

**RADYAL DIŞ LASTİĞİN
SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ**

Ayhan ERDOĞMUŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OCAK 2007
ANKARA**

Ayhan ERDOĞMUŞ tarafından hazırlanan RADYAL DIŞ LASTİĞİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç.Dr. Şefaatdin YÜKSEL
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Makine Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr. Yaşar T. HONDUR

Üye : Prof.Dr. Nizami AKTÜRK

Üye : Prof.Dr. Mehmet EROĞLU

Üye : Doç.Dr. Şefaatdin YÜKSEL

Üye : Yrd.Doç.Dr. Yiğit YAZICIOĞLU

Tarih : 29 / 01 / 2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ayhan ERDOĞMUŞ

**RADYAL DIŞ LASTİĞİN
SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Ayhan ERDOĞMUŞ

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ocak 2007

ÖZET

Kara taşıtlarında ve hava taşıtlarında yolcuların daha konforlu ve güvenli bir seyahati için yoldan ve araçtan kaynaklanan titreşimlerinin minimum seviyede tutulması gerekmekte ve bunu sağlamak için de tekerler, süspansiyon sistemleri, akslar ve koltuklar kullanılmaktadır. Ancak, aracın yol ile olan teması sadece tekerler ile sağlandığı için tekerlerin önemi diğer elemanlara göre daha ön plana çıkmaktadır. Teker dış lastik malzemesinin karmaşık kompozit yapıda olması, karmaşık dış lastik geometrisi ve büyük deformasyonlar için dış lastiğın hareket denkleminin elde edilmesi teker analizinde karşılaşılan zorlukların başında yer almaktadır.

Bu çalışmada, ilk adımda karmaşık dış lastik geometrisi yerine benzer ebatlardaki üç boyutlu dairesel silindir geometrisinin hareket denklemleri analitik olarak elde edilmiş ve serbest titreşim analizi yapılarak sistemin doğal frekansları bulunmuştur. Ayrıca aynı ebatlardaki dairesel silindir geometrisi, bir sonlu elemanlar yazılımı olan ABAQUS programı kullanılarak modellenmiş ve program içerisinde

serbest titreşim analizi ile sistemin doğal frekansları bulunmuştur. Her iki yöntemle elde edilen değerler birbirleri ile kıyaslanmıştır.

İkinci adımda ise katmanlı kompozit yapıdaki üç boyutlu karmaşık dış lastik geometrisi ABAQUS programı kullanılarak modellenmiştir. Serbest titreşim analizi ile sistemin doğal frekansları ve mod şekilleri bulunmuştur. Sonuçlar literatürde verilen deneysel değerler ile kıyaslanmıştır.

Bilim Kodu : 914.1.003
Anahtar Kelimeler : Radyal dış lastik, kabuk eleman, serbest titreşim analizi, doğal frekanslar, sonlu elemanlar modeli, ABAQUS
Sayfa Adedi : 82
Tez Yöneticisi : Doç.Dr. Şefaatdin YÜKSEL

**FREE VIBRATION ANALYSIS OF
A RADIAL TYRE
(M.Sc. Thesis)**

Ayhan ERDOĞMUŞ

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
January 2007**

ABSTRACT

The comfort and safety of a passenger could be achieved by holding road- and vehicle- vibration at a minimum level for both air vehicles and land vehicles. This issue is accomplished by using tyres, suspension systems, axle and seats. Since the tyre provides the contact between the vehicle and the road, its importance due to this interaction requires more attention than other elements. In tyre analysis, the most difficult issues are the tyre materials which are made of complex composite materials, the complex tyre geometry and how to obtain equation of motion for the large deformations.

In this study, at the first step, the equation of motion is obtained for the three dimensional circular cylindrical geometry instead of the complex tyre geometry. Free vibration analysis is employed to compute natural frequencies. Furthermore, the circular cylindrical geometry is modelled by using the commercial finite element analysis software ABAQUS. The free vibration analysis is performed to compute the natural frequencies. All of the results obtained from the free vibration analysis are compared with each other.

At the second step, a 3-D complex geometry of laminated composite is modelled by using ABAQUS. The free vibrations analysis is employed to compute natural frequencies and mode shapes. The results obtained from the free vibration analysis are compared with the experimental results.

Science Code : 914.1.003
Key Words : Radial tyre, shell element, free vibration analysis, natural frequencies, finite element model, ABAQUS
Page Number : 82
Adviser : Assoc.Prof.Dr. Şefaaddin YÜKSEL

TEŞEKKÜR

Bu tezin konusunun belirlenmesinden, çalışmalarımın tamamlanmasına kadar beni yönlendiren, benden ilgi, yardım ve tecrübelerini esirgemeyerek destek olan değerli tez danışmanım Doç. Dr. Şefaaddin YÜKSEL'e teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarımın sırasında bana yardımcı olan arkadaşım Uçak Mühendisi Serkan Us'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım esnasında gösterdiği sabır, anlayış ve destek nedeniyle eşim Bilge ERDOĞMUŞ'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	xii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xiv
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Literatürde Yapılan Çalışmalar	2
1.2. Çalışmanın Amacı	4
2. KABUK ELEMAN İÇİN TEMEL DENKLEMLER.....	5
2.1. Genel.....	5
2.2. Sonlu Deformasyon Denklemleri	5
2.3. İnce Kompozit Kabuk Eleman İçin Kabuller	8
2.4. Kabuk Eleman Geometrisi ve Koordinat Eksenleri	9
2.5. Elastik Şekil Değiştirme – Yer Değiştirme Bağıntıları	10
2.6. Kompozit Malzemeler İçin Gerilme – Şekil Değiştirme Bağıntıları	17
2.7. Enerji Denklemleri.....	23
2.7.1. Deformasyon enerjisi.....	23
2.7.2. Kinetik enerji.....	27
2.7.3. Dış kuvvetler ile gövde kuvvetleri tarafından yapılan virtüel iş.....	28

	Sayfa
2.8. Hareket Denklemi	29
2.9. Lineer Serbest Titreşim Analizi İçin Hareket Denklemine Elde Edilmesi	31
3. DAİRESEL SİLİNDİR KABUK ELEMAN İÇİN TEMEL DENKLEMLER	32
3.1. Genel	32
3.2. Elastik Şekil Değişirme – Yer Değişirme Bağlılıları	32
3.3. Kompozit Malzemeler İçin Gerilme – Şekil Değişirme Bağlılıları	35
3.4. Hareket Denklemi	38
4. SONLU ELEMANLAR MODELİ	44
4.1. Genel	44
4.2. Dış Lastik Yapısı	44
4.3. Dairesel Silindir Modeli	46
4.4. Dış Lastik Modeli	49
5. SAYISAL SONUÇLAR	55
5.1. Genel	55
5.2. Dairesel Silindir İçin Elde Edilen Sayısal Sonuçlar	55
5.3. Dış Lastik İçin Elde Edilen Sayısal Sonuçlar.....	59
5.3.1. Şişirme basıncının etkisi.....	65
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	68
KAYNAKLAR	71
EKLER	73
EK-1 Kabuk eleman orta yüzeyine ait şekil değiştirme bileşenleri	74
EK-2 [K] matris bileşenleri.....	75
EK-3 ${}^n[\bar{Q}]$ matris bileşenleri.....	78
EK-4 Eş. 2.59 eşitliğinde yer alan [K] katılık matrisi	79

	Sayfa
EK-5 [M] kütle matrisi.....	80
EK-6 χ_i şekil değiştirme bileşenleri	81
ÖZGEÇMİŞ.....	82

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 4.1. Dairesel silindir için geometri parametreleri	46
Çizelge 4.2. Lastik eleman için malzeme parametreleri	47
Çizelge 4.3. Dış lastik için geometri parametreleri	49
Çizelge 4.4. Kompozit eleman katmanları için malzeme parametreleri	51
Çizelge 5.1. Dairesel silindir için elde edilen ilk beş doğal frekans.....	57
Çizelge 5.2. Dış lastik için elde edilen ilk beş doğal frekans	59
Çizelge 5.3. Dış lastik için elde edilen ilk beş doğal frekansın kıyaslanması	60
Çizelge 5.4. Çalışmada elde edilen ilk beş doğal frekansın kıyaslanması	65
Çizelge 5.5. Farklı şişirme basınçlarında elde edilen ilk beş doğal frekans	66

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Deformasyon anındaki birim eleman hareketi	6
Şekil 2.2. Kabuk eleman geometrisi ve eğri koordinat sistemi	9
Şekil 2.3. Katmanlı yapıya sahip kompozit kabuk eleman geometrisi	18
Şekil 2.4. Katman malzeme eksenine için koordinat sistemi	20
Şekil 3.1. Dairesel silindirik kabuk elemanı için koordinat sistemi	33
Şekil 3.2. Kayma gerilmesi dağılımı	37
Şekil 3.3. Kabuk elemana etkiyen kuvvetler ve momentler	40
Şekil 4.1. Radyal dış lastik yapısı	44
Şekil 4.2. Üç boyutlu dairesel silindirik model	46
Şekil 4.3. Dairesel silindirik için kabuk eleman modeli	48
Şekil 4.4. Dairesel silindirik için uygulanan sınır şartı	49
Şekil 4.5. Üç boyutlu dış lastik modeli	50
Şekil 4.6. Dış lastik için kabuk eleman modeli	52
Şekil 4.7. Dış lastik için uygulanan sınır şartı ve basınç kuvvetleri	53
Şekil 5.1. Dairesel silindire ait ilk mod için doğal frekanslar	57
Şekil 5.2. Dış lastiğin ilk mod şekli	62
Şekil 5.3. Dış lastiğin ikinci mod şekli	62
Şekil 5.4. Dış lastiğin üçüncü mod şekli	63
Şekil 5.5. Dış lastiğin dördüncü mod şekli	63
Şekil 5.6. Dış lastiğin beşinci mod şekli	64
Şekil 5.7. Şişirme basıncının doğal frekanslara etkisi	67

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
ds	Deformasyon öncesi MN uzunluğu
ds'	Deformasyon sonrası $M'N'$ uzunluğu
ds_1	ξ_1 eksenini doğrultusunda kabuk eleman orta yüzeyine ait kenar uzunluğu
ds_2	ξ_2 eksenini doğrultusunda kabuk eleman orta yüzeyine ait kenar uzunluğu
$\{f_e\}$	Dış kuvvet vektörü
$f_i(\xi)$ ve $f_j(\eta)$	ξ ve η eksenleri yönlerindeki Bezier fonksiyonları
g_1 ve g_2	Kabuk eleman orta yüzeyine ait metrik faktörler
h	Dairesel silindir kabuk eleman kalınlığı
h_s	Dairesel silindir kalınlığı
h_t	Dış lastik kalınlığı
h_1, h_2 ve h_3	Kabuk elemanın orta yüzeyinden ζ mesafesinde bulunan yüzeye ait metrik faktörler
k	Sabit katsayı ($=-4/3t^2$)
k'	Kayma düzeltme faktörü ($=2/3$)
$\{q\}$	Yer değiştirme bileşenleri ile türevlerini içeren yer değiştirme vektörü
$\{\dot{q}\}$	Lineer ve açısal hızları içeren yer değiştirme vektörü

Simgeler	Açıklama
$\{\tilde{q}\}$	Yer değiştirme ve dönme bileşenlerini içeren yer değiştirme vektörü
\vec{r} ve \vec{r}'	Deformasyon ncesi ve deformasyon sonrası koordinat sistemine ait pozisyon vektörleri
t	Kabuk elemanın toplam kalınlığı
t_1, t_2, \dots, t_n	Katman kalınlıkları
x_1, x_2 ve x_3	Kartezyen koordinatları
\vec{u}	Yer değiştirme vektörü
u_1, u_2 ve u_3	ξ_1, ξ_2 ve ζ koordinat eksenleri boyunca yer değiştirme bileşenleri
u, v ve w	ξ_1, ξ_2 ve ζ koordinat eksenleri boyunca kabuk elemanın orta yüzeyine ait yer değiştirme bileşenleri
u'_1, u'_2 ve u'_3	x, θ ve z koordinat eksenleri boyunca yer değiştirme bileşenleri
u', v' ve w'	x, θ ve z koordinat eksenleri boyunca kabuk elemanın orta yüzeyine ait yer değiştirme bileşenleri
x, θ ve z	Dairesel silindir kabuk eleman koordinatları
A	Kabuk elemanın orta yüzey alanı
${}^p A_{ij}$	Elastik matris bileşenlerinin (${}^n \bar{Q}_{ij}$) kabuk eleman kalınlığı boyunca integrali ile elde edilen terim
C_{ijrs}	Elastik tensör sabiti
C_{ij}	Elastik tensör sabiti bileşenleri
$[C]$	Kompozit kabuk elemanına ait sönümleme matrisi

Simgeler	Açıklama
$[\tilde{C}]$	Bezier kontrol nokta terimlerinden oluşan kompozit kabuk elemana ait sönümlleme matrisi
D	Eğilme katılığı
D_t	Dış lastiğin iç yanak çapı
$\{D_{ii}\}$	Kabuk elemanın orta yüzeyine ait yer değiştirme bileşenleri ve türevlerini içeren katsayılar dizisi
$[E_{ii}]$	Kabuk elemanın orta yüzeyine ait yer değiştirme bileşenleri ve türevlerini içeren katsayılar matrisi
E	Elastisite modülü
E_{11} ve E_{22}	Elastiklik modülleri
$[E']$	Dairesel silindir kabuk elemanı için elastiklik matrisi
E'_{ij}	Dairesel silindir kabuk elemanı için elastiklik matrisi terimleri
$\{\tilde{F}\}$	Bezier kontrol nokta terimlerinden oluşan kuvvet vektörü
G	Kayma modülü
G_{12} , G_{23} ve G_{13}	Katılık modülleri
K	Zar katılığı
$[K]$	Kabuk elemanına ait katılık matrisi
K_{ij}	Kabuk elemanına ait katılık matrisi terimleri
$[\bar{K}]$	Lineer terimlerden oluşan kompozit kabuk elemanına ait katılık matrisi

Simgeler	Açıklama
$[\tilde{K}]$	Bezier kontrol nokta terimlerinden oluşan kompozit kabuk elemanına ait katılık matrisi
L	Dairesel silindir kabuk elemanı uzunluğu
L_s	Dairesel silindirin taban genişliği
L_t	Dış lastiğin taban genişliği
$M_{xx}, M_{\theta\theta}$ ve $M_{x\theta}$	Dairesel silindir kabuk elemanı için eğilme momentleri
$[M]$	Kompozit kabuk elemanına ait kütle matrisi
$[\tilde{M}]$	Bezier kontrol nokta terimlerinden oluşan kompozit kabuk elemanına ait kütle matrisi
N	Toplam katman sayısı
$N_{xx}, N_{\theta\theta}$ ve $N_{x\theta}$	Dairesel silindir kabuk elemanı için zar kuvvetleri
$\{P\}$	Kabuk elemanın orta yüzeyine ait yer değiştirme bileşenleri ile dönme kuvvetlerini tanımlayan kontrol noktalar dizisi
$\{\dot{P}\}$	Kabuk elemanın orta yüzeyine ait yer değiştirme bileşenleri ile dönme kuvvetlerini tanımlayan kontrol noktalar dizisinin zamana göre birinci türevi
$\{\ddot{P}\}$	Kabuk elemanın orta yüzeyine ait yer değiştirme bileşenleri ile dönme kuvvetlerini tanımlayan kontrol noktalar dizisinin zamana göre ikinci türevi
$P_{u_{ij}}, P_{v_{ij}}$ ve $P_{w_{ij}}$	Kabuk elemanın orta yüzeyine ait yer değiştirme bileşenlerini tanımlayan kontrol noktaları
$P\beta_{1ij}$ ve $P\beta_{2ij}$	Kabuk elemanın orta yüzeyine ait dönme kuvvetlerini tanımlayan kontrol noktaları
Q_{xz} ve $Q_{\theta z}$	Dairesel silindir kabuk elemanı için enine kayma kuvvetleri

Simgeler	Açıklama
[Q]	Kabuk elemanı için elastik matrisi
$[\bar{Q}]$	Kompozit malzeme eksenlerine dönüştürülmüş elastik matrisi
$^n[\bar{Q}]$	n adet katmana sahip, kompozit malzeme eksenlerine dönüştürülmüş elastik matris
$^n\bar{Q}_{ij}$	n adet katmana sahip, kompozit malzeme eksenlerine dönüştürülmüş elastik matris terimleri
R	Dairesel silindir kabuk elemanın yarıçapı
R_s	Dairesel silindirin yarıçapı
R_t	Dış lastiğin dış yarıçapı
R_1 ve R_2	ξ_1 ve ξ_2 eksenlerine ait eğrilik yarıçapları
T	Kinetik enerji
[T]	Şekil değiştirmeler için dönüşüm matrisi
U	Deformasyon enerjisi
W_f	Dış kuvvetler ile gövde kuvvetleri tarafından yapılan virtüel iş
{X}	Dairesel silindir kabuk elemanı için şekil değiştirme ve eğrilik terimleri vektörü
α_{ij}	Deformasyon öncesi koordinat sisteme ait metrik tensör
β_{ij}	Deformasyon sonrası koordinat sisteme ait metrik tensör
$\beta_i, \vartheta_i, \mu_i$ ve θ_i	Kabuk elemanın orta yüzey koordinat eksenlerine (ξ_1 ve ξ_2) ait bileşenler

Simgeler	Açıklama
β_1 ve β_2	Kabuk elemanın orta yüzey koordinat eksenlerine ait dönme bileşenleri
β'_1 ve β'_2	Dairesel silindir kabuk elemanın orta yüzey koordinat eksenlerine ait dönme bileşenleri
δ_{ij}	Kronecker Delta
$\{\epsilon\}$	Şekil değiştirme vektörü
$\{\epsilon'\}$	Kompozit malzeme eksenine ait şekil değiştirme vektörü
ϵ_{ij}	Şekil değiştirme bileşenleri
$\epsilon_{11}, \epsilon_{22}$ ve ϵ_{33}	Kabuk elemanı için normal eksen yönündeki şekil değiştirmeler
ϵ_{12}	Kabuk elemanı için düzlem yönünde kayma şekil değiştirmesi
ϵ_{13} ve ϵ_{23}	Kabuk elemanı için enine kayma şekil değiştirmeleri
ϵ_{xx} ve $\epsilon_{\theta\theta}$	Dairesel silindir kabuk elemanı için normal eksen yönündeki şekil değiştirmeler
$\epsilon_{x\theta}$	Dairesel silindir kabuk elemanı için düzlem yönünde kayma şekil değiştirmesi
ϵ_{xz} ve $\epsilon_{\theta z}$	Dairesel silindir kabuk elemanı için enine kayma şekil değiştirmeleri
ϵ_1^0 ve ϵ_2^0	Kabuk elemanın orta yüzeyine ait normal şekil değiştirme bileşenleri
ϵ_3^0	Kabuk elemanın orta yüzeyine ait düzlem yönündeki kayma şekil değiştirme bileşeni

Simgeler	Açıklama
ε_4^0 ve ε_5^0	Kabuk elemanın orta yüzeyine ait enine kayma şekil değiştirme bileşenleri
$\{\varepsilon^0\}$	Kabuk elemanın orta yüzeyine ait şekil değiştirme bileşenleri dizisi
φ_n	n adet katman için lif dizilme açısı
γ_{ij}	Green'in şekil değiştirme tensörü
Γ	Boyutsuz kalınlık parametresi
$[\Gamma]$	Boyutsuz kalınlık matrisi
ξ_1 ve ξ_2	Kabuk elemanın orta yüzey koordinatları
(ξ_1, ξ_2, ξ_3)	Deformasyon öncesi sisteme ait kartezyen koordinatlar
(ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3)	Deformasyon sonrası sisteme ait kartezyen koordinatlar
ν, ν_{12} ve ν_{21}	Poisson oranları
ρ	Kütle yoğunluğu
ρ_n	n adet katman için kütle yoğunluğu
σ_{ij}	2 nci Piola-Kirchhoff gerilmesi
$\{\sigma\}$	Gerilme vektörü
$\{\sigma'\}$	Dairesel silindir kabuk eleman için gerilme vektörü
σ'_{xz}	x-z yönündeki kayma gerilmesi
σ_{xz}^{ort}	x-z yönündeki ortalama kayma gerilmesi

Simgeler	Açıklama
ζ_n	n adet katman için sönümlenme katsayısı
τ	Zaman
ζ	Kabuk elemanın orta yüzey normali
$\{h\}$	Kalınlık dizisi
ω_{mn}	m ve n değişkenleri için doğal frekanslar
Δ	Sabit katsayı ($= 1 - \nu_{12}\nu_{21}$)

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi; ister kara taşıtlarında olsun ister hava taşıtlarında daha konforlu ve güvenli bir seyahat için yol ve araç titreşimlerinin minimum seviyede tutulması ve titreşim karakteristiklerinin iyi belirlenmesi gerekmektedir. Anılan titreşimlerin azaltılabilmesi için tekerler, süspansiyon sistemleri, akslar ve koltuklar kullanılmaktadır. Ancak, taşıtların yol ile olan teması sadece tekerler ile sağlandığı için tekerlerin önemi diğer elemanlara göre daha ön plana çıkmaktadır.

Günümüze kadar yapılan çalışmalarda tekerin yerine kullanılabilecek bir alternatif sunulamamıştır. Sadece istenilen şartları yerine getirecek olan daha iyi bir tekerin üretimi üzerinde durulmuştur.

Otomobil ve uçak sanayisindeki hızlı gelişim ile birlikte teker performansı üzerindeki araştırmalar dikkatleri üzerine çekmeye başlamıştır. Teker titreşimi ve tekerin dinamik cevabı üzerinde yapılan analizlerde çeşitli yaklaşımlar geliştirilmiştir.

Teker genel olarak jant ve dış lastikten oluşmaktadır. Bu çalışmada dış lastik üzerinde durulmuş ve analizler buna göre yapılmıştır. Jant ve janttan gelen etkiler ise yapılan analizlerde dikkate alınmamıştır.

Otomobil ve uçak tekerlerine ait dış lastiklerin doğal frekans ve mod şekilleri, tekerin kritik dönme hızlarında yapılan titreşim ve gürültü analizlerinde önemli bir rol oynamaktadır. Ayrıca doğal frekanslar; dış lastik taban deformasyonu, dış lastiğin radyal kafes yapısı ve dış lastiğe ait teğetsel katılık gibi bir takım tekerin karakteristik değerlerin elde edilmesinde de yardımcı olmaktadır.

1.1. Literatürde Yapılan Çalışmalar

Söz konusu çalışmalarda dış lastik modeli olarak zar modeli, iki-boyutlu aksenal simetrik model, iki boyutlu ince kabuk elemanı modeli, iki boyutlu kalın kabuk elemanı modeli ve üç boyutlu katı modeller seçilmiştir [1].

Yapılan bu çeşitli modellemelerdeki amaç yeni bir dış lastik tasarımı için en doğru ve en verimli değeri elde edebilmektir.

