LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMİNİN YEREL OLMAYAN ÇEKİCİSİNİN VARLIĞI İÇİN ETKİN BİR METOD

GÖZDE KATİPOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EYLÜL 2009
ANKARA

Gözde KATİPOĞLU tarafından hazırlanan LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMİNİN YEREL OLMAYAN ÇEKİCİSİNİN VARLIĞI İÇİN ETKİN BİR METOD adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ ………………………………
Tez danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Meryem KAYA ……………………………….
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih: 16.09.2009

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır

Prof. Dr. Nail UNSAL ……………………………….
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Gözde KATİPOĞLU

LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMİNİN YEREL OLMAYAN ÇEKİCİSİNİN VARLIĞI İÇİN ETKİN BİR METOD

(Yüksek Lisans Tezi)

Gözde KATİPOĞLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Eylül 2009

ÖZET

Bu tezde literatür de var olan lineer olmayan dalga denklemlerinin yerel olmayan çekicisinin varlığı üzerine çalışılmıştır. Birinci bölümde ele alınan başlangıç değer problemi tanımlanmış ve bu alanda yapılmış çalışmalar belirtilmiştir. İkinci bölümde temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde problemin çözümünün varlığı ve tekliği incelenmiştir. Dördüncü bölümde bu problemin yutan kümeye sahip olduğu ispatlanmış [7] ve son bölümde bu problem için yerel olmayan çekicilerin varlığı [10] ve [13] referanslarında verilen method ile gösterilmiştir. Çalışma literatür de bilinen sonuçlar araştırılarak oluşturulmuştur.

Bilim Kodu :204.1.138
Anahtar Kelimeler:Galerkin yöntemi, Yerel olmayan çekici, Yutan küme
Sayfa Adedi : 39
Tez yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ

AN EFFECTİVE METHOD FOR THE EXİSTENCE OF THE GLOBAL ATTRACTOR OF A NONLİNEAR WAVE EQUATİON

(M.Sc. Thesis)

GÖZDE KATİPOĞLU

GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
September 2009

ABSTRACT

This thesis is studied the existence of the global attractor of the nonlinear wave equation which is existenced in the litterateur In this first chapter, the initial value problem is defined and some of the works on this subject are determined. In the second basic terms are given. In the third, existence and uniqueness of the solution of the problem are shown. In the fourth it is proved that the problem has an absorbing set [7] and in the last chapter existence of the global attractor of the problem is shown with method which is given [10] and [13] references. The work is created to search common results in the litterateur.

Science Code **:204.1.138**
Key Words **: Galerkin method, Global attractor, Absorbing set**
Page Number **: 39**
Adviser **: Assist.Prof.Dr.Ülkü DİNLEMEZ**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla bu tezi oluşturmamda yardımcı olan ve beni yönlendiren değerli hocam, Sayın Yrd. Doç.Dr. Ülkü DİNLEMEZ'e ve çalışmalarım sırasında desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1 GİRİŞ

Bu tezin esas amacı,

$u_{tt} + \alpha u_t - \Delta u + g(u) = f \qquad \Omega \times \mathbb{R}$ ' de (1.1)

$u = 0 \qquad \partial\Omega \times \mathbb{R}$ 'de (1.2)

$u(x,0) = u_0(x) \in H_0^1(\Omega)$ (1.3)

$u_t(x,0) = p_0(x) \in L^2(\Omega)$ (1.4)

denkleminin yerel olmayan çekicilerinin varlığını incelemektir. Burada $\alpha > 0$ ve $f = f(x) \in L^2(\Omega)$, Ω $\mathbb{R}^n$ nin bir açık alt kümesidir. g lineer olmayan fonksiyonu da $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı olsun. G fonksiyonu $G(s) = \int_0^s g(r)dr$ olsun. g ve G üzerinde aşağıdaki kabulleri yapalım:

$$\liminf_{|s|\to\infty} \frac{G(s)}{s^2} \geq 0 \tag{1.5}$$

$$\liminf_{|s|\to\infty} \frac{sg(s) - c_1 G(s)}{s^2} \geq 0 \tag{1.6}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir c_1 sabiti vardır. Burada γ sabiti

$$\begin{cases} 0 \leq \gamma < \infty, & n = 1,2 \text{ ise,} \\ 0 \leq \gamma < 2, & n = 3 \text{ ise,} \\ \gamma = 0, & n \geq 4 \text{ ise,} \end{cases}$$

olmak üzere g fonksiyonunun $\kappa > 0$ için

$$|g'(s)| \leq \kappa(1 + |s|^{\gamma}) \tag{1.7}$$

büyüme şartını sağladığını kabul edelim.

