

**PAINLEVE ANALİZİ İLE BAZI LİNEER OLMAYAN KİSMİ  
TÜREVLİ DENKLEMLERİN İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ VE  
SOLİTON ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE**

**Figen KANGALGİL**

**DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TEMMUZ 2008  
ANKARA**

Figen KANGALGİL tarafından hazırlanan PAİNLEVE ANALİZİ İLE BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ VE SOLİTON ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Fatma AYAZ

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

  
.....

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ömer AKIN

Matematik Anabilim Dalı, TOBB ETÜ

Doç. Dr. Ogün DOĞRU

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Fatma AYAZ

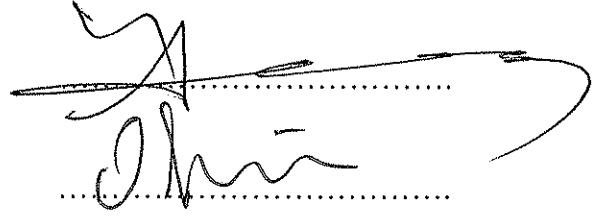
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Meryem KAYA


Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi


Yrd. Doç. Dr. Adil MISIR

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

  
.....

  
.....

  
.....

  
.....

Tarih: 09 / 07 / 2008

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Doktora derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nermin ERTAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

.....

## **TEZ BİLDİRİMİ**

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Figen KANGALGİL

**PAİNLEVE ANALİZİ İLE BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ  
TÜREVLİ DENKLEMLERİN İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ VE  
SOLİTON ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE  
(Doktora Tezi)**

**Figen KANGALGİL**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
Temmuz 2008**

**ÖZET**

Altı bölümden oluşan bu tezin 3, 4 ve 5. bölümleri orijinalliğe sahiptir ve her bir bölümde aşağıdaki konular incelenmiştir. İlk bölümde, integrallenebilme kavramı ile soliton dalgalar hakkında genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, Painleve anlamında integrallenebilirlik için diferensiyel denklemlerde ARS ve kısmi türevli denklemlerde WTC algoritmaları ayrıntılı olarak incelenmiştir. Üçüncü bölümde, Ostrovsky denkleminin Painleve analizi uygulanmış ve bu denklemin integrallenebilir bir denklem olduğu gösterilmiştir. Ayrıca Ostrovsky denkleminin yardımcı eşitlik metoduyla bazı soliton çözümleri elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, lineer olmayan bir evrim denkleminin  $m$  ve  $p$  in durumlarına göre Painleve analizi uygulanmıştır. İlk terim davranışının ve rezonans değerlerinin genel formülleri elde edilip  $p$  ve  $m$  in farklı değerleri için bahsedilen denklemin Painleve özelliğine veya şarta bağlı Painleve özelliğine sahip olup olmadığı incelenmiştir. Beşinci bölümde, KdV, mKdV denklemleri, Hirota-Satsuma Coupled KdV ve Coupled mKdV denklem sistemlerine diferensiyel dönüşüm metodu uygulanmış ve elde edilen yaklaşık çözümler, literatürde var olan analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır. Böylece yaklaşık

**sonuçların duyarlılığı incelenmiştir. Son bölümde de, sonuç ve önerilere yer verilmiştir.**

**Bilim Kodu : 204. 1. 138**  
**Anahtar Kelimeler : Painleve Analizi, Soliton zmler, Yardımcı Eşitlik Metodu, Diferensiyel Dönüşüm Metodu.**  
**Sayfa Adeti : 89**  
**Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Fatma AYZ**

**ON THE INTEGRABILITY OF SOME NONLINEAR PARTIAL  
DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PAINLEVE ANALYSIS AND  
SOLITON SOLUTIONS**

**(Ph.D. Thesis)**

**Figen KANGALGİL**

**GAZİ UNIVERSITY  
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

**July 2008**

**ABSTRACT**

**This thesis, consisting of six chapters, has originality in the 3rd, 4th and 5th chapters, and the following issues have been investigated in each part. In the first chapter, fundamental knowledge about the integrability and solitary waves have been given. In the second chapter, for integrability by the means of Painleve, the ARS algorithm for differential equations and WTC algorithm for partial differential equations have been investigated in details. In the third chapter, Painleve analysis has been applied to Ostrovsky equation and shown that this equation is integrable. Besides, some soliton solutions of Ostrovsky equation have been obtained by using auxiliary equation method. In the fourth chapter, Painleve analysis has been applied to a nonlinear evolution equation with respect to the situation of  $m$  and  $p$ . Finding the general formulations of first term behavior and resonance values for different values of  $p$  and  $m$ , it has been discussed that the mentioned equation whether possesses Painleve property or conditional Painleve property. In the fifth chapter, Differential transform method has been applied to KdV, mKdV equations, Hirota-Satsuma Coupled KdV and Coupled mKdV equation systems and the approximate solutions have been compared with the analytical solutions available in the literature. Hence, the accuracy of the approximate solutions has been investigated. In the last section, outcomes and some suggestions have been ranked.**

**Science Code : 204. 1. 138**  
**Key Words : Painleve Analysis, Soliton Solutions, Auxiliary Equation  
Method, Differential Transform Method.**  
**Page Number : 89**  
**Adviser : Yrd. Doç. Dr. Fatma AYZ**

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde bana her türlü yardımda bulunan ve emeklerini esirgemeyen aşağıda adı geçen kişilere en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Doktora çalışmamın her aşamasında benden destek ve ilgilerini esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Fatma AYZA'ya çok teşekkür ederim.

Tez izleme komitesi üyeleri Sayın Prof. Dr. Ömer AKIN ve Yrd. Doç. Dr. Meryem KAYA'ya tezin olgunlaşmasında ve tezin yazım aşamalarında yaptıkları katkılardan dolayı çok teşekkür ederim.

Doktora çalışmamın her aşamasında ve sıkıntılı olduğum dönemlerde her türlü yardımı esirgemeyen, hep yanımda olan sevgili arkadaşlarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ, Yrd. Doç. Dr. Tahire ÖZEN ve Arş. Gör. M. Fahri AKTAŞ' a çok teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarım süresince her zaman yanımda olan, bana manevi destek veren sevgili anneme, babama, ablama, destek ve anlayışlarını esirgemeyen eşim Murat KANGALGİL'e ve kızım Irmak'a sonsuz teşekkür ederim.



**İÇİNDEKİLER**

	<b>Sayfa</b>
ÖZET .....	iv
ABSTRACT .....	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER .....	ix
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	xii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xiv
1. GİRİŞ .....	1
2. PAINLEVE ANALİZİ .....	6
2.1. Temel Kavramlar .....	6
2.2. Sabit ve Hareketli Tekillikler.....	8
2.2.1. Lineer diferensiyel denklemler ve sabit tekillikler.....	9
2.2.2. Lineer olmayan diferensiyel denklemler ve hareketli tekillikler .....	10
2.3. Diferensiyel Denklemler İçin Painleve Analizi Yöntemi (ARS) .....	10
2.3.1. İlk terim davranışı .....	11
2.3.2. Rezonanslar .....	13
2.3.3. Keyfi (integral) sabitlerin belirlenmesi .....	15
2.4. Kısmi Türevli Denklemler İçin Painleve Analizi Yöntemi (WTC).....	16
2.4.1. İlk terim davranışı .....	17
2.4.2. Rezonanslar .....	18

**Sayfa**

2.4.3. Keyfi (integral) sabitlerinin bulunması .....	18
2.4.4. KdV denklemleri için Painleve analizi .....	19
3. OSTROVSKY DENKLEMİ İÇİN PAINLEVE ANALİZİ VE BAZI SOLİTON ÇÖZÜMLERİ .....	22
3.1. Ostrovsky Denklemi için Painleve Analizi.....	22
3.2. Yardımcı Eşitlik Metodu .....	24
3.3. Ostrovsky Denklemine Soliton Çözümleri .....	26
4. ŞARTLI PAINLEVE ANALİZİ .....	33
4.1. Bir Evrim Denklemi İçin Painleve Analizi.....	33
5. İKİ BOYUTLU DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU .....	43
5.1. Diferensiyel Dönüşüm Metodu.....	43
5.2. KdV ve mKdV Denklemlerinin Diferensiyel Dönüşüm Metodu ile Yaklaşık Çözümleri.....	48
5.2.1. KdV denklemlerinin diferensiyel dönüşüm metodu ile yaklaşık çözümleri.....	48
5.2.2. mKdV denklemlerinin diferensiyel dönüşüm metodu ile yaklaşık çözümleri.....	54
5.3. Hirota-Satsuma İkili KdV ve İkili mKdV Diferensiyel Denklem Sistemlerinin Diferensiyel Dönüşüm Metodu ile Yaklaşık Çözümleri .....	56
5.3.1. Hirota-Satsuma İkili KdV denklem sisteminin diferensiyel dönüşüm metodu ile yaklaşık çözümleri. ....	57
5.3.2. İkili mKdV denklem sisteminin diferensiyel dönüşüm metodu ile yaklaşık çözümleri .....	64
6. SONUÇ VE ÖNERİLER .....	71
KAYNAKLAR .....	72

**Sayfa**

EKLER.....	77
EK-1. EŞ 4.10. Denkleminin Çıkarılması için Kullanılan Maple10 Programı ....	78
EK-2. Diferensiyel Dönüşüm Metodu.....	83
EK-3. Eş 5.27. Denkleminin Eş 5.29 Başlangıç Koşullarıyla Çözülmesinde Kullanılan Maple10 Programı.....	84
ÖZGEÇMİŞ .....	88

## ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 3.1. $\Delta = b^2 - 4ac$ ve $\varepsilon = \mp 1$ için Eş 3.8 denkleminin çözümleri .....	26
Çizelge 5.1. $U(k, h)$ dönüşüm katsayılarının bazı değerleri .....	49
Çizelge 5.2. Eş 5.14 başlangıç değerine göre hesaplanan $U(k, h)$ dönüşüm katsayılarının bazı değerleri .....	52
Çizelge 5.3. Eş. 5.27 başlangıç koşullarına göre hesaplanan $U(k, h)$ , $V(k, h)$ ve $W(k, h)$ dönüşüm katsayıların bazı değerleri.....	59
Çizelge 5.4. Eş 5.25 denklem sisteminin Eş 5.27 başlangıç koşuluna göre elde edilen yaklaşık çözümün $c_0 = 1$ , $c_1 = 1$ , $k = 0, 1$ , $\beta = 1$ , $t = 2$ için tam çözüm ile karşılaştırılması .....	62
Çizelge 5.5. Eş 5.25 denklem sisteminin Eş 5.36 başlangıç koşuluna göre elde edilen yaklaşık çözümün $c_1 = 1$ , $k = 0, 1$ , $\beta = 1$ , $t = 1$ için tam çözüm ile karşılaştırılması .....	63
Çizelge 5.6. Eş 5.37 başlangıç koşuluna göre hesaplanan $U(k, h)$ ve $V(k, h)$ dönüşüm katsayılarının bazı değerleri .....	66
Çizelge 5.7. Eş 5.37 başlangıç koşuluyla Eş 5.26 denkleminin $k = 0, 1$ , $\lambda = 1$ , $t = 0, 5$ için tam çözüm ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması.....	68
Çizelge 5.8. Eş 5.43 başlangıç koşuluyla Eş 5.25 denklem sisteminin $K = 0, 1$ , $\lambda = 0, 1$ , $b_1 = 0, 1$ ve $t = 0, 5$ için tam çözüm ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması.....	69

## ŞEKİLLERİN LİSTESİ

<b>Şekil</b>	<b>Sayfa</b>
Şekil 1.1. Soliton Dalga (Solitary wave) .....	3
Şekil 3.1. Ostrovsky denkleminin (a) $u_1(x,t)$ (b) $u_3(x,t)$ ve (c) $u_5(x,t)$ çözümlerinin a=1, a <sub>1</sub> =1, w=1, $0,5 \leq x \leq 8$ ve $1 \leq t \leq 4$ bölgesinde grafikleri.....	30
Şekil 5.1. Eş. 5.11 kullanılarak sırasıyla $K=2$ , $-2 \leq t \leq 4$ , $-4 \leq x \leq 10$ ve $K=2$ , $t=0$ , $-4 \leq x \leq 4$ için elde edilen 2 ve 3 boyutlu çözüm grafikleri .....	51
Şekil 5.2. KdV denkleminin (a) tam ve (b) yaklaşık çözüm ( $t=0,08$ ve $-2 \leq x \leq 5$ ) grafikleri.....	54
Şekil 5.3. Eş 5.25 denklem sisteminin Eş 5.27 başlangıç şartlarında elde edilen yaklaşık çözüm grafiği .....	62
Şekil 5.4. Eş 5.25 denklem sisteminin Eş 5.36 başlangıç şartlarında elde edilen yaklaşık çözüm grafiği .....	64
Şekil 5.5. Eş 5.37 başlangıç koşuluyla Eş 5.26 denklem sisteminin yaklaşık çözüm grafği .....	68
Şekil 5.6. Eş 5.43 başlangıç koşuluyla Eş 5.26 denklem sisteminin yaklaşık çözüm grafği .....	70

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

<b>Kısaltmalar</b>	<b>Açıklama</b>
<b>PDE</b>	Kısmi Türevli Diferensiyel Denklem
<b>ODE</b>	Diferensiyel Denklem
<b>P-tipi</b>	Painleve Özelliğine sahip
<b>ARS</b>	Ablovitz-Ramani-Segur algoritması
<b>WTC</b>	Weiss-Tabor-Carnevale algoritması
<b>KdV</b>	Korteweg-de Vries Denklemi
<b>mKdV</b>	Modifiye Korteweg-de Vries Denklemi

## 1. GİRİŞ

Doğadaki ve disiplinlerarası bilimlerdeki pek çok olay matematiksel olarak modellendiğinde lineer olmayan diferensiyel denklemlerle ya da kısmi türevli denklemlerle tanımlanır. Sıklıkla kimyasal, biyolojik ve fiziksel olayların tarifinde karşımıza çıkan bu denklemlerin, çözümlerinin varlığı gösterilebilirse analitik veya kapalı form çözümlerinin bulunması ve bu türden denklemlerin pek çok sayıda çözümü olabileceğinden çözümlerinin sınıflandırılması oldukça önemlidir. Bu nedenle son yıllarda pek çok araştırmacı lineer olmayan, özellikle kısmi türevli evrim denklemleri de denilen denklemlerin çözülebilirliği (integrallenebilirliği) ve soliton çözümleri üzerine yoğunlaşmıştır.

Lineer olmayan denklemler ele alındığında karşılaşılan en temel soru bu denklemlerin integrallenebilir olup olmadığıdır. Denklemlerin integrallenebilir olduğunu göstermede kullanılan pek çok yöntem vardır. Bunlardan bazıları Lax çiftlerinin, simetrilerin, Backlund ve Darboux dönüşümlerinin bulunması, Painleve analizi vb. dir. Bu tezde, Painleve anlamında integrallenebilme üzerine yoğunlaşmıştır. Integrallenebilme, çözümlerin varlığı üzerine önemli bilgiler sağlar. Painleve şartına sahip bir lineer olmayan denklem ya da sistemin çözümü keyfi seçilen bir tekil manifold civarında tek değerlidir ve denklemin çözümü bu keyfi manifold civarında Laurent serisi şeklinde gösterilebilir.

20. yüzyılın başlarında Paul Painleve ve onunla birlikte çalışan arkadaşları E. Picard, L. Fuchs, R. Fuchs, J. Charzy, B. Gambier, S. Kowalaevski, L. R. Garnier lineer olmayan denklemlerin önemli bir sınıfını tekil (singüler) noktaları açısından ele aldılar. Yaptıkları çalışmalar sonucunda hareketli tekillikleri sadece kutuplar olan bir denklem sınıfı ortaya koydular [1]. Daha sonraları 1980 yılında Ablowitz, Ramani, Segur diferensiyel denklemler için Painleve analizini (ARS algoritmasını) geliştirdiler [2]. 1983 yılında Weiss, Tabor ve Carnevale ARS algoritmasının kısmi türevli denklemler için bir genellemesi olan WTC algoritmasını verdiler [3].

Doğadaki pek çok karmaşık olayın tanımlanmasında lineer olmayan evrim denklemleri denilen denklemlerin kullanılması nedeniyle bunların değişik tipte çözümleri doğadaki bu tip olayların açıklığa kavuşturulmasında büyük önem taşır. Örneğin, soliton dalga, girdap, kaos vb. gibi olaylar doğada görülen karmaşık olaylardan bazılarıdır. Son yıllarda fiziksel olayları modelleyen denklemlerin çözümleri özellikle de soliton çözümlerinin bulunabilmesi konusundaki çalışmalar yoğun bir şekilde sürmektedir. Pek çok güçlü metot bu tür denklemlerin çözülebilmesi için ortaya atılmıştır. Bunlar içinde ters saçılım metodu [4], Backlund-Darboux dönüşümleri [5], Hirota bilineer form metodu [6], Painleve kesme metodu [7] ve Yardımcı eşitlik metodu [8] sayılabilir.

Solitonlar şekil ve hız özelliklerini kaybetmeden yayılan ve herhangi bir çarpışma esnasında kendisine ait özelliklerini koruyabilen dalgalardır. Soliton dalgalar olarak da bilinen bu lineer olmayan hareketli dalgaları, ilk olarak 1834 yılında İskoçyalı mühendis olan Scott Russell ortaya atmıştır. Russell'ın solitonları ilk keşfetmesiyle ilgili hikayesi oldukça ilginç ve etkileyicidir.

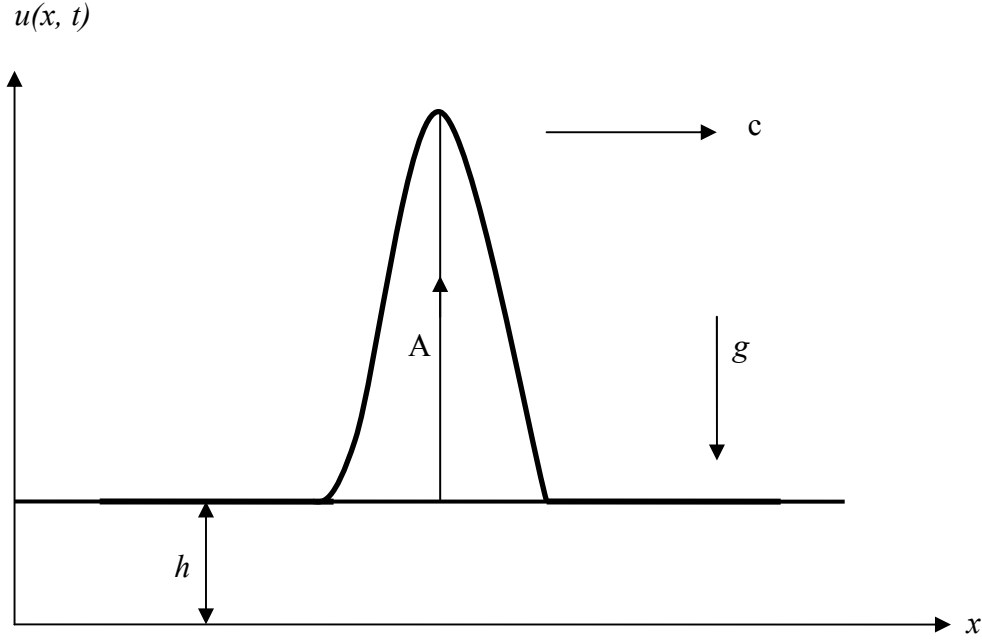
“Ben çift beygir gücüyle giden bir botun, dar bir kanaldan geçerken hareketini gözlüyordum. Bot aniden durunca kanalda hareketli olan su kitlesinin birikmediğini gördüm. Bu su kitlesi, botun uç kısmının etrafında birikti. Ve daha sonra aniden arkaya doğru yayıldı. Büyük bir hızla öne doğru tek başına bir su dalgasının meydana geldiğini fark ettim. Bu yuvarlanmış belirgin su kütlesinin hızının azalmadan ve şeklinin değişmeden kanal boyunca ilerleyişinin devam ettiğini fark ettim. Onu at sırtında takip ettim, ona yetiştiğimde saatte 8-9 mil hızla ilerleyişine devam ettiğini gördüm. Onu 1-2 mil takip ettikten sonra kanalın dönüşünde kaybettim. Böylece 1834'ün ağustos ayında benim büyük dalga kayması olarak adlandırdığım ilk gözlemlerimi tanıtmaya şansım oldu.”

Russell yaptığı deneysel çalışmalarla bu dalganın anlamını ortaya koymuş ve  $c$  dalga hızının; dalga genişliğine  $A$ , suyun derinliğine  $h$  ve yerçekimi ivmesi  $g$ ' ye bağlı olduğunu ifade etmiştir. Buna göre, dalganın hızı

$$c = \sqrt{g(A+h)} \quad (1.1)$$



şeklinde olup hızın dalga genişliğine bağlı olması oldukça önemlidir. Çünkü bu dalga denkleminin lineer olmadığını gösterir. Daha sonraları bilim adamları, lineer olmayan özelliklerinden dolayı bu dalgalara soliton adını vermişlerdir. Tek dalga profili Şekil 1.1’ de görüldüğü gibidir.



Şekil 1.1. Soliton Dalga (Solitary wave)

Bu çalışmadan yaklaşık 60 yıl sonra, 1895 yılında D. J. Korteweg ve G. De Vries adlarında iki Alman bilim adamı, Scott tarafından gözlemlenen olayın bir açıklamasını veren matematiksel bir model olarak

$$u_t(x, t) + 6u(x, t)u_x(x, t) + u_{xxx}(x, t) = 0 \quad (1.2)$$

denklemini ortaya koymuşlardır. Eş 1.2 denklemi KdV denklemi olarak bilinir. Bu denklemde  $u=u(x, t)$  terimi dalgayı,  $t$  zaman dilimini,  $x$  ise konumu ifade etmektedir.  $x$  değiştiğinde dalga yayılmakta ve ilerlemektedir. KdV denklemi sığ sularda oluşan dalgaların kesintisiz biçimde yayılışını açıklayan model olarak ortaya atılmıştır. Daha sonraları solitonların, plazmadaki iyon ses dalgaları, plazmadaki manyetohidrokinamik dalgalar, elastik çubuklarda dağılan dalgalar, lineer olmayan

ses dalgaları vb. olayları da modellediği belirlenmiştir. KdV denkleminin en önemli özelliği lineer olmayan terim ve dağılma terimi arasındaki ilişkiyi en basit şekilde temsil eden matematiksel model olmasıdır ( $u_{xxx}$  terimi dağılmayı belirler) [9].

1965 yılında Zabusky ve Kruskal'ın yapmış olduğu çalışma lineer olmayan dalga modellerinde önemli bir yer almıştır [10]. Onlar soliton dalganın başka bir soliton dalga ile çarpıştığında değişmediğini ortaya çıkardılar. Fiziksel olarak iki farklı soliton, farklı genliklere ve dolayısıyla farklı hızlara sahip ve reel eksen üzerinde birbirinden uzak olarak yerleşmişlerse (biri eksenin sol tarafında diğeri ise sağ tarafında yer alsın) sol taraftaki daha uzun (daha hızlı) dalga, kısa ve daha sağdaki (daha yavaş olan) dalgayı yakalayıp üzerinden aşarak yoluna devam eder ve bu etkileşimden tamamen şekil ve hız korumalı olarak çıkarlar. Bu özelliklerinin ortaya çıkması ile soliton dalgaların önemi de farklı bir anlam kazanmıştır [9].

Daha sonraları Gardner ve arkadaşları [11] ve Hirota [12,13] herhangi bir pozitif  $N$  tam sayısı için  $N$ -soliton arasındaki etkileşimi açıklayan KdV denkleminin analitik çözümlerini ortaya koymuşlardır. Solitonların deneysel doğrulanması ve etkileşimleri Zabusky ve Galvin [14], Hammack ve Segur [15] ve Weidmen ve Maxworthy [16] tarafından başarılı bir şekilde gösterilmiştir. Dolayısıyla bu buluşlar son 30 yıl boyunca yaygın bir şekilde teorik, deneysel ve nümerik çalışmalara yol açmıştır. Şimdilerde benzer özelliklere sahip pek çok lineer olmayan model denklemleri bulunmuş olup, bu denklemler üzerinde çalışılmaktadır [17]. Ayrıca, bu tür denklemlerin soliton çözümlerini bulmak için pek çok metot geliştirilmiştir [4,5-8].

Bugün solitonların kullanıldığı pek çok yer vardır. Herhangi bir sinyal iletiminde, sinyalin zarara uğramadan ve yeterli büyüklükte hedefe ulaşması önemlidir. Normal sinyallerin durumları değişebilir ve genişliklerinde farklılıklar olabilir. Bu lineer dalgalar etrafa yayılabilir ve sinyalleri zayıflayabilir. Solitonlar sıradan dalgalara göre genişliklerini değiştirmeden sabit tutabilmektedirler. Soliton dalgalar ile 10.000 km' ye kadar özellikleri değişmeden başarıyla sinyal iletebilmektedir. Bununla birlikte çarpıştıklarında birbirinden etkilenmemekte ve sinyaller optik kablolar

boyunca her iki yönde iletilebilmektedir. Sinyaller, gideceği yere orijinal durumlarında ve yeterince anlaşılabilir büyüklükte ulaştırılabilir. Bu nedenle elektromanyetik dalgaları otomatik olarak tekrarlayan aletlere de ihtiyaç kalmamaktadır [9].