Dış lastik analizinde karşılaşılan zorlukların başında; dış lastik malzemesinin karmaşık kompozit yapıda olması, karmaşık dış lastik geometrisi ve büyük deformasyonlar için dış lastiğin hareket denkleminin elde edilmesi gelmektedir. Günümüzde dairesel halka modeli dış lastik cevabını belirlemede halen kullanılan etkin bir yaklaşım aracıdır [2]. Dış lastik analizinde, üç boyutlu dış lastik modeli için elde edilen karmaşık ve yüksek dereceli denklemlerinin çözümü uzun zaman almakta, ayrıca söz konusu denklemleri çözebilmek için kapasitesi yüksek ve pahalı bilgisayarlara ihtiyaç duyulmaktadır. Dolayısıyla, dış lastik geometrisi ve dış lastiğin deformasyon hareketi iki boyutlu kabuk elemanı modeli ile modellenerek daha hızlı ve daha verimli sonuçlar elde edilmiştir [3]. Ancak söz konusu analiz hesaplamaları yapılırken, zaman kazancını sağlamak, en doğru ve en verimli tasarımı elde edebilmek için yapılan yaklaşım sayısının azaltılmasına ihtiyaç vardır.

Son yıllarda, araştırmacılar kabuk elemanına ait yer değiştirme bileşenlerini belirlemek için Bezier fonksiyonlarını kullanmaya başlamışlardır [4-7].

L. Jia ve J. Zhang, kompozit yapıdaki radyal bir dış lastiğin, lineer serbest titreşim analizi üzerinde durmuşlar ve çalışmalarında yer değiştirme bileşenlerini Bezier fonksiyonları ile ifade etmişlerdir [4]. Dış lastiğin doğal

frekansları ile mod şekillerini, hem Rayleigh-Ritz yöntemini kullanarak hem de bir sonlu elemanlar yazılımı olan MARC programı ile elde etmişler ve elde ettikleri sonuçları birbirleri ile kıyaslamışlardır.

Farklı diğer bir çalışmada L. Jia ve J. Zhang, kompozit yapıdaki radyal bir dış lastiğin lineer olmayan şekil değiştirme analizi üzerinde durmuşlardır [5]. Bu çalışmada, farklı ebatlardaki üç boyutlu dış lastik için elde ettikleri yüzey gerilme ve kayma gerilme değerlerini kıyaslamışlardır.

Kabuk elemanına ait bir çalışmada ise V. Kumar, fiber takviyeli katmanlı kabuk elemanların lineer ve lineer olmayan dinamik analizinde Bezier yüzey yamalarını kullanmıştır [7]. Kumar bu çalışmada, kabuk elemanı için farklı temel geometrileri ele almış ve her bir geometri için doğal frekans değerleri ile mod şekillerini elde etmiştir.

Dış lastik için yapılan farklı bir çalışmada lineer olmayan, üç boyutlu sonlu eleman dış lastik modeli geliştirilmeye çalışılmıştır. Burada dış lastiğin lineer olmayan mekanik özellikleri Mooney-Rivlin modeli ile modellenmiş, büyük deformasyonlar için Lagrange metodu kullanılarak elde edilen yüzey gerilme değerleri kıyaslanmış ve elde edilen sonuçlara göre en uygun dış lastik geometrisi elde edilmeye çalışılmıştır [8].

Dış lastik için yapılan diğer bir çalışmada, dış lastik-yol etkileşimi üzerinde durulmuştur. Bu çalışmada benzer olarak dış lastik için yer değiştirme bileşenleri, Bezier fonksiyonları ile ifade edilmiştir. Ritz prosedürü kullanılarak üç boyutlu dış lastik için elde edilen sayısal sonuçlarda kritik performans parametreleri elde edilmiş ve elde edilen sonuçlar birbirleri ile kıyaslanmıştır [9].

1.2. Çalışmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı, serbest titreşim analizi ile radyal dış lastiğe ait doğal frekanslar ile mod şekillerini elde etmektir.

Çalışmanın ilk aşamasında kompozit yapıdaki katmanlı bir kabuk elemanı için temel denklemler elde edilmiştir. Ardından dairesel silindir kabuk elemanı için benzeri denklemler elde edilmiş ve izotropik dairesel silindir kabuk elemanı için basitleştirmeler yapılarak sistemin hareket denklemi elde edilmiştir. Serbest titreşim analizi ile analitik olarak P195/60R14 ebadındaki dış lastik geometrisine benzer geometrideki dairesel silindirin doğal frekansları bulunmuştur. Aynı ebatdaki silindir geometrisi, izotropik dairesel silindir kabuk elemanlar kullanılarak sonlu eleman yazılımı olan ABAQUS programı ile modellenmiş ve sistemin doğal frekansları elde edilmiştir. Her iki yöntemde elde edilen değerler birbirleri ile kıyaslanmıştır.

Burada dairesel silindir geometrisinin incelenmesinin nedeni, dairesel silindir geometrisinin hem analitik yöntemle hem de nümerik yöntemle, dış lastik geometrisine göre daha kolay ve kısa sürede elde edilebildiği içindir. Böylece, dairesel silindir geometrisi için elde edilen değerlerin kıyaslanması ile nümerik yöntemde oluşturulan sonlu elemanlar modelinin kısmen de olsa doğruluğu kanıtlanabilmektedir.

Çalışmanın ikinci aşamasında, P195/60R14 ebadındaki dış lastik geometrisi katmanlı yapıdaki kompozit kabuk elemanlar kullanılarak sonlu eleman yazılımı olan ABAQUS programı ile modellenmiş ve serbest titreşim analizi ile sistemin doğal frekansları ile mod şekilleri elde edilmiştir. Sonuçlar literatürde verilen deneysel değerler ile kıyaslanmıştır.

2. KABUK ELEMAN İÇİN TEMEL DENKLEMLER

2.1. Genel

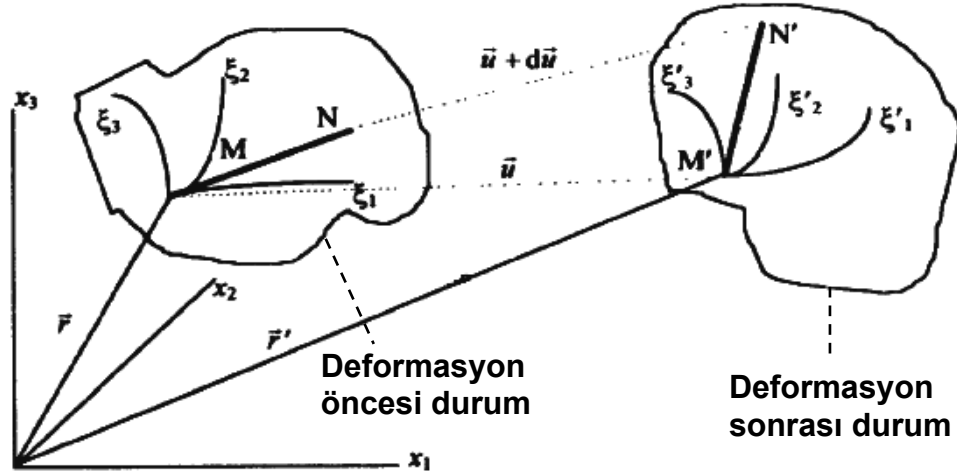
Bu bölümdeki temel denklemler, sonlu deformasyonlardaki ince, kompozit yapıdaki kabuk elemanlar için türetilmiştir. Elastik şekil değiştirme - yer değiştirme bağıntıları, lineer elastik deformasyona maruz ince kabuk eleman için tanımlanan koordinat sisteminde elde edilmiştir. Söz konusu bağıntılar ile sistemin enerji denklemleri çıkarılmış ve lineer serbest titreşim analizi için sistemin hareket denklemleri elde edilmiştir.

2.2. Sonlu Deformasyon Denklemleri

Yer değiştirmeler ile türevleri küçük oranda değişen deformasyonlara sonlu deformasyonlar denir. Deformasyon iki farklı yöntemle tanımlanabilir. Bunlar: Lagrange ve Euler yöntemleridir. Lagrange yönteminde, başlangıç koşullarındaki tipik koordinat bileşenleri bağımsız değişken olarak kullanılır. Euler formüllerinde kullanılan bağımsız değişkenler ise deformasyon sonrası durumdaki malzeme bileşenlerini içeren koordinatlardır. Bu çalışmada Lagrange formülleri kullanılmıştır.

Şekil 2.1'de deforme olan bir elemanın hareketi gösterilmektedir [7]. Sisteme ait koordinatlar, x_1 , x_2 ve x_3 kartezyen değişkenler ile aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \xi_1(x_1, x_2, x_3) \\ \xi'_1 &= \xi'_1(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}\tag{2.1}$$



Şekil 2.1. Deformasyon anındaki birim eleman hareketi [7]

Deformasyon öncesi durum MN çizgisi üzerinde yer alan, M noktasının koordinatı (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ve N noktasının koordinatı $(\xi_1+d\xi_1, \xi_2+d\xi_2, \xi_3+d\xi_3)$ ile gösterilir. Deformasyon sonucunda M noktasının pozisyonu M' (ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3) noktasına, N noktasının pozisyonu ise N' $(\xi'_1+d\xi'_1, \xi'_2+d\xi'_2, \xi'_3+d\xi'_3)$ noktasına dönüşür. Benzer şekilde deformasyon öncesi koordinat sistemine ait pozisyon vektörü \vec{r} , deformasyon sonrasında \vec{r}' vektörüne dönüşür. Deformasyon öncesi MN uzunluğunun karesi

$$(ds)^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_j} \right) d\xi_i d\xi_j = \alpha_{ij} \cdot d\xi_i \cdot d\xi_j \quad (2.2)$$

eşitliği ile elde edilir. Burada, α_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) deformasyon öncesi koordinat sisteminin metrik tensörüdür ve pozisyon vektörü \vec{r} ile belirlenir:

$$\alpha_{ij} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_j} \right) \quad (2.3)$$

Benzer şekilde, deformasyon sonrası M'N' uzunluğunun karesi aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$(ds')^2 = d\vec{r}' \cdot d\vec{r}' = \beta_{ij} d\xi'_i d\xi'_j = \beta_{ij} \frac{\partial \xi'_i}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi'_j}{\partial \xi_m} \cdot d\xi_l \cdot d\xi_m \quad (2.4)$$

Yukarıdaki eşitlikte yer alan yeni koordinat sistemine (ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3) ait metrik tensör β_{ij} eşitliği aşağıdaki gibi yazılır;

$$\beta_{ij} = \left(\frac{\partial \vec{r}'}{\partial \xi_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}'}{\partial \xi_j} \right) \quad (2.5)$$

Yukarıda elde edilen eşitlikler ile eğri koordinatlarda deformasyon öncesi ve deformasyon sonrasındaki durumlar için her bir elemanın pozisyonu ifade edilir. Gösterilen referans bölge için ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3 koordinatları ile ξ_1, ξ_2, ξ_3 koordinatları aynı değerdedir. Böylece M' noktası için aşağıdaki bağıntılar yazılabilir;

$$\xi'_1 = \xi_1, \xi'_2 = \xi_2, \xi'_3 = \xi_3,$$

$$\frac{\partial \xi'_i}{\partial \xi_j} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Burada δ_{ij} , Kronecker Delta'dır. Dolayısıyla Eş. 2.4 eşitliği

$$(ds')^2 = \beta_{ij} d\xi_i d\xi_j \quad (2.6)$$

şeklinde ifade edilir. Görüldüğü gibi deformasyon için verilen bütün bilgiler, referans bölgedeki metrik tensörün ilk durumdan deforme olmuş duruma değişmesini içerir. Seçilen koordinatlar ulanmış veya öz koordinatlar olarak tanımlanır ve büyük deformasyonlardaki birçok yöntem için seçilebilecek en uygun koordinatlardır.

Eş. 2.6 ile Eş. 2.2 eşitliklerinde verilen $(ds')^2$ eşitliği ile $(ds)^2$ eşitlikleri arasındaki fark aşağıdaki gibi yazılır;

$$(ds')^2 - (ds)^2 = (\beta_{ij} - \alpha_j) d\xi_i d\xi_j = 2\gamma_{ij} d\xi_i d\xi_j \quad (2.7)$$

Burada γ_{ij} , şekil değiştirme tensörüdür ve Green' in şekil değiştirme tensörü olarak bilinir. γ_{ij} , aşağıdaki eşitlik ile elde edilir;

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\beta_{ij} - \alpha_{ij}) \quad (2.8)$$

2.3. İnce Kompozit Kabuk Eleman İçin Kabuller

Seçilen kabuk eleman ince kalınlıklı olarak ele alınır. Dolayısıyla, eksen normaline yönündeki gerilme değeri yaklaşık olarak sıfır kabul edilir.

Yüzeye teğet yöndeki enine kayma gerilmesi, kabuk eleman kalınlığı boyunca parabolik bir değişim gösterir. Enine kayma gerilmesi kabuk elemanın üst ve alt yüzeylerinde sıfırdır.

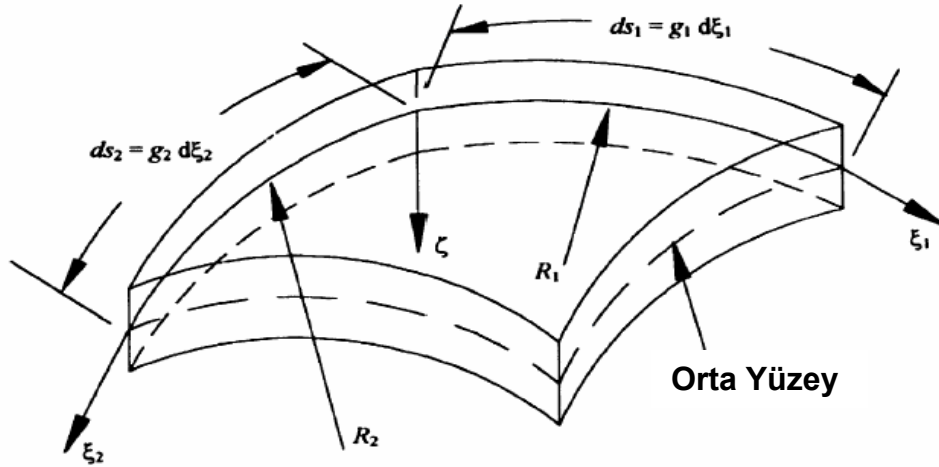
Kabuk elemanın küçük oranlarda şekil değiştirmeler yaptığı kabul edilir. Kabuk elemanın malzemesi, lineer elastik katmanlı ortotropik malzemedir.

Green'in şekil değiştirme – yer değiştirme bağıntıları düzlem şekil değiştirmeler (ϵ_{11} , ϵ_{22} ve ϵ_{33}) olarak, lineer şekil değiştirme – yer değiştirme bağıntıları ise enine kayma şekil değiştirmeleri (ϵ_{23} ve ϵ_{13}) olarak kabul edilir.

Yüzeye teğet yöndeki yer değiştirmeler, ince kabuk elemanın kalınlığı boyunca sabittir. Dolayısıyla, lineer şekil değiştirme – yer değiştirme kabulü için enine şekil değiştirmeler sıfırdır.

2.4. Kabuk Eleman Geometrisi ve Koordinatlar Eksenleri

Kabuk eleman için öngörülen koordinat sistemi ile kabuk elemanın geometrisi Şekil 2.2'de gösterilmiştir [7]. Kabuk elemanın orta yüzeyi, referans yüzeyi olarak seçilir. Kabuk elemana ait eğrilik eksenleri, dikey eğri koordinat sistemine ait parametrik eğriler olarak kabul edilir. Kabuk eleman üzerindeki bir noktanın yeri, referans yüzeye ait iki eksen (ξ_1 , ξ_2) ve yüzey normali ζ ile belirlenir. ξ_1 ve ξ_2 eksenlerine ait eğrilik yarıçapları da R_1 ve R_2 terimleri ile gösterilir.



Şekil 2.2. Kabuk eleman geometrisi ve eğri koordinat sistemi [7]

Orta yüzey kenar uzunlukları ($\zeta=0$)

$$ds_1 = g_1 d\xi_1$$

(2.9)

$$ds_2 = g_2 d\xi_2$$

eşitlikleri ile ifade edilir. Burada g_i ($i=1,2$) teriminin karekökü, orta yüzeye ait metrik tensörü verir:

$$g_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi_i}\right)^2} \quad (2.10)$$

Çok küçük bir eleman için ds uzunluğunun karesi dikey koordinat sistemi için aşağıdaki gibi yazılır;

$$ds^2 = g_1^2 \left(1 - \frac{\zeta}{R_1}\right)^2 (d\xi_1)^2 + g_2^2 \left(1 - \frac{\zeta}{R_2}\right)^2 (d\xi_2)^2 + (d\zeta)^2 \quad (2.11)$$

Yukarıda verilen eşitlikte yer alan kabuk eleman için geçerli bütün metrik katsayılar; uzunlukların, alanların ve hacimlerin ölçülmesiyle elde edilir. Orta yüzeyden ζ kadar uzaklıktaki bir yüzey için metrik katsayılar

$$h_1^2 = g_1^2 \left(1 - \frac{\zeta}{R_1}\right)^2 \quad ; \quad h_2^2 = g_2^2 \left(1 - \frac{\zeta}{R_2}\right)^2 \quad ; \quad h_3^2 = 1 \quad (2.12)$$

eşitlikleri ile elde edilir.

2.5. Elastik Şekil Değişirme – Yer Değişirme Bağlantıları

Şekil 2.1'deki M noktasının yer değişirmesi

$$\bar{u} = \bar{r}' - \bar{r} \quad (2.13)$$

eşitliği ile ifade edilir. Yer değişirme vektörü, ξ_i ($i=1, 2, 3$) koordinatlarına göre türetilir ise aşağıdaki eşitlikler elde edilir;

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \bar{r}'}{\partial \xi_i} - \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi_i} \quad \text{veya} \quad \frac{\partial \bar{r}'}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi_i} \quad (2.14)$$

Eş. 2.14 eşitliğini, Eş. 2.5 eşitliğinde yerine yazarsak, β_{ij} eşitliği

$$\begin{aligned}\beta_{ij} &= \left(\frac{\partial \vec{r}'}{\partial \xi_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}'}{\partial \xi_j} \right) = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_j} \right) \\ &= \alpha_{ij} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_j}\end{aligned}\quad (2.15)$$

şeklinde elde edilir. Eş. 2.8 eşitliği ile verilen γ_{ij} eşitliğine yukarıda elde edilen β_{ij} eşitliği yazılır ise Green' in şekil değiştirme tensörü

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(\beta_{ij} - \alpha_j) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi_j} \right) \quad (2.16)$$

eşitliği ile elde edilir. Şekil değiştirme bileşenleri ε_{ij} ile Green 'in şekil değiştirme tensörü arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{h_i h_j} \quad (2.17)$$

Burada h_i , metrik faktörüdür:

$$h_1 = \sqrt{\alpha_{11}} \quad ; \quad h_2 = \sqrt{\alpha_{22}} \quad ; \quad h_3 = \sqrt{\alpha_{33}} \quad (2.18)$$

Eş. 2.16, Eş. 2.17'de yerine yazılırsa şekil değiştirme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= (u_{1,1} + h_{1,2}u_2/h_2 + h_{1,3}u_3/h_3)/h_1 + \left\{ (u_{1,1} + h_{1,2}u_2/h_2 + h_{1,3}u_3/h_3)^2 \right. \\ &\quad \left. + (u_{2,1} - h_{1,2}u_1/h_2)^2 + (u_{3,1} - h_{1,3}u_1/h_3)^2 \right\} / (2h_1^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} &= (u_{2,2} + h_{2,3}u_3/h_3 + h_{2,1}u_1/h_1)/h_2 + \left\{ (u_{2,2} + h_{2,3}u_3/h_3 + h_{2,1}u_1/h_1)^2 \right. \\ &\quad \left. + (u_{1,2} - h_{2,1}u_2/h_1)^2 + (u_{3,2} - h_{2,3}u_2/h_3)^2 \right\} / (2h_2^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{33} &= (u_{3,3} + h_{3,1}u_1/h_1 + h_{3,2}u_2/h_2)/h_3 + \{(u_{3,3} + h_{3,1}u_1/h_1 + h_{3,2}u_2/h_2)^2 \\
&\quad + (u_{1,3} - h_{3,1}u_3/h_1)^2 + (u_{2,3} - h_{3,2}u_3/h_2)^2\}/(2h_3^2) \\
\varepsilon_{12} &= (h_1u_{1,2} + h_2u_{2,1} - h_{2,1}u_2 - h_{1,2}u_1)/(h_1h_2) + \{(u_{1,1} + h_{1,2}u_2/h_2 \\
&\quad + h_{1,3}u_3/h_3)(u_{1,2} - h_{2,1}u_2/h_1) + (u_{2,2} - h_{2,3}u_3/h_3 + h_{2,1}u_1/h_1)(u_{2,1} - h_{1,2}u_1/h_2) \\
&\quad + (u_{3,1} - h_{1,3}u_1/h_3)(u_{3,2} - h_{2,3}u_2/h_2)\}/(h_1h_2) \\
\varepsilon_{13} &= (h_1u_{1,3} + h_3u_{3,1} - h_{3,1}u_3 - h_{1,3}u_1)/(h_1h_3) + \{(u_{1,1} + h_{1,2}u_2/h_2 \\
&\quad + h_{1,3}u_3/h_3)(u_{1,3} - h_{3,1}u_3/h_1) + (u_{3,3} - h_{3,2}u_2/h_2 + h_{2,1}u_1/h_1)(u_{3,1} - h_{1,3}u_1/h_3) \\
&\quad + (u_{2,1} - h_{1,2}u_1/h_2)(u_{2,3} - h_{3,2}u_3/h_2)\}/(h_1h_3) \\
\varepsilon_{23} &= (h_3u_{3,2} + h_2u_{2,3} - h_{3,2}u_3 - h_{2,3}u_2)/(h_2h_3) + \{(u_{2,2} + h_{2,3}u_3/h_3 \\
&\quad + h_{2,1}u_1/h_1)(u_{2,3} - h_{3,2}u_3/h_2) + (u_{3,3} - h_{3,1}u_1/h_1 + h_{3,2}u_2/h_2)(u_{3,2} - h_{2,3}u_2/h_3) \\
&\quad + (u_{1,2} - h_{2,1}u_2/h_1)(u_{1,3} - h_{3,1}u_3/h_1)\}/(h_2h_3)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Buradaki u_1 , u_2 ve u_3 terimleri, sırasıyla ξ_1 , ξ_2 ve ξ_3 eksen yönlerindeki yer değiştirme vektörünün (\bar{u}) bileşenleridir ve $(\cdot)_{,i} = \partial(\cdot) / \partial \xi_i$ $i=1, 2$ ve $(\cdot)_{,3} = \partial(\cdot) / \partial \zeta_i$ eşitlikleri de geçerlidir.

