, gerilmelerin artışıyla orantılıdır, ancak yerdeğiştirme her zaman FDM silindirin merkezinden yüzeyine doğru artmak zorunda olduğu için bu etki artış ya da azalış şeklinde değil, sayısal anlamdadır ve pozitif olarak artan ısı genleşme katsayısıyla birlikte radyal yerdeğiştirme de artar.

Negatif olarak azalan bu katsayı ise silindir yüzeyinde daha az ısı genleşme ve daha az radyal yerdeğiştirme demektir.

Çizelge 11.5'te ise  $\bar{n}$  parametresiyle birlikte değişen boyutsuz aksenal kuvvet değerleri incelenebilir.



Şekil 11.22. Değişik  $\bar{n}$  değerleri için radyal yerdeğiştirme

Çizelge 11.5. Çeşitli  $\bar{n}$  değerleri ile FDM silindirin uçlarında oluşan  $\bar{F}_z$

$\bar{n}$	$\bar{F}_z/(2\pi)$	$\bar{n}$	$\bar{F}_z/(2\pi)$
0	- 5,28228	- 0,1	- 4,82424
0,1	- 5,74032	- 0,3	- 3,90817
0,3	- 6,6564		

Bu çizelgeye göre uçlardaki aksenal kuvvet,  $\bar{n}$  değerinin artmasıyla daha büyük değerlere sahip olmaktadır. Bunun fiziksel anlamı, artan ısı genleşme katsayısının gerilmeleri de artırması olarak açıklanabilir.

Negatif  $\bar{n}$  değerleriyle birlikte, uçlardaki aksenal kuvvet de beklendiği gibi azalacaktır.

### 11.5.1. $\bar{h}$ parametresinin etkisi

İzotropik ve FDM silindir için gerilme ve gerinim bileşenleri, sıcaklık dağılımları; taşınım katsayısının sonlu ve sonsuz olduğu her iki durum için de önceki bölümlerde ifade edilmiş ve hesaplanmıştı.

$\bar{h}$  katsayısının  $\infty$  olduğundan bahsedilerek yapılan incelemelerde, silindir yüzeyinin ortam sıcaklığıyla aynı olması nedeniyle taşınım katsayısının da  $\infty$  değerinde olduğu kabul edilmiştir. Eş. 11.8 veya Eş. 11.12 kullanılarak izotropik ve FDM silindir için yeni bir kritik ısı yük ve  $\bar{h}$  değeri araştırılmak istendiğinde hacimsel iç enerji üretiminin yeni ve farklı bir radyal fonksiyon alınmadığı sürece, son derece yüksek  $\bar{h}$  değerlerinin kullanılması gerektiği anlaşılmıştır.

Bu şekilde izotropik ve FDM silindir,  $\bar{h}$  katsayısının  $\infty$  olduğu duruma yakınsamaya çalışmaktadır. Çünkü  $\bar{q}'''$  değeri sabittir.

Literatürde konvektif ısı sınır şartına sahip homojen izotropik silindirlere ait çalışmalardan Eraslan ve Orcan'ın [22], bu sorunu basit bir radyal fonksiyon olarak değişen iç enerji üretimini ele alarak çözdükleri görülmektedir. Buna göre Eraslan ve Orcan, hacimsel iç enerji üretimini aşağıdaki gibi almışlar, sıcaklık dağılımı da izleyen denklemdeki gibi ifade etmişler ve verilen şartlara göre kritik bir  $\bar{h}$  değeri elde etmişlerdir:

$$q(r) = q'''(1 + a_1 r + a_2 r^2) \quad (11.19)$$

$$T(r) = \left\{ T_{\infty} + \frac{bq'''}{h} \left[ \frac{1}{2} + \frac{ba_1}{3} + \frac{b^2a_2}{4} \right] \right\} + \frac{q'''}{\lambda} \left\{ \frac{b^2 - r^2}{4} + \frac{a_1(b^3 - r^3)}{9} + \frac{a_2(b^4 - r^4)}{16} \right\} \quad (11.20)$$

$$\bar{q}''' = \frac{1440bh(1-\nu)[1 - E\alpha T_{\infty}/\sigma_0]}{(120\lambda(1-\nu)(6 + 4\bar{a}_1 + 3\bar{a}_2) + bh[90(3-2\nu) + 32\bar{a}_1(4-3\nu) + 15\bar{a}_2(5-4\nu)])} \quad (11.21)$$

Bu problemdeki şartlar (Bkz. Eş. 11.22) uygulanırsa, Eş. 11.21 bize Eş. 11.12'yi vermektedir.