Bu tezin ikinci bölümünde, tezde kullanılan bazı temel kavramlara yer verilmiş ve integrallenebilmenin bir göstergesi olarak diferensiyel denklemler için ARS algoritması ve kısmi türevli denklemler için WTC algoritması ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, Ostrovsky denklemine Painleve analizi uygulanmış ve bu denklemin integrallenebilir bir denklem olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, Ostrovsky denkleminin yardımcı eşitlik metoduyla bazı soliton çözümleri ilk kez elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, aşağıda Eş 1.3 denklemi ile tanımlanan lineer olmayan evrim denkleminin  $m$  ve  $p$ ' nin durumlarına göre Painleve analizi yapılmıştır.

$$u_{tt} = K(u^m u_x)_x - \beta u^p \quad (1.3)$$

Burada  $p, m \in Z^+$ ,  $K, \beta$  keyfi parametrelerdir. Eş 1.3 denkleminin ilk terim davranışının ve rezonans değerlerinin genel formülleri elde edilip,  $p$  ve  $m$ ' in farklı değerleri için denklemin Painleve özelliğine ya da şarta bağlı Painleve özelliğine sahip olup olmadığı incelenmiştir.

Beşinci bölümde, KdV, mKdV denklemleri, Hirota-Satsuma ikili KdV ve ikili mKdV denklem sistemlerine diferensiyel dönüşüm metodu uygulanmış ve elde edilen seri çözümleri, literatürde bilinen soliton çözümleriyle karşılaştırılarak çözümlerin duyarlılığı incelenmiştir.

## 2. PAİNLEVE ANALİZİ

### 2.1. Temel Kavramlar

Bu kısımda Painleve analizi için tezde kullanılan temel kavramlar üzerinde durulacaktır. Eğer bir  $f(z)$  fonksiyonu herhangi bir  $z_0$  noktasının komşuluğundaki her bir  $z$  için türevlenebiliyorsa,  $f(z)$ 'ye  $z_0$  noktasında analitiktir denir.  $f(z)$  fonksiyonunun analitik olmadığı nokta  $f(z)$ ' in bir tekil noktasıdır. Tekil noktalar Laurent serileri yardımıyla incelenebilir.  $z=z_0$  noktası  $u = f(z)$  fonksiyonunun bir tekil noktası olsun. O zaman  $f(z)$  fonksiyonu,  $z_0$  noktasının bir delinmiş komşuluğunda analitiktir ve Laurent seri açılımı elde edilebilir.

2.1. Teorem:

$u=f(z)$  fonksiyonu  $r_1 < |z - z_0| < r_2$  halkasal bölgesinde analitik olsun. Bu takdirde bu halkasal bölgedeki  $z$  değerleri için  $f(z)$  fonksiyonu,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (2.1)$$

biçiminde seriye açılır. Burada  $a_n (n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots)$  katsayıları ise herhangi basit kapalı pozitif yönlü  $C$  çevresi için

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

şeklinde tek türlü bellidir [18].

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  serisine  $r_1 < |z - z_0| < r_2$  halkasal bölgesinde  $z_0$  komşuluğunda

$u = f(z)$  fonksiyonunun Laurent serisi veya Laurent açılımı denir.

$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$  sayılarına da  $z_0$  noktasındaki  $u$  fonksiyonunun Laurent

katsayıları adı verilir [18].

$z = z_0$  noktası  $u$  fonksiyonunun tekil noktası ve  $0 < |z - z_0| < R$  komşuluğunda  $u$  fonksiyonu Laurent serisi açılımına sahip olsun. Bu durumda tekil noktalar aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

1) Eş 2.1 serisinde  $(z - z_0)'$  in negatif kuvvetleri yoksa  $z_0$  noktası  $u$  fonksiyonunun kaldırılabilir tekil noktasıdır. Yani  $n = -1, -2, -3, \dots$  için  $a_n = 0$  ise  $z_0$  noktasına kaldırılabilir tekil nokta denir.

2) Eş 2.1 serisindeki  $u$  fonksiyonunun açılımında  $(z - z_0)^{-k}$  ( $k \in \mathbb{N}^+$ ) yazılabiliyor ve  $a_{-k-1} = a_{-k-2} = \dots = 0$  ise  $z_0$  noktası  $k$ . mertebeden bir kutup noktasıdır denir. Yani  $n = -k-1, -k-2, -k-3, \dots$  için  $a_n = 0$  ve  $a_{-k} \neq 0$  olacak şekilde bir pozitif tamsayı mevcutsa  $z_0$  noktası  $k$ . mertebeden kutup noktası denir.  $k=1$  ise  $z = z_0$  tekil noktası basit kutup adını alır.

3) Eş 2.1 serisinde  $(z - z_0)'$  in sonsuz çoklukta negatif kuvveti varsa,  $z_0$  noktası esas tekil noktasıdır. Yani sonsuz çoklukta negatif  $n$  tamsayısı için  $a_{-n} \neq 0$  ise  $z_0$  noktasına esas tekil nokta denir.

Cebirsel dallanma tekilliği çok değerli fonksiyonlarla ilgilidir.  $w=f(z)$  fonksiyonunda  $z'$  nin her bir değerine  $w'$  nin tek bir değeri karşılık geliyorsa  $w$  ye  $z'$  nin tek değerli fonksiyonu denir ya da  $f(z)$  tek değerlidir denir. Örneğin,  $w=f(z)=z^2$  fonksiyonu tek

değerli fonksiyondur.  $z'$  nin her bir değerine karşılık  $w'$  nin birden çok değeri karşılık geliyorsa  $w'$  ye  $z'$  nin bir çok değerli fonksiyonu denir. Örneğin,  $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$  fonksiyonu çok değerli bir fonksiyondur.  $z=-1$  noktası için  $w'$  nin  $\bar{\pi}i$  şeklinde iki değeri karşılık gelir.  $w = f(-1) = (-1)^{\frac{1}{2}} = \{z \in C \mid z^2 = -1\} = \{\bar{\pi}i\}$

Cebirsel Dallanma Tekilliği:  $n > 1$  pozitif tamsayı olmak üzere  $w = f(z) = (z - z_0)^{\frac{1}{n}}$  şeklindeki çözüm  $z = z_0$  noktasında cebirsel dallanma tekilliğine sahiptir denir [19].

$w = f(z) = (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$  fonksiyonu  $z = \bar{\pi}i$  noktalarında cebirsel dallanma tekillik noktalarına sahiptir.

Bağdaşabilirlik Şartı:  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bilinmeyenleri ve  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sabitleri cinsinden  $b$  yi ifade eden  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$  denklemi lineer bir denklem olarak adlandırılır. Daha genel olarak  $x_1, x_2, \dots, x_n$   $n$ -bilinmeyenli  $m$  lineer denklemin bir sistemi veya bir lineer sistem; her biri  $n$ -bilinmeyenli  $m$  tane lineer denklemin bir cümlesidir. Lineer bir sistem, genellikle

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer Eş 2.2 lineer sistemi bir çözüme sahip değilse, sisteme bağdaşabilir olmayan; en az bir çözümü var ise bağdaşabilirdir denir [20].

## 2.2. Sabit ve Hareketli Tekillikler

Bir diferensiyel denklemin tekil noktaları sabit ve hareketli olmak üzere iki şekilde karşımıza çıkar. Diferensiyel denklemde çözümler, integral sabitlerini içerdiğinden,

bu tekil noktalar integral sabitlerine ve dolayısıyla problemin başlangıç ve sınır şartlarına bağlı olabilirler. Böyle tekil noktalara hareketli tekil noktalar denir. Diğer yandan, tekil noktalar integral sabitlerine bağlı değilse, bu türdeki tekil noktalara sabit tekil noktalar denir [19,21-23].

### 2.2.1. Lineer diferensiyel denklemler ve sabit tekillikler

Verilen bir diferensiyel denkleme göre  $z$ -düzlemindeki noktaları iki sınıfa ayırmak mümkündür. Bu noktalar ya adi noktalar ya da tekil (singüler) noktalar' dır.

$$y^n(z) + P_1(z)y^{n-1}(z) + \dots + P_{n-1}(z)y'(z) + P_n(z)y(z) = 0 \quad (2.3)$$

Eş 2.3 denkleminde  $P_j(z), j=1,2,\dots,n$  fonksiyonlarının her biri  $z_0$  noktasında analitik ise,  $z_0$  noktasına bu denklemin bir adi noktası denir. Bu fonksiyonlardan biri veya birkaçı  $z_0$  noktasında analitik değilse,  $z_0$  noktasına bu denklemin bir tekil (singüler) noktası denir.  $P_j(z), j=1,2,\dots,n$  katsayı fonksiyonları keyfi  $z_0 \in C$  noktasında analitik fonksiyonlar olmak üzere,  $n$ . mertebeden Eş 2.3 lineer diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin lineer bağımsız  $n$  tane çözümü olacağı ve  $c_i$ ' ler integral sabitleri olmak üzere ( $n$ . mertebeden bir diferensiyel denklemin  $n$  tane keyfi sabiti vardır) denklemin çözümü

$$y(z) = \sum_{i=1}^n c_i y_i(z) \quad (2.4)$$

şeklinde yazılır. Eş. 2.4 çözümünde görülebilecek tekillikler integral sabitlerine bağlı değildir. Bu yüzden, lineer denklemlerin tekillikleri hareketli değil sabit tekilliklerdir [21,22].

### 2.2.2. Lineer olmayan diferensiyel denklemler ve hareketli tekillikler

Lineer olmayan denklemlerin sabit tekilliklerinin yanı sıra, hareketli tekillikleri de olabilir. Örneğin  $y'(z) + y^2(z) = 0$  şeklindeki Riccati denkleminin genel çözümü,

$$y(z) = \frac{1}{(z - z_0)} = (z - z_0)^{-1} \text{ olup, } z = z_0 \text{ noktasında bir basit kutup tekilliğine sahiptir.}$$

Burada  $z_0$  keyfi sabiti (integral sabiti), tekilliğin yerini belirlemektedir. Bu tekillik,  $z_0$  integral sabitine bağlı olduğundan ve başlangıç şartlarına göre değişebileceğinden hareketli bir tekilliktir. Başlangıç koşulu olarak  $y(0)=1$  alınırsa  $z_0=-1$ ,  $y(0)=2$  alınırsa

$z_0=-1/2$  olur.  $2y(z)y'(z) = 1$  denkleminin genel çözümü,  $y(z) = \sqrt{z - z_0} = (z - z_0)^{\frac{1}{2}}$  şeklindedir. Burada,  $z = z_0$  noktası hareketli bir cebirsel tekil noktadır.

### 2.3. Diferensiyel Denklemler için Painleve Analizi Yöntemi (ARS)

Bir denklemin Painleve özelliğine (P-tipi) sahip olması için gerek şart, genel çözümünde, hareketli tekilliklerin sadece kutup olmasıdır.

Literatürde, diferensiyel denklemler için, Painleve özelliğinin bilinen iki tanımı vardır:

- 1) Diferensiyel denklemin çözümlerinin hareketli tekillikleri, sadece kutupsa, Painleve özelliğine sahiptir denir.
- 2) Diferensiyel denklemin çözümleri, bütün hareketli tekilliklerin etrafında tek değerli ise, Painleve özelliğine sahiptir denir.

1980 yılında Ablowitz, Ramani, Segur aşağıda verilen diferensiyel denklemin P-tipinde olup olmadığını belirlemeye yarayan Painleve ODE (ARS) algoritmasını ortaya atmışlardır [2,24].

$n$ . mertebeden



$$\frac{d^n u}{dz^n} = F\left(z, u, \frac{du}{dz}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}}\right) \quad (2.5)$$

diferensiyel denklemi için algoritma aşağıdaki gibidir. Burada  $F$ ,  $z$  değişkenine göre analitik ve diğer değişkenlere göre rasyonel olmak üzere ARS algoritması aşağıdaki üç adımla verilmiştir.

1. Adım:  $z_0$  hareketli tekil noktası civarında Laurent serisinin ilk (baş) teriminin davranışının belirlenmesi (kutup tekiliğinin mertebesini belirler),
2. Adım: Rezonansların, yani Eş 2.5 denkleminin çözümündeki keyfi (integral) sabitlerinin, Laurent serisi açılımında toplama girdiği kuvvetlerin bulunması,
3. Adım: Yeter sayıda keyfi (integral) sabitin varlığının doğrulanması.

Yukarıdaki üç adımın sonunda P-tipinde çözümlerin varlığı ve diferensiyel denklemin integre edilebilirliği (denklemin çözümünün varlığı) hakkında gerek koşulları kontrol edebilecek bir konuma gelinmiş olunur. Aşağıda bu üç adım ayrıntılı olarak incelenmiştir.

### 2.3.1. İlk terim davranışı

$n$ . mertebeden Eş 2.5 diferensiyel denkleme, Laurent seri açılımının ilk terimi olan

$$u(z) = u_0(z - z_0)^p \quad (2.6)$$

şeklinde çözüm arayalım. Burada  $z_0$  keyfi (ilk integral sabiti) olmak üzere  $p < 0$  olsun.  $p$  değerini belirlemek için Eş 2.6 çözümü Eş 2.5 denkleminde yerine konulur.  $p$  değeri belirlendikten sonra  $u_0$  değeri bulunur. ( $p$  değerini belirlerken dengeleme yapılan üsler, diferensiyel denklemin hangi terimlerinden elde ediliyorsa o terimlere etkin terim denir. Bir diferensiyel denklemde etkin terimler en yüksek mertebeden türevi içeren terim ve lineer olmayan terimler olabilir.  $p$  değeri birden fazla

bulunabilir. Bu değerlerden en küçük olanına lider terim denir.)  $p$ ' in değerine göre ilk terimin davranışı ile ilgili olarak aşağıdakiler söylenebilir.

1)  $p$  değeri irrasyonel ya da kompleks sayı ise Eş 2.5 denkleminin P-tipinde olmadığını söyleyebiliriz. Bu durumda algoritmaya son verilir.

2)  $p$  değeri rasyonel sayı ise,  $u(z)$ ' nin  $z_0$  keyfi hareketli tekilliğinin komşuluğunda Eş 2.6 ilk terimin davranışından, çözümün  $z=z_0$  noktasında hareketli bir cebirsel dallanma noktası olduğu sonucuna varılır. Denklemin P-tipinde olması için cebirsel dallanma noktasının olmaması gerektiğinden algoritmaya devam edilmez.

3)  $p$  değeri negatif tamsayı ise Eş 2.6 ifadesi,  $p$  için  $z_0$  noktasının bir delinmiş komşuluğunda geçerli olan bir Laurent serisinin ilk terimini göstermektedir.

Son durumda  $u(z)$  çözümü

$$u(z) = (z - z_0)^p \sum_{j=0}^{\infty} u_j (z - z_0)^j, \quad 0 < |z - z_0| < R \quad (2.7)$$

şeklindedir. Aşağıda  $p$  ve  $u_0$  değerinin bulunmasına ait bir örnek verilmiştir.

2.1. Örnek:

$$u''(z) - 6u^2(z) = 0 \quad (2.8)$$

denklemini göz önüne alalım. Eş 2.6 eşitliği Eş 2.8 denkleminde yerine yazılırsa

$$u_0 p(p-1)(z - z_0)^{p-2} - 6u_0^2 (z - z_0)^{2p} = 0 \quad (2.9)$$

olarak bulunur.  $(z-z_0)'$  in kuvvetleri olan  $2p$ ,  $p-2$  terimleri arasında dengeleme yapılırsa yani birbirine eşitlenirse  $p=-2$  olarak bulunur. Bulunan  $p$  değeri Eş 2.9' de yerine yazılırsa  $[u_0(-2)(-3) - 6u_0^2](z - z_0)^{-4} = 0$  elde edilir. Burada  $(z - z_0)^{-4}$ 'ün

katsayısı sıfıra eşitlenirse  $u_0 \neq 0$  olduğundan  $u_0 = 1$  olarak bulunur. Burada etkin terimler  $u''(z)$ ,  $6u^2(z)$  dır.

### 2.3.2. Rezonanslar

Eş 2.7 Laurent serisi biçimindeki çözümde,  $z_0$  hem bir keyfi (integral) sabiti, hem de tekliğin bulunduğu yeri gösterir. Eş 2.7 açılımında  $u_j$  katsayılarının  $(n-1)$  tanesi keyfi ise, bunlara  $z_0$  da dahil olmak üzere verilen diferensiyel denklemin  $n$  tane integral sabitidir. Eş 2.7 Laurent açılımında bu keyfi  $u_j$  sabitlerinin bulunduğu  $(z - z_0)$ 'in kuvvetlerine rezonans denir. Rezonans değerlerini bulmak için aşağıdaki işlemler yapılır.

Birinci adımda elde edilen  $(p, u_0)$  değerleri

$$u(z) = u_0(z - z_0)^p + u_r(z - z_0)^{p+r} \quad (2.10)$$

Eş 2.10 denkleminde yerine yazılır ve elde edilen bu ifade Eş 2.5 denkleminde yerine konulur.  $u_r$ 'yi içeren terimler bir araya toplanır ve  $u_r$  parantezine alınırsa

$$Q(r)(z - z_0)^{\hat{p}} = 0, \quad \hat{p} \geq p + r - n \quad (2.11)$$

elde edilir. Burada  $n$ , Eş 2.5 diferensiyel denkleminin mertebesidir. Eş 2.5 diferensiyel denkleminin en yüksek türev içeren terimi etkin terim ise, bu durumda  $\hat{p} = p + r - n$  dır. Aksi halde  $\hat{p} > p + r - n$  olacaktır. Her iki durumda da

$$Q(r) = 0 \quad (2.12)$$

denkleminin kökleri, rezonans değerlerini verir. Bu durumda, Eş 2.12 denkleminin köklerine göre aşağıdaki durumlardan söz edilebilir.

- 1) Eş 2.12 denkleminin bir kökü daima -1 dir ve bu durum  $z_0$  tekil noktasının keyfilikliğini gösterir.
- 2)  $r$  bir rasyonel sayı ise, bu durumda  $z = z_0$  noktasında bir cebirsel hareketli dallanma bulunduğunu gösterir ve çözüm P-tipinde olmayacağından algoritma sona erdirilir.
- 3) Eş 2.12 denkleminin en az bir kökü irrasyonel veya kompleks ise, Eş 2.5 diferensiyel denkleminin P-tipinde olmadığını söyleyebiliriz.
- 4) Eş 2.7 Laurent seri açılımının, Eş 2.5 diferensiyel denklemin genel çözümü olması için  $Q(r) = 0$  denkleminin  $n-1$  tane negatif olmayan birbirinden farklı tamsayı kökü olmalıdır.  $(p, u_0)$  için  $Q(r) = 0$  denkleminin böyle köklerinin sayısı  $n-1$  den az ise Eş 2.7 genel çözüm olamaz.

Aşağıda rezonans değerlerinin bulunmasına ait bir örnek verilecektir.

## 2.2. Örnek:

Burada Eş 2.8 denklemini göz önüne alalım. Daha önceki Örnek 2.1' den  $p=-2$  ve  $u_0=1$  olarak bulunmuştu. Eş 2.10 denkleminde bu değerler yerine yazılırsa

$$u = (z - z_0)^{-2} + u_r (z - z_0)^{r-2} \quad (2.13)$$

elde edilir. Eş 2.13 denklemini Eş 2.8 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 6u_0(z - z_0)^{-4} + u_r(r - 2)(r - 3)(z - z_0)^{r-4} - 6u_0^2(z - z_0)^{-4} \\ - 6u_r^2(z - z_0)^{2r-2} - 12u_0u_r(z - z_0)^{r-4} = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

bulunur.  $u_r (z - z_0)^{r-4}$  parantezine alınırsa

$$Q(r) = (r - 2)(r - 3) - 12 = r^2 - 5r - 6 \quad (2.15)$$

olarak bulunur.  $Q(j)$  ' in kökleri rezonans değerlerini vereceğinden

$$r=-1,6 \quad (2.16)$$

olarak bulunur. Burada  $r=-1$  değeri  $z_0$  'in keyfi olduğunu gösterir. Bulunan diğer rezonans değeri  $u_6$  ' in keyfi sabit olabileceğini gösterir. Bundan emin olabilmek için de  $u_6$  ' in bağdaşabilirlik şartını sağlaması gerekir. Bunun için de algoritmanın üçüncü aşaması alan aşağıdaki adıma geçilir.

### 2.3.3. Keyfi (integral) sabitlerin belirlenmesi

ARS algoritmasının son adımı, Eş 2.7 Laurent serisi açılımında, verilen denklemin mertebesi kadar keyfi (integral) sabiti bulunup bulunulmadığının araştırılmasıdır. İlk keyfi sabit  $z_0$  olduğundan,  $n-1$  tane integral sabiti bulunmalıdır. Bir önceki adımda bulunan rezonans değerleri, integral (keyfi) sabitlerinin  $(z-z_0)$  ' in hangi kuvvetinde olacağını gösterir. Birinci adımda elde edilen  $(p, u_0)$  için  $s = n - 1$  olmak üzere  $Q(r) = 0$  denkleminin negatif olmayan tamsayı kökleri  $r_1 < r_2 < \dots < r_s$  şeklinde olsun. Buna göre Eş 2.5 diferensiyel denkleminde

$$u(z) = u_0(z - z_0)^p + \sum_{j=1}^{r_s} u_j(z - z_0)^{p+j} \quad (2.17)$$

Eş 2.17 serisi yerine yazılır, elde edilen ifade  $(z - z_0)^{p+j-n}$  'in artan kuvvetlerine göre düzenlenir ve  $(z - z_0)^{p+j-n}$  'in katsayısı sifıra eşitlenirse

$$Q(j)u_j - R_j(z_0, u_0, u_1, \dots, u_{j-1}) = 0 \quad (2.18)$$

elde edilir. Burada aşağıdaki durumlarla karşılaşılabilir.

i)  $j < r_1$  için  $Q(j) \neq 0$  olduğundan Eş 2.18 denkleminde  $u_j$  katsayıları belirlenir.

ii)  $j = r_1$  için Eş. 2.18 eşitliği

$$0u_{r_1} - R_{r_1}(z_0, u_0, u_1, \dots, u_{j-1}) = 0 \quad (2.19)$$

şeklini alır. Bu durumda iki olasılık ortaya çıkar.

1)  $R_{r_1}(z_0, u_0, u_1, \dots, u_{r_1-1}) = 0$  ise bağdaşabilirlik şartı sağlanır ve  $u_{r_1}$  bir keyfi sabittir.

Bundan sonraki katsayıyı hesaplamak için işlemlere Laurent serisinin  $n-1$  tane keyfi sabiti bulununcaya kadar devam edilir. Böylece Eş 2.5 diferensiyel denklem P-tipindedir denir.

2)  $R_{r_1}(z_0, u_0, u_1, \dots, u_{r_1-1}) \neq 0$  ise, Eş 2.19 eşitliği özdeş olarak sağlanmaz. Dolayısıyla  $u_{r_1}$  bir keyfi sabit değildir. O halde, Eş 2.5 denkleminin Eş 2.17 şeklinde bir çözümü yoktur.

#### 2.4. Kısmi Türevli Denklemler için Painleve Analizi Yöntemi (WTC)

Kısmi türevli denklemler (PDE) için Painleve özelliği ilk defa 1983 yılında Weiss, Tabor ve Carnevale (WTC) tarafından ortaya konmuştur [3]. Bu inceleme tek değişkenli diferensiyel denklemler için verilen ARS algoritmasının ya da Painleve ODE testinin kısmi türevli denklemler için genelleştirilmiş durumudur. Yukarıda sözü edilen yöntem WTC algoritması ya da Painleve PDE testi adını alır. Kısmi türevli denklemler için Painleve özelliği aşağıdaki gibi verilebilir.

##### 2.1. Tanım:

Kısmi türevli denklemlerin genel çözümünün, tek tekilliklerinin kutuplar olması halinde denklem Painleve özelliğine sahiptir denir [24-27].

Kısmi türevli denklemler de, diferensiyel denklemler deki  $z_0$  keyfi sabiti yerine

$$\phi(z_1, z_2, \dots, z_n) \quad (2.20)$$

keyfi analitik fonksiyonu alınır ve seri  $\phi(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$  tekil manifold civarında açılır.  $\phi(z_1, z_2, \dots, z_n)$  keyfi analitik fonksiyon ve  $u = u(z_1, z_2, \dots, z_n)$  de kısmi türevli denklemin çözümü olsun. Bu durumda çözümün

$$u = \phi^p \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^j \quad (2.21)$$

olduğunu varsayalım. Eş. 2.21 açılımı Laurent serisi açılımı ya da Painleve açılımı olarak adlandırılır. Burada  $u_0 \neq 0$  ve  $u_j = u_j(z_1, z_2, \dots, z_n)$  Eş 2.20 manifoldu komşuluğunda  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  'in analitik fonksiyonlarıdır ve  $p$  bir negatif tamsayıdır. Diferensiyel denklemler için verilen ARS algoritmasına benzer olarak kısmi türevli denklemler için WTC algoritması aşağıdaki şekilde verilir.

#### 2.4.1. İlk terim davranışı

İncelemeye ilk olarak

$$u(z) = u_0 \phi^p \quad (2.22)$$

ifadesi kısmi türevli denklemde yerine konular, mümkün olan  $p$  ve  $u_0$  değerlerinin belirlenmesi ile başlanır. Algoritmanın devam etmesi için  $p$ ' in negatif bir tamsayı olması gerekir.  $p$  ve  $u_0$  değerleri belirlendikten sonra rezonansların bulunması için ikinci adıma geçilir.