Şekil 2.2'de yer alan kabuk eleman dikkate alındığında, yukarıda elde edilen bütün terimler Eş. 2.12 eşitliğinde elde edilmiş olan kabuk elemana ait orta yüzey metrik katsayıları türünden ifade edilir:

$$h_1 = g_1 \left(1 - \frac{\zeta}{R_1} \right) \quad ; \quad h_2 = g_2 \left(1 - \frac{\zeta}{R_2} \right) \quad ; \quad h_3 = 1 \tag{2.20}$$

İnce yapıdaki kabuk eleman için eksen normal yönündeki yer değiştirme teriminin (u_3) kalınlık boyunca sabit kaldığı kabul edilir. Şekil değiştirme – yer

değişirme bağıntılarında yer alan eksen normal yönündeki şekil değiştirmeler, $h_3 = 1$ durumunda aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.21)$$

Bu çalışmada ele alınan koordinat sisteminde olduğu gibi eğrilik eksenlerinin parametrik eğriler olarak seçildiği koordinat sistemlerinde, sistemin pozisyonu ve yer değiştirmesi dikkate alınmadan yüzeyi tanımlamak için sadece metrik katsayılar (g_1^2 ve g_2^2) kullanılır ise

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{g_1}{R_1} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{g_2}{R_2} \right) = \frac{1}{R_1} \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} \quad (2.22)$$

ile

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{g_1} \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{g_2} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} \right) = - \frac{g_1 g_2}{R_1 R_2} \quad (2.23)$$

şeklinde bağıntılar yazılabilir. Yukarıda verilen bu üç eşitlik, Gauss-Codazzi bağıntıları olarak bilinir ve yüzeyler için sıkıştırılabilirlik şartları kabulünden elde edilen eşitliklerdir.

Eş. 2.22 ile Eş. 2.20 kullanılarak $h_{1,2}$ ve $h_{2,1}$ türevleri aşağıdaki gibi yeniden düzenlenir;

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial}{\partial \xi_2} \cdot \left[g_1 \left(1 - \frac{\zeta}{R_1} \right) \right] = \left(1 - \frac{\zeta}{R_2} \right) \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} &= \frac{\partial}{\partial \xi_1} \cdot \left[g_2 \left(1 - \frac{\zeta}{R_2} \right) \right] = \left(1 - \frac{\zeta}{R_1} \right) \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} \end{aligned} \quad (2.24)$$

İnce yapıdaki kabuk eleman için Kısım 2.3'de yapılan kabuller dikkate alındığında aşağıda verilen yaklaşımlar elde edilir;

$$\frac{1}{(1-\zeta/R_i)} \approx 1 + \frac{\zeta}{R_i} \quad i = (1,2) \quad (2.25)$$

$$\frac{1}{(1-\zeta/R_1)(1-\zeta/R_2)} \approx 1 + \zeta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Eş. 2.20 eşitliği, Eş. 2.19 eşitliğinde yerine yazılır, Eş. 2.21, Eş. 2.24 ve Eş. 2.25 bağıntıları elde edilen yeni eşitlikte kullanılır ise Eş. 2.19 eşitliğinde yer alan şekil değiştirme – yer değiştirme bağıntıları aşağıdaki gibi basitleştirilmiş olur;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= [u_{1,1}/g_1 + u_2 g_{1,2}/(g_1 g_2) - c_1 u_3](1 + \zeta/R_1) + \left\{ [u_{1,1}/g_1 + u_2 g_{1,2}/(g_1 g_2) - u_3/R_1]^2 \right. \\ &\quad \left. + [u_{2,1}/g_1 - u_1 g_{1,2}/(g_1 g_2)]^2 + [u_{3,1}/g_1 + u_1/R_1]^2 \right\} (1 + 2\zeta/R_1)/2 \\ \varepsilon_{22} &= [u_{2,2}/g_2 + u_1 g_{2,1}/(g_1 g_2) - u_3/R_2](1 + \zeta/R_2) + \left\{ [u_{2,2}/g_2 + u_1 g_{2,1}/(g_1 g_2) - u_3/R_2]^2 \right. \\ &\quad \left. + [u_{1,2}/g_2 - u_2 g_{2,1}/(g_1 g_2)]^2 + [u_{3,2}/g_2 + u_2/R_2]^2 \right\} (1 + 2\zeta/R_2)/2 \\ \varepsilon_{12} &= [u_{2,1} - u_1/g_{1,2}/g_2](1 + \zeta/R_1)/g_1 + [u_{1,2} - u_2 g_{2,1}/g_1](1 + \zeta/R_2)/g_2 \\ &\quad + \left\{ [u_{1,1} + u_2 g_{1,2}/g_2 - u_3/R_1 g_1][u_{1,2} - u_2 g_{2,1}/g_1] \right. \\ &\quad \left. + [u_{2,2} + u_1 g_{2,1}/g_1 - u_3 g_2/R_2][u_{2,1} - u_1 g_{1,2}/g_2] \right. \\ &\quad \left. + [u_{3,1} + u_1 g_1/R_1][u_{3,2} + u_3 g_2/R_2] \right\} [1 + \zeta(1/R_1 + 1/R_2)]/(g_1 g_2) \\ \varepsilon_{13} &= u_{1,3} + \frac{u_1}{R_1} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right) + u_{3,1} \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right)/g_1 \\ \varepsilon_{23} &= u_{2,3} + \frac{u_2}{R_2} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right) + u_{3,2} \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right)/g_2 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Eş. 2.26 eşitlikleri, kabuk eleman üzerinde yer alan herhangi bir noktanın şekil değiştirme – yer değiştirme bağıntılarını gösterir. Söz konusu nokta için kalınlık eksenine (ζ) göre yer değiştirme bileşenleri

$$\begin{aligned} u_1(\xi_1, \xi_2, \zeta) &= u \left(1 - \frac{\zeta}{R_1} \right) + \zeta \beta_1 + \zeta^2 \vartheta_1 + \zeta^3 \mu_1 + \zeta^4 \theta_1 \\ u_2(\xi_1, \xi_2, \zeta) &= v \left(1 - \frac{\zeta}{R_2} \right) + \zeta \beta_2 + \zeta^2 \vartheta_2 + \zeta^3 \mu_2 + \zeta^4 \theta_2 \\ u_3(\xi_1, \xi_2, \zeta) &= w \end{aligned} \quad (2.27)$$

eşitlikleri ile elde edilir. Burada, u , v , w , β_i , ϑ_i , μ_i , θ_i ve R_i ($i=1,2$) kabuk elemanın orta yüzey koordinatlarına (ξ_1 ve ξ_2) ait bileşenlerdir. ϑ_i , μ_i ve θ_i ($i=1, 2$) bileşenleri, kabuk elemanın alt ve üst yüzeylerindeki kayma gerilmelerinin (σ_{13} ve σ_{23}) sıfır olduğu durumda elde edilir. Eş. 2.26 eşitliğinde, Eş. 2.25 eşitliğindeki yaklaşımlar kullanılmaz ise kayma şekil değiştirmeleri aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13} &= u_{1,3} + \frac{u_1}{R_1} \left(1 - \frac{\zeta}{R_1} \right) + u_{3,1} / \left[g_1 \left(1 - \frac{\zeta}{R_1} \right) \right] \\ \varepsilon_{23} &= u_{2,3} + \frac{u_2}{R_2} \left(1 - \frac{\zeta}{R_2} \right) + u_{3,2} / \left[g_2 \left(1 - \frac{\zeta}{R_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Kabuk elemanın alt ve üst yüzeyindeki şekil değiştirmeleri elde etmek için Eş. 2.27 eşitliği, Eş. 2.28 eşitliğinde yerine yazılır ve $\zeta = \pm t/2$ alınır.

Sıfır kayma gerilme şartlarında, ϑ_1 , ϑ_2 , μ_1 , μ_2 , θ_1 ve θ_2 terimleri ihmal edilebilir. Dolayısıyla, Eş. 2.27 eşitliği aşağıdaki gibi yeniden düzenlenir;

$$\begin{aligned}
u_1(\xi_1, \xi_2, \zeta) &= u \left(1 - \frac{\zeta}{R_1} \right) + \zeta \beta_1 + \zeta^3 k (\beta_1 + w_{,1} / g_1) \\
u_2(\xi_1, \xi_2, \zeta) &= v \left(1 - \frac{\zeta}{R_2} \right) + \zeta \beta_2 + \zeta^3 k (\beta_2 + w_{,2} / g_2) \\
u_3(\xi_1, \xi_2, \zeta) &= w
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Burada u , v ve w terimleri, kabuk eleman orta yüzeyinin yer değiştirme bileşenleridir. $k = -4/(3t^2)$ eşitliği ile belirlenir. β_1 ve β_2 terimleri, eksenlere ait dönme bileşenleridir. u , v , w , R_1 , R_2 , β_1 , β_2 , g_1 ve g_2 bileşenleri, kabuk elemanın orta yüzey koordinat eksenlerine (ξ_1 ve ξ_2) ait ζ 'dan bağımsız bileşenlerdir.

Eş. 2.29 eşitliğinde elde edilen u_1 , u_2 ve u_3 yer değiştirme bileşenleri Eş. 2.26 eşitliğinde yerine yazılır ise şekil değiştirme bileşenleri, kabuk elemanın orta yüzeyine ait yer değiştirme ve dönme bileşenleri cinsinden aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \varepsilon_1^0 + \sum_{p=1}^7 \zeta^p K_{1p} \\
\varepsilon_{22} &= \varepsilon_2^0 + \sum_{p=1}^7 \zeta^p K_{2p} \\
\varepsilon_{12} &= \varepsilon_3^0 + \sum_{p=1}^7 \zeta^p K_{3p} \\
\varepsilon_{23} &= \varepsilon_4^0 + \sum_{p=1}^7 \zeta^p K_{4p} \\
\varepsilon_{13} &= \varepsilon_5^0 + \sum_{p=1}^7 \zeta^p K_{5p}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Eş. 2.30 eşitliğindeki ϵ_1^0 , ϵ_2^0 , ϵ_3^0 , ϵ_4^0 ve ϵ_5^0 terimleri, kabuk elemanın orta yüzeyine ait şekil değiştirme bileşenleridir. K_{ip} ($i=1,2,\dots,5$ ve $p=1,2,\dots,7$) parametreleri, klasik ince kabuk eleman teorisine ait eğrilik terimleridir. Eş. 2.30 eşitliğinin matris formu aşağıdaki gibidir;

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon^0\} + [K]\{\zeta\} \quad (2.31)$$

Burada yer alan terimlerin açılımı aşağıdaki eşitlikler ile ifade edilir;

$$\{\epsilon\}^T = \{\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{12} \quad \epsilon_{23} \quad \epsilon_{13}\},$$

$$\{\epsilon^0\}^T = \{\epsilon_1^0 \quad \epsilon_2^0 \quad \epsilon_3^0 \quad \epsilon_4^0 \quad \epsilon_5^0\}, \quad (2.32)$$

$$\{\zeta\}^T = \{\zeta \quad \zeta^2 \quad \zeta^3 \quad \zeta^4 \quad \zeta^5 \quad \zeta^6 \quad \zeta^7\}$$

ve

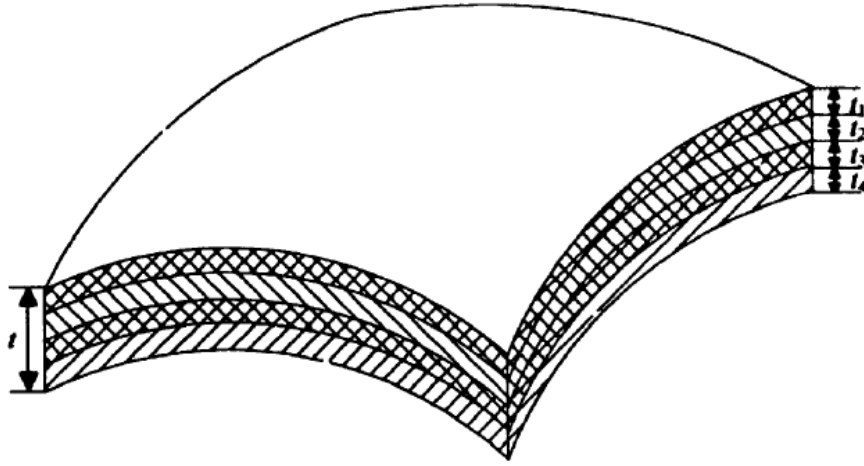
$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 & 0 & 0 \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & 0 & 0 & 0 \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Kabuk elemanın orta yüzeyine ait şekil değiştirme bileşenleri ϵ_i^0 ($i=1, 2, \dots, 5$) EK-1'de, $[K]$ matris bileşenlerinin açılımları EK-2'de verilmiştir.

2.6. Kompozit Malzemeler İçin Gerilme – Şekil Değiştirme Bağlılıkları

Bu kısımda, katmanlı yapıya sahip kompozit kabuk eleman için gerilme - şekil değiştirme bağıntıları incelenmiştir. Burada ele alınan kabuk eleman, ortotropiktir ve farklı türdeki fiber malzemeye sahip N adet katmandan oluşmaktadır.

Toplam kalınlık t terimi ile her bir katmanın kalınlığı da t_1, t_2, \dots, t_N terimleri ile gösterilir ($t = t_1 + t_2 + \dots + t_N$). Şekil 2.3'de dört katmanlı bir kabuk eleman örneği gösterilmiştir.



Şekil 2.3. Katmanlı yapıya sahip kompozit kabuk eleman geometrisi [7]

Büyük deformasyon analizlerinde, sistemin kinematikini ve bünye bağıntılarını tam ve uygun olarak oluşturmak zorunludur. Önceki kısımlarda, küçük şekil değiştirme koşulları için Lagrange Formülleri kullanılarak sistemin kinematik davranışı belirlenmiştir. Büyük deformasyon analizlerinde elastik malzeme davranışı, Lagrange Formüllerindeki lineer elastik bağıntılar ile aşağıdaki gibi gösterilir;

$$\sigma_{ij} = C_{ijrs} \cdot \gamma_{rs} \quad (2.34)$$

Burada;

σ_{ij} : 2 nci Piola-Kirchhoff gerilmesi,

γ_{rs} : Green 'in şekil değiştirme tensörü,

C_{ijrs} : Elastik tensör sabiti

şeklinde ifade edilir. Fiberden oluşan her bir katman malzemesinin izotropik olduğu kabul edilir. Dolayısıyla, gerilme-şekil değiştirme arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibidir;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

Kabuk eleman için yaklaşık olarak düzlem-gerilme durumu ($\sigma_{33} \approx 0$) kabulü yapıldığında Eş. 2.35 eşitliklerindeki ϵ_{33} şekil değiştirmesi aşağıda eşitlik ile elde edilir;

$$\epsilon_{33} = -\epsilon_{11}C_{13}/C_{33} - \epsilon_{22}C_{23}/C_{33} \quad (2.36)$$

Böylece elde edilen Eş. 2.36 eşitliği, Eş. 2.35 eşitliğinde yerine yazılır ise

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11}/\Delta & \nu_{21}E_{11}/\Delta & 0 & 0 & 0 \\ \nu_{21}E_{11}/\Delta & E_{22}/\Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \end{Bmatrix} \quad (2.37)$$

eşitliği elde edilir.

Burada;

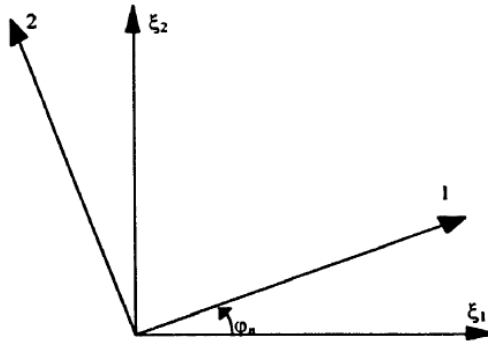
E_{11} ve E_{22} : Elastiklik Modülleri,
 G_{12} , G_{23} ve G_{13} : Katılık Modülleri,
 ν_{12} ve ν_{21} : Poisson oranları,
 $\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21}$

şeklinde ifade edilir. Bu doğrultuda yukarıda elde edilen eşitliğin matris formu aşağıdaki gibidir;

$$\{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\} \quad (2.38)$$

Daha önceden de belirtildiği gibi, Eş. 2.38 eşitliğinde ifade edilen bağıntının doğruluğu, ortotropik katmanlı yapıdaki kabuk eleman koordinatlarının kullanıldığı durum için geçerlidir.

Pratikte, katmanlı kabuk elemanın her bir katmanı birbirinden farklı fiber malzemesinden yapılmıştır ve katman malzemesinin referans eksene göre diziliş yönleri birbirinden farklıdır. n adet katmana ait koordinat sistemi Şekil 2.4'de gösterilmiştir.



Şekil 2.4. Katman malzeme ekseni için koordinat sistemi [7]

Burada, malzeme eksenleri 1 ve 2 olarak gösterilmiştir. 1 eksen, lif yönüne paralel yönü, 2 eksen ise lif yönüne normal yönü temsil etmektedir. n adet katman için lif eksenleri ile kabuk eleman orta yüzey koordinat eksenleri (ξ_1 ve ξ_2) arasında φ_n açısı kadar bir açı bulunmaktadır. Dolayısıyla, gerilme – şekil değiştirme bağıntılarının, malzeme koordinatlarından kabuk eleman koordinatlarına dönüştürülmesi gerekmektedir. Bu nedenle, aşağıda verilen dönüşüm dikkate alınmalıdır [10];

$$\{\epsilon'\} = [T]\{\epsilon\} \quad (2.39)$$

Burada $\{\epsilon'\}$ terimi, malzeme eksenine (1, 2) ait şekil değiştirmeyi, $\{\epsilon\}$ terimi ise kabuk eleman koordinat sistemine (ξ_1, ξ_2) ait şekil değiştirmeyi gösterir. Dönüşüm matrisi $[T]$ ise aşağıda verilmiştir;

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi_n & \sin^2 \varphi_n & \cos \varphi_n \sin \varphi_n & 0 & 0 \\ \sin^2 \varphi_n & \cos^2 \varphi_n & -\cos \varphi_n \sin \varphi_n & 0 & 0 \\ -2\cos \varphi_n \sin \varphi_n & 2\cos \varphi_n \sin \varphi_n & \cos^2 \varphi_n - \sin^2 \varphi_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi_n & -\sin \varphi_n \\ 0 & 0 & 0 & \sin \varphi_n & \cos \varphi_n \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Yukarıda ele alınan her iki koordinat sistemine ait şekil değiştirmeler için enerji yoğunlukları aşağıdaki bağıntı ile ifade edilir:

$$\{\delta\epsilon'\}^T \{\sigma'\} = \{\delta\epsilon\}^T \{\sigma\} \quad (2.41)$$

Eş. 2.39 burada yerine yazılır ise her iki koordinat sistemine ait gerilmeler

$$\{\sigma\} = ([T]^T)^{-1} \{\sigma'\} \quad (2.42)$$

eşitliği ile elde edilir. Eş. 2.39 eşitliği ile Eş. 2.42 eşitlikleri kullanılarak malzeme koordinatlarına ait gerilme – şekil değiştirme bağıntıları

$$\{\sigma'\} = [Q]\{\epsilon'\} \quad (2.43)$$

eşitliği ile kabuk eleman koordinatlarına ait gerilme – şekil değiştirme bağıntıları da

$$\{\sigma\} = [\bar{Q}]\{\epsilon\} \quad (2.44)$$

eşitliği ile elde edilir. Burada, $[\bar{Q}]$ aşağıdaki gibi bulunur;

$$[\bar{Q}] = [T]^T [Q] [T] \quad (2.45)$$

Malzeme koordinatları ile kabuk eleman koordinatlarının aynı olduğu durumda ($\varphi_n=0$), $[\bar{Q}]$ matrisi ile $[Q]$ matrisi eşit olur.

Matris formda ve kabuk eleman koordinatlarında (ξ_1, ξ_2 ve ζ) n adet katman yapı için gerilme – şekil değiştirme bağıntıları aşağıdaki eşitlik ile ifade edilir:

$${}^n \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^n \bar{Q}_{11} & {}^n \bar{Q}_{12} & {}^n \bar{Q}_{13} & 0 & 0 \\ {}^n \bar{Q}_{12} & {}^n \bar{Q}_{22} & {}^n \bar{Q}_{23} & 0 & 0 \\ {}^n \bar{Q}_{13} & {}^n \bar{Q}_{23} & {}^n \bar{Q}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^n \bar{Q}_{44} & {}^n \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & {}^n \bar{Q}_{45} & {}^n \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} {}^n \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

Burada ${}^n [\bar{Q}]$ matris bileşenlerinin açılımları EK-3'de verilmiştir.

2.7. Enerji Denklemleri

Elastik yapıdaki bir elemanın toplam enerjisi, elastik değişimler ihtiva eden şekil değiştirme enerjisi ve yer değiştirmeler için kinetik enerji ile eleman ve eleman yüzeyine etki eden potansiyel yükleri içerir. Bu bölümde, katmanlı yapıdaki kabuk elemanın hareket denklemleri Hamilton Yöntemi kullanılarak türetilmiştir. Bu yöntemde göre toplam enerjideki değişim τ_0 ile τ_1 zaman aralığında sifıra eşit olmak zorundadır.

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} (U - T - W_f) d\tau = 0 \quad (2.47)$$

Burada;

U: Deformasyon enerjisi,

T: Kinetik enerji,

W_f : Dış kuvvetler ile gövde kuvvetleri tarafından yapılan virtüel iş

şeklinde ifade edilir. İleriki kısımlarda U, T ve W_f eşitlikleri elde edilecektir.

2.7.1. Deformasyon enerjisi

Kompozit yapıdaki kabuk elemanı için deformasyon enerjisi

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left(\sum_{n=1}^N \int_{t_n} \{\sigma\}_n^T \{\varepsilon\}_n d\zeta \right) dA \quad (2.48)$$

eşitliği ile ifade edilir [11].

Burada;

A: Kabuk elemanın orta yüzey alanı,

t_n : n adet katman kalınlığı,

N: Toplam katman sayısı

şeklinde ifade edilir. Eş. 2.46 eşitliğindeki gerilme – şekil değiştirme bağıntıları, Eş. 2.48 eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left(\sum_{n=1}^N \int_{t_n} \{\epsilon\}_n^T [{}^n\bar{Q}]^T \{\epsilon\}_n d\zeta \right) dA \quad (2.49)$$

eşitliği elde edilir. Eş. 2.31 eşitliği, Eş. 2.49 eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left(\sum_{n=1}^N \int_{t_n} (\{\epsilon^0\}^T \{{}^n\bar{Q}\}^T \{\epsilon^0\} + 2\{\epsilon^0\}^T \{{}^n\bar{Q}\}^T [K]\{\zeta\} + \{\zeta\}^T [K]^T \{{}^n\bar{Q}\}^T [K]\{\zeta\}) d\zeta \right) dA \quad (2.50)$$

eşitliği elde edilir. Şekil değiştirme vektörü $\{\epsilon^0\}$ ile $[{}^n\bar{Q}]$ ve $[K]$ matrisleri açık olarak yazılır ise;

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left(\sum_{n=1}^N \int_{t_n} \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \epsilon_j^0 \epsilon_i^0 {}^n\bar{Q}_{ij} + 2 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{l=1}^7 \epsilon_j^0 K_{il} \zeta^l {}^n\bar{Q}_{ij} \\ & + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{l=1}^7 \sum_{m=1}^7 K_{jl} K_{im} \zeta^{1+m} {}^n\bar{Q}_{ij} \end{aligned} \right\} d\zeta \right) dA \quad (2.51)$$

eşitliği elde edilir. Yukarıda eşitlik, elemanlara ait elastik matris bileşenlerinin (${}^n\bar{Q}_{ij}$) katmanlar arasındaki değişimini göstermektedir. Dolayısıyla, elemanın kalınlığı boyunca integral alındığında Eş. 2.51 aşağıdaki gibi elde edilir.