$$a_1 = 0, a_2 = 0, T_{\infty} = 0^{\circ}C \quad (11.22)$$

Ancak bu eşitlikten Eraslan ve Orcan'ın,

$$\bar{a}_1 = -2, \bar{a}_2 = 1 \quad (11.23)$$

değerlerini vererek buldukları aşağıdaki ısı yük değeri ve kritik taşınım katsayısı;

$$\bar{q}''' = 5.7003 \quad (11.24)$$

$$\bar{h} = 1.042 \quad (11.25)$$

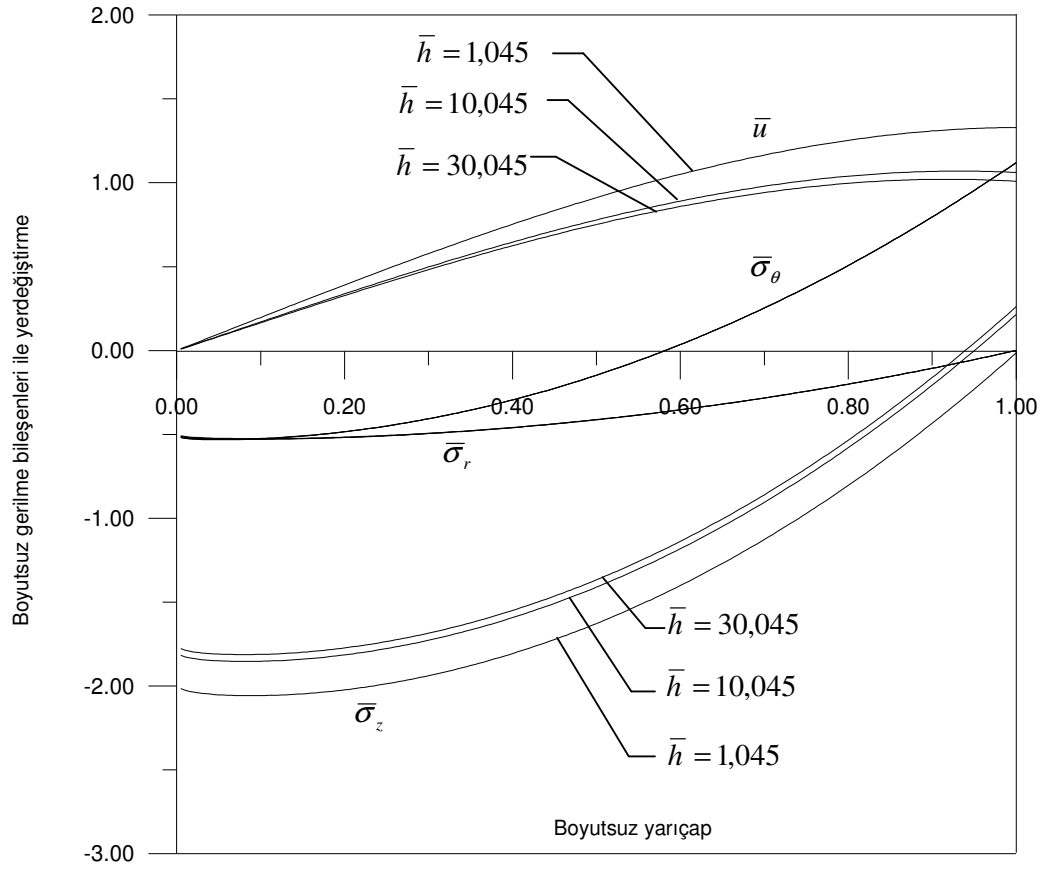
homojen izotropik silindir için bu problemde bulunamaz. Çünkü problemimizdeki hacimsel iç enerji üretimi tanımında  $\bar{a}_1, \bar{a}_2$  gibi seçenekleri artırıcı parametreler yoktur. Bu parametrelerin yokluğunda sadece sabit değerler alabilen  $\bar{q}'''$  değeri nedeniyle, Eş. 11.12'de  $\bar{h}$  'a verilen sonlu değerler  $\bar{q}'''$  değerinin son derece küçülmesine neden olmaktadır. Aksi takdirde  $\bar{q}'''$  değerinin aynı değerlerde tutulması FDM silindirin eksende akmasına sebep olmaktadır. Bunu önlemek için  $\bar{h}$  değerlerinin 70-80 gibi yüksek ve zorlanmış konveksiyona karşılık gelen değerler olması gerekmektedir. Benzer bir durum FDM silindir için de geçerli olmaktadır.

Bu da aksel gerilme bileşeninin tanımı gereği, homojen izotropik ve FDM silindirlerde tüm gerilme bileşenlerinin denklemlerinde geçen aşağıdaki terimin,

$$\frac{1}{\bar{h}} \rightarrow \infty \quad (11.26)$$

olması anlamına gelir ki bu bölüm boyunca, referans yüzey sıcaklığındaki FDM silindir modeline çeşitli parametrelerin etkisi incelenirken bu kabul kullanılmıştır.

Çeşitli  $\bar{h}$  değerleri için silindirin plastik akışı aşağıdaki şekilde gösterilebilir. Burada verilen ilk değer, Eraslan ve Orcan'ın konvektif sınır şartı etkisinde, uniform olmayan iç enerji üretimi yapan, homojen izotropik silindirde akmaya neden olan değerdir. FDM silindir modeline de yaklaşık sayılar verilerek etkisi araştırılmıştır.