### 2.4.2. Rezonanslar

Birinci adımda elde edilen  $p$  ve  $u_0$  değerleri kullanılarak kısmi türevli denklemde

$$u = u_0 \phi^p + u_j \phi^{p+j} \quad (2.23)$$

yerine yazıldıktan sonra  $\phi^{p+j-n}$  teriminin

$$\hat{Q}(j) = Q(j)u_j \quad (2.24)$$

şeklindeki katsayısı elde edilir. Bu katsayıdan

$$Q(j) = 0 \quad (2.25)$$

denkleminin kökleri rezonans değerlerini verir. Burada  $n$  denkleminin mertebesidir.  $j=-1$ ,  $Q(j)=0$  denkleminin her zaman bir köküdür ve  $\phi$  manifoldunun keyfi olduğunu belirtir. Bir sonraki adıma geçebilmek için, Eş 2.25 denkleminin -1 hariç diğer köklerin birbirinden farklı pozitif tamsayılar olması gerekmektedir.

### 2.4.3. Keyfi (İntegral) Sabitlerinin Bulunması

İkinci adımda bulunan rezonansların en büyüğü  $j_s$  olsun. Bu durumda

$$u = \sum_{j=0}^{j_s} u_j \phi^{p+j} \quad (2.26)$$

sonlu toplamı KTD de yerine konur ve  $\phi^{p+j-n}$  'in katsayısının bulunması ile

$$Q(j)u_j + R_j = 0 \quad (2.27)$$



elde edilir. Burada  $R_j, k=0,1,\dots,j-1$  olmak üzere  $\phi$  ve  $u_k$ ' in kısmi türevlerine içeren bir ifadedir.  $j$  rezonansı için  $Q(j)=0$  olduğundan,  $R_j$  özdeş olarak sıfır Eş 2.27' den  $u_j$ ' in keyfi olduğu söylenebilir. Eğer böyle değilse verilen denklem P-tipinde değildir denilebilir.

Aşağıda KdV denklemi için Painleve analizi verilmiştir.

#### 2.4.4. KdV denklemi için Painleve analizi

Korteweg-de Vries (KdV) denklemi ilk kez 1895 yılında Korteweg ve de Vries tarafından ortaya konmuştur [28]. KdV denklemi lineer olmayan dalgaların incelenmesinde önemli yer tutmaktadır ve fiziksel olarak sığ sularda oluşan bir boyutlu, küçük genlikli dalgaların, plazmadaki magnetohidrodinamik dalgaların, anharmonik kristallerdeki akustik dalgaların ve hava kabarcığı-sıvı karışımlarındaki dalgaların hareketini temsil etmektedir.

$$u_t + uu_x + \sigma u_{xxx} = 0 \quad (2.28)$$

şeklindeki KdV denklemini göz önüne alalım. Bu denklem için Eş 2.7 şeklinde çözüm arayalım. İlk terimi bulmak için

$$u(x, t) = u_0(x, t)\phi(x, t)^p \quad (2.29)$$

Eş 2.29, Eş 2.28' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & p\phi^{p-1}u_0\phi_t + p\phi^{2p-1}u_0^2\phi_x + 2\sigma p\phi^{p-3} - 3\sigma p^2\phi^{p-3}u_0\phi_x^2 + \sigma p^{p-3}\phi^3u_0\phi_x^3 \\ & - 3\sigma p\phi^{p-2}u_0\phi_x\phi_{xx} + 3\sigma p^2\phi^{p-2}u_0\phi_x\phi_{xx} + \sigma p^2\phi^{p-1}u_0\phi_{xxx} + \phi^p u_{0,t} + \phi^{2p}u_0u_{0,x} \\ & - 3\sigma p\phi^{p-2}\phi_x^2u_{0,x} + 3\sigma p^2\phi^{p-2}\phi_x^2u_{0,x} + 3\sigma p\phi^{p-1}\phi_{xx}u_{0,x} + 3\sigma p\phi^{p-1}\phi_xu_{0,xx} \\ & + \sigma\phi^p u_{0,xxx} = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

denklemini elde edilir.  $\phi$ ' in  $2p-1, p-3$  olan üsleri eşitlenirse  $p=-2$  olarak bulunur.

Bulunan  $p$  değeri Eş 2.30 da yerine yazılırsa

$$u_0 = -12\sigma\phi_x^2, u_0 \neq 0$$

olarak bulunur. Böylece Eş 2.28 denkleminin çözümü

$$u = \phi^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} u_k \phi^k$$

şeklinde aranılır. Eş 2.10 eşitliğinden rezonansları bulmak için

$$u = u_0\phi^{-2} + u_r\phi^{r-2}$$

ifadesi Eş 2.28 denkleminde yerine yazılarak,  $u_r\phi^{r-5}$ ' lı terimin katsayısından  $Q(r)$  polinomu  $r^3 - 9r^2 + 14r + 24 = 0$  olarak bulunur. Buradan rezonanslar  $r = -1, 4, 6$

şeklinde elde edilir.  $u = \sum_{k=0}^6 u_j \phi^k$  serisi Eş 2.28' de yerine yazılır elde edilen ifade  $\phi$ '

nin kuvvetlerine göre düzenlenir ve bu kuvvetlerin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdakiler elde edilir.

$$\phi^{-5} : u_0 = -12\sigma\phi_x^2$$

$$\phi^{-4} : u_1 = 12\sigma\phi_{xx}$$

$$\phi^{-3} : \phi_x\phi_t + \phi_x^2u_2 + 4\sigma\phi_x\phi_{xxx} - 3\sigma\phi_{xx}^2 = 0$$

$$\phi^{-2} : \phi_{xt} + \phi_{xx}u_2 - \sigma\phi_x\phi_{xxx} - \phi_{xx}^2u_3 + \sigma\phi_{xxxx} = 0$$

$$\phi^{-1} : 0$$

$$\begin{aligned}
& u_{2,t} + u_2 u_{2,x} + \sigma u_{2,xxx} + u_3 \phi_t + u_1 u_{3,x} \phi_x + u_3 u_{1,x} \phi_x + u_0 u_{4,x} + u_{0,x} u_4 \\
\phi^0 : & + u_0 u_5 \phi_x + u_1 u_4 \phi_x + u_2 u_3 \phi_x + \sigma (3u_{3,xx} \phi_x + 6u_{4,xx} \phi_x^2 + 3u_{3,x} \phi_{xx} \\
& + 6u_5 \phi_x^3 + 6u_4 \phi_x \phi_{xx} + u_3 \phi_{xxx}) \dots = 0
\end{aligned}$$

$$\phi^1 : 0$$

şeklinde bulunur. Rezonans değerlerinde bağdaşabilirlik şartları sağlanabildiğinden Eş 2.28 KdV denklemini Painleve özelliğine sahiptir.

### 3. OSTROVSKY DENKLEMİ İÇİN PAINLEVE ANALİZİ VE BAZI SOLİTON ÇÖZÜMLERİ

Ostrovsky denklemi 1998 yılında Ostrovsky tarafından tanıtılmıştır. Okyanuslardaki dalgaların hareketinin bir modellemesi olarak ortaya çıkmıştır. Eş. 3.1 eşitliğiyle verilen denklem son zamanlarda pek çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Bu denklemin Hirota metodu [6], Backlund dönüşümü metodu [5] ve hiperbolik tanjant metotları [29] kullanılarak bazı tam çözümleri elde edilmiştir. Bu bölümde, Ostrovsky denkleminin Painleve analizi ile integrallenebilirliği gösterilmiş ve yardımcı eşitlik metodu kullanılarak bazı soliton çözümleri bulunmuştur.

#### 3.1. Ostrovsky Denklemi için Painleve Analizi

Ostrovsky denklemi

$$uu_{xxt} - u_x u_{xt} + u^2 u_t = 0 \quad (3.1)$$

şeklindedir. Bu denkleme Painleve analizi uygulandığında  $\phi(x,t)$  ve  $u_k = u_k(x,t)$  analitik fonksiyonlar ve tekillik manifoldu  $\phi(x,t)=0$  olmak üzere, Eş. 3.1 denkleminin çözümünün Eş. 2.21 şeklinde olduğu kabul edilmiştir. Eş. 2.21 çözümünün ilk terimi olan Eş. 2.22 ifadesi Eş. 3.1 denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & (u_0 u_{0,xx} - u_{0,x} u_{0,t}) \phi^{2p} \\ & + (p u_0 u_{0,xx} \phi_t + p u_0 u_{0,xt} \phi_x + p u_0 u_{0,x} \phi_{xt} + p u_0 u_{0,t} \phi_{xx} \\ & + p u_0^2 \phi_{xxt} - p (u_{0,x})^2 \phi_t - p u_{0,x} u_{0,t} \phi_x) \phi^{2p-1} \\ & + (p u_0 u_{0,x} \phi_t \phi_x + p^2 u_0^2 \phi_x \phi_{xt} - p u_0^2 \phi_{xx} \phi_t - p u_0 u_{0,t} \phi_x^2 - 2 p u_0^2 \phi_x \phi_{xt}) \phi^{2p-2} \\ & + (2 p^2 u_0^2 \phi_x \phi_t + 2 p u_0^2 (\phi_x)^2 \phi_t) \phi^{2p-3} + u_0^2 u_{0,t} \phi^{3p} + p u_0^3 u_{0,x} \phi_t \phi^{3p-1} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

denklemini elde edilir.  $\phi$  in üsleri olan  $2p-3, 3p-1$  terimleri eşitlenirse  $p=-2$  olarak bulunur. Bulunan  $p$  değeri Eş. 3.2' de yerine yazılırsa  $u_0 = -6\phi_x^2$  olarak bulunur.

Rezonansları bulmak için Eş 2.10 denkleminde  $u = u_0\phi^{-2} + u_r\phi^{r-2}$  ifadesi Eş 3.1 denkleminde yerine yazılır. Elde edilen ifade  $u_r\phi^{r-7}$  parantezine alındığında

$$-6r^3 + 42r^2 - 24r - 72 = 0 \quad (3.3)$$

polinomu elde edilir. Eş 3.3 polinomunun kökleri olan  $r = -1, 2, 6$  değerleri rezonans değerleridir.

$$u(x, t) = \phi(x, t)^{-2} \sum_{i=0}^6 u_i(x, t) \phi(x, t)^i \quad (3.4)$$

sonlu toplamı Eş 3.1 denkleminde yerine yazılır ve elde edilen ifade  $\phi$ ' in artan kuvvetlerine göre düzenlenir ve  $\phi$ ' in katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\phi^{-7} : u_0 = -6\phi_x^2$$

$$\phi^{-6} : u_1 = 6\phi_{xx}$$

$$\phi^{-5} : 0$$

$$\phi^{-4} : u_3 = \frac{-1}{2} \frac{u_{2,x}}{\phi_x} - \frac{1}{2} \frac{u_{2,t}}{\phi_t} + \frac{\phi_{xxx}\phi_{xt}}{\phi_x^2\phi_t} + \frac{1}{2} \frac{\phi_{xxx}\phi_{xx}}{\phi_x^3} - \frac{\phi_{xxx}t\phi_{xt}}{\phi_x\phi_t} + \frac{3}{2} \frac{\phi_{xxt}\phi_{xx}}{\phi_x^2\phi_t} - \frac{1}{2} \frac{\phi_{xxxx}}{\phi_x^2} - \frac{3}{2} \frac{\phi_{xt}\phi_{xx}}{\phi_x^3\phi_t}$$

$$\phi^{-3} : u_4 = \frac{-1}{20\phi_x^5\phi_t^3} \left[ -20\phi_{xx}\phi_x^2\phi_{xt}^2\phi_t + 2\phi_{tt}\phi_x^5u_{2,t} + \frac{1}{2}\phi_{xxxx}\phi_x^2\phi_{xt}\phi_t^2 + \dots \right]$$

$$\phi^{-1} : u_5 = \frac{-1}{60\phi_x^7\phi_t^4} \left[ 36\phi_x^5\phi_{tt}\phi_{xxx}\phi_{xt} - 36\phi_x^4\phi_{tt}\phi_{xxx}\phi_{xt}^2 - 12\phi_x^6u_{2,tt}\phi_{xt}\phi_t + \dots \right]$$

$$\phi^0 : 0$$

Rezonans değerlerindeki bağdaşabilirlik şartları sağlanabildiğinden Eş 3.1 Ostrovsky denkleminin Painleve özelliğine sahiptir.

### 3.1. Tanım:

Lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin  $u(x, t) = U(\xi)$ ,  $\xi = x + wt$  formundaki çözümüne soliton (travelling wave ) çözüm denir. Burada  $w$  dalga hızını gösterir ve keyfi bir sabittir [30].

### 3.2. Yardımcı Eşitlik Metodu

Lineer olmayan denklemin ya da sistemin çözümlerini araştırmak lineer olmayan fiziksel olayların açığa çıkarılmasında önemli bir rol oynar. Son yıllarda yapılan çalışmalarda tam çözümlerin bulunması için birçok yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden biri Yardımcı (Auxiliary) eşitlik metodudur. Bu yöntem ilk olarak Sirendaoreji ve Sun tarafından ortaya konulmuştur [31]. Daha sonraları metot, Liu ve Liu [32], Xu ve Li [33] ve Sirendaoreji [34,35] tarafından yardımcı eşitlik denkleminin yeni çözümleri bulunarak geliştirilmiştir. Lineer olmayan kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için kullanılan bu metotta aşağıda tanımlanan Eş 3.8 denkleminin Çizelge 3.1' de verilen çözümlerinden faydalanılmaktadır.

$u = u(x, t)$  olmak üzere

$$H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, u_{xt}, \dots) = 0 \quad (3.5)$$

kısmi türevli denklemini verilsin.  $\xi = x - wt$  dalga dönüşümü uygulanıp Eş 3.5 kısmi türevli denklemini

$$G(u, u_\xi, u_{\xi\xi}, u_{\xi\xi\xi}, \dots) = 0 \quad (3.6)$$

adi diferensiyel denkleme dönüştürülür. Eş 3.5 denklemini için

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i z^i(\xi) \quad (3.7)$$

şeklinde çözüm aranacaktır. Burada  $n$  değeri, Eş 3.6 diferensiyel denkleminde yüksek mertebeden türevli terim ile en yüksek kuvvetten lineer olmayan terimin dengelenmesiyle (eşitlenmesi) bulunur ve pozitif bir tamsayıdır. Ayrıca Eş 3.7 eşitliğindeki  $z(\xi)$ , Eş 3.8 denklemiyle verilen 1. mertebeden lineer olmayan diferensiyel denklemin çözümüdür.

$$\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 = az^2(\xi) + bz^3(\xi) + cz^4(\xi) \quad (3.8)$$

burada  $a, b, c$  reel sabitlerdir. Bu denklemin çözümleri  $\Delta = b^2 - 4ac$  ' in farklı durumları ve  $\varepsilon = \mp 1$  için Çizelge 3.1' de verilmiştir [30,31]. Eş 3.7 ve Eş 3.8 denklemleri Eş 3.6' da yerine yazılır,  $z(\xi)$  ' in kuvvetlerine göre düzenlenir ve  $z(\xi)$  ' in katsayıları sıfıra eşitlendiğinde  $a, b, c, a_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, n$ ) ye bağlı denklem sistemi elde edilir. Bulunan denklem sisteminin çözümüne göre Çizelge 3.1' de verilen uygun  $z(\xi)$  çözümleri belirlenerek, bu çözümler Eş 3.7' de yerine yazılır.  $\xi = x - wt$  ifadesi yerine konulduğunda soliton çözümler elde edilir.

Çizelge 3.1.  $\Delta = b^2 - 4ac$  ve  $\varepsilon = \mp 1$  için Eş 3.8 denkleminin çözümleri

No	$z(\xi)$	No	$z(\xi)$
1	$\frac{-ab \operatorname{sech}^2(\frac{\sqrt{a}}{2} \xi)}{b^2 - ac(1 + \varepsilon \tanh(\frac{\sqrt{a}}{2} \xi))^2}, a > 0$	8	$\frac{-a \operatorname{sec}^2(\frac{\sqrt{-a}}{2} \xi)}{b + 2\varepsilon\sqrt{-ac} \tan(\frac{\sqrt{-a}}{2} \xi)}, a < 0, c > 0$
2	$\frac{ab \operatorname{csc} h^2(\frac{\sqrt{a}}{2} \xi)}{b^2 - ac(1 + \varepsilon \coth(\frac{\sqrt{a}}{2} \xi))^2}, a > 0$	9	$\frac{a \operatorname{csc} h^2(\frac{\sqrt{a}}{2} \xi)}{b + 2\varepsilon\sqrt{ac} \coth(\frac{\sqrt{a}}{2} \xi)}, a > 0, c > 0$
3	$\frac{2a \operatorname{sech}(\sqrt{a}\xi)}{\varepsilon\sqrt{\Delta} - b \operatorname{sech}(\sqrt{a}\xi)}, a > 0, \Delta > 0$	10	$\frac{-a \operatorname{csc}^2(\frac{\sqrt{-a}}{2} \xi)}{b + 2\varepsilon\sqrt{-ac} \cot(\frac{\sqrt{-a}}{2} \xi)}, a < 0, c > 0$
4	$\frac{2a \operatorname{sec}(\sqrt{-a}\xi)}{\varepsilon\sqrt{\Delta} - b \operatorname{sec}(\sqrt{-a}\xi)}, a < 0, \Delta > 0$	11	$-\frac{a}{b}(1 + \varepsilon \tanh(\frac{\sqrt{a}}{2} \xi)), a > 0, \Delta = 0$
5	$\frac{2a \operatorname{csc} h(\sqrt{a}\xi)}{\varepsilon\sqrt{-\Delta} - b \operatorname{csc} h(\sqrt{a}\xi)}, a > 0, \Delta < 0$	12	$-\frac{a}{b}(1 + \varepsilon \coth(\frac{\sqrt{a}}{2} \xi)), a > 0, \Delta = 0$
6	$\frac{2a \operatorname{csc}(\sqrt{-a}\xi)}{\varepsilon\sqrt{\Delta} - b \operatorname{csc}(\sqrt{-a}\xi)}, a < 0, \Delta > 0$	13	$\frac{4ae^{\varepsilon\sqrt{a}\xi}}{(e^{\varepsilon\sqrt{a}\xi} - b)^2 - 4ac}, a > 0$
7	$\frac{-a \operatorname{sec} h^2(\frac{\sqrt{a}}{2} \xi)}{b + 2\varepsilon\sqrt{ac} \tanh(\frac{\sqrt{a}}{2} \xi)}, a > 0, c > 0$	14	$\frac{\pm 4a\varepsilon e^{\varepsilon\sqrt{a}\xi}}{1 - 4ace^{2\varepsilon\sqrt{a}\xi}}, a > 0, b = 0$

### 3.3. Ostrovsky Denkleminin Soliton Çözümleri

Ostrovsky denklemi

$$uu_{xxt} - u_x u_{xt} + u^2 u_t = 0 \quad (3.9)$$



şeklindedir. Eş 3.9 denkleminde  $\xi = x - wt$  dalga dönüşümü uygulandığında

$$UU''' - U'U'' + U^2U' = 0 \quad (3.10)$$

adi diferensiyel denklemi elde edilir. Burada  $u=U(\xi)$ ,  $\xi = x - wt$  dir. Eş 3.10' da her bir terimin kısmi integrasyonu alınırsa Eş 3.10 denklemi

$$3UU'' - 3(U')^2 + U^3 = 0 \quad (3.11)$$

şeklini alır. Burada  $U^3$  ile  $UU''$  terimleri arasında dengeleme yapılırca  $n=2$  bulunur. Böylece çözüm

$$U(\xi) = a_0 + a_1z(\xi) + a_2z^2(\xi) \quad (3.12)$$

şeklinde olur. Burada  $a_0, a_1, a_2$  ler keyfi reel sabitlerdir. Eş 3.8 ve Eş 3.12 denklemleri Eş 3.11'de yerine yazılır, elde edilen ifade  $z(\xi)$ 'in kuvvetlerine göre düzenlenir ve  $z(\xi)^j$ 'in ( $j=0,1,2, \dots, 6$ ) katsayıları sıfıra eşitlenir. Böylece  $a, b, c, a_i$  ( $i=0,1,2$ )'ye bağlı aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$a_0 = 0$$

$$3a_0^2a_1 + 3a_0a_1a = 0$$

$$3a_0a_1^2 + 3a_0^2a_2 + \frac{9}{2}a_0a_1b + 12a_0a_2a = 0$$

$$\frac{3}{2}a_1^2b + a_1^3 + 3a_1a_2a + 6a_0a_1c + 15a_0a_2b + 6a_0a_1a_2 = 0$$

$$3a_1^2a_2 + 3a_0a_2^2 + 3a_1^2c + \frac{5}{2}a_1a_2b + 18a_0a_2c = 0$$

$$3a_1a_2^2 + 3a_2^2b + 12a_1a_2c = 0$$

$$6a_2^2c + a_2^3 = 0$$

Bu sistem Maple10 ile çözüldüğünde

$$a_0 = 0, a_2 = -\frac{1}{6} \frac{a_1^2}{a}, b = -\frac{1}{3} a_1, c = \frac{1}{36} \frac{a_1^2}{a} \quad (3.13)$$

$$a_0 = 0, a = \frac{-1}{6} \frac{a_1^2}{a_2}, b = -\frac{1}{3} a_1, c = -\frac{1}{6} a_2 \quad (3.14)$$

$$a_0 = 0, a_2 = -6c, a = \frac{1}{36} \frac{a_1^2}{c}, b = -\frac{1}{3} a_1 \quad (3.15)$$

$$a_0 = 0, a_1 = -3b, a = -\frac{3}{2} \frac{b^2}{a_2}, c = -\frac{1}{6} a_2 \quad (3.16)$$

elde edilir. Eş 3.13, Çizelge 3.1' deki uygun  $z(\xi)$  ve  $\xi = x - wt$  dalga dönüşümü Eş 3.12' de yerine yazılırsa, Eş 3.9 denkleminin aşağıdaki soliton çözümleri elde edilir.

$$u_1(x,t) = \frac{3}{2}a \left[ \frac{2 \sec h^2 \eta}{1 - \frac{1}{4}(1 + \varepsilon \tanh \eta)^2} - \frac{\sec h^4 \eta}{\left(1 - \frac{1}{4}(1 + \varepsilon \tanh \eta)^2\right)^2} \right],$$

$$u_2(x,t) = -\frac{3a}{2} \left[ \frac{2 \csc h^2 \eta}{1 - \frac{1}{4}(1 + \varepsilon \coth \eta)^2} + \frac{\csc h^4 \eta}{\left(1 - \frac{1}{4}(1 + \varepsilon \coth \eta)^2\right)^2} \right],$$

$$u_3(x,t) = \frac{3a}{2} \left[ \frac{2 \sec h^2 \eta}{(1 - \varepsilon \tanh \eta)} - \frac{\sec h^4 \eta}{(1 - \varepsilon \tanh \eta)^2} \right],$$

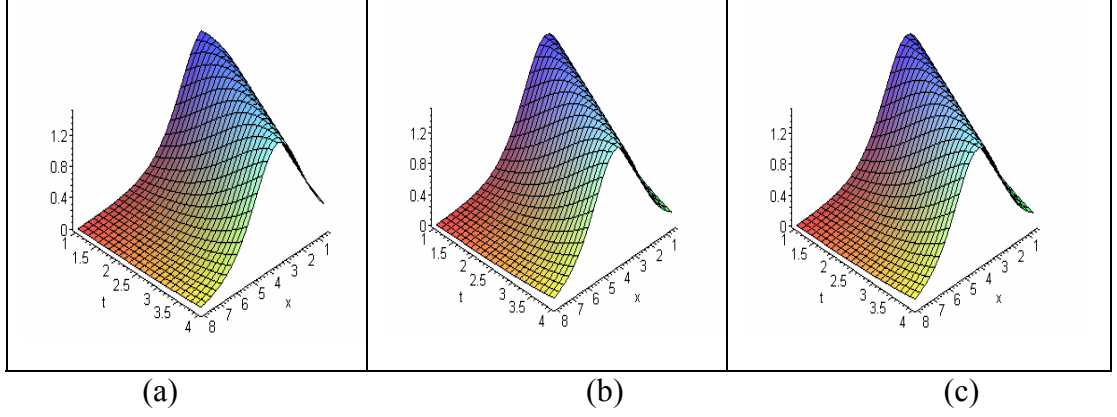
$$u_4(x,t) = -\frac{3a}{2} \left[ \frac{2 \csc h^2 \eta}{(1 - \varepsilon \coth \eta)} + \frac{\csc h^4 \eta}{(1 - \varepsilon \coth \eta)^2} \right],$$

$$u_5(x,t) = \frac{3a}{2} [2(1 + \varepsilon \tanh \eta) - (1 + \varepsilon \tanh \eta)^2],$$

$$u_6(x,t) = \frac{3a}{2} [2(1 + \varepsilon \coth \eta) - (1 + \varepsilon \coth \eta)^2],$$

$$u_7(x,t) = \frac{4a_1 a e^{2\eta}}{\left(e^{2\eta} + \frac{2a_1}{3}\right)^2}.$$

Burada  $\eta = \frac{\sqrt{a}}{2}(x - wt)$ ,  $a > 0$ ,  $a_1$  ve  $w$  keyfi sabitlerdir. Şekil 3.1' de, yukarıda elde edilen bazı çözümlerin grafikleri,  $0,5 \leq x \leq 8$ ,  $1 \leq t \leq 4$  bölgesinde ve  $a=1$ ,  $a_1=1$ ,  $w=1$  için verilmiştir. (a), (b) ve (c) sırasıyla  $u_1(x,t)$ ,  $u_3(x,t)$  ve  $u_5(x,t)$  çözümlerini göstermektedir. Grafik çizimleri için Maple10 kullanılmıştır.