Ayrıca g, $H_0^1(\Omega)$ dan $L^2(\Omega)$ ye sınırlı operatördür ve Eş.1.5 ve Eş.1.6 dan aşağıdaki şartlar $\forall \eta > 0$ ve $\forall s \in \mathbb{R}$ için

$$G(s) + \eta s^2 \geq -C_\eta \tag{1.8}$$

$$sg(s) - c_1 G(s) + \eta s^2 \geq -C'_\eta \tag{1.9}$$

C_η, C'_η sabitleri var olduğu çıkarılabilir.

Genel dalga denklemi

$$u_{tt} + \alpha u_t + Au + f(u) = h$$

formunda olup $A = -\Delta$ alınarak otonom lineer olmayan dalga denklemi

$$u_{tt} + \alpha u_t - \Delta u + f(u) = h\,.$$

pek çok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Lineerliği bozan kısım üzerindeki şartlar direkt olarak f skaler fonksiyonu ve onun üzerindeki anti-türevlerinden faydalanmıştır. Sönümlü lineer olmayan dalga denklemleri için yerel olmayan çekicinin varlığı teorisi ilk önce Ghidaglia ve Temam [4] ve Ladyzhenskaya [8] tarafından kurulmuştur. Babin ve Vishik [2] çalışmalarında lineer olmayan dalga denklemleri için yerel olmayan çekicinin varlığını çalışmışlardır.

Ma, Wang ve Zhong [10] makalelerinde yerel olmayan çekicinin varlığını ispat etmek için C şartını ifade etmişlerdir. Böylece fonksiyon uzayları üzerinde daha fazla düzgünlük aramaya gerek kalmadan yerel olmayan çekicinin varlığı ispat edilmiştir.

Bazı araştırmacılar makalelerinde yutan kümenin varlığı üzerine sonuçlar vermişlerdir. Bunlardan biriside Kurt tarafından [7] makalesinde, bir boyutlu uzayda damping terimli lineer olmayan dalga denkleminin varlığı ve tekliğini kabul edip yutan kümesini enerji methodu kullanarak elde etmiştir.

Bir diğer çalışmada ise Abdallah tarafından [1] makalesinde ele almış olduğu sığ sulardaki dalga denklemleri için yutan kümenin varlığını göstermiştir.

Bu çalışma ise literatür de araştırılıp çalışılarak oluşturulmuştur. Dalga denkleminin varlığı ve tekliği araştırılmıştır. Bu denklemin yutan kümesinin nasıl oluşturulduğu bulunmuştur. En son olarak (C) şartı kullanılarak Eş 1.1- Eş. 1.4 verilen denklemin yerel olmayan çekicisinin varlığı üzerinde çalışılmıştır.

2 ÖNBİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Bazı Fonksiyon Uzayları

2.1.1 Tanım

Bir $\left(V,\|.\|\right)$ bir normlu uzayı içinde alınan her Cauchy dizisi norma göre yakınsak ise bu normlu uzaya bir Banach uzayı denir.

2.1.2 Tanım

k doğal sayı olmak üzere k ıncı mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonların uzayı $C^k(\Omega)$ ile gösterilir. Yani,

$C^k(\Omega):\ \{u \quad \Omega \to \Re :\ \text{k'yıncı mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyon}\}$ dır

2.1.3 Tanım

$p \geq 1$ gerçel sayı olmak üzere $\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$\int_{R^n} |u(x)|^p \, dx < \infty , \quad x \in R^n$$

koşulunu sağlayan, ölçülebilir u fonksiyonlarının sınıfına, $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı denir. Bu uzay üzerindeki normu da

$$\|u\|_p = \|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = (\int_{R^n} |u(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.4 Tanım

X bir Banach uzayı $1 \leq p < \infty$ *ve* $-\infty \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere (a,b)' den X uzayına tanımlanmış, ölçülebilen fonksiyonların uzayı $L^p(a,b\,;X)$ ile gösterilir. Bu uzay

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^{\ p}\, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile Banach uzayıdır

2.1.5 Tanım

m > 0 tamsayı, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere kendisi ve m. mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L_p(\mathbb{R}^n)$ sınıfına ait olan fonksiyonlar uzayına $W^{m,p}(R^n)$ Sobolev Uzayı denir. Yani

$$W^{m,p}(R^n) = \left\{ u \in L_p(R^n) \mid D^\alpha u \in L_p(R^n),\ \forall |\alpha| \leq m \right\}$$

seklindedir. Bu uzay üzerindeki norm ise $\|u\|_{m,p,R^n} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L_p(R^n)}$ şeklinde tanımlanır.

