

**DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMLARININ SONLU
GEOMETRİLER İLE İLİŞKİSİ**

Nermin AVŞAR

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**EYLÜL 2006
ANKARA**

Nermin AVŞAR tarafından hazırlanan DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMLARININ SONLU GEOMETRİLER İLE İLİŞKİSİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof.Dr. Hülya BAYRAK
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile İstatistik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç.Dr. Gül ERGÜN

Üye : Prof.Dr. Hülya BAYRAK

Üye : Prof. Dr. Müslim EKNİ

Üye : Prof.Dr. Reşat KASAP

Üye : Prof.Dr. Semra ORAL ERBAŞ

Tarih : 28 / 09 / 2006

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Nermin AVŞAR

DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMLARININ SONLU GEOMETRİLER İLE İLİŞKİSİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Nermin AVŞAR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Eylül 2006

ÖZET

Kombinatoryal Tasarım Teorisi, alt setler içine sonlu setin elemanlarını düzenlemenin mümkün olup olmadığı sorusu ile ilgilendirir. Böylece denge koşulları sağlanır. Burada incelenecek tasarımların türleri ağırlıklı olarak; BIBD'ler, t-tasarımları ve ikili dengeli tasarımlardır. Temel soruların çoğu, "Özel türlerin tasarımı mevcut mu?" şeklindeki varlık (varoluş) konusu ile ilgilidir. Modern Tasarım Teorisi, mevcut olmayan sonuçlar gibi pek çok mevcut sonuçlar içerir. Bununla beraber tasarımların kesin türlerinin var oluşu ile ilgilenen pek çok açık problem kalmıştır. Bugün çalışılan tasarımların çoğu, türleri ilk kez 18. ve 19. yüzyıllarda matematiksel bilmecelerin bağlamında dikkate alınmıştır. Tasarım teorisi bir matematiksel disiplinde, tasarımdaki uygulamalar ve istatistiksel deneylerin analizi için gerçek anlamda 20. yüzyılda başlamıştır. Tasarımlar, turnuva çizelgeleme, piyangolar, matematiksel biyoloji, algoritma tasarımı, analiz, şebekeleme, grup testi ve kriptografya gibi pek çok diğer uygulamalara sahiptir. Tasarım Teorisi; sayı teorisi, gruplar, cisimler, daireler ve doğrusal cebir gibi araçları kullanır.

Bilim Kodu : 205.1.066
Anahtar Kelimeler : t-Tasarımları, BIBD'ler, ikili dengeli tasarımlar
Sayfa Adedi : 168
Tez Yöneticisi : Prof.Dr. Hülya Bayrak

**RELATIONSHIP OF BALANCED INCOMPLETE BLOCK DESIGNS WITH
FINITE GEOMETRIES**

(M.Sc. Thesis)

Nermin AVŞAR

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

September 2006

ABSTRACT

Combinatorial design theory concerns questions about whether it is possible to arrange elements of a finite set into subsets so that certain “balanced” properties are satisfied. Types of designs that we will discuss include balanced incomplete block designs, t -designs, pairwise balanced designs and many more. Many of fundamental questions are existence questions: Does a design of a specified type exist? Modern design theory includes many existence results as well as nonexistence results. However, there remain many open problems concerning the existence of certain types of designs. Many types of designs that are studied today were first considered in the context of mathematical puzzles or brain-teasers in the 18th and 19th centuries. The study of design theory as a mathematical discipline really began in the 20th century due to applications in the design and analysis of statistical experiments. Designs have many other applications as well, such as tournament scheduling, lotteries, mathematical biology, algorithm design and analysis, networking, group testing and cryptography.

Science Code : 205.1.066
Key Words : t -Designs, BIBDs, pairwise balanced designs
Page Number : 168
Adviser : Prof.Dr. Hülya Bayrak

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Sayın Prof.Dr.Hülya BAYRAK'a minnettarım. Ayrıca çalıőmalarımın sağlıklı bir şekilde devam etmesinde destek ve hoşgörülerini benden esirgemeyen değerli Aileme ve başta Sayın Prof.Dr.Süleyman PAMPAL olmak üzere, tüm Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Trafik Planlaması ve Uygulaması Anabilim Dalı akademik kadrosuna, özellikle Araştırma Görevlisi Evren Can ÖZCAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	x
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xii
1. GİRİŞ.....	1
2. t-TASARIMI.....	5
2.1. t-Tasarımının Özellikleri.....	9
2.2. t-Tasarımı ile İlgili Yapılar.....	15
2.2.1. Tümlleyen t-tasarımı.....	15
2.2.2. Dual t-tasarımı.....	15
2.2.3. Tam t-tasarımı.....	20
2.2.4. Simetrik t-tasarımı.....	22
2.2.5. Dar t-tasarımı.....	23
2.2.6. Türetilmiş t-tasarımı.....	23
2.2.7. Artık t-tasarımı.....	25
3. DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMLARI.....	28
3.1. Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımlarının Koşulları ve Bazı Tanımlar.....	28
3.1.1. Dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarının isabet matrisleri.....	30

Sayfa

3.1.2. İzomorfizm ve otomorfizm.....	31
3.1.3. Dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarından yeni dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarının elde edilişi.....	35
3.1.4. Fisher eşitsizliği.....	38
3.2. Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları İçin Diğer Yapılar.....	40
3.2.1. Artık ve türetilmiş dengeli tamamlanmamış blok tasarımları.....	41
3.2.2. Dual tasarım.....	44
3.2.3. $\lambda = 1$ Olan dengeli tamamlanmamış blok tasarımının çizgi grafiği.....	66
3.3. İkili Dengeli Tasarımlar.....	67
4. DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMLARININ BAZI AİLELERİ.....	72
4.1. $k = 2$, $\lambda = 1$	72
4.2. $k = 3$, $\lambda = 1$ Steiner Üçlü Sistemleri.....	73
4.2.1. Paskal üçgeni ile $t-(v, k, \lambda)$ tasarımı parametreleri arasındaki ilişki.....	75
4.2.2. Bose ve skolem kuruluşları.....	77
4.3. Yakın Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımı.....	85
4.3.1. Tanım ve sınıflandırma.....	85
4.3.2. Grafikler ve varlık için gerekli koşulların ilişkisi.....	87
4.3.3. Yapılandırma.....	91
4.4. Dikdörtgensel Tasarımlar.....	94
4.5. Hadamard Matrisleri ve Tasarımlar.....	96
4.5.1. Hadamard matrisleri.....	96
4.5.2. Dengeli tamamlanmamış blok tasarımları ile ilişkisi.....	98

Sayfa

4.5.3. Williamson metodu.....	101
4.5.4. Düzenli hadamard matrisleri.....	105
4.6. Bent Fonksiyonları.....	112
5. PROJEKTİF GEOMETRİLER VE DÜZLEMLER.....	119
5.1. Projektif Geometri.....	123
5.2. Projektif Düzlem.....	124
6. YENİDEN ÇÖZÜLEBİLİR DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMI	138
6.1. Afin Düzlemlerin Yeniden Çözülebilirliği.....	146
6.2. Bose Eşitsizliği ve Afin Yeniden Çözülebilir Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları.....	149
6.2.1. Afin α - yeniden çözülebilir tasarımlar.....	154
6.2.2. Afin yeniden çözülebilir dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarından elde edilen simetrik dengeli tamamlanmamış blok tasarımları.....	161
7. SONUÇ.....	164
KAYNAKLAR.....	165
ÖZGEÇMİŞ.....	168

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. (9,3,1) BIBD.....	36
Çizelge 3.2. (9,3,2) BIBD.....	37
Çizelge 3.3. Simetrik (11,5,2)-BIBD'in türetilmiş ve artık BIBD'leri.....	43
Çizelge 3.4. $v = b = 4, k = r = 3, \lambda = 2$ parametrelı BIBD.....	50
Çizelge 3.5. $b = 6, v = 4, k = 2, r = 3, \lambda = 1$ parametrelı BIBD.....	52
Çizelge 3.6. (16,6,6) PBIBD.....	54
Çizelge 3.7. PBIBD.....	60
Çizelge 4.1. (16,6,2)-BIBD.....	107
Çizelge 4.2. (13,4,1)-fark kümesi.....	109
Çizelge 5.1. (13,4,1)-BIBD.....	131
Çizelge 5.2. $EG_2(3)$ 'de tanımlanan BIBD.....	133
Çizelge 6.1. $PG_3(2)$ 'nin noktaları ve uzayları.....	147
Çizelge 6.2. Grup bölünebilir (10,5,2)-PBIBD.....	148
Çizelge 6.3. (8,4,3)-BIBD.....	153
Çizelge 6.4. (9,3,1) tasarımı.....	155
Çizelge 6.5. (15,3,1) tasarımı.....	155
Çizelge 6.6. (9,3,2) tasarımı.....	156

ŞEKİLLERİ LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. $(11,5,2)$ iki düzlem.....	43
Şekil 3.2. Geometrik yapı $GF(2)$ üzerine kurulan $EG_2(2)$	55
Şekil 3.3. Yüzeyler bloklar köşe noktaları işlemler.....	66
Şekil 4.1. $(6,15,5,2,1)$ -BIBD.....	73
Şekil 4.2. $v = 7, k = 2$ ve $b = 8, \bar{r} = 2, s = 5$ için grafik.....	92
Şekil 4.3. $(7,3,1)$ -fark seti.....	111
Şekil 5.1. $(7,3,1)$ -BIBD'in $PG_2(2)$ 'de bir gösterimi.....	126
Şekil 5.2. $(13,4,1)$ -BIBD'in $PG_2(3)$ 'de bir gösterimi.....	132
Şekil 5.3. $(9,3,1)$ -BIBD'in $EG_2(3)$ 'de bir gösterimi.....	134
Şekil 6.1. $2-(4,2,1)$ 2. mertebeden bir afin düzlem.....	146

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	Açıklama
BIBD	Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımı
GDAS	Grup Bölünebilir Birliktelik Sınıfı
GD	Grup Bölünebilir
PBIBD	Kısmi Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımı
SRG	Güçlü Düzenli Grafik
SLBG	Tek Olarak Bağlanmış Blok Grafik
SLB	Tek Olarak Bağlanmış Blok
PBD	İkili Dengeli Tasarım
STS	Steiner Üçlü Sistemleri
HM	Hadamard Matris
DHM	Düzenli Hadamard Matris

1. GİRİŞ

Kombinatorik, belirlenmiş kesin kurallara göre nesnelerin ayrılması ve düzenlenmesi problemleriyle ilgili matematiğin bir koludur. “Kombinatoryal düzen”, verilen sonlu bir kümeden belirli özellikleri olan alt kümeler toplamının seçilmesinin bir yoludur ve 1782’de Euler, 1847’de Kirkman ve 1853’de Steiner’in problemlerine kadar uzanır. Bu problemlere ilişkin çok sayıda makale olmasına rağmen, 19-20. yüzyıllarda kombinatorial konfigürasyonların deney tasarımlarının istatistiksel teoride yararlı olduğu fark edilene kadar, sistematik bir işlem bulunamamıştır. Tasarımlar, zirai ve diğer deneyleri planlamada ve analiz etmede yararlıdır. Bu nedenle istatistikçiler bu konuya ilgi duymuşlar ve bu konuyla ilgili önemli makaleler yazmışlardır [1].

1893 yılında Moore ve 1961 yılında Hanani, bütün t ’ler için $STS(v)$ ’lerin geri dönüşlü oluşturulma metotlarını vermişlerdir [2].

1938 yılında Witt, $5-(12,6,1)$ tasarımını incelemiştir. Bu tasarım, Witt tarafından incelenen dikkate değer iki 5-tasarımından biridir [3].

1965 yılında Mann, v ’sü 2 ’nin bir kuvvetine eşit olan bütün simetrik t -tasarımlarının parametrelerini belirlemiştir [4].

1968 yılında Petrenjuk, $v \geq k + 2$ olan herhangi bir $4-(v, k, \lambda)$ için $b \geq \binom{v}{2}$ olduğunu ispatlamıştır ve $v \geq k + s$ olan herhangi bir $2s-(v, k, \lambda)$ için de $b \geq \binom{v}{s}$ olduğunu varsaymıştır [5].

1987 ve 1989 yıllarında Teirlinck, parametreleri gerekli koşulları sağlamak üzere bütün t değerleri için trivial olmayan t -tasarımlarının var olduğunu göstermiştir [6].

1975 yılında Ito, sadece trivial olmayan dar 4-tasarımlarının 4-(23,7,1) olduğunu ve bunun tümleyeninin de bir 4-(23,16,52) olduğunu göstermiştir. $t \geq 4$ olan dar t-tasarımlarının çok nadir görüldüğünü söylemiştir [5].

1935 ve 1936 yıllarında Yates, blok genişliğinin optimal seçeneğini tartışmış ve BIBD'lerin arzu edilen özelliklerini göstermiştir [7].

1936 yılında Yates, bazı küçük BIBD'lerin oluşturulmasını göstermiştir [7].

1938 yılında Fisher ve Yates, $v, b \leq 100$ ve $r, k \leq 10$ aralığı için BIBD'lerin parametrelerinin kombinasyonlarını ve onların çözümlerini listelemiştir. Bu liste, 1961 yılında Rao tarafından $r, k \leq 15$ alınarak ve 1962 yılında Sprott tarafından $r, k \leq 20$ alınarak genişletilmiş şekli ile tekrar verilmiştir [2]. 1939 yılında Bose ise, bu tasarımların oluşturulmasının ilk sistematik metodunu vermiştir. Bose ayrıca sonlu geometrilerin özelliklerini ve onların uygulamalarını BIBD'ler gibi kullanmıştır [7].

Srivastav, bir t-tasarımının $v = 2k$ koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşulun yeniden çözülebilir bir t-tasarımını mevcudiyeti olduğunu göstermiş ve yeniden çözülebilir 3-tasarımlarının bazı serilerinin yapılarını vermiştir. Ayrıca simetrik BIBD'lerden BIBD'lerin kurulması için basit ve genel bir metot vermiş, bu metodu kullanarak BIBD'lerin bilinen birçok sonsuz serisinin kolaylıkla bulunabileceğini göstermiştir [8].

Bayrak, bazı dual tasarımların geometrik yapılarını incelemiştir [9].

1942 yılında Levi, sonlu projektif ve afin geometri arasındaki yakını ilişkiyi vurgulamıştır. 1949 yılında Bruck ve Ryser, 1949 yılında Bose ve 1949 yılında Schützenberger, bu geometrileri çalışmak için isabet matrislerini kullanmışlardır [1].

1949 yılında Bruck ve Ryser, $\lambda = 1$ özel durumu için Bruck-Ryser-Chowla teoremini ispatlamışlardır. Bu teoremin genel durum ispatını ise 1950 yılında Chowla ve Ryser vermişlerdir [4].

1988 yılında Wilson, Fisher eşitsizliği için Fisher'in orijinal ispatından oldukça farklı direk bir ispat vermiştir [3].

1951 yılında Youden, ilk olarak bağlantılı tasarım kavramını tanıtmıştır. Youden bu tasarımları BIBD'lerin dualleri olarak ortaya çıkarmıştır. 1956 ve 1957 yıllarında Roy ve Laha ise, bağlantılı tasarımları sınıflandırmışlardır [2].

Raghavarao, BIBD tanım ve özelliklerini vermiş, BIBD'lerin sonlu geometriler yardımıyla oluşturulmasını ve simetrik BIBD'lerin varlığını göstermiştir. Yeniden çözülebilirliklerden ve STS(v)'lerden bahsetmiştir. Ayrıca t-tasarımları için birtakım eşitsizlikler sunmuş ve BIBD'lerin $v, b \leq 100$, $r, k \leq 15$ parametre aralığı için oluşturulma metotlarını listelemiştir [2].

Assmus ve Key, t-tasarımları hakkında genel bilgiler ve teoremler vermiş; simetrik t-tasarımlar, Hadamard tasarımlar ve Steiner sistemlerden bahsetmiştir [3].

Ray-Chaudhuri ve Wilson, t-tasarımları için Fisher eşitsizliğinin bir genelleştirmesini vermişlerdir [5]. Ayrıca dahil etme-çıkarılma prensibiyle Pascal üçgeninin bulunması için kısa bir formül vermişlerdir [3].

Dikdörtgensel BIBD'ler Kageyama ve Sinha tarafından çalışılmıştır [10]. Çalışmalar halen devam etmektedir.

1962 yılında Shrikhande ve Singh, ilk olarak Hadamard tasarımlarını bulmuştur. Bu tasarımlar daha sonra 1970 yılında Goethals ve Seidel tarafından verilmiştir [3].

1942 yılında Bose, yeniden çözülebilir BIBD'ler için eşitsizlikler vermiştir [2].

Street ve Street, BBID'ler ve yeniden çözülebilir tasarımlarla ilgili bilgiler ve teoremler vermişler, BIBD'lerle ilgili bazı tasarımları tanıtmışlardır. Ayrıca BIBD oluşturmanın bazı metotlarını da vermişlerdir [11].

1963 yılında Shrikhande ve Raghavarao, Bose'un 1942 yılında verdiği yeniden çözülebilirlik ve afin yeniden çözülebilirlik kavramlarını, α – yeniden çözülebilirlik ve afin α – yeniden çözülebilirlik kavramlarına genelleştirmişlerdir [2].

Bu tez çalışması kapsamında yer alan konuların, bölümlere göre dağılımı “İçindekiler” tablosunda yer almaktadır (Sayfa vii).

2. t-TASARIMI

t-tasarımları kombinatorial yapılardır. t- tasarımları, tasarımın teorisindeki en önemli yapılardır ve gelişmiş bilgisayarlar olmasına rağmen birçok t- tasarımı oluşturmak zordur. Çünkü bütün kabul edilebilir parametreler için hala genel bir formül yoktur.

t- tasarımları, aynı zamanda kombinatorial optimizasyon problemleridir. Bu nedenle istatistiksel deneyler, network tasarımı gibi uygulamalı problemlerle yapı maliyetini minimum yapmada önemlidir [12]. t- tasarımı, 1969'dan beri askeri taktiklerde, bilgisayar çiplerinin tasarımlarında ve özellikle istatistikte (tıp ve ziraat deneylerinde, nükleer araştırmalarda, demoskopide, kalite kontrolünde,vb.) sık kullanılmaktadır [12].

Önceleri t 'nin küçük değerleri için t-tasarımları araştırılırken 1980'lerden sonra büyük t ve λ 'ya sahip t- tasarımı araştırılmaya başlamıştır.

Sonlu projektif ve afin geometriler eğer boyut en azından üç ise çeşitli yollardan özel tasarımlar gibi yorumlanabilir. O nedenle kombinatorial yapıların analizi için olan metodlar bu geometrileri çalışmak için kullanılabilir. Böyle bir metod, isabet matrislerinin kullanımınıdır. İsbet matrisleri ve onların genelleştirilmeleri tasarımlar ve daha genel yapılar üzerine olan çeşitli alanlarda kullanılabilir. Ayrıca istatistikte geniş bir uygulama alanı görülür [1].

2.1.Tanım

“Noktalar” ve “Bloklar” olarak adlandırılan sonlu iki nesne kümesi, aralarındaki bir I isabet ilişkisi ile birlikte bir yapıdır. Bu yapıda, genellikle noktaları göstermek için küçük latin harfleri ve blokları göstermek için de büyük latin harfleri kullanılır. Verilen herhangi bir blokla ilişkili bir noktalar kümesi vardır ve blok, bu noktalar kümesi ile tanımlanır. Böylece, bir p noktası bir B bloğu ile ilişkili ise bu, $p \in B$ ya da $p \in B$ şeklinde yazılabilir ve “ p , B 'nin üzerinde”, “ B , p 'yi içerir.”,....vb.

şeklinde ifade edilir. Eşdeğer bir yaklaşım ise, yapıyı sonlu nokta kümesi X , sonlu blok kümesi A ve $I \subseteq X \times A$ ile verilen isabet gibi kabul etmektedir. Buradaki I isabet ilişkisi noktanın doğru üzerinde bulunması şeklindedir. Yani $(p, B) \in I$ ($p \in B$ şeklinde gösterilir) ise p , B bloğu üzerinde bir noktadır. Bu takdirde yapı $D = (X, A, I)$ ile gösterilir ve “sonlu isabet yapısı” olarak adlandırılır.

D , Bir yapı ise, D 'nin nokta (işlem=deneme) sayısı “ v ” ve blok sayısı “ b ” ile gösterilir. Bir yapının noktalar kümesi (her ikisi de) boş olmamalıdır.

D yapısının bir noktası p ve bir bloğu B ise $\langle p \rangle$, p üzerindeki blokların kümesini aynı şekilde $\langle B \rangle$, B üzerindeki noktaların kümesini belirtmek için kullanılabilir.

İki farklı blok aynı noktalar kümesi ile tanımlanıyorsa bu durumda “yapı tekrarlanmış bloklara sahiptir” denir.

D tekrarlanmış bloklara sahip ise, aynı noktalar kümesi ile ilişkili blokların bir kümesi tamamen silinerek D 'den bir yapı oluşturulabilir.

D yapısının bir elemanı, D yapısının diğer elemanları olan 0 ya da 1 ile ilişkili ise bu eleman “izole edilmiş” diye adlandırılır. Diğer taraftan “dolu” bir eleman ise muhtemel diğer bütün elemanlarla ilişkili olan elemandır (yani nokta bloklarla ya da blok noktalarla). Tekrarlı olarak önce bütün dolu elemanları sonra bütün izole edilmiş elemanları çıkararak “standartlaştırılmış D ” adı verilen yeni bir \bar{D} yapısına ulaşılabilir. Sonunda dolu ya da izole edilmiş elemanlara ve tekrarlanmış bloklara sahip olmayan, hem standartlaştırılmış hem de indirgenmiş bir yapı “tamamen indirgenmiş” sayılır.

2.2. Tanım

D , noktaları p_1, p_2, \dots, p_v ve blokları B_1, B_2, \dots, B_b ($v > 0, b > 0$) olarak indekslenmiş bir yapı olsun. D için $v \times b$ boyutlu “isabet matrisi” $A = (a_{ij})$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$a_{ij} = 1; \quad p_i \in B_j$$

$$a_{ij} = 0; \quad p_i \notin B_j$$

Böylece, D hakkındaki tüm bilgiler A matrisinde ifade edilmiş olur (A matrisi, eğer bütün elemanları 0 ya da 1 ise “(0,1)- matrisi “ olarak isimlendirilir. Her isabet matrisi bir (0,1) –matrisidir). A matrisi, nokta ve blokların indekslenmesine bağlı olduğundan, farklı indekslemeler farklı isabet matrisleri oluşturur.

Eğer bir (0,1)-matrisi olan A , aşağıdaki şartları sağlıyorsa tamamen indirgenmiş bir yapının isabet matrisidir.

- (i) Her satır ve sütunun en az bir tane sıfır elemanı ve en az iki tane “1” elemanı olmalıdır.
- (ii) A ’ da iki özdeş (aynı) sütun olmamalıdır.

Her pozitif m tamsayısı ve $r > 0$ sabiti için $AJ_{b,m} = rJ_{v,m}$ ise D yapısı “düzenli” dir. Burada J , bütün elemanları “1” ler olan boyuta uygun matristir [11].

Bir D yapısının blok kümeleri boş değil ve her bloğu $k > 0$ nokta içeriyorsa bu yapıya “düzgün” denir. Bir yapının düzgünlüğü onun isabet matrisine bakılarak kolay bir yoldan bulunabilir. Düzgün bir yapının isabet matrisinde sütun toplamları eşittir. Yani her bloğunda eşit sayıda eleman vardır.

D , $v > 0$ noktaları olan bir yapı olsun. D ’nin t noktalı her alt kümesi, λ ortak blokları ile tam ilişkili olacak şekilde λ , t ($0 < \lambda$ ve $0 \leq t \leq v$) tam sayıları

mevcutsa, D 'ye, λ için bir t -yapısıdır ya da sadece t -yapısıdır denir. k blok genişliğine sahip düzgün bir t -yapısına, “(düzgün) t - (v, k, λ) yapısı” ya da “ (v, k, λ) için bir t -yapısı” denir. Burada v , noktaların sayısı ve λ , t noktaları üzerindeki ortak blokların sayısıdır. Yalnız dikkat edilmelidir ki, her düzgün yapı ya da t -yapısı boş olmamalıdır. Aynı zamanda (v, k, λ) için t -yapısından bahsederken “ k ”dan dolayı bu yapının düzgün olduğu belirtilmiş olur.

Bir D yapısı eşit sayıda nokta ve bloğa sahipse, D için herhangi bir isabet matrisi karedir. Bu nedenle $b = v$ olan yapılara “kare yapı” veya “simetrik yapı” denir [11].

Tasarımdaki bir blok, üzerindeki noktalar tarafından tek olarak belirlenir ve bloklar, noktaların ayrılmış alt kümeleri ile özdeşlenebilir [11].

Bir D yapısının tamamlanmış $C(D)$ ile gösterilir. $C(D)$ 'nin noktaları D 'nin noktalarıdır. D 'deki her B bloğu için $C(D)$ 'de bir B^* bloğu dikkate alınır. Buradaki isabet kuralı, p noktasının B^* üzerinde olması için gerek ve yeter koşul p 'nin B üzerinde olmamasıdır. D ve $C(D)$ 'nin isabet matrisleri birbirleriyle ilişkilidir. Örneğin A matrisi D yapısının isabet matrisi olsun. Bu takdirde $(J_{v \times b} - A)$, $C(D)$ 'nin isabet matrisidir.

2.1. Örnek

Düzgün 1-yapısının kare olması için $r = k$ olması gerektiğini bir örnek üzerinde gösterilebilir.

t - (v, k, λ) gösterimi yapının düzgün olduğunu ifade eder. Böyle bir yapı eşit sayıda nokta ve bloğa sahip ise buna ilişkin isabet matrisi karedir. Bu nedenle $b = v$ olur. Bu yapıya kare yapı ya da simetrik yapı adı verilir. Örneğin A matrisi aşağıdaki gibi olsun.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elde edilen yapıda $r = k = 3$ ve $b = v$ olduğundan yapı karedir.

2.2. Örnek

Noktaları $P = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ blokları $B_1 = \{1,2,4\}$, $B_2 = \{1,3,7\}$, $B_3 = \{2,3,5\}$, $B_4 = \{1,5,6\}$, $B_5 = \{3,4,6\}$, $B_6 = \{4,5,7\}$, $B_7 = \{2,6,7\}$ olan bir D yapısının isabet matrisi ve tamamlanışı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C(D) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D , 2-(7,3,1) yapısı gösterirken $C(D)$, 2-(7,4,2) yapısıdır. Bunun sebebi 7 nokta yardımıyla elde edilen nokta kombinasyonlarından sadece 2'şerli nokta çiftlerinin 7 blokta 2'şer kez birlikte görülmesinden kaynaklanmaktadır.

2.1. t-Tasarımının Özellikleri

2.3. Tanım

$D = (X, A, I)$ isabet yapısı, aşağıdaki koşulları sağlıyorsa t -(v, k, λ) tasarımı olarak adlandırılır

- (i) $|X| = v$;
- (ii) $B \in A$ için her blok k nokta ile ilişkilidir.
- (iii) Her farklı t nokta birlikte λ blok ile ilişkilidir (yani noktaların her t -alt kümesi λ blokta bulunuyorsa) [3].

Negatif olmayan t, v, k, λ, b, r tamsayıları “*tasarımın parametreleri*” olarak bilinir. r , “*tekrar sayısı*”dır ve bir noktanın görüldüğü blok sayısını belirtir [3].

2.4. Tanım

Tekrarlı blokları olmayan bir t -tasarımına “*basit t -tasarımı*” denir [3].

t -tasarımı için parametrelerin bulunması devam eden çözülmemiş bir problemdir. Fakat t, v, k, λ parametreleri gerekli koşulları sağlıyorsa o zaman bir t - (v, k, λ) tasarımının varolduğu ispatlanmıştır [12].

2.1. Teorem

$D = (X, A)$, bir t - (v, k, λ) tasarımı olsun. $0 \leq s < t$ koşulunu sağlayan her s tamsayısı için, s farklı nokta ile ilişkili blok sayısı λ_s dir. λ_s , s noktadan bağımsızdır ve aşağıdaki eşitlik ile verilir:

$$\lambda_s = \lambda \frac{(v-s)(v-s-1)\dots(v-t+1)}{(k-s)(k-s-1)\dots(k-t+1)} \quad (2.1)$$

bu eşitlik

$$\lambda_s = \lambda \binom{v-s}{t-s} / \binom{k-s}{t-s} \quad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir [3].

2.1. Sonuç

D , bir t - (v, k, λ) tasarımı ve $t > 0$ olmak üzere s , $0 < s < t$ koşulunu sağlayan herhangi bir tamsayı ise D , bir s - (v, k, λ_s) tasarımıdır.

v, k, λ 'nın birçok seçeneği için düzgün t -yapıları bulunamaz. Bunun nedeni $\lambda_i = \lambda$ olan λ_s ($0 \leq s \leq t$) büyüklüklerinin tamsayı olması zorunluluğudur [11].

2.2. Sonuç

t -tasarımlarının parametreleri birbirinden bağımsız değildir. Aralarında bazı önemli ilişkiler vardır. D bir t - (v, k, λ) tasarımı ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$b = \lambda_0 = \lambda \frac{v(v-1)\dots(v-t+1)}{k(k-1)\dots(k-t+1)} \quad (2.3)$$

Eşitlik (2.1)'deki λ_s formülünde s yerine 0 yazılarak yukarıdaki eşitliğe ulaşılabilir.

Bu eşitlik; [5,13]'de

$$b = \lambda_0 = \lambda \binom{v}{t} / \binom{k}{t} \quad (2.4)$$

şeklinde verilmiştir.

$$t > 0 \text{ ise } bk = vr \quad (2.5)$$

$$t = 2 \text{ ise } r(k-1) = \lambda_2(v-1) \quad (2.6)$$

dir [3,11].

Eşitlik (2.2)'de $s=1$ yazılırsa tekrar sayısı r elde edilir.

$$r = \lambda_1 = \lambda \binom{v-1}{t-1} / \binom{k-1}{t-1} \quad (2.7)$$

$\lambda_s = \lambda$ yazılır ise Teorem 2.1, λ_s tamsayılarının geri dönüşümden aşağıdaki eşitlik ile kolaylıkla hesaplandığını gösterir:

$$\lambda_s = \frac{(v-s)}{(k-s)} \lambda_{s+1} \quad (2.8)$$

$t \geq 1$ olan herhangi bir düzgün t yapısı aynı zamanda düzgün 1-yapısıdır. Bunun anlamı yapının düzenli oluşudur.

2.3. Sonuç

Eğer bir t - (v, k, λ) tasarımı mevcut ise, bu takdirde $\binom{k-s}{t-s}$, $\lambda \binom{v-s}{t-s}$ 'i böler, $s=0, 1, \dots, t-1$ [14].

Tasarım teorisinde λ_0 , blokların toplam sayısını yani b 'yi tanımlar. λ_1 , bir noktayı ihtiva eden blokların sayısını yani r 'yi tanımlar. Herhangi bir t -tasarımı için ($t \geq 1$) Eşitlik (2.2) ile 1-tasarım gibi düşünülebilir.

2.3. Örnek

\mathcal{A} yapısının noktaları; $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve blokları $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{1, 2, 3\}$, $A_3 = \{2, 3, 4\}$, $A_4 = \{3, 4, 5\}$ olsun. \mathcal{A} için isabet matrisi şöyle olur

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

\mathcal{A} düzgündür ve 1 iki blokta olduğundan ve 5 sadece bir blokta olduğundan düzenli değildir. Bu nedenle Teorem 2.1.'den \mathcal{A} , herhangi bir $t > 1$ için bir t -yapısı değildir. Aynı zamanda A_1 , 2 çokluğa sahip olduğundan \mathcal{A} bir tasarım değildir. Ayrıca 5, \mathcal{A} 'nın sadece bir bloğu üzerinde olduğundan \mathcal{A} standartlaşmamıştır.

\mathcal{A} / R 3 bloğa sahiptir; $A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{2,3,4\}$, $A_3 = \{3,4,5\}$. Bu yüzden \mathcal{A} / R bir tasarım örneğidir. 5, \mathcal{A} / R 'nin izole edilmiş bir noktası ve 3 de \mathcal{A} / R 'nin dolu bir noktası olduğundan \mathcal{A} / R standartlaşmamıştır. 3 ve 5 ortadan kaldırılırsa; üç nokta, $\{1,2,4\}$ ve üç blok $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{2,4\}$, $A_3 = \{4\}$ kalır. Böylelikle \mathcal{A} / R 'nin boş olduğu kolaylıkla görülebilir [11].

2.4. Örnek

\mathcal{B} 'nin noktaları; $\{1,2,3,4,5\}$ ve blokları; $B_1 = \{1,2,3\}$, $B_2 = \{1,4\}$, $B_3 = \{2,4\}$, $B_4 = \{3,4\}$ olsun.

Burada 5 izole edilmiş bir noktadır. \mathcal{B} 'nin noktaları $\{1,2,3,4\}$ ve blokları aynıdır.

\mathcal{B} , düzgün değildir. Bununla birlikte \mathcal{B} , olan bir 2-yapısıdır. Dikkat edilmelidir ki \mathcal{B} , 1-yapısı olmadığından Teorem 2.1., düzgün olmayan yapılar için doğru değildir.

2.5. Örnek

\mathcal{B} 'nin noktaları; $\{1,2,3,4,5,6\}$ ve blokları; $B_1=\{1,2,3\}$, $B_2=\{1,4,5\}$, $B_3=\{1,2,6\}$, $B_4=\{1,3,6\}$, $B_5=\{2,4,5\}$, $B_6=\{2,4,6\}$, $B_7=\{3,4,5\}$, $B_8=\{3,5,6\}$ olsun.

\mathcal{B} 'nin parametreleri $v = 6$, $b = 8$, $r = 4$, $k = 3$ olan bir 1-tasarımıdır.

2.6. Örnek

\mathcal{B} 'nin noktaları; $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ve blokları; $B_1=\{1,2,4\}$, $B_2=\{1,3,7\}$, $B_3=\{2,3,5\}$, $B_4=\{1,5,6\}$, $B_5=\{3,4,6\}$, $B_6=\{4,5,7\}$, $B_7=\{2,6,7\}$ olsun.

\mathcal{B} , bir 2-(7,3,1) tasarımı ve Teorem 2.1'den bir 1-(7,3,3) tasarımıdır. \mathcal{B} için isabet matrisi simetriktir.

2.7. Örnek

\mathcal{B} 'nin noktaları; $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ve blokları; $B_1=\{3,5,6,7\}$, $B_2=\{2,4,5,6\}$, $B_3=\{1,4,6,7\}$, $B_4=\{2,3,4,7\}$, $B_5=\{1,2,5,7\}$, $B_6=\{1,2,3,6\}$, $B_7=\{1,3,4,5\}$ olsun.

\mathcal{B} , bir 2-(7,4,2) tasarımıdır ve bir 1-(7,4,4) tasarımıdır.

2.2. Teorem

t, k, v ; $t \leq k \leq v$ olan pozitif tam sayılar olsun. Bu takdirde aşağıdaki koşullar sağlandığında bir t -(v, k, λ) tasarımı mevcut olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ tam sayısı vardır [4].

$$\lambda \binom{v-i}{t-i} \equiv 0 \pmod{\binom{k-i}{t-i}}, \quad i = 0, 1, \dots, t, \quad \lambda \geq n$$

2.4. Sonuç

$$v-1 \equiv 0 \pmod{k-1};$$

$$v(v-1) \equiv 0 \pmod{k(k-1)}$$

olacak şekilde $k, v \in \mathbb{N}$ tamsayıları verilsin. Eğer m yeterli derecede büyük ise, $\lambda = mk(k-1)+1$ olan bir $2-(v, k, \lambda)$ tasarımı vardır [4].

2.2. t – Tasarımı İle İlgili Yapılar

Verilen her hangi bir t -tasarımı D ile ilgili birtakım doğal yapılar vardır. Bu yapılar bazı durumlarda yeni tasarımlar oluştururlar. Bunlara ilişkin tanım ve teoremler aşağıda verilecektir.

2.2.1. Tümleyen t – tasarımı

2.5. Tanım

Parametreleri t, v, b, r, k ve λ olan bir D t - tasarımının blokları; B_1, B_2, \dots, B_b ise D 'nin “tümleyen tasarımı” $D^*, B_1^*, B_2^*, \dots, B_b^*$ ile verilir. Burada;

$$B_i^* = \{1, 2, \dots, v\} - B_i$$

dir. D 'nin tümleyen tasarımı kendisi ise o zaman D tasarımı, “kendini-tümleyici veya öz-tümleyici” olarak adlandırılır [8].