Şekil 11.23. Değişik  $\bar{h}$  değerleri için FDM silindirde gerilme bileşenleri ile radyal yerdeğiştirme ( $\bar{q}''' = 5,700$ )

Şekil 11.23'ten de görülebileceği gibi, sabit hacimsel iç enerji üretimi yapan FDM silindirde  $\bar{h}$  değeri artırıldıkça aksenal gerilme azalmakta, ancak bu şekilde akma geciktirilebileceği anlaşılmaktadır. Buradaki taşınım katsayısı değerleri silindir akmasını önlemek için yetersiz kalmıştır. Isıl yük değeri sabit bir değer olarak kabul edildiği sürece, Eş. 11.26 sağlanmadıkça FDM silindir akacaktır.

Aynı zamanda artan  $\bar{h}$  değeri, radyal yerdeğiştirme değerlerinde de azalmaya sebep olmaktadır. Radyal ve teğetsel gerilme bileşenlerinde çok belirgin farklar ise yaratmamaktadır.

Buradan,  $\bar{h}$  değerinin etkin bir şekilde incelenebilmesi için hacimsel iç enerji üretimi değeri olan  $\bar{q}'''$  'nun da sabit değil radyal yönde seçilmesinin daha doğru olacağı sonucu çıkarılabilir.

Çünkü bu şekilde FDM silindir, yüksek sıcaklıklara dayanabilmesi amacıyla tasarlanmış oluş kavramından uzaklaşmaktadır.

Çeşitli  $\bar{h}$  değerlerinin boyutsuz aksenal kuvvete olan etkisi aşağıdaki çizelgeden incelenebilir:

Çizelge 11.6. Çeşitli  $\bar{h}$  değerleri ile FDM silindirin uçlarında oluşan  $\bar{F}_z$

$\bar{h}$	$\bar{F}_z/(2\pi)$
1,045	- 26,5634
10,045	- 8,97386
30,045	- 7,61435
50,045	- 7,34146

Görüldüğü gibi taşınım, uçlardaki kuvvetleri gittikçe azaltmaktadır. Tablodaki ilk değer,  $\bar{h}$  değeri merkezden ısıtmaya göre son derece yetersiz kaldığı (ve silindir akmakta olduğu) için son derece büyüktür.

## 11. SONUÇ

Bu çalışmada, içi dolu bir FDM silindirin mekanik özellikleri fonksiyonel olarak ifade edilerek, ağır çalışma koşullarında uçları sabit bir kiriş gibi düşünülüp, üzerinde oluşan gerilmeler ve gerinimler teorik olarak hesaplanmıştır. Benzer sıcaklık dağılımı altındaki homojen izotropik bir silindirde oluşan gerilme ve gerinim bileşenleri de, bu sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Her iki tip silindir hem referans yüzey sıcaklığı hem de taşınım ısı sınır şartları için ayrı ayrı incelenmiş ve karşılaştırılmıştır.

Silindirin radyal doğrultuda değişen bir sıcaklık altında olduğu düşünülerek, homojen olmayan bir yapı incelenerek probleme daha genel ve gerçekçi bir durum kazandırılmıştır.

FDM silindirin, ekseninde %100 metal malzeme içerdiği, yüzeye doğru seramik yüzdesinin arttığı ve dış yüzeyinde %100 seramik malzeme olduğu kabul edilmiştir. Bu nedenle merkezdeki metalin ısı yük nedeniyle akması, Tresca akma şartıyla incelenmiştir.

Bu çalışmada Poisson oranının sabit bir değer olduğu kabul edilmiştir. Poisson oranının sabit kabul edilmediği bir durum incelenecek olursa, bu çalışmadaki homojen denkleme ait çözümlerden farklı çözümler elde edilir. Bu durumda homojen denklemin tüm terimleri radyal doğrultuya bağlı olacağı için, numerik veya tabakaların incelendiği yöntemler kullanılmak durumundadır [48].

Bu çalışmada yapılan çözümler yarı analitik olup, sonsuz serilere açılabilen özel fonksiyonları içeren integral terimleri, numerik olarak integre edilmiştir.

Metal ve seramik malzeme karışımından elde edilen FDM silindirde, elastisite, ısı iletim ve ısı genleşme fonksiyonlarının özellikleri, gerilme ve gerinimler üzerinde beraber etkimektedir. Bu çalışmada yapılan incelemelerde, her parametrenin etkisi tek başına incelenmiş, eş zamanlı olarak öteki parametreler sabit tutulmuşlardır.



Parametrelerin ikiye ikiye değiştirilerek gerilme ve gerinimler üzerindeki etkileri beraber de incelenebilirler.

Silindirdeki hacimsel iç enerji üretimi sabit bir değer alınmıştır. Buna göre malzeme özellikleri sıcaklığa göre değişken alınmadığı için ve hacimsel iç enerji üretimi de sabit bir değer kabul edildiği için taşınım katsayısı  $\infty$  değer almadığı sürece silindirde akma oluşmuştur. Literatürde, artan iç enerji üretimiyle birlikte elastisite modülünün son derece kritik değerlere kadar azaldığını ifade eden çalışmalar bulunmaktadır.