2.1.6 Tanım

X üzerindeki sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına X 'in dual uzayı denir ve X^* seklinde gösterilir. $H_0^1(\Omega)$ Sobolev uzayının duali $H^{-1}(\Omega)$ ile gösterilir.

2.2 Temel Tanımlar

2.2.1 Tanım

X in tüm sınırlı $B \subset X$ kümelerini çeken, boştan farklı en küçük kapalı ve sınırlı kümeye $V_t : X \to X$, $t \in R^+$ yarıgrubunun yerel olmayan çekicisi denir.

2.2.2 Tanım

V Banach Uzayı $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, V üzerinde tanımlı operatörler ailesi olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlasın,

I. $S(0) = I$
II. $S(t+s) = S(t)\cdot S(s) \quad \forall\ t,s \in \mathbb{R}_+$
III. $S(t)x_0$, x_0 ve t ye göre süreklidir.

Bu durumda $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ ailesine sürekli yarıgrup denir.

2.2.3 Tanım

X tam metrik uzay olmak üzere B, X in tüm sınırlı kümelerinin ailesini göstersin. $t \in \mathbb{R}_+$ için $V_t : X \to X$, bir yarı grup olmak üzere $\forall\ \varepsilon > 0$ için

$$V_t(\mathrm{B}) \subset O_\varepsilon(\mathrm{B}_0), \quad \forall\ t \geq t_1(\varepsilon, \mathrm{B})$$

olacak şekilde $\exists\ t_1(\varepsilon,\mathrm{B}) \in \mathbb{R}$ bulunabiliyorsa $\mathrm{B}_0 \subset X$, kümesine B kümesini çeker denir. Burada $O_\varepsilon(\mathrm{B}_0)$, tüm ε yarıçaplı, B_0'ın noktaları merkezli yuvarların birleşimidir.

2.2.4 Tanım

$V_t : X \to X$, $t \in \mathbb{R}_+$ bir yarı grup olmak üzere $\forall\, \mathrm{B}_1 \subset \mathrm{B}$, $\forall\, t \geq t_1(\mathrm{B}_1)$ için $V_t(\mathrm{B}_1) \subset \mathrm{B}_0$ olacak şekilde $\exists\ t_1(\mathrm{B}_1) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa $\mathrm{B}_0 \subset X$ kümesine yutan küme denir.

2.2.5 Tanım (C) Şartı

E bir Banach uzayı ve E_1, E nin bir alt uzayı olsun. E herhangi bir sınırlı alt kümesi B ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $\{\|PS(t)B\|\}$ sınırlı ve $\forall y \in B$, $\forall t \geq t_*$ için $\|(I-P)S(t)y\| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $t_* > 0$ varsa C şartı sağlanır denir. Burada $P : E \to E_1$ izdüşüm fonksiyondur.

2.2.6 Tanım

$\left(X, \|.\|\right)$ uzayın da bir $\left(x_n\right)$ dizisi verilmiş olsun. Eğer $\forall f \in X'$ için

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = f\left(x_0\right)$$

olacak biçimde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa $\left(x_n\right)$ dizisi $\left(x_0\right)$ a zayıf yakınsar denir. Burada X', X in dualidir.

2.2.7 Tanım

U ve V normlu uzaylar ve $A : U \to V$ bir lineer operatör olsun. Eğer, her $u \in U$ için, $\|Au\|_V \leq K \|u\|_U$ olacak şekilde bir $\mathrm{K} > 0$ sayısı varsa A operatörü sınırlıdır denir.

2.3 Bazı kullanılan Teoremler ve Lemmalar

2.3.1 Teorem

$\Omega \subset R^n$ düzgün, sınırlı bir bölge olsun.

$\frac{l_2}{n} - \frac{1}{p_2} \leq \frac{l_1}{n} - \frac{1}{p_1}$ olduğunu kabul edelim. O zaman $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, $l_1,\ l_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$W^{l_1, p_1}(\Omega) \subset W^{l_2, p_2}(\Omega)$$

sürekli gömülmesi mevcuttur [3].