2.3. Teorem

Bir $t-(v, k, \lambda)$ tasarımının tümleyeni bir $t-(v, v-k, \lambda^*)$ tasarımıdır. Burada;

$$\lambda^* = \lambda \binom{v-t}{k} / \binom{v-t}{k-t} \quad (2.9)$$

dir [5].

Bu eşitlik [14]'de

$$\lambda^* = \lambda \frac{C(v-k, t)}{C(k, t)} \quad (2.10)$$

şeklinde veya [3]'de

$$\lambda^* = \lambda \frac{(v-k)(v-k-1)\dots(v-k-t+1)}{k(k-1)\dots(k-t+1)} \quad (2.11)$$

olarak tanımlanabilir. Eşitlik (2.11) [15]'de Eşitlik (2.12) de olduğu gibi verilmiştir.

$$\lambda^* = \lambda \frac{(v-k-1)(v-k-2)\dots(v-k-t+1)}{(k-1)(k-2)\dots(k-t+1)} \cdot \frac{(v-k)}{k} \quad (2.12)$$

$$t=2 \text{ ise } \lambda^* = b - 2r + 1 \quad (2.13)$$

olur [6].

2.8. Örnek

2 – (7,3,1) tasarımı için bloklar aşağıdaki gibi olsun:

1 3 1 1 3 2 2

2 4 5 4 6 5 4

3 5 6 7 7 7 6

Bu tasarımın tümleyeni, 2 – (7,4,2) tasarımı olup, blokları;

4 1 2 2 1 1 1
 5 2 3 3 2 3 3
 6 6 4 5 4 4 5
 7 7 7 6 5 6 7

dir.

Tümleyen tasarımın λ parametresi Eşitlik (2.9)'dan kolaylıkla bulunabilir;

$$\lambda^* = \lambda \binom{v-t}{k} / \binom{v-t}{k-t} = 1 \binom{7-2}{3} / \binom{7-2}{3-2} = \binom{5}{3} / \binom{5}{1} = 2$$

ya da Eşitlik (2.13)'den

$$\lambda^* = b - 2r + 1 = 7 - 2 \cdot 3 + 1 = 2$$

elde edilir.

2.4. Teorem

$v = 2k$ olan t -(v, k, λ) tasarımının tümleyeni yine bir t -(v, k, λ) tasarımıdır [8].

2.9. Örnek

Örnek 2.5.'te verilen 1-(6,3,4) tasarımını düşünölsün.

1 1 1 1 2 2 3 3
 2 4 2 3 4 4 4 5
 3 5 6 6 5 6 5 6

Verilen tasarımını tümleyeni alınırsa;

4 2 3 2 1 1 1 1
 5 3 4 4 3 3 2 2
 6 6 5 5 6 5 6 4

blokları bulunur. Bu tasarım ise kendini-tümleyici olan bir 1-(6,3,4) tasarımıdır.

2.2.2. Dual t – tasarımı

2.6. Tanım

$D = (X, A, I)$ isabet yapısı bir t-tasarımı ise bu takdirde, D^T tasarımı $D^T = (X^T, A^T, I^T)$ dir. Burada $X^T = A$, $A^T = X$ ve $(p, B) \in I$ olmak üzere, $(B, p) \in I^T$ dir. D^T tasarımına “ D ’nin duali” denir [3].

Yani bir tasarımın duali işlemleri ve blokları sırasıyla orijinal tasarımın bloklarına ve işlemlerine karşı gelen yeni bir tasarımdır [9].

t, v, b, r, k parametrelili bir t-tasarım verilsin. Bu tasarım Tanım 2.2. gereğince, tasarımın “isabet matrisi” olarak adlandırılan $v \times b$ ’lik bir matrisle gösterilebilir. Satırlar tasarımın işlemleriyle ve sütunlar da bloklarla nitelendirilebilir. Eğer i işlemi j bloğunda gözüküyorsa matrisin (i, j) . hücresine 1 yazılır, gözükmiyorsa 0 yazılır. İsbet matrisinin her satırı r tane 1’e, her sütunu da k tane 1’e sahiptir ve her farklı t satır λ tane ortak 1’lere sahiptir [14].

A , parametreleri t, v, b, r, k olan bir t-tasarımı D ’nin isabet matrisi ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$AJ_b = rJ_{v \times b}$$

$$J_v A = kJ_{v \times b}$$

Burada J , tüm elemanları 1'ler olan matristir (J_n , $n \times n$ boyutlu matrisi, $J_{m \times n}$ ise $m \times n$ boyutlu matrisi gösterir). Bu durumda A^T matrisi $b \times v$ boyutludur ve her satırında k tane 1, her sütununda r tane 1 vardır. Dual tasarımlarda aşağıdaki eşitlikleri görmek mümkündür:

$$J_b A^T = r J_{b \times v}$$

$$A^T J_v = k J_{b \times v}$$

Parametreleri t, b, v, k, r olan bir t -tasarımının isabet matrisi A^T şu şekilde oluşturulur. Eğer orijinal tasarımın a_1, a_2, \dots, a_v işlemleri ve B_1, B_2, \dots, B_b blokları varsa, yeni tasarım c_1, c_2, \dots, c_b işlemlerine ve C_1, C_2, \dots, C_v bloklarına sahiptir. Burada a_j , B_i 'ye ait ise c_i , C_j 'ye aittir. Bu duruma “ D 'nin dual tasarımı D^T dir” denir [7].

2.7. Tanım

Bir t -tasarımı D , duali olan D^T 'ye izomorfik ise yani eğer $\pi: D \rightarrow D^T$ bir izoformizm tanımlıyorsa, D tasarımı “*self-dual*” dir. Diğer bir ifadeyle, tasarımın duali, orijinal tasarım ise bu tasarım self-dual dir.

2.10. Örnek

$B_1 = \{1,2,3\}$, $B_2 = \{2,3,4\}$, $B_3 = \{3,4,1\}$, $B_4 = \{4,1,2\}$ blokları ile verilen $2 - (4,3,2)$ tasarımı düşünülün.

Tasarımın isabet matrisi şu şekildedir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dual tasarımın isabet matrisi A^T ise şöyle olur:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dolayısıyla tasarımın blokları; $B_1 = \{1,3,4\}$, $B_2 = \{1,2,4\}$, $B_3 = \{1,2,3\}$, $B_4 = \{2,3,4\}$ olur. Bu bloklar orijinal tasarımın blokları ile aynı olduğundan verilen tasarım self-dualdir.

2.2.3. Tam t – tasarımı

$0 \leq t \leq k \leq v$ tamsayıları verilsin. Eğer X , v elemanlı bir küme ve A , X 'in bütün k elemanlı alt kümelerinin birleşimi ise $D = (X, A)$ çiftli bir t - (v, k, λ_{\max}) tasarımıdır.

Buradaki λ_{\max} değeri maksimum λ 'dır ve $C \binom{v-t}{k-t}$ binomial katsayısına eşittir.

Böyle tasarımlar “*trivial*” olarak veya “*tamamlanmış tasarım*” ya da “*tam tasarım*” olarak isimlendirilir. Yani, k blok genişliğindeki bir tasarım eğer noktaların her k -kümesi en azından bir blok ile ilişkili ise tam tasarım olarak adlandırılır [11,16].

Tam tasarımlarda $b = \binom{v}{k}$ dır. Tekrarlı bloklar olduğunda k noktanın her kümesinin aynı sayıda blokla ilişkili olduğu tam tasarım tektir [3].

2.5. Teorem

$0 < t < k \leq v/2$ koşulunu sağlayan herhangi t, k, v tamsayıları için tam olmayan t - (v, k, λ) tasarımında $\lambda \leq \binom{v-t}{k-t}$ dir. [11].

2.6. Teorem

$v \leq k + 1$ olan her t - (v, k, λ) tasarımı tam tasarımdır [4].

2.7. Teorem

Tam olmayan t - (v, k, λ) tasarımları aşağıdaki eşitsizliği sağlar [4].

$$b \geq v \binom{v-1}{t-2} / \binom{k}{t-2} \quad (2.14)$$

2.11. Örnek

5-(24,8,1) tasarımı Eşitlik (2.4)'ü sağlar. Bu eşitlikten tasarımın blok sayısı;

$$b = \lambda \binom{v}{t} / \binom{k}{t} = 1 \cdot \binom{24}{5} / \binom{8}{5} = 759$$

olur. Tasarımın Eşitsizlik (2.14)'ü sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir,

$$b \geq v \binom{v-1}{t-2} / \binom{k}{t-2}$$

$$759 \geq 24 \cdot \binom{23}{3} / \binom{8}{3} = 759$$

5–(24,8,1) tasarımının Eşitsizlik (2.14)'ü sağladığı görülür.

2.8. Teorem

Bir $t-(2k+1, k, \lambda)$ tasarımı varsa bu takdirde bir $t-(2k+2, k+1, \lambda(2k+2-t)/(k+1-t))$ tasarımı vardır [16].

2.12. Örnek

2–(7,3,1) tasarımı var olduğundan 2–(8,4,3) tasarımı vardır.

2.2.4. Simetrik t – tasarımı

2.1. Yardımcı Teorem

$t \geq s+2$ ($s \geq 0$) ise $\lambda_s \geq v - s$ dir. Bu koşulların sağlandığı bir t-tasarımında,

$$bk(k-1)\dots(k-t+3) \geq v(v-1)\dots(v-t+2) \quad (2.15)$$

dir. $t=2$ ise bu eşitsizlik $b \geq v$ olur ve Fisher eşitsizliği olarak bilinir [17].

2.8. Tanım

$b = v$ olan bir t-tasarımına “simetrik t-tasarımı” denir.

$t > 2$ olan simetrik t-tasarımı, simetrik bir (t-1)-tasarımının genişlemesidir ve bu nedenle Eşitsizlik (2.15) aşağıdaki gibi olur [17].

$$bk(k-1)\dots(k-t+3) = v(v-1)\dots(v-t+2)$$

2.2. Yardımcı Teorem

$b = v$ ve $t > 2$ ise $k \geq v - 1$ dir ve t -tasarımı tam tasarımıdır [4].

Tam tasarım durumları, $k = v$ ve $k = v - 1$, dışında $t > 2$ olan hiçbir simetrik yapıya sahip değildir [18].

2.2.5. Dar t – tasarımı

2.9. Tanım

$t=2s$ olan bir $t-(v, k, \lambda)$ tasarımında $v \geq k + s$ ve $b = \binom{v}{s}$ şartları sağlanıyorsa tasarıma “*dar t-tasarımı*” denir.

Dar 4-tasarımı örneği iyi bilinen 4-(23,7,1) Witt tasarımıdır. Bu tasarımda $b = \binom{23}{2} = 253$ dür. $t \geq 4$ olan dar t -tasarımları çok nadir görünür [5].

Dar 6-tasarımları yoktur. $t=2s \geq 10$ ise ancak sonlu sayıda dar t -tasarımları vardır [16].

2-tasarımının dar olması için gerek ve yeter koşul, tasarımın simetrik olmasıdır. Benzer şekilde 4-tasarımının dar olması için gerek ve yeter koşul, tasarımın yarı simetrik olmasıdır [4].

2.2.6. Türetilmiş t – tasarımı

Türetilmiş yapılar iç veya daraltılma yapılar olarak da bilinir. Bir noktada ya da bir blokta türetilmiş t -tasarımı bulunabilir.

Bir noktadaki türetilmiş tasarım tanımını aşağıdaki şekildedir.

2.10. Tanım

$D = (X, A, I)$; $p \in X$, $B \in A$ ve tanım kümeleri

$$X_p = X - \{p\}, \quad A_p = \{B \mid B \in A, B \cap p\}$$

olmak üzere, D 'nin p noktasında D_p 'ye "daraltılması" $D_p = (X_p, A_p)$ ile verilir [3].

p 'deki daraltılma bazen kısıtlama olarak adlandırılır fakat kısıtlama $X - \{p\}$ içindir.

Yani bir noktadaki türetilmiş tasarım, bir nokta silinerek ve sadece bu nokta ile ilişkili blokları elde tutarak bulunan tasarımdır.

2.9. Teorem

$D = (X, A)$, $t \geq 2$ olan bir t - (v, k, λ) tasarımı ise, bu takdirde herhangi bir $p \in X$ için D_p , bir $(t-1)$ - $(v-1, k-1, \lambda)$ tasarımıdır [3].

2.13. Örnek

Örnek 2.7.'deki 3-(8,4,1) tasarımı göz önüne alınsın. Tasarımın blokları şu şekilde idi:

$$\{1,3,7,8\}, \{1,2,4,8\}, \{2,3,5,8\}, \{3,4,6,8\}, \{4,5,7,8\}, \{1,5,6,8\}, \{2,6,7,8\}, \\ \{1,2,3,6\}, \{1,2,5,7\}, \{1,3,4,5\}, \{1,4,6,7\}, \{2,3,4,7\}, \{2,4,5,6\}, \{3,5,6,7\}$$

$p=1$ noktası seçilerek verilen tasarımın türetilmiş tasarımı bulunursa, bloklar aşağıdaki gibi olur:

$\{3,7,8\}, \{2,4,8\}, \{5,6,8\}, \{2,3,6\}, \{2,5,7\}, \{3,4,5\}, \{4,6,7\}$

Bulunan türetilmiş tasarım bir $2-(7,3,1)$ tasarımıdır.

2.2.7. Artık t – tasarımı

Artık yapılar dış yapılar olarak da bilinir. Türetilmiş tasarımda olduğu gibi bir noktada ya da bir blokta artık t-tasarımı bulunabilir.

Bir nokta dikkate alındığında tanım şöyle olur.

2.11. Tanım

$D = (X, A, I)$; $p \in X$, $B \in A$ olsun. $X_p = X - \{p\}$ ve $A^p = A - \{B \mid B \cap p\}$,
 $A^p = A - A_p$ ile verilen $D^p = (X_p, A^p)$, D 'nin p noktasındaki artığıdır [3].

2.10. Teorem

$D = (X, A)$, $t \geq 2$ olan bir $t-(v, k, \lambda)$ tasarımı ise bu takdirde herhangi bir $p \in X$ için D^p , bir $(t-1)-(v-1, k, \lambda \frac{(v-k)}{k-t+1})$ tasarımıdır [16].

Yani D^p tasarımı D 'nin p dışındaki bütün noktalarından ve p 'yi içermeyen bloklarından oluşur.

2.14. Örnek

Blokları aşağıdaki gibi olan $3-(8,4,1)$ tasarımı göz önüne alınsın:

$\{1,3,7,8\}, \{1,2,4,8\}, \{2,3,5,8\}, \{3,4,6,8\}, \{4,5,7,8\}, \{1,5,6,8\}, \{2,6,7,8\},$
 $\{1,2,3,6\}, \{1,2,5,7\}, \{1,3,4,5\}, \{1,4,6,7\}, \{2,3,4,7\}, \{2,4,5,6\}, \{3,5,6,7\}$

$p = 1$ noktası seçilirse verilen tasarımın artık tasarımı aşağıdaki gibi olur:

$$\{2,3,5,8\}, \{3,4,6,8\}, \{4,5,7,8\}, \{2,6,7,8\}, \{2,3,4,7\}, \{2,4,5,6\}, \{3,5,6,7\}$$

Bulunan artık tasarım bir $2-(7,4,2)$ tasarımıdır.

v , X 'nin bir seti olmak üzere $t-(v, k, \lambda)$ tasarımı (X, A) çifti olarak tanımlanır. A, X 'in her t -alt setini λ blokta içerdiği k -alt setlerinin ailesidir. Daima $0 < t < k < v$ olduğu farz edilir [14].

X , v 'nin herhangi bir seti olsun. C , X 'in mümkün olan tüm k -alt setlerini gösterebilir. Böylece (X, C) kombinatorik tasarım diye isimlendirilen t -tasarımdır. Bu tasarımda λ , $C(v-t, k-t)$ binom katsayısına eşittir. A , C 'nin her bir elemanı n defa içeren X 'nin k -alt seti olsun. (X, A) , $t-(v, k, n\lambda)$ tasarımıdır. Aslında verilen her bir $t-(v, k, n\lambda)$ tasarımında her bloğu n defa yineleyerek $t-(v, k, n\lambda)$ tasarım bulunabilir.

t -tasarımları $0 < t < 6$ için bilinmektedir. $t \geq 6$ için t -tasarımları bulunduğu son çalışmalarda gösterilmiştir [14].

2.11. Teorem

Her $t-(v, k, n\lambda)$ tasarımı $\lambda^* = (v-t+1)/(k-t+1)$ olan $(t-1)-(v, k, \lambda^*)$ tasarımıdır [14].

2.5. Sonuç

$\lambda_0 = b$ blokların sayısı, $\lambda_1 = r$ verilen bir elemanı içeren blokların sayısı ve λ_i verilen i -alt setini içeren blokların sayısı olsun ($0 \leq i \leq t$). Bu takdirde,

$$\lambda_i C(k-i, t-i) = \lambda_i C(v-i, t-i) \text{ dir [14].}$$

2.6. Sonuç

t -tasarımının tamamlayıcısı t -tasarımdır [14].

$t-(v, k, \lambda)$ tasarımının tamamlayıcısı, $\lambda^* = \lambda C(v-k, t)/C(k, t)$ olmak üzere $t-(v, v-k, \lambda^*)$ olduğunu görmek mümkündür [14].

2.12. Teorem

$t-(v, k, \lambda)$ tasarımının varlığı $(t-i)-(v-i, k-i, \lambda)$ tasarımının varlığını belirtir [14].

$C(x)$, X 'nin verilen x elemanı içeren $D=(X, A)$ bloklarının seti olsun. $X - \{x\}$ in her bir $(t-1)$ -alt seti kesinlikle D 'nin λ bloğunda x ile gözükür. Bu bloklar $C(x)$ 'in blokları olur. Böylece $(X - \{x\}, A')$ $i=1$ tasarımı için gereklidir. A' , $C(x)$ 'in bloklarından x silinerek bulunur.

Bu tasarım verilen x elemanı içeren bloklardan başka diğer bloklardan oluşur.

Teorem 2.12.'de verilen $C(x), A$ bloklarının setidir.

3. DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMLARI

3.1. Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımlarının Koşulları ve Bazı Tanımlar

v , k ve λ $v > k \geq 2$ gibi pozitif tam sayı olsun. (X, A) çifti aşağıdaki koşulları sağlarsa “Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları” (v, k, λ) – BIBD olarak tanımlanır.

- (i) v , noktalar olarak adlandırılan elemanların bir setidir
- (ii) X 'in alt setlerinin koleksiyonu olan A , blok olarak adlandırılır
- (iii) Her blok k nokta içerir
- (iv) Farklı noktaların her çifti λ blokta içerilir
- (v) Her nokta r blokta gözükür, $r > 0$ [11].

Bu tasarımların adındaki tamamlanmamış $v > k$ koşulunu ifade eder. Burada, blok genişliği k noktaların toplam sayısından azdır, böylece hiçbir blok noktaların tamamını içermez. Dengeli deyimi, λ parametresinin değişmezliğini ifade eder. BIBD, 2 - (v, k, λ) tasarımıdır. BIBD’leri genellikle (v, b, r, k, λ) – tasarımları şeklinde ifade edilir.

3.1. Örnek

$(7, 3, 3, 1)$ -tasarımı örneği $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ noktalarından oluşan X seti ve aşağıdaki bloklar ile verilir.

$\{1, 2, 4\}$ $\{2, 3, 5\}$ $\{3, 4, 6\}$ $\{4, 5, 7\}$ $\{5, 6, 1\}$ $\{6, 7, 2\}$ $\{7, 1, 3\}$

blok genişliği k 'nın üç olduğu kolayca görülür ve yinleme sayısı r üçtür. Noktaların her çifti sadece bir blokta birlikte gözükür, böylece $\lambda = 1$ dir.

3.2. Örnek

$(4, 3, 3, 2)$ -tasarımı $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $\{1, 2, 3\}$ $\{2, 3, 4\}$ $\{3, 4, 1\}$ $\{4, 1, 2\}$ blokları ile verilir.

3.3. Örnek

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ seti üzerinde, $\{1, 3, 7, 8\}$ $\{1, 2, 4, 8\}$ $\{2, 3, 5, 8\}$ $\{3, 4, 6, 8\}$ $\{4, 5, 7, 8\}$ $\{1, 5, 6, 8\}$ $\{2, 6, 7, 8\}$ $\{1, 2, 3, 6\}$ $\{1, 2, 5, 7\}$ $\{1, 3, 4, 5\}$ $\{1, 4, 6, 7\}$ $\{2, 3, 4, 7\}$ $\{2, 4, 5, 6\}$ $\{3, 5, 6, 7\}$ blokları ile $(8, 14, 7, 4, 3)$ -tasarımı da örnektir.

X 'in bütün alt setlerinden oluşan A 'nın genişliği k olsun. Bu takdirde (X, A) bir $\left(v, k, \binom{v-2}{k-2}\right)$ -BIBD olduğu bilinir.

BIBD'lerin varlığının iki temel koşulu aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

3.1. Teorem

Bir (v, k, λ) - BIBD'de her nokta kesinlikle

$$r = \frac{\lambda(v-1)}{k-1}$$

blokta gözüktür [16].

3.2. Teorem

Bir (v, k, λ) - BIBD için blokların sayısı

$$b = \frac{vr}{k} = \frac{\lambda(v^2 - v)}{k^2 - k}$$

ile verilir [16].

Bazı parametre setleri ile BIBD'in mevcut olmadığı bu iki teoremle görünür. Çünkü b ve r tam sayı olmalıdır. Örneğin $(8,3,1)$ -BIBD mevcut değildir, çünkü Teorem 3.1. sağlanmaz. Bir diğer örnek, $(19,4,1)$ -BIBD düşünölsün. Teorem 3.1.'den $(19,4,1)$ -BIBD $r = 1 \times 18 / 3 = 6$ 'ya sahiptir. Bu bir çelişki değildir. Bununla beraber eğer Teorem 3.2. kullanarak b hesaplanırsa, $b = 19 \times 6 / 4$ olduğu görülür, bulunan tam sayı değildir, dolayısıyla $(19,4,1)$ -BIBD mevcut değildir.

Kombinatoryal Tasarım Teorisinin ana amaçlarından biri bir (v, k, λ) - BIBD'in bulunması için gerekli ve yeterli koşulları belirlemektir. Bu genel olarak çok zor problemdir ve cevabı henüz bilinmeyen pek çok parametre seti vardır. Örneğin $(22,8,4)$ -BIBD olup olmadığı halen bilinmemektedir.

3.1.1. Dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarının isabet matrisleri

Verilen (v, b, r, k, λ) - tasarımı isabet matrisi olarak isimlendirilen $v \times b$ boyutlu matris ile gösterilir. Satırlar tasarımın noktaları ile sütunlar da bloklar ile sınıflandırılmıştır. j .blokta i .nokta içerilmiş ise matrisin (i,j) . hücreğine 1 ve diğer hücrelerine 0 yazılır. İsbet matrisinin her bir satırı r tane 1'e, her bir bloğu k tane 1'e sahiptir ve ayrı satırların her çifti ortak olarak λ bloktadır.

(X, A) , bir (v, k, λ) -BIBD olsun, (X, A) 'nin isabet matrisi $v \times b$ boyutlu 0-1 matris $M = (m_{i,j})$ aşağıdaki kural ile tanımlanır.

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & x_i \in A_j \\ 0 & x_i \notin A_j \end{cases}$$

3.4. Örnek

(9,3,1)-BIBD göz önüne alınsın. Bu tasarımın isabet matrisi aşağıdaki 9×12 lik matristir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3. Teorem

M bir $v \times b$ 0-1 matris olsun. M bir (v, b, r, k, λ) -BIBD'in isabet matrisi olması için gerek ve yeter koşul, $MM^T = \lambda J_v + (r - \lambda)I_v$ ve $u_v M = ku_b$ olmasıdır [16].

I_n $n \times n$ özdeşlik matrisini, J_n her hücresi "1" olan $n \times n$ matrisini ve u_n her koordinatı "1" olan n uzunluğundaki vektörü göstermektedir. $M = (m_{i,j})$ matrisi için M 'nin transpozu M^T , (j, i) hücresi $(m_{i,j})$ olan matristir.

3.1.2. İzomorfizm ve otomorfizm

(X, A) ve (Y, B) , iki (v, k, λ) -BIBD olduğu düşünölsün.

$\{\{\alpha(x) : x \in A\} : A \in \mathcal{A}\} = B$ olacak şekilde $\alpha : X \rightarrow Y$ 1-1 dönüşümse (X, A) ve (Y, B) 'nin izomorfik olduğu söylenir.

Böylece $x \in X$ olmak üzere, her nokta $\alpha(x)$ ile yeniden isimlendirilirse, A bloklarının koleksiyonu B 'ye dönüştürülür. $1-1 \alpha$ (*bijection* α), bir “izomorfizm” olarak adlandırılır.

3.5. Örnek

Burada (X, A) ve (Y, B) , iki $(7,3,1)$ -BIBD alınsın.

$$X = \{1,2,3,4,5,6,7\} \text{ ve}$$

$$A = \{123,145,167,246,257,347,356\}$$

$$Y = \{a,b,c,d,e,f,g\} \text{ ve}$$

$$B = \{abd,bce,cdf,deg,ae f,bfg,acg\}.$$

$\alpha(1) = a$, $\alpha(2) = b$, $\alpha(3) = d$, $\alpha(4) = c$, $\alpha(5) = g$, $\alpha(6) = e$ ve $\alpha(7) = f$ olacak şekilde $1-1 \alpha$ tanımlansın. Ardından X 'deki noktalar α kullanılarak tekrar sınıflandırıldığında A 'nın blokları aşağıdaki gibi olur:

$$123 \rightarrow abd$$

$$145 \rightarrow acg$$

$$167 \rightarrow aef$$

$$246 \rightarrow bce$$

$$257 \rightarrow bfg$$

$$347 \rightarrow cdf$$

$$356 \rightarrow deg$$

Böylece α , iki BIBD'in bir izomorfizm'dir.

3.4. Teorem

$M = (m_{i,j})$ ve $N = (n_{i,j})$ iki (v, b, r, k, λ) – BIBD’in isabet matrisleri olsun. İki BIBD izomorfik olması için gerek ve yeter koşul $\{1, \dots, v\}$ ’nin permütasyonu γ ve $\{1, \dots, b\}$ ’nin permütasyonu β olmak üzere, her $1 \leq i \leq v$, $1 \leq j \leq b$ için

$$m_{i,j} = n_{\gamma(i),\beta(j)}$$

mevcut olmasıdır [16].

Genel olarak, iki BIBD’in izomorfik olup olmadığını belirlemek zor bir hesaplama problemdir.

(X, A) bir (v, k, λ) – BIBD olsun. (X, A) ’nin bir otomorfizm’i BIBD’in kendi içinde bir izomorfizm’idir. Bu durumda $1-1$ dönüşümü, X ’in

$$\{\{\alpha(x) : x \in A\} : A \in A\} = A$$

Şeklindeki bir permütasyondur. X ’in üzerinde birim dönüşüm daima bir otomorfizm’dir.

3.6. Örnek

(X, A) aşağıdaki $(7,3,1)$ -BIBD olsun

$$X = \{1,2,3,4,5,6,7\} \text{ ve}$$

$$A = \{123,145,167,246,257,347,356\}$$

$1-1 \alpha$; $\alpha(1) = 1$, $\alpha(2) = 2$, $\alpha(3) = 3$, $\alpha(4) = 5$, $\alpha(5) = 4$, $\alpha(6) = 7$ ve $\alpha(7) = 6$ gibi tanımlansın. Ayrıca, X 'deki noktalar α kullanılarak tekrar sınıflandırıldığında A 'nın blokları aşağıdaki gibi olur:

$$123 \rightarrow 123$$

$$145 \rightarrow 145$$

$$167 \rightarrow 167$$

$$246 \rightarrow 257$$

$$257 \rightarrow 246$$

$$347 \rightarrow 356$$

$$356 \rightarrow 347$$

Böylece α , BIBD'in bir otomorfizm'dir.

(X, A) BIBD'in bütün otomorfizmlerinin setleri, bir grup oluşturularak gösterilebilirler. Bu grup, BIBD'in otomorfizm grubu olarak adlandırılır ve $\text{Aut}(X, A)$ ile gösterilir.

3.7. Örnek

Örnek 3.6.daki (X, A) , $(7,3,1)$ -BIBD, $\beta(1) = 2$, $\beta(2) = 4$, $\beta(3) = 6$, $\beta(4) = 3$, $\beta(5) = 1$, $\beta(6) = 7$ ve $\beta(7) = 5$ gibi tanımlanan β otomorfizmine sahiptir.

$\gamma = \alpha \circ \beta$ $\gamma(x) = \beta(\alpha(x))$ gibi tanımlanan γ aşağıdaki gibi olur:

$\gamma(1) = 2$, $\gamma(2) = 4$, $\gamma(3) = 6$, $\gamma(4) = 1$, $\gamma(5) = 3$, $\gamma(6) = 5$ ve $\gamma(7) = 7$. Böylece γ 'da BIBD'in bir otomorfizmidir.

3.1.3. Dengeli tamamlanmamış blok tasarımından yeni dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarının elde edilişi

Yeni BIBD'ler elde etmenin iki metodu vardır. Birinci yapı “*toplam yapı*” olarak adlandırılır. Aynı nokta seti üzerinde verilen iki BIBD için, yeni BIBD iki düzendeki bütün blokları içerir.

3.5. Teorem

(v, k, λ_1) – BIBD ve (v, k, λ_2) – BIBD olsun. Bu takdirde $(v, k, \lambda_1 + \lambda_2)$ – BIBD mevcuttur [19].

Özel durum olarak eğer bir (v, k, λ) – BIBD’de her bloğun iki kopyası alınırsa, ayrıca bir $(v, k, 2\lambda)$ – BIBD elde edilir.

“Toplam Yapı”nın uygulamasını tanımlamak için $(16, 6, \lambda)$ – BIBD göz önüne alınır. $(16, 6, 1)$ – BIBD mevcut değildir. Bununla beraber, $(16, 6, 2)$ – BIBD ve $(16, 6, 3)$ – BIBD ikisinin de mevcut olduğu bilinir. Toplam yapının uygulaması ile $\lambda > 1$ için $(16, 6, \lambda)$ – BIBD’in mevcut olduğu görülür.

3.8. Örnek

$(9, 3, 1)$ -BIBD kullanılarak, $(9, 3, 2)$ -BIBD’in elde edilişi verilebilir.

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{v-1} \Rightarrow 1 = \frac{r(2)}{8} \quad r = 4$$

$$b = \frac{rv}{k} = \frac{4 \times 9}{3} = 12$$

olarak hesaplanmıştır.

Çizelge 3.1. (9,3,1)-BIBD

İşlemler	Bloklar											
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}
1	X			X			X				X	
2	X					X			X			X
3	X				X			X		X		
4		X		X					X	X		
5		X				X		X			X	
6		X			X		X					X
7			X	X				X				X
8			X			X	X			X		
9			X		X				X		X	

Aynı şekilde yeni oluşturulan (9,3,2)-BIBD'in diğer iki parametresi,

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{v-1} \Rightarrow 2 = \frac{r(2)}{8} \quad r = 8$$

$$b = \frac{rv}{k} = \frac{8 \times 9}{3} = 24$$

$r = 8$ ve $b = 24$ olarak hesaplanmıştır.

Çizelge 3.2. (9,3,2)-BIBD

İşlemler	A_i																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	X			X			X			X			X			X					X		X	
2	X				X			X				X	X				X			X				X
3	X					X			X		X		X					X	X			X		
4		X		X					X			X		X		X				X		X		
5		X			X		X				X			X			X		X				X	
6		X				X		X		X				X				X			X			X
7			X	X				X			X				X	X			X					X
8			X		X				X	X					X		X				X	X		
9			X			X	X					X			X			X		X	X			X

(1,7) çifti, A_4 bloğu ve A_{16} bloğunda görülmektedir, (5,6) çifti ise A_2 ve A_{14} bloklarında görülmektedir: $\lambda = 2$ dir.

İkinci yapı “tamamlanış” olarak adlandırılır. (X, A) bir BIBD olsun ve $X \setminus A$ ile $A \in A$ her blok tekrar yerine yazılsın. Sonuç yine aşağıdaki Teoremde olduğu gibi bir BIBD dir.

3.6. Teorem

Bir (v, b, r, k, λ) -BIBD mevcut ise, $(v, b, b-r, v-k, b-2r+\lambda)$ -BIBD mevcuttur [19].

Örneğin, (7,3,1)-BIBD’in “tamamlayıcısı” (7,4,2)-BIBD ve (9,3,1)-BIBD’in “tamamlayıcısı” (9,6,5)-BIBD dir. Teorem 3.6.’ya göre BIBD’lerin $k \leq v/2$ ile çalışılması yeterlidir.

(7,3,1)-BIBD için

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{v-1} \Rightarrow 1 = \frac{r(2)}{6} \quad r = 3, \quad b = \frac{rv}{k} = \frac{3 \times 7}{3} = 7$$

$$\lambda = b - 2r + 1 = 7 - 6 + 1 = 2$$

(7,4,2)-BIBD bulunur.

(9,3,1)-BIBD için

$$\lambda = \frac{r(k-1)}{v-1} \Rightarrow 1 = \frac{r(2)}{8} \quad r = 4, \quad b = \frac{rv}{k} = \frac{4 \times 9}{3} = 12$$

$$\lambda = b - 2r + 1 = 12 - 8 + 1 = 5$$

(9,6,5)-BIBD elde edilir.

3.1.4. Fisher eşitsizliği

Bir (v, k, λ) – BIBD’in var olması için gerekli olan iki koşul Teorem 3.1. ve Teorem 3.2.’de verildi. Bilinen bir diğer önemli ve gerekli koşul Fisher Eşitsizliğidir.

3.7. Teorem (Fisher Eşitsizliği)

(v, b, r, k, λ) – BIBD varlığı için $b \geq v$ olmalıdır [7].

Not: $b \geq v$ nün sonucu, $r \geq k$ ve $\lambda(v-1) \geq k^2 - k$ gibi diğer eşdeğer yollarla da ifade edilebilir [14].

$b < v$ olmak üzere A , tasarımın isabet matrisi olsun. 0 'dan oluşan $v - b$ bloklarını, $v \times v$ matris B 'yi elde etmek için A 'ya eklensin. 0 'dan oluşan bu ekstra bloklar iç çarpımı değiştirmedeği için $AA^T = BB^T$ olmalıdır. Determinantı alarak

$\det(AA^T) = \det(BB^T) = (\det B)(\det B^T) = 0$ olduğunu görülür, çünkü 0'dan oluşan bloklardan dolayı $\det B = 0$ dır. Teorem 3.3'ten

$$\det(AA^T) = \det \begin{vmatrix} r & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & r \end{vmatrix}$$

elde edilir. Bu determinant yapısında ilk sütunu diğer her bir sütundan çıkararak ve ardından ilk satıra her satırı ekleyerek aşağıdaki determinant elde edilir.

$$\det(AA^T) = \det \begin{vmatrix} r + (v-1)\lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & r + (v-1)\lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & r + (v-1)\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & r + (v-1)\lambda \end{vmatrix}$$

Böylece

$$\det(AA^T) = [r + (v-1)\lambda](r - \lambda)^{v-1} \quad (3.1)$$

bulunur. Fakat r , v ve λ hepsi pozitif olduğu için $r + (v-1)\lambda > 0$ dır ve $k < v$ olduğu için Teorem 3.1. ve Teorem 3.2. $r > \lambda$ olduğunu ifade eder. Böylece Eşitlik (3.1)'in sağındaki çarpım 0'a eşit olamaz.

Eğer BIBD de $v = b$ ve $k = r$ elde edilirse BIBD'in simetrik ya da kare olduğu söylenir. Simetrik BIBD'ler her zaman (v, k, λ) – tasarımları gibi tanımlanır.

BIBD'in simetriği için parametreler üzerinde toplanabilme özelliği vardır [14].

Örnek olarak parametre seti $(16,6,1)$ alınsın. $(16,6,1)$ -BIBD $r = 3$ dür, fakat $r < k$ sonucu ortaya çıkar, o halde $(16,6,1)$ -BIBD mevcut değildir [20].

3.8. Teorem (Bruck-Ryser-Chowla Teoremi)

Aşağıdaki koşullar simetrik BIBD'in varlığı için gereklidir.