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left\{ \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \varepsilon_j^0 \varepsilon_i^0 A_{ij} + 2 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{l=1}^7 \varepsilon_j^0 K_{il}^1 A_{ij} + \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{l=1}^7 \sum_{m=1}^7 K_{jl} K_{im}^{1+m} A_{ij} \right\} dA \quad (2.52)$$

Burada yer alan ${}^p A_{ij}$ terimi aşağıdaki eşitlik ile ifade edilir.

$${}^p A_{ij} = \sum_{n=1}^N \int_{t_n} \left\{ \zeta^p \bar{Q}_{ij} \right\} d\zeta, \quad p = 0, 1, 2, \dots, 14 \quad (2.53)$$

Yer değiştirmeler ile yer değiştirme türevleri cinsinden deformasyon enerjisi elde edilmek istenirse, Şekil değiştirme bileşenleri, yer değiştirme terimleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılır;

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^0 &= \{D_{i0}\}^T \{q\} + (1/2)\{q\}^T [E_{i0}] \{q\} \quad ; \quad i = 1,2,3 \\ &= \{D_{i0}\}^T \{q\} \quad ; \quad i = 4,5 \\ K_{ij} &= \{D_{il}\}^T \{q\} + (1/2)\{q\}^T [E_{il}] \{q\} \quad ; \quad i < 4 \quad \text{ve} \quad l = 1,2,3,4 \\ &= (1/2)\{q\}^T [E_{il}] \{q\} \quad ; \quad i < 4 \quad \text{ve} \quad l = 4,5 \\ &= \{D_{il}\}^T \{q\} \quad ; \quad i = 4,5 \quad \text{ve} \quad l = 1,2,3 \\ &= 0 \quad ; \quad i = 4,5 \quad \text{ve} \quad l > 4 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Burada $\{D_{i0}\}$ ve $\{D_{il}\}$ vektörleri 18×1 , $[E_{i0}]$ ve $[E_{il}]$ matrisleri de 18×18 'lik matrislerdir. Bu matrisler; metrik katsayılarından, eğrilik yarıçapından, k sabitinden ve bağımsız yer değiştirme bileşenlerinden oluşur.

EŞ. 2.54 eşitliği kullanılarak yer değiştirme vektörü $\{q\}$ aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\{q\}^T = \left\{ u \quad u_{,1} \quad u_{,2} \quad v \quad v_{,1} \quad v_{,2} \quad w \quad w_{,1} \quad w_{,2} \right. \\ \left. w_{,11} \quad w_{,22} \quad w_{,12} \quad \beta_1 \quad \beta_{1,1} \quad \beta_{1,2} \quad \beta_2 \quad \beta_{2,1} \quad \beta_{2,2} \right\} \quad (2.55)$$

Eş. 2.52 deformasyon enerjisi eşitliğinde, Eş. 2.54 eşitliği yerine yazılır ve terimler yeniden düzenlenirse deformasyon enerji eşitliği aşağıdaki eşitlik ile elde edilir;

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{q\}^T [\bar{K}] dA \quad (2.56)$$

Burada yer alan $[\bar{K}]$, lineer terimlerden oluşan 18x18 boyutunda simetrik bir matristir [7].

Katılık matrisinin uygun formatta elde edilmesi

Önceki kısımda, lineer hareket denklemleri toplam enerjideki değişim dikkate alınarak Hamilton Yöntemi ile Eş. 2.47 eşitliğinde ifade edilmiştir. Bu denklem her zaman adımı için Newton-Raphson iterasyon tekniği kullanılarak çözülür.

Eş. 2.56 eşitliğinde ifade edilen deformasyon enerji eşitliğindeki $[\bar{K}]$ matrisi yer değiştirmelerden bağımsızdır. $[\bar{K}]$ matrisindeki her terim

$$\bar{K}_{ij} = {}^{1+m}A_{ij} \{D_{jl}\} \{D_{im}\}^T \quad (2.57)$$

$\begin{matrix} 18 \times 1 & & 1 \times 18 \end{matrix}$

şeklinde genel bir format ile elde edilir. Elde edilen matris bileşenleri ile 18x18 boyutunda bir matris oluşturulur.

Yukarıda bahsedilenlere göre, Eş. 2.56 ile verilen deformasyon enerji eşitliğinin, Eş. 2.57 açılımından oluştuğu görülmektedir. Ancak deformasyon enerjisindeki değişim ile elde edilen sonuç, yukarıdaki açılımdan elde edilen format ile tamamen farklıdır. Bu şu anlama gelmektedir: Hareket denklemindeki katılık matris formatları ile iterasyon çözümünden elde edilen matris formatları tamamen farklı olmaktadır. Dolayısıyla, iterasyon

adımlarında çok fazla hesaplamalar ve karmaşık işlemlerin çözülmesi durumlarıyla karşılaşılacaktır. Bunun önüne geçmek için $[\bar{K}]$ matris formatını uygun hale getirmek gerekmektedir.

Eş. 2.56 eşitliğinde yer alan $[\bar{K}]$ katılık matrisi bileşenleri

$$(1/2) \int_A \{q\}^T {}^{1+m} A_{ij} \{D_{jl}\} \{D_{im}\}^T \{q\} dA \quad (2.58)$$

şeklinde ifade edilir ise Eş. 2.56 ile verilen deformasyon enerji eşitliği aşağıdaki gibi yazılır;

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{q\}^T [\bar{K}] \{q\} dA \quad (2.59)$$

Elde edilen yeni formattaki $[\bar{K}]$ katılık matrisi ile denge denklemlerinde ve iterasyon adımlarında çözüm elde edilebilmektedir. $[\bar{K}]$ lineer terimlerden oluşan katılık matrisinin açılımı EK-4'de verilmiştir.

2.7.2. Kinetik enerji

Kompozit yapıdaki kabuk elemanı için kinetik enerji eşitliği aşağıdaki gibi yazılır [11];

$$T = \frac{1}{2} \int_A \left(\sum_{n=1}^N \int_{t_n} \rho_n \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial \tau} \right)^2 \right] d\zeta \right) dA \quad (2.60)$$

Burada ρ_n terimi, n adet katman için kütle yoğunluğunu, τ terimi ise zamanı ifade eder. Eş. 2.29 eşitliğindeki u_1 , u_2 ve u_3 yer değiştirme bileşenleri, Eş. 2.60 eşitliğinde yerine yazılır, elde edilen eşitlik zaman ve yer değiştirme bileşenlerine ayrılır ise

$$T = \frac{1}{2} \int_A \sum_{n=1}^N \int_{t_n} \{\dot{\bar{q}}\}^T [M] \{\dot{\bar{q}}\} dA \quad (2.61)$$

eşitliği elde edilir. Burada, çok küçük bir kabuk eleman için elde edilen kütle matrisi $[M]$, atalet terimleri ile her katman için yoğunluk parametrelerini içerir. $[M]$ matrisi EK-5'de ayrıntılı olarak verilmiştir. Yer değiştirme vektörü ise aşağıdaki gibidir;

$$\{\dot{\bar{q}}\}^T = \{\dot{u} \quad \dot{v} \quad \dot{w} \quad \dot{w}_{,1} \quad \dot{w}_{,2} \quad \dot{\beta}_{,1} \quad \dot{\beta}_{,2}\} \quad (2.62)$$

2.7.3. Dış kuvvetler ile gövde kuvvetleri tarafından yapılan virtüel iş

Kabuk eleman yüzeyi boyunca birim alana etkiyen yüklere dış kuvvetler, elemanın hacmine etkiyen yerçekimi, merkezkaç ve sönümlenme kuvvetleri de gövde kuvvetleri olarak ifade edilir. Bu çalışmada, hareket denklemi elde edilirken, dış kuvvet olarak sadece sönümlenme kuvvetleri ele alınmıştır. Dolayısıyla, dış kuvvetler tarafından yapılan virtüel iş eşitliği aşağıdaki gibi yazılır;

$$\begin{aligned} W_f &= \int_A \{\tilde{q}\}^T \{f_e\} - \sum_{n=1}^N \int_{t_n} c_n (u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2 + u_3 \dot{u}_3) d\zeta dA \\ &= \int_A \{\tilde{q}\}^T \{f_e\} - \{\bar{q}\}^T [C] \{\dot{\bar{q}}\}^T dA \end{aligned} \quad (2.63)$$

Burada;

$\{f_e\}$: Dış kuvvet vektörü,

c_n : n adet katman için sönümlenme katsayısı,

$[C]$: Sönümlenme matrisi

şeklinde ifade edilir. Yer değiştirme vektörü $\{\tilde{q}\}$ ise aşağıdaki gibi yazılır;

$$\{\tilde{q}\}^T = \{u \quad v \quad w \quad \psi_1 \quad \psi_2\} \quad (2.64)$$

Kabuk elemanı için sönümlenme özelliklerinin frekansa bağlı olduğu durumlarda sönümlenme parametrelerinin elde edilmesi bir hayli güçtür. Bu nedenle, [C] sönümlenme matrisi oluşturulurken komple bir kabuk eleman yapısına ait kütle matrisi ile katılık matrislerinin deneysel sonuçlarla beraber kullanılması gerekmektedir.

2.8. Hareket Denklemi

Bu kısımda katmanlı yapıdaki kompozit bir kabuk elemanı için hareket denklemi Hamilton Prensipli kullanarak elde edilmiştir. Bu yöntemin seçilmesindeki amaç, yöntemin basit olması ve yer değiştirme bileşenlerini temsil eden yüzey fonksiyonları formatına uygun olmasıdır. Yönteme göre τ_0 ile τ_1 zaman aralığında dış kuvvetler tarafından yapılan iş ile potansiyel ve kinetik enerjideki değişim sıfıra eşittir;

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} (U - T - W_f) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\delta U - \delta T - \delta W_f) dt = 0 \quad (2.65)$$

Burada Eş. 2.59, Eş. 2.61 ve Eş.2.63 eşitliklerinde elde edilen deformasyon enerjisi, kinetik enerji ve dış kuvvetler ile gövde kuvvetleri tarafından yapılan virtüel iş eşitlikleri, yer değiştirme ve dönme vektör terimlerinden oluşmaktadır.

Katmanlı yapıya sahip bir kabuk eleman için hareket denklemi, bilinmeyen kontrol parametrelerine göre toplam enerjideki değişimin elde edilmesi ile bulunur.

Toplam enerjideki değişim, elde edilen her bir enerjideki değişimlerin cebirsel toplamıdır. Elde edilen Eş. 2.59, Eş. 2.61 ve Eş. 2.63'lerindeki enerji değişimleri, Eş. 2.65'de yerlerine doğrudan yazılamaz. Çünkü söz konusu eşitliklerdeki yer değiştirme bileşenleri farklı formatlardadır. Dolayısıyla, Eş.2.59, Eş. 2.61 ve Eş. 2.63'lerindeki her bir yer değiştirme bileşeni için geometriye uygun olarak şekil fonksiyonlarının tanımlanması gerekmektedir.

Örnek olarak geometri için Bezier yüzey yamaları kullanılırsa, kabuk elemanın orta yüzeyi için yer değiştirme bileşenleri (u , v ve w) ve dönme vektörleri (β_1 ve β_2), Bezier yüzey yamalarına göre aşağıdaki gibi tanımlanır [4-7];

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{m+1} f_j(\eta) f_i(\xi) P u_{ij} \\
 v &= \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{m+1} f_j(\eta) f_i(\xi) P v_{ij} \\
 w &= \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{m+1} f_j(\eta) f_i(\xi) P w_{ij} \\
 \beta_1 &= \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{m+1} f_j(\eta) f_i(\xi) P \beta_{1ij} \\
 \beta_2 &= \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{m+1} f_j(\eta) f_i(\xi) P \beta_{2ij}
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Burada, $P u_{ij}$, $P v_{ij}$, $P w_{ij}$, $P \beta_{1ij}$ ve $P \beta_{2ij}$ $(m+1)(n+1)$ kontrol noktalarındaki yer değiştirme alanlarını (u, v, w , β_1 ve β_2) ifade eder. Dolayısıyla, kabuk elemanın yer değiştirme ve dönme vektörleri, toplamda $5(m+1)(n+1)$ kontrol noktaları ile tanımlanır. Bu kontrol noktaları bilinmeyen parametrelerdir.

Eş.2.59, Eş. 2.61 ve Eş. 2.63'de elde edilen enerji değişimleri, Bezier yüzey yamaları kullanılarak yeniden elde edilir. Elde edilen yeni enerji değişimleri, Eş. 2.65 eşitliğinde yerlerine yazılır ve Hamilton Yöntemi uygulanırsa aşağıdaki gibi aynı formatta bir eşitlik elde edilir;

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \left(\{\delta P\}^T [\tilde{K}]\{P\} + \{\delta P\}^T [\tilde{M}]\{\ddot{P}\} + \{\delta P\}^T [\tilde{C}]\{\dot{P}\} - \{\delta P\}^T \{\tilde{F}\} \right) d\tau = 0 \quad (2.67)$$

Burada δP değişimi tamamen keyfidir. Dolayısıyla Eş. 2.67 eşitliğindeki her bir δP değişim katsayıları sırasıyla ortadan kalkar. Sonuçta aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$[\tilde{M}]\{\ddot{P}\} + [\tilde{C}]\{\dot{P}\} + [\tilde{K}]\{P\} = \{\tilde{F}\} \quad (2.68)$$

Elde edilen Eş. 2.68 eşitliği, katmanlı yapıdaki bir kabuk elemanı için lineer hareket denklemini verir. Bu eşitlik, küçük yer değiştirmeler ile küçük şekil değiştirmeler için geçerlidir.

2.9. Lineer Serbest Titreşim Analizi İçin Hareket Denkleminin Elde Edilmesi

Serbest titreşim analizinde, harici kuvvetler sıfıra eşittir ve yapısal sönümlenme ihmal edilebilir. Dolayısıyla, Eş. 2.68 eşitliği ile verilen lineer hareket denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir;

$$[\tilde{M}]\{\ddot{P}\} + [\tilde{K}]\{P\} = 0 \quad (2.69)$$

3. DAİRESEL SİLİNDİR KABUK ELEMAN İÇİN TEMEL DENKLEMLER

3.1. Genel

Önceki bölümde, katmanlı kompozit yapıdaki ince kabuk elemanın hareket denklemleri elde edilmiştir. Ancak, Eş. 2.66 eşitliğinde verilen yer değiştirme bileşenleri (u , v ve w) ve dönme vektörleri (β_1 ve β_2) için tanımlanan şekil fonksiyonlarının elde edilmesi, dış lastik gibi karmaşık yapıdaki geometriler için kolay olmamaktadır. Hatta bu tür bilgilere literatürde de yer verilmemektedir. Bu bölümde işlemleri basitleştirmek için karmaşık dış lastik geometrisi yerine, dış lastik geometrisine göre daha basit olan dairesel silindir geometrisi incelenmiştir.

Bu bölümde ele alınan temel denklemler; birinci dereceden kayma deformasyon teorisine dayanan, ince kalınlıklı, dönme yönünde eksen bileşenlerini içeren dairesel silindir kabuk eleman için türetilmiştir.

3.2. Elastik Şekil Değiştirme – Yer Değiştirme Bağlıları

Burada Bölüm 2'de üzerinde durulan kabuk eleman koordinatları (ξ_1 , ξ_2 ve ζ) yerine dairesel silindir kabuk eleman koordinatları (x , θ ve z) kullanılmıştır. Burada, x -eksenel koordinat bileşenini, θ -dairese koordinat bileşenini ve z -radyal koordinat bileşenini temsil etmektedir.

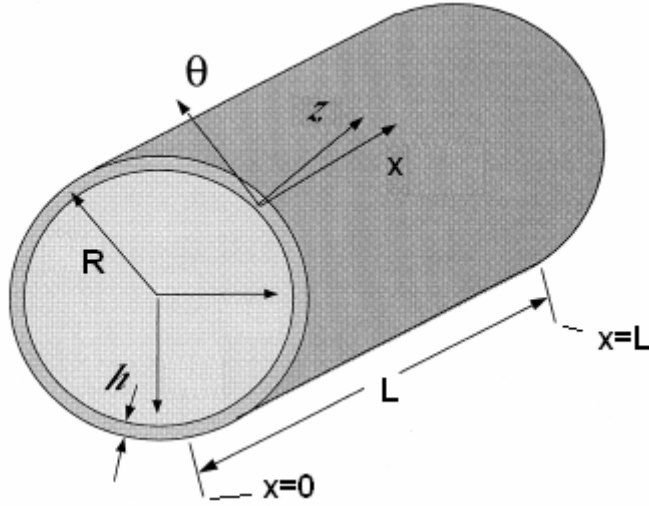
Şekil 3.1'de;

h : Kalınlık,

L : Uzunluk,

R : Yarıçap ve

ρ : Yoğunluk parametrelerini içeren izotropik yapıdaki bir kabuk elemanın orta yüzeyi gösterilmiştir [12-14].



Şekil 3.1. Dairesel silindir kabuk elemanı için koordinat sistemi [12]

Dairesel silindir kabuk elemanı için sırasıyla x , θ ve z yönlerindeki yer değiştirme bileşenleri u'_1 , u'_2 ve u'_3 aşağıdaki gibi yazılır;

$$\begin{aligned} u'_1(x, \theta, z) &= u'(x, \theta) + \zeta \beta'_1(x, \theta) \\ u'_2(x, \theta, z) &= v'(x, \theta)(1 + \zeta) + \zeta \beta'_2(x, \theta) \\ u'_3(x, \theta, z) &= w'(x, \theta) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Burada u' , v' ve w' terimleri dairesel kabuk elemanın orta yüzeyi için x , θ ve z eksenleri yönlerindeki yer değiştirme bileşenleridir. β'_1 ve β'_2 sembolleri kabuk eleman orta yüzey normalinin aksenal ve dairesel yönlerindeki dönme bileşenleridir.

z kalınlık koordinat terimini, R kabuk elemanın orta yüzey yarıçap terimine bölerek boyutsuz Γ parametresi elde edilir. ($\Gamma = z / R$). Ayrıca, ince kabuk elemanı için Γ değerinin çok küçük olduğu kabul edilir. ($\Gamma \ll 1.0$). Eş 3.1'in vektör-matris formu aşağıdaki gibidir:

$$\{\Delta'\} = [\Gamma]\{\Delta\} \quad (3.2)$$

Burada $\{\Delta'\}^T = \{u'_1 \quad u'_2 \quad u'_3\}$ kabuk elemanı üzerindeki herhangi bir noktanın yer değiştirme bileşenlerini, $\{\Delta\}^T = \{u' \quad v' \quad w' \quad \beta'_1 \quad \beta'_2\}$ ise kabuk elemanın orta yüzeyi için yer değiştirme bileşenleri ile dönme bileşenlerini içermektedir. Ayrıca, $[\Gamma]$ aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Gamma & 0 \\ 0 & 1+\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Eş. 2.30 eşitliğinde kabuk elemanı üzerindeki herhangi bir nokta için elde edilen şekil değiştirme – yer değiştirme bağıntıları, dairesel silindir kabuk elemanı için aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\begin{aligned} \epsilon'_{xx} &= \frac{\partial u'_1}{\partial x} \\ \epsilon'_{\theta\theta} &= \frac{1}{R} \left(\frac{1}{1+\Gamma} \right) \left(\frac{\partial u'_2}{\partial \theta} + u'_3 \right) \\ \epsilon'_{x\theta} &= \frac{1}{R} \left(\frac{1}{1+\Gamma} \right) \frac{\partial u'_1}{\partial \theta} + \frac{\partial u'_2}{\partial x} \\ \epsilon'_{xz} &= \frac{\partial u'_1}{\partial z} + \frac{\partial u'_3}{\partial x} \\ \epsilon'_{\theta z} &= \frac{\partial u'_2}{\partial z} + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{1+\Gamma} \right) \left(\frac{\partial u'_3}{\partial \theta} - u'_2 \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Eş. 3.1 eşitliği ile $(1+\Gamma)^{-1} \approx (1-\Gamma)$ yaklaşımı kullanılarak Eş. 3.4 eşitliğinin matris formu aşağıdaki gibidir;

$$\{\varepsilon'\}_{5 \times 1} = \{\Gamma\}_{5 \times 15} \{\chi\}_{15 \times 1} \quad (3.5)$$

Burada yer alan matrislerin açılımları aşağıdaki gibidir:

$$\{\varepsilon'\} = \{\varepsilon'_{xx} \quad \varepsilon'_{\theta\theta} \quad \varepsilon'_{\theta x} \quad \varepsilon'_{xz} \quad \varepsilon'_{\theta z}\},$$

$$\{\chi\}^T = \{\chi_1 \quad \chi_2 \quad \dots \quad \chi_{14} \quad \chi_{15}\} \text{ ve}$$

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} 1 & \Gamma & \Gamma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Gamma & \Gamma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Gamma & \Gamma^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Gamma & \Gamma^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \Gamma & \Gamma^2 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi $[\Gamma]$ matrisi, sadece kalınlık parametresinden oluşmaktadır. Kabuk elemanın orta yüzeyine ait şekil değiştirme ve eğrilik terimlerinden oluşan $\{\chi\}$ vektörünün bileşenleri EK-6'da verilmiştir.

3.3. Kompozit Malzemeler İçin Gerilme – Şekil Değiştirme Bağlıları

Kabuk elemanı için Eş. 2.38'de elde edilen gerilme şekil değiştirme bağlantıları dairesel silindir kabuk elemanı için de aynen geçerlidir. Eşitliğin matris formu dairesel silindir kabuk elemanı için aşağıdaki gibi yazılır:

$$\{\sigma'\} = [E']\{\varepsilon'\} \quad (3.6)$$

Burada, $\{\sigma'\}^T = \{\sigma'_{xx} \quad \sigma'_{\theta\theta} \quad \tau'_{x\theta} \quad \tau'_{xz} \quad \tau'_{\theta z}\}$ eşitliği ile belirlenir.