2.3.2 Teorem

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de C^1 sınıfından sınırlı, açık bir küme olsun. Bu durumda aşağıdaki gömülmeler kompakttır.

i. $p < n$ ise $W^{1,p}(\Omega) \to L_q(\Omega),\ 1 \leq q < p^*$

ii. $p = n$ ise $W^{1,n}(\Omega) \to L_q(\Omega),\ 1 \leq q < \infty$

iii. $p > n$ ise $W^{1,p}(\Omega) \to C(\overline{\Omega})$

[5].

2.3.3 Teorem

E bir konveks Banach uzay ve $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, E den E e sürekli bir yarı grup operatörü olsun. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarı grubu E de bir yutan kümeye sahip olsun ve (C) Şartını sağlasın. Bu durumda E de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ yarı grubu için bir yerel olmayan çekicisi vardır.[10]

2.3.4 Teorem (Banach-Alaoğlu)

E ayrılabilir, lineer normlu uzay $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E^*$ olsun. Eğer $\forall n$ için $\|f_n\| \le M$ ise öyle $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ ve $f_0 \in E^*$ vardır ki $f_{n_k} \xrightarrow{w^*} f_0$ olur. Bu teoreme zayıf kompaktlık teoremi de denir [6].

2.3.5 Teorem(Peano-Varlık)

$g(t,u)$ fonksiyonu $t_0 \le t \le t_0 + a$, $|u| < \infty$ bölgesinde sürekli ve sınırlı olsun. Bu durumda

$$u' = g(t,u)$$
$$u(t_0) = u_0$$

başlangıç değer problemi, $[t_0, t_0 + a]$ aralık üzerinde tanımlı en az bir $u(t)$ çözümü vardır [16].

2.4 Kullanılan Eşitsizlikler

2.4.1 Young Eşitsizliği

$1 < p$, $q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0)$$

veya

$$ab \le \varepsilon\, a^p + C(\varepsilon) b^q \quad (\varepsilon > 0)$$

olur.

2.4.2 Hölder Eşitsizliği

$1 \leq p\,,\ q \leq \infty\,,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $u \in L_p(\Omega)\,,\ v \in L_q(\Omega)$ ise

$$\int_{\Omega} |uv|\,dx \leq \|u\|_{L_p(\Omega)} \|v\|_{L_q(\Omega)}$$

olur.

2.4.3 İnterpolasyon Eşitsizliği

$u \in L^r(\Omega)$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $p \leq q \leq r$ ve $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{(1-\lambda)}{r}$ ise

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \|u\|^{\lambda}_{L^p(\Omega)} \cdot \|u\|^{1-\lambda}_{L^r(\Omega)}$$

eşitsizliği vardır.

2.4.4 Cauchy – Schwarz Esitsizligi

H Hilbert Uzayı olsun Üzerindeki iç çarpım ve norm sırasıyla $(.,.)$ ve $\|u\| = (u,u)^{1/2}$ olsun. Bu durumda $\forall u, v \in H$ için

$$|(u,v)| \leq \|u\| \, \|v\|$$

eşitsizliği sağlanır. .

2.4.5 Poincaré Eşitsizliği

$\forall u \in H_0^1(\Omega)$ için $|u| \leq C|Du|$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir C sabiti vardır. Burada Ω sınırlı bir küme olmak üzere $Du = \left(D_1 u, \cdots, D_m u\right)$ kısmi türevleri göstermek üzere $|Du|^2 = |\nabla u|^2 = \sum_{j=1}^{m} |D_j u|^2$ dir.

2.4.6 Gronwall Lemması

$\eta(.)$, $[0,T]$ aralığında sürekli, negatif olmayan bir fonksiyon, $\phi(t)$ ve $\psi(t)$, $[0,T]$ aralığında integrallenebilen, negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

eşitsizliği geçerli ise, her $0 \leq t \leq T$ için

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\, ds \right]$$

olur .

Bu bölümde verilen eşitsizlikler, bazı temel tanımlar ve notasyonların detayları için [11,14,15,16] kaynaklarına bakılabilir.