Bu çalışmanın sonucuna göre referans yüzey sıcaklığındaki FDM silindir, homojen izotropik bir silindire göre daha yüksek ısı yüklerine plastik akma gerçekleşmeden dayanmaktadır.

FDM malzeme üretilirken ısı iletim fonksiyonuna ait  $\bar{\beta}_1$  parametresi, pozitif değerlerde artırıldığı sürece çevreye daha iyi bir sıcaklık yayımı sağlanarak silindirin daha yüksek ısı yüklerine dayanabilmesi sağlanabilir. Buna göre bu parametre negatif değerler alırsa silindir merkeze doğru daha çok ısı tutmaya meyilli hale geldiği için akma riski artar.

Elastisite fonksiyonuna ait  $\bar{\beta}_2$  parametresi, malzemenin üretildiği metal ve seramik tipleriyle yakından alakalıdır. Bu parametrenin pozitif değerlerde artırılması, silindir yüzeyinin ve yüzeyine yakın yerlerin daha yüksek toklukları nedeniyle daha yüksek gerilmelere dayanmaya meyilli olduklarını göstermektedir [12]. Bu da metal esaslı merkezden seramik (ve kırılğan) esaslı yüzeye doğru gidildikçe kırılğan bölümlerin de saf seramikten daha iyi dayanım göstereceklerini ifade eder.

Isıl genleşme fonksiyonuna ait  $\bar{\beta}_3$  parametresi, pozitif değerlerde artmasıyla hem gerilme bileşenlerinin hem de eksenel kuvvetin değerlerini azaltmaktadır. Burada,  $\bar{n}$  katsayısının rolü de unutulmamalıdır. Zhao ve arkadaşları [49], yüksek ısı şok dirençli içi dolu silindirler için şu önerilerde bulunmuşlardır:

- Silindirin merkezindeki ısı genleşme  $\alpha$  ve ısı yayılma  $\kappa (= \lambda/c\rho)$  katsayıları, yüzeydeki değerlerinden yüksek olmalıdır.
- Merkezdeki Young modülü, yüzeydeki değerden düşük olmalıdır.

Bu önerilere göre  $\bar{\beta}_2$  değeri zaten hep pozitif seçilerek 2. öneri bu çalışmada sağlanmıştır. Bunun için elastisite ile benzer fonksiyonda olan ısı iletim fonksiyonunun Şekil 6.2'deki ifadesine bakılabilir.

İlk öneriye göre merkezde daha yüksek ısı genleşme fonksiyonu,  $\bar{n}$  değerinin negatif olmasıyla sağlanmaktadır. Bu şekilde Şekil 11.21 – Şekil 11.23. ve Çizelge 11.5 incelendiğinde negatif  $\bar{n}$  değerlerinin, gerilme ve eksenel kuvvet değerlerini azalttığı görülmektedir.

Merkezde daha yüksek ısı iletim fonksiyonu değerleri için Şekil 6.3 incelenmelidir. Buna göre  $\bar{\beta}_1$  değerleri negatif olmalıdır. Ancak negatif değerler aldığında bu parametre silindir merkezinde daha az sıcaklık yayılmasına sebep olmaktadır. Bu da silindirin ısı yüküne karşı dayanımını azaltacaktır. Buna göre ısı difüzyon katsayısı ifadesi içinde bulunan yoğunluğun da radyal yönde değiştiği kabulü yapılarak bu ikisinin birlikte etkisi incelenebilir. Literatürde FDM silindirlerde yoğunluğu da radyal yönde değişen fonksiyonlar şeklinde alan çalışmalar bulunmaktadır [48].

**KAYNAKLAR**

1. Noda, N., "Thermal Stresses in Functionally Graded Materials", *J. Thermal Stresses*, 22: 477-512 (1999).
2. Steinberg, M. A., "Materials for Aerospace", *Sci. America*, 255: 4, 59-64 (1986).
3. Yamanouchi, M., Koizumi, M., Shiota, I., *Proceedings of the First Int. Symposium on Functionally Gradient Materials*, Sendai, Japan, 169-173 (1990).
4. Koizumi, M., "The Concept of FGM", Holt, J. B. et al, "Functionally Gradient Materials", *Ceramic Trans., The American Ceramic Society*, 34: 3-9 (1993).
5. Tanigawa, Y., "Some Basic Thermoelastic Problems for Nonhomogenous Structural Materials", *Appl. Mech. Rev.*, 48: 6, 287-300 (1995).
6. Noda, N., "Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties", Hetnarski, R. B. (ed.), *Thermal Stresses I, Elsevier Science*, Chap. 6, North Holland, 391-438 (1986).
7. Tanigawa, Y., Akai, T., Kasai, T., "One-Dimensional Transient Heat Conduction and Associated Thermal Stress Problems of a Plate with Nonhomogenous Material Properties", *Japan Soc. Mech. Eng.*, A (61): 583, 607-613 (1995).
8. Tanigawa, Y., Kawamura, R., Oka, N., Akai, T., "Transient Thermal Stress Analysis of a Nonhomogenous Plate with Temperature-Dependent Material Properties", *J. Thermal Stresses*, 19 (1): 77-102 (1996)
9. Tanigawa, Y., Matsumoto, M., Akai, T., "Optimization of Material Composition to Minimize Thermal Stresses in Nonhomogenous Plate Subjected to Unsteady Heat Supply", *JSME Int. J.*, A (40): 1, 84-93 (1997).
10. Fukui, Y., Yamanaka, N., Wakashima, K., "The Stresses and Strains in a Thick-Walled Tube for Functionally Graded Material under Uniform Thermal Loading", *JSME Int. J.*, Ser. I, 36: 156-162 (1993).
11. Obata, Y., Noda, N., "Steady Thermal Stresses in a Hollow Circular Cylinder and a Hollow Sphere of a Functionally Gradient Material", *J. Thermal Stresses*, 17: 471-487 (1994).