Şekil 3.1. Ostrovsky denkleminin (a)  $u_1(x,t)$  (b)  $u_3(x,t)$  ve (c)  $u_5(x,t)$  çözümlerinin  $a=1, a_1=1, w=1, 0,5 \leq x \leq 8$  ve  $1 \leq t \leq 4$  bölgesinde grafikleri

Benzer olarak, Eş 3.14, Çizelge 3.1' deki  $z(\xi)$  ve  $\xi = x - wt$  dalga dönüşümü Eş 3.12' de yerine yazıldığında Eş 3.9 denkleminin aşağıdaki soliton çözümleri elde edilir:

$$u_1(x,t) = -\frac{a_1^2}{4a_2} \left[ \frac{2 \sec^2 h^2 \eta}{1 - \frac{1}{4}(1 + \varepsilon \tanh \eta)^2} - \frac{\sec^4 h^2 \eta}{\left(1 - \frac{1}{4}(1 + \varepsilon \tanh \eta)^2\right)^2} \right],$$

$$u_2(x,t) = \frac{a_1^2}{4a_2} \left[ \frac{2 \csc^2 h^2 \eta}{1 - \frac{1}{4}(1 + \varepsilon \coth \eta)^2} - \frac{\csc^4 h^2 \eta}{\left(1 - \frac{1}{4}(1 + \varepsilon \coth \eta)^2\right)^2} \right],$$

$$u_3(x,t) = -\frac{a_1^2}{4a_2} \left[ \frac{2 \sec^2 h^2 \eta}{(1 + \varepsilon \tanh \eta)} - \frac{\sec^4 h^2 \eta}{(1 - \varepsilon \tanh \eta)^2} \right],$$

$$u_4(x,t) = \frac{a_1^2}{4a_2} \left[ \frac{2 \csc^2 h^2 \eta}{(1 - \varepsilon \coth \eta)} + \frac{\csc^4 h^2 \eta}{(1 - \varepsilon \coth \eta)^2} \right],$$

$$u_5(x,t) = -\frac{a_1^2}{4a_2} [2(1 + \varepsilon \tanh \eta) - (1 + \varepsilon \tanh \eta)^2],$$

$$u_6(x,t) = \frac{a_1^2}{4a_2} [2(1 + \varepsilon \coth \eta) - (1 + \varepsilon \coth \eta)^2],$$

$$u_7(x,t) = \frac{2a_1^3 e^{2\eta}}{3 \left( e^{2\eta} + \frac{2a_1}{3} \right)^2}.$$

burada  $\eta = \frac{\sqrt{\frac{-1}{6} \frac{a_1^2}{a_2}}}{2} (x - wt)$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_1$  ve  $w$  keyfi sabitlerdir.

Benzer olarak, Eş 3.15 'ya göre Çizelge 3.1' deki uygun  $z(\xi)$  çözümleri ve  $\xi = x - wt$  dalga dönüşümü Eş 3.12' de yerine yazıldığında Eş 3.9 denkleminin aşağıdaki soliton çözümleri elde edilir.

$$u_1(x, t) = \frac{a_1^2}{24c} \left[ \frac{2 \sec h^2 \eta}{1 - \frac{1}{4} (1 + \varepsilon \tanh \eta)^2} - \frac{\sec h^4 \eta}{\left(1 - \frac{1}{4} (1 + \varepsilon \tanh \eta)^2\right)^2} \right],$$

$$u_2(x, t) = \frac{a_1^2}{24c} \left[ \frac{2 \csc h^2 \eta}{1 - \frac{1}{4} (1 + \varepsilon \coth \eta)^2} + \frac{\csc h^4 \eta}{\left(1 - \frac{1}{4} (1 + \varepsilon \coth \eta)^2\right)^2} \right],$$

$$u_3(x, t) = \frac{a_1^2}{24c} \left[ \frac{2 \sec h^2 \eta}{(1 - \varepsilon \tanh \eta)} - \frac{\sec h^4 \eta}{(1 - \varepsilon \tanh \eta)^2} \right],$$

$$u_4(x, t) = \frac{a_1^2}{24c} \left[ \frac{2 \csc h^2 \eta}{(1 - \varepsilon \coth \eta)} + \frac{\csc h^4 \eta}{(1 - \varepsilon \coth \eta)^2} \right],$$

$$u_5(x, t) = \frac{a_1^2}{24c} [2(1 + \varepsilon \tanh \eta) - (1 + \varepsilon \tanh \eta)^2],$$

$$u_6(x, t) = \frac{a_1^2}{24c} [2(1 + \varepsilon \coth \eta) - (1 + \varepsilon \coth \eta)^2],$$

$$u_7(x, t) = \frac{a_1^3 e^{2\eta}}{9c \left( e^{2\eta} - \frac{2a_1}{3} \right)^2}.$$

burada  $\eta = \frac{\sqrt{\frac{1}{36} \frac{a_1^2}{c}}}{2} (x - wt)$ ,  $c > 0$ ,  $a_1$  ve  $w$  keyfi sabitlerdir.

Eş 3.16' ya göre Çizelge 3.1' deki uygun  $z(\xi)$  çözümleri ve  $\xi = x - wt$  dalga dönüşümü Eş 3.12' de yerine yazıldığında Eş 3.9 denkleminin aşağıdaki soliton çözümleri elde edilir:

$$u_1(x,t) = -\frac{9b^2}{4a_2} \left[ \frac{2 \sec h^2 \eta}{1 - \frac{1}{4}(1 + \varepsilon \tanh \eta)^2} - \frac{\sec h^4 \eta}{\left(1 - \frac{1}{4}(1 + \varepsilon \tanh \eta)^2\right)^2} \right],$$

$$u_2(x,t) = \frac{9b^2}{4a_2} \left[ \frac{2 \csc h^2 \eta}{1 - \frac{1}{4}(1 + \varepsilon \coth \eta)^2} + \frac{\csc h^4 \eta}{\left(1 - \frac{1}{4}(1 + \varepsilon \coth \eta)^2\right)^2} \right],$$

$$u_3(x,t) = -\frac{9b^2}{4a_2} \left[ \frac{2 \sec h^2 \eta}{(1 + \varepsilon \tanh \eta)} - \frac{\sec h^4 \eta}{(1 + \varepsilon \tanh \eta)^2} \right],$$

$$u_4(x,t) = \frac{9b^2}{4a_2} \left[ \frac{2 \csc h^2 \eta}{(1 - \varepsilon \coth \eta)} + \frac{\csc h^4 \eta}{(1 + \varepsilon \coth \eta)^2} \right],$$

$$u_5(x,t) = -\frac{9b^2}{4a_2} \left[ 2(1 + \varepsilon \tanh \eta) - (1 + \varepsilon \tanh \eta)^2 \right],$$

$$u_6(x,t) = -\frac{9b^2}{4a_2} \left[ 2(1 + \varepsilon \coth \eta) - (1 + \varepsilon \coth \eta)^2 \right],$$

$$u_7(x,t) = \frac{18b^3 e^{2\eta}}{a_2 (e^{2\eta} - 2b)^2}.$$

burada  $\eta = \frac{\sqrt{-3b^2}}{2a_2} (x - wt)$ ,  $a_2 < 0$ ,  $a_2$  ve  $w$  keyfi sabitlerdir.

#### 4. ŞARTLI PAINLEVE ANALİZİ

Bu bölümde,  $p, m \in Z^+, K, \beta$  keyfi parametreler olmak üzere  $u_{tt} = K(u^m u_x)_x - \beta u^p$  denklemi göz önüne alınarak denklemin ilk terim davranışının ve rezonans değerlerinin genel formülleri elde edilip,  $p$  ve  $m$ ' in farklı değerleri için Eş. 4.1 denkleminin Painleve özelliğine mi yoksa şarta bağlı Painleve özelliğine sahip olup olmadığı ilk kez incelenmiştir. Bu bölümdeki hesaplamaların el ile yapılması uzun ve zahmetli olduğu için hesaplamalar da MAPLE10 paket programı kullanılmıştır.

##### 4.1. Tanım:

$\phi(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$  keyfi manifoldu üzerinde bazı kısıtlamalar yapıldığında verilen denklem Painleve özelliğini sağlarsa, denklem şarta bağlı Painleve özelliğine sahiptir denir [36-40].

##### 4.1. Bir Evrim Denklemi için Painleve Analizi

Burada

$$u_{tt} = K(u^m u_x)_x - \beta u^p \quad (4.1)$$

$p, m \in Z^+, K, \beta$  keyfi parametreler olmak üzere Eş 4.1 denklemini göz önüne alalım. Eş 4.1 denklemi açık olarak

$$u_{tt} = K m u^{m-1} u_x^2 + K u^m u_{xx} - \beta u^p \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir. Eş 4.2 denkleminin çözümünün

$$u(x, t) = \phi(x, t)^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x, t) \phi(x, t)^j \quad (4.3)$$

şeklinde olduğu kabul edilir. İlk terimin davranışı incelenirse, Eş 4.3 çözümünün ilk terimi olan

$$u(x, t) = u_0(x, t) \phi(x, t)^\alpha \quad (4.4)$$

ifadesi Eş 4.2 denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \phi^\alpha u_{0tt} + \phi^{\alpha-1} (2\alpha u_{0t} \phi_t + u_0 \phi_{tt}) + \phi^{\alpha-2} (\alpha^2 u_0 \phi_t^2 - \alpha u_0 \phi_{tt}^2) = \\ & \phi^{\alpha(m+1)-2} (K m \alpha^2 u_0^{m+1} \phi_x^2 - K \alpha u_0^{m+1} \phi_x^2 + K \alpha^2 u_0^{m+1} \phi_x^2) + \\ & \phi^{\alpha(m+1)-1} (2K m \alpha u_0^m u_{0x} \phi_x + K \alpha u_0^{m+1} \phi_{xx} + 2K \alpha u_0^m u_{0x} \phi_x) + \\ & \phi^{\alpha(m+1)} (K m u_0^{m-1} u_{0x}^2 + K u_{0xx} u_0^m) \\ & \phi^{\alpha p} (-\beta u_0^p) \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde edilir. Eş 4.2 denklemindeki  $u^m u_{xx}$ ,  $mu^{m-1} u_x^2$ ,  $u^p$  terimlerini baskın terim olarak kabul edip, bu terimlerden elde edilen  $\phi$ ' in kuvvetleri  $\alpha m + \alpha - 2, \alpha p$  terimleri arasında dengeleme yapıldığında

$$\alpha m + \alpha - 2 = \alpha p \quad (4.6)$$

bulunur. Buradan

$$\alpha = \frac{-2}{p - m - 1} \quad (4.7)$$

olarak elde edilir.  $u_0(x, t)$  yi bulmak için, Eş 4.7 denklemini Eş 4.5 denkleminde yerine yazıldığında



$$\beta u_0^{p-m-1} = \frac{2K(p+m+1)}{(p-m-1)^2} \phi_x^2 \quad (4.8)$$

elde edilir.

4.1. Lemma:

$p$  ve  $m$  pozitif tamsayılar olmak üzere,  $p$  ve  $m$ ' in değişik seçenekleri göz önüne alındığında Eş 4.2 denklemi, aşağıdaki tekilliklere sahiptir.

i)  $(p-m-1)$  değeri 1 ve ya 2 ye eşit olduğunda hareketli kutup vardır.

ii)  $(p-m-1) < -2$  ve ya  $(p-m-1) > 2$  olduğunda cebirsel dallanma vardır.

Şimdi rezonans analizinden aşağıdaki teorem verilebilir.

4.1. Teorem:

$p$  ve  $m$  pozitif tamsayılar olmak üzere,  $\frac{p+m+1}{p-m-1} \leq 0$  olduğunda Eş 4.2 denklemi

Painleve özelliğine sahip değildir.

*İspat :*

Rezonans değerlerinin bulunması için

$$u(x, t) = u_0(x, t)\phi(x, t)^\alpha + u_r(x, t)\phi(x, t)^{r+\alpha} \quad (4.9)$$

denklemi Eş 4.2 denkleminde yerine yazılır. Elde edilen ifade Ek 1' de görülebilir.

Bu ifade  $u_r(x, t)$  parantezine alındığında

$$u_r(x,t)[(r+\alpha)^2 + (2m\alpha-1)(r+\alpha) + m\alpha(\alpha-1) + m(m+1)\alpha^2 - 2p \frac{(p+m+1)}{(p-m-1)^2}] = 0 \quad (4.10)$$

elde edilir. Eş 4.7, Eş 4.10' da yerine yazıp, elde edilen ifade  $r$  ye göre çözüldüğünde

$$r = -1 \text{ ve } r = 2[1 - \alpha(m+1)] \quad (4.11)$$

olarak bulunur. Burada rezonans değerlerinin birinin -1 olması  $\phi$  manifoldunun keyfi olduğunu gösterir.  $r = 2[1 - \alpha(m+1)] \leq 0$  olduğunda yani  $\frac{p+m+1}{p-m-1} \leq 0$  iken Eş 4.1 denkleminin Painleve özelliğine sahip değildir.

Eş 4.10 denklemini elde etmek oldukça uzun işlemler gerektirdiğinden bu işlemler Maple10 paket programı kullanılarak yapılmıştır.

Şimdi, Lemma 4.1 ve Teorem 4.1 dikkate alınarak  $p$  ve  $m$ ' nin değişik seçenekleri göz önüne alınarak elde edilen denklemlerin Painleve analizi yapılacaktır.

1. Durum:  $p=4, m=1$  olarak seçilsin. Eş 4.1 denkleminde bu değerler yerine yazılırsa

$$u_{tt} = K(uu_x)_x - \beta u^4 \quad (4.12)$$

denkleminin elde edilir. Bu denklemin çözümünün Eş 4.3 şeklinde olduğunu kabul edelim. Eş 4.3 çözümünün ilk terimi olan Eş 4.4 ifadesi Eş 4.12 denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \phi^\alpha u_{0tt} + \phi^{\alpha-1} (2\alpha u_{0t} \phi_t + \alpha u_0 \phi_{tt}) + \phi^{\alpha-2} (\alpha^2 u_0 \phi_t^2 - \alpha u_0 \phi_t^2) \\
& + \phi^{2\alpha} (-Ku_{0x} - Ku_0 u_{0xx}) \\
& + \phi^{2\alpha-1} (-4K\alpha u_{0x} u_0 \phi_x - K\alpha u_0^2 \phi_{xx}) \\
& + \phi^{2\alpha-2} (-2K\alpha^2 u_0^2 \phi_x^2 + K\alpha u_0^2 \phi_x^2) \\
& + \phi^{4\alpha} \beta u_0^4 = 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir. Eş 4.13 ifadesinde  $\phi'$  in kuvvetleri olan  $2\alpha-2$  ile  $4\alpha$  arasında dengeleme (balance) yapılırsa

$$\alpha = -1, \tag{4.14}$$

olarak bulunur.  $u_0(x, t)$ 'yi bulmak için, Eş 4.14 değeri Eş 4.13 denkleminde yerine konulduğunda

$$\begin{aligned}
& \phi^{-4} (-3Ku_0^2 \phi_x^2 + \beta u_0^4) + \phi^{-3} (2u_0 \phi_t^2 + 4Ku_0 u_{0x} \phi_x + Ku_0^2 \phi_{xx}) \\
& + \phi^{-2} (-2u_{0t} \phi_t - u_0 \phi_{tt} - Ku_{0x}^2 - Ku_0 u_{0xx}) + \phi^{-1} u_{0tt} = 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

bulunur ve Eş 4.15 eşitliğinde  $\phi^{-4}$ 'in katsayısı sifıra eşitlendiğinde

$$u_0 = \mp \sqrt{\frac{3K}{\beta}} \phi_x \tag{4.16}$$

olarak bulunur. Rezonans değerlerini belirlemek için Eş 4.9 denklemi Eş 4.12 denkleminde yerine yazılır. Elde edilen ifade de  $u_r \phi^{-4}$  teriminin parantezine alındığında

$$Q(r) = -r^2 + 5r + 6 \tag{4.17}$$

polinomu elde edilir. Bu polinomun kökleri olan  $r = -1, 6$  değerleri rezonans değerleridir. Burada bulunan  $-1$  rezonansı  $\phi$  manifoldunun keyfi olduğunu belirtir.

$r=6$  değeri de Eş 4.3 çözümünde  $u_6(x,t)$  değerinin keyfi olabileceğine işaret eder.  $u_6(x,t)$ 'nin keyfi olduğunu garanti edilebilmesi için, bağdaşabilirlik şartının sağlanması gerekir.

$$u(x,t) = \phi(x,t)^{-1} \sum_{j=0}^6 u_j(x,t) \phi(x,t)^j \quad (4.18)$$

ifadesi Eş 4.12 denkleminde yerine yazılır,  $\phi$ ' in kuvvetlerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} \phi^{-4} : \quad & 3Ku_0^2 - 3\beta u_0^4 = 0 \\ \phi^{-3} : \quad & 2u_0u_1K - 4u_0^3u_1\beta = 0 \\ \phi^{-2} : \quad & u_0\phi_t + \beta(6u_0^2u_1^2 + 4u_0^3u_2) = 0 \\ \phi^{-1} : \quad & u_0\phi_t + \beta(4u_0u_1^3 + 12u_0^2u_1u_2 + 4Ku_0^3u_3) = 0 \\ \phi^0 : \quad & \beta - \beta u_1^4 - 12\beta u_0u_1^2u_2 - 6\beta u_0^2u_2^2 - 12\beta u_0^2u_1u_3 - 4\beta u_0^3u_4 \\ & + Ku_2^2 + 2Ku_1u_3 + 2Ku_0u_4 - u_{1t} + u_2\phi_t = 0 \\ \phi^1 : \quad & -4\beta u_1^3u_2 - 12\beta u_0u_1u_2^2 - 12\beta u_0u_1^2u_3 - 12\beta u_0^2u_2u_3 - 12\beta u_0^2u_1u_4 \\ & - 4\beta u_0^3u_5 + 6Ku_1u_3 + 6Ku_1u_4 + 6Ku_0u_5 - u_{2t} + 2u_3\phi_t = 0 \\ \phi^2 : \quad & -6\beta u_1^2u_2^2 - 4\beta u_0u_2^3 - 4\beta u_1^3u_3 - 24\beta u_0u_1u_2u_3 - 6\beta u_0^2u_3^2 - 12\beta u_0u_1^2u_4 + \\ & 12\beta u_0^2u_2u_4 - 12\beta u_0^2u_1u_5 - 4\beta u_0^3u_6 + 6Ku_3^2 + 12Ku_2u_4 + 12Ku_1u_5 + 12Ku_0u_6 \\ & - u_{3t} + 3u_4\phi_t = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Eş 4.19 denklemlerinden  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5$  değerleri çekilip  $\phi^2$ ' in katsayısı olan son denklemde yerine konulduğunda  $u_6$ 'in keyfi olmadığı görülür. Yani bağdaşabilirlik şartı sağlanamaz. O halde Eş 4.12 denklemi Painleve özelliğine sahip değildir. Jimbo ve arkadaşları [36] çalışmasında keyfi  $\phi(x,t)$  manifoldu üzerinde bazı kısıtlamalar getirmiş ve  $\phi(x,t)$  manifoldunu özel olarak

$$\phi(x, t) = x - \varphi(t) \quad (4.20)$$

şeklinde seçmiştir. Eş 4.19 denklemlerinde  $\phi(x, t)$  manifoldu yerine Eş 4.20'deki ifade yazıldığında,  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$  değerleri

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_2 &= -\frac{\varphi_t}{12K}, \\ u_3 &= 0, \\ u_4 &= -\sqrt{\frac{\beta}{3K}} \frac{29\varphi_t^2}{1440K^2} + \frac{1}{10} \sqrt{\frac{\beta^3}{3K^3}}, \\ u_5 &= \frac{\varphi_{tt}}{72} \sqrt{\frac{\beta^3}{3K^5}}, \\ u_6 \cdot 0 &= \frac{3\varphi_t^3}{92K^2} \sqrt{\frac{\beta^3}{3K^5}} - \frac{\varphi_t}{2} \sqrt{\frac{\beta^3}{3K^3}}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

olarak bulunurlar. Eş 4.21 deki son eşitlikten  $u_6$ 'in keyfi olabilmesi için bağdaşabilirlik şartının sağlanması gerekir. Bunun olabilmesi için  $\varphi_t = 0$  ya da  $\varphi = \text{sabit}$  (keyfi) olmalıdır. O halde  $\phi = x - \text{sabit}$  manifoldu civarında  $p=4, m=1$  seçimiyle elde edilen denklem şarta bağlı Painleve özelliğine sahiptir.

2. Durum:  $p=3, m=1$  seçildiğinde Eş 4.2 denkleminde bu değerler yerine yazıldığında

$$u_{tt} = K(uu_x)_x - \beta u^3 \quad (4.22)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümünün Eş 4.3 şeklinde olduğunu kabul edelim. Eş 4.3 çözümünün ilk terimi olan Eş 4.4 ifadesi Eş 4.22 denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \phi^\alpha u_{0tt} + \phi^{\alpha-1} (2\alpha u_{0t} \phi_t + \alpha u_0 \phi_{tt}) + \phi^{\alpha-2} (\alpha^2 u_0 \phi_t^2 - \alpha u_0 \phi_t^2) - \\
& \phi^{2\alpha-2} (2K\alpha^2 u_0^2 \phi_x^2 - K\alpha u_0^2 \phi_x^2) - \\
& \phi^{2\alpha-1} (K\alpha u_0^2 \phi_x^2 + 4K\alpha u_0 u_{0x} \phi_x) - \\
& \phi^{2\alpha} (K u_0 u_{0xx} + K u_{0x}^2) + \\
& \phi^{3\alpha} \beta u_0^3 u_{0xx} = 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

elde edilir. Eş 4.23 eşitliğinde  $\phi'$  in kuvvetleri olan  $2\alpha-2$  ile  $3\alpha$  terimleri eşitlenirse

$$\alpha = -2 \tag{4.24}$$

olarak bulunur.  $u_0(x,t)$ 'yi bulmak için, Eş 4.24 ifadesi Eş 4.23 denklemlerinde yerine konulduğunda  $\phi^{-6}$  teriminin katsayısı

$$-10K u_0^2 \phi_x^2 - \beta u_0^3 \tag{4.25}$$

olur. Eş 4.25 ifadesi sıfıra eşitlenirse

$$u_0 = -10 \frac{K}{\beta} \phi_x^2 \tag{4.26}$$

olarak bulunur. Şimdi rezonans değerlerini belirlemek için Eş 4.9 denklemi Eş 4.22 denkleminde yerine yazılır. Elde edilen ifade  $u_r \phi^{-6}$  parantezine alındığında

$$Q(r) = 10r^2 - 90r - 100 \tag{4.27}$$

polinomu elde edilir. Eş 4.27 polinomunun kökleri olan  $r = -1, 10$  değerleri rezonans değerleridir.

$$u(x, t) = \phi^{-2} \sum_{i=0}^{10} u_i(x, t) \phi(x, t)^i \quad (4.28)$$

toplamı Eş 3.22 denkleminde yerine yazılır ve  $\phi$ 'nin katsayıları sıfıra eşitlenirse aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned}
\phi^{-6} : & \quad -10u_0^2 \phi_x^2 - \beta u_0^3 = 0 \\
\phi^{-5} : & \quad -8Ku_{0x} u_0 \phi_x^2 - Ku_0 u_1 \phi_x^2 + 2Ku_0^2 \phi_{xx}^2 - 3\beta u_0^2 u_1 = 0 \\
\phi^{-4} : & \quad -3Ku_1 \phi_x^2 - Ku_{0x}^2 + 6u_0 u_1 x \phi_x - Ku_0 u_{0xx} + 3Ku_0 u_1 \phi_{xx} \\
& \quad - 6Ku_0 u_2 \phi_x^2 - 3\beta u_1^2 u_0 - 3\beta u_0^2 u_2 + 6u_0 \phi_t^2 = 0 \\
\phi^{-3} : & \quad -4Ku_{0t} \phi_x - 2Ku_0 \phi_{tt} + 4Ku_0 u_1 \phi_x - Ku_0 u_{1xx} - Ku_1 u_{0xx} \\
& \quad - 2Ku_{0x} u_{1x} + 4Ku_0 u_{2x} \phi_x - 2Ku_0 u_3 \phi_x^2 + 4Ku_2 u_{0x} \phi_x \\
& \quad + 2Ku_0 u_2 \phi_{xx} - 2Ku_2 u_1 \phi_x^2 - 3\beta u_0^2 u_3 - \beta u_1^3 - 6\beta u_0 u_1 u_2 + 2u_1 \phi_t^2 = 0 \\
\phi^{-2} : & \quad -2Ku_{1t} \phi_t - u_1 \phi_{tt} + u_{0tt} - Ku_2 u_{0xx} + 2Ku_1 u_{2x} \phi_x - 2Ku_{0x} u_{2x} \\
& \quad - K(u_1^2)_x + 2Ku_{0x} u_3 \phi_x + 2Ku_0 u_{3x} \phi_x - Ku_1 u_{1xx} - Ku_0 u_{2xx} \\
& \quad + Ku_0 u_3 \phi_{xx} + 2Ku_2 u_{1x} \phi_x + Ku_2 u_1 \phi_{xx} - 3\beta u_0^2 u_4 - 3\beta u_2^2 u_0 \\
& \quad - 6\beta u_0 u_1 u_3 - 3\beta u_1^2 u_2 = 0 \\
\phi^{-1} : & \quad u_{1tt} - Ku_1 u_{2xx} - Ku_2 u_{1xx} - Ku_3 u_{0xx} - 2Ku_{1x} u_{2x} - 2Ku_{0x} u_{3x} \\
& \quad - Ku_0 u_{3xx} - 6\beta u_0 u_1 u_4 - 3\beta u_0 u_2^2 - 3\beta u_5 u_0^2 - 3\beta u_3 u_1^2 - 6\beta u_0 u_2 u_3 = 0 \\
& \quad \cdot \\
& \quad \cdot \\
& \quad \cdot \\
\phi^{10} : & \quad -Ku_0 u_{8xx} - 66Ku_0 u_8^2 \phi_x^2 - 22Ku_{5x} u_{10} \phi_x - 22Ku_5 u_{10x} \phi_x \\
& \quad - 22Ku_{6x} u_9 \phi_x - 22Ku_5 u_{10x} \phi_x - 22Ku_9 u_{6x} \phi_x + \dots = 0
\end{aligned} \quad (4.29)$$

Eş 4.29 denklemlerinden  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}$  değerleri çekilip  $\phi^{10}$ 'in katsayısı olan son denklemde  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9$  değerleri yerlerine konulduğunda  $u_{10}$  değerinin keyfi olmadığı görülür. Yani bağdaşabilirlik şartı sağlanamaz. O halde Eş 4.22 denklemi Painleve özelliğine sahip değildir.  $\phi(x, t)$  manifoldunu özel olarak Eş 4.20 deki gibi seçilirse ve Eş 4.29 denklemlerinde

$\phi(x, t)$  manifoldu yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$u_0 = -10 \frac{K}{\beta},$$

$$u_1 = 0,$$

$$u_2 = \frac{-1}{40} \varphi_t^2,$$

$$u_3 = \frac{-1}{140} \varphi_{tt},$$

$$u_4 = \frac{\varphi_t}{160K^3} \beta,$$

$$u_5 = \frac{1}{280} \frac{\varphi_t^2 \varphi_{tt}}{K^3} \beta,$$

$$u_6 = \frac{1}{280} \frac{\varphi_t^2 \varphi_{tt}}{K^3} \beta,$$

$$u_7 = \frac{1}{124} \beta + \frac{\varphi_t^2 \varphi_{tt}}{K^3},$$

.