Ayrıca $[E']$ matrisi, hem izotropik hem de anizotropik malzeme özelliklerini belirlemek için kullanılan beşinci derece elastik matristir. Bu çalışmada malzemenin izotropik olduğu kabul edilmiştir. $[E']$ matrisinin açık hali aşağıdaki gibidir;

$$[E'] = \begin{bmatrix} E'_{11} & E'_{12} & 0 & 0 & 0 \\ E'_{21} & E'_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E'_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E'_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E'_{55} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Burada yer alan matris terimleri;

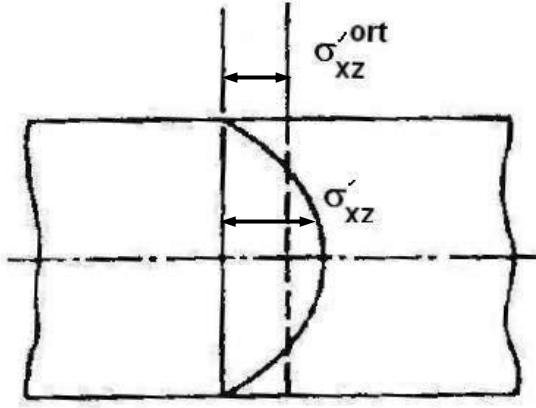
$$\begin{aligned} E'_{11} &= E'_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} \\ E'_{12} &= E'_{21} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \\ E'_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ E'_{44} &= E'_{55} = k'E'_{33} \end{aligned} \quad (3.8)$$

eşitlikleri ile ifade edilir. Burada ν , Poisson oranı ve E, Elastisite modülüdür. Yukarıda ifade edilen matris eşitliği, ince kabuk eleman teorisine dayanarak silindir koordinatlardaki 3 boyutlu elastik denklemlerden türetilmiştir [13].

Yaklaşık olarak sabit bir kayma şekil değiştirmesi ve kalınlık boyunca lineer değişen bir kayma gerilmesi, Eş. 3.1 ile verilen u'_1 ve u'_2 bileşenlerinin kalınlık boyunca parabolik olarak değişmesi kabulü ile türetilmektedir.

Şekil 3.2'de görüldüğü gibi kayma gerilmeleri kabuk elemanı yüzeyinin iç ve dış kısmında sifıra eşittir. Yüzeyin orta kısmında ise maksimum değerdedir. Araştırmacılar, ince kabuk eleman analizinde söz konusu

parabolik dağılımını da sonuçlara ilave edebilmek için Eş. 3.8 ile verilen k' kayma düzeltme faktörünü kullanmaktadırlar. Şekil 3.2'de gösterilen parabolik bir dağılım için kayma düzeltme faktörü $k' = 2/3$ değerine eşittir.



Şekil 3.2. Kayma gerilmesi dağılımı [15]

Burada;

σ'_{xz} : x-z yönündeki kayma gerilmesi ile

σ'^{ort}_{xz} : x-z yönündeki ortalama kayma gerilmesini ifade etmektedir.

Fiber takviyeli katmanlı kabuk elemanı için $[E']$ matrisi hesaplanırken, Kısım 2.6'da anlatılan ilave işlemlerin yapılması gerekmektedir. Katman eksenleri ile kabuk elemanın orta yüzey koordinat eksenleri arasında φ_n açısı kadar bir açı bulunduğundan $[E']$ matrisinin koordinat eksenleri, malzeme koordinatlarından kabuk eleman koordinatlarına dönüştürülmesi gerekmektedir. Bu nedenle, aşağıda verilen dönüşüm dikkate alınmalıdır.

$$[\bar{E}'] = [T]^T [E'] [T] \quad (3.9)$$

Burada, dönüşüm matrisi $[T]$ Eş. 2.40 eşitliğinde gösterilmiştir.

3.4. Hareket Denklemi

Enine kayma ve dönme yönünde eksen bileşenlerini içeren dairesel silindir kabuk eleman için hareket denklemleri aşağıda verilmiştir [15]:

$$-\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial \theta} + \rho h \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = q_x \quad (3.10)$$

$$-\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{Q_{\theta z}}{R} + \rho h \frac{\partial^2 v'}{\partial t^2} = q_\theta \quad (3.11)$$

$$-\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{N_{\theta\theta}}{R} + \rho h \frac{\partial^2 w'}{\partial t^2} = q_z \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - Q_{xz} - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \beta'_1}{\partial t^2} = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial \theta} - Q_{\theta z} - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \beta'_2}{\partial t^2} = 0 \quad (3.14)$$

Eş. 3.10 – Eş. 3.12 eşitliklerinde yer alan zar kuvvetleri

$$N_{xx} = K(\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{\theta\theta}) \quad (3.15)$$

$$N_{\theta\theta} = K(\epsilon_{\theta\theta} + \nu\epsilon_{xx}) \quad (3.16)$$

$$N_{x\theta} = \frac{K(1-\nu)}{2} \epsilon_{x\theta} \quad (3.17)$$

şeklinde ifade edilir. Burada yer alan K zar katılık terimi,

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad (3.18)$$

eşitliği ile elde edilir.

Eş. 3.13 – 3.14 eşitliklerinde yer alan eğilme momentleri

$$M_{xx} = D \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x} + \nu \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta} \right) \quad (3.19)$$

$$M_{\theta\theta} = D \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta} + \nu \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \right) \quad (3.20)$$

$$M_{x\theta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta} \right) \quad (3.21)$$

şeklinde ifade edilir. Burada yer alan D eğilme katılık terimi,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (3.22)$$

eşitliği ile elde edilir.

Eş. 3.11 – Eş. 3.14 eşitliklerinde yer alan enine kayma kuvvetleri

$$Q_{xz} = k'Gh\epsilon_{xz} \quad (3.23)$$

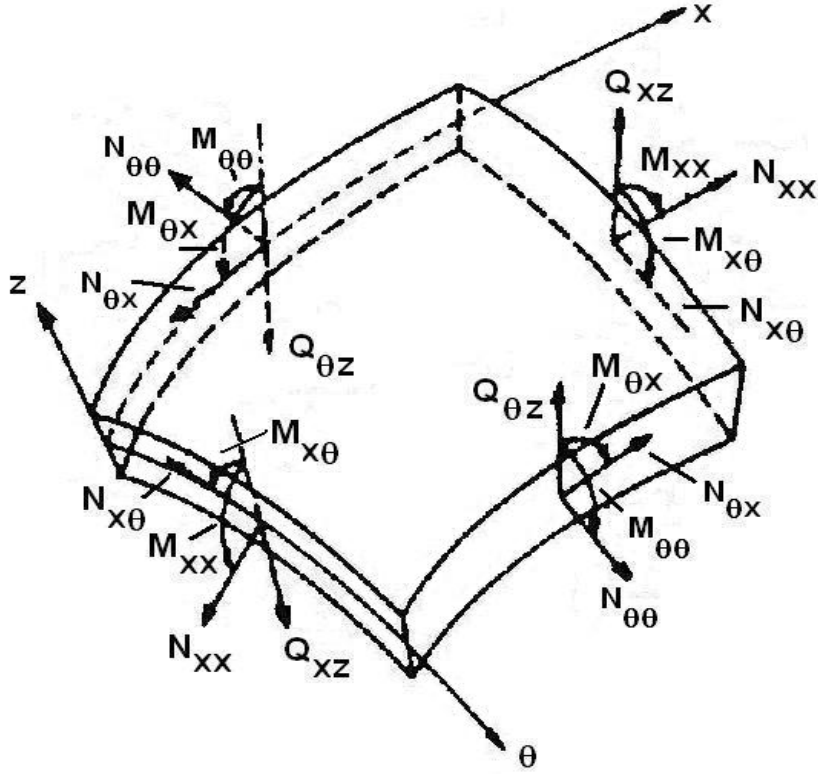
$$Q_{\theta z} = k'Gh\epsilon_{\theta z} \quad (3.24)$$

şeklinde ifade edilir. Burada yer alan G kayma modülü,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.25)$$

eşitliği ile elde edilir.

Yukarıda verilen zar kuvvetleri, eğilme momentleri ile enine kayma kuvvetleri Şekil 3.3'de gösterilmiştir.



Şekil 3.3. Kabuk elemana etkiyen kuvvetler ve momentler [15]

Burada örneğin $N_{\theta\theta}$, θ eksenine yönünde kabuk elemanın yan yüzeyine normal yöndeki zar kuvvetini, $Q_{\theta z}$, kabuk elemanın üst yüzeyine normal yöndeki kayma kuvvetini, $N_{\theta x}$, kabuk elemanın yan yüzeyine teğet yöndeki zar kuvvetini, $M_{\theta\theta}$, θ eksenine yönünde eğilme momentini ve $M_{\theta x}$, x yönündeki eğilme momentini ifade etmektedir.

Kenarlarından basit mesnetli olarak sabitlenen dairesel silindirin yer değiştirme ve dönme bileşenleri için seçilen uygun fonksiyonlar aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
u'(x, \theta, t) &= U(x, \theta)e^{j\omega t} \\
v'(x, \theta, t) &= V(x, \theta)e^{j\omega t} \\
w'(x, \theta, t) &= W(x, \theta)e^{j\omega t} \\
\beta'_1(x, \theta, t) &= B_1(x, \theta)e^{j\omega t} \\
\beta'_2(x, \theta, t) &= B_2(x, \theta)e^{j\omega t}
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Burada

$$\begin{aligned}
U(x, \theta) &= A \cos \frac{m\pi x}{L} \cos n(\theta - \phi) \\
V(x, \theta) &= B \sin \frac{m\pi x}{L} \sin n(\theta - \phi) \\
W(x, \theta) &= C \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n(\theta - \phi) \\
B_1(x, \theta) &= F \cos \frac{m\pi x}{L} \cos n(\theta - \phi) \\
B_2(x, \theta) &= G \sin \frac{m\pi x}{L} \sin n(\theta - \phi)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

şeklinde ifade edilir. Dairesel silindir kabuk elemanın her iki kenarından basit mesnetli olma durumu, dairese silindir için kabul edilen sınır şartıdır. Dolayısıyla dairese silindir için aşağıda verilen on adet sınır şartı yazılır;

$$\begin{aligned}
w'(0, \theta, t) &= 0 \\
v'(0, \theta, t) &= 0 \\
M_{xx}(0, \theta, t) &= 0 \\
N_{xx}(0, \theta, t) &= 0 \\
\beta'_2(0, \theta, t) &= 0
\end{aligned} \tag{3.28}$$

ve

$$w'(L, \theta, t) = 0$$

$$v'(L, \theta, t) = 0$$

$$M_{xx}(L, \theta, t) = 0 \quad (3.29)$$

$$N_{xx}(L, \theta, t) = 0$$

$$\beta_2'(L, \theta, t) = 0$$

Eş. 3.26 ile verilen u' , v' , w' , β_1' ve β_2' eşitlikleri ile Eş.3.28 ve Eş.3.29 kabulleri dikkate alınarak, Eş. 3.10 - Eş.3.14 ile verilen hareket denklemlerinde yerine yazılırsa sistemin hareket denklemi aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \rho h \omega_{mn}^2 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \rho h \omega_{mn}^2 & a_{23} & 0 & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \rho h \omega_{mn}^2 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} - \frac{\rho h^3}{12} \omega_{mn}^2 & a_{45} \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} - \frac{\rho h^3}{12} \omega_{mn}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ F \\ G \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.30)$$

Burada yer alan matris bileşenleri

$$\begin{aligned}
a_{11} &= K \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] \\
a_{12} = a_{21} &= -K \frac{1+\nu}{2} \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \\
a_{13} = a_{31} &= -K \frac{\nu}{R} \frac{m\pi}{L} \\
a_{22} &= K \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] + k' \frac{Gh}{R^2} \\
a_{23} = a_{32} &= \frac{K n}{R R} + \frac{n k' Gh}{R R} \\
a_{25} = a_{52} &= -\frac{k' Gh}{R} \\
a_{33} &= k' Gh \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right] + \frac{K}{R^2} \\
a_{34} = a_{43} &= k' Gh \frac{m\pi}{L} \\
a_{35} = a_{53} &= -k' Gh \frac{n}{R} \\
a_{44} &= k' Gh + D \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n}{R} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \right] \\
a_{45} = a_{54} &= -D \frac{1-\nu}{2} \frac{n}{R} \frac{m\pi}{L} \\
a_{55} &= k' Gh + D \left[\frac{1-\nu}{2} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n}{R} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{3.31}$$

şeklinde ifade edilir.

4. SONLU ELEMENLAR MODELİ

4.1. Genel

Bu bölümde, dairesel bir silindir ile radyal bir dış lastiğin üç boyutlu modellemeleri sonlu elemanlar analiz programı ABAQUS 6.6'da yapılmıştır. Dairesel silindir, tek katmanlı izotropik özellikli lastik olarak modellenmiştir. Sonlu elemanlar modeli için altı serbestlik dereceli kabuk elemanlar seçilmiştir. Sınır şartları, dairesel silindirin her iki kenarından basit mesnet şeklinde uygulanmış ve doğal frekansların elde edilmesi amaçlanmıştır

Radyal dış lastik ise altı katmandan oluşan ortotropik özellikli altı serbestlik dereceli kompozit kabuk elemanlar ile modellenmiştir. Dış lastik için uygulanan sınır şartları ise dış lastiğin jant ile olan her iki bağlantı kenarından basit mesnetli olma durumudur.

4.2. Dış Lastik Yapısı

Katmanlı kompozit yapıya sahip radyal bir tekerin yapısı, Şekil 4.1'de gösterilmiştir [16, 17].



Şekil 4.1. Radyal dış lastik yapısı [16]

Dış lastik yapısını oluşturan elemanlar, aşağıda ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

1- *İç Kısım*: Bu katman hava geçirmez sentetik lastikten yapılmıştır. Dış lastiğin en iç kısmını oluşturmaktadır.

2- *Gövde (Karkas)*: Bu katman, kaliteli dokuma fiber liflerinden oluşmaktadır. Bu lifler, dış lastik boyunca enine jant oturma çemberleri arasında dizilmektedirler. Fiber lifler, basınca dayanımı yönünden dış lastiğin yapısında önemli bir rol oynamaktadır. Bir araba dış lastiğinin bütün katmanlarında, her biri 15 kg.'lık kuvvete dayanan yaklaşık olarak 1400 adet fiber lifler bulunmaktadır.

3- *Alt Kordon (Topuk)*: Bu katmanın görevi, motor ve frenlemeden kaynaklanan torkları janttan dış lastiğe, temas eden yüzeyler aracılığıyla iletmektir. Çelik liflerden meydana gelmektedir.

4- *Kordon (Topuk) Teller*: Kordon teller, dış lastiğin jant üzerinde tutunmasına yardımcı olmaktadır. Çelik liflerden meydana gelmektedir.

5- *Yanak bölgesi*: Genel olarak yumuşak lastik malzemesinden oluşan yanak bölgesi, dış lastiği darbelerden korumaktadır.

6- *Gergi Katmanları*: Güçlendirilmiş, çok kaliteli ve dayanıklı çelik liflerden oluşmaktadır. Bu katmanlar, dış lastiğin bütün tepe noktasını çevrelemektedirler.

7- *Dış Bölgesi*: Bu katman, gergi katmanlarının üzerine yayılmıştır. Dış lastiğin desenli bölümüdür ve yol ile olan teması sağlamaktadır. Dış katmanı, özellikle aşınma ve yıpranmalara dayanıklı, özel bir lastik karışımından oluşmaktadır.

4.3. Dairesel Silindir Modeli

Şekil 4.2'de dairesel bir silindirin üç boyutlu modellemesi gösterilmiştir.

Dairesel silindirin geometri parametreleri, Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Dairesel silindir için geometri parametreleri [18]

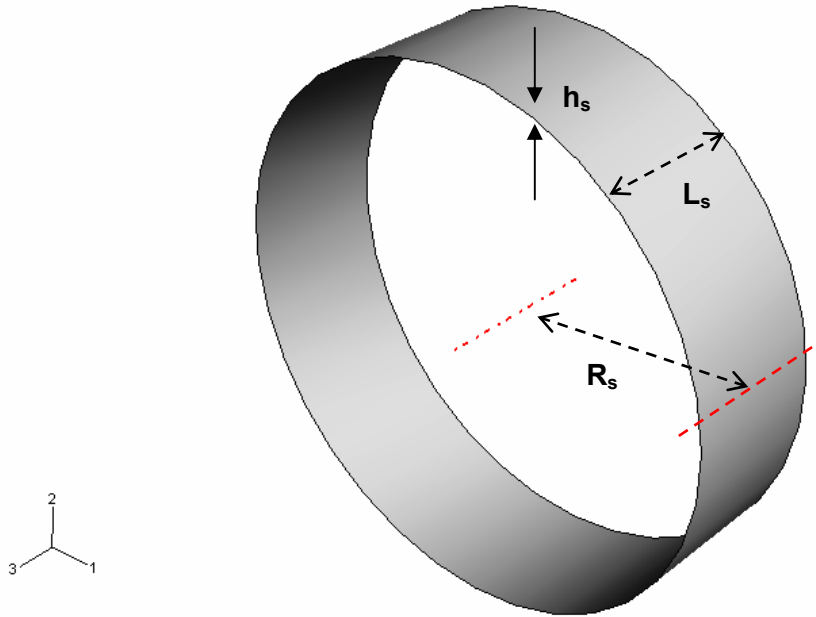
	L_s (mm)	R_s (mm)	h_s (mm)
Silindir	195	294,8	12

Burada;

L_s : Silindirin taban genişliğini,

R_s : Silindirin dış yarıçapını ve

h_s : Silindirin kalınlığını ifade etmektedir.



Şekil 4.2. Üç boyutlu dairesel silindir modeli [18]

Üç boyutlu dairesel silindir, kabuk elemanlar kullanılarak modellenmiştir. Geometrinin bütünü için toplam 3439 adet kabuk eleman kullanılmıştır.

Kabuk elemanın malzemesi, izotropik lastik eleman seçilmiştir. Lastik için kullanılan malzeme parametreleri, Çizelge 4.2'de verilmiştir.

Çizelge 4.2. Lastik eleman için malzeme parametreleri [4]

	E (MPa)	ν	ρ (kg/m ³)
Lastik	18	0,49	1,15x10 ³

Burada;

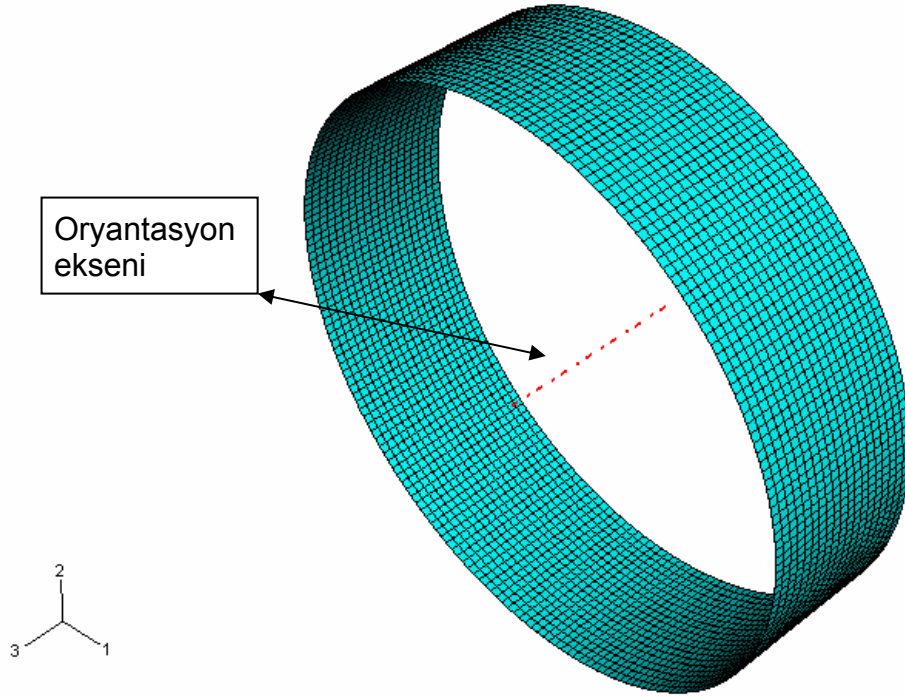
E: Elastisite modülü,

ν : Poisson oranı,

ρ : Kütle yoğunluğu

şeklinde ifade edilir.

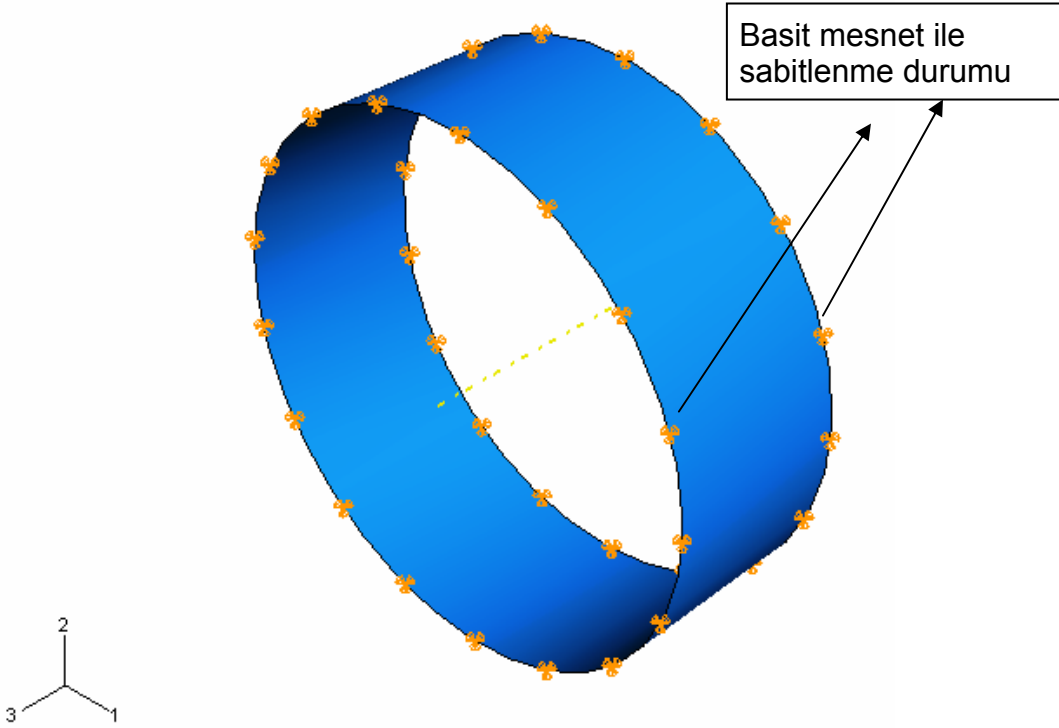
Şekil 4.3'de dairesel bir silindirin, izotropik lastik malzeme parametreleri atanmış kabuk elemanlar ile modellemesi gösterilmiştir.



Şekil 4.3. Dairesel silindir için kabuk eleman modeli [18]

Dairesel silindirin her iki kenarında basit mesnetli olma durumu silindir için kabul edilen sınır şartıdır. Uygulanan sınır şartı ile silindirin her iki kenarlarında, eksenler boyunca yer değiştirme hareketlerine izin verilmemiştir. Ancak buradaki dönme hareketleri serbest bırakılmıştır.

Dairesel silindir için uygulanan sınır şartı Şekil 4.4'de gösterilmiştir.



Şekil 4.4. Dairesel silindir için uygulanan sınır şartı [18]

4.4. Dış Lastik Modeli

Şekil 4.5’de P195/60R14 ebadındaki bir dış lastiğin üç boyutlu modellemesi gösterilmiştir.