- (i) v çift ise; $k - \lambda$ bir tam sayının karesidir.
- (ii) v tek ise; aşağıdaki eşitlik tamamı 0 olmayan x, y, z tam sayılarında bir çözüme sahiptir

$$x^2 = (k - \lambda)y^2 + (-1)^{(v-1)/2} \lambda z^2 \quad [14].$$

BIBD parametrelerinde verilen tüm sonuçlar gerekli fakat yeterli değildir. Bunlar parametrelerin kesin setleri için, bir BIBD'in varlığını korumasında kullanılabilir ancak verilen bir parametre seti (bütün bu koşulları sağlayan) bu parametrelerle birlikte BIBD'in mevcut olduğunu ifade etmez. Varlık sorusunun kesinleştirilemediği birçok mümkün parametre seti vardır.

Örneğin, (22,7,2)-BIBD'in mevcut olamayacağını göstermek için Teorem 3.8. kullanılır. İlk olarak, eğer bu BIBD mevcut olsaydı, simetrik olmalıydı çünkü; $2(22-1) = 7(7-1)$ dir. Bununla beraber 22 çift sayıdır ve $7-2 = 5$ tam kare olmadığından BIBD'in mevcut olmadığına karar verilebilir [20].

3.2. Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımı İçin Diğer Yapılar

BIBD kurmak için birkaç metod vardır. Bunlar genellikle iki sınıfa ayrılır, Direkt ve geri dönüşlü metodlar. Direkt metodlar genellikle BIBD'leri parametreleri üzerinde özel sınırlandırmalarla verilir. Diğer taraftan geri dönüşlü metodlar BIBD ailelerinin tamamını sağlar. Direkt ve geri dönüşlü metodların bazıları burada incelenecektir.

Verilen simetrik bir BIBD'den yeni bir BIBD kurmak için üç yöntem verilecektir. Simetrik BIBD'de sınırlandırma aşağıdaki Teorem 3.9.'un bir sonucudur.

3.9. Teorem

(v, k, λ) – tasarımında her iki blok ortak olarak λ elemana sahiptir [14].

3.2.1. Artık ve türetilmiş dengeli tamamlanmamış blok tasarımları

Simetrik BIBD'in her bir iki bloğu λ ortak nokta içerir. Bu sonuç eskisinden yeni BIBD elde etmeyi sağlar.

3.1. Tanım

(X, A) simetrik (v, k, λ) – BIBD ve $A_0 \in A$ olsun.

$\text{Der}(X, A, A_0) = (A_0, \{A \cap A_0 : A \in A, A \neq A_0\})$ ve

$\text{Res}(X, A, A_0) = (X \setminus A_0, \{A \setminus A_0 : A \in A, A \neq A_0\})$ dir. $\text{Der}(X, A, A_0)$ türetilmiş BIBD olarak ve $\text{Res}(X, A, A_0)$ artık BIBD olarak adlandırılır.

3.10. Teorem

(X, A) simetrik (v, k, λ) – BIBD ve $A_0 \in A$ olsun. O zaman $\text{Der}(X, A, A_0)$ $\lambda \geq 2$ ile $(k, v-1, k-1, \lambda, \lambda-1)$ – BIBD dir. Ayrıca $\text{Res}(X, A, A_0)$ $k \geq \lambda + 2$ ile $(v-k, v-1, k, k-\lambda, \lambda)$ – BIBD dir [20].

$\text{Der}(X, A, A_0)$, $k > \lambda \geq 2$ parametreleri ile BIBD dir (k türetilmiş tasarımda noktaların sayısıdır ve bloklar λ genişliğine sahiptir). Bununla beraber her bir simetrik BIBD'de $k > \lambda$ dir çünkü $\lambda(v-1) = k(k-1)$ ve $v > k$ dir.

$\text{Res}(X, A, A_0)$, $v-k > k-\lambda \geq 2$ parametreleri ile BIBD dir ($v-k$ artık tasarımda noktaların sayısıdır ve bloklar $k-\lambda$ genişliğine sahiptir). Simetrik BIBD'de $v-k > k-\lambda$ olduğu gösterilebilir. $v \leq 2k-\lambda$ olsun. O zaman ,

$k(k-1) = \lambda(v-1) \leq \lambda(2k-\lambda-1)$ dir. Bu $(k-\lambda)(k-\lambda-1) \leq 0$ a eşdeğerdir. Fakat k ve λ tamsayıdır, böylece bu son eşitsizlik ancak ve ancak $k = \lambda$ ya da $k = \lambda + 1$ ise gerçekleşir. $k \geq \lambda + 2$ olduğu kabul edildiğinde, çelişki olur. Bundan dolayı, $v - k > k - \lambda$ koşulu sağlanmaz.

A_0 da olmayan bütün noktaları silerek türetilmiş tasarım kurulabilir. Bu $(k, v-1, k-1, \lambda, \lambda-1)$ -tasarımını verecektir. Teorem 3.9.'a göre orijinal tasarımın bloklarının her biri seçilmiş blok ile ortak λ noktaya sahiptir. Bu durumda yeni blokların hepsi $k - \lambda$ genişliğine sahiptir. Geriye kalan noktaların her bir çifti yine birlikte λ blokta gözükcektir. Yeni tasarım yalnızca 1 eksik bloğa ve $v - k$ noktalara sahip olacaktır, bu durumda $(v - k, v - 1, k, k - \lambda, \lambda)$ -tasarımı elde edilir.

Her iki kuruluş içinde, farklı blokları seçerek izomorfik olmayan artık ve türetilmiş tasarımları bulmak mümkündür [14].

3.2. Tanım

İki düzlem, $v = b = \frac{(n^2 + 3n + 4)}{2}$, $r = k = n + 2$, $\lambda = 2$ parametreleri ile simetrik BIBD dir ve onun artık tasarımı,

$$v = \frac{n(n+1)}{2}, \quad b = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \quad r = n+2, \quad k = n, \quad \lambda = 2$$

parametrelerine sahiptir [7].

3.9. Örnek

(11,5,2)-BIBD simetriktir çünkü $2(11-1)=5(5-1)$ dir. Artık BIBD (6,3,2)-BIBD dir ve türetilmiş BIBD (5,2,1)-BIBD dir. Çizelge 3.3. de (11,5,2)-BIBD'de 11 bloğu gözükmektedir. Blok $A_0 = \{1,3,4,5,9\}$ dir. Kalan 10 blok her biri iki kısım içinde

$(v', b', r', k', \lambda')$ – ile artık BIBD'in $(v - k, v - 1, k, k - \lambda, \lambda)$ – parametreleri tanımlansın. Bu parametreler $r' = k' + \lambda'$ koşulunu sağlar. $r = k + \lambda$ ile (v, b, r, k, λ) – BIBD yarı artık BIBD olarak adlandırılır. Yarı artık (v, b, r, k, λ) – BIBD simetrik $(v + r, r, \lambda)$ – BIBD'in artık BIBD gibi elde edilir ve bu simetrik BIBD'in mevcut olduğu ispatlanır.

Benzer olarak, $(v', b', r', k', \lambda')$ – türetilmiş BIBD'in $(k, v - 1, k - 1, \lambda, \lambda - 1)$ – parametreleri yazılabilir. Bu parametreler $k' = \lambda' + 1$ koşulunu sağlar. $k = \lambda + 1$ ile her bir (v, b, r, k, λ) – BIBD yarı türetilmiş BIBD olarak adlandırılır. Yarı türetilmiş (v, b, r, k, λ) – BIBD simetrik $(b + 1, r + 1, \lambda + 1)$ – BIBD'in türetilmiş BIBD gibi düşünülür ve bu simetrik BIBD'in mevcut olduğu ispatlanır.

$(10, 15, 6, 4, 2)$ parametre seti yarı artıktır çünkü $6 = 4 + 2$ dir. Eğer simetrik $(16, 6, 2)$ -BIBD mevcut ise $(10, 15, 6, 4, 2)$ -BIBD mevcuttur.

$(9, 18, 8, 4, 3)$ parametre seti yarı türetilmiştir çünkü $4 = 3 + 1$ dir. Eğer simetrik $(19, 9, 4)$ -BIBD mevcut ise bu yüzden $(9, 18, 8, 4, 3)$ -BIBD mevcuttur. Bu simetrik BIBD'lerin her ikisi de mevcuttur, böylece Teorem 3.10.'dan $(10, 15, 6, 4, 2)$ -BIBD ve $(9, 18, 8, 4, 3)$ -BIBD ikisi de mevcuttur. Artık BIBD'in yarı artık ve türetilmiş BIBD'in yarı türetilmiş olduğu tanımlarından açıktır.

3.2.2. Dual tasarım

Verilen (v, k, λ) – tasarımında, Dual tasarımı blokların ve noktaların rollerini değiştirerek elde edilebilir. D'nin blok sayısı dual tasarımın işlemlerinin bir setini, dualin blokları D'nin işlemleri ile ilişkili olacaktır. D'nin her bir işlemi için dual tasarımın bloğu göz önüne alınacaktır. Bunların sayısı bu işlemleri ihtiva eden D'nin bloklarına karşılık gelen sayı kadar olacaktır. Teorem 3.9. dual tasarımda noktaların her çiftinin dual tasarımın bloklarında aynı sayıda içerildiğini gösterir. Eğer A , D

tasarımının isabet matrisi ise o zaman A^T dual tasarımın isabet matrisi olduğu açıktır. Dual tasarımın dualinin orijinal tasarım olduğunu da görmek zor değildir. Dual tasarımın parametreleri orijinal olanlar ile aynıdır. Tasarımın dualinin orijinal tasarım olması durumunda tasarım self-dualdir denir.

Dual tasarımlar tamamlanmamış blok tasarımları sınıfının üyeleridir.

3.11. Teorem

A , b doğrular ve v noktalar ile indirgenmiş tasarım olsun.

- (i) Her bir farklı iki nokta $\lambda > 0$ doğrudaki bulunur
- (ii) Her bir iki farklı doğru $\mu > 0$ noktalarda kesişir [21].

Eğer $\lambda = \mu = 1$ ise, bu takdirde 3'ü aynı doğru üzerinde bulunmayan 4 nokta vardır. O zaman $b = v$, $\lambda = \mu$ ve bütün doğruların r noktalara sahip olduğu r sayıları vardır ve her bir noktadan geçen r tane doğru vardır. r sayısı, $r(r-1) = (v-1)\lambda$ ile verilir. Tasarım teorisinde, (i) koşulu sağlandığında bu durum 'dengeli' olarak tanımlanır. Bunlara bazen 'ikili dengeli' ya da '2- dengeli' denir. Böyle tasarımlar 2-tasarım olarak adlandırılır. Eğer tasarım (ii) koşulunu sağlarsa 'bağlı' olarak adlandırılır [7].

BIBD her bir doğrudaki (bloktaki) noktaların sayısı $k < v$ olan tasarım ise indirgenmiş tasarımdır. Her bir noktadan r doğru geçerse tasarım '2-dengeli'dir. Eğer $v = b$ ise BIBD simetriktir, o zaman $\lambda = \mu$ olduğunda tasarım bağlı olduğu söylenir.

3.12. Teorem

Bağı, dengeli, indirgenmiş tasarım simetrik BIBD dir [21].

$\lambda = \mu = 1$ durumunda Teorem 3.11. sonlu projektif geometrinin bir sonucu olarak gözüktür.

Dengeli tamamlanmamış blok tasarımının dual tasarımları

BIBD için Fisher eşitsizliği ($v \leq b$) sağlanmalıdır. Dual tasarımda bloklar ve işlemler rol değiştirir. Böylece genel olarak BIBD'in dualinde Fisher eşitsizliği sağlanmayabilir. Sonuç olarak; dual, dengeli tasarım değildir. $b = v$ durumu hariç dual tasarım dengeli olmayabilir.

3.10. Örnek

(4,3,2)-tasarımı göz önüne alınsın. $B_1=\{1,2,3\}$ $B_2=\{2,3,4\}$ $B_3=\{3,4,1\}$ $B_4=\{4,1,2\}$ olsun. Dual tasarım $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ setine dayandırılır ve tasarımın blokları 1- $\{A,C,D\}$ 2- $\{A,B,D\}$ 3- $\{A,B,C\}$ 4- $\{B,C,D\}$ dir. Bu dual tasarımın $B_1=1, B_2=2, B_3=3, B_4=4$ ile orijinal tasarım olduğunu görmek zor değildir, böylece bu tasarım self-dualdir [14].

3.3. Tanım

Kısmi dengeli tamamlanmamış blok tasarımında verilen v tane nokta aşağıdaki koşulları sağlayan bir ilişkiye sahiptir.

- (i) Her bir blokta k farklı nokta vardır.
- (ii) Her bir nokta r blokta görünür.
- (iii) Herhangi iki nokta i .ortak sınıfta iseler $\lambda_i (i = 1,2, \dots, m)$ blokta birlikte görünürler.
- (iv) Her bir α noktası i .ortak sınıfta $n_i (i = 1,2, \dots, m)$ ye sahiptir.

(v) i.sınıfta herhangi iki nokta α , β olsun. Bu takdirde α 'nın j.sınıfında ve β 'nin l sınıfında birlikte görünen noktaların sayısı P_{jl}^i ile verilir [7].

3.4. Tanım

v, b, r, k $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ n_1, n_2, \dots, n_m sayılarına birinci çeşit parametreler

P_{jl}^i ($i, j, l = 0, 1, 2, \dots, m$) sayılarına ikinci çeşit parametreler denir [7].

3.5. Tanım

m sınıflı PBIBD'in parametreleri aşağıdaki ilişkileri sağlar:

$$\sum_{i=0}^m n_i = v \quad , \quad \sum_{i=0}^m P_{jl}^i = n \quad , \quad P_{jl}^i = P_{ij}^i \quad , \quad n_i P_{jl}^i = n_{ij} \quad , \quad P_{il}^j = n P_{ij}^l \quad ,$$

$$n_0 = 1$$

$$P_{ij}^0 = \begin{cases} n_i & i=j \\ 0 & dh \end{cases} \quad , \quad \lambda_0 = r \quad , \quad \sum_{i=0}^m n_i \lambda_i = rk \quad , \quad n_j n_l = \sum_{i=0}^m P_{jl}^i n_i \quad ,$$

m=2 için

$$P_1 = \begin{pmatrix} P_{11}^1 & P_{12}^1 \\ P_{21}^1 & P_{22}^1 \end{pmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{pmatrix} P_{11}^2 & P_{12}^2 \\ P_{21}^2 & P_{22}^2 \end{pmatrix} \quad [7].$$

Kronker çarpım

Deney tasarımında matrislerin kronker çarpımı ilk defa Vartak (1955) tarafından kullanılmıştır.

3.6. Tanım

D_1 tasarımının isabet matrisi N_1 ve diğer bir N_2 tasarımının isabet matrisi A_2 olsun. $N_1 \otimes N_2$ isabet matrisli tasarım, D_1 ve D_2 tasarımlarının kronoker çarpımı olarak adlandırılır [22].

$$\begin{aligned} N_{12} &= N_1 \otimes N_2 \\ N_{21} &= N_2 \otimes N_1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

ile verilen N_{12} ve N_{21} isabet matrislerinin birinden diğerini elde etmek her zaman mümkündür [22].

Burada $N_1 = (11 \cdots 1)_{1 \times n}$ ve

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix}_{m \times 1} \text{ olarak verilmiştir.}$$

N_1 isabet matrisinin tanımladığı tasarım her biri 1 boyutlu n bloğun aynı tek işlem ile yapıldığını ifade eder. N_2 isabet matrisi ise m boyutlu bir blokta m işlemin bir tek tekrarının bulunduğu ifade eder.

N herhangi bir D tasarımının isabet matrisi olmak üzere

$$N^{(1)} = N_1 \otimes N = (N N \dots N)$$

kronoker çarpımı, N isabet matrisinin n tekrarını verir.

$$N^{(2)} = N \otimes N_2 \quad (3.3)$$

Eşitlik (3.3)'de verilen $N^{(2)}$ isabet matrisinin satırları, N isabet matrisinin her bir satırının m tekrarını bulundurur.

$$N^{(3)} = N_1 \otimes N_2$$

Kronoker çarpımı, “*rasgele blok tasarımı*”dır. m işlem ve n bloktan oluşmuş olup, her bir blokta tam tekrar vardır.

3.7. Tanım

Bir tasarımda tüm işlemler ve blokların her biri diğeri ile ilişkili ise “*tasarım bağlantılı*”dır denir. Aksi halde “*bağlantısız*”dır denir.

$$N^{(4)} = I_k \otimes N$$

kronoker çarpımı daima bir bağlantısız tasarımı tanımlar.

m ortak sınıflı bir PBIBD'in isabet matrisi $N^{(m)}_{PBIB}$ olmak üzere,

$$N = N_2 \otimes N^{(m)}_{PBIB} \quad (3.4)$$

Kronoker çarpımı yine bir PBIBD'in isabet matrisidir.

$$N = N_2 \otimes N_{BIB} \quad (3.5)$$

Kronoker çarpımı bir PBIBD'i verir.

$N_{(BIB)1}$, $N_{(BIB)2}$ matrisleri, farklı iki BIBD'lerin isabet matrisleri olsunlar.

$$N = N_{(BIB)1} \otimes N_{(BIB)2} \quad (3.6)$$

$$N = N^{(m)}_{PBIB} \otimes N^{(t)}_{PBIB}$$

Kronoker çarpımları yine PBIBD'lerini verirler.

İki ortak sınıflı PBIBD'nin bir çeşidi grup bölünebilir tasarımlardır. Eşitlik (3.5)'de verilen kronoker çarpım bir singüler GD tasarımını verir.

GD tasarımlarına ait tanım ve özellikler yapılan araştırmalarda açıklanmıştır [2].

Eşitlik (3.6)'da verilen kronoker çarpımdan en fazla 3 sınıfa sahip bir PBIBD elde edilir. Bu çarpımın iki ortak sınıflı olması için gerek ve yeter koşul, $i = 1,2$ birinci ve ikinci tasarımları tanımlamak üzere

$$v_1 = v_2, k_1 = k_2$$

olmasıdır.

Eşitlik (3.4), (3.5), (3.6)'da verilen kronoker çarpımlardan elde edilen yeni tasarımların parametreleri ve elde edilişleri açık olarak verilmiştir [22].

3.11. Örnek

Singüler GD tasarımlar kronoker çarpım ile de elde edilebilirler. Bir singüler GD tasarımını elde etmek için Çizelge 3.4. göz önüne alınsın.

Çizelge 3.4. $v = b = 4, k = r = 3, \lambda = 2$ parametrelili BIBD

İşlemler	Bloklar			
	1	2	3	4
A	X	X		X
B	X		X	X
C	X	X	X	
D		X	X	X

Burada “X” işareti konan hücrelerde gözlem var, diğer boş hücrelerde gözlem yok anlamındadır.

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{j \times 1} \quad (3.7)$$

alınsın. Eşitlik (3.5)’de verilen kronoker çarpımının parametreleri aşağıdaki gibi ortaya konur.

$$\begin{aligned} v' &= \gamma v, & b' &= b, & r' &= r, & k' &= \gamma k \\ m' &= v, & n' &= \gamma, & \lambda'_1 &= r, & \lambda'_2 &= \lambda \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$P'_{jk}{}^1 = \begin{bmatrix} n'-2 & 0 \\ 0 & n'(m'-1) \end{bmatrix} \quad P'_{jk}{}^2 = \begin{bmatrix} 0 & n'-1 \\ n'-1 & n'(m'-2) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Burada parametreleri ayırt etmek için “ / ” kullanıldı.

Eşitlik (3.9)’de verilenler GD PBIBD’in ikinci çeşit parametreleridir [2,22]. Eşitlik (3.5), (3.7), (3.8) ve (3.9) göz önüne alındığında parametreler aşağıda olduğu gibidir.

$$\begin{aligned} v' &= 8, & b' &= 4, & r' &= 3, & k' &= 6 \\ m' &= 4, & n' &= 2, & \lambda'_1 &= 3, & \lambda'_2 &= 2, \end{aligned}$$

$$P'_{jk}{}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad P'_{jk}{}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Örnek 3.11.’de verilen kronoker ilişki şeması ve parametreler arası ilişkileri yapılan bir çalışma ile gösterilmiştir [23].

3.12. Örnek

Bir dengeli tamamlanmamış blok tasarımı Çizelge 3.5.'deki gibi olsun.

Çizelge 3.5. $b = 6, v = 4, k = 2, r = 3, \lambda = 1$ parametrelili BIBD

İşlemler	Bloklar					
	1	2	3	4	5	6
A	X	X	X			
B	X			X	X	
C		X		X		X
D			X		X	X

Çizelge 3.4. ve Çizelge 3.5.'de verilen BIBD'lerin isabet matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$N_{(BIB)1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad N_{(BIB)2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Eşitlik (3.6)'da verilen kronoker çarpımına göre

$$N = \begin{bmatrix} N_{(BIB)1} & N_{(BIB)1} & N_{(BIB)1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ N_{(BIB)1} & \cdot & \cdot & N_{(BIB)1} & N_{(BIB)1} & \cdot \\ \cdot & N_{(BIB)1} & \cdot & N_{(BIB)1} & \cdot & N_{(BIB)1} \\ \cdot & \cdot & N_{(BIB)1} & \cdot & N_{(BIB)1} & N_{(BIB)1} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

elde edilir. İsalet matrisi Eşitlik (3.10) ile verilen PBIBD Çizelge 3.6.'daki gibidir.

Eşitlik (3.6)'da verilen tasarım için parametreler,

$$v' = v_1 v_2 \quad b' = b_1 b_2 \quad r' = r_1 r_2 \quad k' = k_1 k_2$$

$$\begin{aligned}
n'_1 &= v_2 - 1 & n'_2 &= v_1 - 1 & n'_3 &= (v_1 - 1)(v_2 - 1) \\
\lambda'_1 &= r_1 \lambda_2 & \lambda'_2 &= r_2 \lambda_1 & \lambda'_3 &= \lambda_1 \lambda_2
\end{aligned}$$

ve ikinci çeşit parametreler,

$$\begin{aligned}
P'_{jk} &= \begin{bmatrix} (v_2 - 2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (v_1 - 1) \\ 0 & (v_1 - 1) & (v_1 - 1)(v_2 - 2) \end{bmatrix} \\
P'_{jk} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & (v_2 - 1) \\ 0 & (v_1 - 2) & 0 \\ (v_2 - 1) & 0 & (v_1 - 2)(v_2 - 1) \end{bmatrix} \\
P'_{jk} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & (v_2 - 2) \\ 1 & 0 & (v_1 - 2) \\ (v_2 - 2) & (v_1 - 2) & (v_1 - 2)(v_2 - 2) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

dır. Eşitlik (3.11)'e göre Çizelge 3.6.'ya ait parametreler,

Çizelge 3.6. (16,6,6) PBIBD

İşlemler	Bloklar																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
A ₁	X	X		X	X	X		X	X	X		X												
B ₁	X		X	X	X		X	X	X		X	X												
C ₁	X	X	X		X	X	X		X	X	X													
D ₁		X	X	X		X	X	X		X	X	X												
A ₂	X	X		X									X	X		X	X	X		X				
B ₂	X		X	X									X		X	X	X		X	X				
C ₂	X	X	X										X	X	X		X	X	X					
D ₂		X	X	X										X	X	X		X	X	X				
A ₃					X	X		X					X	X		X					X	X		X
B ₃					X		X	X					X		X	X					X		X	X
C ₃					X	X	X						X	X	X						X	X	X	
D ₃						X	X	X						X	X	X						X	X	X
A ₄									X	X		X					X	X		X	X	X		X
B ₄									X		X	X					X		X	X	X		X	X
C ₄									X	X	X						X	X	X		X	X	X	
D ₄										X	X	X						X	X	X		X	X	X

$$v'=16, \quad b'=24, \quad r'=(3)(3)=9, \quad k'=(3)(2)=6$$

$$n'_1=3, \quad n'_2=3, \quad n'_3=3$$

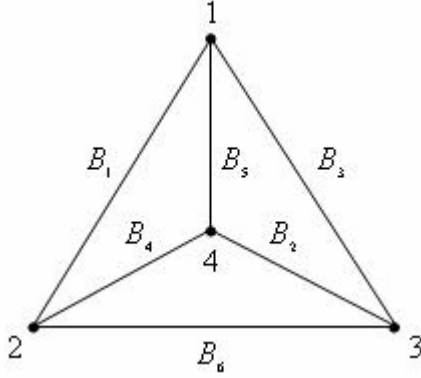
$$\lambda'_1=3, \quad \lambda'_2=4, \quad \lambda'_3=2$$

$$P'_{jk}{}^1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$P'_{jk}{}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$P'_{jk}{}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

elde edilir. $v_1 = v_2$ ve $k_1 = k_2$ koşullarının sağlandığı iki ortak sınıfa sahip kısmi dengeli tamamlanmamış blok için çözülmüş örnek bulmak mümkündür [23].



Şekil 3.2. Geometrik yapı $GF(2)$ üzerine kurulan $EG_2(2)$

3.8. Tanım

Grup bölünebilir birliktelik sınıfı v tane elemanın n birimlik m gruba parçalanmasıdır. $\lambda_1 = 0$ ile grup bölünebilir tasarımlar, BIBD'lerin çeşitli sınıflarının varlığını ispatlamada kullanılır. Üçgensel tasarımlar, $\lambda = 2$ ile simetrik BIBD'lerin artık tasarımlarının dualleri gibi gözüktür.

$1 \leq i \leq m$ için $X = \bigcup_{i=1}^m G_i$, $|G_i| = n$; $i \neq j$ için $G_i \cap G_j = \emptyset$ gibi X , v

noktalarının bir seti olsun. G_i 'ler grup olarak adlandırılır ve X üzerinde tanımlanan bir birliktelik sınıfı GD olarak söylenir. Aynı gruptaki noktalar birinci birlikteliklerdir ve farklı gruplarda olanlar ikinci birlikteliklerdir.

Birliktelik sınıfının temelini oluşturan grup bölünebilirdir, tasarımlar “GD tasarımlar” olarak adlandırılır. Böylece üçgensel tasarımlar $\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 = 1$ ile GD tasarımlardır.

Birliktelik sınıfının parametreleri;

$$n_1 = n - 1 \quad , \quad n_2 = n(m - 1) \quad , \quad P_1 = \begin{bmatrix} n-2 & 0 \\ 0 & n(m-1) \end{bmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & n-1 \\ n-1 & n(m-2) \end{bmatrix}$$

dir. AA^T 'nin öz değerleri ayrı ayrı rk , $r - \lambda_1$, $rk - v\lambda_2$ ile 1 , $m(n-1)$, $(m-1)$ çarpımlarıdır.

GD tasarımların sınıfları ayrıca $r - \lambda_1$ ve $rk - v\lambda_2$ değerlerine bağlı olarak şöyle sınıflandırılabilir:

- (i) $r = \lambda_1 \Rightarrow$ singüler GD
- (ii) $r > \lambda_1$ ve $rk - v\lambda_2 = 0 \Rightarrow$ yarı düzenli
- (iii) $r > \lambda_1$ ve $rk > v\lambda_2 \Rightarrow$ düzenli

$\lambda_2 = 0$ ise; o zaman farklı gruptaki noktalar asla birlikte gözükmez ve tasarım, bir grubun noktaları üzerindeki her bir kurulan tasarımların birleşimlerinden oluşur.

Tasarımın bağlantısız olduğu söylenir ve farklı gruptaki iki noktanın etkiler farkı, tahmin edilebilir değildir [7].

3.13. Teorem

Eğer q bir asal ya da bir asal kuvvet ise, yarı-düzenli GD tasarım $m \leq q^2 + q + 1$ iken,

$$v = mq \quad , \quad b = q^3 \quad , \quad r = q^2 \quad , \quad k = m \quad , \quad m \quad , \quad n = q \quad , \quad \lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = q$$

ile mevcuttur [7].

3.14. Teorem

D , iki birliktelik sınıfı ile ve $n \neq 8$ için $p_{11}^1 = n - 2$ ve $v = \frac{n(n-1)}{2}$ bir PBIBD olsun.

O zaman D üçgensel birliktelik sınıfına sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul herhangi noktanın $2(n-2)$ ilk birlikteliği iki sınıf içine yerleşmiştir, düzen öyle ki; her sınıfın $(n-2)$ noktaları ilk birlikteliktedir [7].

3.15. Teorem

BIBD'in duali BIBD olması için gerek ve yeter koşul $b = v$ yani tasarımın simetrik olmasıdır [4].

$\lambda = 1$ veya $\lambda = 2$ parametrelili simetrik olmayan BIBD'in dualinin PBIBD olduğu Shrikhande tarafından gösterilmiştir [24].

Aynı sonuçlar grafik teori üzerinde Shrikhande ve Bhagwandas tarafından yeniden ele alınmıştır [25].

3.16. Teorem

D , $v, b, r, k, \lambda = 1$ parametreleri ile asimetric BIBD ise, o zaman onun duali D^* ,

$$v^* = b, \quad b^* = v, \quad r^* = k, \quad k^* = r, \quad n_1^* = k(r-1), \quad n_2^* = b-1-n_1$$

$$\lambda_1^* = 1, \quad \lambda_2^* = 0, \quad P_{11}^{1*} = r-2+(k-1)^2, \quad P_{11}^{2*} = k^2$$

parametreleri ile iki birliktelik sınıflı PBIBD dir [2].

3.13. Örnek

Aşağıdaki parametrelere sahip PBIBD göz önüne alınsın.

$$v = 12 \quad , \quad b = 9 \quad , \quad r = 3 \quad , \quad k = 4 \quad , \quad n_1 = 9 \quad , \quad n_2 = 2$$

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 0 \quad , \quad P_1 = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bu tasarım, $v = 9$, $b = 12$, $r = 4$, $k = 3$, $\lambda = 1$ parametrelerine sahip BIBD'in dualidir.

3.9. Tanım

N , noktalar ve doğrulardan oluşan bir sistem olmak üzere;

- (i) N sistemin her bir noktası, s farklı doğru üzerindedir ($s > 1$).
- (ii) N , sn farklı doğruya sahiptir. n doğrunun her birinin oluşturduğu s tane paralel sınıf vardır. Aynı paralel sınıftaki farklı doğrular ortak noktaya sahip değilken, farklı sınıftaki iki doğru tam bir ortak noktaya sahiptir.
- (iii) N sisteminde n^2 farklı nokta vardır.

Yukarıdaki koşulları sağlayan N sistemi, s dereceli n .mertebeden bir “net” olarak adlandırılır. Burada d , N için “defişinsi” olarak adlandırılır. d pozitif tamsayıdır ($d = k - r + 1$).

Her sonlu N net 'i aşağıdaki eşitlikleri sağlar [7].

$$\begin{aligned} s + d &= n + 1 \quad , \quad n_1 = s(n - 1) \quad , \quad n_2 = d(n - 1) \quad , \\ p_{11}^1 &= n - 2 + (s - 1)(s - 2) \quad , \quad p_{12}^1 = p_{21}^1 = (s - 1)d \quad , \quad p_{22}^1 = d(d - 1) \quad , \\ p_{22}^2 &= n - 2 + (d - 1)(d - 2) \quad , \quad p_{21}^2 = p_{12}^2 = (d - 1)s \quad , \quad p_{11}^2 = s(s - 1) \end{aligned}$$

n .mertebeden bir sonlu net için, $d=0$ ise bu net n .mertebeden bir afin düzlem belirtir.

Örnek 3.13.'deki BIBD'in geometrik yapısı net' tir. Dual tasarımın geometrik yapısı ise yapay Tek Olarak Bağlanmış Blok Grafikdir [26].

Aynı tasarım $v = b = 13$, $r = k = 4$, $\lambda = 1$ parametreleri ile simetrik BIBD'den bir blok çıkarılarak kolayca elde edilir. Simetrik BIBD $PG_2(3)$ tür, fakat dual tasarım $PG_2(3)$ değildir [27].

3.10. Tanım

Bir G grafiğinde birleştirilmiş olan iki köşegenin her ikisi tam P_{11}^1 tane diğer köşelerle birleştirilmiş, fakat P_{11}^2 tanesi ile birleştirilmemiş ise, G grafiği n_1 , n_2 , P_{11}^1 , P_{11}^2 parametrelili Güçlü Düzenli Grafiği adını alır.

Tanım 3.10.'a göre parametreler SRG oluşturur. Ancak v bir kare olmadığından net yapısı bozulmuştur.

3.11. Tanım

SRG aşağıdaki parametrelere sahipse yapay SLBG adını alır

$$n_1 = r(k-1), \quad n_2 = \frac{(k-r)(r-1)(k-1)}{r}, \quad P_{11}^1 = (r-1)^2 + k - 2, \quad P_{11}^2 = r^2$$

[28].

Örnek 3.13.'deki parametreler eşitlikleri sağlar.

Sonuç olarak, dual tasarımın birliktelik yapısı, yapay SLBG'ye izomorftur.

Dual tasarımların geometrik anlamı

Burada Dual tasarımın parametreleri, sonlu projektif geometrinin koşulları ve ilgili olan geometriler arasındaki ilişkileri verilecektir. Tasarımın, işlem ya da işlem

kombinasyonlarının noktalar olduğu ve tasarımın bloklarının sonlu analitik geometrinin doğruları olduğu kabul edilecektir.

$v = 4$, $b = 6$, $r = 3$, $k = 2$, $\lambda = 1$ parametrelerine sahip Örnek 3.12’de verilen BIBD’in dual tasarımı aşağıdaki birliktelik yapısına sahiptir.

Çizelge 3.7. PBIBD

İşlemler	Bloklar			
	1	2	3	4
1	X	X		
2			X	X
3	X		X	
4		X		X
5	X			X
6		X	X	

Bu tasarım,

$$v^* = 6 \quad , \quad b^* = 4 \quad , \quad r^* = 2 \quad , \quad k^* = 3 \quad , \quad n_1^* = 4 \quad , \quad n_2^* = 1$$

$$\lambda_1^* = 1 \quad , \quad \lambda_2^* = 0 \quad , \quad P_{ij}^{1*} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad P_{ij}^{2*} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

parametreleri ile PBIBD dir.

Bu dual tasarımın geometrik yapısı SRG’dir. O zaman, bulunan dual tasarımı yapay SLBG’yi belirler. Bu tasarımın her bir iki bloğu (doğrusu) tek işlemde (nuktada) kesişir. Burada bu tasarımın birliktelik yapısı Tek Olarak Bağlanmış Blok olarak adlandırılır [29].

3.17. Teorem

$$D, v = \frac{n(n+1)}{2}, k = n, \lambda = 2 \text{ parametrelerine sahip BIBD olsun. O zaman } D^*,$$

$$v^* = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, b^* = \frac{n(n+1)}{2}, r^* = n, k^* = n+2, n_1^* = 2n,$$

$$n_2^* = \frac{n(n-1)}{2}, \lambda_1^* = 1, \lambda_2^* = 2, P_{11}^{1*} = n, P_{11}^{2*} = 4$$

parametreleri ile PBIBD dir [7].

3.1. Sonuç

$n \neq 8$ ise, o zaman D^* , bir üçgensel PBIBD dir [7].

3.14. Örnek

$v = 7, k = 4, \lambda = 2$ olan simetrik BIBD göz önüne alınsın, tasarımın geometrik yapısı iki düzlemdir. Artık tasarım $v = 3, k = 2, b = 6, \lambda = 2$ parametrelerine sahiptir ve artık tasarımın dual tasarımı

$$v^* = 6, b^* = 3, r^* = 2, k^* = 4, n_1^* = 4, n_2^* = 1,$$

$$\lambda_1^* = 1, \lambda_2^* = 2, P_{11}^{1*} = 2, P_{11}^{2*} = 4$$

parametrelere sahip PBIBD dir. Artık tasarımın dualinin geometrik yapısı (2,4,2) kısmi geometridir ve artık tasarımın duali üçgensel PBIBD dir.

(r, k, s) parametrelili kısmi geometri noktalar ve doğruların bir sistemidir ve şu koşullar sağlanır.

- (i) Herhangi iki nokta en fazla bir doğru üzerindedir.
- (ii) Her nokta r doğru üzerindedir.
- (iii) Her doğru üzerinde k nokta vardır.