.

.

$$u_{10} \cdot 0 = 14\beta \frac{\varphi_t}{K^2} + \frac{\varphi_t^2 \varphi_{tt}}{K^3}.$$

son eşitlikten  $u_{10}$  'in keyfi olabilmesi için bağdaşabilirlik şartının sağlanması gerekir.

Bunun olabilmesi için  $\varphi_t = 0$  yada  $\varphi = \text{sabit}$  (keyfi) olmalıdır. O halde  $\phi = x - \text{sabit}$  manifoldu civarında  $p=3$ ,  $m=1$  seçimiyle elde edilen denklemi sadece şarta bağlı Painleve özelliğine sahiptir.



## 5. İKİ BOYUTLU DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

Bu kısımda, Diferensiyel dönüşüm metodu ile KdV, mKdV denklemleri ve Hirota Satsuma ikili KdV ile ikili mKdV denklem sistemlerinin soliton çözümleri yaklaşık seri çözümleri olarak elde edilmiştir. Elde edilen yaklaşık çözümler tam çözümleri ile karşılaştırılmıştır.

### 5.1. Diferensiyel Dönüşüm Metodu

Diferensiyel dönüşüm metodu, lineer ya da lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan yarı analitik bir metottur. İlk olarak 1986 yılında G.E Pukhov [41], elektrik devrelerinde başlangıç değer problemlerini çözmek için temeli Taylor seri açılımına dayanan diferensiyel dönüşüm metodunu ortaya atmıştır. Daha sonraları 1996 yılında Chen ve Ho [42], ikinci mertebeden karakteristik değer problemlerinin çözümünde diferensiyel dönüşüm metodunu kullanmıştır. 1998'de Malik ve Dang [43], ilk olarak titreşim problemlerinin çözümünde bu metodu uygulamıştır. Sonraki yıllarda, modelleme ve ısı transferi vb. çalışmalarda lineer ya da lineer olmayan kısmi türevli başlangıç değer problemlerinde bu metod uygulanmıştır [44-50].

Fiziksel problemlerde analitik çözüme ulaşmak her zaman mümkün olmayabilir. Bu durumlarda nümerik metotlarla yaklaşık çözümlere gidilebilir. Literatürde Laplace yöntemi, Fourier yöntemi, Euler metodu, Taylor metodu ve Runge-Kutta vb. metotlar başlangıç ve sınır değer problemleri için nümerik metotlar olarak tanıtılmıştır. Taylor metodu yüksek mertebeden türevleri hesaplamayı gerektirir ve bu oldukça zaman alıcı ve karmaşık bir iştir. Diferensiyel dönüşüm metodunun Taylor seri yöntemine göre ayırt edici özelliği, Taylor seri açılımında yüksek mertebeden türevleri içeren katsayıları, T-dönüşümü [49-52] yardımıyla ardışık olarak daha kolay hesaplamaya dayanır. Hassasiyet, hesaplama kolaylığı ve kolay algoritma oluşturabilme özellikleri dikkate alındığında diğer yöntemlerden çok daha etkilidir. Ayrıca, diferensiyel dönüşüm metodu bazı diferensiyel denklemlerin kapalı çözümlerinin elde edilmesinde de kullanışlı bir araçtır [48].

T dönüşümü yardımıyla kısmi türevli denklemlerin çözülebilmesi için gerekli temel teori aşağıda verilmiştir [52].

### 5.1. Tanım:

Bir  $w(x, y)$  fonksiyonunun T- dönüşümü altındaki ifadesi  $W(k, h)$  ile gösterilir ve

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} w(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} \quad (5.1)$$

Eş. 5.1 şeklinde tanımlanır. Burada  $k$  ve  $h$  doğal sayılardır.

### 5.2. Tanım:

$W(k, h)$ ' in ters diferensiyel dönüşümü,

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h) x^k y^h \text{ olarak tanımlanır.} \quad (5.2)$$

Eş. 5.1 ve Eş. 5.2'den

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} w(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} x^k y^h$$

elde edilir. Uygulamalarda  $w(x, y)$  fonksiyonu sonlu serilerle ifade edilebilir. Eş. 5.2 denklemi

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{h=0}^n W(k, h) x^k y^h \quad (5.3)$$

şeklinde yazılabilir.  $w(x, y) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{h=n+1}^{\infty} W(k, h)x^k y^h$  değeri ihmal edilebilecek kadar küçüktür.

Şimdiye kadar diferensiyel dönüşüm metodu ile bulunmuş olan temel özellikler Ek-2' de listelenmiştir [48].

5.1. Teorem :

Eğer  $w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$  ise  $W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$  dir.

*İspat:*

Tanım 5.1' den

$$U(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

$$V(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} v(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} [u(x, y) \pm v(x, y)] \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

yazabiliriz. Buradan

$$W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$$

yazılır.

5.2. Teorem :

Eğer  $w(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$  ise  $W(k,h) = (k+1)U(k+1,h)$  dir.

İspat:

Tanım 5.1' den

$$W(k,h) = \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \left[ \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \right] \right]_{x=0, y=0} = \frac{(k+1)}{(k+1)!h!} \left[ \frac{\partial^{k+1+h}}{\partial x^{k+1} \partial y^h} u(x,y) \right]_{x=0, y=0}$$

yazabiliriz. Buradan

$$W(k,h) = (k+1)U(k+1,h) \text{ olur.}$$

5.3. Teorem:

Eğer  $w(x,y) = \frac{\partial^{r+s} u(x,y)}{\partial x^r \partial y^s}$  ise

$W(k,h) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s) U(k+r, h+s)$  dir.

İspat:

Tanım 5.1' den

$$\begin{aligned} W(k,h) &= \frac{1}{k!h!} \left[ \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \left[ \frac{\partial^{r+s} u(x,y)}{\partial x^r \partial y^s} \right] \right]_{x=0, y=0} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)}{(k+r)!(h+s)!} \left[ \frac{\partial^{k+h+r+s}}{\partial x^{k+r} \partial y^{h+s}} u(x,y) \right]_{x=0, y=0} \end{aligned}$$

Buradan

$$W(k, h) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)U(k+r, h+s)$$

yazılır.

5.4. Teorem:

Eğer  $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)$  ise  $W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s)$  dir [52].

İspat:

Tanım 5.1'den,

$$W(0, 0) = [u(x, y)v(x, y)]_{x=0, y=0} = U(0, 0)V(0, 0)$$

$$\begin{aligned} W(1, 0) &= \frac{1}{1!0!} \frac{\partial}{\partial x} [u(x, y)v(x, y)]_{x=0, y=0} \\ &= \left[ \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} v(x, y) + u(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right]_{x=0, y=0} = U(1, 0)V(0, 0) + U(0, 0)V(1, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(2, 0) &= \frac{1}{2!0!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u(x, y)v(x, y)]_{x=0, y=0} \\ &= U(2, 0)V(0, 0) + U(1, 0)V(1, 0) + U(0, 0)V(2, 0) \end{aligned}$$

$$W(0, 1) = U(0, 1)V(0, 0) + U(0, 0)V(0, 1)$$

$$W(1, 1) = U(1, 1)V(0, 0) + U(1, 0)V(0, 1) + U(0, 1)V(1, 0) + U(0, 0)V(1, 1)$$

$$\begin{aligned} W(1, 2) &= U(1, 2)V(0, 0) + U(1, 1)V(0, 1) + U(1, 0)V(0, 2) \\ &\quad + U(0, 2)V(1, 0) + U(0, 1)V(1, 1) + U(0, 0)V(1, 2) \end{aligned}$$

$$W(0, 2) = U(0, 2)V(0, 0) + U(0, 1)V(0, 1) + U(0, 0)V(0, 2)$$

$$\begin{aligned} W(2, 1) &= U(2, 1)V(0, 0) + U(2, 0)V(0, 1) + U(1, 1)V(1, 0) \\ &\quad + U(1, 0)V(1, 1) + U(0, 1)V(2, 0) + U(0, 0)V(2, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W(2, 2) &= U(2, 2)V(0, 0) + U(2, 1)V(0, 1) + U(2, 0)V(0, 2) \\ &\quad + U(1, 2)V(1, 0) + U(1, 1)V(1, 1) + U(1, 0)V(1, 2) \\ &\quad + U(0, 2)V(2, 0) + U(0, 1)V(2, 1) + U(0, 0)V(2, 2) \end{aligned}$$

Bunları genelleştirirsek

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s) V(k-r, s)$$

olur [52].

## 5.2. KdV ve mKdV Denklemlerinin Diferensiyel Dönüşüm Metodu ile Yaklaşık

### Çözümleri

Literatürde, lineer olmayan olaylar çalışıldığında, fiziğin pek çok dalında (sıvı mekaniği, katı hal fiziği, plazma fiziği vb.) aşağıdaki formda denklemlerle karşılaşılır.

$$u_t - (m+1)(m+2)u^m u_x + u_{xxx} = f(x, t) \quad (5.4)$$

Burada  $f(x, t)$  verilen bir fonksiyon ve  $m$  pozitif bir tamsayıdır. Bu denklemde  $m=1$  ve  $m=2$  alınırsa, Eş 5.4 denklemi sırasıyla KdV ve modifiye KdV denklemleri olarak adlandırılır.

### 5.2.1. KdV denkleminin diferensiyel dönüşüm metodu ile yaklaşık çözümü

#### 1. Durum:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad x \in R \quad (5.5)$$

$$u(x, 0) = -2 \frac{K^2 e^{Kx}}{(1 + e^{Kx})^2} \quad (5.6)$$

başlangıç şartıyla verilen KdV denklemlerini göz önüne alalım [54]. EK-2'de verilen dönüşümler kullanılarak, Eş 5.5 denkleminin iki boyutlu diferansiyel dönüşümü alınır

$$(h + 1)U(k, h + 1) = 6 \sum_{r=0}^h \sum_{s=0}^h (k+1-r)U(r, h-s)U(k+1-r, s) - (k+1)(k+2)(k+3)U(k+3, h) \quad (5.7)$$

elde edilir. Eş 5.6 başlangıç koşulu seriye açılırsa serinin katsayıları  $U(k, 0)$  başlangıç dönüşüm katsayılarına karşılık gelir ve bu katsayılardan bazıları aşağıda verilmiştir.

$$U(k, 0) = 0, \quad k = 1, 3, 5, \dots, \\ U(0, 0) = \frac{-1}{2} K^2, \quad U(2, 0) = \frac{1}{8} K^4, \quad U(4, 0) = \frac{-1}{48} K^6 \quad (5.8)$$

Eş 5.8'deki değerler Eş 5.7'de yerine konulduğunda,  $U(k, h)$  dönüşüm katsayılarının sıfır olan değerleri de Eş 5.9 denklemi ile verilir.

$$U(k, 1) = 0, \quad k = 0, 2, 4, \dots \\ U(k, 2) = 0, \quad k = 1, 3, 5, \dots \\ U(k, 3) = 0, \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (5.9)$$

Bu şekilde ardışık olarak hesaplamalar tekrarlanarak elde edilen  $U(k, h)$  dönüşüm katsayılarının bazı değerleri Çizelge 5.2' de verilmiştir.

Çizelge 5.1.  $U(k, h)$  dönüşüm katsayılarının bazı değerleri

$U(1, 1) = -\frac{1}{4} K^6$	$U(3, 1) = \frac{1}{12} K^8$	$U(5, 1) = -\frac{17}{960} K^{10}$
$U(7, 1) = \frac{31}{10080} K^{12}$	$U(9, 1) = -\frac{691}{1451520} K^{14}$	$U(11, 1) = \frac{5461}{79833600} K^{16}$
$U(0, 2) = \frac{1}{8} K^8$	$U(2, 2) = -\frac{1}{18} K^{10}$	$U(4, 2) = \frac{17}{384} K^{12}$
$U(6, 2) = -\frac{31}{2880} K^{14}$	$U(8, 2) = \frac{691}{322560} K^{16}$	$U(10, 2) = -\frac{5461}{14515200} K^{18}$

Tabloda gösterilen  $U(k, h)$  değerleri Eş 5.3' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \left\{ -\frac{1}{2}K^2 + \frac{1}{8}K^4x^2 - \frac{1}{48}K^6x^4 + \frac{17}{5760}K^8x^6 - \frac{31}{80640}K^{10}x^8 + \dots \right\} \\
& + \left\{ -\frac{1}{4}K^6xt + \frac{1}{12}K^8x^3t - \frac{17}{960}K^{10}x^5t + \frac{31}{10020}K^{12}x^7t \right. \\
& \left. - \frac{691}{1451520}K^{14}x^9t + \frac{5461}{79833600}K^{16}x^{11}t + \dots \right\} \\
& + \left\{ \frac{1}{8}K^8t^2 - \frac{1}{8}K^{10}x^2t^2 - \frac{17}{384}K^{12}x^4t^2 - \frac{31}{2880}K^{14}x^6t^2 \right. \\
& \left. + \frac{691}{322560}K^{16}x^8t^2 - \frac{5461}{14515200}K^{18}x^{10}t^2 + \dots \right\} \\
& + \left\{ \frac{5}{3}K^{11}t^3 + \left( -\frac{92}{3}K^{12}e^K + 29K^{12}(e^K)^2 + \frac{79}{2}K^{13} \right) x^2t^3 \right. \\
& \left. + \left( -\frac{106}{9}K^{14}e^K + \frac{183}{2}K^{13}(e^K)^2 - \frac{574}{3}K^{12}(e^K)^3 - \frac{55}{24}K^{15} \right. \right. \\
& \left. \left. + 135K^{12}(e^K)^4 \right) x^4t^3 \right\} + \dots
\end{aligned} \tag{5.10}$$

seri çözümünü elde edilir. Eş 5.10' da birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü parantezlerin kapalı formları

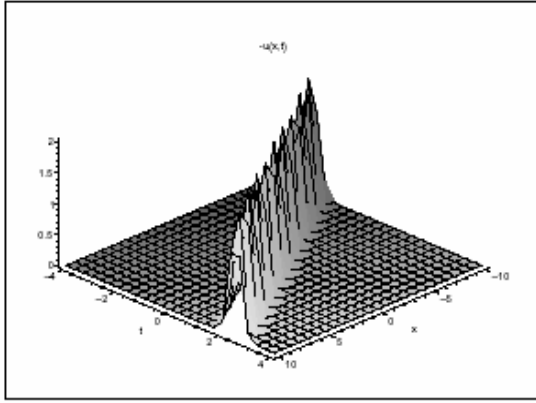
$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= -2 \frac{K^2 e^{Kx}}{(1 + e^{Kx})^2}, \\
u_2(x, t) &= \left[ -\frac{4K^5 (e^{Kx})^2}{(1 + e^{Kx})^3} + \frac{2K^5 (e^{Kx})^2}{(1 + e^{Kx})^2} \right] t, \\
u_3(x, t) &= \left[ \frac{2K^5 (e^{Kx})^2}{(1 + e^{Kx})^4} - \frac{2K^8 (e^{Kx})^3}{(1 + e^{Kx})^4} - \frac{K^8 e^{Kx}}{(1 + e^{Kx})^2} + \frac{4K^8 (e^{Kx})^2}{(1 + e^{Kx})^3} \right] t^2 \\
u_4(x, t) &= \left[ \frac{4K^{11} (e^{Kx})^3}{(1 + e^{Kx})^4} - \frac{2K^{11} (e^{Kx})^2}{(1 + e^{Kx})^4} - \frac{2K^{11} (e^{Kx})^2}{(1 + e^{Kx})^3} + \frac{14K^{11} (e^{Kx})^3}{3(1 + e^{Kx})^5} \right. \\
& \left. - \frac{8K^{11} (e^{Kx})^4}{3(1 + e^{Kx})^5} - \frac{2K^{11} (e^{Kx})^2}{3(1 + e^{Kx})^5} + \frac{K^{11} e^{Kx}}{3(1 + e^{Kx})^2} \right] t^3
\end{aligned} \tag{5.11}$$

şeklinde. Eş 5.11' de  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$ ,  $u_3(x, t)$  ve  $u_4(x, t)$  ler ise aşağıda Eş 5.12 ile verilen tam çözümün seri açılımındaki ilk dört terime karşılık gelmektedir.

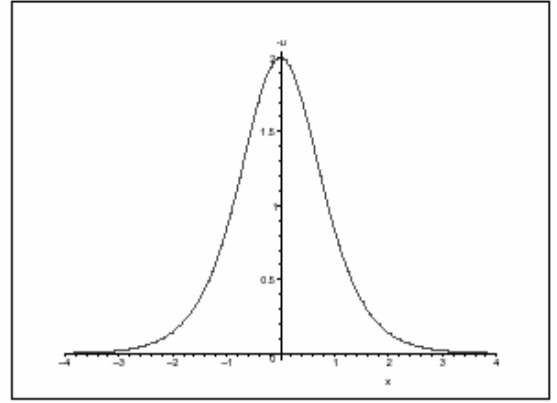


$$u(x, t) = -2 \frac{K^2 e^{K(x-K^2t)}}{(1 + e^{K(x-K^2t)})^2} \quad (5.12)$$

Bu çözüm Lax [55] tarafından elde edilmiştir. Şekil 5.1 (a)  $K=2$  için  $-2 \leq t \leq 4, -4 \leq x \leq 10$  bölgesinde (b) ise,  $K=2$  ve  $t=0$  için ve  $-4 \leq x \leq 4$  aralığında elde edilen yaklaşık çözüm grafiklerini göstermektedir. Hesaplamalarda ve grafik çizimlerinde Maple10 paket programı kullanılmıştır.



(a)



(b)

Şekil 5.1. Eş. 5.11 kullanılarak sırasıyla  $K=2, -2 \leq t \leq 4, -4 \leq x \leq 10$  ve  $K=2, t=0, -4 \leq x \leq 4$  için elde edilen iki ve 3 boyutlu çözüm grafikleri

2. Durum: Eş 5.5 denklemini

$$u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2 x \quad (5.13)$$

denk olarak

$$u(x, 0) = -24 \frac{e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} \quad (5.14)$$

başlangıç şartıyla göz önüne alalım [54]. Eş 5.13 başlangıç koşulundan *Durum 1*' e benzer şekilde, başlangıç dönüşüm katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
 U(k,0) &= 0, \quad k = 1,3,5,\dots, \\
 U(0,0) &= -6, \quad U(2,0) = 6, \quad U(4,0) = -4,\dots
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

Eş 5.15’deki değerleri Eş 5.7’de yerine konulur ve bu şekilde ardışık olarak hesaplamalar sürdürülürse  $U(k,h)$  değerleri elde edilir. Benzer şekilde elde edilen bazı  $U(k,h)$  değerleri Çizelge 5.2’de verilmiştir.

Çizelge 5.2. Eş 5.14 başlangıç değerine göre hesaplanan  $U(k,h)$  dönüşüm katsayılarının bazı değerleri

$U(1,1) = -336$	$U(3,1) = 736$	$U(5,1) = -\frac{4784}{5}$
$U(7,1) = \frac{14336}{15}$	$U(9,1) = -\frac{765344}{945}$	$U(11,1) = \frac{31843232}{51975}$
$U(0,2) = 3840$	$U(2,2) = -29184$	$U(4,2) = 72160$
$U(6,2) = -\frac{1720576}{15}$	$U(8,2) = \frac{2978912}{21}$	$U(10,2) = -\frac{702484096}{4725}$

Elde edilen  $U(k,h)$  değerleri Eş. 5.3’de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \{-6 + 6x^2 - 4x^4 + \frac{34}{5}x^6 - \frac{124}{105}x^8 + \frac{2764}{4725}x^{10} + \dots\} \\
 &+ \{-336xt + 736x^3t - \frac{4784}{5}x^5t + \frac{14336}{15}x^7t - \frac{765344}{945}x^9t + \dots\} \\
 &+ \{3840t^2 - 29184x^2t^2 + 72160x^4t^2 - t^2 + \frac{2978912}{21}x^8t^2 + \dots\} \\
 &+ \{441088xt^3 - \frac{7132672}{3}x^3t^3 + \frac{92700416}{15}x^5t^3 - \frac{3497237504}{315}x^7t^3 \\
 &+ \frac{44873881856}{2835}x^9t^3 + \dots\}
 \end{aligned}
 \tag{5.16}$$

seri çözümü elde edilir. Eş 5.16’da birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü parantezlerin kapalı formları

$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= -24 \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} \\
u_2(x,t) &= 192 \frac{e^{2x}(1+240e^{2x}-25e^{4x}-e^{6x})}{(1+e^{2x})^5} t \\
u_3(x,t) &= -768 \frac{e^{2x}(1+240e^{2x}+183e^{4x}-25e^{4x}-e^{6x})}{(1+e^{2x})^5} t^2 \\
u_3(x,t) &= 2048 \frac{e^{2x}(K_1(x)+K_2(x))}{(1+e^{2x})^{11}} t^3
\end{aligned} \tag{5.17}$$

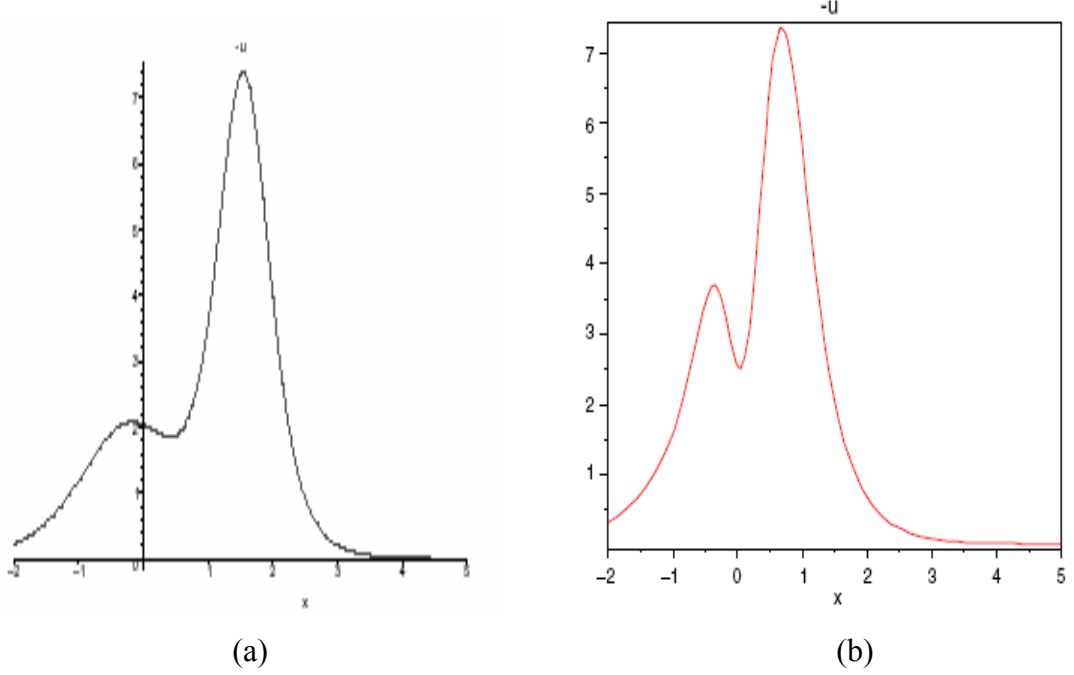
burada

$$\begin{aligned}
K_1(x) &= 1+2011e^{2x}+5288e^{4x}-51488e^{6x}-106606e^{8x}, \\
K_2(x) &= 106606e^{10x}+51488e^{12x}-5288e^{14x}-2011e^{16x}-e^{18x}
\end{aligned}$$

dır. Eş 5.17' deki  $u_1(x,t)$ ,  $u_2(x,t)$ ,  $u_3(x,t)$  ve  $u_4(x,t)$  ler seri çözümünde ilk dört terimini vermektedir. Drazin [56] tarafından aynı problem için tam çözüm aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$u(x,t) = 12 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{e^{8t-2x} + 2e^{64t-4x} + e^{72t-6x}}{1+3e^{8t-2x} + 3e^{64t-4x} + e^{72t-6x}} \right) \tag{5.18}$$

Şekil 5.2 .(a) ve (b)' de, soliton çözümün grafiği sırasıyla, Eş 5.18 tam çözümü ve Eş 5.16 yaklaşık çözümü  $t=0,08$  ve  $-2 \leq x \leq 5$  için verilmiştir.