Dış lastiğin geometri parametreleri Çizelge 4.3’de verilmiştir.

Çizelge 4.3. Dış lastik için geometri parametreleri [18]

	L_t (mm)	R_t (mm)	D_t (mm)	h_t (mm)
Dış lastik	195	294,8	355,6	12

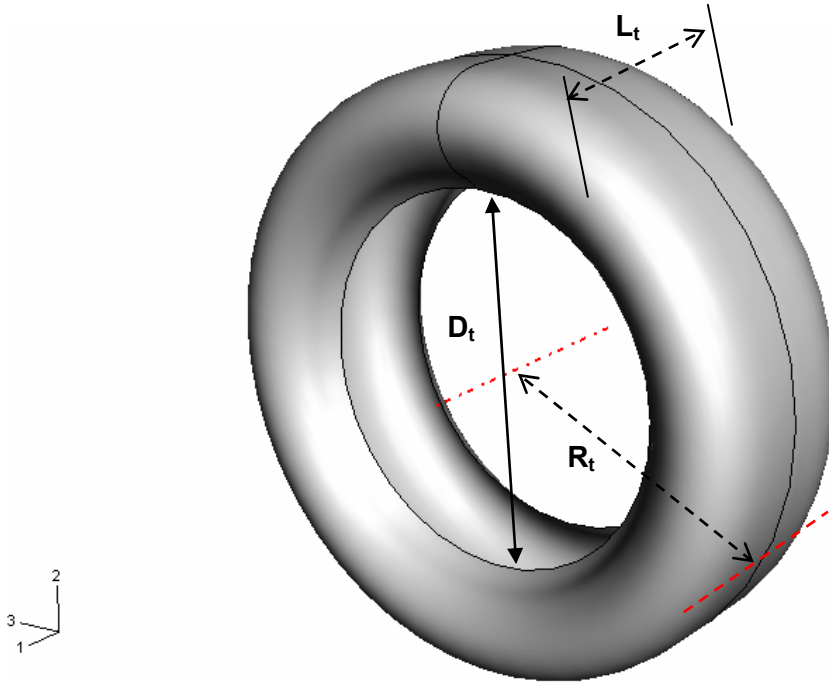
Burada;

L_t : Dış lastiğin taban genişliğini,

R_t : Dış lastiğin dış yarıçapını,

D_t : Dış lastiğin jant çapını ve

h_t : Dış lastiğin kalınlığını ifade etmektedir.



Şekil 4.5. Üç boyutlu dış lastik modeli [18]

Üç boyutlu dış lastik geometrisi kabuk elemanlar kullanılarak modellenmiştir. Bütün bir geometri için toplam 5400 adet kabuk eleman kullanılmıştır.

Kabuk eleman malzemesi, altı katmanlı yapıda olacak şekilde ortotropik kompozit eleman seçilmiştir. Dış lastiğin iç kısmından dış kısmına doğru dış lastik kalınlığı boyunca katman sırası şu şekildedir: İlk katman lastik elemanı, ikinci katman naylon kuşak elemanı, üçüncü katman çelik kuşak elemanı,

dördüncü orta katman kafes yapı elemanı, beşinci katman çelik kuşak elemanı ve altıncı katman naylon kuşak elemanıdır.

Kompozit eleman katmanları için kullanılan malzeme parametreleri, Çizelge 4.4'de verilmiştir.

Çizelge 4.4. Kompozit eleman katmanları için malzeme parametreleri [4]

	Naylon Kuşak	Çelik Kuşak	Karkas Yapı
E_1 (MPa)	809,367	27317,708	1196,15
E_2 (MPa)	14,75	12,478	13,3
ν_{12}	0,444	0,46312	0,45976
G_{12} (MPa)	4,924	4,16	4,4375
G_{23} (MPa)	4,924	4,16	4,4375
G_{13} (MPa)	4,924	4,16	4,4375
ρ (kg/m ³)	1,15x10 ³	2,5x10 ³	1,15x10 ³
Oryantasyon eksenine göre Lif Dizilme Açısı (°)	90	70	0

Burada;

E_1 ve E_2 : Elastiklik modülleri,

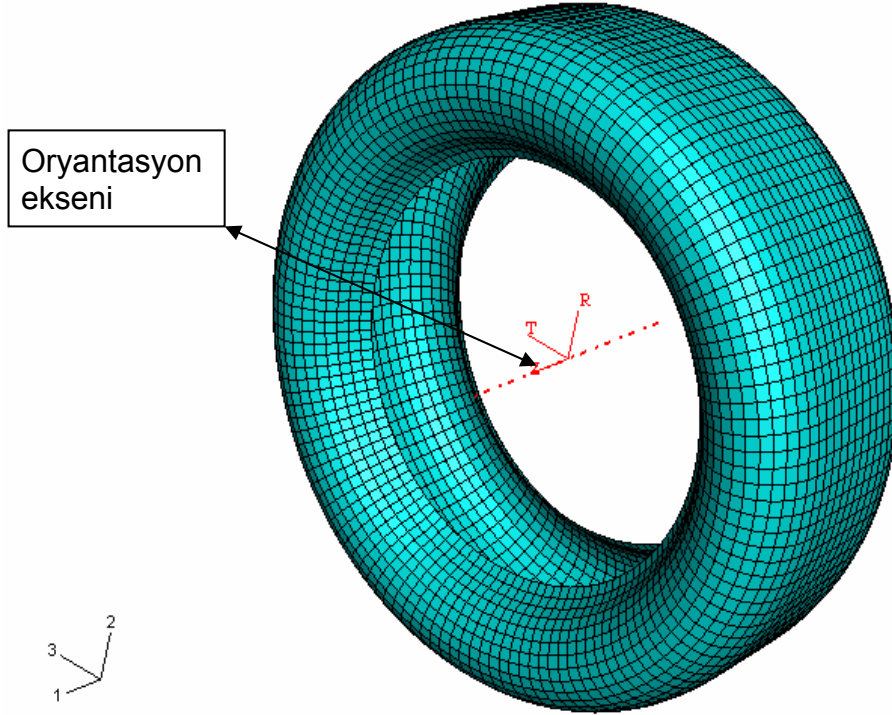
G_{12} , G_{23} ve G_{13} : Katılık modülleri,

ν : Poisson oranı,

ρ : Kütle yoğunluğu

şeklinde ifade edilir.

Şekil 4.6'da, ortotropik malzeme parametreleri atanmış kompozit kabuk elemanlar ile üç boyutlu dış lastik modellemesi gösterilmiştir.

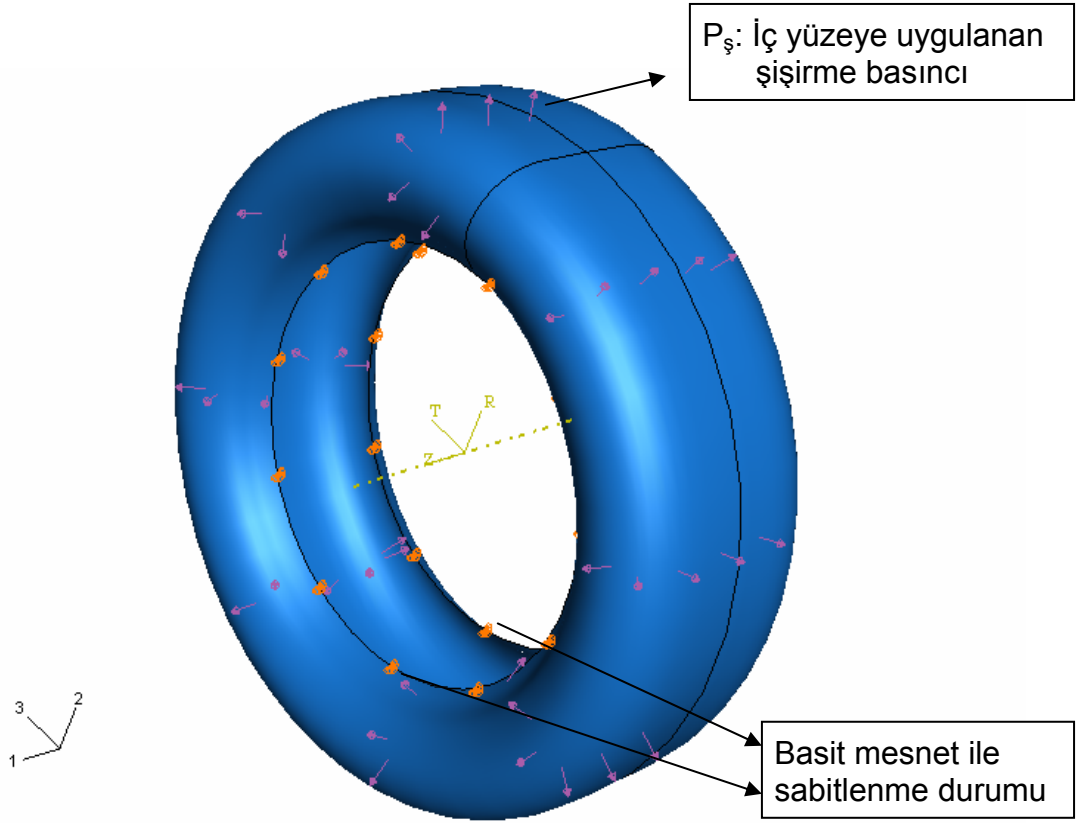


Şekil 4.6. Dış lastik için kabuk eleman modeli [18]

Dış lastiğin jant ile olan bağlantı kenarlarından basit mesnetli olma durumu dış lastik için uygulanan sınır şartıdır. Böylece dış lastiğin hayali bir janta bağlı olduğu durum simule edilmiştir. Uygulanan sınır şartı ile dış lastiğin bağlantı kenarlarında eksenler boyunca yer değiştirme hareketlerine izin verilmemiştir. Ancak buradaki dönme hareketleri serbest bırakılmıştır.

Son olarak dış lastiğe uygulanan şişirme basıncı, dış lastiğin tüm iç yüzeyine basınç kuvveti uygulanmasıyla simule edilmiştir. Bu yöntemle, dış lastiğin şişirilmiş durumu modellenmiştir.

Dış lastik için uygulanan sınır şartı ile iç yüzeye uygulanan basınç kuvvetlerinin yönleri Şekil 4.7'de gösterilmiştir.



Şekil 4.7. Dış lastik için uygulanan sınır şartı ve basınç kuvvetleri [18]

Yukarıda anlatılan dış lastik modeli ile ABAQUS 6.6 programında P195/60R14 ebadındaki hava ile şişirilmiş gerçek bir dış lastik modeline yakın bir model elde edilmeye çalışılmıştır.

Modellemenin birinci kısmında; dış lastik geometrisi oluşturulmuş, dış lastiğin jant ile olan her iki bağlantı kenarlarında her bir eksen boyunca yer değiştirme hareketleri sabitlenmiş ve modelin iç yüzeyine basınç kuvvetleri uygulanarak dış lastik şişirilmiştir.

Modellemenin ikinci kısmında ise serbest titreşim analizi için titreşim modülü seçilmiştir. Burada titreşim modülü içerisinde kullanılan metot Lanczos iterasyon metodudur [19]. Yapılan farklı her bir analiz için ilk 30 doğal frekans değeri elde edilmiştir.

5. SAYISAL SONUÇLAR

5.1. Genel

Bu bölümde, izotropik dairesel silindir ile katmanlı kompozit yapıdaki dış lastik için serbest titreşim analiziyle elde edilen sayısal sonuçlar verilmiştir.

İlk kısımda, Bölüm 3'te dairesel silindir için elde edilen hareket denklemi, MAPLE 6.0 programı yardımı ile analitik olarak çözümlenerek sistemin doğal frekansları bulunmuştur. Ardından önceki bölümde modellenen dairesel silindir, ABAQUS 6.6 programında serbest titreşim analizinde çözdürülerek dairesel silindirin doğal frekansları elde edilmiştir.

Her iki yöntem ile elde edilen değerler birbirleri ile kıyaslanmıştır. Burada değerlerin kıyaslanmasındaki amaç, nümerik yöntemde oluşturulan sonlu elemanlar modelinin doğruluğunu kanıtlayabilmek içindir. Böylece, dış lastik geometrisi için yapılan sonlu elemanlar modelinin doğruluğu da kısmen kanıtlanmış olmaktadır.

İkinci kısımda, önceki bölümde modellenen P195/60R14 ebadındaki dış lastik, ABAQUS 6.6 programında serbest titreşim analizinde çözdürülerek dış lastiğin doğal frekansları ve mod şekilleri elde edilmiştir. Elde edilen değerler literatürde verilen deneysel değerler ile kıyaslanmıştır.

5.2. Dairesel Silindir İçin Elde Edilen Sayısal Sonuçlar

Sisteme ait doğal frekansları bulabilmek için Eş. 3.30 eşitliğinde elde edilen hareket denkleminin çözülmesi gerekmektedir. Burada eşitliğin sağlanması için eşitliğin sol kısmında yer alan matrisin determinantının sıfıra eşit olması gerekmektedir.

Eşitlikte yer alan bilinmeyen ω_{mn} terimleri, m ve n değişken parametrelerinin farklı kombinasyonlarında matris determinantının analitik olarak çözülmesi ile elde edilir. Elde edilen pozitif kökler sistemin doğal frekanslarıdır.

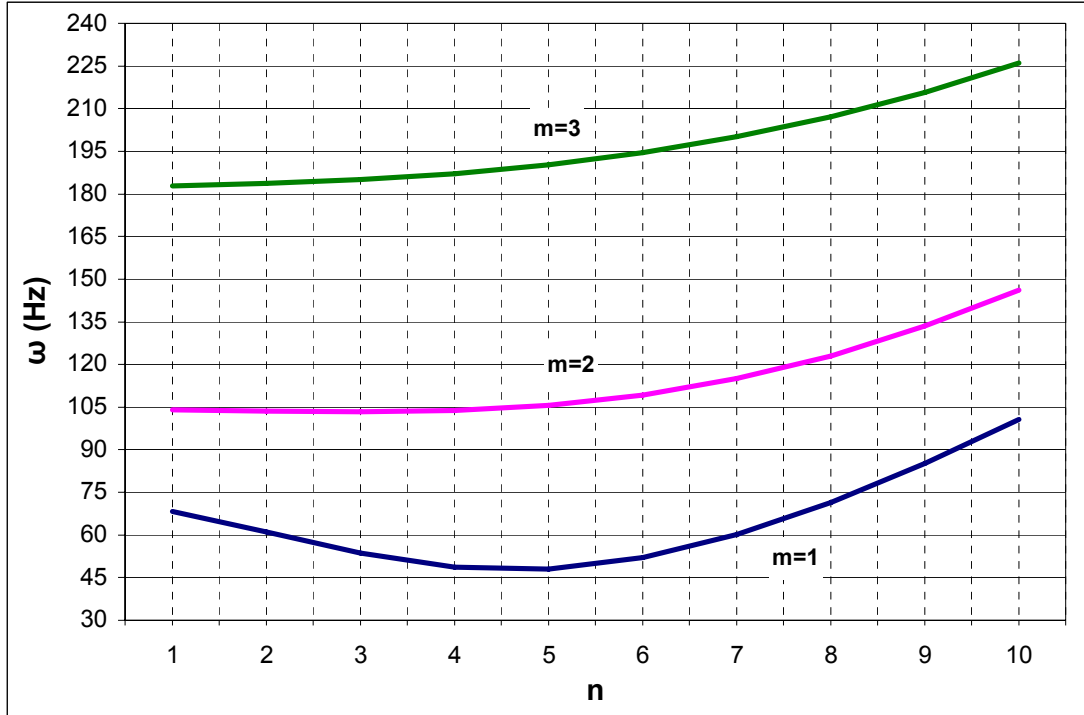
Örnek olarak m=1 ve n=1 değerleri için elde edilen eşitlik aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \omega_{11}^{10} - 0,5989402427 \times 10^9 \omega_{11}^8 + 0,9183783631 \times 10^{17} \omega_{11}^6 - 0,6460047614 \times 10^{24} \omega_{11}^4 \\ + 0,8392967127 \times 10^{30} \omega_{11}^2 - 0,1388933101 \times 10^{36} = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Eş. 5.1 eşitliğinin on farklı kökü vardır. Burada elde edilen pozitif beş kök sistemin beş farklı modundan elde edilen doğal frekans değerlerini ifade etmektedir. Dolayısıyla m, n parametrelerinin kombinasyonundan elde edilen farklı beş frekans değeri, sistemin farklı beş modu için elde edilmektedir.

m=1, 2, ..., 5 ve n=1, 2, ..., 10 kombinasyonları sonucunda sisteme ait farklı beş adet mod için toplam 250 adet frekans değeri elde edilir. Örnek olarak sisteme ait ilk mod için elde edilen frekans değerleri Şekil 5.1 ile gösterilmiştir.

m=1, 2, ..., 5 ve n=1, 2, ..., 10 değerleri için elde edilen en küçük beş adet ω_{mn} değerleri, sistemin ilk beş doğal frekanslarıdır.



Şekil 5.1. Dairesel silindire ait ilk mod için doğal frekanslar [18]

Eş. 3.30 ile verilen hareket denkleminin MAPLE 6.0 programında analitik çözümü ile elde edilen ilk beş adet doğal frekans değerleri ile Kısım 4.2'de modellenen dairesel silindir için ABAQUS 6.6 programında elde edilen ilk beş adet doğal frekans Çizelge 5.1'de verilmiştir.

Çizelge 5.1. Dairesel silindir için elde edilen ilk beş doğal frekans [18]

Sıra No	Doğal Frekanslar (Hz) {Maple 6.0}	Doğal Frekanslar (Hz) {ABAQUS 6.6}
1	48,066	51,695
2	48,716	53,145
3	52,088	54,990
4	53,630	58,809
5	60,170	62,933

Çizelge 5.1’de görüldüğü üzere dairesel silindir gibi basit bir geometri için elde edilen analitik ve nümerik sonuçlar birbirine yakın değerlerde olmaktadır. Bunun sebebi ise nümerik çalışmadaki sonlu eleman modelinde yapılan yaklaşımın analitik çalışmadakine yakın olmasıdır. Burada geometri basit ve kolay elde edilebilir olduğundan analitik olarak sistemin hareket denkleminin çözümü basit olmaktadır. Sistemin modeli, nümerik çalışmada basit olarak modellenenilmekte ve sistem için yapılan yaklaşımlar gerçeğe yakın olmaktadır.

Ancak karmaşık sistemlerde ise benzeri durumlar geçerli olmamaktadır. Bunun nedeni, analitik çözümlerde karmaşık sistemlerin hareket denklemleri basit olarak çıkarılamamaktadır. Elde edilen denklemlerin çözümü zorlaşmakta ve uzun zaman almaktadır. Bu yüzden çeşitli yaklaşımlar ile basitleştirmeler yapılmaktadır.

Nümerik çözümlerde ise karmaşık sistemler, analitik çözümlere göre daha basit ve daha kısa zamanda modellenenilmektedir. Sistemin geometrisi, analiz programlarında daha kolay oluşturulmakta ve sisteme ait sınır şartları analiz programlarına daha basit olarak girilebilmektedir. Ancak bu yöntemde de gerçek sistemle birebir bir modelleme yapılamamaktadır. Bunun nedeni ise nümerik programlarda kullanılan elemanların belirli yaklaşımlar ile oluşturulmasıdır. Sistem karmaşıktıkça yukarıda bahsedilen yaklaşımlar, gerçek modelden uzaklaşmakta ve elde edilen değerlerde yapılan hatalar artmaktadır.

Bu çalışmada, önceki bölümlerde de bahsedildiği üzere karmaşık bir geometriye sahip olan dış lastik, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak ABAQUS programı ile modellenmiştir. Böylece daha karmaşık modeller ve farklı sınır şartları da değerlendirilmiştir.

5.3. Dış lastik için Elde Edilen Sayısal Sonuçlar

Bu çalışmada Kısım 4.3'de altı katmanlı, ortotropik kabuk eleman ile modellenen P195/60R14 ebadındaki dış lastik için ABAQUS 6.6 programında serbest titreşim analizi sonucunda elde edilen ilk beş doğal frekans değeri, Çizelge 5.2'de verilmiştir. Burada dış lastik için verilen sınır şartına ilave olarak, dış lastiğin 240 kPa iç basınç havası ile şişirilmiş durumda analizi yapılmıştır.

Ayrıca Çizelge 5.2'de; aynı ebattaki ve aynı sınır şartında bulunan dış lastik için elde edilen ilk beş doğal frekans değeri verilmiştir [4]. Buradaki frekans değerleri, Bezier polinomları ile modellenen P195/60R14 ebadındaki dış lastik için Rayleigh-Ritz yöntemi ile analitik olarak, ayrıca MARC programında hem kabuk eleman hem de katı eleman ile modellenen aynı dış lastik için serbest titreşim analizi sonucunda elde edilmiştir.

Çizelge 5.2. Dış lastik için elde edilen ilk beş doğal frekans [18]

	ABAQUS Kabuk Eleman	Analitik çözüm Rayleigh-Ritz [4]	MARC Kabuk Eleman [4]	MARC Katı Eleman [4]	Deneysel değerler [4]
SIRA NO	ile elde edilen Doğal Frekanslar (Hz)				
1	67,508	70,2	66,9	75,1	95,5
2	120,77	90,8	79,4	97,5	119,5
3	132,47	117,2	108,2	122,0	134
4	148,28	146,8	144,5	150,2	155
5	175,51	187,7	189,6	181,7	185

Çizelge 5.2'de verilen frekans değerlerinden ABAQUS programında ve MARC programında farklı şekilde kabuk eleman ile modellenen dış lastik için elde edilen frekans değerleri ile deney sonucunda elde edilen frekans değerleri Çizelge 5.3'de kıyaslanmıştır.

Burada, ABAQUS ile MARC programlarından elde edilen frekans değerlerinin farklı olmasının nedeni, her iki programda yapılan modellemenin farklı olmasından kaynaklanmaktadır. İncelenen dış lastik modeli aynı olsa da yapılan modellemedeki fark, sonuçların farklı olarak elde edilmesine sebep olmaktadır.

Çizelge 5.3. Dış lastik için elde edilen ilk beş doğal frekansın kıyaslanması [18]

SIRA NO	ABAQUS Kabuk Eleman		MARC Kabuk Eleman [4]		Deneysel değerler [4]
	Doğal Frekanslar (Hz)	Bağlı Hata (%)	Doğal Frekanslar (Hz)	Bağlı Hata (%)	Doğal Frekanslar (Hz)
1	67,508	29,31	66,9	30,0	95,5
2	120,77	1,06	79,4	33,5	119,5
3	132,47	1,14	108,2	19,4	134
4	148,28	4,33	144,5	6,7	155
5	175,51	5,13	189,6	2,5	185

Yukarıda verilen çizelgelere göre; deneysel değerler ile literatürde yapılmış olan ve bu çalışmada elde edilen değerlerin farklı olduğu görülmektedir. Bunun sebebi çalışılan programlardaki modellemeler için yapılan yaklaşımlarıdır.