3. VARLIK VE TEKLİK

Bu bölümde Eş.1.1-Eş.1.4 probleminin çözümleri için varlık ve tekliğini Faedo-Galerkin Yöntemi kullanılarak ispatlayacağız.. Bu yöntem üç basamaktan oluşturulmuştur. İlk olarak çözüme $H_0^1(\Omega)$ uzayının bir sonlu bazı yardımıyla oluşturulan alt uzayı, sonra bu yaklaşım ile çözüm için enerji kestirimi elde edeceğiz. Son olarak Eş.1.1-Eş.1.4 probleminin zayıf çözümüne yakınsayan yaklaşık çözümlerin bir alt dizisini seçeceğiz.

3.1 Çözümlerin Varlığı ve Tekliği

İlk önce aşağıdaki formda Eş.1.1 -Eş.1.4 probleminin zayıf çözümlerini tanımlayalım

3.1.1 Tanım

$u_{tt} \in L^2\left(\left[0,T\right], H^{-1}(\Omega)\right)$ ile $u \in L^2\left(\left[0,T\right], H_0^1(\Omega)\right)$ fonksiyonu eğer $\forall v \in H_0^1(\Omega)$ ve hemen hemen $\forall t \in (0,T)$ için

$$\left(u_m'', v\right) + \alpha\left(u_m', v\right) + \left(\nabla u_m, \nabla v\right) + \left(g(u), v\right) = \left(f, v\right) \tag{3.1}$$

ve

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x) \\ u_t(x,0) &= p_0(x) \end{aligned} \qquad x \in \Omega \tag{3.2}$$

başlangıç şartlarını sağlar ise, u ya Eş.1.1-Eş.1.4 probleminin zayıf çözümü denir. Burada $\langle .,. \rangle$ iç çarpımını $H_0^1(\Omega)$ ile $H^{-1}(\Omega)$ uzayları arasında tanımlanan dualite çiftlemesi olarak alınmaktadır. Şimdi Eş.1.1-Eş.1.4 probleminin çözümlerinin varlığını ispatlayalım

3.1.2 Teorem

$\alpha > \frac{1}{2}$ ve $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ ve $p_0 \in L^2(\Omega)$ olsun. Bu durumda Eş.1.1-Eş.1.4 problemi $u_{tt} \in L^2\left(\left[0,T\right], H^{-1}(\Omega)\right)$ ile $u \in L^2\left(\left[0,T\right], H_0^1(\Omega)\right)$ olacak şekilde zayıf çözüme sahiptir. Ayrıca $u \in C\left(\left[0,T\right], L^2(\Omega)\right)$ ve $u' \in C\left(\left[0,T\right], H^{-1}(\Omega)\right)$ dır

İspat

Bu teoremin ispatını Faedo-Galerkin Yöntemiyle yapılacaktır. $-\Delta$, pozitif ve self adjoint bir operatör olmak üzere $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k \leq ...$ sağlayan $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ özdeğerlerin bir dizisine ve bu özdeğerlere karşılık gelen $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ özfonksiyonların dizisine sahiptir. Bu $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ özfonksiyonlar $H = L^2(\Omega)$ nın bir ortonormal bazıdır. Burada Ω, $\mathbb{R}^n$ de düzgün sınırlı, açık sınırlı bir kümedir.

1.Adım (Yaklaşık çözümlerinin oluşturulması)

$H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ uzayın da lineer bağımsız $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ olmak üzere, m belirli bir sabit pozitif tam sayı olsun Eş.1.1-Eş.1.4 probleminin yaklaşık çözümü

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} d_k^m(t) w_k(x) \tag{3.3}$$

formunda arayalım. Burada $w_1, w_2, \cdots, w_m$ ler $L^2(\Omega)$ da lineer bağımsız ortogonal bazlardır.

$$\left(u_m''(t), w_k\right) + \alpha\left(u_m'(t), w_k\right) + \left(\nabla u_m(t), \nabla w_k\right) + \left(g(u_m), w_k\right) = \left(f, w_k\right) \tag{3.4}$$

$$u_m(0)=u_{0_m} \qquad k=1,2,\cdots,m \tag{3.5}$$
$$u_m{}'(0)=p_{o_m}$$

$0\le t\le T$ için olduğu görülür. Burada u_{0_m} $H_0^1(\Omega)$ de ve ρ_{0_m} $L^2(\Omega)$ da sırasıyla $\{w_k\}_{k=1}^m$ ile $\left\{\lambda_k^{-1/2}w_k\right\}_{k=1}^m$ gerilen m boyutlu uzay üzerinde sırasıyla u_0 ile p_0 ın ortogonal iz düşümüdür. $m\to\infty$ iken $H_0^1(\Omega)$ de $u_{0_m}\to u_0$, $L^2(\Omega)$ da $p_{0_m}\to p_0$ olduklarını kabul edeceğiz.