(iv) p noktası l doğrusu üzerinde olmayan bir nokta olsun. Bu durumda p 'den geçen l ile kesişen m tane doğru vardır ($m \geq 1$). Kısmi geometride nokta ve doğru sayısı şöyledir.

$$v = \frac{k[(r-1)(k-1)+s]}{s}, \quad b = \frac{r[(r-1)(k-1)+s]}{s}$$

(r, k, s) kısmi geometrisinin grafiği aşağıdaki parametrelere sahip SRG'dir.

$$(i) \quad n_1 = r(k-1), \quad n_2 = \frac{(r-1)(k-1)(k-s)}{s}$$

$$(ii) \quad P_{11}^1 = (s-1)(r-1) + k - 2, \quad P_{11}^2 = r s$$

$$(iii) \quad 1 \leq s \leq r, \quad 1 \leq s \leq k$$

Buna aynı zamanda “*pseudo geometrik grafiği*” denir. Grafikte birleştirilmiş iki nokta “*klik*” olarak adlandırılır. G grafikte birleştirilmiş iki köşenin her ikisi P_{11}^1 tane diğer köşelerine birleştirilmiş fakat P_{11}^2 tanesi ile birleştirilmemiş ise bu grafiğe $n_1, n_2, P_{11}^1, P_{11}^2$ parametrelili SRG denir.

SRG grafiği aşağıdaki parametrelere sahip ise, yapay SLBG adını alır.

$$n_1 = r(k-1), \quad n_2 = \frac{(k-r)(r-1)(k-1)}{r}, \quad P_{11}^1 = (r-1)^2 + k - 2, \quad P_{11}^2 = r^2$$

3.15. Örnek

$m = 2$ olan PBIBD'in blokları şöyle verilmiştir:

$$B_1 = \{1,2,4\}, B_2 = \{1,6,7\}, B_3 = \{1,3,5\}, B_4 = \{2,5,8\}, \\ B_5 = \{3,7,8\}, B_6 = \{4,6,8\}, B_7 = \{2,3,6\}, B_8 = \{4,5,7\}$$

Görüleceği üzere, birinci çeşit parametreler;

$$v = b = 8, \quad r = k = 3, \quad n_1 = 6, \quad n_2 = 1, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 0$$

P_{ij}^{-1} 'in hesaplamaları için, birinci birliktelik sınıfından (1,3) seçilmiş olsun.

P_{11}^{-1} için;

$$(1,2), (1,4), (1,6), (1,7), (1,3), (1,5)$$

$$(3,1), (3,2), (3,5), (3,6), (3,7), (3,8)$$

Buradan $P_{11}^{-1} = 4$ 'dür.

$P_{12}^{-1} = P_{21}^{-1}$ için;

$$(1,2), (1,4), (1,6), (1,7), (1,3), (1,5)$$

$$(3,4)$$

Buradan $P_{12}^{-1} = P_{21}^{-1} = 1$ 'dir.

P_{22}^{-1} için;

$$(1,8)$$

$$(3,4)$$

Buradan $P_{22}^{-1} = 0$ 'dir.

$$P_{ij}^1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ olarak elde edilir.}$$

P_{ij}^2 'nin hesaplamaları için, ikinci birliktelik sınıfından (3,4) seçilmiş olsun.

P_{11}^2 için;

(3,1), (3,2), (3,5), (3,6), (3,7), (3,8)

(4,1), (4,2), (4,5), (4,6), (4,7), (4,8)

Buradan $P_{11}^2 = 6$ 'dır.

$P_{12}^2 = P_{21}^2$ için;

(3,1), (3,2), (3,5), (3,6), (3,7), (3,8)

(4,3)

Buradan $P_{12}^2 = P_{21}^2 = 0$ 'dır.

P_{22}^2 için;

(3,4)

(4,3)

Buradan $P_{22}^2 = 0$ 'dır.

$$P_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olarak elde edilir.}$$

Bu tasarım $EG_2(3)$ ile tanımlanır. Noktalar ve doğruların elde edilışinde $GF(3)$ dikkate alınır. $EG_2(3)$ 'deki doğrular ve üzerindeki noktalar şöyledir.

$$[1 \ 1 \ 0]; (1 \ -1 \ 0) \ (0 \ 0 \ 1) \ (-1 \ 1 \ 1)$$

$$[0 \ 1 \ 1]; (1 \ -1 \ 1) \ (1 \ 1 \ -1) \ (0 \ -1 \ 1)$$

$$[1 \ -1 \ 1]; (1 \ -1 \ 1) \ (0 \ 1 \ 1) \ (1 \ 0 \ -1)$$

$$[0 \ 1 \ 0]; (1 \ 0 \ -1) \ (0 \ 0 \ 1) \ (1 \ 0 \ 1)$$

$$[1 \ 1 \ -1]; (0 \ 1 \ 1) \ (1 \ 1 \ -1) \ (1 \ 0 \ 1)$$

$$[-1 \ 1 \ 1]; (1 \ 0 \ 1) \ (-1 \ 1 \ 1) \ (0 \ -1 \ 1)$$

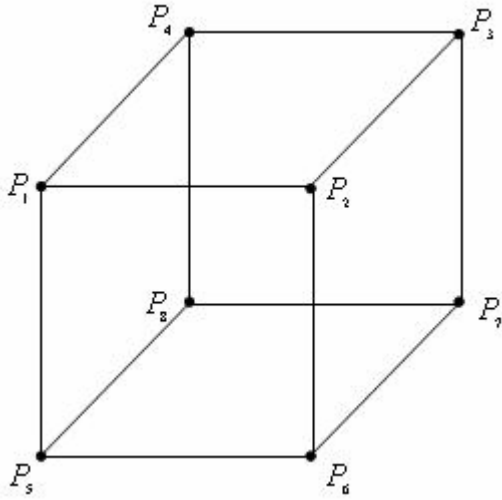
$$[1 \ 0 \ 0]; (1 \ 1 \ 0) \ (0 \ 0 \ 1) \ (0 \ -1 \ 1)$$

$$[1 \ 0 \ 1]; (-1 \ 1 \ 1) \ (1 \ 1 \ -1) \ (1 \ 0 \ -1)$$

Parametreleri aşağıda verilen PBIBD göz önüne alınsın.

$$v = 8, b = 6, k = 4, r = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0, n_1 = 3, n_2 = 3, n_3 = 1$$

$$P_{ji}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{ji}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_{ji}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Şekil 3.3. Yüzeyle blok köşe noktaları işlemler

3.18. Teorem

D , bir $(\frac{n(n+1)}{2}, n, 2)$ tasarım ve $n \neq 8$ olsun. O zaman D' , bir simetrik $(\frac{(n^2 + 3n + 4)}{2}, n + 2, 2)$ tasarım mevcuttur ve artık tasarımı D dir [7].

3.2.3. $\lambda=1$ Olan dengeli tamamlanmamış blok tasarımının çizgi grafiği

$v, b, r, k, 1$ parametreleri ile D , BIBD işlemler olarak adlandırılan v elemanlarının setinden ve bloklar olarak adlandırılan b alt setlerinin koleksiyonundan oluşur. Her bir blok k işlem içerir ve her bir işlem r blokta içerilir, işlemlerin her çifti kesinlikle 1 blokta bulunur. Böyle D tasarımının $H(D)$ bipartite grafiği aşağıdaki gibi tanımlanır. Her bir işlem için köşe ve her bir blok için köşe alınır. İki köşenin birleştirilmiş olması için gerek ve yeter koşul biri işlem ve diğeri işlemi ihtiva eden blok olmasıdır. D 'nin $L(D)$ çizgi grafiği, köşeleri $H(D)$ 'nin kenarları olan *grafiktir*. $L(D)$ 'nin iki köşeleri birleşmiş olması için gerek ve yeter koşul $H(D)$ 'nin karşılık gelen kenarlarının ortak köşelere sahip olmasıdır.

Klik, tamamlanmış alt grafiktir.

s mertebeli bir klav, bir x köşesi ile birleştirilmiş y_1, y_2, \dots, y_s köşelerinden meydana gelir. Burada iki y bitişik değildir. x , klav'ın köşesi olarak adlandırılır.

3.19. Teorem

$vr = bk$, $v - 1 = r(k - 1)$, $r > k \geq 2$ olsun. O zaman G grafiğinin, $(v, b, r, k, 1)$ – BIBD'in parametrelerinin çizgi grafiği olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki dört koşulun sağlanmasıdır, ($r - 2k + 1 < 0$ koşulu altında).

- (i) G 'de köşelerin sayısı vr 'dir
- (ii) G , $r + k - 2$ dereceli düzün grafiktir
- (iii) Her bir kenar (x, y) için, $\Delta(x, y)$ ya $r - 2$ ya da $k - 2$ dir, burada $\Delta(x, y)$ her ikisine birleşen köşelerin sayısını gösterir
- (iv) Eğer x ve y iki uzaklıksa, $\Delta(x, y) = 1$ dir [30].

3.12. Tanım

Eğer bir K kliği için $|K| \geq k$ ise, bu klik *major* olarak adlandırılır. Bir maksimal major klik, grand klik olarak adlandırılır. Burada $|K|$, K setinin eleman sayısını tanımlar [30].

3.3. İkili Dengeli Tasarımlar

Richard Wilson, tasarımların farklı çeşitlerinin varolması için gerekli koşulların asimptotik olarak yeterli olduğunu gösterdi. Örneğin, $k > 1$ pozitif tamsayı verilsin, $2 - (v, k, 1)$ – tasarımının var olması için gerekli koşullar $(k - 1)$ 'in $(v - 1)$ 'i bölmesi ve $k(k - 1)$ 'in $v(v - 1)$ 'i bölmesidir. Wilson'un Teoreminden; tasarım, verilen k 'lar için mevcuttur fakat bu koşulları sağlayan v 'lerin çoğu için sonlu olarak mevcuttur.

Wilson'un Varlık Teorisini betimlemek amacıyla, her bir iki noktanın tek blokta olduğu, alt setlerin (bloklar olarak adlandırılır) B koleksiyonu ile noktaların P seti olarak "ikili dengeli tasarım" tanımlanır. Eğer K , blokların elemanlarının seti ise tasarımı $PBD(K)$ ile ifade edilir. Eğer $K = \{k\}$ ise v noktaları ile $PBD(K)$ $S(2, k, v)$ – Steiner Sistem olacaktır.

$0, 1 \in K$ kabul edilsin. Gerçekten, en fazla bir elemana sahip olan bloklar PBD için tanımlanan özellikleri bozmayacaktır. Bir PBD bir doğrusal uzay gibi düşünülebilir.

K , negatif olmayan sayıların bir seti olsun. $B(K)$, v noktaya sahip $PBD(K)$ için v 'lerin bir setini tanımlasın. Örneğin, $B(\{3\})$, Steiner üçlü sistemlerin bir sıralı setini gösterecektir.

$0, 1 \in B(K)$ olduğu görülebilir. Ayrıca B , N 'in alt setlerinin seti üzerinde kapanma operatörüdür; yani,

- (i) $K \subseteq B(K)$,
- (ii) $K_1 \subseteq K_2$ dolaylı olarak $B(K_1) \subseteq B(K_2)$ ifade eder.
- (iii) $B(B(K)) = B(K)$ dır.

i) eğer $k \in K$ ise bütün noktaları içeren tek blok ile k genişliğinde set $PBD(K)$ 'dir.

ii) aşıkardır. iii) (i) ve (ii), $B(K) \subseteq B(B(K))$ olduğunu vurgular.

Tersine; eğer $v \in B(B(K))$ ise, o zaman blok eleman sayısının $PBD(K)$ 'ların genişlikleri olduğu v noktaları üzerinde PBD nin varlığı söylenir. v nokta üzerine $PBD(K)$ elde etmek için bazı $PBD(K)$ ile her bir blok yer değiştirir.

K negatif olmayan tamsayıların seti olsun.

$$\alpha(K) = \gcd\{k - 1 : k \in K\}$$

$$\beta(K) = \gcd\{k(k - 1) : k \in K\}$$

ile $\alpha(K)$ ve $\beta(K)$ sayıları tanımlanır.

3.20. Teorem

$v > 0$ olmak üzere $v \in B(K)$ ise; $\alpha(K)$, $(v-1)$ 'i ve $\beta(K)$, $v(v-1)$ 'i böler [31].

Steiner üçlü sistemin mertebesinin 1 ya da 3 (mod6)'a denk olması iyi bilinen genel sonuçlardır.

3.21. Teorem

K negatif olmayan tamsayıların seti olsun. O zaman $B(K)$ 'ya ait olan $\beta(K)$, $v(v-1)$ 'i böler ve $\alpha(K)$, $(v-1)$ 'i böler koşullarını sağlayan v tam sayılarının sayısı sonludur [31].

Bu teorem pek çok sonuca sahiptir. Örneğin pek çok PBD-kapalı setlerini göz önüne alarak mevcut olduğu gösterilir. $(k-1)$ 'in $(v-1)$ 'i bölmesi ve $k(k-1)$ 'in $v(v-1)$ 'i bölmesi; bu koşullar, iddia edildiği gibi v 'nin sonlu olarak çoğu değerleri için $S(2, k, v)$ – Steiner sistemin var olması için yeterlidir.

Diğer tasarımların kuruluş problemleri için aşağıdaki sonuçlar vardır.

3.22. Teorem

Aşağıdaki setlerin her biri PBD-kapalıdır.

- (i) $2 - (v, k, \lambda)$ tasarımı için v seti, verilen her bir k ve λ için mevcuttur (burada tekrarlı bloklara izin verilir)
- (ii) Ortak Transversal'a sahip s tane n . mertebeden karşılıklı dikey latin kareler için n seti, verilen her bir s için mevcuttur
- (iii) Tamamlanmış grafik K_n 'in kenarları için n seti, verilen grafik G 'nin içine parçalanabilir

(iv) r paralel sınıfları ile yeniden çözülebilir $2 - (v, k, 1)$ tasarımı için r seti, verilen k için mevcuttur [31].

$v \in B(K)$ ve her bir $l \in K$ için $2 - (l, k, \lambda)$ tasarımı mevcut olsun. v noktaların seti üzerinde PBD(K) alınsın. Bu PBD'nin her bir bloğu k blok genişliği ile 2-tasarımı verir. Bu tasarımlarda bloklar olarak k -setlerinin tamamı gözükür.

Örneğin Teorem 3.21.'e göre $B(\{4, 7\}) \pmod{3}$ 'e göre "1"e denk olan tamsayıların tümünü ihtiva eder. Ayrıca, analiz yalnızca istisnaların 10 ve 19 olduğunu gösterir. $2 - (4, 4, 2)$ ve $2 - (7, 4, 2)$ tasarımları mevcut olduğu için $v = 19$ ve $v = 10$ mümkün değildir. $1 \pmod{3}$ 'e uygun her v için $2 - (v, 4, 2)$ tasarımlarının mevcut olduğu sonucu çıkarılır.

ii)'de, PBD-kapalı K seti $n > s + 1$ bütün asal kuvvetleri içerir ve bunun için $\alpha(K) = \beta(K) = 1$ dir.

PBD-kapalı K setini tanımlamanın bir diğer yolu onun taban X (base X)'idir. $x \notin B(K \setminus \{x\})$, $x \in K$ bütün elemanların seti verilsin. Bu setin sonlu olduğu ve $B(X) = K$ sağlayan setin en az tek olduğu gösterilebilir. Örneğin, Steiner üçlü sistemlerin mertebelerinin seti için taban $\{3\}$ 'tür.

Çalışmalar PBD'lerin bölünebilirlik koşullarını sağlayan yeteri kadar büyük bütün q asal kuvvetleri için mevcut olduğunu gösterir.

Bu yapılar da, $GF(q)$ 'nun her bir sıfır olmayan elemanı aynı setten iki elemanın farkı gibi tek olarak ifade edilebilir.

3.16. Örnek

7.mertebeden bir PBD'de mod 7'ye göre tamsayılardan oluşan set $X = Z_7$ iken

$$B = \{123456, 01, 02, 03, 04, 05, 06\} \quad *$$

dir. $\lambda = 1$ durumunda ve blok genişliklerinin seti $\{2,6\}$ dır.

Aynı set üzerine diğer PBD, ise $\lambda = 1$ olmak üzere

$$B = \{124, 235, 346, 450, 561, 602, 013\} \quad **$$

ile verilir, bütün blok genişlikleri $\{3\}$ tür.

Aynı set üzerindeki bu iki PBD'nin isabet matrisleri aşağıdaki gibidir:

$$M_* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad M_{**} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4. DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMLARININ BAZI AİLELERİ

Diğer kombinatorik yapılarla bağlantısı olan BIBD'in pek çok ailesi vardır. Bunlardan bazıları aşağıda irdelenecektir.

4.1. $k=2, \lambda=1$

Eğer bir BIBD $k = 2$ ve $\lambda = 1$ parametrelerine sahipse, bu durumda $r = v - 1$ ve $b = \frac{(v-1)v}{2}$ olduğu kolayca hesaplanır. Tasarımın blokları noktaların bütün mümkün çiftleridir anlamına gelir. Örneğin blokların seti X 'in bütün ikili alt setlerinin setidir. Tasarım noktalarının tepeler olduğunu, bloklarının da kenar olduğu kabul edilirse, bu parametrelerdeki bir tasarım v tepeleri üzerinde tamamlanmış *grafik* tir [14].

4.1. Teorem

Her n pozitif tamsayı için $(2n, n(2n-1), 2n-1, 2, 1)$ – parametreleri ile BIBD yeniden çözülebilirdir [7].

$2n$ tepeler ya da noktalar seçilsin ve bir kenar her biri ile ayrı noktaların her

$\binom{2n}{2} = n(2n-1)$ çiftleri birleşsin. (Bu yapı $2n$ tepeleri üzerinde tamamlanmış grafik

K_{2n} dir). Bu kenarların her biri tasarımda bir bloğa tekabül eder. Teorem 4.1.

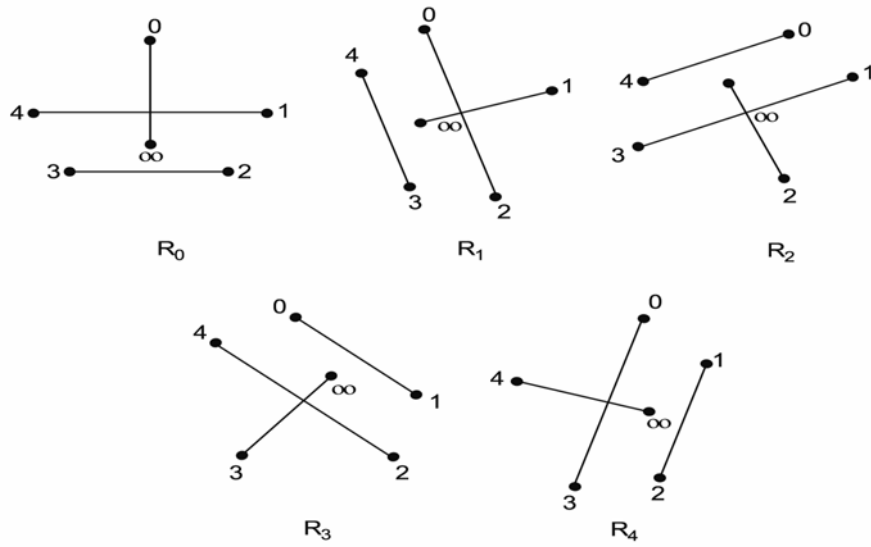
K_{2n} 'de kenarlar, her set her bir tepe ile tesadüfi bir kenarı tamamen içerir iken $2n-1$ setleri içine parçalanabilir. Set K_{2n} 'in bir-etken olarak adlandırılır ve bir-etkenlerin $2n-1$ ayrık-kenarlarının seti bir-faktörleştirme olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.'in yapısını tanımlamak için bir tepe seçilir ve ∞ olarak sınıflandırılır ve onun etrafında dairesel olarak $0, 1, 2, \dots, 2n-2$ tepeleri saat yönünde düzenlenir. Her

bir çözümlene sınıfı (ya da bir-etken) $\left(\frac{360}{2n-1}\right)^\circ$ boyunca bir önceki döndürülerek bulunur.

4.1. Örnek

$n=3$ için $(2n, n(2n-1), 2n-1, 2, 1)$ – BIBD şekilde gösterildiği gibi $(6,15,5,2,1)$ -BIBD dir.



Şekil 4.1. $(6,15,5,2,1)$ - BIBD

4.2. $k=3, \lambda=1$ Steiner Üçlü Sistemleri

$k=3$ ve $\lambda=1$ iken dengeli tamamlanmamış blok tasarımları “*steiner üçlü sistemleri*” olarak adlandırılır, çünkü bloklar üçlüdür ve noktaların her çifti kesinlikle bir üçlüde görünür. $r = \frac{(v-1)}{2}$ ve $b = \frac{(v-1)v}{6}$ olduğu hesaplanabilir. r pozitif tamsayı olduğundan, v tek sayı olmalıdır. b pozitif tamsayı ve v tek sayı olduğundan; ya 3, v 'yi böler yada 6, $(v-1)$ 'i böler. Böylece $v \equiv 3 \pmod{6}$ yada $v \equiv 1 \pmod{6}$ dir [14].

Bu gerekli koşul STS'nin mevcut olması için yeterlidir.

4.2. Teorem

$v \geq 3$ ve $v \equiv 3 \pmod{6}$ yada $v \equiv 1 \pmod{6}$ ise v noktaların bir STS vardır [14].

1853'te J.Steiner bu teoremin yeterliliğini bir problem olarak ortaya attı ve bu 1859'da M.Reiss tarafından ispatlandı. Hiçbir matematikçi bu problemin 1847'de T.P.Kirkman tarafından çözüldüğünü ve Cambridge and Dublin matematik dergisinde yayınlandığı gerçeğinin farkında değildi. 1850'de Kirkman daha zor fakat bağlantılı bir problemi ortaya atarak üzerinde çalıştı. 1850'de "The lady's and gentleman's diary"de yer alan bu problem Kirkman'ın okul kızı problemi olarak bilinir.

Bir öğretmen 15 okul kızını yürüyüş için dışarı çıkarmak istemektedir. Kızlar üçerli beş sıraya dizilir. Öğretmen her iki kız arasında eşit arkadaşlık şansını sağlamak istemektedir. Bu yüzden, haftanın yedi günü için; (kızların her bir çiftinin haftanın bir günü kesinlikle aynı sırada yürüdüğü) farklı sıra düzenleri ortaya çıkarmayı düşünmektedir.

Bu problem $6t+3$ noktalarında, blokların $3t+1$ setlerine parçalanabildiği STS için genel sorudur.

4.3. Teorem

Eğer e noktalarının ve f noktalarının üzerinde birer STS varsa, ef noktaları üzerinde STS vardır [14].

STS'lerin idempotent toplam simetrik yarı gruba eşdeğer olduğu iyi bilinir.

4.2.1. Paskal üçgeni ile $t-(v, k, \lambda)$ tasarımı parametreleri arasındaki ilişki

Bir D tasarımının Paskal Üçgeni ardışık i.elemanın bu üçgenin i .saturını gösteren bir sıradadır. Yani ardışık i.eleman $(\lambda_{0}^{(i-1)}, \lambda_{1}^{(i-2)}, \dots, \lambda_{(i-1)}^0)$ biçimindedir.

Eğer D bir Steiner t tasarımı ise, daha sonra bu üçgen $k+1$ satıra dönüşür. Burada k , D 'nin bir bloğunun genişliğidir. Aksi takdirde; bu üçgen $t+1$ satıra sahiptir.

Paskal üçgeninde, $\lambda_0^0 = b$, $\lambda_1^0 = r$ ve $s \leq t$ iken $\lambda_s^0 = \frac{v-s}{k-s} \lambda_{s+1}^0$ olmak üzere;

$$\begin{array}{cccc} & & \lambda_0^0 & \\ & & \lambda_1^1 & \lambda_1^0 \\ & \lambda_2^2 & \lambda_2^1 & \lambda_2^0 \\ \lambda_3^3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^1 & \lambda_3^0 \end{array}$$

$$\lambda_s^s \quad \lambda_s^{s-1} \qquad \lambda_s^1 \quad \lambda_s^0$$

biçiminde yazılabilir. Bir Paskal Üçgeninin sağ kenarı $t-(v, k, \lambda)$ tasarımının parametreleri iken, sol kenarı ise aynı tasarımın tamamlayıcı tasarımının parametreleridir.

4.2. Örnek

2-(8,4,3) tasarımı dikkate alınsın;

$$v=8 \quad , \quad k=4 \quad , \quad \lambda=3 \quad , \quad \lambda_0^0 = b = \lambda \frac{\binom{v}{t}}{\binom{k}{t}} = 14 \quad , \quad \lambda_1^0 = r = \lambda \frac{\binom{v-1}{t-1}}{\binom{k-1}{t-1}} = 7$$

Burada;

$$\lambda_0^0 = b \quad , \quad \lambda_1^0 = r \quad , \quad \lambda_2^0 (t=2 \text{ için } \lambda) \quad , \quad \lambda_3^0 (t=3 \text{ için } \lambda) \quad , \dots$$

biçimindedir. $\lambda_0^0 = 14$, $\lambda_1^0 = 7$, $\lambda_2^0 = 3$ olarak hesaplanır.

$$\begin{array}{c} 14 \\ \text{Tamamlayıcı Tasarımın Parametreleri} \leftarrow \begin{array}{ccc} 7 & 7 & \\ 3 & 4 & 3 \end{array} \rightarrow \text{Tasarımın Parametreleri} \end{array}$$

2-(8,4,3) tasarımı $v = 2k$ biçimindedir, bu nedenle tamamlayıcı tasarımı kendisine eşit 2-(8,4,3) tasarımıdır.

$$\text{Tamamlayıcı tasarım } k^* = v - k \text{ ve } \lambda^* = \lambda \frac{\binom{v-t}{k}}{\binom{v-t}{k-t}} \text{ parametrelerine sahiptir,}$$

$t - (v, k^*, \lambda^*)$ biçiminde ifade edilir.

4.3. Örnek

3-(23,7,5) tasarımı dikkate alınsın;

$$v=23 \quad , \quad k=7 \quad , \quad \lambda=3$$

$$\lambda_0^0 = b = 253 \quad , \quad \lambda_1^0 = r = 77 \quad , \quad \lambda_2^0 = 21 \quad , \quad \lambda_3^0 = 5$$

parametrelerine sahiptir. $3-(23,7,5)$ tasarımının tamamlayıcısı, $3-(23,16,80)$ tasarımıdır ve $v = 23$, $k = 16$, $b = 253$, $r = 176$, $\lambda_2^0 = 120$, $\lambda_3^0 = 80$ parametrelerine sahiptir.

$$3-(23,16,80) \text{ tasarımı} \leftarrow \begin{array}{ccc} & 253 & \\ & 176 & 77 \\ 120 & 56 & 21 \\ 80 & 40 & 16 & 5 \end{array} \rightarrow 3-(23,7,5) \text{ tasarımı}$$

4.2.2. Bose ve skolem kuruluşları

Bose kuruluşları

Bose yöntemi ile STS kurulurken simetrik, idempotent, yarı grup (latinkare) sistemlerden yararlanır.

Simetrik, idempotent, yarı grup sistem elde etmek için x ve y 'ye uygulanan işlem aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x \circ y = \frac{n+1}{2}((x+y) \bmod n)$$

Bu durumda Bose kuruluşu yardımıyla Steiner sistem kurarken kullanılan notasyonlar şöyle ifade edilebilir.

X ; simetrik, idempotent, yarı grubun satır ve sütun sayısı,

Z_3 ; mod 3'e göre tamsayılar kümesi (0,1,2)

$Y = X \times Z_3$; Stener 3'lü sistemdeki nokta sayısıdır.

Bu durumda $x \in X$ olmak üzere tasarıma ait blokların ilk kısmı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$A_x = \{(x,0), (x,1), (x,2)\} (x \in X)$$

İkinci kısım ise $x, y \in X$ ve $x < y$ ve her $i \in Z_3$ olmak üzere;

$$B_{x,y,i} = \{(x,i), (y,i), (x \circ y, (i+1) \bmod 3)\}$$

şeklinde ifade edilir.

Bu durumda bloklara ait küme son olarak yukarıda ifade edilen iki kümenin birleşimi olarak B^* ile gösterilir ve aşağıda ifade edildiği gibidir.

$$B^* = \{A_x : x \in X\} \cup \{B_{x,y,i} : x, y \in X \text{ ve } x < y \text{ ve her } i \in Z_3\}$$

4.4. Örnek

Bose kuruluşu yardımıyla bir STS(21) elde edilsin.

1.adım

İlk olarak $n = 7$ iken simetrik idempotent yarı grup elde etmeye çalışalım. Simetrik, idempotent, yarı grup sistem elde etmek için x ve y için uygulanan işlem aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x \circ y = \left\{ \left(\frac{n+1}{2} \right) ((x+y) \bmod n) \right\}$$

$$2 \circ 4 = \left\{ \left(\frac{7+1}{2} \right) ((2+4) \bmod 7) \right\} = 3$$

Bu şekilde 7x7 boyutlu simetrik, yarı grubun 49 tane elemanı elde edilir.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 \\
4 & 1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 0 \\
1 & 5 & 2 & 6 & 3 & 0 & 4 \\
5 & 2 & 6 & 3 & 0 & 4 & 1 \rightarrow 3 \circ 6 = 1 \\
2 & 6 & 3 & 0 & 4 & 1 & 5 \\
6 & 3 & 0 & 4 & 1 & 5 & 2 \\
3 & 0 & 4 & 1 & 5 & 2 & 6
\end{array}$$

Bu simetrik yarı grup yardımıyla elde edilen bloklar aşağıdaki gibidir.

2.adım

a) $x \in X$ olmak üzere yani $x < 7$ iken;

$$A_x = \{(x,0), (x,1), (x,2)\} (x \in X)$$

yardımla tasarıma ilişkin blokların ilk kısmı bulunur. Buradan tasarıma ilişkin ilk 7 blok bulunur.

Bu bloklar;

$$B_1 = A_{x=0} = \{(0,0), (0,1), (0,2)\}$$

$$B_2 = A_{x=1} = \{(1,0), (1,1), (1,2)\}$$

.

.

.

$$B_7 = A_{x=6} = \{(6,0), (6,1), (6,2)\}$$

b) İkinci kısmı ise $x, y \in X$ ve $x < y$ ve her $i \in Z_3$ olmak üzere yani $i=0,1,2$ ve $x=(0,1,2,3,4,5)$ ve $y=(1,2,3,4,5,6)$ olmak üzere

$$B_{x,y,i} = \{(x,i), (y,i), (x \circ y, (i+1) \bmod 3)\}$$

yardımla tasarıma ilişkin blokların ikinci kısmı meydana getirilir. Böylece 63 blok bulunur.

$$B_7 = B_{0,1,0} = \left\{ (0,0), (1,0), \left(\underbrace{4}_{0 \circ 1}, \underbrace{1}_{(0+1) \bmod 3=1} \right) \right\}$$

$$B_8 = B_{1,1,0} = \{(1,0), (1,0), (1,1)\}$$

.

.

.

$$B_{70} = B_{5,6,2} = \{(5,2), (6,2), (2,0)\}$$

Sonuçta elde edilen tasarımın 70 bloğu vardır ve parametreleri

$v = 21$, $k = 3$, $\lambda = 1$, $b = 70$, $r = 10$ olarak elde edilen STS(21) tasarımıdır.

Skolem kuruluşları

Skolem kuruluşu Bose kuruluşunun modifiye edilmesiyle meydana gelir. n , çift olan simetrik, idempotent, yarı grup mevcut değilken Bose kuruluşu Skolem kuruluşu olarak tekrar ele alınır. Skolem kuruluşunda simetrik, idempotent, yarı grup yerine yarı idempotent, simetrik, yarı grup kullanılır.

Simetrik yarı idempotent yarı grup elde etmek için x, y yardımla yarı gruba ilişkin işlem aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x \circ y = \pi((x + y) \bmod n)$$

Burada $\pi(x)$ ise aşağıdaki gibi verilir.

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \text{ tek ise} \\ \frac{x+n-1}{2} & x \text{ çift ise} \end{cases}$$

4.5. Örnek

$n=6$ iken $\pi(0) = 0$, $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 4$, $\pi(4) = 2$, $\pi(5) = 5$ elde edilir. Skolem yöntemi ile STS(v) kurarken kullanılan notasyonlar ise $v = 6m + 1$ ve $m > 1$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} X &= \{0, 1, \dots, 2m + 1\} \\ Z_3 &= \{0, 1, 2\} \rightarrow \text{mod } 3 \text{ 'e göre elemanlar} \\ Y &= X \times Z_3 \\ Y &= \{(0, 1, \dots, 2m + 1) \times (0, 1, 2, \dots)\} \end{aligned}$$

nokta sayısı şeklinde tanımlanır. Burada tasarıma ait blokların oluşumu 3 kısımdan meydana gelir. Birinci kısımdaki bloklar için $0 \leq x \leq m - 1$ olmak üzere;

$$A_x = \{(x, 0), (x, 1), (x, 2)\}$$

yararlanılır. İkinci kısımdaki bloklar için her $x, y \in \{0, 1, \dots, 2m + 1\}$ olmak üzere;

$$B_{x,y,i} = \{(x, i), (y, i), (x \circ y, (i + 1) \bmod 3)\}$$

yararlanılır ve son kısım blokları için ise $0 \leq x \leq m - 1$ ve her $i \in Z_3$ olmak üzere;

$$C_{x,i} = \{\infty, (x + t, i), (x, (i + 1) \bmod 3)\}$$

yararlanılır. Bu durumda tasarıma ait blokların kümesi aşağıda ifade edildiği gibidir.

$$B^* = \{A_x : 0 \leq x \leq m-1\} \cup \{B_x : x, y \in Z_2, x < y, i \in Z_3\} \cup \{C_{x,i} : 0 \leq x \leq m-1, i \in Z_3\}$$

STS(19) tasarımı Skolem metoduyla aşağıdaki gibi kurulur.

1.adım

İlk olarak $n=6$ iken yarı idempotent yarı grup elde etmeye çalışılsın. Bu durumda

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \text{ tek ise} \\ \frac{x+n-1}{2} & x \text{ çift ise} \end{cases}$$

olmak üzere $\pi(x)$ 'ler $\pi(0) = 0$, $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 4$, $\pi(4) = 2$,
 $\pi(5) = 5$ olarak elde edilir.

2. adım

$x \circ y = \pi((x + y) \bmod n)$ yardımıyla yarı idempotent, yarı grubu oluşturmaya çalışalım. Örneğin $1 \circ 3$ 'e karşı gelen elemanı bulmak için

$$\begin{aligned} 1 \circ 3 &= \pi((1+3) \bmod 6) \\ &= \pi(4) \\ &= 2 \end{aligned}$$

hesaplanır. Bu şekilde aşağıda ifade edilen 7×7 boyutlu yarı idempotent, yarı grup elde edilir.

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\
3 & 1 & 4 & 2 & 5 & 0 \\
1 & 4 & 2 & 5 & 0 & 3 \\
4 & 2 & 5 & 0 & 3 & 1 \\
2 & 5 & 0 & 3 & 1 & 4 \\
5 & 0 & 3 & 1 & 4 & 2
\end{array} \quad \rightarrow \quad 0 \circ 5 = \pi((0+5) \bmod 6) = \pi(5) = 5$$

olarak elde edilir. Bu yarı idempotent, yarı grup yardımıyla elde edilen bloklar aşağıdaki gibidir.