Bu çalışmada, dış lastik kalınlığının dış lastiğın kesiti boyunca aynı olduğu kabul edilmiş ve kabuk elemanlar kullanılarak dış lastik, bu yaklaşıma göre modellenmiştir. Hâlbuki gerçek bir dış lastik geometrisinde dış lastik kalınlığı, dış lastiğın kesiti boyunca değışmektedir.

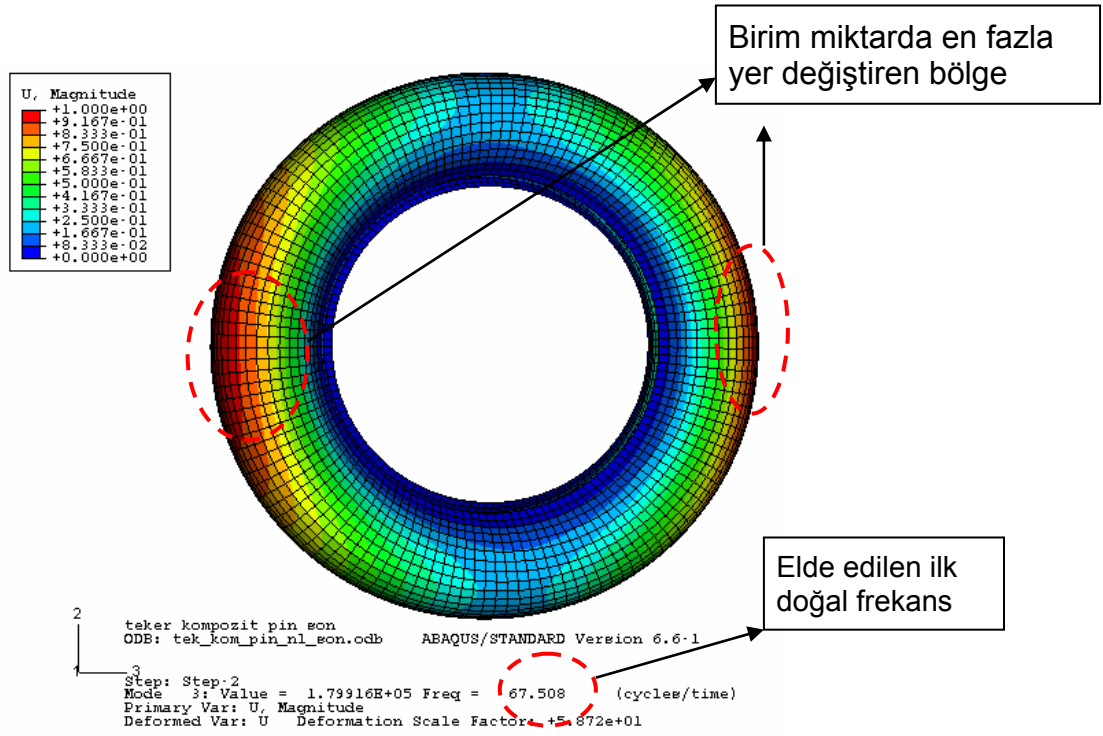
Dış lastik için kabul edilen sınır şartı, dış lastiğın jant ile olan bağlantı kenarlarından basit mesnetli olma durumudur. Ancak burada dış lastik yanaklarının jant ile olan teması ve janttan dış lastiğe gelebilecek ilave etkiler dikkate alınmamıştır.

Kullanılan modelde dış lastik malzemesinin altı katmanlı kompozit yapıda olduğu ve dış lastiğın kesiti boyunca aynı kaldığı kabul edilmiştir. Fakat Kısım 4.2'de anlatıldığı gibi gerçek bir dış lastik yapısının da dış lastiğın kesiti boyunca farklı katmanlardan oluştuğu bilinmektedir.

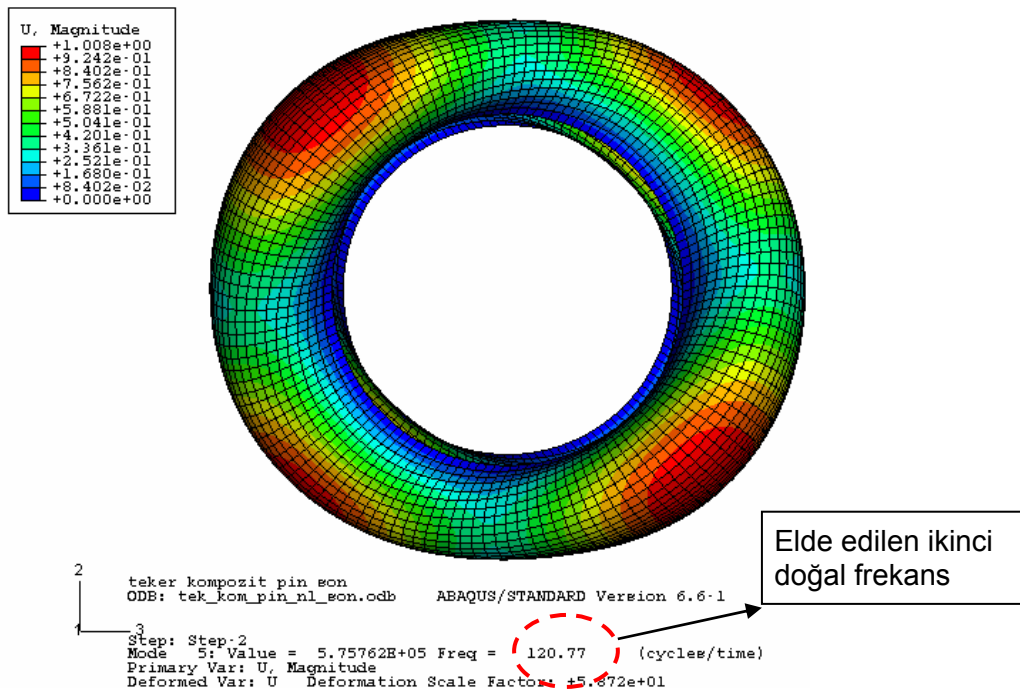
Dış lastiğın dış katmanı, yapılan nümerik analizde dikkate alınmamıştır.

Ayrıca, her bir katmana etki eden sönümlenme etkisi de yapılan nümerik analize dâhil edilmemiştir.

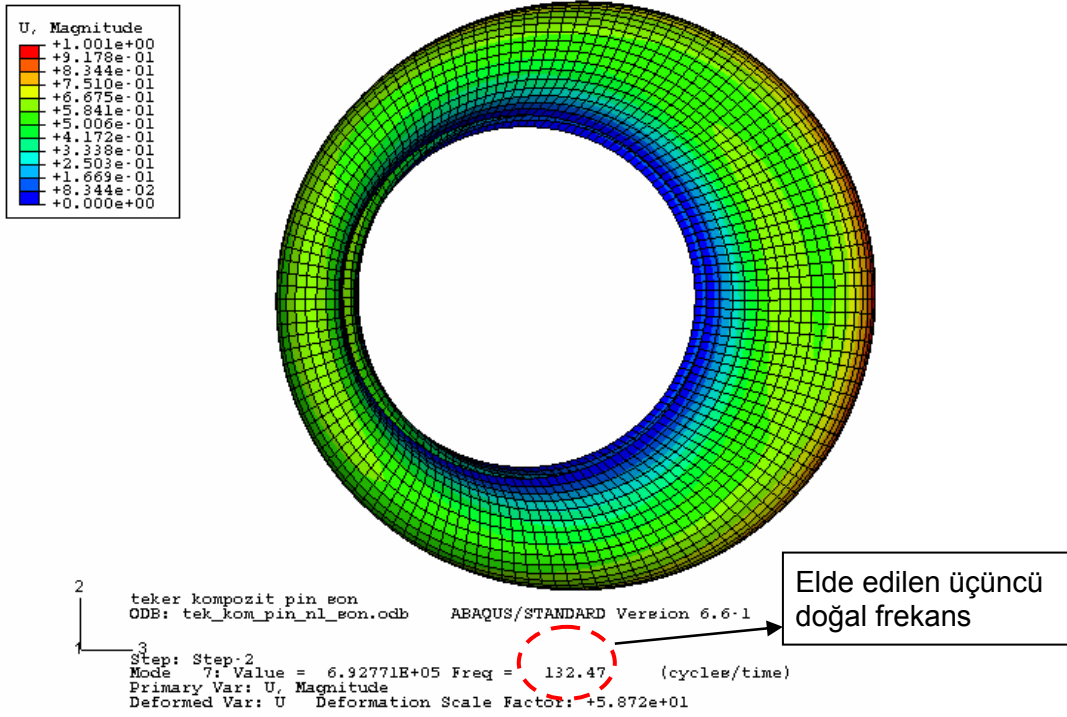
Kısım 4.3'de altı katmanlı, ortotropik kabuk eleman ile modellenen P195/60R14 ebadındaki dış lastik için ABAQUS 6.6 ile elde edilen ilk beş mod şekilleri; Şekil 5.1, Şekil 5.2, Şekil 5.3, Şekil 5.4 ve Şekil 5.5 ile gösterilmiştir.



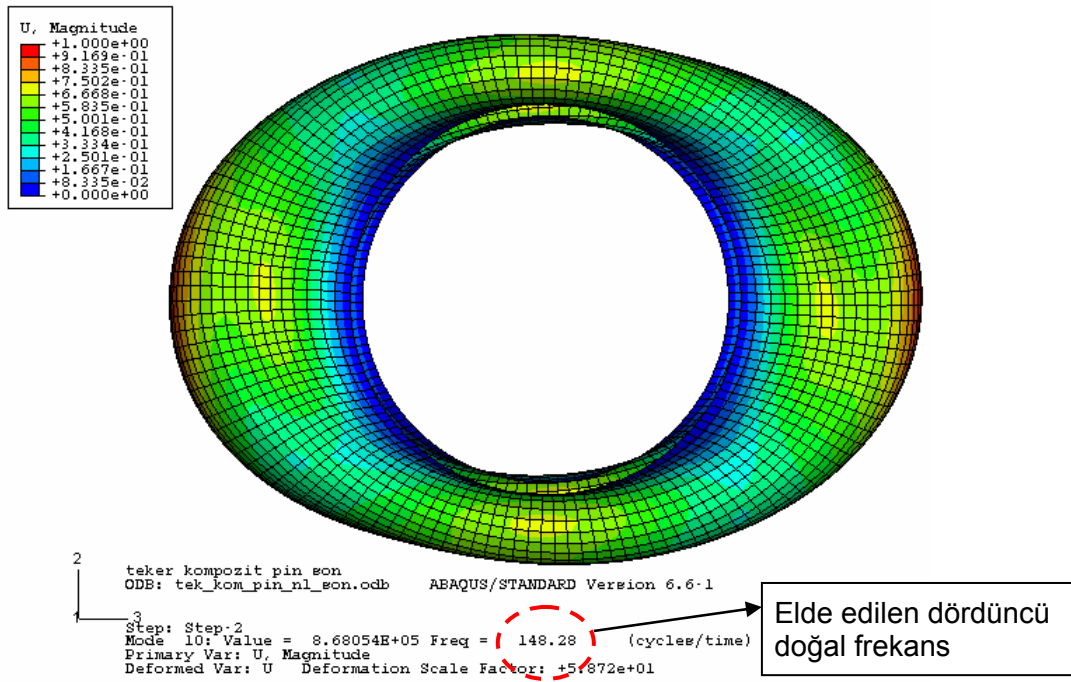
Şekil 5.2. Dış lastiğın ilk mod şekli [18]



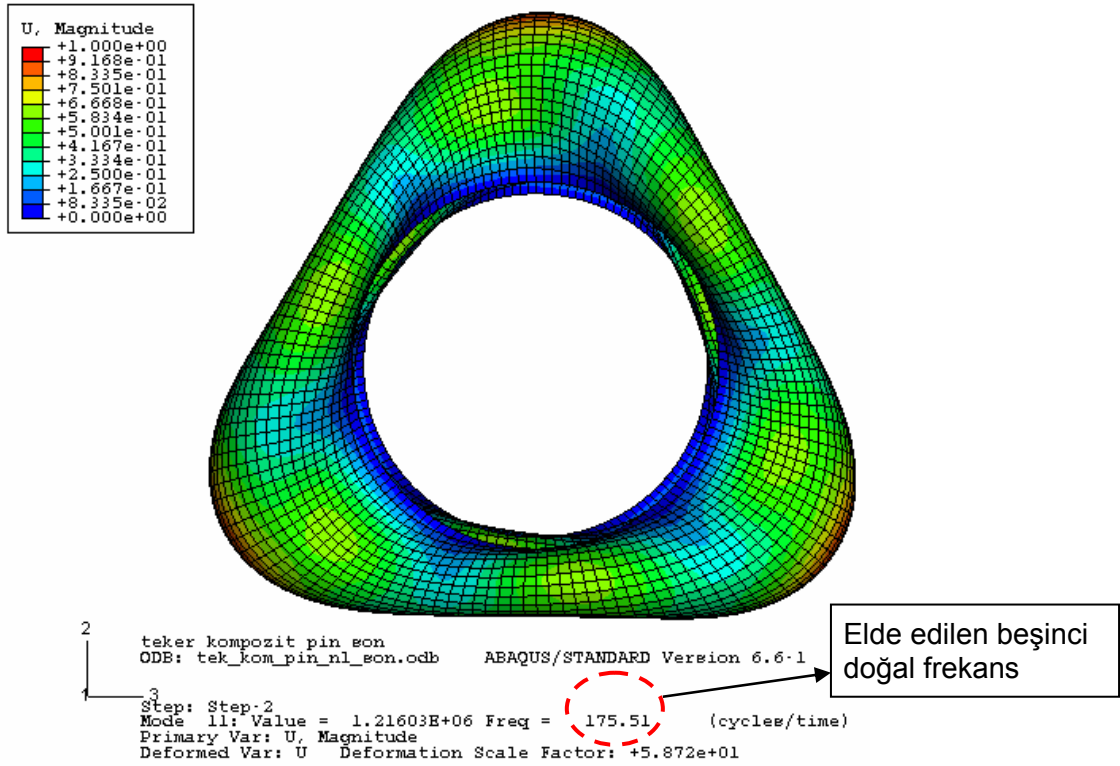
Şekil 5.3. Dış lastiğın ikinci mod şekli [18]



Şekil 5.4. Dış lastiğin üçüncü mod şekli [18]



Şekil 5.5. Dış lastiğin dördüncü mod şekli [18]



Şekil 5.6. Dış lastiğin beşinci mod şekli [18]

Yukarıda verilen ilk beş mod şekillerindeki renk dağılımları elemanların birim miktarda yer değiştirmesini ifade etmektedir. Maviden kırmızıya kadar olan renk değişimi, yer değiştirmedeki artışı göstermektedir. Kırmızı renk ile gösterilen elemanlar en fazla yer değiştiren elemanlardır. Mavi renk ile gösterilenler ise en az yer değiştiren elemanlardır.

Bu çalışmada elde edilen bütün frekans değerleri ile deneysel değerler [4] Çizelge 5.4'de verilmiştir.

Çizelge 5.4. Çalışmada elde edilen ilk beş doğal frekansın kıyaslanması [18]

	Doğal Frekanslar (Hz)			
	DAİRESEL SİLİNDİR		DIŞ LASTİK	
SIRA NO	MAPLE 6.0	ABAQUS 6.6	ABAQUS 6.6	Deneyisel Değerler [4]
1	48,066	51,695	67,508	95,5
2	48,716	53,145	120,77	119,5
3	52,088	54,990	132,47	134
4	53,630	58,809	148,28	155
5	60,170	62,933	175,51	185

Çizelge 5.4'den, bu çalışmada elde edilen değerlerin, deneysel değerler ile kıyaslandığında kabul edilebilir değerler olduğu anlaşılmaktadır. Dairesel silindir için hem analitik çözüm (MAPLE 6.0) hem de analiz programı (ABAQUS 6.6) ile elde edilen değerlerin birbirine oldukça yakın ve uyumlu oldukları görülmektedir. Dolayısıyla, oluşturulan sonlu elemanlar modelinin gerçek modele yakın bir model olduğu kısmen de olsa doğrulanmaktadır.

Dış lastik için analiz programı ile elde edilen değerler, deneysel değerlerden farklı da olsalar, her mod için değerlerdeki artışın deneysel değerler ile benzeştiği görülmektedir.

5.3.1. Şişirme basıncının etkisi

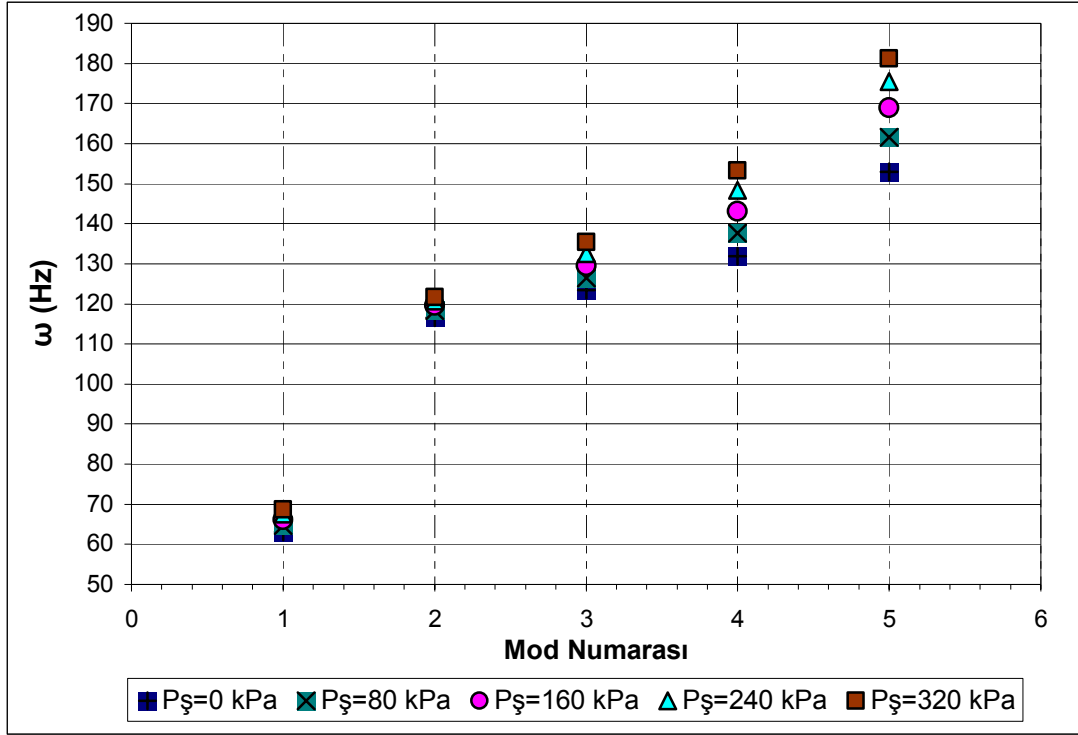
Dış lastik için elde edilen sayısal sonuçlara ilave olarak, farklı şişirme basınçlarında P195/60R14 ebadındaki dış lastik için elde edilen ilk beş doğal frekans değeri Çizelge 5.5'de verilmiştir.

Çizelge 5.5. Farklı şişirme basınçlarında elde edilen ilk beş doğal frekans [18]

SIRA NO	Doğal Frekanslar (Hz)				
	$P_{\text{ş}}=0$ (kPa)	$P_{\text{ş}}=80$ (kPa)	$P_{\text{ş}}=160$ (kPa)	$P_{\text{ş}}=240$ (kPa)	$P_{\text{ş}}=320$ (kPa)
1	63,119	64,748	66,191	67,508	68,741
2	116,51	118,32	119,68	120,77	121,66
3	123,37	126,45	129,47	132,47	135,47
4	131,88	137,65	143,10	148,28	153,27
5	153,04	161,55	168,98	175,51	181,22

Yukarıda elde edilen sonuçlara göre şişirme basıncının doğal frekans değerlerini değiştirdiği görülmektedir. Şişirme basıncı arttıkça doğal frekans değerleri artmaktadır. Bunun nedeni, şişirme basıncının artması ile sistemin katılığı artmakta ve bunun sonucunda da doğal frekans değerleri artmaktadır.

Şekil 5.7'de şişirme basıncının doğal frekans değerlerine etkisi daha ayrıntılı olarak gösterilmektedir.



Şekil 5.7. Şişirme basıncının doğal frekanslara etkisi [18]

Görüldüğü gibi şişirme basıncı arttıkça sistemin doğal frekans değerleri artmaktadır. Dış lastiğin birinci modu için elde edilen frekans değerlerine şişirme basıncının etkisi fazla olmamaktadır. Ancak dış lastiğin özellikle beşinci modu için elde edilen yüksek değerdeki doğal frekanslar, şişirme basıncının etkisi ile düşük değerdeki frekanslara göre büyük oranda farklılık göstermektedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, katmanlı ortotropik kompozit yapıya sahip kabuk elemanlar kullanılarak modellenen radyal bir dış lastiğin serbest titreşim analizi ile doğal frekansları ve mod şekilleri elde edilmiştir. Elde edilen değerler literatürde verilen deneysel değerler ile kıyaslanmıştır.

İlk aşamada, ikinci bölümde katmanlı ortotropik kompozit yapıya sahip bir kabuk eleman için yer değiştirme – şekil değiştirme bağıntıları ifade edilmiş ve bu bağıntılar kullanılarak sistemin enerji denklemleri elde edilmiştir. Hamilton yöntemi kullanılarak kabuk elemanın hareket denklemleri çıkarılmıştır.

Üçüncü bölümde ise karmaşık dış lastik geometrisi yerine, analitik olarak elde edilmesi dış lastiğe göre daha basit olan dairesel silindir geometrisi için kabuk elemanlar üzerinde durulmuştur. Burada ilk önce izotropik dairesel silindir bir kabuk eleman için yer değiştirme – şekil değiştirme bağıntıları elde edilmiştir. Ardından elde edilen bu bağıntılar kullanılarak sistemin hareket denklemleri çıkarılmıştır.

Dördüncü bölümde, ilk olarak karmaşık dış lastik geometrisine göre daha basit geometriye sahip üç boyutlu dairesel silindir geometrisi hem analitik olarak hem de sonlu elemanlar programı ABAQUS 6.6 ile modellenmiştir. Burada ele alınan dairesel silindir geometrisi ile dış lastik geometrisi benzer ebatlarda ve aynı sınır şartlarında modellenmiştir.

Beşinci bölümde, daha önceden modellenmiş olan dairesel silindir için serbest titreşim analizi ile MAPLE 6.0 programı kullanılarak sistemin analitik olarak doğal frekansları bulunmuştur. Benzer şekilde, dairesel silindir

geometrisi için ABAQUS 6.6 programı kullanılarak da sistemin doğal frekansları bulunmuştur. Elde edilen değerler birbirleriyle kıyaslanmıştır.