12. Jabbari, M., Sohrabpour, S., Eslami, M. R., "Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder due to Radially Symmetric Loads", *Int. J. Pressure Vessels and Piping*, 79: 493-497 (2002).
13. Xiang, H., Shi, Z., "Elastic Analyses of Heterogenous Hollow Cylinders", *Mechanics Research Communications, Elsevier*, in press (2006).
14. Tütüncü, N., Öztürk, M., "Exact Solutions for Stresses in Functionally Graded Pressure Vessels", *Composites: Part B*, 32: 683-686 (2003).
15. Vel, S. S., Batra, R. C., "Three-Dimensional Analysis of Transient Thermal Stresses in Functionally Graded Plates", *Journal of Solids and Structures*, 40: 7181-7196 (2003).
16. Delale, F., Erdogan, F., "On the Mechanical Modeling of the Interfacial Region in Bonded Half-Planes", *J. Appl. Mech.*, 55 (2): 317-324 (1988).
17. Becker, T., Cannon, R. M., Ritchie, R. O., "An Approximate Method for Residual Stress Calculation in Functionally Graded Materials", *Mechanics of Materials*, 32: 85-97 (2000).
18. Horgan, C. O., Chan, A. M., "The Stress Response of Functionally Graded Isotropic Linearly Elastic Rotating Disks", *J. Elasticity*, 55: 219-230 (1999).
19. Apatay, T., Eraslan, A. N., "Parabolik Kalınlıklı Dönen Disklerin Elastik Deformasyonu: Analitik Çözümler", *J. Fac. Eng. Arch. Gazi Univ.*, 18 (2): 115-135 (2003).
20. Orcan, Y., Eraslan, A. N., "Thermal Stresses in Elastic-Plastic Tubes with Temperature-Dependent Mechanical and Thermal Properties", *Journal of Thermal Stresses*, 24: 1097-1113 (2001).
21. Orcan, Y., Gulgec, M., "Elastic-Plastic Deformation of a Tube with Free Ends Subjected to Internal Energy Generation", *Turkish J. Eng. Env. Sci.*, 25: 601-610 (2001).
22. Eraslan, A. N., Orcan, Y., "Thermoplastic Response of a Linearly Hardening Cylinder Subjected To Nonuniform Heat Source and Convective Boundary Condition", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 32: 133-164 (2004).
23. Gulgec, M., "Zamana Bağlı Radyal Sıcaklık Dağılımı Etkisinde ve Akma Dayanımı Sıcaklığa Bağlı Olan Uçları Serbest Bir Silindirde Isıl Gerilme Analizi", *J. Fac. Eng. Arch. Gazi Univ.*, 17 (2): 25-34 (2002).

24. Eraslan, A. N., Argeso, H., “On the Application of von Mises’ Yield Criterion to a Class of Plane Strain Thermal Stress Problems”, *Turkish J. Eng. Env. Sci.*, 29: 113-128 (2005).
25. Konez, A., Alagöz, H., Topal, S., Gülgeç, M., “Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Üretim Teknikleri ve Kullanım Alanları”, *Mühendis ve Makina*, 547: 39-52 (2005).
26. Singh, R., Fitz-Gerald, J., “Surface Composites: A new class of engineered materials”, *Journal of Materials Research*, 12 (3): 769-773 (1997).
27. Aboudi, J., Pindera, M. J., Arnold, S. M., “Higher Order Theory for Functionally Graded Materials”, *Composites: Part B - Engineering*, 30 (8): 777-832 (1999).
28. Butcher, R. J., Rousseau, C. E., Tippur, H. V., “A Functionally Graded Particulate Composite: Preparation, Measurements and Failure Analysis”, *Acta Mater.*, 47 (1): 269-268 (1999).
29. Zhang, X. H., Han, J. C., He, X. D., Kvanin, V. L., “Combustion Synthesis and Thermal Stress Analysis of TiC-Ni Functionally Graded Materials”, *J. Materials Synthesis and Processing*, 8 (1): 29-34 (2000).
30. Ruiz-Navas, M., Gordo, E., Garcia, R., “Development and Characterization of 430 L Matrix Composites Gradient Materials”, *Materials Research*, 8 (1): 1-4 (2005).
31. Pelletier, J. L., Vel, S. S., “An Exact Solution for the Steady State Thermoelastic Response of Functionally Graded Orthotropic Cylindrical Shells”, *Int. J. Solids and Structures*, 43: 1131-1158 (2006).
32. Kohri, H., Shiota, I., “Development of Thermoelectric Cooling Devices with Graded Structure”, *Materials Science Forum*, 492-493: 151-156 (2005).
33. Pompe, W., Worch, H., Epple, M., Friess, W., “Functionally Graded Materials for Biomedical Applications”, *Materials Science and Engineering*, A362: 40-60 (2003).
34. Gasik, M., Kawasaki, A., Kang, Y. S., “Optimisation of FGM TBC and Their Thermal Cycling Stability”, *Materials Science Forum*, 492-493: 9-14 (2005).
35. Gasik, M., “Micromechanical Modelling of Functionally Graded Materials”, *Computational Materials Science*, 13: 42-55 (1998).
36. Kieback, B., Neubrand, A., Riedel, H., “Processing Techniques for Functionally Graded Materials”, *Materials Science and Engineering A*, 362: 81-105 (2003).