3. adım

a) $0 \leq x \leq m-1$ olmak üzere $0 \leq x \leq 2$

$$A_x = \{(x,0), (x,1), (x,2)\}$$

yardımla tasarıma ilişkin blokların birinci kısmı bulunur. Tasarıma ilişkin ilk 3 blok bulunur. Bu bloklar;

$$B_1 = A_{x=0} = \{(0,0), (0,1), (0,2)\}$$

$$B_2 = A_{x=1} = \{(1,0), (1,1), (1,2)\}$$

$$B_3 = A_{x=2} = \{(2,0), (2,1), (2,2)\}$$

b) Her $x, y \in \{0,1, \dots, 2m+1\}$ ve $x < y$, $i \in Z_3$ olmak üzere; yani $i=0,1,2$ ve $x=(0,1,2,3,4)$ ve $y=(1,2,3,4,5)$ olmak üzere;

$$B_{x,y,i} = \{(x,i), (y,i), (x \circ y, (i+1) \bmod 3)\}$$

yardımla tasarıma ilişkin blokların ikinci kısmı bulunur. Burada tasarıma ilişkin 45 blok bulunur.

$$B_4 = B_{0,1,0} = \left\{ (0,0), (1,0), \left(\underbrace{3}_{0 \cdot 3 = 3}, \underbrace{1}_{(0+1) \bmod 3} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned} B_5 &= B_{0,2,0} = \{(0,0), (2,0), (1,1)\} & B_6 &= B_{0,3,0} = \{(0,0), (3,0), (4,1)\} \\ B_7 &= B_{0,4,0} = \{(0,0), (4,0), (2,1)\} & B_8 &= B_{0,5,0} = \{(0,0), (5,0), (5,1)\} \\ B_9 &= B_{0,1,1} = \{(0,1), (1,1), (3,2)\} & B_{10} &= B_{0,2,1} = \{(0,1), (2,1), (1,2)\} \\ B_{11} &= B_{0,3,1} = \{(0,1), (3,1), (4,2)\} & B_{12} &= B_{0,4,1} = \{(0,1), (4,1), (2,2)\} \\ B_{13} &= B_{0,5,1} = \{(0,1), (5,1), (5,2)\} & B_{14} &= B_{0,1,2} = \{(0,2), (1,2), (3,0)\} \\ B_{15} &= B_{0,2,2} = \{(0,2), (2,2), (1,0)\} & B_{16} &= B_{0,3,2} = \{(0,2), (3,2), (4,0)\} \\ B_{17} &= B_{0,4,2} = \{(0,2), (4,2), (2,0)\} & B_{18} &= B_{0,5,2} = \{(0,2), (5,2), (5,0)\} \\ B_{19} &= B_{1,2,0} = \{(1,0), (2,0), (4,1)\} & B_{20} &= B_{1,3,0} = \{(1,0), (3,0), (2,1)\} \\ B_{21} &= B_{1,4,0} = \{(1,0), (4,0), (5,1)\} & B_{22} &= B_{1,5,0} = \{(1,0), (5,0), (0,1)\} \\ B_{23} &= B_{1,2,1} = \{(1,1), (2,1), (4,2)\} & B_{24} &= B_{1,3,1} = \{(1,1), (3,1), (2,2)\} \\ B_{25} &= B_{1,5,1} = \{(1,1), (5,1), (0,2)\} & B_{26} &= B_{1,2,2} = \{(1,2), (2,2), (4,0)\} \\ B_{27} &= B_{1,3,2} = \{(1,2), (3,2), (2,0)\} & B_{28} &= B_{1,4,2} = \{(1,2), (4,2), (5,0)\} \\ B_{29} &= B_{1,5,2} = \{(1,2), (5,2), (0,0)\} & B_{30} &= B_{2,3,0} = \{(2,0), (3,0), (5,1)\} \\ B_{31} &= B_{2,4,0} = \{(2,0), (4,0), (0,1)\} & B_{32} &= B_{2,5,0} = \{(2,0), (5,0), (3,1)\} \\ B_{33} &= B_{2,3,1} = \{(2,1), (3,1), (5,2)\} & B_{34} &= B_{2,4,1} = \{(2,1), (4,1), (0,2)\} \\ B_{35} &= B_{2,5,1} = \{(2,1), (5,1), (3,2)\} & B_{36} &= B_{2,3,2} = \{(2,2), (3,2), (5,0)\} \\ B_{37} &= B_{2,4,2} = \{(2,2), (4,2), (0,0)\} & B_{38} &= B_{2,5,2} = \{(2,2), (5,2), (3,0)\} \\ B_{39} &= B_{3,4,0} = \{(3,0), (4,0), (3,1)\} & B_{40} &= B_{3,5,0} = \{(0,0), (5,0), (1,1)\} \\ B_{41} &= B_{3,4,1} = \{(3,1), (4,1), (3,2)\} & B_{42} &= B_{3,4,2} = \{(3,2), (4,2), (3,0)\} \\ B_{43} &= B_{3,5,1} = \{(3,1), (5,1), (1,2)\} & B_{44} &= B_{3,5,2} = \{(3,2), (5,2), (1,0)\} \\ B_{45} &= B_{4,5,0} = \{(4,0), (5,0), (4,1)\} & B_{46} &= B_{4,5,1} = \{(4,1), (5,1), (4,2)\} \\ B_{47} &= B_{4,5,2} = \{(4,2), (5,2), (4,0)\} & B_{48} &= B_{1,4,1} = \{(1,1), (4,1), (5,2)\} \end{aligned}$$

c) $0 \leq x \leq m-1$ ve her $i \in Z_3$ ise; yani $x=0,1,2$ ve $i=0,1,2$ olmak üzere tasarıma ilişkin son 9 blok bulunur.

$$C_{x,i} = \{ \infty, (x+t, i), (x, (i+1) \bmod 3) \}$$

$$B_{49} = C_{0,0} = \left\{ \infty, \left(\underbrace{3}_{x+t=3}, \underbrace{0}_{i=0} \right), \left(\underbrace{0}_{x=0}, \underbrace{1}_{(i+1) \bmod 3=1} \right) \right\}$$

$$B_{50} = C_{0,1} = \{ \infty, (3,1), (0,2) \} \quad B_{51} = C_{0,2} = \{ \infty, (3,2), (0,0) \}$$

$$B_{52} = C_{1,0} = \{ \infty, (4,0), (1,1) \} \quad B_{53} = C_{1,1} = \{ \infty, (4,1), (1,2) \}$$

$$B_{54} = C_{1,2} = \{ \infty, (4,2), (1,0) \} \quad B_{55} = C_{2,0} = \{ \infty, (5,0), (2,1) \}$$

$$B_{56} = C_{2,1} = \{ \infty, (5,1), (2,2) \} \quad B_{57} = C_{2,2} = \{ \infty, (5,2), (2,0) \}$$

Buradan elde edilen 57 bloğun yerine yazılması ile elde edilen tasarımın parametreleri $v=19$, $b=57$, $r=9$, $k=3$, $\lambda = 1$ 'dir. Yeni ise 2-(19,3,1) tasarımıdır. Bir başka ifade ile STS(19) tasarımıdır.

4.3. Yakın Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımı

4.3.1. Tanım ve sınıflandırma

v ve b sırasıyla nokta ve blokların sayısını, k ise $k < v$ olmak üzere blok genişliğini gösterebilir. bk , v 'nin katı olduğu zaman, v noktaları ve k genişliğindeki b blokları ile BIBD'leri, her nokta en fazla 1 kez her bir blokta görünen tamamlanmamış blok tasarımıdır. $r = bk/v$ ve $\lambda = r(k-1)/(v-1)$ sağlandığı durumda, her bir nokta r bloğunda ve herhangi 2 nokta λ bloğunda görünür. Benzer tasarımlar, eğer mevcutsa çok güçlü bir yargıyla optimaldir [32]. Keyfi v, b, k için benzer tasarımlar mevcut olmayabilir.

4.1. Tanım

Yakın BIBD, aşağıdaki koşulları sağladığı takdirde, v noktaları ve k genişliğindeki b blokları ile tamamlanmamış blok tasarımıdır.

- (i) Her bir nokta her blokta en fazla 1 kez görülebilir.

(ii) r_i , i noktasının tekrarlarının sayısı olsun. (bk/v 'nin integral parçası olduğu durumda) $\bar{r} = [bk/v]$ iken her bir $r_i = \bar{r}$ ya da $\bar{r} + 1$ 'dir.

(iii) λ_{ij} , i ve j noktalarının birlikte görülme sayısını gösterebilir. j ile her bir sabit i_0 için, $j' \neq i_0, j \neq j', |\lambda_{i_0j} - \lambda_{i_0j'}| \leq 1$ dir.

4.2. Tanım

Bu yakın BIBD'ler ek olarak 2 farklı tipe daha sınıflandırılabilir. $s, r_i = \bar{r}$ iken i noktaların sayısını gösterebilir.

$$s = v - (bk - v\bar{r}) \quad (4.1)$$

$1 \leq s \leq v$ ve $s = v$ olduğu durumda tasarım; "düzenli grafik tasarımı" dır. Tanımdan da kolayca görüleceği üzere, eğer $r_{i_0} = \bar{r}$ ise, i_0 noktası diğer bir nokta ile $\bar{\lambda}$ ya da $\bar{\lambda} + 1$ kez birlikte görülür ($\bar{\lambda}$ 'nin $(k-1)\bar{r}/(v-1)$ 'in integral parçası olduğu durumda). Bu durumda her biri sadece $\bar{\lambda}$ kez i_0 ile birlikte görülen noktaların sayısı,

$$n = v - 1 - \{(k-1)\bar{r} - \bar{\lambda}(v-1)\} \quad (4.2)$$

dir.

$r_{i_0} = \bar{r} + 1$ ile i_0 noktalarına gelince, $n \geq k-1$ ya da $n < k-1$ şeklinde iki farklı durum vardır. Eğer $n \geq k-1$ ise, $r_{i_0} = \bar{r} + 1$ için $n - k + 1$ tane, her biri sadece $\bar{\lambda}$ kez i_0 ile birlikte görülen nokta vardır ve $v + k - n - 2\lambda_{i_0j}, \bar{\lambda} + 1$ 'e eşittir. Diğer taraftan eğer, $n < k-1$ ise, $r_{i_0} = \bar{r} + 1$ için $v + k - n$ tane, her biri sadece $\bar{\lambda} + 1$ kez i_0 ile birlikte görülen nokta vardır ve $k - 1 - n\lambda_{i_0j}, \bar{\lambda} + 2$ 'ye eşittir. Sonuçta $n \geq k-1$ ise,

λ_{ij} 'nin iki mümkün değeri söz konudur ve bunlar da $\bar{\lambda}$ ya da $\bar{\lambda}+1$ 'dir. Bu durumda yakın BIBD Tip I olarak adlandırılır. $n < k-1$ için $\lambda_{ij}, \bar{\lambda}, \bar{\lambda}+1, \bar{\lambda}+2$ olabilir. Bunun sonucunda elde edilen yakın BIBD ise Tip II'dir.

4.3.2. Grafikler ve varlık için gerekli koşulların ilişkisi

Bu bölümde yakın BIBD ile grafikler ele alınacaktır. Yakın BIBD'in varlığı, v, b, k 'nın değerlerinden tanımlanabilen en çok iki farklı derece ile grafiğin varlığı anlamına gelmektedir. Erdős & Gallai'nin (1960) grafiklerin varlığı ile ilgili sonuçlarını kullanarak, yakın BIBD'lerin varlığı için önemli durumlar çıkarılmıştır [32].

Sabit blok genişliği k 'ya sahip, r_1, \dots, r_v ve $\{\lambda_{ij}\} (i \neq j; 1 \leq i, j \leq v)$ şeklinde tanımlanan ikili tamamlanmamış blok tasarımı için varyans-kovaryans matrisi, deneme etkilerinin tahmini için orantılıdır ve C matrisinin genelleştirilmiş tersidir. C matrisinin köşegen elemanları $(1 - k^{-1})r_i (i = 1, \dots, v)$, diğer elemanları ise $-k^{-1}\lambda_{ij} (1 \leq i, j \leq v)$ 'dir. Blok tasarımları için optimalite kriterleri, genellikle bu C matrisi bakımından tanımlanmaktadır.

d , Tip I yakın BIBD olsun. Genellikle uzaklaşmaksızın, $r_1 = \dots = r_s = \bar{r}$ ve $r_{s+1} = \dots = r_v = \bar{r} + 1$ olarak varsayalım.

$$A = \begin{bmatrix} \{(k-1)\bar{r} + \bar{\lambda}\}I_s - \bar{\lambda}J_{s,s} & -\bar{\lambda}J_{s,v-s} \\ -\bar{\lambda}J_{v-s,s} & \{(k-1)(\bar{r}+1) + \bar{\lambda}\}I_{v-s} - \bar{\lambda}J_{v-s,v-s} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

(4.3)'de $I_s, s \times s$ boyutunda özdeş matris ve $J_{m,m}, m \times m$ boyutunda 1'lerden oluşan matristir. Buna göre $A - kC$, köşegen elemanları "0", diğer elemanları "0" ya da "1" olan bir matristir. C matrisi yukarıdaki paragrafta tanımlanmıştır. İlk s satırlarının her birisi, $v - n - 1$ 'lerden birisine, son $v - s$ satırlarından her birisi ise

$v - n + k - 2$ 'lerden birisine sahiptir. Böylece $A - kC$, s köşesinin $v - n - 1$ dereceye ve $v - s$ köşesinin $v - n + k - 2$ dereceye sahip olduğu v köşesi ile grafiğin “bitişiklik matrisi” dir .

Erdős&Gallai (1960) $t_1 \geq \dots \geq t_v$ dizisi ile grafiğin varlığı için aşağıdaki koşulları vermiştir:

$$(i) \sum_{i=1}^v t_i \quad \text{çift} \quad (4.4)$$

$$(ii) \sum_{i=1}^l t_i \leq l(l-1) + \sum_{i=l+1}^v \min(l, t_i) \quad (4.5)$$

$1 \leq l \leq v - 1$ iken her l tamsayısı için örnek görülebilir [32].

Eşitsizlik (4.4) ve (4.5) ün kullanımı sonucunda, aşağıdakilerin olması koşulu ile, s köşesinin x dereceye ve $v - s$ köşesinin y dereceye sahip olduğu, v köşesi ile grafik varlığı gösterilebilir ($x < y$ iken).

$$(i) \quad xs + (v - s)y \text{ çift} \quad (4.6)$$

$$(ii) \quad (v - s)y \leq (v - s)(v - s - 1) + sx. \quad (4.7)$$

Şimdi de Eşitlik (4.1) ve (4.2)'den $x = v - n - 1$ ve $y = v - n + k - 2$ durumu incelenecektir.

Eşitsizlik (4.6)'dan;

$$xs + (v - s)y = (v - n - 1)s + (v - s)(v - n + k - 2) = bk(k - 1) - \bar{\lambda}v(v - 1)$$

açıkça çifttir. Eşitsizlik (4.7)'e bağlı olarak x ve y değerleri yerine koyulursa;

$$(v - s)(v - n + k - 2) \leq (v - s)(v - s - 1) + s(v - n - 1)$$

elde edilir ve buradan aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$s(n-s+1) \leq (v-s)(n-k+1)$$

Buna bağlı olarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

4.1. Önerme

Herhangi verilmiş pozitif b, v, k tamsayıları için ($k \geq 2$ ve $k < v$ olmak üzere), s ve n Eşitlik (4.1) ve (4.2)'den tanımlanabilir. Eğer $n \geq k-1$ ve yakın BIBD, v noktaları ve k genişliğindeki b blokları ile mevcutsa,

$$s(n-s+1) \leq (v-s)(n-k+1)$$

dir [32].

Bu, Tip I yakın BIBD'in varlığı için gerekli bir koşulu sağlamaktadır. Örneğin, eğer $v=5, k=3, b=3$ ve $\bar{r}=1, s=1$ ve $n=2$ ise, $n \geq k-1$ durumunda

$$s(n-s+1) > (v-s)(n-k+1) \text{ 'dir. Bu nedenle, yakın olmayan BIBD mevcuttur.}$$

Halbuki eğer, $v=5, k=3, b=8$ ve $\bar{r}=4, s=1$ ve $n=4$ ise,

$$s(n-s+1) \leq (v-s)(n-k+1) \text{ eşitsizliği sağlanır. Grafik, "0" derece ile 1 köşe}$$

noktasına ve "2" derece ile 4 köşe noktasına sahiptir. Bu grafik tektir.

Tip II yakın BIBD'ler için şu tanımlamalar dikkate alınır. Yeniden $r_1 = \dots = r_s = \bar{r}$ ve $r_{s+1} = \dots = r_v = \bar{r} + 1$ olarak varsayalım. $1 \leq i \leq s$ ve $s+1 \leq j \leq v$ eşitsizlikleri ile herhangi iki farklı i ve j köşe noktaları için $\lambda_{ij} = \bar{\lambda}$ yada $\bar{\lambda} + 1$ 'e sahip olunmalıdır.

Diğer taraftan $\lambda_{ij} = \lambda_{ji} = \bar{\lambda} + 1$ yada $\bar{\lambda} + 2$ 'dir. Bu nedenle de $\lambda_{ij}, \bar{\lambda} + 1$ 'e eşit olmak zorundadır. Böylece eğer,

$$B = \begin{bmatrix} \{(k-1)\bar{r} + \bar{\lambda} + 1\}I_s - (\bar{\lambda} + 1)J_{s,s} & -(\bar{\lambda} + 1)J_{s,v-s} \\ -(\bar{\lambda} + 1)J_{v-s,s} & \{(k-1)(\bar{r} + 1) + (\bar{\lambda} + 2)\}I_{v-s} - (\bar{\lambda} + 2)J_{v-s,v-s} \end{bmatrix}$$

ise, $kC - B = \text{diag}(N, M)$ 'dir. $N, s \times s$, M ise $(v-s) \times (v-s)$ genişliğinde, köşegen elemanları sıfır olan 0-1 matrisleridir. Ayrıca N 'in her satırı n 'lerden birisine, M 'in her satırı ise $v-k+n-s$ 'lerden birisine sahiptir. Bu nedenle N, s köşe ve n derece ile; M ise, $v-s$ köşe ve $v-k+n-s$ derece ile düzenli grafiğin bitişiklik matrisidir. Benzer düzenli grafikler ancak ve ancak aşağıdakiler sağlanırsa mevcuttur.

- (i) $0 \leq n \leq s-1$ ve $0 \leq v-k+n-s \leq v-s-1$ sağlanması koşulu ile
- (ii) ns ve $(v-s)(v-k+n-s)$ 'in çift olduğu durumda [32].

4.2. Önerme

Herhangi verilmiş pozitif b, v, k tamsayıları için ($k \geq 2$ ve $k < v$ olmak üzere), s ve n Eşitlik (4.1) ve (4.2)'den tanımlanabilir. Eğer $n < k-1$ ve yakın BIBD, v noktaları ve k genişliğindeki b blokları ile mevcutsa, $n+1 \leq s \leq v-k+n$ ve ns ile $(v-s)(v-k+n-s)$ 'in çift olduğu durum söz konusudur [32].

Bu, Tip II yakın BIBD'in varlığı için gerekli bir koşulu sağlamaktadır. Örneğin, eğer $v=6, k=4, b=5$ ve $\bar{r}=3, s=4, n=1$ ise, $n < k-1$ durumu sağlanırken $s > v-k+n$ olduğu için yakın BIBD mevcut değildir. $v=6, k=3, b=15$ için $sn=3$ tektir ve bu nedenle de tasarım mevcut değildir.

Yukarıdaki örneklerden de görüldüğü üzere grafik, her zaman yakın BIBD'den, v, b, k 'nın belirlenmiş değerleri için yapılandırılabilir. Eğer proses ters çevrilebilir nitelikte ise (yani; grafiğin varlığının tasarımın varlığını sağlaması gibi), bundan kesin olarak emin olunamaz. Tasarım mevcut olsa bile, bunun ilgili grafikten yapılandırılması zor olabilir. Blok genişliği 2 olduğu zaman, her bloğun bloktaki iki

nokta kenar bağlantısı yapar gibi bir durum dikkate alınarak tasarım grafiğe eşittir. Eşitsizlik (4.6) ve (4.7)'in kullanımı ile aşağıdaki durum ispatlanabilir.

4.3. Önerme

Herhangi verilmiş pozitif b ve v tamsayıları için yakın BIBD, blok genişliği iki olmak üzere daima vardır ve Tip I dir [32].

Önerme 4.3., yakın BIBD'in $k = 2$ ve herhangi b ve v değerleri için varlığını sağlamaktadır.

4.3.3. Yapılandırma

2 genişliğindeki b blokları ve v noktaları ile blok tasarımı tam olarak, v uç noktaları ve b kenarları ile grafiğe eşittir. Her blok 2 nokta içerdiği için, her kenarın 2 uç noktaya aynı yönde bağlı olduğuna dikkat edilmelidir. Bu nedenle, 2 genişliğindeki b blokları ve v noktaları ile yakın BIBD, $b \leq \frac{1}{2}v(v-1)$, v uç noktaları ve b kenarları ile grafik gibi görülebilir. Buna benzer olarak, uç noktaların herhangi bir parçası için onlara bağlanmış en çok 1 kenar vardır. $\bar{r} = \lfloor 2b/v \rfloor$ ve $s = v\bar{r} + v - 2b$ olduğu durumda; s uç noktaları derece \bar{r} 'ya, $v - s$ uç noktaları ise derece $\bar{r} + 1$ 'e sahiptir.

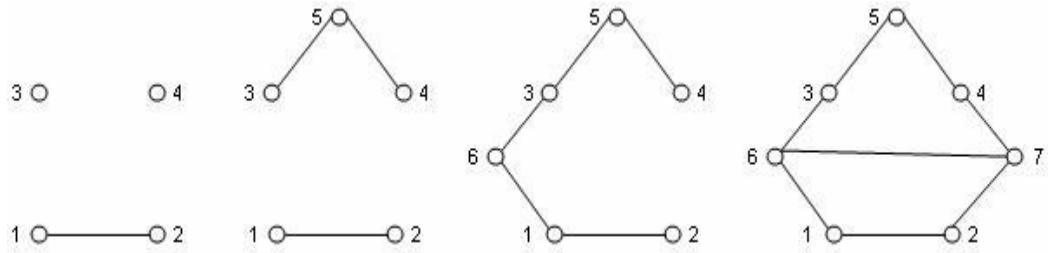
Hakimi&Havel [32]'nin sonuçlarından, eğer G' grafiği $v-1$ uç noktaları ve $(t_2 - 1, \dots, t_{\eta+1} - 1, t_{\eta+2}, \dots, t_v)$ dereceleri ile varsa, G grafiği v uç noktaları ve $(t_1 \geq \dots \geq t_v)$ dereceleri ile vardır sonucuna ulaşılmıştır. G grafiği G' grafiğinden, $t_2 - 1, \dots, t_{\eta+1} - 1$ dereceleri ile G' 'in t_1 uç noktalarına bağlanması ve G' 'de daha fazla tepe noktalarının tanımlanması sonucunda elde edilebilir. Örneğin $v = 7, k = 2$ ve $b = 8, \bar{r} = 2, s = 5$. Yukarıdaki iteratif (tekrarlayan) düzenden, uygun derece diziler $(3,3,2,2,2,2,2), (2,2,2,2,1,1), (2,1,1,1,1)$ ve $(1,1,0,0)$ şeklinde görülmektedir.

Tekrarlı yapıda olmayan bir diğer yapılandırma metodunun aşağıda ana hatları verilmiştir. Hamilton Döngüsü (i_1, \dots, i_v) 'nin, $(1, \dots, v)$ 'nin permütasyonu olduğu durumda, $(i_1, i_2), \dots, (i_{v-1}, i_v), (i_v, i_1)$ formundaki kenarların derlemesidir. v 'nin tek olduğu durumda, v köşe noktalarının tamamlanmış grafiği, $\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}$ bölümlenmesinin birleşik halidir. Bazı pozitif tam sayılar için $q \leq \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}, (q-1)v < b \leq qv$ varsayalım. Buna göre, 2 genişliğindeki b blokları ve v noktaları ile yakın BIBD, S_1, \dots, S_{q-1} ve $b - (q-1)v$ toplamı gibi, S_q 'dan karşılıklı olarak bitişik olmayan kenarlar şeklinde yapılandırılabilir.

4.6. Örnek

$(16253471), (13645721)$ ve (14237651) $v = 7$ için 3 tane parçalanmış Hamilton Döngüsüdür. $b = 11$ olması durumunda benzer bir tasarım aşağıdaki gibidir.

$\{(16), (62), (25), (53), (34), (47), (71), (13), (64), (57), (21)\}$.



Şekil 4.2. $v = 7, k = 2$ ve $b = 8, \bar{r} = 2, s = 5$ için grafik.

v 'nin çift olduğu durumda, v köşe noktalarının tamamlanmış grafiği, $\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}$ bölümlenmesinin Hamilton döngülerinin ve $\frac{1}{2}v$ karşılıklı olarak bitişik olmayan kenarların birleşik halidir [32]. Bazı pozitif tam sayılar için

$q \leq \frac{1}{2}v - 1, (q - 1)v < b \leq qv$ varsayılınsın. Buna göre, $(v, b, 2)$ parametreleri ile yakın BIBD'in yapılandırılması v 'nin tek olduğu durumdaki ile benzerdir.

$\frac{1}{2}v(v - 2) < b \leq \frac{1}{2}v(v - 1)$ için, $(v, b, 2)$ parametreleri ile yakın BIBD,

$b - \frac{1}{2}v(v - 2)$ karşılıklı olarak bitişik olmayan kenarların, $\frac{1}{2}v - 1$ parçalanmış

Hamilton döngüsüne eklenmesi ile elde edilebilir. Örneğin; $v = 6$ için tamamlanmış grafik, 2 Hamilton döngüsünün bölümlenmiş birleşmesidir ((1234561), (1352641) çevrimleri ve (15), (24), (36) kenarları). $b = 13$ olması durumunda benzer bir tasarım aşağıdaki gibidir.

$\{(12), (23), (34), (45), (56), (61), (13), (35), (52), (26), (64), (41), (15)\}$.

Bu yapılandırma metotların hiçbiri tek bir tasarım vermez.

c 'nin tamsayı olduğu durumda $\frac{1}{2}cv(v - 1) \leq b < \frac{1}{2}(c + 1)v(v - 1)$ için, 2 genişliğindeki b blokları ve v noktaları ile yakın BIBD'in elde edilmesi, $b < \frac{1}{2}v(v - 1)$ durumuna, $\frac{1}{2}v(v - 1)$ blokları ile BIBD'in c kopyalarının eklenmesi sonucunda indirgenebilir.

$k = v - 1$ için yakın BIBD'lerin elde edilmesi oldukça kolaydır. v blokları ile d^* BIBD ile başlanırsa, $2 \leq b < v$ olmak üzere, b blokları ile yakın BIBD, d^* 'in herhangi bir b bloğundan elde edilir.

$3 \leq k < v - 2$ için yakın BIBD var olmayabilir. Bu durumda benzer tasarımları yapılandırma problemi ortaya çıkar. Fakat BIBD, d^* 'in, b^* blokları ile var olduğu durum için, b , b^* 'a yakın olduğunda, b blokları ile yakın BIBD, bazı blokların d^* 'dan silinmesi yada d^* 'a eklenmesi sonucunda elde edilebilir.

4.4. Dikdörtgensel Tasarımlar

Dikdörtgensel tasarımlar 1955 yılında Vartak tarafından ortaya konmuştur [22]. Bu tasarımlar, $m \times n$ gibi bir dikdörtgende düzenlenen $v = mn$ işlemlerinin dikdörtgensel birliktelik sınıfına bağlı olan 3-birliktelik PBIBD'leridir. Her işlem ile ilgili olarak şunlar söz konusudur.

- (i) İlk birliktelik sınıfları aynı satırın diğer $n - 1$ işlemleridir.
- (ii) İkinci birliktelik sınıfları aynı sütunun diğer $m - 1$ işlemleridir.
- (iii) Kalan $(m - 1)(n - 1)$ işlemleri ise üçüncü birliktelik sınıflarıdır.

Bir dikdörtgensel tasarım aşağıdaki özellikleri içeren b bloklarındaki $v = mn$ işlemlerinin bir düzenlemesidir.

- (i) Her blok $k < v$ olmak üzere k farklı işlemleri içerir.
- (ii) Her işlem kesin olarak r bloklarında meydana gelir.
- (iii) mn işlemleri m satırları ve n sütunlarının dikdörtgeninde düzenlenir. Şöyle ki, aynı satırdaki (sütundaki) herhangi iki işlem $\lambda_1(\lambda_2)$ bloklarında birlikte, aksi halde λ_3 bloklarında sırasıyla meydana gelir [10,33].

Dikdörtgensel tasarımlar, dengelemenin yanı sıra ortogonalliği de içeren faktöriyel denemeler için kullanışlıdır [10]. Ek olarak, λ_3 , λ_1 ve λ_2 den büyükse, ana etkilerdeki bilginin kaybı küçük bir hal alır [34]. Bu durum, bu tasarımların $m \times n$ tamamlanmış faktöriyel denemeler şeklinde kullanılması durumunda geçerlidir. Bu tasarımlar için yapılandırma prosedürleri Gupta ve Mukerjee [10] tarafından verilmiştir.

İki BIBD'in isabet matrislerinin kronoker çarpımı bir dikdörtgensel tasarım oluşturur [22]. Burada diğer varyasyonlar incelenecektir.

Dikdörtgensel birliktelik burada; $n_1 = n - 1$, $n_2 = m - 1$ ve $n_3 = (m - 1)(n - 1)$ olmak üzere aşağıdaki gibi düzenlenmiştir.

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 2 & \cdots & n \\
 n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\
 \vdots & \vdots & & \vdots \\
 (m-1)n+1 & (m-1)n+2 & \cdots & mn
 \end{array}$$

4.4. Teorem

$$v' = m, b', r', k', \lambda' \quad (4.8)$$

parametreleri ile bir BIBD'in varlığı,

$$\begin{aligned}
 v &= mn, \quad b = \binom{n}{2} b', \\
 r &= (n-1)r' + \binom{n-1}{2} b', \quad k = 2k' + (n-2)v', \\
 \lambda_1 &= (2n-3)r' + \binom{n-2}{2} b', \\
 \lambda_2 &= (n-1)\lambda' + \binom{n-1}{2} b', \\
 \lambda_3 &= \lambda' + 2(n-2)r' + \binom{n-2}{2} b'.
 \end{aligned} \quad (4.9)$$

parametreleri ile bir dikdörtgensel tasarımın varlığı anlamına gelir [10].

4.5 Teorem

Eşitlik (4.8)'deki parametreler ile bir BIBD'in varlığı,

$$\begin{aligned}
 v &= mn, \quad b = nb', \\
 r &= (n-1)r', \quad k = (n-1)k', \\
 \lambda_1 &= (n-2)r', \quad \lambda_2 = (n-1)\lambda', \quad \lambda_3 = (n-2)\lambda'.
 \end{aligned} \quad (4.10)$$

parametreleri ile bir dikdörtgensel tasarımın varlığı anlamına gelir [10].

4.6. Teorem

Eşitlik (4.8)'deki parametreler ile bir BIBD'in varlığı,

$$\begin{aligned} v &= mn, & b &= nb', \\ r &= (n-1)r' + b', & k &= (n-1)k' + v', \\ \lambda_1 &= nr', & \lambda_2 &= (n-1)\lambda' + b', & \lambda_3 &= (n-2)\lambda' + 2r'. \end{aligned} \quad (4.11)$$

parametreleri ile bir dikdörtgensel tasarımın varlığı anlamına gelir [10].

4.7. Teorem

Eşitlik (4.8)'deki parametreler ile bir BIBD'in varlığı,

$$\begin{aligned} v &= mn, & b &= nb', \\ r &= (n-2)r' + b', & k &= (n-2)k' + v', \\ \lambda_1 &= (n-2)r', & \lambda_2 &= b' - 2r' + n\lambda', & \lambda_3 &= (n-4)\lambda' + 2r'. \end{aligned} \quad (4.12)$$

parametreleri ile bir dikdörtgensel tasarımın varlığı anlamına gelir [10].

4.5. Hadamard Matrisleri ve Tasarımlar

4.5.1. Hadamard matrisleri

4.3. Tanım

n .mertebeden hadamard matris her hücresi ∓ 1 olan $n \times n$ boyutlu H matrisi,

$$HH^T = nI_n \text{ dir [20].}$$

(1) ve (-1) 1.mertebeden hadamard matrisleridir ve ikisi de önemsizdir. Aşağıdaki örneklerde 2 ve 4.mertebeleden hadamard matrisleri gösterildi.

4.7. Örnek

Aşağıdaki matris 2.mertebeden hadamard matrisidir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4.8. Örnek

Aşağıdaki matris 4.mertebeden hadamard matrisidir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hadamard matrisin her satırındaki bütün hücreleri “-1” ile çarpıldığında sonuç yine bir hadamard matristir. Bu tip çarpımlarla her hadamard matrisi ilk satır ya da sütundaki her hücresi “1” olan hadamard matrise dönüşür. Bu hadamard matris normalleştirilmiş olarak adlandırılır.

n.mertebeden hadamard matrisin satırları r_i olarak gösterilsin, $1 \leq i \leq n$. HH^T ‘nin (i,j).hücresi gerçekte $r_i \bullet r_j$ dir. “•” gerçel vektörlerin iç çarpımını gösterir.

Burada, hadamard matris tanımından $i \neq j$ ise $r_i \bullet r_j = 0$ dır. Aşağıdaki sonuç n.mertebeden hadamard matrisin mevcut olması için gerekli koşulları verir.

4.8. Teorem

$n > 2$ mertebeden HM mevcut ise $n \equiv 0 \pmod{4}$ tür [20].

4.5.2. Dengeli tamamlanmamış blok tasarımları ile ilişkisi

Bu bölümde simetrik BIBD'leri ve HM'leri arasındaki ilişki verilecektir. $4t$ mertebeden HM'leri, hadamard 2-tasarımları olarak adlandırılan simetrik BIBD elde etmede kullanılabilirler. Hadamard tasarımları $v = 4t - 1$, $k = 2t - 1$, $\lambda = t - 1$ ya da $v = 4t - 1$, $k = 2t$, $\lambda = t$ parametrelerine sahiptir.

4.9. Teorem

$t > 1$ olsun. $(4t - 1, 2t - 1, t - 1)$ - BIBD mevcut olması için gerek ve yeter koşul, $4t$ mertebeden HM mevcut olmasıdır [20].

4.9. Örnek

H 'in 8×8 HM olsun. Normalleştirilmiş matris aşağıdaki gibidir:

$$H = \begin{pmatrix} + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & + & - & + & - & + & - \\ + & - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & - & - & + & + \\ + & - & + & - & - & + & - & + \\ + & - & - & + & - & + & + & - \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} + & - & - & + & + & - & - \\ - & + & - & + & - & + & - \\ - & - & + & + & - & - & + \\ + & + & + & - & - & - & - \\ + & - & - & - & - & + & + \\ - & + & - & - & + & - & + \\ - & - & + & - & + & + & - \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

B'nin satırları $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ile sınıflandırıldığında, yedi tane bloğu $\{1,4,5\}$, $\{2,4,6\}$, $\{3,4,7\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,6,7\}$, $\{2,5,7\}$, $\{3,5,6\}$ olan $(7,3,1)$ -BIBD elde edilir. C matrisi, "0" ve "1" lerin yer değiştirildiği B matrisidir.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C ; blokları aşağıdaki gibi olan $(7,4,2)$ -BIBD dir. İsbet matrisin "0" ve "1" leri yer değiştirilerek elde edilen tasarım, orijinal tasarımın tamamlayıcı tasarımı olarak adlandırılır.

$$\{2,3,6,7\}, \{1,3,5,7\}, \{1,2,5,6\}, \{4,5,6,7\}, \{2,3,4,5\}, \{1,3,4,6\}, \{1,2,4,7\}$$

4.1. Sonuç

Eğer $4t-1$ asal kuvvet ise, $4t$ mertebeden HM mevcuttur [20].

4.10. Teorem

$4t$ mertebeden HM mevcut olsun. Eğer $t \geq 3$ ise, $(2t-1, t-1, t-2)$ -BIBD mevcuttur; eğer $t \geq 2$ ise, $(2t, t, t-1)$ -BIBD mevcuttur [20].

$H_1 = (h_{i,j})$, n_1 mertebeden HM ve H_2 , n_2 mertebeden HM olsun. H_1 'in her $(h_{i,j})$ hücresi $n_2 \times n_2$ boyutlu $h_{i,j}H_2$ matrisi ile yer değiştirilerek elde edilen n_1n_2

mertebeden matris olarak $H_1 \otimes H_2$ kronoker çarpımı tanımlanır. xH_2 her hücresi x ile çoğaltılarak H_2 'den elde edilen matrisi gösterebilirsin.

4.10. Örnek

H_1 Örnek 4.7'de verilen 2.mertebeden HM ve H_2 Örnek 4.8'de verilen 4.mertebeden HM olsun. O zaman $H_1 \otimes H_2$ aşağıdaki 8.mertebeden HM dir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4.11. Teorem

H_1 , n_1 mertebeden HM ve H_2 , n_2 mertebeden HM ise; $H_1 \otimes H_2$, $n_1.n_2$ mertebeden HM dir [20].

Teorem 4.11'in aşağıdaki sonucu $n_1 = 2$ ve $n_2 = n$ kabul edilerek elde edilmiştir.

4.2. Sonuç

n .mertebeden HM mevcut ise, $2n$ mertebeden HM mevcuttur [20].

4.5.3. Williamson metodu

Burada tanımlanan yapılar, $n \leq 88$ bütün olası mertebelerden HM'ler elde etmeğe izin verir. 92.mertebeden HM, Williamson tarafından öne sürülen metod kullanılarak ilk defa elde edilmiştir.

Kuruluş için temel, aşağıdaki özdeşlik matrisidir.

$$\text{Eğer } a,b,c \text{ ve } d \text{ tamsayı ve } H = \begin{bmatrix} -a & b & c & d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix} \text{ ise, o zaman,}$$

$HH^T = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4$ dir. HM yapısı kesin koşulları sağlayan matrisler tarafından a,b,c ve d yer değiştirilerek elde edilir.