Şekil 5.2. KdV denkleminin (a) tam , (b) yaklaşık çözüm (  $t=0,08$  ve  $-2 \leq x \leq 5$  ) grafikleri

### 5.2.2. mKdV denkleminin diferensiyel dönüşüm metodu ile yaklaşık çözümü

#### 1.Durum:

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (5.19)$$

$$u(x,0) = \frac{4\sqrt{2}K \sin^2(Kx)}{3 - \sin^2(Kx)} \quad (5.20)$$

Eş 5. 20 başlangıç şartıyla Eş 5.19 mKdV denklemini göz önüne alalım [57]. EK-2' de verilen dönüşümler kullanılarak, Eş 5.19 denkleminin iki boyutlu diferansiyel dönüşümü

$$(h + 1)U(k, h + 1) = - \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+1)U(r, h-s-p)U(t, s)U(k-r-t+1, p) - (k+1)(k+2)(k+3)U(k+3, h) \quad (5.21)$$

olarak bulunur. Eş 5.20 başlangıç koşulundan, başlangıç dönüşüm katsayıları bulunup, bu değerler Eş 5.21 denkleminde yerine yazılırsa  $U(k, h)$  katsayıları Maple10 paket programı ile hesaplanarak aşağıdaki seri çözümü elde edilir.

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \left\{ \frac{4}{3} \sqrt{2} K^3 x^2 + \frac{4}{9} \sqrt{2} K^5 x^4 + \frac{8}{135} \sqrt{2} K^7 x^6 - \frac{68}{2835} \sqrt{2} K^9 x^8 \right. \\ & - \frac{88}{4725} \sqrt{2} K^{11} x^{10} + \dots \left. \right\} + \left\{ -\frac{32}{3} \sqrt{2} K^5 x t - \frac{64}{9} \sqrt{2} K^7 x^3 t \right. \\ & - \frac{64}{45} \sqrt{2} K^9 x^5 t + \frac{2176}{2835} \sqrt{2} K^{11} x^7 t + \frac{704}{945} \sqrt{2} K^{13} x^9 t \\ & + \frac{138112}{46775} \sqrt{2} K^{15} x^{11} t + \dots \left. \right\} + \left\{ \frac{64}{3} \sqrt{2} K^7 t^2 + \frac{128}{3} \sqrt{2} K^9 x^2 t^2 \right. \\ & + \frac{128}{9} \sqrt{2} K^{11} x^4 t^2 - \frac{4352}{405} \sqrt{2} K^{13} x^6 t^2 - \frac{1408}{105} \sqrt{2} K^{15} x^8 t^2 \\ & \left. - \frac{276224}{42525} \sqrt{2} K^{17} x^{10} t^2 + \dots \right\} + \dots \quad (5.22) \end{aligned}$$

Eş 5.22' de birinci, ikinci ve üçüncü parantezlerin kapalı formları sırasıyla

$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= \frac{4\sqrt{2}K \sin^2(Kx)}{3 - \sin^2(Kx)} \\
u_2(x,t) &= \left[ 4 \frac{-8\sqrt{2}K^4 \sin(Kx) \cos(Kx) + \frac{16\sqrt{2}k^4 \sin^3(Kx) \cos(Kx)}{-3 + 2\sin^2(Kx)}}{3 - \sin^2(Kx)} \right] t \\
u_3(x,t) &= \left[ 4 \frac{\frac{\sqrt{2}K(-16\sin^2(Kx) \cos(Kx)K^6 + 16\cos^2(Kx)K^6)}{3 + \sin^2(Kx)} + \frac{\sqrt{2}k \sin^2(Kx)(32\sin^2(Kx)K^6 - 32\cos^2(Kx)K^6)}{-3 + \sin^2(Kx)}}{3 + 2\sin^2(Kx)} + 4 \frac{\frac{384\sqrt{2}K^7 \sin^2(Kx) \cos^2(Kx)}{(-3 + \sin^2(Kx))^2}}{3 + 2\sin^2(Kx)} \right] t^2
\end{aligned} \tag{5.23}$$

$u_1(x,t)$ ,  $u_2(x,t)$  ve  $u_3(x,t)$  ler aşağıda Eş 5.24 de, [57] nolu kaynakta tanımlanan kapalı form çözümünün ilk üç terimini göstermektedir.

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{4\sqrt{2} \sin^2(K(x - 4k^2t))}{3 - 2\sin^2(K(x - 4k^2t))}, & 0 \leq K(x - 4k^2t) \leq \pi \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{5.24}$$

### 5.3. Hirota-Satsuma İkili KdV ve İkili mKdV Denklemlerinin Diferensiyel Dönüşüm Metodu ile Yaklaşık Çözümleri

Genelleştirilmiş Hirota-Satsuma İkili KdV denklem sistemi

$$\begin{aligned}
u_t &= \frac{1}{2}u_{xxx} - 3uu_x + 3(vw)_x \\
v_t &= -v_{xxx} + 3uv_x \\
w_t &= -w_{xxx} + 3uw_x
\end{aligned} \tag{5.25}$$

ve ikili mKdV denklem sistemi

$$\begin{aligned}
u_t &= \frac{1}{2}u_{xxx} - 3u^2u_x + \frac{3}{2}v_{xx} + 3uv_x + 3u_xv - 3\lambda u_x \\
v_t &= -v_{xxx} - 3vv_x - 3u_xv_x + 3u^2v_x + 3\lambda v_x
\end{aligned} \tag{5.26}$$

şeklindedir. Bu denklemler ilk defa Wu [58] tarafından tanıtılmıştır. Engue Fan [59], tanh-fonksiyon metodunu kullanarak, bu denklemler için 4 çeşit soliton çözüm bulmuştur. Daha sonra pek çok bilim adamı, bu denklemler üzerine farklı metodlar kullanarak çalışmışlardır. Yu ve arkadaşları [60] Jacobi eliptik metodunu, Zayed ve arkadaşları [61] cebirsel metodu, He ve arkadaşları [62] değişken iterasyon metodunu, Kaya [63] Adomian metodunu kullanmışlardır. Bu denklem sistemlerinin yaklaşık soliton çözümleri bu bölümde diferensiyel dönüşüm metoduyla elde edilmiş ve sonuçlar analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Sonuçların analitik çözümlere oldukça yakın olması metodun güvenilirliğini göstermektedir.

### 5.3.1. Hirota-Satsuma ikili KdV denklem sisteminin diferensiyel dönüşüm metodu ile yaklaşık çözümleri

1. Durum: Eş 5.25 denklemini aşağıdaki başlangıç koşullarıyla göz önüne alalım [59].

$$\begin{aligned}
u(x, 0) &= \frac{1}{3}(\beta - 2K^2) + 2K^2 \tanh^2(Kx) \\
v(x, 0) &= -\frac{4K^2c_0(\beta + K^2)}{3c_1^2} + \frac{4K^2(\beta + K^2)}{3c_1} \tanh(Kx) \\
w(x, 0) &= c_0 + c_1 \tanh(Kx)
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Burada  $K$ ,  $c_0$ ,  $c_1 \neq 0$  ve  $\beta$  sabitlerdir. EK-2'de verilen dönüşümler kullanılarak, Eş 5.25 denkleminin iki boyutlu diferansiyel dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned}
(h+1)U(k, h+1) &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3, h) \\
&\quad -3 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k+1-r)U(r, h-s)U(k+1-r, s) \\
&\quad +3 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k+1-r)V(r, h-s)W(k+1-r, s) \\
&\quad +3 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k+1-r)W(r, h-s)V(k+1-r, s) \tag{5.28} \\
(h+1)V(k, h+1) &= -(k+1)(k+2)(k+3)V(k+3, h) \\
&\quad +3 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k+1-r)U(r, h-s)V(k+1-r, s) \\
(h+1)W(k, h+1) &= -(k+1)(k+2)(k+3)W(k+3, h) \\
&\quad +3 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k+1-r)U(r, h-s)W(k+1-r, s)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eş 5.27 başlangıç koşulu seriye açılır ve seri açılımındaki katsayılar  $U(k,0)$ ,  $V(k,0)$ ,  $W(k,0)$  başlangıç katsayılarına karşılık gelir.

$$\begin{aligned}
U(k,0) &= 0, \quad k = 1, 3, 5, \dots, \quad U(0,0) = \frac{1}{3}\beta - \frac{2}{3}K^2, \quad U(2,0) = 2K^4, \dots \\
V(k,0) &= 0, \quad k = 2, 4, 6, \dots, \quad V(0,0) = -\frac{4}{3} \frac{K^2 c_0 (\beta + K^2)}{c_1}, \quad V(1,0) = \frac{4}{3} \frac{K^3 (\beta + K^2)}{c_1}, \dots \\
W(k,0) &= 0, \quad k = 2, 4, 6, \dots, \quad W(0,0) = c_0, \quad W(1,0) = c_1 K, \quad W(3,0) = -\frac{1}{3} c_1 K^3, \dots
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Eş 5.29 değerleri Eş 5.28' de yerine yazıldığında  $U(k,h)$ ,  $V(k,h)$  ve  $W(k,h)$  değerlerinin sıfır olarak elde edilenleri aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
U(k,1) &= 0, \quad k=0,2,4,\dots, \quad U(k,2)=0, \quad k=1,3,5, \dots, \\
V(k,1) &= 0, \quad k=1,3,5,\dots, \quad V(k,2)=0, \quad k=0,2,4,\dots, \\
W(k,1) &= 0, \quad k=1,3,5,\dots, \quad W(k,2)=0, \quad k=0,2,4,\dots
\end{aligned} \tag{5.30}$$



$U(k,h)$ ,  $V(k,h)$  ve  $W(k,h)$ ' in sıfırdan farklı değerlerinden bazıları da aşağıda Çizelge 5.3' de verilmiştir.

Çizelge 5.3. Eş. 5.27 başlangıç koşullarına göre hesaplanan  $U(k,h)$ ,  $V(k,h)$  ve  $W(k,h)$  dönüşüm katsayılarının bazı değerleri

$U(1,1) = 4K^4\beta$	$U(3,1) = -\frac{16}{3}K^6\beta$
$U(5,1) = \frac{68}{35}K^8\beta$	$U(7,1) = -\frac{992}{396}K^{10}\beta$
$U(0,2) = 2K^4\beta^2$	$U(2,2) = -8K^8\beta^2$
$U(4,2) = \frac{34}{3}K^8\beta^2$	$U(6,2) = -\frac{496}{45}K^{10}\beta^2$
$V(0,1) = \frac{4}{3} \frac{K^3\beta(\beta+K^2)}{c_1}$	$V(2,1) = \frac{4}{3} \frac{K^5\beta(\beta+K^2)}{c_1}$
$V(4,1) = \frac{8}{9} \frac{K^7\beta(\beta+K^2)}{c_1}$	$V(6,1) = -\frac{68}{135} \frac{K^9\beta(\beta+K^2)}{c_1}$
$V(1,2) = -\frac{4}{3} \frac{K^5\beta^2(\beta+K^2)}{c_1}$	$V(5,2) = -\frac{68}{45} \frac{K^9\beta^2(\beta+K^2)}{c_1}$
$W(0,1) = c_1K\beta$	$W(4,1) = \frac{4}{3}c_1K^5\beta$
$W(1,2) = -c_1K^3\beta^2$	$W(5,2) = -\frac{17}{15}c_1k^7\beta^2$
$V(3,2) = \frac{16}{9} \frac{K^7\beta^2(\beta+K^2)}{c_1}$	$V(7,2) = \frac{992}{945} \frac{K^{11}\beta^2(\beta+K^2)}{c_1}$
$W(2,1) = c_1K^3\beta$	$W(6,1) = -\frac{17}{45}c_1K^7\beta$
$W(3,2) = \frac{4}{3}c_1k^5\beta^2$	$W(7,2) = \frac{2485}{314}c_1k^9\beta^2$

Böylece, elde edilen  $U(k,h)$ ,  $V(k,h)$  ve  $W(k,h)$  değerleri Eş 5.3' de yerine yazılırsa aşağıdaki seri çözümü elde edilir.

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \left\{ \frac{1}{3}\beta - \frac{2}{3}K^2 + 2K^4x^2 - \frac{4}{3}K^8x^6 + \dots \right\} \\
&\quad + \left\{ 4K^4\beta xt - \frac{16}{3}K^6\beta x^3t + \frac{68}{15}K^8\beta x^5t - \frac{992}{315}K^{10}\beta x^7t + \dots \right\} \\
&\quad + \left\{ 2K^4\beta^2 - 8K^8\beta^2x^2t^2 + \frac{34}{3}K^8\beta^2x^4t^2 - \frac{496}{45}K^{10}\beta^2x^6t^2 + \dots \right\} + \dots \\
v(x,t) &= \left\{ -\frac{4}{3}\frac{K^2c_0(\beta+K^2)}{c_1} + \frac{4}{3}\frac{K^3(\beta+K^2)}{c_1}x - \frac{4}{9}\frac{K^5(\beta+K^2)}{c_1}x^3 + \frac{8}{45}\frac{K^7(\beta+K^2)}{c_1}x^5 + \dots \right\} \\
&\quad + \left\{ \frac{4}{3}\frac{K^3\beta(\beta+K^2)}{c_1}xt - \frac{4}{3}\frac{K^5\beta(\beta+K^2)}{c_1}x^2t + \frac{8}{9}\frac{K^7\beta(\beta+K^2)}{c_1}x^4t - \frac{68}{135}\frac{K^9\beta(\beta+K^2)}{c_1}x^6t + \dots \right\} \\
&\quad + \left\{ -\frac{4}{3}\frac{K^5\beta^2(\beta+K^2)}{c_1}xt^2 + \frac{16}{9}\frac{K^7\beta^2(\beta+K^2)}{c_1}x^3t^2 - \frac{68}{45}\frac{K^9\beta^2(\beta+K^2)}{c_1}x^5t^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{992}{945}\frac{K^{11}\beta^2(\beta+K^2)}{c_1}x^7t^2 + \dots \right\} + \dots \\
w(x,t) &= \left\{ c + c_1Kx - \frac{1}{3}K^3x^3 + \frac{2}{15}c_1K^5x^5 - \frac{17}{315}c_1K^5x^7 + \dots \right\} \\
&\quad + \left\{ c_1K\beta t - c_1K^3\beta x^2t + \frac{2}{3}c_1K^5\beta x^4t - \frac{17}{15}c_1K^7\beta x^6t + \dots \right\} \\
&\quad + \left\{ -c_1K^3\beta^2x^2t^2 + \frac{4}{3}c_1K^5\beta^2x^3t^2 - \frac{17}{15}c_1K^7\beta^2x^5t^2 + \frac{24817}{315}c_1K^9\beta^2x^7t^2 + \dots \right\} + \dots
\end{aligned}$$

şeklindedir. Birinci, ikinci ve üçüncü parantezlerin kapalı formları ise aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
u_0(x,t) &= \frac{1}{3}(\beta - 2K^2) + 2k^2 \tanh^2(Kx) \\
v_0(x,t) &= -\frac{4K^2c_0(\beta+K^2)}{3c_1^2} + \frac{4K^2(\beta+K^2)}{3c_1} \tanh(Kx) \\
w_0(x,t) &= c_0 + c_1 \tanh(Kx)
\end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= \left[ \frac{16k^3(e^{2kx})^2\beta - 16k^3(e^{2kx})\beta}{(e^{2kx})^3 + 3(e^{2kx})^2 + 3(e^{2kx}) + 1} \right] t, \\
v_1(x,t) &= \left[ \frac{16k^3(e^{2kx})\beta^2 + 16k^5(e^{2kx})\beta}{3c_1(e^{2kx})^2 + 6c_1(e^{2kx}) + 3c_1} \right] t,
\end{aligned} \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned}
w_1(x,t) &= \left[ 4 \frac{c_1 e^{2kx} k \beta}{(e^{2kx})^2 + 2e^{2kx} + 1} \right] t, \\
u_2(x,t) &= \left[ \frac{16k^3(e^{2kx})^2\beta - 16k^3(e^{2kx})\beta}{(e^{2kx})^3 + 3(e^{2kx})^2 + 6(e^{2kx}) + 4e^{2kx} + 1} \right] t^2, \\
v_2(x,t) &= \left[ \frac{-16k^4(e^{2kx})^2\beta^3 + 16k^4 e^{2kx} \beta^3 - 16k^6(e^{2kx})^2\beta^2 + 16k^6 e^{2kx} \beta^2}{3c_1(e^{2kx})^3 + 9c_1(e^{2kx})^2 + 9c_1 e^{2kx} + 3c_1} \right] t^2, \\
w_2(x,t) &= \left[ \frac{-4c_1 k^2 (e^{2kx})^2 \beta^2 + 4c_1 k^2 e^{2kx} \beta^2}{(e^{2kx})^3 + 3(e^{2kx})^2 + 3e^{2kx} + 1} \right] t^2,
\end{aligned} \tag{5.33}$$

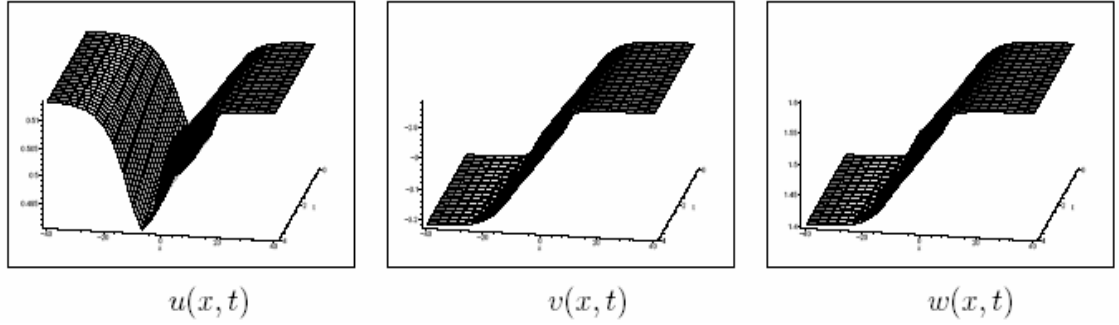
yazılabilir. Eş 5.31-5.33 göz önüne alınarak aşağıdaki seri çözüm elde edilir.

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \dots \\
v(x,t) &= v_0(x,t) + v_1(x,t) + v_2(x,t) + \dots \\
w(x,t) &= w_0(x,t) + w_1(x,t) + w_2(x,t) + \dots
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Bu problem için Fan [59] tarafından elde edilen tam (soliton) çözüm ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{3}(\beta - 2K^2) + 2K^2 \tanh^2(K(x + \beta t)) \\
v(x,t) &= -\frac{4K^2 c_0 (\beta + K^2)}{3c_1^2} + \frac{4K^2 (\beta + K^2)}{3c_1} \tanh(K(x + \beta t)) \\
w(x,t) &= c_0 + c_1 \tanh(K(x + \beta t))
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Şekil 5.3' de yaklaşık çözümün grafiği görülmektedir. Analitik çözümün grafiği ile yaklaşık çözüm grafiği aynıdır. Bu yüzden analitik çözümün grafiğine yer verilmemiştir.



Şekil 5.3. Eş 5.25 denklem sisteminin Eş 5.27 başlangıç şartlarında elde edilen yaklaşık çözüm grafiği

$c_0 = 1, c_1 = 1, k = 0,1, \beta = 1, t = 2$  için tam çözüm ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması Çizelge 5.4' de yapılmıştır.

Çizelge 5.4. Eş 5.25 denklem sisteminin Eş 5.27 başlangıç koşuluna göre elde edilen yaklaşık çözümün  $c_0 = 1, c_1 = 1, k = 0,1, \beta = 1, t = 2$  için tam çözüm ile karşılaştırılması

x	$u_{yaklaşık}$	$u_{tam}$	$v_{yaklaşık}$	$v_{tam}$	$w_{yaklaşık}$	$w_{tam}$
-50	0,3466612919	0,3466612490	-0,02693150931	-0,02693150930	0,000134375116	0,0001354483
-40	0,3466269860	0,3466266705	-0,02691986125	-0,02691986126	0,00099249278	0,0010004022
-30	0,3463752559	0,3463730133	-0,026683410451	-0,02683410448	0,007311643521	0,0073684798
-20	0,3446077137	0,3445954991	-0,026216987530	-0,02621698765	0,0531939872	0,0531939872
-10	0,3354597292	0,3354855632	-0,022409029190	-0,02240902851	0,3359632297	0,3359632297
0	0,3274666666	0,3274458069	-0,010808669870	-0,01080867902	1,197375320	1,197375320
10	0,3405773292	0,3405662667	-0,002240118162	-0,00224011796	1,833654607	1,833654607
20	0,3456974632	0,3457081597	-0,0003266590828	-0,00032665918	1,975743130	1,975743130
30	0,3465323318	0,3465341826	-0,0000446770543	-0,00004467704	1,996635271	1,996682398
40	0,3466484268	0,3466486853	-0,6055071517E-5	-0,605506E-5	1,999543888	1,999550366
50	0,3466641969	0,346642322	-0,8196274484E-5	-0,819620E-5	1,999938258	1,999939137

Çizelge 5.4' de görüldüğü gibi analitik çözüm ile yaklaşık çözüm arasındaki hata  $10^{-6}$  dan azdır.

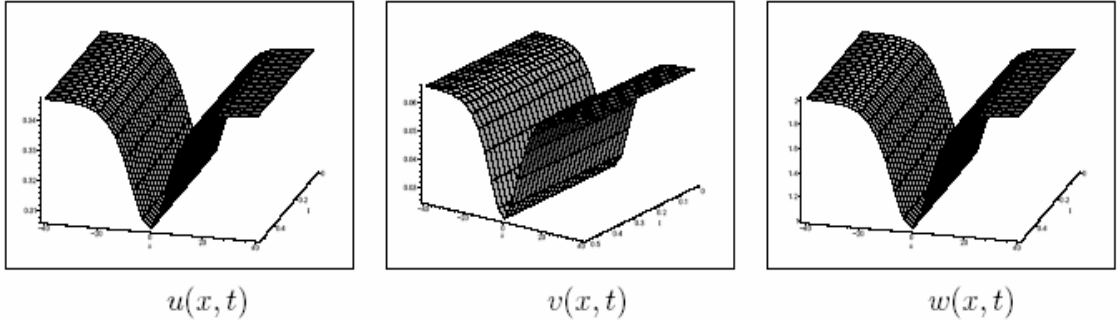
2. Durum: Eş 5.27 denklemini

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= \frac{1}{3}(\beta - 8K^2) + 4K^2 \tanh^2(Kx) \\
 v(x, 0) &= -\frac{4(3K^4c_0 - 2\beta K^2 + 4K^4c_1)}{3c_1^2} + \frac{4K^2}{c_1} \tanh^2(Kx) \\
 w(x, 0) &= c_0 + c_1 \tanh^2(Kx)
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

başlangıç şartıyla göz önüne alalım [59]. Eş 5.38 başlangıç şartıyla Eş 5.27 denklem sisteminin çözümü diferensiyel dönüşüm metodu ile çözüldüğünde Şekil 5.4' de görüldüğü gibi  $u(x, t)$ ,  $v(x, t)$  ve  $w(x, t)$  yaklaşık soliton çözüm elde edilmiştir. Çizelge 5.5' de [59]' da verilen tam çözümler ile burada elde edilen yaklaşık çözümler karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak, Eş 5. 25 denklem sisteminin diferensiyel dönüşüm metoduyla çözümündeki hata  $10^{-4}$  den küçüktür.