$$\left(u_m(t),w_k\right)=d_k^m(t) \text{ ve } \left(u_m'(t),w_k\right)=d_k^{m\prime}(t) \text{ ve } \left(u_m''(t),w_k\right)=d_k^{m\prime\prime}(t) \tag{3.6}$$

olsun. Burada $d_k^{m\prime}(t)=\dfrac{d\left(d_k^m\right)}{dt}$, $\left(u_m(t),w_k\right)=\int\limits_{\Omega}u_m(x,t)w_k(x)dx$ dir. Böylece Eş. 3.4 ve Eş.3.5 denklemleri aşağıda lineer olmayan 1.mertebeden adi diferansiyel denklemlere $d_1^m,d_2^m,...,d_m^m$ için eşittir. Eş. 3.6, Eş. 3.4 de yerine yazılırsa

$$\lambda_k^2 d_k^{m\prime\prime}+\alpha d_k^{m\prime}+\lambda_k^2 d_k^{m\prime}+\left(g\left(\sum_{k=1}^m d_k^m(t)w_k(x)\right),w_k\right)=\left\langle f(x),w_k\right\rangle=a_k$$

Sonuç olarak Eş. 3.4 denklemi

$$\begin{aligned} d_k^m(0)&=\left(u_0,w_k\right)\\ d_k^{m\prime}(0)&=\left(p_0,w_k\right)\end{aligned} \tag{3.7}$$

başlangıç şartlarıyla birlikte

$$d_k^{m\prime\prime}+\frac{\alpha}{\lambda_k^2}d_k^{m\prime}+d_k^{m\prime}+\frac{1}{\lambda_k^2}\left(g\left(\sum_{k=1}^m d_k^m(t)w_k(x)\right),w_k\right)=\frac{a_k}{\lambda_k^2} \qquad \begin{array}{l}0\le t<T\\ \text{k=1,2,...,m}\end{array} \tag{3.8}$$

dönüşür. Peano-Varlık Teoremine göre Eş. 3.6 denklemini sağlayan bir tek $d_m(t)=\left(d_m^1,d_m^2,...,d_m^m\right)$ fonksiyonu $0\le t<T$ için vardır. Böylece Eş.3.3 ile tanımlı $u_m(x,t)$ olarak Eş. 3.4 ile Eş. 3.5 çözümleridir.

2. Adım (Enerji kestirimi)

Eş. 3.4 denklemini $d_k^{m\prime}$ ile iç çarpım yapıp sonucu $k=1,\cdots,m$ kadar toplarsak

$$\left(u_m'',u_m'\right)+\alpha\left(u_m',u_m'\right)+\left(\nabla u_m,\nabla u_m'\right)+\left(g(u_m),u_m'\right)=\left(f,u_m'\right) \tag{3.9}$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler sonucu

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'\|^2+\alpha\|u_m'\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|^2+\int_\Omega g(u_m)u_m'dx=\left(f,u_m'\right) \tag{3.10}$$

elde edilir. Bu eşitlikte

$$\left(g(u_m),u_m'\right)=\int g(u_m)u_m'dt=\frac{d}{dt}G(u_m) \tag{3.11}$$

eşitliği kullanılarak

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|u_m'\right\|^2+\|\nabla u_m\|^2+2\left(G(u_m),1\right)\right)+\alpha\left\|u_m'\right\|^2\le\frac{\|f\|^2}{2}+\frac{\|u_m'\|^2}{2} \tag{3.12}$$

eşitsizliği elde edilir. Eş. 3.4 denklemini d_k^m ile iç çarpım yapıp sonucu $k=1,\cdots,m$ kadar toplarsak

$$\left(u_m'',u_m\right)+\alpha\left(u_m',u_m\right)+\left(\nabla u_m,\nabla u_m\right)+\left(g(u_m),u_m\right)=\left(f,u_m\right) \tag{3.13}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\alpha\left\|u_m\right\|^2+2\left(u_m',u_m\right)\right)+\left\|\nabla u_m\right\|^2+\int_\Omega g(u_m)u_m dx=\left(f,u_m\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitlikte Eş. 1.9 eşitsizliğini kullanırsak,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\alpha\left\|u_m\right\|^2+2\left(u_m',u_m\right)\right\}+\left\|\nabla u_m\right\|^2+c_1\int_\Omega G(u_m)dx-\eta\left\|u_m\right\|^2\le\frac{\left\|f\right\|^2}{2}+\frac{\left\|u_m\right\|^2}{2} \tag{3.14}$$