37. Zhao, C., Vleugels, L., Basu, B., Van der Biest, O., “Graded Tribological Materials Formed by Electrophoresis”, *Materials Science Forum*, 308-311: 95-100 (1999).
38. Zimmerman, R. W., Lutz, M. P., “Thermal Stresses and Thermal Expansion in a Uniformly Heated Functionally Graded Cylinder”, *J. Thermal Stresses*, 22: 177-188 (1999).
39. Carslaw, H. S., Jaeger, J. C., “Conduction of Heat in Solids”, *Oxford Clarendon Press, 2nd edition*, USA, 10, 19, 188-191 (1959).
40. Gulgeç, M., “Rijid bir Kılıf içine yerleştirilmiş Akma Dayanımı Sıcaklığa Bağlı Bir Malzemedeki Yapılmış bir Silindirde Elastik Plastik Gerilme Analizi”, *J. Fac. Eng. Arch. Gazi Univ.*, 18 (3): 85-96 (2003).
41. Kelly, A., Stearn, R. J., McCartney, L. N., “Composite Materials of Controlled Thermal Expansion”, *Composites Science and Technology*, 66: 154-159 (2006).
42. Kakaç, S., Yener, Y., “Heat Conduction”, *Taylor&Francis Publishing Company*, 3rd edition, USA, 33-35, 36, 67-68 (1993).
43. Housner, G. W., Vreeland, T. J., “The Analysis of Stress and Deformation”, *McMillan Company*, 2nd edition, United States of America, 36-38 (1968).
44. Hibbeler, R. C., “Mechanics of Materials”, *Prentice Hall*, 6th edition, USA, 107, 540-541 (2006).
45. Edwards, C. H., Penney, D. E., “Differential Equations and Boundary Value Problems”, *Prentice Hall*, United States of America, 482-491 (1996).
46. Spiegel, M. R., “Applied Differential Equations”, *Prentice Hall*, 2nd edition, USA, 294-300 (1967).
47. Conrad, B. P., “Differential Equations with Boundary Value Problems”, *Prentice Hall*, USA, 343 (2003).
48. Özkan, N., “Uniform Sıcaklık Dağılımı ve Basınç Etkisinde Dönen Fonksiyonel Derecelendirilmiş Şaft için Gerilme Analizi”, Yüksek Lisans Tezi, *GAZİ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 17-24 (2005).
49. Zhao, J., Ai, X., Li, Y., “Thermal Shock Resistance of Functionally Gradient Solid Cylinders”, *Materials Science&Engineering A*, 418: 99-110 (2006).
50. O’Neil, P. V., “Advanced Engineering Mathematics”, *Brooks/Cole Publishing Company, ITP*, 4th edition, USA, 78-87, 91-94 (1995).

51. Keskin, İ., “Malzeme El Kitabı”, *Onarsan A.Ş. Yayın ve Dağıtım*, 2. baskı, Ankara, 130, 132, 166, 360 (1991).

**EKLER**



### EK-1 Hipergeometrik fonksiyon

Bu fonksiyon, Gauss diferansiyel denklemi olarak bilinen denklemin çözümü olarak verilmektedir [46]:

$$x^2(1-x)y'' + x(c - (a+b+1)x)y' - abxy = 0$$

Bu eşitlik aşağıdaki gibi düzenlenirse, görülür ki  $x=0$  ve  $x=1$  noktaları, bu denklemin düzenli tekil noktalarıdır [47].

$$y'' + \frac{(c - (a+b+1)x)}{x(1-x)} y' - \frac{ab}{x(1-x)} y = 0$$

Yukarıdaki eşitlik ile verilen denklemin çözümü olan Hipergeometrik fonksiyon şu şekildedir:

$$F(a, b, c, x) = y = 1 + \frac{a \times b}{1 \times c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \times 2 \times c(c+1)} x^2 + \dots$$

Hipergeometrik fonksiyon, aşağıdaki şekilde de temsil edilir:

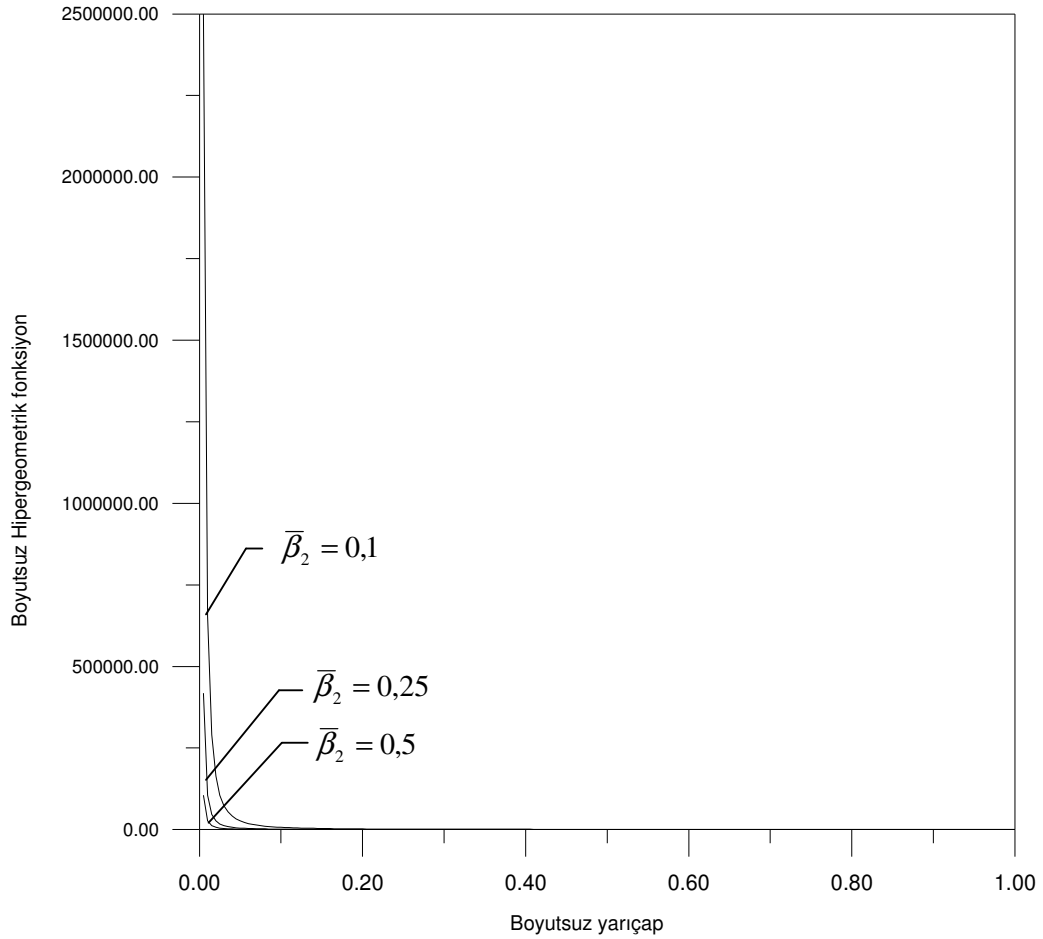
$$U(a, b, z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt$$

Söz konusu fonksiyonun ilk üç teriminin seri açılımı aşağıdaki gibidir:

$$U(a, b, z^4) = \pi C_0 \sec(b\pi) \left\{ z^{1-b} \left( -\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(2-b)} - \frac{(1+a-b)z}{\Gamma(a)\Gamma(3-b)} - \frac{(1+a-b)(2+a-b)z^2}{2\Gamma(a)\Gamma(4-b)} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(1+a-b)(2+a-b)(3+a-b)z^3}{6\Gamma(a)\Gamma(5-b)} + O[z]^4 \right) + \left( \frac{1}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(b)} + \frac{az}{\Gamma(1+a-b)\Gamma(1+b)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{a(1+a)z^2}{2\Gamma(1+a-b)\Gamma(2+b)} + \frac{a(1+a)(2+a)z^3}{6\Gamma(1+a-b)\Gamma(3+b)} + O[z]^4 \right) \right\}$$

## EK-1 (Devam) Hipergeometrik fonksiyon

Poisson oranı için  $\nu = 0,295$  değeri seçilirse, hipergeometrik fonksiyon Şekil 1.1'deki gibi olmaktadır:



Şekil 1.1.  $\nu=0,295$  ve  $\bar{\beta}_2=0,1, 0,25, 0,3$  için Hipergeometrik fonksiyon

Şekil 1.1'den de görülebileceği gibi hipergeometrik fonksiyon,  $\bar{\beta}_2$  parametresinin pozitif değerleri için  $\bar{r}=0$ 'da  $+\infty$  değerine gitmektedir.