Çizelge 5.5. Eş 5.25 denklem sisteminin Eş 5.36 başlangıç koşuluna göre elde edilen yaklaşık çözümün  $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 1$ ,  $k = 0,1$ ,  $\beta = 1$ ,  $t = 1$  için tam çözüm ile karşılaştırılması

x	$u_{yaklaşık}$	$u_{tam}$	$v_{yaklaşık}$	$v_{tam}$	$w_{yaklaşık}$	$w_{tam}$
-50	0,3466607106	0,3466607198	0,06572737731	0,06572738652	1,999851099	1,999851330
-40	0,3466012375	0,3466011627	0,06566790424	0,06566782943	1,998364273	1,998362402
-30	0,3461857110	0,3461851777	0,06525237786	0,06525184445	1,987976113	1,987962778
-20	0,3432452281	0,3432422696	0,06231189475	0,06230893638	1,914464035	1,914390076
-10	0,3271845676	0,3271899722	0,04625123430	0,04625663889	1,512947524	1,513082639
0	0,3070666666	0,3070640150	0,02613333333	0,02613068170	1,010000000	1,009933709
10	0,3323021676	0,3322986140	0,05136883436	0,05136528069	1,640887525	1,640798684
20	0,3443349776	0,3443377450	0,06340164429	0,06340441178	1,941707773	1,941776961
30	0,3463427870	0,3463432716	0,06540945380	0,06540993837	1,991903011	1,991915126
40	0,3466227784	0,3466227462	0,06568934511	0,06568941289	1,998900294	1,998901989
50	0,3466607106	0,3466607198	0,06572737731	0,06572738652	1,999851099	1,999851330



Şekil 5.4. Eş 5.25 denklem sisteminin Eş 5.36 başlangıç şartlarında elde edilen yaklaşık çözüm grafiği

### 5.3.2. İkili mKdV diferensiyel denklem sisteminin diferensiyel dönüşüm metodu ile yaklaşık çözümleri

1. Durum: Eş 5.26 denklemini aşağıdaki başlangıç şartlarıyla göz önüne alalım [59].

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= K \tanh(Kx) \\
 v(x, 0) &= \frac{1}{2}(4K^2 + \lambda) - 2K^2 \tanh^2(Kx)
 \end{aligned}
 \tag{5.37}$$

Ek-2’de ilgili dönüşümler kullanılarak Eş 5. 26 denklem sisteminin diferensiyel dönüşümü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
(h+1)U(k, h+1) &= \frac{1}{2}(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3, h) \\
&\quad - 3 \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+1)U(r, h-s-p)U(t, s) \\
&\quad U(k-r-t+1, p) \\
&\quad + \frac{3}{2}(k+1)(k+2)V(k+2, h) \\
&\quad + 3 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k+1-r)U(r, h-s)V(k+1-r, s) \\
&\quad + 3 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k+1-r)V(r, h-s)U(k+1-r, s) \\
&\quad - 3\lambda(k+1)U(k+1, h) \\
(h+1)V(k, h+1) &= -(k+1)(k+2)(k+3)V(k+3, h) \\
&\quad - 3 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k+1-r)V(r, h-s)V(k+1-r, s) \\
&\quad - 3 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k+1-r)U(r+1, h-s)V(k+1-r, s) \\
&\quad + 3 \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+1)U(r, h-s-p)U(t, s) \\
&\quad V(k-r-t+1, p) \\
&\quad + 3\lambda(k+1)V(k+1, h)
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Eş 5.37 başlangıç şartlarından

$$\begin{aligned}
U(k, 0) &= 0, \quad k = 0, 2, 4, \dots, \quad U(3, 0) = -\frac{1}{3}k^4, \dots \\
V(k, 0) &= 0, \quad k = 1, 3, 5, \dots, \quad U(0, 0) = (2k^2 + \frac{1}{2}\lambda), \quad U(2, 0) = -2k^4, \dots
\end{aligned} \tag{5.39}$$

bulunur. Eş 5.39 değerleri Eş 5.38' de yerine yazıldığında  $U(k, h)$  ve  $V(k, h)$  sıfırdan farklı olan bazı değerleri Çizelge 5.6' de listelenmiştir.

Çizelge 5.6. Eş 5.37 başlangıç koşuluna göre hesaplanan  $U(k,h)$  ve  $V(k,h)$  dönüşüm katsayılarının bazı değerleri

$U(0,1) = -\frac{1}{2}K^2(2K^2 + 3\lambda)$	$U(2,1) = \frac{1}{2}K^4(2K^2 + 3\lambda)$
$U(4,1) = -\frac{1}{3}K^8(2K^2 + 3\lambda)$	$U(6,1) = \frac{17}{90}K^8(2K^2 + 3\lambda)$
$U(1,2) = -\frac{1}{41}K^4(2K^2 + 3\lambda)^2$	$U(3,1) = \frac{1}{3}K^6(2K^2 + 3\lambda)^2$
$U(5,2) = \frac{17}{60}K^8(2K^2 + 3\lambda)^2$	$V(1,1) = 2K^4(2K^2 + 3\lambda)$
$V(3,1) = -\frac{8}{3}K^6(2K^2 + 3\lambda)$	$V(5,1) = \frac{34}{15}K^6(2K^2 + 3\lambda)$
$V(0,2) = -\frac{1}{2}K^4(2K^2 + 3\lambda)^2$	$V(2,2) = 2K^6(2K^2 + 3\lambda)^2$
$V(4,2) = -\frac{17}{6}K^8(2K^2 + 3\lambda)^2$	$V(6,2) = \frac{124}{45}K^{10}(2K^2 + 3\lambda)^2$
$V(8,2) = -\frac{691}{315}K^{12}(2K^2 + 3\lambda)^2$	

Bulunan  $U(k,h)$  ve  $V(k,h)$  değerleri Eş 5.3' de yerine yazılırsa aşağıdaki seri çözümü elde edilir.

$$\begin{aligned}
 u(x,t) &= \left\{ K^2x - \frac{1}{3}K^4x^3 + \frac{2}{15}K^6x^5 - \frac{17}{315}K^8x^7 + \dots \right\} \\
 &+ \left\{ -\frac{1}{2}K^2(2K^2+3\lambda)t + \frac{1}{2}K^4(2K^2+3\lambda)x^2t - \frac{1}{3}K^6(2K^2+3\lambda)x^4t + \dots \right\} \\
 &+ \left\{ -\frac{1}{4}K^4(2K^2+3\lambda)^2xt^2 + \frac{1}{3}K^6(2K^2+3\lambda)^2x^3t^2 - \frac{17}{60}K^8(2K^2+3\lambda)^2x^5t^2 + \dots \right\} + \dots \\
 v(x,t) &= \left\{ (2K^2 + \frac{1}{2}\lambda) - 2K^4x^2 + \frac{4}{3}K^6x^4 - \frac{34}{45}K^8x^6 + \dots \right\} \quad (5.40) \\
 &+ \left\{ 2K^4(2K^2+3\lambda)xt - \frac{8}{3}K^6(2K^2+3\lambda)x^3t + \frac{34}{15}K^8(2K^2+3\lambda)x^5t + \dots \right\} \\
 &+ \left\{ -\frac{1}{2}K^4(2K^2+3\lambda)^2t^2 + 2K^6(2K^2+3\lambda)^2x^2t^2 - \frac{17}{6}K^8(2K^2+3\lambda)^2x^4t^2 \right. \\
 &\left. + \frac{124}{45}K^{10}(2K^2+3\lambda)^2x^6t^2 + \dots \right\} + \dots
 \end{aligned}$$

Eş 5.40' da birinci, ikinci ve üçüncü parantezlerin kapalı formu



$$\begin{aligned}
u_0(x,t) &= k \tanh(Kx) \\
v_0(x,t) &= \frac{1}{2}(4k^2 + \lambda) - 2k^2 \tanh^2(Kx) \\
u_1(x,t) &= \left[ -2 \frac{K^2 e^{2Kx} (2K^2 + 3\lambda)}{(e^{2Kx} + 1)^2} \right] t \\
v_1(x,t) &= \left[ 8 \frac{K^3 (e^{2Kx} - 1) e^{2Kx} (2K^2 + 3\lambda)}{(e^{2Kx} + 1)^3} \right] t \\
u_2(x,t) &= \left[ -\frac{K^3 (e^{2Kx} - 1) e^{2Kx} (2K^2 + 3\lambda)^2}{(e^{2Kx} + 1)^2} \right] t^2 \\
v_2(x,t) &= \left[ 4 \frac{k^4 e^{2Kx} (2K^2 + 3\lambda)^2 (e^{4Kx} - 4e^{2Kx} + 1)}{(e^{2Kx} + 1)^4} \right] t^2
\end{aligned} \tag{5.41}$$

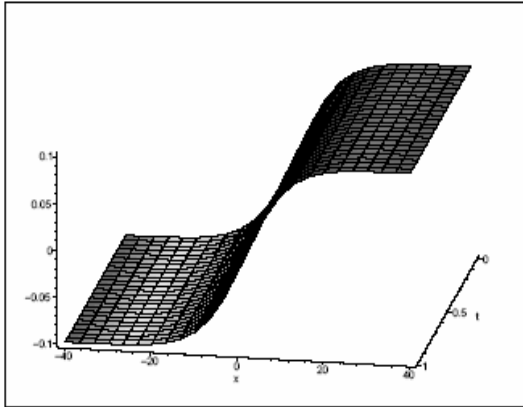
Eş 5.41 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= u_0(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t) + \dots \\
v(x,t) &= v_0(x,t) + v_1(x,t) + v_2(x,t) + \dots
\end{aligned} \tag{5.42}$$

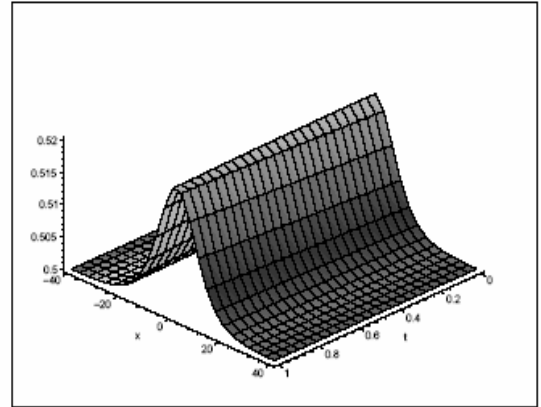
seri çözümü elde edilir. Çizelge 5.7' de tam çözüm [59] ile Eş 5.42' deki yaklaşık çözüm arasında  $K = 0,1$ ,  $\lambda = 1$  ve  $t = 0,5$  değerleri için karşılaştırma yapılmıştır. Şekil 5.5' de Eş 5.42 yaklaşık çözümün grafiği verilmiştir.

Çizelge 5.7. Eş 5.37 başlangıç koşuluyla Eş 5.26 denklem sisteminin  $k = 0,1, \lambda = 1, t = 0,5$  için tam çözüm ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması

x	$u_{yaklaşık}$	$u_{tam}$	$v_{yaklaşık}$	$v_{tam}$
-50	-0,09999218787	-0,09999219290	0,5000031248	0,5000031227
-40	-0,09994229026	-0,09999219290	0,50000031248	0,5000031227
-30	-0,09574367880	-0,0957463673	0,5001698889	0,5001697834
-20	-0,09689734770	-0,09689910298	0,5012217282	0,5012211277
-10	-0,7914789939	-0,07915243723	0,5074689741	0,074696979
0	-0,0075500000	-0,007535687005	0,5198859950	0,5198864268
10	0,07280628682	0,07280192976	0,5094008681	0,5093997580
20	0,09583052025	0,09582864870	0,5016331086	0,5016337402
30	0,09942539071	0,09942510121	0,5002291852	0,500229285
40	0,09992204193	0,09992200205	0,5000311711	0,500229285
50	0,09998944598	0,09998944056	0,5000422140	0,500042236



$u(x, t)$



$v(x, t)$

Şekil 5.5. Eş 5.37 başlangıç koşuluyla Eş 5.26 denklem sisteminin yaklaşık çözüm grafiği

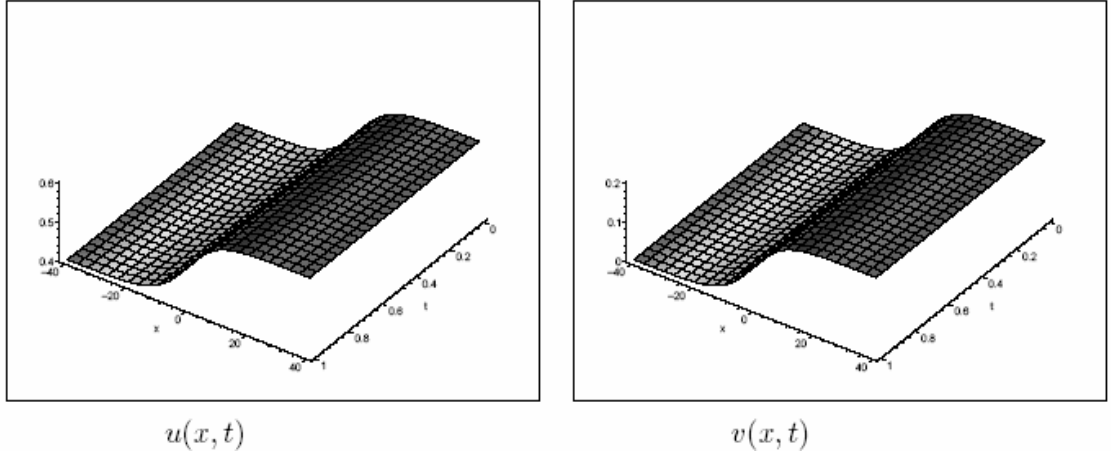
2. Durum: Eş 5.26 denklemini aşağıdaki başlangıç şartıyla göz önüne alalım [59].

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{b_1}{2k} + K \tanh(Kx) \\ v(x, 0) &= \frac{\lambda}{2} \left(1 + \frac{K}{b_1}\right) + b_1 \tanh(Kx) \end{aligned} \quad (5.43)$$

Eş 5.43 başlangıç şartıyla Durum 1' e benzer olarak diferensiyel dönüşüm metoduyla yaklaşık çözüm elde edilmiştir ve tam sonuçlarla [59] karşılaştırması Çizelge 5.8' de verilmiştir. Ayrıca, Şekil 5.6' da denklem sisteminin  $u(x,t)$  ve  $v(x,t)$  ' lerin yaklaşık çözüm grafikleri verilmiştir.

Çizelge 5.8. Eş 5.43 başlangıç koşuluyla Eş 5.25 denklem sisteminin  $K = 0,1$ ,  $\lambda = 0,1$ ,  $b_1 = 0,1$  ve  $t = 0,5$  için tam çözüm ve yaklaşık çözümün karşılaştırılması

x	$u_{yaklaşık}$	$v_{tam}$	$v_{yaklaşık}$	$v_{tam}$
-50	0,4000097764	0,4000097769	0,9776294441E-5	0,977691E-5
-40	0,4000722151	0,4000722196	0,0000722150305	0,00007221960
-30	0,4005323729	0,4005324064	0,0005323799386	0,00053240638
-20	0,4038679743	0,4038681909	0,003867974221	0,00386819089
-10	0,4254382770	0,4254387962	0,02543827692	0,02543879620
0	0,5037000000	0,5036983125	0,103700000000	0,1036983125
10	0,5776695332	0,5776700629	0,1776695332	0,1776700629
20	0,5966548419	0,5966550519	0,1966548419	0,1966550519
30	0,5995406357	0,5995406680	0,1995406357	0,1995406680
40	0,5999377080	0,5999377125	0,1999377080	0,1999377125
50	0,5999915674	0,9999915680	0,1999915674	0,1999915680



Şekil 5.6. Eş 5.43 başlangıç koşuluyla Eş 5.26 denklem sisteminin yaklaşık çözüm grafiği

## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, integrallenebilmenin bir göstergesi olarak diferensiyel denklemler için ARS algoritması ve kısmi türevli denklemler için WTC algoritması ayrıntılı olarak incelenmiştir. Ostrovsky denkleminin Painleve analizi uygulanmış ve bu denklemin integrallenebilir bir denklem olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, Ostrovsky denkleminin yardımcı eşitlik metoduyla bazı soliton çözümleri elde edilmiştir. Aşağıda Eş 6.1 ile verilen lineer olmayan evrim denkleminin  $m$  ve  $p$ ' in durumlarına göre Painleve analizi yapılmıştır.

$$u_{tt} = K(u^m u_x)_x - \beta u^p \quad (6.1)$$

İlk terim davranışının ve rezonans değerlerinin genel formülleri elde edilip,  $p$  ve  $m$ ' in farklı değerleri için Eş 6.1 denkleminin Painleve özelliğine mi yoksa şarta bağlı Painleve özelliğine sahip olup olmadığı incelenmiştir.  $p=4, m=1$  ve  $p=3, m=1$  değerleri için Eş 6.1 denkleminin şartlı Painleve özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir. Şartlı Painleve özelliğine sahip olan denklemlerin Auto-Backlund metodu, kesik seri metodu vb. metotlarla bazı özel çözümleri bulunabilir. İleride bu çözümler üzerine çalışılacaktır. Ve son olarak, KdV, mKdV denklemleri, Hirota-Satsuma İkili KdV ve İkili mKdV denklem sistemlerine diferensiyel dönüşüm metodu uygulanmış ve yaklaşık soliton çözümler elde edilmiştir. Bulunan yaklaşık çözümler tam çözümleriyle karşılaştırılarak sonuçların duyarlılığı incelenmiştir. Diferensiyel dönüşüm metodunun, hassasiyet, hesaplama kolaylığı ve kolay algoritmalanabilirliği dikkate alındığında diğer yöntemlerden (Adomian ayrışma metodu, Varyasyonel iterasyon yöntemi, Homotopi perturbasyon metodu) çok daha etkili ve hızlı sonuç ürettiği görülmüştür.

## KAYNAKLAR

- [1] Ince, E.L., "Ordinary differential equation.", *Dover Publication*, Inc, New York, 345-351 (1956).
- [2] Ablowitz, M.J., Ramani, A., Segur, H., "A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painleve type 1", *J.Math. Phys.*, 21:715-721 (1980).
- [3] Weiss, J., Tabor, M., Carnevale, G., "The Painleve property for partial differential equations", *J.Math. Phys.*, 24(3): 552-526 (1983).
- [4] Ablowitz, M., Sugar, H., "Solitons and Invers Scattering Transform", *PA:SIAM* Philadelphia, 1-40 (1981).
- [5] Weiss, J., "Backlund transformations and linearizations of the Henon-Heiles system", *Phys.Lett.*, 8:329-331 (1984).
- [6] Hirota R., "Exact solutions of the KdV equation for multiple collisions of solitons", *Phys.Rev.Lett.*, 27:1192-1194 (1971).
- [7] Hassan, M. M., "Exact solitary wave solutions for a generalized KdV-Burger equation", *Chaos, Solitons & Fractals.*, 19:1201-1206 (2004).
- [8] Sirendaoreji, "New exact travelling wave solutions to three nonlinear evolution equations", *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B.*, 19:178-186 (2004).
- [9] Tekin, R., "Soliton dalga süreçlerinin matematiksel modelleri ve nümerik çözümleri", Yüksek lisans Tezi, *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Van, 1-3 (2006).
- [10] Zabusky, N.J., Kruskal, M.D., "Interactions of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states", *Phys.Rev.Lett.*, 15: 240-243 (1965).
- [11] Gardner, C.S., Grene, J.M., Kruskal, M.D., Miura, R.M., "Korteweg-de Vries equation and generalizations methods for exact solution", *Comm. Pure. Appl. Math.*, 27:97-133 (1974).
- [12] Hirota, R., "Exact envelope-soliton solutions of a nonlinear wave", *J Math Phys.*, 14(7):805-809 (1973).
- [13] Hirota R., "Exact N-Soliton solutions of the wave equation of long waves in shallow-water and nonlinear lattices", *J Math Phys.*, 14(7):810-814 (1973).
- [14] Zabusky, N.J., Galvin, C.J., "Shallow water waves, the KdV equation and solitons", *J.Fluid, Mech.*, 47:811-824 (1971).

- [15] Hammack, J.L., Sugar, H., “The Korteweg-de Vries equation and water waves, Comparison with experiments”, *J. Fluid Mech.*, 65:289-314 (1974).
- [16] Weidmen, P.D., Maxworthy, T., “Experiments on strong interaction between solitary waves”, *J. Fluid, Mech.*, 85:417-431(1978).
- [17] İnç, M., “Ayrışım metodunun matematiksel temelleri ve bazı uygulamaları” , Doktora Tezi, *Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Elazığ, 60-65 (2002).
- [18] Brown, J.W., Churchill, R.V, “Complex variables and Applications”, *7th Ed.* , McGraw Hill , 150-151 (2003).
- [19] Yıldız, S., “Polinom sınıftan diferensiyel denklemler ve Painleve transandantalları”, Yüksek lisans Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 3-5 (1998).
- [20] Akın, Ö., “Uygulamalı Lineer Cebir”, *Palme Yayıncılık*, Ankara, 1-2 (2002).
- [21] Abatay, İ., “Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü için perturbatif Painleve analizi”, Yüksek lisans Tezi, *İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul, 3-5 (2000).
- [22] Mohammad, A.A., “Painleve Analysis and Lie symmetries of some nonlinear partial differential equations” , Doktora Tezi, *İstanbul Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul, 3-4 (1996).
- [23] Bekir, A., “ Lineer olmayan denklemlerin Painleve analizi, tam çözümleri ve simetrisi”, Doktora Tezi, *Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Eskişehir, 16-19 (2006).
- [24] Ablowitz, M.J., Ramani, A., Segur, H.,. “Nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of Painleve type”, *Lett. Nuova Cimento.* 23:333-338 (1978).
- [25] Weiss, J., “The Painleve property for partial differential equations II: Backlund Transformation, Lax pairs and Schwarzian derivative”, *J.Math. Phys.*, 24(6):1405-1414 (1983).
- [26] Weiss, J., “On classes of integrable systems and Painleve property”, *J.Math. Phys.*, 25(1): 13-24 (1984).
- [27] Weiss, J., “Backlund transformation and Painleve property”, *J.Math. Phys.*, 27(5):1293-1304 (1986).
- [28] Korteweg, D.J., De Veries, G., “On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves”, *Phil. Mag.*, 39(5): 422-443 (1895).

- [29] Yusufoglu, E., Bekir, A., “Exact solutions of coupled nonlinear evolution equations”, *Chaos, Solitons & Fractals* ; 37 (3): 842-848 (2008).
- [30] Polyanin, A.D., Zaitsev, V.F., “Handbook of nonlinear partial differential equations”, *A CRC Pres Company*, Washington, 694 (2000).
- [31] Sirendaoreji, Sun, J., “Auxiliary equation method for solving nonlinear partial differential equations”, *Phys Lett A.*; 5 (6): 387-396 (2003).
- [32]. Liu C.P., Liu X. P., “ A note on the auxiliary equation method for solving nonlinear partial differential equations ”, *Phys Lett A.*, 348:5 222-227 (2003).
- [33] Xu, G.Q., Li Z.B., “Exact travelling wave solutions of the Whitham–Broer–Kaup and Broer–Kaup–Kupershmidt equations”, *Chaos, Solitons & Fractals.*, 24(2):549-556 (2005).
- [34] Sirendaoreji., “New exact travelling wave solutions for the Kawahara and modified Kawahara equations ”, *Chaos, Solitons & Fractals.*, 19:147-150 (2004).
- [35] Sirendaoreji, “Auxiliary equation method and new solutions of Klein-Gordon equations” ,*Chaos, Solitons & Fractals.*, 31:943-950 (2007).
- [36] Jimbo, M., Kruskal, M.D., Miwa, T., “Painleve test for the self-dual Yang-Mills equation”, *Phys. Lett. A.*, 92:59-60 (1982).
- [37] Tabor, M., “Chaos and integrability in nonlinear dynamics.”, *Wiley*, New York, 1-9 (1989).
- [38] Choudhury, R.S., “Painleve analysis and Partial integrability of a class of reaction- diffusion equations”, *Nonlinear Anal.*, 18(5):445-459 (1992).
- [39] Chandrasekaran P., Ramasami, E.K., “Painleve analysis of a class of nonlinear diffusion equations”, *J. Appl. Math.Stochastic. Anal.*, 9(1):77-86 (1996).
- [40] Ramani, A., Grammaticos, B., Bountis, T., “The painleve property and singularity analysis of integrable and nonintegrable systems”, *Phys. Reports.*, 180:160-166 (1989).
- [41] G.E. Pukhov, “Differential transformations and mathematical modeling of physical processes” , *Kiev*, 1-25 (1986).
- [42] Chen, C.K., Ho, S. H., “Applicaton of differential transformation to eigenvalue problems”, *Appl. Maths. Comput.*, 79: 173-188 (1996).
- [43] Malik, M., Dang, H.H., “Vibration of continuous systems by differential transformation ”, *Appl. Maths. Comput.*, 96:17-26(1998).