4.12. Teorem

A,B,C ve D $n \times n$ boyutlu matrisler olsun. Bu matrisler aşağıdaki koşulları sağlar.

- (i) A,B,C ve D ∓ 1 hücrelerine sahip simetrik matrislerdir
- (ii) A,B,C ve D matrisleri değişme özelliğine sahip matrislerdir [20].

$$H = \begin{bmatrix} -A & B & C & D \\ B & A & D & -C \\ C & -D & A & B \\ D & C & -B & A \end{bmatrix} \text{ ve } (A^2 + B^2 + C^2 + D^2) = M \text{ gösterebiliriz.}$$

O zaman,

$$HH^T = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \end{bmatrix} \text{ ve "0" hücreleri } 0\text{'ların } n \times n \text{ bloklarını gösterebilir.}$$

4.3. Sonuç

Aşağıdaki koşulları sağlayan $n \times n$ boyutlu A,B,C ve D matrisleri mevcut olsun.

- (i) A,B,C ve D $\neq 1$ hücrelerine sahip simetrik matrislerdir
- (ii) A,B,C ve D matrisleri değişme özelliğine sahip matrislerdir
- (iii) $(A^2 + B^2 + C^2 + D^2) = 4n I_n$

o zaman, $4n$ mertebeden HM mevcuttur [20].

4.11. Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } B = C = D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ olsun. Sonuç 4.3.'ün koşulları}$$

kolayca ispat edilir. $A^2 = 3 J_3$ ve $B^2 = C^2 = D^2 = 4 I_3 - J_3$, böylece

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 12 I_3 . \text{ Burada } 12\text{.mertebeden HM mevcuttur.}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$A = (a_{i,j})$ $n \times n$ boyutlu matrisin her i,j için $\{a_{i+1 \pmod n, j+1 \pmod n} = a_{i,j}\}$ 'i sağlayan köşegen matris olduğu söylenir. Diğer bir deyişle; her bir köşegen üzerindeki hücreler sabittir. Pratikte Örnek 4.11.'de olduğu gibi köşegen matrisler A,B,C ve D uygun olarak seçilir.

n pozitif tamsayı ve $U = u_{i,j}$ matris olsun.

$$u_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{eger } i - j \equiv 1 \pmod n \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

dir.

$\sum_{i=0}^{n-1} a_i U^i$ formunda her matrisin köşegen matris olduğunu görmek mümkündür.

Gerçekte, her bir köşegen matris tek şekilde bu yolla ifade edilebilir. Bu açıktır, çünkü

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i U^i = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & & a_{n-3} & a_{n-2} \\ & & & & \\ a_1 & a_2 & & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

dir. $(a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1})$ A matrisinin ilk satırıdır. A,B,C ve D aşağıdaki gibi köşegen matrisler olduğu farz edilsin;

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a_i U^i, \quad B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i U^i, \quad C = \sum_{i=0}^{n-1} c_i U^i \quad \text{ve} \quad D = \sum_{i=0}^{n-1} d_i U^i.$$

Teorem 4.12'nin koşulları dikkate alınmış olsun. A,B,C ve D matrislerinin tamamı U matrisinde polinomlar gibi ifade edildiği için matrislerin değişme özelliğine sahip olduğu açıktır. Her i için $a_i, b_i, c_i, d_i = \mp 1$ ise, o zaman A,B,C ve D hepsi ∓ 1 hücrelerine sahip olacaktır. A matrisinin simetrik olması koşulunda, $0 \leq i \leq n-1$ için $a_i = a_{n-i}$ dir. Benzer koşullar simetrik B,C ve D için sağlanacaktır.

$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 4n I_n$ koşulunu genelde sağlamak zordur.

4.12. Örnek

92.mertebeden HM yukarıda tanımlanan metodu kullanan Baumert, Golomb ve Hall tarafından 1962'de keşfedildi. A,B,C ve D matrislerinin ilk satırları aşağıdakiler gibidir (not: "1" + olarak, "-1" - olarak kodlandı).

A: ++----+----+--+--+----+----+

B: +-++-++-++-++-++-++-++-++-

C: +++----+--+--+--+--+--+---

D: +++-+++-+-----+--+--+---

4.5.4. Düzenli hadamard matrisleri

Düzenli hadamard matris, her satır ve her sütununda aynı sayıda “1”leri içeren bir matristir. DHM’ler birkaç nedenle ilgi çeker. İlk olarak; kesin simetrik BIBD’e eşdeğerdirler. Ek olarak; verilen mertebeden bütün olası HM arasında “1” hücrelerinin maksimum sayısına sahiptir.

4.13. Örnek

Aşağıdaki matris 4.mertebeden DHM’dir.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Her satırı aynı sayıda “1”lere sahip olan HM satır-düzenli HM olarak adlandırılır.

Her sütunu aynı sayıda “1”lere sahip olan HM sütun-düzenli HM olarak adlandırılır.

Satır düzenli HM mevcut olabilmesi için gerekli koşulları şöyledir. $H = (h_{i,j})$ her satırı “1”e eşit l hücre içeren $n > 1$ mertebeden HM olsun. $1 \leq i \leq n$ için r_i, H ’in i .sattırını gösterebilir.

$$a = |\{j : h_{1,j} = h_{2,j} = 1\}|, \quad b = |\{j : h_{1,j} = 1, h_{2,j} = -1\}|,$$

$$c = |\{j : h_{1,j} = -1, h_{2,j} = 1\}|, \quad d = |\{j : h_{1,j} = h_{2,j} = -1\}|$$

olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$a + b + c + d = n$$

$$r_1 \quad l \text{ tane "1" içerdiğinden} \quad a + b = l$$

$$r_2 \quad l \text{ tane "1" içerdiğinden} \quad a + c = l$$

$$r_1 \bullet r_2 = 0 \quad \text{olduğundan} \quad a - b - c + d = 0$$

Bu sistem $a = l - \frac{n}{4}$, $b = \frac{n}{4}$, $c = \frac{n}{4}$, $d = \frac{3n}{4} - l$ şeklinde tek çözüme sahiptir.

4.13. Teorem

(X, A) , $b = v$ ile trivial olmayan ikili dengeli tasarım olsun. O zaman (X, A) simetrik (v, k, λ) -BIBD dir [20].

H 'ın her "-1" hücrelerini "0"a değiştirilsin. M , n noktaya ve n bloğa sahip ikili dengeli tasarımın isabet matrisi (her nokta l blokta ve noktaların her çifti λ blokta gözüktür) olduğu için, 0-1 matris M , $\lambda = a = l - \frac{n}{4}$ iken $MM^T = \lambda J_n + (l - \lambda)I_n$

eşitliğini sağlar. M simetrik $(n, l, l - \frac{n}{4})$ -BIBD'in isabet matrisidir ve bundan dolayı

Teorem 4.13. PBD'nin gerçekte BIBD olduğunu ifade eder. Ayrıca,

$$l(l-1) = (l - \frac{n}{4})(n-1)$$

olduğu dolaylı şekilde görülür.

n 'in her bir sabit değeri için, yukarıdaki eşitlik l 'de karesel eşitlik.

4.14. Örnek

H , 16. mertebeden HM olsun. $n = 16$ ve $l = 6$ için $(n, l, l - \frac{n}{4})$ -BIBD olduğundan

simetrik $(16, 6, 2)$ -BIBD elde edilir. M isabet matrisinden elde edilen BIBD'in blokları aşağıdaki gibidir:

{1,2,3,4,5,6}, {1,2,7,8,9,10}, {1,3,7,11,12,13}, {1,4,8,11,14,15}, {1,5,9,12,14,16},
 {1,6,10,13,15,16}, {2,3,7,14,15,16}, {2,4,8,12,13,16}, {2,5,9,11,13,15},
 {2,6,10,11,12,14}, {3,4,9,10,11,16}, {3,5,8,10,12,15}, {3,6,8,9,13,14},
 {4,5,7,10,13,14}, {4,6,7,9,12,15}, {5,6,7,8,1,16}

Çizelge 4.1. (16,6,2)-BIBD

İşlemler	Bloklar															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	X	X	X	X	X	X										
2	X	X					X	X	X	X						
3	X		X				X				X	X	X			
4	X			X				X			X			X	X	
5	X				X				X			X		X		X
6	X					X				X			X		X	X
7		X	X				X							X	X	X
8		X		X				X				X	X			X
9		X			X				X		X		X		X	
10		X				X				X	X	X		X		
11			X	X					X	X	X					X
12			X		X			X		X		X			X	
13			X			X		X	X				X	X		
14				X	X		X			X			X	X		
15				X		X	X		X			X			X	
16					X	X	X	X			X					X

16 nokta ve 16 bloğa sahip BIBD’de her nokta (işlem) $r = 6$ blokta gözükürken, noktaların her çifti $\lambda = 2$ blokta gözükür. Blok genişliği $k = 6$ olan BIBD simetrik bir yapıya sahiptir.

Karesel formül kullanarak n ’in fonksiyonu gibi l için çözülebilir, bundan dolayı

$$l = \frac{n \mp \sqrt{n}}{2}$$

elde edilir. Bu eşitlik, n 'in tam kare olması gerektiğini belirtir. $n \equiv 0 \pmod{4}$ durumu dikkate alınabilir. u , pozitif tamsayı iken $n = (2u)^2$ yazılabilir. Böylece simetrik BIBD'i $(4u^2, 2u^2 \mp u, u^2 \mp u)$ – parametrelerine sahiptir. $u=2$ kabul edildiğinde, $(16,10,6)$ -BIBD ve $(16,6,2)$ -BIBD elde edilir. Örnekteki simetrik $(16,6,2)$ -BIBD gibi $(16,10,2)$ -BIBD de simetrik bir yapıya sahiptir.

Burada dikkat edilecek diğer bir nokta da $(16,10,2)$ ve $(16,6,2)$ tasarımlarının birbirinin tamamlayıcısı olmasıdır.

Tersine; $(4u^2, 2u^2 \mp u, u^2 \mp u)$ – BIBD'in isabet matrisi ile başladığında ve her "0" "-1" ile yer değiştirdiğinde, sonucu $4u^2$ mertebeli düzenli HM olduğu görülür.

4.14. Teorem

Eğer; $l = 2u^2 \mp u$ iken H 'in her satırı l tane "1" içerirse ve $u \geq 2$ bazı tamsayılar için $n = 4u^2$ ise $n > 4$ mertebeden satır-düzenli HM mevcuttur. Ayrıca HM simetrik $(4u^2, 2u^2 \mp u, u^2 \mp u)$ – BIBD'e eşdeğerdir [20].

4.15. Teorem

Aşağıdakiler eşdeğerdir.

- (i) H , n .mertebeden satır-düzenli HM tir
- (ii) H , n .mertebeden sütun-düzenli HM tir
- (iii) H , n .mertebeden DHM tir [20].

4.4. Tanım (Fark Kümeleri)

mod v kalan sınıflarının bir kümesi $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ olsun. Eğer $d_i - d_j$, $i \neq j$ biçiminde tüm farklar, 0 olmayan mod v kalanlarının tümünü veriyor ve bu farkların her biri λ defa görünüyorsa $\{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ kümesi mod v fark kümesi ya da (v, k, λ) – fark kümesi denir [35].

4.15. Örnek

$\{0,4,5,7\}$ kümesi mod 13'e göre bir fark kümesidir. Bu küme yardımıyla bloklar oluşturulur. Bloklar (doğrular) ve taşıdıkları noktalar $PG_2(3)$ projektif geometri özelliklerini gösterdiği açıktır. $d \neq 0(\text{mod } 13)$ için $d_1 - d_2 \equiv d(\text{mod } 13)$ olacak şekilde (d_1, d_2) çiftleri aşağıdaki biçimde verilir.

Çizelge 4.2. $(13,4,1)$ – fark kümesi

d	$d_1 - d_2$	d	$d_1 - d_2$
1	(5,4)	7	(7,0)
2	(7,5)	8	(0,5)
3	(7,4)	9	(0,4)
4	(4,0)	10	(4,7)
5	(5,0)	11	(5,7)
6	(0,7)	12	(4,5)

Örneğe göre bloklar oluşturulduğunda, $B_t = \{t, 4+t, 5+t, 7+t\}$, $t = 0,1,2, \dots, 12$ olmak üzere aşağıdaki biçimdedir.

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \{0,4,5,7\} & B_1 &= \{1,5,6,8\} & B_2 &= \{2,6,5,9\} & B_3 &= \{3,7,8,10\} & B_4 &= \{4,8,9,11\} \\
 B_5 &= \{5,9,10,12\} & B_6 &= \{6,10,11,0\} & B_7 &= \{7,11,12,1\} & B_8 &= \{8,12,0,2\} \\
 B_9 &= \{9,0,1,3\} & B_{10} &= \{10,1,2,4\} & B_{11} &= \{11,2,3,5\} & B_{12} &= \{12,3,4,6\}
 \end{aligned}$$

Bu düzen için, $b = 13$, $v = 13$, $r = 4$, $k = 4$, $\lambda = 1$ dir. $\{0,4,5,7\}$ cümlesi $(13,4,1)$ – fark kümesidir.

4.16. Örnek

$(Z_4 \times Z_4, +)$ 'da $(16,6,2)$ -Fark seti: $D = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (2,0), (3,0)\}$ ve

$(Z_6 \times Z_6, +)$ 'da $(36,16,5)$ -Fark seti:

$D = \{(0, i) : 1 \leq i \leq 5\} \cup \{(i, 0) : 1 \leq i \leq 5\} \cup \{(i, i) : 1 \leq i \leq 5\}$ yani

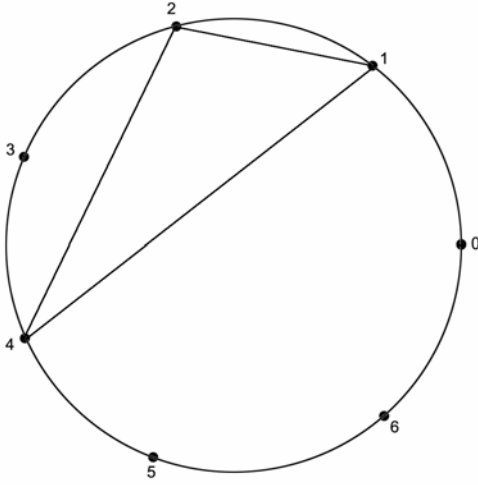
$D = \{(0,1), (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (5,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$

elde edilir. $(16,6,2)$ -BIBD ve $(36,16,5)$ -BIBD mevcut olduğu için 16. ve 36. mertebelerden DHM 'leri mevcuttur.

16.mertebeden düzenli HM'i 4.mertebelerden DHM'lerin kronoker çarpımı yardımıyla elde edilebileceğinden dolayı, iki DHM 'in kronoker çarpımının DHM olduğunu göstermek zor değildir.

4.17. Örnek

$\{1,2,4\}$ $(7,3,1)$ -fark setidir. $\{1,2,4\}$ 'ün mod7'e göre her bir toplanır shift $\{1+n, 2+n, 4+n\}$ dir. Bu setlerin yedisini birlikte göz önüne alınsın. Bloklar 124 , 235 , 346 , 450 , 561 , 602 , 013 elde edilir. Bu Şekil 4.3.'de üçgen döndürerek tanımlanır.



Şekil 4.3. (7,3,1)-fark seti

Bu 7 set ya da blok için, elemanları 7-eleman setinden alınır. $[0, \dots, 6]$ olarak adlandırılan her bir eleman 3 blokta gözükür, her blok 3 elemana sahiptir ve elemanların her bir çifti kesinlikle 1 blokta birlikte gözükür. Böylece (7,3,1)-fark seti, (7,3,1)-BIBD dir.

(7,3,1) ile karşılaşılan ilk yer $Q_7 = \{1,2,4\}$ setidir. Bunlar sıfır olmayan tam kareler $(\text{mod}7)$ dir. Onların sıfır olmayan 6 farkı (1-2 , 1-4 , 2-4 , 2-1 , 4-1 ve 4-2), 0 olmayan altı farklı kalan $(\text{mod}7)$ ların her biri $Q_7 \text{ mod } 7$ 'ye göre 3 sayının koleksiyonudur. $\text{mod } 7$ 'ye göre 0 olmayan her tamsayı Q_7 'nin ayrı elemanlarının farkı $(\text{mod}7)$ gibi kesinlikle bir yolla verilebilir. Daha genel olarak, bir (v, k, λ) – fark seti $\text{mod } v$ 'ye göre 0 olmayan k tamsayılarının S setidir. $\text{mod } v$ 'ye göre 0 olmayan her n tamsayısı S 'in elemanlarının farkı gibi kesinlikle λ farklı yolla verilebilir. Böylece Q_7 (7,3,1)-fark setidir.

$\text{mod}11$ 'e göre 0 olmayan her bir tamsayı Q_{11} 'in elemanlarının farkı gibi iki yolla yazılabildiği için $Q_{11} = \{1,3,4,5,9\}$ (11,5,2) fark setidir [36].

4.16. Teorem

a ve b $a \geq b$ gibi negatif olmayan tamsayılar iken $n = 4^a 9^b$ olsun. O zaman n .mertebeden düzenli HM mevcuttur [20].

Eğer $a = b = 0$ ise $n = 1$ dir ve 1.mertebeden düzenli HM mevcuttur.

$a + b \geq 1$ olduğu farz edilebildiği için $n = 4^{a-b} 36^b$ yazılır. O zaman n .mertebeden DHM, 36 .mertebeden b DHM'ler ve 4 .mertebeden $a-b$ DHM'lerin kronoker çarpımı olarak verilebilir.

4.6. Bent Fonksiyonları

$n \geq 1$ tam sayı olsun. $f : (Z_2)^n \rightarrow Z_2$ fonksiyonu, n değişkenlerinin Boolean Fonksiyonu olarak adlandırılır. B_n : n değişkenlerinin bütün Boolean fonksiyonlarının seti olsun.

$f \in B_n$ olmak üzere, vektör uzunluğu 2^n 'de her $x \in (Z_2)^n$ için $f(x)$ değerleri bulunabilir. Her $x \in (Z_2)^n$ için $\phi(f)_x = f(x)$ iken $\phi(f)$ ile bu vektör gösterilsin. Tutarlılık için, lexicographic mertebede $\phi(f)$ 'in koordinatlarını indeksleyeceğiz (Not: $\phi(f) \in (Z_2)^{2^n}$ ve $|B_n| = 2^{2^n}$ örneğin, n değişkenlerinin 2^{2^n} Boolean fonksiyonları vardır).

Her bir $f \in B_n$ için Tanım: $(-1)^f$, her $x \in (Z_2)^n$ için $((-1)^f)_x = (-1)^{f(x)}$ gibi fonksiyon $(-1)^f : (Z_2)^n \rightarrow \{-1,1\}$ olur. Diğer taraftan, $(-1)^f$ "1"e eşit her çıkış "1" ile ve "0" a eşit her çıkış "1" ile yer değiştirilerek f 'den biçimlendirilir.

Tanım: $x, y \in (Z_2)^n$ iki vektörün iç çarpımı aşağıdaki gibidir. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ iken

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \pmod{2}$$

$(Z_2)^n$ üzerinde tanımlanan her bir gerçek-değer fonksiyonu F olsun. F 'in Fourier Dönüşümü aşağıdaki formül ile tanımlanan fonksiyon $\hat{F} : (Z_2)^n \rightarrow R$ dir. Her $x \in (Z_2)^n$ için,

$$\hat{F}(x) = \sum_{y \in (Z_2)^n} (-1)^{x \cdot y} F(y)$$

dir. Her bir $x, y \in (Z_2)^n$ iki vektör için,

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$$

dir.

4.1. Yardımcı Teorem

Her bir $y \in (Z_2)^n$ için,

$$\sum_{y \in (Z_2)^n} (-1)^{x \cdot y} = 2^n \delta_{y, (0, \dots, 0)}$$

dır [20].

$S_n = (s_{x,y})$ satırları ve sütunları lexicographic mertebede $(Z_2)^n$ ile indekslenmiş olan $2^n \times 2^n$ boyutlu matris ve her $x, y \in (Z_2)^n$ için $s_{x,y} = (-1)^{x \cdot y}$ olsun. S_n , 2^n mertebeden Sylvester matris olarak adlandırılır.

4.3 Yardımcı Teorem

$F : \{0,1\}^n \rightarrow R$ olsun. O zaman, $\hat{F} = \phi(F) \cdot S_n$ dir [20].

4.4. Sonuç

$F : \{0,1\}^n \rightarrow R$ olsun. O zaman, $\hat{F} = 2^n \cdot F$ tir [20].

4.18. Örnek

$n=2$ $x_1, x_2 \in Z_2$ iken $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ ve $F = (-1)^f$ olsun. O zaman $\phi(f)$ 'in koordinatları lexicographic mertebede olduğunda,

$$\phi(f) = (f(0,0), f(0,1), f(1,0), f(1,1)) = (0, 0, 0, 1)$$

dir. $\phi(F) = (1,1,1,-1)$ olmak üzere 2.mertebeden Silvester matrisi

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısıyla \hat{F} 'nın değerleri olan

$$\hat{F} = (1,1,1,-1) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = (2,2,2,-2)$$

olarak elde edilir.

4.17. Teorem

$f \in B_n$ ve $F = (-1)^f$ olsun. $h_{x,y} = F(x+y)$ iken her $x, y \in (Z_2)^n$ için matris $H_f = (h_{x,y})$ olsun. Burada f ' in bent fonksiyon olabilmesi için gerek ve yeter koşul H_f 'in HM olmasıdır [20].

4.19. Örnek

$n=2$ ve $x_1, x_2 \in Z_2$ iken $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ olsun. $\phi(f) = (0,0,0,1)$ ve $\phi(F) = (1,1,1,-1)$ dir. Matris H_f 'in 4.mertebeden HM olduğu kolayca görülür.

$$H_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Aşağıdaki teorem, kesin fark setleri ve bent fonksiyonları arasındaki denkliği ispatlar.

4.18. Teorem (Dillon)

$f : (Z_2)^n \rightarrow Z_2$ bent fonksiyonunun mevcut olması için gerek ve yeter koşul $(Z_2)^n$ 'de $(2^n, 2^{n-1} \mp 2^{(n-2)/2}, 2^{n-2} \mp 2^{(n-2)/2})$ – Fark seti mevcut olmasıdır [20].

Bu simetrik $(2^n, 2^{n-1} \mp 2^{(n-2)/2}, 2^{n-2} \mp 2^{(n-2)/2})$ – BIBD ($u = 2^{n-2}$ Teorem 4.14.'de uygulayarak) geçişli otomorfizm grupları olarak $(Z_2)^n$ 'e sahiptir, BIBD'in isabet matrisi her “-1” hücresi “0” ile yer değiştirilerek H_f 'ten yapılandırılır.

Tersine; fark seti mevcut olsun. Bu fark setinden, geçişli otomorfizm grupları olarak $(Z_2)^n$ 'e sahip olan simetrik $(2^n, 2^{n-1} \mp 2^{(n-2)/2}, 2^{n-2} \mp 2^{(n-2)/2})$ – BIBD’i kurulabilir. O zaman, bu BIBD’in isabet matrisinde her “0” hücrelerini “-1” ile yer değiştirerek geçişli otomorfizm grubu $(Z_2)^n$ 'e sahip olan 2^n . mertebeden düzenli HM’i bulunur. HM’in bu otomorfizm gruplarına sahip olması, her $u, x, y \in (Z_2)^n$ için $h_{u+x, u+y} = h_{x,y}$ anlamındadır.

Fonksiyon $f \in B_n$ ’i aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & h_{x, (0, \dots, 0)} = 1 \\ 1 & h_{x, (0, \dots, 0)} = -1 \end{cases}$$

O zaman, her $x, y \in (Z_2)^n$ için

$$h_{x,y} = h_{x+y, (0, \dots, 0)} = (-1)^{f(x+y)}$$

elde ederiz. Böylece Teorem 4.17., f ’in bent fonksiyon olduğunu gösterir.

4.5. Sonuç

$f \in B_n$ bent fonksiyon olsun. $i = 0$ yada 1 ve

$$D_i = \{x \in (Z_2)^n : f(x) = i\}$$

tanımlansın. Bu takdirde D_i , $(Z_2)^n$ ’de $(2^n, 2^{n-1} \mp 2^{(n-2)/2}, 2^{n-2} \mp 2^{(n-2)/2})$ – Fark setidir [20].

Tersine; $D \subseteq (Z_2)^n (2^n, 2^{n-1} \mp 2^{(n-2)/2}, 2^{n-2} \mp 2^{(n-2)/2})$ – Fark seti olabilmesi için gerek ve yeter koşul $x \in D$ ise $f(x) = 0$ ile $f \in B_n$ olmasıdır. O zaman, f bent fonksiyondur.

4.20. Örnek

$n=4$ ve $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4 \pmod{2}$ olsun. O zaman, $\phi(f)$ ‘in koordinatları lexicographic mertebede olduğunda

$$\phi(f) = (0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,1,1,0)$$

ve

$$\phi(F) = (1,1,1,-1,1,1,1,-1,1,1,1,-1,-1,-1,-1,1)$$

şeklinde elde edilir.

$f(x) = 1$ iken x değerlerini kaydederek fonksiyon f ’ten fark seti yapılandırırız.

$$D = \{(0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,0,1,1), (1,1,0,0), (1,1,0,1), (1,1,1,0)\}$$

setini buluruz. $D, ((Z_2)^4, +)$ grubunda $(16,6,2)$ -Fark setidir.

5. PROJektif GEOMETRİLER ve DÜZLEMLER

5.1. Tanım

P noktaların, B ise doğruların bir kümesi olsun. n, P kümesine ait bir nokta, b 'de B kümesine ait bir doğru olmak üzere (n, b) sıralı ikilisi dikkate alınsın. $* \subset P \times B$ alt kümesine “*üzerinde bulundurma bağlantısı*” denir. $(n, b) \in *$ ise bu $n * b$ ile gösterilir. $n * b$ ifadesi, “ n noktası b doğrusu üzerindedir” anlamındadır [35].

5.2. Tanım

$n_i \in P, i = 1, 2, 3, \dots$ için $n_i * b$ olacak şekilde bir $b \in B$ doğrusu varsa, bunlara “*doğrudaş noktalar*” denir [35].

5.3. Tanım

$b_i \in B, i = 1, 2, 3, \dots$ için $n * b_i$ olacak şekilde bir $n \in P$ noktası varsa, bunlara “*noktadaş doğrular*” denir [35].

Bu kısımda hesaplamalar mod p 'ye göre yapılacaktır. p bir asal sayıdır. Bu durumda mod p kalanları bir sonlu cisim oluştururlar. Her p asal sayısı ve her n pozitif tamsayısı için $GF(p^n)$ Galois Cismi mevcuttur. Projektif geometri kavramında noktalar ve doğrular $GF(p^n)$ kullanılarak tanımlanacaktır.

$GF(p^n)$ 'in hepsi birden sıfır olmayan $m + 1$ elemanlı sıralı kümesi m boyutlu sonlu projektif geometride bir noktadır.

$(a_1, a_2, \dots, a_{m+1}), (a'_1, a'_2, \dots, a'_{m+1})$ iki küme olsun.

$$a_i = \lambda a'_i, i = 1, 2, \dots, m + 1, \lambda \neq 0, \lambda \in GF(p^n) \quad (5.1)$$

yani,

$(a_1, a_2, \dots, a_{m+1}) = \lambda(a'_1, a'_2, \dots, a'_{m+1})$ ise $(a_1, a_2, \dots, a_{m+1})$ noktası ve bununla orantılı tüm noktalar aynı noktayı gösterir.

$P_1 = (a_1, a_2, \dots, a_{m+1})$ ve $P_2 = (a'_1, a'_2, \dots, a'_{m+1})$ farklı iki nokta olsun.

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a'_1, \lambda_1 a_2 + \lambda_2 a'_2, \dots, \lambda_1 a_{m+1} + \lambda_2 a'_{m+1} \quad (5.2)$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in GF(p^n)$, en az bir λ sıfırdan farklı Eşitlik (5.2) ile verilen ifade doğru tanımı olarak alınır.

Bu tarzda elde edilen noktalar ve doğrular sistemine $GF(p^n)$ 'nin "*m – boyutlu projektif geometrisi*" denir ve $PG_m(p^n)$ ile gösterilir.

$GF(p^n)$ 'nin $(m + 1)$ elemanlı sıralı kümelerinin sayısı $p^{n(m+1)}$ 'dir. $(0,0,\dots,0)$ kümesi çıkarıldığında $(p^{n(m+1)} - 1)$ sıralı kümenin elemanlarından en az biri sıfırdan farklıdır. $GF(p^n)$ 'in eleman sayısı sonlu ve bu sayı p^n olduğundan Eşitlik (5.1) nedeniyle $p^n - 1$ tane $(m + 1)$ elemanlı sıralı kümenin aynı bir noktayı göstereceği açıktır. O halde $PG_m(p^n)$ 'deki farklı noktaların sayısı,

$$\frac{p^{n(m+1)} - 1}{p^n - 1} = 1 + p^n + p^{2n} + \dots + p^{mn} \quad (5.3)$$

bulunur.

$PG_m(p^n)$ 'nin k – boyutlu alt vektör uzayı $PG_k(p^n)$ olsun. Bu alt uzay

P_1, P_2, \dots, P_{k+1} lineer bağımsız nokta ile tanımlıdır.

$PG_k(p^n)$ 'deki noktaların sayısı ise

$$1 + p^n + p^{2n} + \dots + p^{kn} \quad (5.4)$$

ile verilir.

$PG_k(p^n)$ alt uzaylarının her biri $(k+1)$ bağımsız nokta ile tanımlanır.

İlk nokta P_1 ise P_1 noktası $(1 + p^n + p^{2n} + \dots + p^{mn})$, P_2 noktası $(p^n + p^{2n} + \dots + p^{mn})$, P_3 noktası $(p^{2n} + \dots + p^{mn})$, ..., P_1 noktası $(p^{1n} + \dots + p^{mn})$, ..., P_{k+1} noktası $(p^{kn} + \dots + p^{mn})$ yolla seçilir.

O halde $PG_m(p^n)$ 'deki $(k+1)$ bağımsız noktanın farklı sıralı kümelerinin sayısı,

$$(1 + p^n + p^{2n} + \dots + p^{mn})(p^n + \dots + p^{mn}) \dots (p^{kn} + \dots + p^{mn}) \quad (5.5)$$

ile verilir.

$PG_k(p^n)$ 'deki $(k+1)$ bağımsız noktanın sıralı kümelerinin sayısı ise,

$$(1 + p^n + p^{2n} + \dots + p^{kn})(p^n + \dots + p^{kn}) \dots (p^{(k-1)n} + p^{kn})(p^{kn}) \quad (5.6)$$

ile verilir.

Eşitsizlik (5.5) ve (5.6) kullanılarak $PG_m(p^n)$ 'deki $PG_k(p^n)$ alt uzaylarının sayısı bulunur. Bunun değeri aşağıdaki biçimde verilir.

$$\frac{(1 + p^n + \dots + p^{mn}) \dots (p^{kn} + \dots + p^{mn})}{(1 + p^n + \dots + p^{kn}) \dots (p^{(k-1)n} + p^{kn})(p^{kn})} \quad (5.7)$$

Aynı düşünce tarzıyla $PG_k(p^n)$ alt uzayını içine alan $PG_s(p^n)$ alt uzaylarından söz edilir. $PG_s(p^n)$ alt uzayının da $(s+1)$ bağımsız nokta ile tanımlanacağı açıktır.

$PG_s(p^n)$ 'nin oluşturulmasında $PG_k(p^n)$ 'de bulunmayan bir nokta seçilerek işlemlere başlanır. Bu nokta P_{k+2} olsun. P_{k+2} noktası $(p^{(k+1)n} + \dots + p^{mn})$ noktanın dışında seçilir. P_{k+3} noktası $(p^{(k+2)n} + \dots + p^{mn})$ noktanın dışında seçilir. Yani $P_{k+3} \notin PG_{k+1}(p^n)$ 'dir. Bu şekilde nokta seçimine devam edildiğinde $PG_s(p^n)$ 'ye ulaşılır. Böylece $s > k$ olmak üzere, $PG_k(p^n)$ 'yi bulunduran $PG_s(p^n)$ alt uzaylarının $PG_m(p^n)$ 'deki sayısı aşağıdaki biçimde bulunur.

$$\frac{(p^{(k+1)n} + \dots + p^{mn}) \dots (p^{sn} + \dots + p^{mn})}{(p^{(k+1)n} + \dots + p^{sn}) \dots (p^{(s-1)n} + p^{sn})(p^{sn})} \quad (5.8)$$

Eşitsizlik (5.8) $k = 0,1$ için irdelenerek

1) $k = 0$ için Eşitsizlik (5.8)'den

$$\frac{(p^n + \dots + p^{mn}) \dots (p^{sn} + \dots + p^{mn})}{(p^n + \dots + p^{sn}) \dots (p^{(s-1)n} + p^{sn})(p^{sn})}, \quad m \geq s > 0 \quad (5.9)$$

bulunur. $k = 0$ için $PG_0(p^n)$ göz önüne alınır. Bu 0 – boyutlu analitik geometridir ve burada noktalar söz konusudur. Her bir a_i noktası $GF(p^n)$ 'nin elemanıdır. Eşitsizlik (5.9) ifadesi r ile tanımlanıp noktaların $PG_s(p^n)$ 'de görünme sayısı olarak alınır.

2) $k = 1$ için Eşitsizlik (5.8)'den

$$\frac{(p^{2n} + \dots + p^{mn}) \dots (p^{sn} + \dots + p^{mn})}{(p^{2n} + \dots + p^{sn}) \dots (p^{(s-1)n} + p^{sn})(p^{sn})}, \quad m \geq s > 1 \quad (5.10)$$

bulunur. $k = 1$ için $PG_1(p^n)$ göz önüne alınır. 1 – boyutlu analitik geometri bir doğrudur. $PG_1(p^n)$ 'nin her bir noktası ikililerden oluşur. Eşitsizlik (5.10) ifadesi λ ile tanımlanır ve her nokta çifti λ farklı $PG_s(p^n)$ 'de bulunur.

Verilen bu tanımlamalardan sonra, bloklar ile $PG_s(p^n)$ ve değişkenler ile noktalar eşdeğer kabul edilecektir.

5.1. Projektif Geometri

q asal ya da asalın kuvveti olsun. $V_n, GF(q)$ üzerinde n boyutlu vektör uzayını tanımlasın. Bunun $i + 1$ boyutlu alt uzayına i -flat denir. a ve b iki flat ise bunların ilişkili olabilmesi için $a \subset b$ yada $b \subset a$ olmalıdır. Flatlar arasındaki ilişkiler q mertebeli n boyutlu projektif geometri $PG_n(q)$ ile verilir. 0-flat noktalar, 1-flat doğrular, 2-flat düzlemler ve $(n - 1)$ -flat ise n -boyutlu hiperdüzlem olarak tanımlanır. İki alt uzayın eşit olması için gerek ve yeter koşul, aynı noktaları ihtiva etmeleridir.

Herhangi bir sabit i için $(1 \leq i \leq n - 1)$ noktalar ve i -flat bir 2-tasarım tanımlar.

Özellikle noktalar ve doğrular $2 - \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, q + 1, 1 \right)$ Steiner sistemidir.

Noktalar ve hiperdüzlemler, bir simetrik $2 - \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, \frac{q^n - 1}{q - 1}, \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \right)$ tasarım gösterir. Bazen $PG_n(q)$, “nokta hiperdüzlem tasarımı” olarak da tanımlanır.

Bu iki durumun kesişimi $PG_2(q)$ da nokta ve doğruların tasarımıdır, yani $2 - (q^2 + q + 1, q + 1, 1)$ tasarımı ve q mertebeli “projektif düzlem”dir.

Projektif geometrinin nokta hiperdüzlem tasarımları 1960 yılında Dembowski – Wagner ile tanınmıştır.

5.1. Teorem

$PG_n(q)$ daki i -flat' ların sayısı şöyledir:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ i+1 \end{bmatrix} = \frac{(q^{n+1}-1)(q^{n+1}-q)\dots(q^{n+1}-q^i)}{(q^{i+1}-1)(q^{i+1}-q)\dots(q^{i+1}-q^i)}$$

Bu durumda nokta ve n boyutlu hiperdüzlemlerin sayısı $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ kadardır [35].

5.2. Teorem

$q > 1, n > 1$ olmak üzere,

$2 - \left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \frac{q^n-1}{q-1}, \frac{q^{n-1}-1}{q-1} \right)$ parametrelerine sahip $2 - (v, k, \lambda)$ tasarımı vardır [35].