Görüldüğü üzere basit geometriler için hem analitik çözüm hem de analiz programı ile elde edilen sonuçlar birbirine yakın ve uyumludurlar. Ancak geometri karmaşıktıkça analitik çözüm elde edebilmek gittikçe zorlaşmakta ve uzun zaman almaktadır. Karmaşık geometriler için denklemler de karmaşık hale gelmekte ve elde edilen denklemleri analitik olarak çözebilmek için çeşitli yaklaşımlar yapılmak zorunda kalınmaktadır. Dolayısıyla bu yaklaşımlar ile modellenen geometri, gerçek geometriden farklılaşmakta ve elde edilen sonuçlardaki yapılan hatalar artmaktadır.

İkinci aşamada ise dördüncü bölümde modellenmiş olan dış lastik geometrisi için ABAQUS 6.6 programında serbest titreşim analiziyle sistemin doğal frekansları ve mod şekilleri bulunmuştur. Elde edilen değerler literatürde verilen deneysel değerler ile kıyaslanmıştır.

Görüldüğü üzere geometri ne kadar karmaşık yapıya da sahip olsa, analitik yöntemle kıyasla ABAQUS programı ile modelleme daha kolay olmaktadır. Ancak sonlu elemanlar programı ile elde edilen sonuçlar da deneysel değerlere göre hatalı çıkmaktadır. Bunun sebebi olarak, gerçek geometri analiz programında bazı kabuller ile modellendiğinden yapılan yaklaşımlar oranınca elde edilen sonuçlarda hatalar elde edilmektedir.

Örnek olarak, dördüncü bölümdeki dış lastiğin modellenmesinde dış lastik kalınlığının dış lastiğin kesiti boyunca aynı olduğu kabul edilmiştir. Hâlbuki gerçek dış lastik geometrisinde kalınlık, dış lastiğin kesiti boyunca değişmektedir. Diğer bir yaklaşımda ise dış lastik malzemesinin altı katmanlı kompozit yapıda olduğu ve dış lastiğin kesiti boyunca aynı kaldığı kabul edilmiştir. Ayrıca, katmanlara etki eden sönümlenme etkisi dikkate

alınmamıştır. Dolayısıyla, elde edilen nümerik çözümle deneysel değerler arasında farklılık çıkmaktadır. Bu yüzden nümerik model gerçeğe en yakın model olmak zorundadır.

Beşinci bölümde parametrik çalışmaya örnek olarak, dış lastiğin farklı şişirme basınçlarında karakteristiğini belirlemek için dördüncü bölümde modellenen dış lastiğin farklı basınçlardaki doğal frekansları elde edilmiştir. Görüldüğü üzere dış lastiğin şişirme basıncı yükseldikçe dış lastiğin doğal frekansları artmaktadır.

Yapılan nümerik yöntemle daha doğru ve güvenilir sonuçların alınabilmesi için modellemenin gerçek modele yakın olması gerekmektedir. Bu çalışmada ise daha doğru ve daha güvenilir sonuçların elde edilebilmesi için kabuk elemanlar ile modellenen dış lastiğin, dış lastiğin kesiti boyunca değişen kalınlığa ve malzemeye göre modellenmesi gerekmektedir.

KAYNAKLAR

1. Böhm, F. And Willumeit, H.P., "Tyre Models For Vehicle Dynamic Analysis", **Swets&Zeitlinger B.V.**, Lise, 84-142 (1996).
2. Campanac, P., Nonami, K. and Duhamel, D., "Application of the vibration analysis of linear systems with time-periodic coefficients to the dynamics of a rolling tyre", **Journal of Sound and Vibration**, 231(1): 37-77 (2000).
3. Fervers, C.W., "Improved FEM Simulation Model for Tire-Soil Interaction", **Journal of Terramechanics**, 41: 87-100 (2004)
4. Jia, L., Xu, Y. and Zhang, J., "Free Vibration Analysis of Radial Pneumatic Tires Using Bezier Functions", **Journal of Sound and Vibration**, 9 (4): 1-17 (2004)
5. Jia, L., Xu, Y. and Zhang, J., "Non-linear Analysis of Pneumatik Radial Tyres Via Piece-wise Rayleigh-Ritz Technique", **International Journal of Vehicle Design**, 35 (4): 317-330 (2004).
6. Kumar, V. and Singh, A.V., "Geometrically Non-Linear Dynamic Analysis of Laminated Shells Using Bezier Functions", **International Journal of Non-Linear Mechanics**, 32 (3): 425-442 (1997).
7. Kumar, V., "Linear and Non-Linear Dynamic Analysis of Fiber Reinforced Laminated Shells", Doktora Tezi, **The University of Western Ontario Faculty of Engineering Science**, London, Ontario, 15-64 (1994).
8. Yan, X., "Non-linear Three-dimensional Finite Element Modelling of Radial Tires", **Mathematics and Computers in Simulation**, 58: 51-70, (2001).
9. Xu, Y., Jia, L. and Zhang, J., "Modelling Tire/Road Contact Using Piecewise Ritz Procedure", **Journal of Terramechanics**, 42: 99-113 (2005).
10. Weaver, W. and Johnston, P.R., "Finite Element for Structural Analysis", **Eaglewood Cliffs NJ**, Prentice-Hall, 160-194 (1984).
11. Wiley, J., "Energy Methods in Applied Mechanics", **John Wiley & Sons**, New York, 104-201, 233-249 (1962).
12. Callahan, J. and Baruh, H., "A Closed-Form Solution Procedure for Circular Cylindrical Shell Vibrations", **International Journal of Solids and Structures**, 36: 2973-3013 (1999).

13. Kandasamy, S. and Singh, A.V., "Free Vibration Analysis of Skewed Open Circular Cylindrical Shells", *Journal of Sound and Vibration*, 290: 1100-1118 (2006).
14. Singh, A.V. and Shen, L., "Free Vibrational of Circular Cylindrical Composite Shells with Point Supports", *Journal of Aerospace Engineering*, 18 (2): 120-128 (2005).
15. Soedel, W., "Vibrations of Shells and Plates 3th ed.", *Marcel Dekker*, New York, 13-43, 322-336, 391-414 (2004).
16. İnternet: Michelin "Tyre Care Advice / What is Tyre?"
http://www.michelin.co.uk/uk/auto/auto_cons_bib_qu_est_pne.jsp (2007).
17. Tönük, E. and Ünlüsoy, Y., "Prediction of Automobile Tire Cornering Force Characteristics by Finite Element Modeling and Analysis", *Computers and Structures*, 79: 1219-1232 (2001).
18. Ayhan Erdoğan Arşivinden, (2007).
19. Bathe, K.J., "Finite Element Procedures", *Prentice-Hall*, New Jersey, 945-954 (1996).

EKLER

EK-1 Kabuk eleman orta yüzeyine ait şekil değiştirme bileşenleri

$$\varepsilon_1^0 = -\frac{1}{R_1}w + \frac{g_2 \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} v}{g_1 g_2} \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_2^0 = -\frac{1}{R_2}w + \frac{g_1 \frac{\partial v}{\partial \xi_2} + \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} u}{g_1 g_2} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_3^0 = \frac{g_2 \frac{\partial v}{\partial \xi_1} + g_1 \frac{\partial u}{\partial \xi_2} - \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} v - \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} u}{g_1 g_2} \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_4^0 = \frac{\frac{\partial w}{\partial \xi_2}}{g_2 + \psi_2} \quad (1.4)$$

$$\varepsilon_5^0 = \frac{\frac{\partial w}{\partial \xi_1}}{g_1 + g_1 \psi_1} \quad (1.5)$$

EK-2 [K] matris bileşenleri

$$K_{11} = -\frac{w}{R_1^2} + \frac{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} v - \frac{\partial(1/R_1)}{\partial \xi_1} g_2 u + \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} \beta_2 + g_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_1}}{g_1 g_2} \quad (2.1)$$

$$K_{12} = \frac{-\frac{1}{R_1 R_2} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} v - \frac{g_2}{R_1^2} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} - \frac{g_2}{R_1} \frac{\partial(1/R_1)}{\partial \xi_1} u + \frac{1}{R_1} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} \beta_2 + \frac{g_2}{R_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_1}}{g_1 g_2} \quad (2.2)$$

$$K_{13} = \frac{\left(g_1^2 \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} + g_1 g_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1^2} - \frac{\partial g_1}{\partial \xi_1} g_2^2 \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_1} + g_1^2 \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} g_2 \beta_2 + g_1^2 g_2^2 \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_1} \right) k}{g_1^3 g_2^2} \quad (2.3)$$

$$K_{14} = \frac{\left(\frac{g_1^2}{R_1} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} + \frac{g_1 g_2^2}{R_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} - \frac{g_2^2}{R_1} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + \frac{g_1^2 g_2}{R_1} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} \beta_2 + \frac{g_1^2 g_2^2}{R_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_1} \right) k}{g_1^3 g_2^2} \quad (2.4)$$

$$K_{21} = -\frac{w}{R_2^2} + \frac{\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} u - \frac{\partial(1/R_2)}{\partial \xi_2} g_1 v + \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} \beta_1 + g_1 \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_2}}{g_1 g_2} \quad (2.5)$$

$$K_{22} = \frac{-\frac{1}{R_1 R_2} \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} u - \frac{g_1}{R_2^2} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} - \frac{g_1}{R_2} \frac{\partial(1/R_2)}{\partial \xi_2} v + \frac{1}{R_2} \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} \beta_1 + \frac{g_1}{R_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_2}}{g_1 g_2} \quad (2.6)$$

$$K_{23} = \frac{\left(g_2^2 \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + g_1^2 g_2 \frac{\partial w}{\partial \xi_2} - g_1^2 \frac{\partial g_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_2} + g_1 g_2^2 \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} \beta_1 + g_1^2 g_2^2 \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_2} \right) k}{g_1^2 g_2^3} \quad (2.7)$$

EK-2 (Devam) [K] matris bileşenleri

$$K_{24} = \frac{\left(\frac{g_2^2}{R_2} \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + \frac{g_1^2 g_2}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_2^2} - \frac{g_1^2}{R_2} \frac{\partial g_2}{\partial \xi_2} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} + \frac{g_1 g_2^2}{R_2} \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} \beta_1 + \frac{g_1^2 g_2^2}{R_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_2} \right) k}{g_1^2 g_2^3} \quad (2.8)$$

$$K_{31} = \frac{\left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) g_2 \frac{\partial v}{\partial \xi_1} - \frac{\partial(1/R_2)}{\partial \xi_1} g_2 v - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) g_1 \frac{\partial u}{\partial \xi_2} - \frac{\partial(1/R_1)}{\partial \xi_2} g_1 u \\ &+ g_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_1} - \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} \beta_2 + g_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} \beta_1 \end{aligned} \right\}}{g_1 g_2} \quad (2.9)$$

$$K_{32} = \frac{\left\{ \begin{aligned} &-\frac{g_2}{R_1 R_2} \frac{\partial v}{\partial \xi_1} - \left(\frac{g_2}{R_1} \frac{\partial(1/R_2)}{\partial \xi_1} - \frac{1}{R_2^2} \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} \right) v - \frac{g_1}{R_1 R_2} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \\ &-\left(\frac{g_1}{R_2} \frac{\partial(1/R_1)}{\partial \xi_2} - \frac{1}{R_1^2} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} \right) u + \frac{g_2}{R_1} \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_1} - \frac{1}{R_2} \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} \beta_2 + \frac{g_1}{R_2} \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_2} - \frac{1}{R_1} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} \beta_1 \end{aligned} \right\}}{g_1 g_2} \quad (2.10)$$

$$K_{33} = \frac{\left\{ \begin{aligned} &2g_1 g_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - 2g_1 \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} - 2 \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} g_2 \frac{\partial w}{\partial \xi_1} + g_1 g_2^2 \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_1} \\ &-g_1 g_2 \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} \beta_2 + g_1^2 g_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_2} - g_1 \frac{\partial g_2}{\partial \xi_2} g_2 \beta_1 \end{aligned} \right\} k}{g_1^2 g_2^2} \quad (2.11)$$

EK-2 (Devam) [K] matris bileşenleri

$$K_{34} = \frac{\left[\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) g_1 \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial w}{\partial \xi_2} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) g_1 g_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} g_2 \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \\ &+ \frac{g_1 g_2^2}{R_1} \frac{\partial \beta_2}{\partial \xi_1} - \frac{g_1}{R_2} g_2 \frac{\partial g_2}{\partial \xi_1} \beta_2 + \frac{g_1^2 g_2}{R_2} \frac{\partial \beta_1}{\partial \xi_2} - \frac{g_1 g_2}{R_1} \frac{\partial g_1}{\partial \xi_2} \beta_1 \end{aligned} \right] k}{g_1^2 g_2^2} \quad (2.12)$$

$$K_{41} = \frac{1}{R_2} \left(\frac{\partial w / \partial \xi_2}{g_2} + \beta_2 \right) \quad (2.13)$$

$$K_{42} = 3k \left(\frac{\partial w / \partial \xi_2}{g_2} + \beta_2 \right) - \frac{v}{R_2^3} + \frac{\beta_2}{R_2^2} \quad (2.14)$$

$$K_{43} = \frac{k}{R_2} \left(\frac{\partial w / \partial \xi_2}{g_2} + \beta_2 \right) \quad (2.15)$$

$$K_{51} = \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial w / \partial \xi_1}{g_1} + \beta_1 \right) \quad (2.16)$$

$$K_{52} = 3k \left(\frac{\partial w / \partial \xi_1}{g_1} + \beta_1 \right) - \frac{u}{R_1^3} + \frac{\beta_1}{R_1^2} \quad (2.17)$$

$$K_{53} = \frac{k}{R_1} \left(\frac{\partial w / \partial \xi_1}{g_1} + \beta_1 \right) \quad (2.18)$$

EK-3 ${}^n[\bar{Q}]$ matris bileşenleri

$${}^n\bar{Q}_{11} = {}^nQ_{11} \cos^4 \varphi_n + 2({}^nQ_{12} + 2{}^nQ_{66}) \cos^2 \varphi_n \sin^2 \varphi_n + {}^nQ_{22} \sin^4 \varphi_n \quad (3.1)$$

$${}^n\bar{Q}_{12} = ({}^nQ_{11} + {}^nQ_{22} - 4{}^nQ_{33}) \cos^2 \varphi_n \sin^2 \varphi_n + {}^nQ_{12} (\cos^4 \varphi_n + \sin^4 \varphi_n) \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} {}^n\bar{Q}_{13} = & -\cos \varphi_n \sin^3 \varphi_n {}^nQ_{22} + \cos^3 \varphi_n \sin \varphi_n {}^nQ_{11} \\ & -\cos \varphi_n \sin \varphi_n (\cos^2 \varphi_n - \sin^2 \varphi_n) ({}^nQ_{12} + 2{}^nQ_{33}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$${}^n\bar{Q}_{22} = {}^nQ_{11} \sin^4 \varphi_n + 2({}^nQ_{12} + 2{}^nQ_{66}) \cos^2 \varphi_n \sin^2 \varphi_n + {}^nQ_{22} \cos^4 \varphi_n \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} {}^n\bar{Q}_{23} = & \cos \varphi_n \sin^3 \varphi_n {}^nQ_{11} - \cos^3 \varphi_n \sin \varphi_n {}^nQ_{22} \\ & + \cos \varphi_n \sin \varphi_n (\cos^2 \varphi_n - \sin^2 \varphi_n) ({}^nQ_{12} + 2{}^nQ_{33}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$${}^n\bar{Q}_{33} = ({}^nQ_{11} + {}^nQ_{22} - 2{}^nQ_{12}) \cos^2 \varphi_n \sin^2 \varphi_n + {}^nQ_{33} (\cos^2 \varphi_n - \sin^2 \varphi_n)^2 \quad (3.6)$$

$${}^n\bar{Q}_{44} = {}^nQ_{44} \cos^2 \varphi_n + {}^nQ_{55} \sin^2 \varphi_n \quad (3.7)$$

$${}^n\bar{Q}_{45} = ({}^nQ_{55} - {}^nQ_{44}) \cos \varphi_n \sin \varphi_n \quad (3.8)$$

$${}^n\bar{Q}_{55} = {}^nQ_{55} \cos^2 \varphi_n + {}^nQ_{44} \sin^2 \varphi_n \quad (3.9)$$

EK-4 Eş. 2.59 eşitliğinde yer alan $[\bar{K}]$ katılık matrisinin açılımı

$$\begin{aligned}
 [\bar{K}] = & \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left[\begin{aligned}
 & {}^0A_{ij} \{D_{j0}\} \{D_{i0}\}^T + {}^1A_{ij} \left(\{D_{j0}\} \{D_{i1}\}^T + \{D_{j1}\} \{D_{i0}\}^T \right) \\
 & + {}^2A_{ij} \left(\{D_{j0}\} \{D_{i2}\}^T + \{D_{j2}\} \{D_{i0}\}^T + \{D_{j1}\} \{D_{i1}\}^T \right) \\
 & + {}^3A_{ij} \left(\{D_{j0}\} \{D_{i3}\}^T + \{D_{j3}\} \{D_{i0}\}^T + \{D_{j1}\} \{D_{i2}\}^T + \{D_{j2}\} \{D_{i1}\}^T \right) \\
 & + {}^4A_{ij} \left(\{D_{j0}\} \{D_{i4}\}^T + \{D_{j4}\} \{D_{i0}\}^T + \{D_{j1}\} \{D_{i3}\}^T + \{D_{j3}\} \{D_{i1}\}^T + \{D_{j2}\} \{D_{i2}\}^T \right) \\
 & + {}^5A_{ij} \left(\{D_{j1}\} \{D_{i4}\}^T + \{D_{j4}\} \{D_{i1}\}^T + \{D_{j2}\} \{D_{i3}\}^T + \{D_{j3}\} \{D_{i2}\}^T \right) \\
 & + {}^6A_{ij} \left(\{D_{j2}\} \{D_{i4}\}^T + \{D_{j4}\} \{D_{i2}\}^T + \{D_{j3}\} \{D_{i3}\}^T \right) \\
 & + {}^7A_{ij} \left(\{D_{j3}\} \{D_{i4}\}^T + \{D_{j4}\} \{D_{i3}\}^T \right) + {}^8A_{ij} \left(\{D_{j4}\} \{D_{i4}\}^T \right)
 \end{aligned} \right] \\
 & + \sum_{i=4}^5 \sum_{j=4}^5 \left[\begin{aligned}
 & {}^0A_{ij} \{D_{j0}\} \{D_{i0}\}^T + {}^1A_{ij} \left(\{D_{j0}\} \{D_{i1}\}^T + \{D_{j1}\} \{D_{i0}\}^T \right) \\
 & + {}^2A_{ij} \left(\{D_{j0}\} \{D_{i2}\}^T + \{D_{j2}\} \{D_{i0}\}^T + \{D_{j1}\} \{D_{i1}\}^T \right) \\
 & + {}^3A_{ij} \left(\{D_{j0}\} \{D_{i3}\}^T + \{D_{j3}\} \{D_{i0}\}^T + \{D_{j1}\} \{D_{i2}\}^T + \{D_{j2}\} \{D_{i1}\}^T \right) \\
 & + {}^4A_{ij} \left(\{D_{j1}\} \{D_{i3}\}^T + \{D_{j3}\} \{D_{i1}\}^T + \{D_{j2}\} \{D_{i2}\}^T \right) \\
 & + {}^5A_{ij} \left(\{D_{j2}\} \{D_{i3}\}^T + \{D_{j3}\} \{D_{i2}\}^T \right) + {}^6A_{ij} \left(\{D_{j3}\} \{D_{i3}\}^T \right)
 \end{aligned} \right]
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

EK-5 [M] kütle matrisi

$$[M] = \sum_{n=1}^N \int_{t_n} \rho_n \begin{bmatrix} 1 - \frac{\zeta}{R_1} \left(2 - \frac{\zeta}{R_1} \right) & 0 & 0 & \frac{k\zeta^3}{g_1} \left(1 - \frac{\zeta}{R_1} \right) & 0 & \left(1 - \frac{\zeta}{R_1} \right) (\zeta + k\zeta^3) & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\zeta}{R_2} \left(2 - \frac{\zeta}{R_2} \right) & 0 & 0 & \frac{k\zeta^3}{g_2} \left(1 - \frac{\zeta}{R_2} \right) & 0 & \left(1 - \frac{\zeta}{R_2} \right) (\zeta + k\zeta^3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k\zeta^3}{g_1} \left(1 - \frac{\zeta}{R_1} \right) & 0 & 0 & \frac{k^2\zeta^6}{g_1^2} & 0 & \frac{k\zeta^4}{g_1} + \frac{k^2\zeta^6}{g_1} & 0 \\ 0 & \frac{k\zeta^3}{g_2} \left(1 - \frac{\zeta}{R_2} \right) & 0 & 0 & \frac{k^2\zeta^6}{g_2^2} & 0 & \frac{k\zeta^4}{g_2} + \frac{k^2\zeta^6}{g_2} \\ \left(1 - \frac{\zeta}{R_1} \right) (\zeta + k\zeta^3) & 0 & 0 & \frac{k\zeta^4}{g_1} + \frac{k^2\zeta^6}{g_1} & 0 & \zeta^2 + k\zeta^4(2 + k\zeta^2) & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{\zeta}{R_2} \right) (\zeta + k\zeta^3) & 0 & 0 & \frac{k\zeta^4}{g_2} + \frac{k^2\zeta^6}{g_2} & 0 & \zeta^2 + k\zeta^4(2 + k\zeta^2) \end{bmatrix}$$

(5.1)

EK-6 $\{\chi\}$ vektörünün bileşenleri

$$\chi_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.1)$$

$$\chi_2 = \frac{\partial \beta_1}{\partial x} \quad (6.2)$$

$$\chi_3 = 0 \quad (6.3)$$

$$\chi_4 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \quad (6.4)$$

$$\chi_5 = -\frac{w}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta} \quad (6.5)$$

$$\chi_6 = -\frac{1}{R} \frac{\partial \beta_2}{\partial \theta} \quad (6.6)$$

$$\chi_7 = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.7)$$

$$\chi_8 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial \beta_2}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta} \quad (6.8)$$

$$\chi_9 = -\frac{1}{R} \frac{\partial \beta_1}{\partial \theta} \quad (6.9)$$

$$\chi_{10} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\beta_1}{R} \quad (6.10)$$

$$\chi_{11} = \chi_{12} = 0 \quad (6.11)$$

$$\chi_{13} = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\beta_2}{R} = -\chi_{14} \quad ; \quad \chi_{15} = \frac{\beta_2}{R} \quad (6.12)$$

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ERDOĞMUŞ, Ayhan
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 09.01.1978 Nevşehir
Medeni hali : Evli
Telefon : 0 (312) 283 52 64
Faks : 0 (312) 252 61 82
e-mail : aerdogmus78@yahoo.com.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Makine Müh. Bölümü	2007
Lisans	İstanbul Teknik Üniversitesi / Uçak Müh. Bölümü	2000
Lise	Nevşehir Anadolu Lisesi	1995

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2001-2002	Üç-San Otomotiv San.A.Ş. Nevşehir	Son Ürün Kontrol Şefi
2002-2007	5. Ana Bkm.Mrk. Komutanlığı Ankara	Helikopter Montaj Kısım Amiri

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Bilgisayar, Bilgisayar Teknolojileri, Tenis, Futbol, Yüzme