- [44] Jang, M. J., Chen, C. L., Liy, Y. C., “On solving the initial value problems using the differential transformation method”, *Appl. Maths. Comput.*, 115:145-160 (2000).
- [45] Bert, C. W., “Application of differential transform method to heat conduction in tapered fins”, *Journal of Heat Transfer.*, 124: 208-209 (2002).
- [46] Ho, S. H., Chen, C. K. , “Analysis of general elastically and restrained non-uniform beams using differential transform”, *Apply .Math. Modelling.*, 22:219-234 (1998).
- [47] Lin,H.S., Chen C. K., “Aplication of taylor transformation to nonlinear predictive control problem”, *Appl. Maths. Comput.*, 199: 669-710 (1996).
- [48] Yang, M. J., Chen C. L., Liu, Y. C., “Two-dimensional differential transform for partial differential equations”, *Appl. Maths. Comput.*, 121: 261-270 (2001).
- [49] Ayaz, F., “Application of differential transform method to differential-algebraic equations” , *Appl. Maths. Comput.*, 152: 649-657 (2004).
- [50] Abdel, I. H., Hassan, H. “Differential transform tecnique for solving higer-order initial value problems”, *Appl. Maths. Comput.*, 154:299-311 (2004).
- [51] Ayaz, F. “On the two dimensional differential transform method”, *Appl. Maths. Comput.*, 143:361-374 (2003).
- [52] Ayaz, F. “Solutions of partial differential equations by using two-dimensional differential transform method”, *Appl. Maths. Comput.*, 147:547-567 (2004).
- [53] Chen, C. K., Ho, S. H., “Solving partial differential equation by two-dimensional differential transform method”, *Appl. Maths. Comput.*, 106: 171-179 (1999).
- [54] Wazwaz, A.M. , “Construction of solitary wave solutions and rational solutions for the KdV equation by Adomian decomposition method”, *Chaos, Solitons & Fractals.*, 12: 2283-2293 (2001).
- [55] Lax P.D., “Periodic solutions of the Kortweg-de Vries equation”, *Comm Pure Appl Math.*, 28:41-88 (1975).
- [56] Drazin P.G., Johnson R.S., “Solitons: and Introduction”, *Cambridge University* ,New York; 1-40 (1993).
- [57] Zhu, Y., Chang, Q., Wu S., “Exact solitary wave solutions with compact support for the modified KdV equation”, *Chaos, Solitons & Fractals.*;24: 365-369 (2005).

- [58] Wu, Y.T., Geng, X. G., Hu, Hu, X. B., Zhu, S. M., “A generalized Hirota–Satsuma coupled Korteweg–de Vries equation and Miura transformations”, *Phys Lett. A.*, 255: 259-264 (1999).
- [59] Fan, E. G., “Soliton solutions for a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation and a coupled MKdV equation”, *Phys Lett. A.*, 282:18-22 (2001).
- [60] Yu, Y., Wang, Q., Zhang, H., “The extended Jacobi elliptic function method to solve a generalized Hirota–Satsuma coupled KdV equations” , *Chaos, Solitons & Fractals.*, 26: 1415-1421 (2005).
- [61] Zayed, E.M.E., Zedan, K.A., Gepreel, K.A., “On the solitary wave solutions for the nonlinear Hirota-Satsuma coupled KdV of equations”, *Chaos, Solitons & Fractals.*, 22(2): 285-303 (2004).
- [62] He, J.H., Wu, X.H., “Construction of solitary solution and compacton-like solution by variational iteration method”, *Chaos, Solitons & Fractals.*, 29: 108-113 (2006).
- [63] Kaya, D., “Solitary wave solutions for a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation”, *Appl. Maths. Comput.*, 147:69-78 (2004).

**EKLER**

EK-1 EŞ 4.10. Denkleminin Çıkarılması için Kullanılan Maple10 Programı

$u(x, t) := u0(x, t) * F(x, t)^(alpha);$

$$u(x, t) := u0(x, t) F(x, t)^\alpha$$

$> del := sort(expand(diff(u(x, t), t, t) = D*m*u(x, t)^(m-1)*diff(u(x, t), x)^2 + D*u(x, t)^m*diff(u(x, t), x, x) - beta*u(x, t)^p));$

$$del := \frac{\alpha^2 u0(x, t) F(x, t)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} F(x, t)\right)^2}{F(x, t)^2} + \frac{\alpha u0(x, t) F(x, t)^\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} F(x, t)\right)}{F(x, t)}$$

$$- \frac{\alpha u0(x, t) F(x, t)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} F(x, t)\right)^2}{F(x, t)^2} + \frac{2 \alpha F(x, t)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} u0(x, t)\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} F(x, t)\right)}{F(x, t)}$$

$$+ F(x, t)^\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u0(x, t)\right) =$$

$$\frac{D m \alpha^2 u0(x, t)^2 (F(x, t)^\alpha)^2 (u0(x, t) F(x, t)^\alpha)^{(m-1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x, t)\right)^2}{F(x, t)^2}$$

$$+ \frac{2 D m \alpha u0(x, t) (F(x, t)^\alpha)^2 (u0(x, t) F(x, t)^\alpha)^{(m-1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} u0(x, t)\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x, t)\right)}{F(x, t)}$$

$$+ D m (F(x, t)^\alpha)^2 (u0(x, t) F(x, t)^\alpha)^{(m-1)} \left(\frac{\partial}{\partial x} u0(x, t)\right)^2$$

$$+ \frac{D \alpha^2 u0(x, t) F(x, t)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x, t)\right)^2 (u0(x, t) F(x, t)^\alpha)^m}{F(x, t)^2}$$

$$+ \frac{D \alpha u0(x, t) F(x, t)^\alpha (u0(x, t) F(x, t)^\alpha)^m \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, t)\right)}{F(x, t)}$$

$$- \frac{D \alpha u0(x, t) F(x, t)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x, t)\right)^2 (u0(x, t) F(x, t)^\alpha)^m}{F(x, t)^2}$$

$$+ \frac{2 D \alpha F(x, t)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} u0(x, t)\right) \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x, t)\right) (u0(x, t) F(x, t)^\alpha)^m}{F(x, t)}$$

$$+ D F(x, t)^\alpha (u0(x, t) F(x, t)^\alpha)^m \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u0(x, t)\right) - \beta (u0(x, t) F(x, t)^\alpha)^p$$

EK-1 (Devam) EŞ 4.10. Denkleminin Çıkarılması için Kullanılan Maple10

Programı

```
>restart:u(x,t):=u0(x,t)*F(x,t)^(alpha)+ur(x,t)*F(x,t)^(r+alpha);
```

$$u(x,t) := u_0(x,t) F(x,t)^\alpha + u_r(x,t) F(x,t)^{(r+\alpha)}$$

```
> denk := D*m*u(x,t)^(m-
```

```
1)*diff(u(x,t),x)^2+D*u(x,t)^m*diff(u(x,t),x,x)-
```

```
beta*u(x,t)^p;
```

$$\begin{aligned} denk := & D^m (u_0(x,t) F(x,t)^\alpha + u_r(x,t) F(x,t)^{(r+\alpha)})^{(m-1)} \left( \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0(x,t) \right) F(x,t)^\alpha \right. \\ & + \frac{u_0(x,t) F(x,t)^\alpha \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x,t) \right)}{F(x,t)} + \left( \frac{\partial}{\partial x} u_r(x,t) \right) F(x,t)^{(r+\alpha)} \\ & \left. + \frac{u_r(x,t) F(x,t)^{(r+\alpha)} (r+\alpha) \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x,t) \right)^2}{F(x,t)} \right) + D \\ & (u_0(x,t) F(x,t)^\alpha + u_r(x,t) F(x,t)^{(r+\alpha)})^m \left( \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x,t) \right) F(x,t)^\alpha \right. \\ & + \frac{2 \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0(x,t) \right) F(x,t)^\alpha \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x,t) \right)}{F(x,t)} + \frac{u_0(x,t) F(x,t)^\alpha \alpha^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x,t) \right)^2}{F(x,t)^2} \\ & + \frac{u_0(x,t) F(x,t)^\alpha \alpha \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x,t) \right)}{F(x,t)} - \frac{u_0(x,t) F(x,t)^\alpha \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x,t) \right)^2}{F(x,t)^2} \\ & + \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_r(x,t) \right) F(x,t)^{(r+\alpha)} + \frac{2 \left( \frac{\partial}{\partial x} u_r(x,t) \right) F(x,t)^{(r+\alpha)} (r+\alpha) \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x,t) \right)}{F(x,t)} \\ & + \frac{u_r(x,t) F(x,t)^{(r+\alpha)} (r+\alpha)^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x,t) \right)^2}{F(x,t)^2} \\ & \left. + \frac{u_r(x,t) F(x,t)^{(r+\alpha)} (r+\alpha) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x,t) \right)}{F(x,t)} \right) \end{aligned}$$

EK-1 (Devam) EŞ 4.10. Denkleminin Çıkarılması için Kullanılan Maple10

Programı

$$- \frac{\text{ur}(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)} (r + \alpha) \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right)^2}{F(x, t)^2} \\ - \beta (u0(x, t) F(x, t)^\alpha + \text{ur}(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^p$$

> de := simplify (expand (denk) , power) ;

$$\begin{aligned} de := & D m (u0(x, t) F(x, t)^\alpha + \text{ur}(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^{(m-1)} \left( \frac{\partial}{\partial x} u0(x, t) \right)^2 F(x, t)^{(2\alpha)} + 2 \\ & D m (u0(x, t) F(x, t)^\alpha + \text{ur}(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^{(m-1)} \left( \frac{\partial}{\partial x} u0(x, t) \right) F(x, t)^{(2\alpha+r-1)} \\ & \text{ur}(x, t) \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right) \alpha + D m (u0(x, t) F(x, t)^\alpha + \text{ur}(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^{(m-1)} \\ & u0(x, t)^2 F(x, t)^{(2\alpha-2)} \alpha^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right)^2 + 2 D m \\ & (u0(x, t) F(x, t)^\alpha + \text{ur}(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^{(m-1)} u0(x, t) F(x, t)^{(2\alpha-2+r)} \alpha \\ & \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right)^2 \text{ur}(x, t) r + 2 D m (u0(x, t) F(x, t)^\alpha + \text{ur}(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^{(m-1)} \\ & \left( \frac{\partial}{\partial x} \text{ur}(x, t) \right) F(x, t)^{(2r+2\alpha-1)} \text{ur}(x, t) \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right) r + 2 D m \\ & (u0(x, t) F(x, t)^\alpha + \text{ur}(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^{(m-1)} \left( \frac{\partial}{\partial x} \text{ur}(x, t) \right) F(x, t)^{(2r+2\alpha-1)} \\ & \text{ur}(x, t) \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right) \alpha + 2 D m (u0(x, t) F(x, t)^\alpha + \text{ur}(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^{(m-1)} \\ & u0(x, t) F(x, t)^{(2\alpha+r-1)} \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \text{ur}(x, t) \right) + 2 D \\ & (u0(x, t) F(x, t)^\alpha + \text{ur}(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^m \left( \frac{\partial}{\partial x} u0(x, t) \right) F(x, t)^{(\alpha-1)} \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right) \\ & + 2 D m (u0(x, t) F(x, t)^\alpha + \text{ur}(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^{(m-1)} u0(x, t) F(x, t)^{(2\alpha-2+r)} \alpha^2 \\ & \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right)^2 \text{ur}(x, t) + 2 D m (u0(x, t) F(x, t)^\alpha + \text{ur}(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^{(m-1)} \\ & \text{ur}(x, t)^2 F(x, t)^{(2r+2\alpha-2)} \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right)^2 r \alpha + D m \end{aligned}$$

EK-1 (Devam) EŞ 4.10. Denkleminin Çıkarılması için Kullanılan Maple10

Programı

$$\begin{aligned}
& (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^{(m-1)} ur(x, t)^2 F(x, t)^{(2r+2\alpha-2)} \\
& \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right)^2 r^2 + \\
& D (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^m u_0(x, t) F(x, t)^{(\alpha-2)} \alpha^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right)^2 \\
& + D m (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^{(m-1)} ur(x, t)^2 F(x, t)^{(2r+2\alpha-2)} \\
& \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right)^2 \alpha^2 \\
& - D (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^m u_0(x, t) F(x, t)^{(\alpha-2)} \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right)^2 \\
& + 2 D (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^m \left( \frac{\partial}{\partial x} ur(x, t) \right) F(x, t)^{(r+\alpha-1)} \\
& \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right) r \\
& + D (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^m \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} ur(x, t) \right) F(x, t)^{(r+\alpha)} \\
& + D (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^m \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0(x, t) \right) F(x, t)^\alpha + 2 D \\
& (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^m ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha-2)} \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right)^2 r \alpha \\
& + \\
& D (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^m ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha-2)} \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right)^2 \alpha^2 \\
& + 2 D (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^m \left( \frac{\partial}{\partial x} ur(x, t) \right) F(x, t)^{(r+\alpha-1)} \\
& \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right) \alpha + \\
& D (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^m ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha-2)} \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right)^2 r^2 \\
& -
\end{aligned}$$

EK-1 (Devam) EŞ 4.10. Denkleminin Çıkarılması için Kullanılan Maple10

Programı

$$\begin{aligned}
& D (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^m ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha-1)} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, t) \right) r \\
& + D (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^m u_0(x, t) F(x, t)^{(\alpha-1)} \alpha \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, t) \right) \\
& + \\
& D (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^m ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha-1)} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x, t) \right) \alpha \\
& + D m (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^{(m-1)} \left( \frac{\partial}{\partial x} ur(x, t) \right)^2 F(x, t)^{(2r+2\alpha)} \\
& - \\
& D (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^m ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha-2)} \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right)^2 r \\
& + 2 D m (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^{(m-1)} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0(x, t) \right) F(x, t)^{(2\alpha+r)} \\
& \left( \frac{\partial}{\partial x} ur(x, t) \right) + 2 D m (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^{(m-1)} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0(x, t) \right) \\
& F(x, t)^{(2\alpha-1)} u_0(x, t) \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right) - \beta (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^p \\
& + 2 D m (u_0(x, t) F(x, t)^\alpha + ur(x, t) F(x, t)^{(r+\alpha)})^{(m-1)} \left( \frac{\partial}{\partial x} u_0(x, t) \right) \\
& F(x, t)^{(2\alpha+r-1)} ur(x, t) \left( \frac{\partial}{\partial x} F(x, t) \right) r
\end{aligned}$$



EK-2 Bazı fonksiyonların diferensiyel dönüşüm tablosu

Başlangıç Fonksiyonu	Dönüşüm Fonksiyonu
$w(x, y) = u(x, y) \mp v(x, y)$	$W(k, h) = U(k, h) \mp V(k, h)$
$w(x, y) = \alpha u(x, y)$	$W(k, h) = \alpha U(k, h)$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$	$W(k, h) = (k+1)U(k+1, h)$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$	$W(k, h) = (h+1)U(k, h+1)$
$w(x, y) = \frac{\partial u^{r+s}(x, y)}{\partial x^r \partial y^s}$	$W(k, h) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)$ $(h+1)(h+2)\dots(h+s)U(k+r, h+s)$
$w(x, y) = u(x, y).v(x, y)$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)V(k-r, s)$
$w(x, y) = u(x, y) \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+2)(k-r+1)U(r, h-s)V(k-r+2, s)$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)(k-r+1)U(r+1, h-s)V(k-r+1, s)$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (s+1)(h-s+1)U(r, h-s+1)V(k-r, s+1)$
$w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s)V(r, h-s+1)$
$w(x, y) = u(x, y)v(x, y)w(x, y)$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} U(r, h-s-p)V(t, s)K(k-r-t, p)$
$w(x, y) = u(x, y)v(x, y) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}$	$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k-r-t+2)(k-r-t+1)U(r, h-s-p)$ $V(t, s)K(k-r-t+2, p)$

EK-3 Eş 5.27. Denkleminin Eş 5.29 Başlangıç Koşullarıyla Çözülmesinde Kullanılan Maple10 Programı

```

> restart:
> U:=proc(K,H)
local r,s,t,f,m;

U(0,0):=1/3*beta-
2/3*k^2;U(1,0):=0;U(2,0):=2*k^4;U(3,0):=0;U(4,0):=-
4/3*k^6;U(5,0):=0;U(6,0):=34/45*k^8;U(7,0):=0;U(8,0):=-
124/315*k^10;U(9,0):=0;U(11,0):=0;U(13,0):=0;U(15,0):=0;U(
(17,0):=0;U(19,0):=0;U(21,0):=0;U(23,0):=0;U(25,0):=0;U(1
0,0):=2764/14175*k^12;U(12,0):=-
43688/467775*k^14;U(14,0):=1859138/42567525*k^16;U(16,0):
=-
12809164/638512875*k^18;U(18,0):=887722324/97692469875*k^
20;U(20,0):=-
37776932168/9280784638125*k^22;U(22,0):=227854983724/1261
09485376875*k^24;U(24,0):=-
117741336913208/147926426347074375*k^26;U(26,0):=16749287
034021368/48076088562799171875*k^28;
t:=0;

V(0,0):=-
/3*k^2*c*(beta+k^2)/d^2;V(1,0):=4/3*k^3*(beta+k^2)/d;V(2,
0):=0;V(3,0):=-
4/9*k^5*(beta+k^2)/d;V(4,0):=0;V(5,0):=8/45*k^7*(beta+k^2
)/d;V(6,0):=0;V(7,0):=-
68/945*k^9*(beta+k^2)/d;V(8,0):=0;V(9,0):=248/8505*k^11*(
beta+k^2)/d;V(10,0):=0;V(12,0):=0;V(14,0):=0;V(16,0):=0;V(
(18,0):=0;V(20,0):=0;V(22,0):=0;V(24,0):=0;V(26,0):=0;V(1
1,0):=-
5528/467775*k^13*(beta+k^2)/d;V(13,0):=87376/18243225*k^1
5*(beta+k^2)/d;V(15,0):=-
3718276/1915538625*k^17*(beta+k^2)/d;V(17,0):=25618328/32
564156625*k^19*(beta+k^2)/d;V(19,0):=-
1775444648/5568470782875*k^21*(beta+k^2)/d;V(21,0):=75553
864336/584689432201875*k^23*(beta+k^2)/d;V(23,0):=-
455709967448/8701554491004375*k^25*(beta+k^2)/d;V(25,0):=
235482673826416/11094481976030578125*k^27*(beta+k^2)/d;

W(0,0):=c;W(1,0):=d*k;W(2,0):=0;W(3,0):=-
1/3*d*k^3;W(4,0):=0;W(5,0):=2/15*d*k^5;W(6,0):=0;W(7,0):=
-17/315*d*k^7;W(8,0):=0;W(9,0):=62/2835*d*k^9;W(11,0):=-
1382/155925*d*k^11;
W(10,0):=0;W(12,0):=0;W(14,0):=0;W(16,0):=0;W(18,0):=0;W(
20,0):=0;W(22,0):=0;W(24,0):=0;W(26,0):=0;W(28,0):=0;W(13

```

EK-3 (Devam) Eş 5.27. Denkleminin Eş 5.29 Başlangıç Koşullarıyla Çözülmesinde Kullanılan Maple10 Programı

```
,0):=21844/6081075*d*k^13;W(15,0):=-
929569/638512875*d*k^15;
W(17,0):=6404582/10854718875*d*k^17;W(19,0):=-
443861162/1856156927625*d*k^19;W(21,0):=18888466084/19489
6477400625*d*k^21;W(23,0):=-
113927491862/2900518163668125*d*k^23;W(25,0):=58870668456
604/3698160658676859375*d*k^25;W(27,0):=-
8374643517010684/1298054391195577640625*d*k^27;
t:=0;

for r from 0 to K do
for s from 0 to H-1 do
t:=t-3*(K-r+1)*U(r,H-1-s)*U(K-r+1,s);
end do;
end do;

f:=0;
for r from 0 to K do
for s from 0 to H-1 do
f:=f+3*(K-r+1)*W(r,H-1-s)*V(K-r+1,s);
end do;
end do;

m:=0;
for r from 0 to K do
for s from 0 to H-1 do
m:=m+3*(K-r+1)*V(r,H-1-s)*W(K-r+1,s);
end do;
end do;

> RETURN((t+f+m+1/2*(K+1)*(K+2)*(K+3)*U(K+3,H-1))/H);
> end proc;
> V:=proc(K,H)
local r,s,t;

U(0,0):=1/3*beta-
2/3*k^2;U(1,0):=0;U(2,0):=2*k^4;U(3,0):=0;U(4,0):=-
4/3*k^6;U(5,0):=0;U(6,0):=34/45*k^8;U(7,0):=0;U(8,0):=-
124/315*k^10;U(9,0):=0;U(11,0):=0;U(13,0):=0;U(15,0):=0;U
(17,0):=0;U(19,0):=0;U(21,0):=0;U(23,0):=0;U(25,0):=0;U(1
0,0):=2764/14175*k^12;U(12,0):=-
43688/467775*k^14;U(14,0):=1859138/42567525*k^16;U(16,0):
=-
```

EK-3 (Devam) Eş 5.27. Denkleminin Eş 5.29 Başlangıç Koşullarıyla Çözülmesinde  
Kullanılan Maple10 Programı

```
2809164/638512875*k^18;U(18,0):=887722324/97692469875*k^2
0;U(20,0):=-
37776932168/9280784638125*k^22;U(22,0):=227854983724/1261
09485376875*k^24;U(24,0):=-
117741336913208/147926426347074375*k^26;U(26,0):=16749287
034021368/48076088562799171875*k^28;
t:=0;
```

```
V(0,0):=-
4/3*k^2*c*(beta+k^2)/d^2;V(1,0):=4/3*k^3*(beta+k^2)/d;V(2
,0):=0;V(3,0):=-
4/9*k^5*(beta+k^2)/d;V(4,0):=0;V(5,0):=8/45*k^7*(beta+k^2
)/d;V(6,0):=0;V(7,0):=-
68/945*k^9*(beta+k^2)/d;V(8,0):=0;V(9,0):=248/8505*k^11*(
beta+k^2)/d;V(10,0):=0;V(12,0):=0;V(14,0):=0;V(16,0):=0;V
(18,0):=0;V(20,0):=0;V(22,0):=0;V(24,0):=0;V(26,0):=0;V(1
1,0):=-
5528/467775*k^13*(beta+k^2)/d;V(13,0):=87376/18243225*k^1
5*(beta+k^2)/d;V(15,0):=-
3718276/1915538625*k^17*(beta+k^2)/d;V(17,0):=25618328/32
564156625*k^19*(beta+k^2)/d;V(19,0):=-
1775444648/5568470782875*k^21*(beta+k^2)/d;V(21,0):=75553
864336/584689432201875*k^23*(beta+k^2)/d;V(23,0):=-
455709967448/8701554491004375*k^25*(beta+k^2)/d;V(25,0):=
235482673826416/11094481976030578125*k^27*(beta+k^2)/d;
```

```
for r from 0 to K do
for s from 0 to H-1 do
t:=t+3*(K-r+1)*U(r,H-1-s)*V(K-r+1,s);
end do;
end do;
```

```
> RETURN((t-(K+1)*(K+2)*(K+3)*V(K+3,H-1))/H);
```

```
> end proc;
```

```
>
```

```
> W:=proc(K,H)
```

```
local r,s,t;
```

```
t:=0;
```

```
for r from 0 to K do
```

```
for s from 0 to H-1 do
```

EK-3 (Devam) Eş 5.27. Denkleminin Eş 5.29 Başlangıç Koşullarıyla Çözülmesinde

Kullanılan Maple10 Programı

```
t:=t+3*(K-r+1)*U(r,H-1-s)*W(K-r+1,s);
end do;
end do;

> RETURN((t-(K+1)*(K+2)*(K+3)*W(K+3,H-1))/H);
> end proc;
>
> Toplam1:=proc(imax,jmax)
local j,i,x,t,toplam;
toplaml:=0;
for j from 1 to jmax do
for i from 0 to imax do
toplaml:=toplaml+U(i,j)*x^i*t^j;
end do;
end do;

> toplaml;
> end
> Toplam2:=proc(imax,jmax)
local j,i,x,t,toplam;
toplaml:=0;
for j from 1 to jmax do
for i from 0 to imax do
toplaml:=toplaml+V(i,j)*x^i*t^j;
end do;
end do;

> toplaml;
> end proc;
> Toplam3:=proc(imax,jmax)
local j,i,x,t,toplam;
toplaml:=0;
for j from 1 to jmax do
for i from 0 to imax do
toplaml:=toplaml+W(i,j)*x^i*t^j;
end do;
end do;

> toplaml;
> end proc;
>
```

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı :KANGALGİL, Figen  
 Uyuğu : T.C.  
 Doğum yeri : Ankara  
 Medeni hali : Evlip  
 Telefon : 0 (312) 2021083  
 e-mail : fkangalgil@gazi.edu.tr

### Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Yılı
Yüksek lisans	Ankara Üniversitesi/ Matematik Bölümü	1999
Lisans	Ankara Üniversitesi/ Matematik Bölümü	1995
Lise	Ankara Keçiören lisesi	1990

### İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
1997	Cumhuriyet Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
1998-1999	Ankara Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2000-2002	Cumhuriyet Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2002-	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

### Yabancı Dil

İngilizce

### Yayınlar

1. Kangalgil, F., Ayaz, F., “New exact travelling wave solutions for the Ostrovsky equation”, *Phys. Lett. A.*, 372:1831-1835 (2008).

2. Kangalgil, F., Ayaz, F., “Solitary wave solutions for the KdV and mKdV equations by the differential transform method”, *Chaos, Solitons & Fractals.*, Baskıda, (2007).
3. Kangalgil, F., Ayaz, F., “Solutions of linear and nonlinear heat equations by the differential transform method”, *SJAM.*, 8 (1):75-85 (2007).

**Hobiler**

Tiyatroya gitmek, yürüyüş yapmak, masa tenisi oynamak.