5.2. Projektif Düzlem

$(3,2,1)$ -BIBD'in mevcut olduğu bilinir. Fakat bu BIBD 1.mertebeden projektif düzlem olduğu kabul edilmez, $1(n^2 + n) = (n+1)n$.

Projektif düzlemlerin simetrik BIBD olduğu gösterilebilir. Her nokta $(n+1)$ blokta gözüktür ve blokların her çifti 1 noktada kesişir.

Toplam nokta ve doğru sayısı $n^2 + n + 1$ dir. Her doğru üzerinde $n+1$ nokta vardır. Her noktadan $n+1$ doğru geçer. Farklı iki nokta tek bir doğru ile birleşir. Farklı iki doğru tek bir noktada kesişir. Üçü aynı doğru üzerinde olmayan dört nokta vardır.

q asal kuvvet ise q .mertebeden projektif düzlem her zaman mevcuttur. F_q q .mertebeden sonlu cisim olsun ve V, F_q üzerinde 3-boyutlu vektör uzayını gösterebilirsin.

V_1, V 'nin bütün 1-boyutlu alt uzaylarından oluşsun, V_2, V 'nin bütün 2-boyutlu alt uzaylarından oluşsun. Her $B \in V_2$ için $A_B = \{C \in V_1 : C \subseteq B\}$ kümesi blok tanımlar. Ayrıca, $A = \{A_B : B \in V_2\}$ alınsın.

(V_1, A) 'nin q .mertebeden projektif düzlem olduğu gösterilebilir.

Bütün $C \in V_1$ için $|C| = q$ dir ve $000 \in C$ gözlemlenir. $C \setminus \{000\}$ setleri $V \setminus \{000\}$ parçalarından oluşur. Burada $|V_1| = \frac{q^3 - 1}{q - 1} = q^2 + q + 1$ dir.

$B \in V_2$ olsun. $|B| = q^2$ olduğu açıktır. Burada;

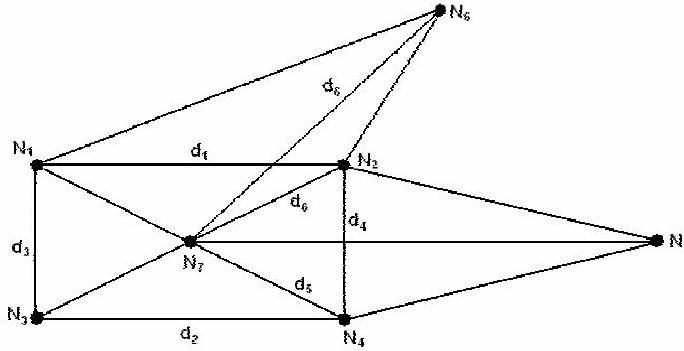
$$|A_B| = \frac{q^2 - 1}{q - 1} = q + 1 \text{ dir.}$$

Son olarak ; $C, D \in V_1$ ve $C \neq D$ olsun. 1-boyutlu C ve D alt uzaylarını içeren 2-boyutlu B alt uzayının tek olduğu aşıkardır. Bu alt uzay C ve D noktalarını içeren tek blok A_B 'yi belirler.

5.3. Teorem

$q \geq 2$ olan her asal kuvvet için simetrik $(q^2 + q + 1, q + 1, 1)$ – BIBD mevcuttur [20].

Örnek 3.1’de verilen $(7,3,1)$ -BIBD 2.mertebeden projektif düzlem 7 noktalı ve 7 doğrulu en küçük projektif düzlem (fano düzlemi) dir. $GF(2)$ üzerine kurulan $PG_2(2)$ ile tanımlanmaktadır.



Şekil 5.1. $(7,3,1)$ BIBD’in $PG_2(2)$ de bir gösterimi

Bu aynı zamanda bir Steiner sistemdir ($t \geq 2$, $t-(v,k,1)$). Aynı zamanda bir Hadamard tasarımıdır ($t-(4t-1, 2t-1, t-1)$).

n mertebeli afin düzlem $2-(n^2, n, 1)$, n mertebeli projektif düzlem $2-(n^2+n+1, n+1, 1)$ birer Steiner sistem örnekleridir.

Asal olmayan kuvvetten mertebeye sahip projektif düzlemin varolma sorusu Tasarım Teorisinde önemli sorulardan biridir.

5.4. Tanım

$n \geq 2$ olsun, $(n^2, n^2+n, n+1, n, 1)$ -BIBD n .mertebeden “*afin düzlem*” olarak adlandırılır [20].

Örnek 3.4’te verilen $(9,3,1)$ -BIBD afin düzlem için bir örnektir.

n.mertebeden projektif düzlemin artık tasarımı n.mertebeden afin düzlemdir.

5.4. Teorem

m – boyutlu projektif geometri $PG_m(p^n)$ ’de bulunan s – boyutlu $PG_s(p^n)$,
($m \geq s$) alt uzayı parametreleri aşağıdaki gibi olan bir BIBD’dir [37].

$$b = \frac{(1 + p^n + \dots + p^{mn})(p^n + \dots + p^{mn}) \dots (p^{sn} + \dots + p^{mn})}{(1 + p^n + \dots + p^{sn})(p^n + \dots + p^{sn}) \dots (p^{(s-1)n} + p^{sn})(p^{sn})} = b(s, m, p^n)$$

$$v = (1 + p^n + \dots + p^{mn}) = v(m, p^n)$$

$$k = (1 + p^n + \dots + p^{sn}) = k(s, p^n) \quad (5.11)$$

$$r = \frac{(p^n + \dots + p^{mn}) \dots (p^{sn} + \dots + p^{mn})}{(p^n + \dots + p^{sn}) \dots (p^{(s-1)n} + p^{sn})(p^{sn})} = r(s, m, p^n)$$

$$\lambda = \begin{cases} 1 & s = 1 \text{ ise} \\ \frac{(p^{2n} + \dots + p^{mn}) \dots (p^{sn} + \dots + p^{mn})}{(p^{2n} + \dots + p^{sn}) \dots (p^{(s-1)n} + p^{sn})(p^{sn})} & s > 1 \text{ ise} \end{cases} = \lambda(s, m, p^n)$$

Eşitlik (5.11) ile verilen b, v, k, r, λ parametreleri sırasıyla; blok sayısı, nokta sayısı, blok genişliği, tekrar sayısı, her bir nokta çiftinin birlikte görünme sayısı olarak alınır.

BIBD’de sonlu öklit geometriler de kullanılır. Bu geometri $PG_m(p^n)$ ’den elde edilir ve $EG_m(p^n)$ ile gösterilir. $EG_m(p^n)$, (a_1, a_2, \dots, a_m) noktalarını bulundurur. a_i ’lerin her biri $GF(p^n)$ Galois cisminin bir elemanıdır. Bu geometri nokta kombinasyonlarının bir ifadesi biçimindedir.

$PG_{m-1}(p^n)$ 'deki noktalar $PG_m(p^n)$ 'den çıkarılırsa geriye noktaların ve doğruların diğer bir sistemi kalır. Bu sistemin noktaları ve doğruları sonlu boyutlu analitik m – boyutlu öklit geometri $EG_m(p^n)$ 'nin elemanlarıdır. $EG_m(p^n)$ 'nin noktalarının sayısı,

$$v(m, p^n) - v(m-1, p^n) = p^{mn} \quad (5.12)$$

dir.

$PG_m(p^n)$ 'de olduğu gibi aynı yolla $EG_m(p^n)$ 'nin s ve k ($s > k$) boyutlu alt uzayları düşünülür. $EG_s(p^n)$ alt uzayında bulunan $EG_k(p^n)$ alt uzaylarının sayısının hesabı, $PG_s(p^n)$ 'de bulunan $PG_k(p^n)$ alt uzaylarının sayısının hesaplanmasındaki düşünce tarzıyla aynıdır. $EG_s(p^n)$ bloklar olarak göz önüne alınır. Bunların $EG_m(p^n)$ 'deki sayısı,

$$b(s, m, p^n) - b(s, m-1, p^n) \quad (5.13)$$

ifadesi ile tanımlanır.

Aşağıdaki teorem $EG_m(p^n)$ yardımıyla BIBD parametrelerinin nasıl tanımlandığını verir.

5.5. Teorem

$EG_m(p^n)$ 'de bulunan $EG_s(p^n)$ parametreleri aşağıdaki gibi olan bir BIBD formundadır

$$b = b(s, m, p^n) - b(s, m-1, p^n)$$

$$v = p^{mn}$$

$$k = p^{sn} \quad (5.14)$$

$$r = r(s, m, p^n)$$

$$\lambda = \lambda(s, m, p^n) [37].$$

Yukarıda verilen tanımlar ve teoremler m 'nin alacağı değerlere göre incelenecektir.

İlk önce $m = 2$ durumu göz önüne alınsın. Bu durumda $a_1, a_2, a_3 \in GF(p^n)$ ve a_1, a_2, a_3 hepsi aynı anda sıfır olmamak koşuluyla (a_1, a_2, a_3) sıralı üçlüsü bir noktayı gösterir. Noktaların kümesi,

$$P = \left\{ \begin{array}{l} (a_1, a_2, a_3) : a_1, a_2, a_3 \in GF(p^n), (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0), \\ (a_1, a_2, a_3) \equiv \lambda(a_1, a_2, a_3), \lambda \in GF(p^n), \lambda \neq 0 \end{array} \right\} \quad (5.15)$$

biçimindedir.

5.5. Tanım

S bir projektif düzleme ilişkin herhangi bir ifade olsun. S 'de “nokta” sözcüğü yerine “doğru” ve “doğru” sözcüğü yerine “nokta” koyarak bulunan yeni ifadeye “ S 'nin dual ifadesi” denir.

P 'ye dual olarak doğrular kümesi,

$$B = \left\{ \begin{array}{l} [b_1, b_2, b_3] : b_1, b_2, b_3 \in GF(p^n), [b_1, b_2, b_3] \neq [0, 0, 0], \\ (b_1, b_2, b_3) \equiv \lambda(b_1, b_2, b_3), \lambda \neq 0, \lambda \in GF(p^n) \end{array} \right\} \quad (5.16)$$

biçimindedir.

Burada “[]” köşeli parantez bir doğru tanımlar.

Eşitlik (5.16)'dan $[b_1, b_2, b_3]$ üçlüsü ve bu üçlüye orantılı olan bütün üçlülerin aynı bir doğru olarak tanımlanacağı açıktır.

5.1. Örnek

3.mertebeden projektif düzlem olan $(13,4,1)$ -BIBD göz önüne alınsın. Bu sonlu cisim $GF(3)$ 'de kurulur. Blok sayısı ve değişken sayısı 13, blok genişliği ve her bir değişkenin tekrar sayısı 4, her bir nokta çiftinin birlikte görülme sayısı $\lambda = 1$ olan simetrik BIBD dir. $PG_2(3)$ 'deki noktalar aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} P_1 &= 1,0,0 & P_2 &= 0,1,0 & P_3 &= 0,0,1 & P_4 &= 1,1,0 \\ P_5 &= 1,0,1 & P_6 &= 0,1,1 & P_7 &= 1,1,1 & P_8 &= 1,-1,0 \\ P_9 &= 1,0,-1 & P_{10} &= -1,1,1 & P_{11} &= 1,-1,1 & P_{12} &= 1,1,-1 & P_{13} &= 0,-1,1 \end{aligned}$$

noktanın doğru üzerinde bulunma bağıntısına göre doğrular ve üzerinde taşıdıkları noktalar şöyledir:

$$[0,0,1] : (1,1,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,-1,0)$$

$$[0,1,0] : (1,0,1), (1,0,0), (0,0,1), (1,0,-1)$$

$$[0,-1,1] : (1,1,1), (0,1,1), (1,0,0), (-1,1,1)$$

$$[0,1,1] : (1,0,0), (0,-1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)$$

$$[1,0,0] : (0,1,0), (0,1,1), (0,0,1), (0,-1,1)$$

$$[1,0,-1] : (1,0,1), (1,1,1), (1,-1,1), (0,1,0)$$

$$[1,0,1] : (0,1,0), (1,0,-1), (-1,1,1), (1,1,-1)$$

$[1,-1,0] : (1,1,1), (0,0,1), (1,1,0), (1,1,-1)$

$[1,1,0] : (0,0,1), (1,-1,1), (-1,1,1), (1,-1,0)$

$[-1,1,1] : (1,1,0), (1,0,1), (-1,1,1), (0,-1,1)$

$[1,-1,1] : (1,1,0), (0,1,1), (1,0,-1), (1,-1,1)$

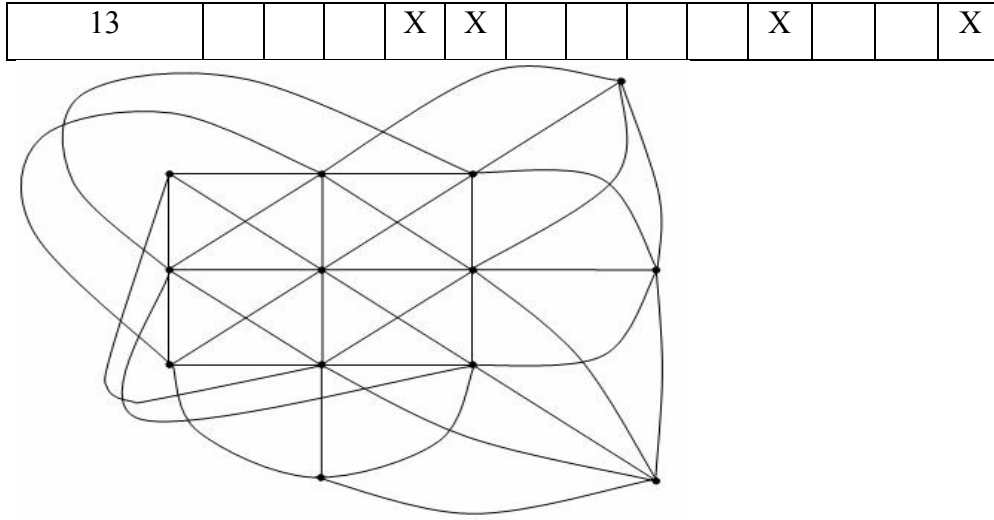
$[1,1,-1] : (0,1,1), (1,0,-1), (1,-1,0), (1,1,-1)$

$[1,1,1] : (1,1,1), (1,-1,0), (1,0,-1), (0,-1,1)$

Çizelge 5.1. ile $b = v = 13$, $k = r = 4$, $\lambda = 1$ parametrelili BIBD'in birliktelik yapısı verilmiştir.

Çizelge 5.1. (13,4,1)-BIBD

İşlemler	Bloklar												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	X	X	X	X									
2	X				X	X	X						
3		X			X			X	X				
4	X							X		X	X		
5		X				X				X		X	
6			X		X						X	X	
7			X			X		X					X
8	X								X			X	X
9		X					X				X		X
10			X				X		X	X			
11				X		X			X		X		
12				X			X	X				X	



Şekil 5.2. (13,4,1) BIBD'in $PG_2(3)$ 'de bir gösterimi

5.2. Örnek

Örnek 5.1.'de verilen 3.mertebeden projektif düzlem $PG_2(3)$ 'den bir doğru ve üzerindeki noktaların çıkarıldığı durumu göz önüne alınsın. Çıkarılan doğru $[0,0,1]$ olsun. Bu durumda elde edilen noktaların ve doğruların sistemi $EG_2(3)$ dür. $EG_2(3)$ için parametreler $b = 12$, $v = 9$, $k = 3$, $r = 4$ ve $\lambda = 1$ olarak (9,3,1)-BIBD bulunur. Bu artık tasarım 3.mertebe afın düzlemdir. Ancak $EG_2(3)$ 'de BIBD'in simetrikliğinin bozulduğu görülür. $EG_2(3)$ 'deki doğrular ve üzerindeki noktalar şöyledir:

$$[0,1,0] : (1,0,1), (0,0,1), (1,0,-1)$$

$$[0,-1,1] : (1,1,1), (0,1,1), (-1,1,1)$$

$$[0,1,1] : (0,-1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)$$

$$[1,0,0] : (0,1,1), (0,0,1), (0,-1,1)$$

$[1,0,-1] : (1,0,1), (1,1,1), (1,-1,1)$

$[1,0,1] : (1,0,-1), (-1,1,1), (1,1,-1)$

$[1,-1,0] : (1,1,1), (0,0,1), (1,1,-1)$

$[1,1,0] : (0,0,1), (1,-1,1), (-1,1,1)$

$[-1,1,1] : (1,0,1), (-1,1,1), (0,-1,1)$

$[1,-1,1] : (0,1,1), (1,0,-1), (1,-1,1)$

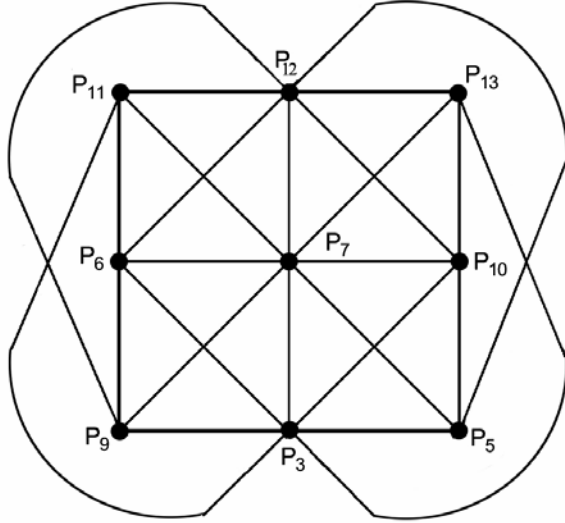
$[1,1,-1] : (0,1,1), (1,0,1), (1,1,-1)$

$[1,1,1] : (1,1,1), (1,0,-1), (0,-1,1)$

Çizelge 5.2. $EG_2(3)$ 'de tanımlanan BIBD

İşlemler	Bloklar											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	X			X			X	X				
5	X				X				X		X	
6		X		X						X	X	
7		X			X		X					X
9	X					X				X		X
10		X				X		X	X			
11			X		X	X		X		X		
12			X	X			X				X	
13			X						X			X

$EG_2(3)$ 'ün bir afin düzlem olduğunu söylemek mümkündür. 9 noktalı bir afin düzlem Şekil 5.3.'de gösterildiği biçimde temsil edilebilir.



Şekil 5.3. (9,3,1) BIBD'in $EG_2(3)$ 'de bir gösterimi

5.6. Tanım

F cismi yardımıyla tanımlanan projektif düzlemlere “*cisim düzlemleri*” denir.

Burada F cismi olarak $GF(p^n)$ Galois cismi alınacaktır. $GF(p^n)$ 'nin elemanlarıyla belirtilen düzlemde,

$$(i) \quad \frac{((p^n)^{2+1} - 1)}{(p^n - 1)} = 1 + p^n + p^{2n} \quad (5.17)$$

nokta vardır.

(ii) Her doğru üzerinde,

$$k = 1 + p^n \quad (5.18)$$

nokta vardır.

(iii) Bütün doğruların sayısı,

$$b = 1 + p^n + p^{2n} \quad (5.19)$$

dir.

(iv) Her noktasından $1 + p^n$ doğru geçer. Yani,

$$r = 1 + p^n \quad (5.20)$$

dir.

5.7. Tanım

Yukarıda verilen Eşitlik (5.17), (5.18), (5.19) ve (5.20)'nin hepsini birden sağlayan p^n sayısına “*projektif düzlemin mertebesi*” denir.

5.8. Tanım

$(P, B, *)$ sisteminin bir projektif düzlem olması için P ve B ayrık kümelerinin eleman sayısının aynı bir Ω sayısı olması ve

$$\Omega = 1 + p^n + p^{2n} \quad (5.21)$$

şeklinde yazılabilmesi gerekir.

Tanım 5.8.'den dolayı projektif düzlemlerin daima simetrik BIBD tanımlamadığını söylemek mümkündür.

Her n pozitif tamsayısı ve p asal sayısı için mertebesi p^n olan bir projektif düzlem var olmakla birlikte cisimler yardımıyla elde edilemeyen birçok projektif düzlem vardır.

Teorem 3.8. sonlu mertebeden bazı projektif düzlemlerin mevcut olmadığını gösterir. Eğer $p^n \equiv 1 \pmod{4}$ ya da $p^n \equiv 2 \pmod{4}$ ise ve p^n negatif olmayan iki tamsayının kareleri toplamı olarak yazılamıyorsa, mertebesi p^n olan bir projektif düzlem yoktur [38].

Projektif düzlemler 2-boyutlu projektif geometriler olarak kabul edilir.

5.6. Teorem

$q \geq 2$ her asal kuvvet için , $(q^2, q, 1)$ – BIBD mevcuttur [20] .

5.7. Teorem

$V = (F_q)^{d+1}$ olsun. V_1 , V 'nin 1-boyutlu alt uzaylarının tamamını ve V_d , V 'nin d-boyutlu alt uzaylarının tamamını içersin. Her d-boyutlu alt uzay blok oluşturur. Teorem 5.2., Teorem 5.3.'ün $d = 2$ için özel durumudur.

$$\left(\frac{q^{2+1} - 1}{q - 1}, \frac{q^2 - 1}{q - 1}, \frac{q^{2-1} - 1}{q - 1} \right) - \Rightarrow (q^2 + q + 1, q + 1, 1) -$$

Teorem 5.2.'de verilen BIBD'in noktaları ve blokları d-boyutlu projektif geometri $PG_d(q)$ 'nun noktalarına ve hiperdüzlemlerine uyar.

Teorem 5.2.'de verilen simetrik BIBD'lerden artık BIBD'leri elde edilebilir. Bu BIBD'leri aşağıdaki sonuçta verilen parametrelere sahiptir.

5.1. Sonuç

$q \geq 2$ asal kuvvet ve $d \geq 2$ tam sayı olsun. O zaman $(q^d, q^{d-1}, \frac{q^{d-1}-1}{q-1})$ -BIBD mevcuttur [20].

Ayrıca $d > 2$ ise $(\frac{q^d-1}{q-1}, \frac{q^{d-1}-1}{q-1}, \frac{q(q^{d-2}-1)}{q-1})$ -BIBD mevcuttur.

Sonuçtaki ikinci BIBD $PG_{d-1}(q)$ 'nin q örnekleri gibi aynı parametrelere sahiptir.

Simetrik (13,4,1)-BIBD'in artık tasarımı (9,3,1)-BIBD dir.

6. YENİDEN ÇÖZÜLEBİLİR DENGELİ TAMAMLANMAMIŞ BLOK TASARIMI

6.1. Tanım

(X, A) , bir (v, k, λ) – BIBD olsun. (X, A) ’da bir paralel sınıf A ’daki ayrık blokların alt setidir. A ’nın r paralel sınıflarına parçalanması “yeniden çözümlenme” olarak adlandırılır. Eğer A ’nın en azından bir yeniden çözümlenmesi varsa (X, A) ’nın yeniden çözülebilir olduğunu söyleyebiliriz.

Bir paralel sınıfın v/k blok içerdiği bilinir. Ayrıca BIBD yalnızca $v \equiv 0 \pmod k$ ise bir paralel sınıfa sahip olabilir.

Bütün çift v ’ler yeniden çözülebilir (v, k, λ) – BIBD’lerini oluşturur (not: (v, k, λ) – BIBD, v setinin bütün 2’li alt setlerini içerir).

6.1. Teorem

Bir çözülebilir (v, k, λ) – BIBD var olması için gerek ve yeter koşul, v çift sayı ve $v \geq 4$ olmasıdır [14].

6.1. Örnek

Yeniden çözülebilir $(6,2,1)$ -BIBD’in paralel sınıfları aşağıdaki gibidir.

$$\Pi_0 = \{\{\infty,0\}, \{1,4\}, \{2,3\}\}$$

$$\Pi_1 = \{\{\infty,1\}, \{2,0\}, \{3,4\}\}$$

$$\Pi_2 = \{\{\infty,2\}, \{3,1\}, \{4,0\}\}$$

$$\Pi_3 = \{\{\infty,3\}, \{4,2\}, \{0,1\}\}$$

$$\Pi_4 = \{\{\infty,4\}, \{0,3\}, \{1,2\}\}$$

Blokların paralel olması için gerek ve yeter koşul onların, aynı alt uzayın kosetleri olmasıdır. Eğer B, B' paralel olmayan bloklar ise $B \cap B'$; bir $(m-2)$ -boyutlu alt uzayın kosetidir, q^{n-2} elemana sahiptir. Bu tasarım, F_q üzerinde m -boyutlu afin uzayıdır.

6.2. Tanım (Grup)

Boş olmayan bir H seti ile bu setteki Δ işlemciden oluşan (H, Δ) ikilisi alınsın. Aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa (H, Δ) ikilisine bir “grup” denir.

- (i) $\Delta : (x, y) \in H \times H \Rightarrow x\Delta y \in H, \forall x, y \in H$ (kapalılık aksiyomu)
- (ii) $(x\Delta y)\Delta z = x\Delta(y\Delta z) \quad \forall x, y, z \in H$ (birleşim aksiyomu)
- (iii) $x\Delta e = e\Delta x = x \quad \forall x \in H$ (birim elemanın varlığı aksiyomu)
- (iv) $x\Delta x' = x'\Delta x = e \quad x' \in H$ (ters elemanın varlığı aksiyomu)

6.3. Tanım (Alt Grup)

Bir (H, Δ) grubunda bir $H' \subset H, H' \neq \emptyset$, alt seti için (H', Δ) de bir grup ise bu gruba (H, Δ) grubunun bir “alt grup” u denir.

6.4. Tanım (Koset)

(H, Δ) bir grup ve (G, Δ) de H 'in bir alt grubu olsun. $\alpha \in H$ olmak üzere

$$\alpha \Delta G = \{ \alpha \Delta x \mid x \in G \}$$

setine G 'nin H 'daki bir “Koset” i denir.

Bu bölümde yüksek boyutlu afin geometrilere afin düzlemlerin kuruluşu genişletilecektir. q asal kuvvet olsun. $m \geq 2$ ve $X = (F_q)^m$ alınsın. $1 \leq d \leq m-1$

olsun. X 'de d -flat d boyuta sahip olan X 'in alt uzayıdır ya da alt uzayın toplanır koset'idir (not: X 'in kendisi üzerinde m boyutlu vektör uzayıdır). $1 \leq d \leq m-1$ için X 'in tüm d -flatlarının seti ve X noktalar seti, $AG_m(q)$ ile tanımlanan F_q üzerindeki m -boyutlu afin geometriyi meydana getirir. $1 \leq d \leq m-1$ için $\begin{bmatrix} m \\ d \end{bmatrix}_q$ Gauss

Katsayısı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} m \\ d \end{bmatrix}_q = \begin{cases} \frac{(q^m - 1)(q^{m-1} - 1) \cdots (q^{m-d+1} - 1)}{(q^d - 1)(q^{d-1} - 1) \cdots (q - 1)} & d \neq 0 \\ 1 & d = 0 \end{cases}$$

$AG_m(q)$ geometri çeşitli yeniden çözülebilir BIBD'leri verir.

6.2. Teorem

q asal kuvvet ve $m \geq 2$, $1 \leq d \leq m-1$ olsun. X , $AG_m(q)$ 'da noktaların setini gösterebilir ve A , $AG_m(q)$ 'da bütün d -flatların setini gösterebilir. O zaman (X, A) , parametreleri aşağıda verilen bir yeniden çözülebilir $(q^m, b, r, q^d, \lambda)$ - BIBD dir [20].

$$b = q^{m-d} \begin{bmatrix} m \\ d \end{bmatrix}_q, \quad r = \begin{bmatrix} m \\ d \end{bmatrix}_q \quad \text{ve} \quad \lambda = \begin{bmatrix} m-1 \\ d-1 \end{bmatrix}_q$$

Yukarıdaki yapı $d = 1$, $m = 2$ özel durumunda afin düzlemleri içerir. Afin düzlemde doğru $AG_m(q)$ 'da 1-flat gibi düşünülür. Teorem 6.5.'de her afin düzlemin yeniden çözülebilir olduğu gösterilecek. Fakat bu sonuç Teorem 6.2.'de verilen parametrelere sahip olan bütün tasarımlar için düşünülemez. Eğer $d \geq 1$ ise verilen formda parametrelere sahip olan yeniden çözülebilir olmayan BIBD'leri vardır. Örneğin (8,4,3)-BIBD mevcuttur fakat yeniden çözülebilir değildir.

6.5. Tanım

(1) Her doğru üzerinde n nokta vardır. (2) Her nokta $n+1$ doğru üzerindedir. (3) Noktaların toplam sayısı n^2 dir. (4) Doğruların toplam sayısı $n^2 + n$ dir.

Toplam nokta sayısı n^2 dir. Doğru sayısı $n^2 + n$ dir. Her doğru üzerinde n nokta vardır. Her noktadan $n + 1$ doğru geçer. Farklı iki noktadan tek bir doğru geçer. Farklı iki doğru en çok bir noktada kesişir.

Öklid düzlemi bir afin düzlemdir ve $(n + 1)$ paralel doğru demeti vardır.

$b = v = 4$, $r = k = 3$, $\lambda = 2$ parametreleri Bruck-Ryser Teoremine göre projektif düzlem tanımlamaz. İkili düzlem tanımlar. Çünkü, Bruck-Ryser teoremine göre $n \equiv 1(\text{mod } 4)$ ya da $n \equiv 2(\text{mod } 4)$ ve n negatif olmayan iki tam sayının kareleri toplamı olarak yazılamıyorsa mertebesi n olan bir projektif düzlem yoktur.

6.3. Teorem

Her asal q için q . mertebeden afin düzlem vardır (Örneğin $(q^2, q, 1) - \text{BIBD}$) [20].

6.2. Örnek

Teorem 6.3.'ü kullanarak 3.mertebeden afin düzlem oluşturmak mümkündür.

Noktaların seti $Z_3 \times Z_3$ olmak üzere bloklar aşağıdaki gibidir.

$$L_{0,0} = \{(0,0), (1,0), (2,0)\}$$

$$L_{0,1} = \{(0,1), (1,1), (2,1)\}$$

$$L_{0,2} = \{(0,2), (1,2), (2,2)\}$$

$$L_{1,0} = \{(0,0), (1,1), (2,2)\}$$

$$L_{1,1} = \{(0,1), (1,2), (2,0)\}$$

$$L_{1,2} = \{(0,2), (1,0), (2,1)\}$$

$$L_{2,0} = \{(0,0), (1,2), (2,1)\}$$

$$L_{2,1} = \{(0,1), (1,0), (2,2)\}$$

$$L_{2,2} = \{(0,2), (1,1), (2,0)\}$$

$$L_{\infty,0} = \{(0,0), (0,1), (0,2)\}$$

$$L_{\infty,1} = \{(1,0), (1,1), (1,2)\}$$

$$L_{\infty,2} = \{(2,0), (2,1), (2,2)\}$$

Bu noktada asalın kuvveti mertebeden afin düzlemler için iki kuruluş elde edilir. Teorem 6.3.'te verilen direkt kuruluş ve Teorem 5.3.'de verilen $PG_2(q)$ projektif düzlemin artık BIBD dikkate alınabilir. q .mertebeden afin düzlemlerin bu iki yapının izomorfik BIBD'lerini ortaya çıkardığı gösterilebilir.

İlk olarak, $PG_2(q)$ projektif düzlemin artık tasarımı gibi yapılandırılan bütün afin düzlemlerin izomorfik olduğunu göstermek zor değildir. Diğer taraftan, $PG_2(q)$ da bloklar, artık tasarımlar kullanarak oluşturulabilir. Genelliği bozmaksızın 2-boyutlu alt uzaya uygun olan A_{B_0} bloğu seçilir.

$$B_0 = \{(x_1, x_2, x_3) \in (F_q)^3 : (0,0,1) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0 \}$$

A_{B_0} bloğundaki noktalar $(F_q)^3$ 'ün aşağıdaki 1-boyutlu alt uzalarıdır.

$$\text{span}((1, i, 0)), i \in F_q \text{ ve } \text{span}((0, 1, 0))$$

A_{B_0} 'da noktalar q^2 noktalar $\text{span}((x, y, 1)), x, y \in F_q$ dur.

$(P, \partial) = (F_q \times F_q, \{L_{a,b} : a, b \in F_q\} \cup \{L_{\infty, c} : c \in F_q\})$ Teorem 6.3.'te verilen q . mertebeden afin düzlem olsun. Her $(x, y) \in P$ için $(x, y) \rightarrow \text{span}((x, y, 1))$ ile tanımlanan α bijeksiyon (P, ∂) afin düzlemin izomorfizmini ve A_{B_0} bloğundan $PG_2(q)$ nun artık BIBD'i ortaya çıkarır.

Blokların α bijeksiyon altında bloklara ayrıntılarıyla planlandığı ispat edilmelidir. $PG_2(q)$ 'da $q^2 + q$ bloklar (A_0 'dan başka) aşağıdaki 2-boyutlu alt uzaylardan elde edilir.

$$B_{a,b} = \{(x_1, x_2, x_3) \in (F_q)^3 : (a, -1, b) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0\}, \quad a, b \in F_q \text{ ve}$$

$$B_c = \{(x_1, x_2, x_3) \in (F_q)^3 : (1, 0, -c) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0\}, \quad c \in F_q$$

Bu $q^2 + q$ alt uzaylar ayrıdır ve B_0 'dan farklıdır.

$a, b \in F_q$ olsun. $PG_2(q)$ 'nun $A_{B_{a,b}}$ bloğundaki $q+1$ noktalar $\text{span}((x, ax+b, 1)), x \in F_q$ ve $\text{span}((1, a, 0))$ dir. Artık tasarım oluşturulurken, $\text{span}((1, a, 0))$ noktası $A_{B_{a,b}}$ 'dan çıkarılır. Her $x \in F_q$ için $\alpha(x, ax+b) = \text{span}((x, ax+b, 1))$ dir. Böylece $L_{a,b}$ bloğu $A_{B_{a,b}} \setminus \{\text{span}((1, a, 0))\}$ bloğa α ile planlanır.

Son olarak, $c \in F_q$ iken A_{B_c} bloğu dikkate alınmış olsun. bu blokta $q+1$ nokta $\text{span}((c, y, 1)), y \in F_q$ ve $\text{span}((0, 1, 0))$ dir. Artık tasarım yapılandırılırken, $\text{span}((0, 1, 0))$ noktası $A_{B_c} \setminus \{\text{span}((0, 1, 0))\}$ 'den çıkarılır. Her $y \in F_q$ için $\alpha(c, y) = \text{span}((c, y, 1))$ dir.

Böylece $L_{\infty,c}$ bloğu A_{B_c} bloğa α ile planlanır. İki tasarımın izomorfik olduğu gösterilmiş olur.

Afin ve projektif uzaylar, afin ve projektif düzlemin genelleşmiş yapılarını ve blok tasarımlarının daha genel ailelerini verir.

$$AG_n(q) \text{ bir affine uzay, } v = q^n, \quad k = q^d, \quad r = \begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}_q, \quad \lambda = \begin{bmatrix} n-1 \\ d-1 \end{bmatrix}_q, \quad b = q^{n-d} \begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}_q$$

parametreleri ile bir blok tasarımıdır. Burada $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q$, $GF(q)$ üzerinde n boyutlu

vektör uzayının i boyutlu alt uzaylarının sayısını gösterir. q asal yada asalın kuvveti olsun. n ve d $d \leq n$ olacak şekilde pozitif tamsayılar olsun. O zaman,

$$\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \dots (q^{n-d+1} - 1)}{(q^d - 1)(q^{d-1} - 1) \dots (q - 1)}$$

olur.

6.4. Teorem

$$PG_n(q), \quad v = \begin{bmatrix} v+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q = \frac{q^{n+1} - q}{q-1}, \quad k = \begin{bmatrix} d+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q = \frac{q^{d+1} - 1}{q-1},$$

$$r = \begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}_q, \quad \lambda = \begin{bmatrix} n-1 \\ d-1 \end{bmatrix}_q, \quad b = \begin{bmatrix} n+1 \\ d+1 \end{bmatrix}_q$$

parametreleri ile blok tasarımıdır [35].