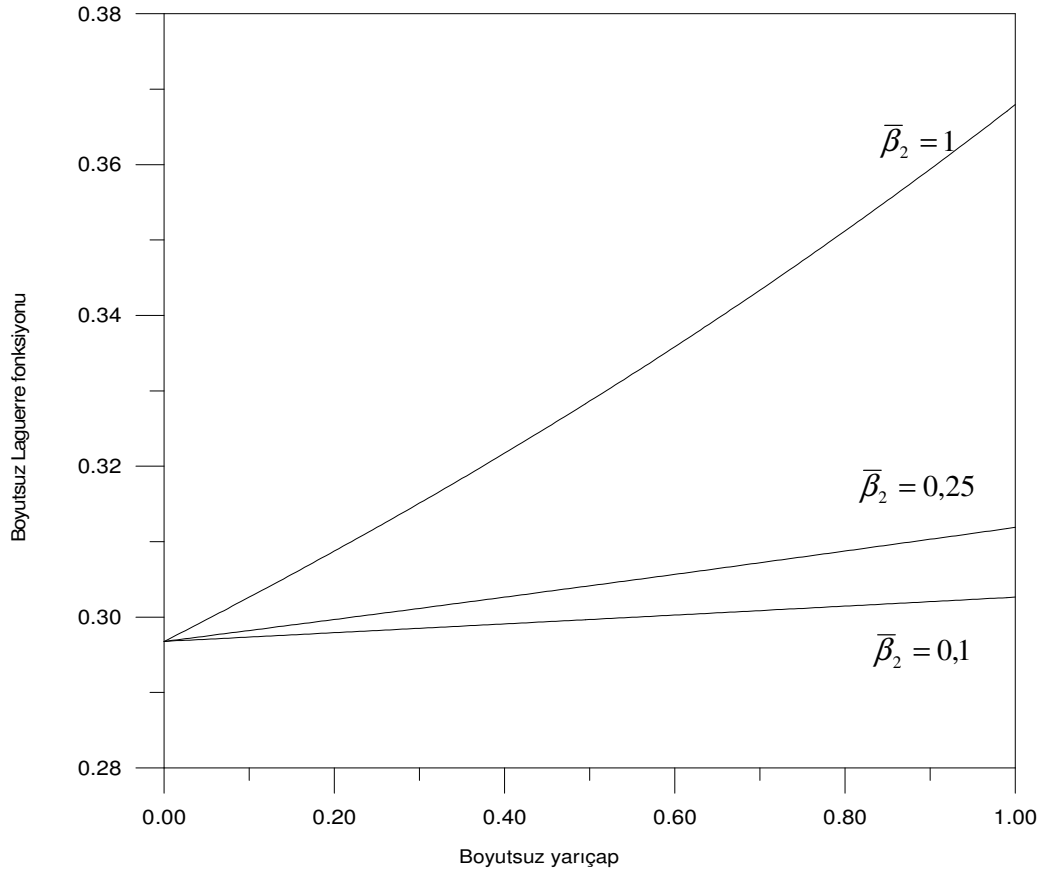
## EK-2 Laguerre fonksiyonu

Bu fonksiyonlar, polinomlarla ifade edilirler ve aşağıda verilen Laguerre denklemi isimli diferansiyel denklemi sağlarlar [46].

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

Söz konusu fonksiyon, aşağıdaki gibi temsil edilir [47]:

$$L_n^p(z) = \frac{\Gamma(p+n+1)}{\Gamma(n+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k z^k}{\Gamma(p+k+1)}$$



Şekil 2.1.  $\nu=0,295$  ve  $\bar{\beta}_2=0,1, 0,25, 1$  için Laguerre fonksiyonu

## EK-2 (Devam) Laguerre fonksiyonu

Poisson oranı için  $\nu = 0,295$  değeri seçilirse, Laguerre fonksiyonu Şekil 2.1'de verildiği gibi olmaktadır.

Görüldüğü gibi bu fonksiyon sıfırdan büyük  $\bar{\beta}_2$  değerleri için her noktada sonlu değerler almaktadır.

Laguerre fonksiyonunun ilk üç teriminin seri açılımı ise aşağıdaki gibidir:

$$L(n, z) = 1 - nz + \left( -\frac{n}{4} + \frac{n^2}{4} \right) z^2 + \left( -\frac{n}{18} + \frac{n^2}{12} - \frac{n^3}{36} \right) z^3 + O[z]^4$$

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : TOPAL, Serra  
 Uyuşu : T.C.  
 Doğum tarihi ve yeri : 31.08.1980, Ankara  
 Medeni hali : Bekâr  
 Telefon : 0 (312) 438 56 38  
 e-posta : [serra@gazi.edu.tr](mailto:serra@gazi.edu.tr)

### Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üni. Makine Müh. Böl.	2006
Lisans	Gazi Üni. Makine Müh. Böl.	2002
Lise	TED Ankara Koleji Vakfı Lisesi	1998

### İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
Kasım 2005- ...	Gazi Üniversitesi	Uzman

### Yabancı Dil

İngilizce, Almanca

### Yayımlar

1. Konez, A., Alagöz, H., Topal, S., Gülgeç, M., “Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzemelerin Üretim Teknikleri ve Kullanım Alanları”, *Mühendis ve Makina*, 547: 39-52 (2005).

### Hobiler

Resim, fotoğraf, öykü