6.6. Tanım

$3 - (m^2 + m, m + 1, 1)$ ($m \geq 2$) parametrelili Steiner 3-tasarımına “*sonlu tersinir düzlem*” denir. Bu düzlemler afin düzlemlerin genişlemeleridir.

t tasarımlarının geometrik tamamlanışı bu tasarımların bir genişlemesi olarak düşünülebilir. Bir afin düzlemde birbirine paralel bütün doğrular paralel doğru demeti oluşturur. Düzlemde her bir demet için bu demetin tüm doğrularını üzerinde bulunduran fakat afin düzlemin noktaları arasında bulunmayan yeni bir nokta göz önüne alınır. Böylece düzleme her doğrultuda yeni bir nokta katılmış olur. Buna “*ideal nokta*” denir. Bütün ideal noktaları üzerinde bulunduran doğru ideal doğrudur ve bu doğru afin düzlemin doğrularına katılır. Böylece elde edilen yeni sistem afin düzlemin bir tamamlanışıdır. Her afin düzlemin tamamlanışı bir projektif düzlemdir.

6.3. Örnek

$v = 4, b = 6, k = 2, r = 3, \lambda = 1$ parametrelili 2-(4,2,1) tasarımı göz önüne alınsın.

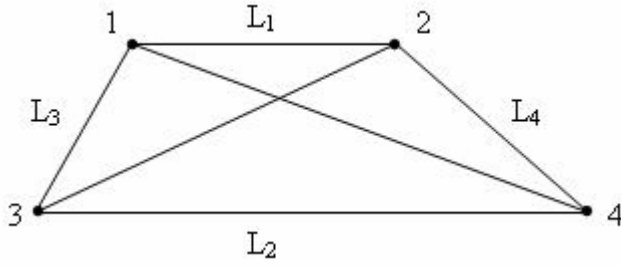
Tasarım blokları $B_1 = \{1,2\}, B_2 = \{3,4\}, B_3 = \{1,3\}, B_4 = \{2,4\}, B_5 = \{1,4\}, B_6 = \{2,3\}$

olsun. $\infty_1, \infty_2, \infty_3$ noktaları bu 2-(4,2,1) tasarımına eklensin.

1 2 ∞_1 1 3 ∞_2 1 4 ∞_3

3 4 ∞_1 2 4 ∞_2 2 3 ∞_3

$\infty_1, \infty_2, \infty_3$ ideal noktalarıdır. İdeal doğrudaki $\infty_1 \infty_2 \infty_3$ doğrusudur.



Şekil 6.1. 2-(4,2,1) 2.mertebeden bir afin düzlem

2.mertebeden bir afin düzlemin projektif düzleme tamamlanışı Şekil 5.1.'de verilmiştir.

6.1. Afin Düzlemlerin Yeniden Çözülebilirliği

Afin düzlemler, yeniden çözülebilir BIBD'lerinin ilginç örnekleridir. Her bir afin düzlemin yeniden çözülebilir olduğu gösterilebilir. Bunu kanıtlamanın temel adımları aşağıdaki yardımcı teoremler ile verilir.

6.1. Yardımcı Teorem

(P, ∂) n. mertebeden afin düzlem, $L \in \partial$, $x \in P$ ve $x \notin L$ olsun. Bu takdirde $x \in M$ ve $L \cap M = \emptyset$ ve $M \in \partial$ olan bir blok kesinlikle vardır [20].

6.2. Yardımcı Teorem

(P, ∂) n. mertebeden afin düzlem olsun. O zaman \approx ilişkisi yukarıdaki gibi tanımlanan bir denklik ilişkisidir [20].

6.3. Yardımcı Teorem

(X, ∂) n. mertebeden afin düzlem olsun. Bu takdirde \approx 'nın her bir denklik sınıfı (X, ∂) 'da paralel sınıftır [20].

6.5. Teorem

Her afin düzlem yeniden çözülebilirdir [20].

6.4. Örnek

$q = 2$ olsun. $PG_3(2)$ Çizelge 6.1.'de verilir. $x=0001$ ve $m = 5$ olsun. Gruplar ve bloklar Çizelge 6. 2.'te verilir.

Çizelge 6.1. $PG_3(2)$ 'nin noktaları ve uzayları

Noktalar:	0001 , 0010 , 0011 , 0100 , 0101 , 0110 , 0111 , 1000 , 1001 , 1010 , 1011 , 1100 , 1101 , 1110 , 1111		
Doğrular:	0001 , 0010 , 0011	0010 , 0100 , 0110	0011 , 0101 , 0110
	0001 , 0100 , 0101	0010 , 0101 , 0111	0011 , 1000 , 1011
	0001 , 0110 , 0111	0010 , 1000 , 1010	0011 , 1001 , 1010
	0001 , 1000 , 1001	0010 , 1001 , 1011	0011 , 1100 , 1111
	0001 , 1010 , 1011	0010 , 1100 , 1110	0011 , 1101 , 1110
	0001 , 1100 , 1101	0010 , 1101 , 1111	0100 , 1000 , 1100
	0001 , 1110 , 1111	0011 , 0100 , 0111	0100 , 1001 , 1101
	0100 , 1010 , 1110	0110 , 1001 , 1111	
	0100 , 1011 , 1111	0110 , 1010 , 1100	
	0101 , 1000 , 1101	0110 , 1011 , 1101	
	0101 , 1001 , 1100	0111 , 1000 , 1111	
	0101 , 1010 , 1111	0111 , 1001 , 1110	
	0101 , 1011 , 1110	0111 , 1010 , 1101	
	0110 , 1000 , 1110	0111 , 1011 , 1100	

Çizelge 6.1.(Devam) $PG_3(2)$ 'nin noktaları ve uzayları

Düzlemler:	0001 , 0010 , 0011 , 0100 , 0101 , 0110 , 0111 0001 , 0010 , 0011 , 1000 , 1001 , 1010 , 1011 0001 , 0010 , 0011 , 1100 , 1101 , 1110 , 1111 0001 , 0100 , 0101 , 1000 , 1001 , 1100 , 1101 0001 , 0100 , 0101 , 1010 , 1011 , 1110 , 1111 0001 , 0110 , 0111 , 1000 , 1001 , 1110 , 1111 0001 , 0110 , 0111 , 1010 , 1011 , 1100 , 1101 0010 , 0100 , 0110 , 1000 , 1010 , 1100 , 1110 0010 , 0100 , 0110 , 1001 , 1011 , 1101 , 1111 0010 , 0101 , 0111 , 1000 , 1010 , 1101 , 1111 0010 , 0101 , 0111 , 1001 , 1011 , 1100 , 1110 0011 , 0100 , 0111 , 1000 , 1011 , 1100 , 1111 0011 , 0100 , 0111 , 1001 , 1010 , 1101 , 1110 0011 , 0101 , 0110 , 1000 , 1011 , 1101 , 1110 0011 , 0101 , 0110 , 1001 , 1010 , 1100 , 1111
------------	--

Çizelge 6.2. Grup bölünebilir $(10,5,2)$ -PBIBD

Gruplar	Bloklar
0010 , 0011	0010 , 0100 , 0110 , 1000 , 1010
0100 , 0101	0010 , 0100 , 0110 , 1001 , 1011
0110 , 0111	0010 , 0101 , 0111 , 1000 , 1010
1000 , 1001	0010 , 0101 , 0111 , 1001 , 1011
1010 , 1011	0011 , 0100 , 0111 , 1000 , 1011 0011 , 0100 , 0111 , 1001 , 1010 0011 , 0101 , 0110 , 1000 , 1011 0011 , 0101 , 0110 , 1001 , 1010

6.2. Bose Eşitsizliği ve Afın Yeniden Çözülebilir Dengeli Tamamlanmamış Blok Tasarımları

Bose eşitsizliği, yeniden çözülebilir BIBD varlığı için gerekli koşulu sağlar.

6.6. Teorem (Bose Eşitsizliği)

Eğer yeniden çözülebilir (v, b, r, k, λ) – BIBD mevcutsa, o zaman $b \geq v + r - 1$ dir [20].

Aşağıdaki Yardımcı Teorem Bose 'un eşitsizliği durumunun alternatif yolunu verir.

6.4. Yardımcı Teorem

(v, b, r, k, λ) – BIBD düşünölsün. Bu takdirde $b \geq v + r - 1$ olması için gerek ve yeter koşul $r \geq k + \lambda$ olmasıdır [20].

6.1. Sonuç

Eğer yeniden çözülebilir (v, b, r, k, λ) – BIBD mevcutsa, o zaman $r \geq k + \lambda$ dir [20].

6.7. Tanım

$b = v + r - 1$ (ya da eş değer olarak $r = k + \lambda$) parametrelili bir yeniden çözülebilir BIBD bir afın yeniden çözülebilir BIBD olarak adlandırılır [20].

$r = n + 1 = k + \lambda$ olduğundan dolayı afın düzlemler afın yeniden çözülebilirdir. $d = m - 1$ olduğunda Teorem 6.2. kullanılarak bir afın yeniden çözülebilir BIBD elde edilebilir ve eşitlikleri yazmak mümkündür.

$$\frac{q^m - 1}{q - 1} = \left[\begin{matrix} m \\ m-1 \end{matrix} \right]_q = q^{m-1} + \left[\begin{matrix} m-1 \\ m-2 \end{matrix} \right]_q = q^{m-1} + \frac{q^{m-1} - 1}{q - 1}$$

Böylece aşağıdaki sonuç verilebilir.

6.2. Sonuç

q asal kuvvet ve $m \geq 2$ olsun. O zaman $\lambda = \frac{q^{m-1} - 1}{q - 1}$ olan afin yeniden çözülebilir

(q^m, q^{m-1}, λ) – BIBD vardır [20].

Afin yeniden çözülebilir BIBD’leri yarı artıktır. BIBD’lerin gerçekte izomorfik olan bu iki sonuçtan bulunduğu gösterilebilir.

Afin yeniden çözülebilir BIBD için diğer bilinen kuruluşlar yoktur.

Afin yeniden çözülebilir BIBD’in bir sonsuz sınıfı HM’lerinden türetilir. $4t$ mertebeden HM’in simetrik $(4t - 1, 2t - 1, t - 1)$ – BIBD’e $((X, A)$ diyelim) eşdeğer olduğu Teorem 4.9.’da verilmiştir. (X, A) ’nın blok tamamlayıcısının $(4t - 1, 2t, t)$ – BIBD $((X, B)$ diyelim) olduğu söylenebilir.

6.5. Örnek

$(4t - 1, 2t - 1, t - 1)$ – BIBD, $t = 2$ için $(7, 3, 1)$ -BIBD’i oluşturur.

$$r = 1 \times 6 / 2 = 3, \quad b = 3 \times 7 / 3 = 7$$

Burada elde edilen simetrik BIBD’in 2.mertebeden projektif düzlem olduğuna dikkat edilmelidir. Aynı şekilde bu BIBD’in blok tamamlayıcısının $(7, 4, 2)$ -BIBD yani $(4t - 1, 2t - 1, t - 1)$ – parametrelerine sahip simetrik BIBD olduğu görülür.

$\infty \notin X$ olsun ve tanım, $X' = X \cup \{\infty\}$ dır. Her $A \in A$ için $A' = A \cup \{\infty\}$ ve $A' = \{A' : A \in A\}$ tanımlansın. $(X', A' \cup B)$ 'nin bir afin yeniden çözülebilir $(4t, 8t - 2, 4t - 1, 2t, 2t - 1) - \text{BIBD}$ olduğunu görmek zor değildir. Burada her bir paralel sınıf iki blok ihtiva eder.

6.7. Teorem

Eğer $4t$ mertebeden HM mevcutsa, o zaman afin yeniden çözülebilir $(4t, 2t, 2t - 1) - \text{BIBD}$ mevcuttur [20].

Simetrik BIBD'da her bir iki ayrı blok λ noktalarında kesişir bu Teorem 3.9. ile verilmiştir. Afin yeniden çözülebilir BIBD için de benzer sonuç vardır.

6.8. Teorem

Afin yeniden çözülebilir $(v, k, \lambda) - \text{BIBD}$ 'in farklı paralel sınıflardan her iki blok kesinlikle k^2 / v noktada kesişir [20].

6.6. Örnek

Yeniden çözülebilir $(28, 7, 2) - \text{BIBD}$ $r = 9$ ve $b = 63$ parametrelerine sahip olabilir, çünkü $9 = 7 + 2$ ($r = k + \lambda$) olduğu için yeniden çözülebilir $(28, 7, 2) - \text{BIBD}$, afin yeniden çözülebilirdir. Teorem 6.8.'de farklı paralel sınıflardan her bir iki blok $k^2 / v = 7 / 4$ noktada kesişir. $7 / 4$ tam sayı olmadığı için yeniden çözülebilir $(28, 7, 2) - \text{BIBD}$ mevcut değildir (fakat yeniden çözülebilir olmayan $(28, 7, 2) - \text{BIBD}$ 'leri mevcuttur).

Afin yeniden çözülebilir BIBD'de $\mu = k^2 / v$ bir tam sayı olmalıdır. Paralel sınıftaki blokların sayısı

$$\frac{v}{k} = \frac{k}{\mu}$$

dür, bu durumda $k \equiv 0 \pmod{\mu}$ olmalıdır. Eğer $n = k / \mu$ alınırsa, o zaman

$$v = \frac{k^2}{\mu} = n^2 \mu$$

elde edilir. n ve μ terimleriyle λ aşağıdaki gibi elde edilir. $\lambda(v-1) = r(k-1)$ ve $r = k + \lambda$ olduğu için,

$$\lambda(v-1) = (k + \lambda)(k-1)$$

bulunur. Böylece,

$$\lambda(v-k) = k(k-1)$$

dır. Gerekli düzeltmeler yapıldığında

$$\lambda = \frac{k(k-1)}{v-1} = \frac{n\mu(n\mu-1)}{n^2\mu-n\mu} = \frac{n\mu-1}{n-1}$$

elde edilir.

Her afin yeniden çözülebilir BIBD $(n^2\mu, n\mu, \frac{n\mu-1}{n-1})$ – parametrelerine sahip

olmalıdır ve tersine bu parametrelere sahip olan her yeniden çözülebilir

$(n^2\mu, n\mu, \frac{n\mu-1}{n-1})$ – BIBD afin yeniden çözülebilirdir. Bunun gibi BIBD’i

(n, μ) – afin yeniden çözülebilir BIBD diye gösterilir. Teorem 6.7.’de verilen

tasarımlar $(2, m)$ – afin yeniden çözülebilir BIBD’lerdir. Sonuç 6.2.’den bulunan (q, q^{m-1}) – afin yeniden çözülebilir BIBD’lerdir.

6.7. Örnek

Teorem 6.7.’ye göre $(4t, 2t, 2t-1)$ – BIBD, $t=2$ için $(8,4,3)$ -BIBD’in afin yeniden çözülebilir BIBD $r = 3 \times 7/3 = 7$, $b = 7 \times 8/4 = 14$ parametrelerine sahiptir.

$$\mu = \frac{k^2}{v} = \frac{4^2}{8} = 2, \quad n = \frac{k}{\mu} = \frac{4}{2} = 2 \text{ ile bu tasarımın parametreleri}$$

$(n^2\mu, n\mu, \frac{n\mu-1}{n-1})$ biçimindedir. (n, μ) – afin yeniden çözülebilir BIBD dir.

Çizelge 6.3. $(8,4,3)$ -BIBD

İşlemler	Bloklar													
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆	A ₇	A ₈	A ₉	A ₁₀	A ₁₁	A ₁₂	A ₁₃	A ₁₄
1	X		X		X		X		X		X		X	
2	X		X			X		X	X			X		X
3	X			X	X			X		X	X			X
4	X			X		X	X			X		X	X	
5		X		X		X		X	X		X		X	
6		X		X	X		X		X			X		X
7		X	X			X	X			X	X			X
8		X	X		X			X		X		X	X	

$(8,4,3)$ -BIBD’in yedi paralel sınıfa sahip olduğu yukarıdaki tablodan görülebilir.

6.2.1. Afın α – yeniden çözülebilir tasarımlar

6.8. Tanım

Farklı çözüm sınıflarından herhangi iki blok q_2 ($q_2 > 0$) noktada kesişiyorsa yeniden çözülebilir bir tasarım “afin yeniden çözülebilir” dir [4,7].

6.9. Tanım

Her nokta (işlem) her sınıfta α defa görünecek şekilde blok kümeleri sınıflar içine bölünmüşse tasarım “ α – yeniden çözülebilir” dir.

α – yeniden çözülebilir bir BIBD’de;

$$v\alpha = \beta k \quad , \quad b = \beta c \quad , \quad r = c\alpha$$

dır [7].

6.10. Tanım

Herhangi iki blok aynı sınıfta q_1 noktada kesişiyorsa ve herhangi iki blok farklı sınıflarda q_2 ($q_2 > 0$) noktada kesişiyorsa, α – yeniden çözülebilir bir tasarım “afin α – yeniden çözülebilir” dir [7].

Aşağıdaki örnekte dikey çizgi sınıfları birbirinden ayırır. Her sınıf içindeki bir satır bir bloğu tanımlar.

6.8. Örnek

Çizelge 6.4.’deki (9, 3, 1) tasarımını $q_2 = 1$ ile afin yeniden çözülebilirdir.

Çizelge 6.4. (9, 3, 1) tasarımı

1 2 3	1 4 7	1 5 9	1 6 8
4 5 6	2 5 8	2 6 7	2 4 9
7 8 9	3 6 9	3 4 8	3 5 7

6.9. Örnek

Çizelge 6.5.'deki (15, 3, 1) tasarımı yeniden çözülebilirdir ama afin yeniden çözülebilir değildir.

Çizelge 6.5. (15, 3, 1) tasarımı

1 2 3	1 4 5	1 6 7	1 8 9	1 10 11	1 12 13	1 14 15
4 8 12	2 8 10	2 9 11	2 12 15	2 13 14	2 4 6	2 5 7
5 10 14	3 13 15	3 12 14	3 5 6	3 4 7	3 9 10	3 8 11
6 11 13	6 9 14	4 10 15	4 11 14	5 9 12	5 11 15	4 9 13
7 9 15	7 11 12	5 8 13	7 10 13	6 8 15	7 8 14	6 10 12

6.10. Örnek

Çizelge 6.6.'daki (9, 3, 2) tasarımı 2-yeniden çözülebilirdir ama yeniden çözülebilir değildir.

Çizelge 6.6. (9, 3, 2) tasarımı

1 2 9	1 2 3	1 3 8	1 4 7	1 5 7	1 6 8	1 4 5	1 3 6
4 5 8	4 6 8	2 4 7	2 3 8	2 5 8	2 6 7	2 4 6	2 3 5
3 6 7	3 5 7	5 6 9	5 6 9	3 4 9	3 4 9	7 8 9	7 8 9

Yeniden çözülebilir ve α – yeniden çözülebilir tasarımların kullanımı Fisher ve Yates tarafından tartışılmıştır. Yeniden çözülebilirlik varsayımları geçerli ise o zaman yeniden çözülebilir bir tasarımın analizinin, rastgele tam blok tasarımı gibi işlem karşılaştırmaları için hatanın yansız tahminini verdiği Yates tarafından gösterilmiştir. Yeniden çözülebilir olmayan tamamlanmamış blok tasarımı rastgele tamamlanmış bloklardan daha az etkili olmasını rağmen, yeniden çözülebilir bir tasarım her zaman rastgele tamamlanmış bloklar kadar etkindir.

6.9. Teorem

Yeniden çözülebilir bir BIBD’de aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$c \geq k + \lambda \quad \text{veya} \quad b \geq v + c - 1 \quad (6.1)$$

Bu eşitsizlikler 1942 yılında Bose tarafından bulunmuştur [2].

6.10. Teorem

Afin yeniden çözülebilir bir BIBD’de Eşitsizlik (6.1) eşitsizlikleri eşitlik olarak sağlanır ve parameteler şu şekilde olur:

$$\begin{aligned} v &= \beta^2 q_2 \quad , \quad b = \beta c \quad , \quad r = (\beta^2 q_2 - 1)/(\beta - 1) \quad , \\ k &= \beta q_2 \quad , \quad \lambda = (\beta q_2 - 1)/(\beta - 1) \end{aligned}$$

Bu teorem 1942 yılında Bose tarafından verilmiştir [4].

6.11. Teorem

Afin yeniden çözülebilir bir BIBD’de bazı γ tamsayıları için;

$$\begin{aligned} v &= \beta^2(\gamma(\beta - 1) + 1) = \beta k \quad , \quad b = \beta(\gamma\beta^2 + \beta + 1) = \beta r \quad , \quad \lambda = \beta\gamma + 1 \\ r &= \beta^2\gamma + \beta + 1 \quad , \quad k = \beta(\gamma(\beta - 1) + 1) \end{aligned}$$

dir [2,7].

6.11. Örnek

Örnek 6.8.’deki $q_2 = 1$ ile afin yeniden çözülebilir olan $(9, 3, 1)$ tasarımı düşünölsün.

Bu tasarımda $v = 9$, $k = 3$, $\lambda = 1$, $r = 4$, $\beta = 3$, $b = 12$, $c = 4$ idi. $\gamma = 0$ alınırsa

Teorem 6.11.’deki eşitlikler

$$\begin{aligned} v &= \beta^2(\gamma(\beta - 1) + 1) = \beta k & \rightarrow & 9 = 3^2[0(3 - 1) + 1] = 3.3 \\ b &= \beta(\gamma\beta^2 + \beta + 1) = \beta r & \rightarrow & 12 = 3(0.3^2 + 3 + 1) = 3.4 \\ \lambda &= \beta\gamma + 1 & \rightarrow & 1 = 3.0 + 1 \\ r &= \beta^2\gamma + \beta + 1 & \rightarrow & 4 = 3^2.0 + 3 + 1 \\ k &= \beta(\gamma(\beta - 1) + 1) & \rightarrow & 3 = 3[(3 - 1).0 + 1] \end{aligned}$$

6.12. Teorem

α – yeniden çözülebilir bir BIBD’de $b \geq v + c - 1$ dir [7].

6.5. Yardımcı Teorem

Afin α – yeniden çözülebilir bir BIBD’de ;

$$q_1 = k(\alpha - 1)/(\beta - 1) \text{ ve } q_2 = k\alpha/\beta = k^2/v$$

dür [7].

6.13. Teorem

α – yeniden çözülebilir bir BIBD’in, afin α – yeniden çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $b = v + c - 1$ olmasıdır [7].

6.3. Sonuç

Afin α – yeniden çözülebilir bir BIBD’de ; $q_1 = k + \lambda - r$ dir [7].

Afin α – yeniden çözülebilir tasarımlarda $x = k$, $y = q_1$, $z = q_2$ olarak alınan bir

$$M = I_c \otimes \{(x - y)I_\beta + (y - z)J_\beta\} + z J_c \otimes J_\beta \quad (6.2)$$

matrisi $A^T A$ matrisinin bulunmasında kullanılabilir. Buradaki \otimes , kronoker çarpımıdır ve boyutları farklı olan herhangi iki matrisi çarpmaya olanak sağlar.

I_i , $i \times i$ boyutlu birim matris ve J_i , $i \times i$ boyutlu 1’lerden oluşan matristir.

6.12. Örnek

Örnek 6.8.'deki afin 1-yeniden çözülebilir $(9, 3, 1)$ tasarımı için M matrisi şöyle olur:

$$x = k = 3, \quad y = q_1 = 0, \quad z = q_2 = 1, \quad c = 4, \quad \beta = 3$$

$$M = I_4 \otimes \{(3-0)I_3 + (0-1)J_3\} + 1 \cdot J_4 \otimes J_3$$

$$= I_4 \otimes \{3I_3 - J_3\} + J_{12}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & 1 \\ 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 & 1 \end{bmatrix}_{12 \times 12}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = A^T A$$

$(9, 3, 1)$ tasarımının isabet matrisi A aşağıdaki şekilde verilir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6.14. Teorem

Her pozitif n tam sayısı için $v = 2n$, $b = n(2n-1)$, $r = 2n-1$, $k = 2$, $\lambda = 1$ parametrelili BIBD yeniden çözülebilir [7].

6.13. Örnek

12, 34, 13, 24, 14, 23 bloklarını sahip $(4,2,1)$ tasarımı düşünölsün. $n = 2$ alınırsa bu tasarım, Teorem 6.14.'deki parametrelere uyduğu için yeniden çözülebilir.

$$v = 4 = 2 \cdot 2, \quad b = 6 = 2(2 \cdot 2 - 1), \quad r = 3 = 2 \cdot 2 - 1, \quad k = 2, \quad \lambda = 1$$

Ayrıca bu tasarım, $q_2 = 1$ ile afin yeniden çözülebilir.

6.15. Teorem

Bir afin yeniden çözülebilir $2 - (v, k, \lambda)$ tasarımının varolduğu düşünölsün. Bu takdirde simetrik bir $2 - (v', k', \lambda')$ tasarımı mevcuttur. Burada,

$$v' = (r+1)v, \quad k' = kr, \quad \lambda' = k\lambda$$

dır [28]. Wallis, bu teoremi ispatlamak için güçlü düzgün grafikleri kullanmıştır.

6.14. Örnek

$(9, 3, 1)$ ($b = 12$, $r = 4$, $c = 4$) afin yeniden çözülebilir tasarımın varlığı, simetrik $(45, 12, 3)$ tasarımının varlığını belirtir.

6.16. Teorem

D , yeniden çözülebilir ama afin olmayan bir $2 - (v, k, \lambda)$ tasarımı olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$b \geq 2v + r - 2 \quad \text{veya eşdeğer olarak} \quad r \geq 2k + \lambda \quad [4].$$

6.2.2. Afin yeniden çözülebilir dengeli tamamlanmamış blok tasarımlarından elde edilen simetrik dengeli tamamlanmamış blok tasarımları

Bu bölümde, afin yeniden çözülebilir BIBD'lerinden simetrik BIBD'lerin kuruluşu verilecektir. Π_1, \dots, Π_r paralel sınıflara sahip olan afin yeniden çözülebilir $(v, b, r, k, \lambda) - \text{BIBD}$ dir. (X, A) mevcut olsun ve $X = \{x_i : 1 \leq i \leq v\}$ alınsın. Aşağıdaki gibi M_1, \dots, M_r ile gösterilen $v \times v$ matrisleri tanımlanabilir. $1 \leq h \leq r$ olsun. O zaman

$$m_{i,j}^h = \begin{cases} 1 & x_i, x_j \in A \quad A \in \Pi_h \\ 0 & dh \end{cases}$$

olmak üzere $M_h = m_{i,j}^h$ 'tir. M_0 $v \times v$ boyutlu "0" matrisi olsun M aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$M = \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & M_2 & M_r \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_0 \\ M_r & M_0 & M_1 & M_{r-1} \end{bmatrix}$$

M , $(r+1)v \times (r+1)v$ boyutludur. M matrisi yukarıda tanımlandığı gibi simetrik BIBD'in isabet matrisi olarak yorumlanabilir.

6.4. Sonuç

q asal kuvvet olsun. Bu takdirde, simetrik $(q^2(q+2), q(q+1), q)$ -BIBD mevcuttur [20].

6.15. Örnek

3.mertebeden afin düzlemden simetrik $(45,12,3)$ -BIBD elde edilebilir. $(9,3,1)$ -BIBD dikkate alınsın. $\Pi_1 = \{123,456,789\}$, $\Pi_2 = \{147,258,369\}$, $\Pi_3 = \{159,267,348\}$ ve $\Pi_4 = \{168,249,357\}$ gibi dört paralel sınıf kolayca görülür. M_1 ve M_2 matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M_3 ve M_4 matrisleri benzer tarzda yazılabilir, o zaman

$$M = \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \\ M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_0 \\ M_2 & M_3 & M_4 & M_0 & M_1 \\ M_3 & M_4 & M_0 & M_1 & M_2 \\ M_4 & M_0 & M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere M matrisi, $(45,12,3)$ - BIBD'in isabet matrisidir.

6.17. Teorem

Bir afin yeniden çözülebilir $B[\beta k ; \beta(\gamma(\beta - 1) + 1) , \beta\gamma + 1]$ tasarımın duali,

$$\begin{aligned} v &= \beta(\gamma\beta^2 + \beta + 1) \quad , \quad b = \beta^2(\gamma(\beta - 1) + 1) \quad , \quad r = \beta(\gamma(\beta - 1) + 1) \quad , \\ k &= \beta^2\gamma + \beta + 1 \quad , \quad m = \beta^2\gamma + \beta + 1 \quad , \quad n \quad , \quad \lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = \gamma(\beta - 1) + 1 \end{aligned}$$

ile bir “yarı-düzenli grup bölünebilir tasarım” dır [7].

$v = 9$, $b = 12$, $r = 4$, $k = 3$, $\lambda = 1$ parametreleri ile afin yeniden çözülebilir BIBD göz önüne alınsın, bu tasarımın geometrik yapısı net' tir [26].

Dual tasarım $v^* = 12$, $b^* = 9$, $r^* = 3$, $k^* = 4$, $\lambda_1^* = 0$, $\lambda_2^* = 1$ ile yarı-düzenli grup tasarımıdır.

Her bir projektif düzlemin artık tasarımının, bir afin düzlem olduğunu ve her bir afin düzlem, bir projektif düzleme genişletilebilir olduğu bilinir. Diğer bir deyimle; bir $(n^2, n, 1)$ tasarımı eğer mevcut ise, bir $(n^2 + n + 1, n + 1, 1)$ tasarımın artığı olmalıdır [7].

7. SONUÇ

Bu çalışma, dengeli tamamlanmamış blok tasarımları ile sonlu geometriler arasındaki ilişkinin incelenmesi amacıyla yapılmıştır. Bu amaç doğrultusunda t-tasarımının özellikleri ve ilgili yapılar, BIBD'ler için bir temel oluşturması nedeniyle bu çalışmada yer almıştır. Genel olarak BIBD'lerin varlık koşulları, özellikleri ve kuruluşları için farklı metodlar incelenmiştir. BIBD'ler için artık, türetilmiş ve dual tasarımlar gibi diğer yapılar ve geometrik anlamları üzerinde durulmuştur. Burada özel durumlar için BIBD'in bazı ailelerinin kuruluşları incelenmiştir.

Sonlu projektif geometri, öklit geometri ve diğer ilişkili geometriler üzerinde durulmuş ve BIBD'lerin bu geometriler ile ilişkisi ifade edilmiştir. Bu alanda çalışan araştırmacılara bir yol göstermesi amacıyla ilgili geometrilerde noktanın doğru üzerinde bulunma koşullarından ve özelliklerinden yararlanılarak BIBD için noktaların bloklara dağıtımı yapılmış ve örnekler verilerek daha ayrıntılı ifade edilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Dembowski, P., "Finite Geometries", *Springer-Verlag*, Reprint of The 1968 Edition, V-VII, 4-5 (1997).
2. Raghavarao, D., "Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments", *Dover Publications, Inc.*, New York, 1-2, 59-61, 63-67, 71-72, 86-95, 112, 183-184, 209-210, 222-225 (1971).
3. Assmus, E.F. and Key, J.D., "Design and Their Codes", *J. of Combinatorial Theory, Series A*, 76: 139-144 (1993).
4. Beth, T. , Jungnickel, D. and Lenz, H., "Design Theory", Encyclopedia of Mathematics, Vol. 1, Second Edition, *Cambridge Univ. Press*, 1-29, 50-64, 77-78, 82-96, 101-129, 136-144, 234, 584-598 (1999).
5. Ray-Chaudhuri, D.K. and Wilson, R.M., "On t-Designs", *Osaka J. Math.*, 12 : 737-744 (1975).
6. Cameron, P.J. and Van Lint J.H., "Designs, Graphs, Codes and Their Links", *Cambridge Univ. Press*, 1-28 (1991).
7. Street, A.P. and Street, D.J., "Combinatorics of Experimental Design", *Clarendon Pres*, Oxford, 1-12, 28-34, 164-173 (1987).
8. Srivastas, S.K., "On The Class of t-Designs", *Statistics & Probability Letters*, 39 : 167-172 (1988).
9. Bayrak, H., "Eksik Blok Düzenlerinin Dual Yapıları", *D.İ.E. İstatistik Araştırma Dergisi*, 2(1) : 1-9 (2003).

10. Kageyama, S. and Sinha, K., "Some patterned constructions of rectangular designs", *J. Japan Statist. Soc.*, 33, 137-144 (2003).
11. Hughes, D.R. and Piper, F.C., "Design Theory", *Cambridge University Press*, Cambridge, 1-35 (1985).
12. Hall, M., "Combinatorial Theory", Blaisdell, Waltham, Mass, (1967).
13. Mukhopadhyay, P. and Vijayan, K., "On Controlled Sampling Designs", *J. of Statistical Planning and Inference*, 52 . 375-378 (1996).
14. Blake, I.F. and Mullin, R.C., "An Introduction to Algebraic and Combinatorial Coding Theory", *Academic Press Inc.*, New York, (1976).
15. Ho, Y.S. and Mendelsohn, N.S., "Inequalities for t-Designs with Repeated Blocks", *Aequationes Mathematicae*, 10 : 212-222 (1974).
16. Colbourn, C. J. and Dinitz, J. H., "The CRC Handbook of Combinatorial Designs", *CRC Pres*, Boca Raton, New York, London, Tokyo, 47-51, 66-67, 70-71, 231-232, 430-432 (1996).
17. Hughes, D.R., "On t-Designs and Groups", *The American Journal of Mathematics*, 87(4) 761-778 (1966).
18. Mendelsohn, N.S., "A Theorem on Steiner Systems", *Can. J. Math.*, 22(5) : 1010-1015 (1970).
19. Lindner, C.C. and Rodger, C.A., "Design Theory", *CRC Pres*, Boca Raton, London, New York, Washington DC., 71-72, 79 (1997).
20. Stinson, D.R., "Combinatorial Designs: Constructions and Analysis", *Springer-Verlag*, New York, 27-29, 73-98, 101-114 (2000).

21. Hazewinkel, M. A., "Linked Balanced Designs are Symmetric BIBD's", *CWI Report* AM-R9509, (1995).
22. Vartak, M.N., "On an Application of Kronecker product of Matrices to Statistical Design", *Ann. Math. Statist.*, **26**, 420-438 (1955).
23. Bayrak, H., "Deney Düzenlemede Kroneker Çarpımının Kullanımı", *Gazi Üniv. Fen-Ed. Fak. Fen Bilimleri Dergisi*, C.4.S.1. ss. 73-85 (1994).
24. Shrikhande, S. S. , On The Dual of Some Balanced Incomplete Block Designs, *Biometrics*, **8**, 66-72, (1952).
25. Shrikhande, S.S. and Bhagwandas, "Duals of Incomplete Block Designs", *J. Indian Stat. Assn.* , **3**, 30-37, (1965).
26. Ryser, B.H., "Finite Nets II. Uniqueness and Imbedding", *Pacific J. Of Math.* , **13**, 421-457, (1963).
27. Bayrak, H. And Gönen, S. , "Geometrical Approach to Balanced Incomplete Block Designs", *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A*, **V. 44**, 41-48, (1995).
28. Wallis, W.D., "Construction of Strongly Regular Graphs Using Afine Designs", *Bull. Austr. Math. Soc.*, **4** : 41-49 (1971).
29. Bose, R. C. , Strongly Regular Graphs, Partial Geometries and Partially Balanced Designs, *Pacific J. Maths*, **13**, 389-419, (1963).
30. Rao, S.B. and Ramachandra Rao, A., "A Characterization of The Line Graph of A BIBD with $\lambda = 1$ ", *Indian Statistical Institute*, 369-370 (1969).
31. Cameron, P.J., "Pairwise Balanced Designs", *The Encyclopaedia of Design Theory*, 30 May 2003.

32. Kiefer, J., "Construction and Optimality of Generalized Youden Designs", A Survey of Statistical Designs and Linear Models, Ed. J. N. Srivastava, pp.53-333 (1975).
33. Bhagwandas and Kageyama, S., "Patterned construction of partially balanced incomplete block designs", *Commun. Statist. – Theor. Meth.*, 14, 1259-1267 (1985).
34. Suen, C., "Some rectangular designs constructed by the method of differences", *J.Statist.Plann. Inference*, 21, 273-276 (1989).
35. Bayrak, H., "Lineer Modellerde Tamamlanmamış Bloklar Üzerine Bir İnceleme Doktora Tezi", *K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü*, Trabzon, 44-50 (1991).
36. Brown, E., "The Many Names of (7,3,1)", *Virginia Polytechnic Institute and State University*, Vol.75, No.2, 83-85 (2002).
37. Mann, H.B., "Analysis and Design of Experiments", *Dover Publications, Inc.* New York (1950).
38. Kaya, R., "Projektif Geometri", *Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları*, Matematik:1., (1978).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : AVŞAR, Nermin
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 20.07.1980 Ankara
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 202 21 54
Faks : 0 (312) 202 21 50
e-mail : navsar@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Yıldız Teknik Üni./İstatistik Bölümü	2003
Lise	Bahçelievler Deneme Lisesi	1997

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2005-	Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enst.	Arş.Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Futbol, Müzik, Matematik.