elde edilir. Eş. 3.12 ve Eş. 3.14 taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\alpha\left\|u_m\right\|^2+2\left(u_m',u_m\right)+\left\|u_m'\right\|^2+\left\|\nabla u_m\right\|^2+2\left(G(u_m),1\right)\right\}+\left\|\nabla u_m\right\|^2+\alpha\left\|u_m'\right\|^2\\&+c_1\left(G(u_m),1\right)-\eta\left\|u_m\right\|^2\le\left\|f\right\|^2+\frac{\left\|u_m\right\|^2}{2}+\frac{\left\|u_m'\right\|^2}{2}\end{aligned} \tag{3.15}$$

eşitsizliği elde edilir. $f\in L^2(\Omega)$ olduğundan $\left\|f\right\|^2\le K$ olacak şekilde bir K>0 vardır. Eş. 3.15 in her iki tarafı 2 ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\alpha\left\|u_m\right\|+2\left(u_m',u_m\right)+\left\|u_m'\right\|^2+\left\|\nabla u_m\right\|^2+2\left(G(u_m),1\right)\right\}+2\left\|\nabla u_m\right\|^2+(2\alpha-1)\left\|u_m'\right\|^2+\\&(\lambda_1-\eta-1)\left\|u_m\right\|^2+2c_1\left(G(u_m),1\right)\le2\left\|f\right\|^2=M\end{aligned} \tag{3.16}$$

bulunur. Eş. 3.16 0 dan T_0 a integrali alınırsa

$$\begin{aligned}&\alpha\left\|u_m(T_0)\right\|^2+2\left(u_m'(T_0),u_m(T_0)\right)+\left\|u_m{}'(T_0)\right\|^2+\left\|\nabla u_m(T_0)\right\|^2+2c_1\left(G(u_m(T_0)),1\right)\\&+\int_0^{T_0}\left(\left\|\nabla u_m\right\|^2+(\lambda_1-\eta-1)\left\|u_m\right\|^2\right)dx+\int_0^{T_0}\left\{(2\alpha-1)\left\|u_m{}'\right\|^2+2c_1\left(G(u_m),1\right)\right\}dx\\&\le M+\alpha\left\|u_m(0)\right\|^2+2\left(u_m'(0),u_m(0)\right)+\left\|u_m{}'(0)\right\|^2+\left\|\nabla u_m(0)\right\|^2+2\left(G(u_m),1\right)\end{aligned} \tag{3.17}$$

elde edilir. u_{0m} $H_0^1(\Omega)$ da u_0 ın ortogonal izdüşümü olduğundan $\|\nabla u_m(0)\| \le \|\nabla u_0\|$ ve $\|u_m(0)\| \le \|u_0\|$ eşitsizlikleri vardır ve G sınırlı bir operatör olduğundan $N = \alpha\|u_0\|^2 + 2(u_0', u_0) + \|u_0'\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + 2(G(u_0),1)$ alırsak ve Gronwall Lemmasını kullanırsak o zaman Eş. 3.17 eşitsizliğinden

$$\int_0^{T_0}\left(\|\nabla u_m\|^2 + (\lambda_1 - \eta - 1)\|u_m\|^2 + (2\alpha - 1)\|u_m'\|^2\right)dx \le MT_0 + N \qquad (3.18)$$

elde edilir. Buradan da $\forall T_0 \in [0,T]$ için $u_m \in L^2([0,T], H_0^1(\Omega))$ ve $u_m' \in L^2([0,T], L^2(\Omega))$ olduklarını görürüz. Şimdi $v = v^1 + v^2$ olmak üzere $v^1 \in span\{w_k\}_{k=1}^m$ ve $(v^2, w_k) = 0$, $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \le 1$ olarak tanımlayalım.

$$u_m'' + \alpha u_m' - \Delta u_m + g(u_m) = f \qquad (3.19)$$

denklemini v ile iç çarpım yaparsak ve verilen özellikler kullanılarak

$$(u_m'', v^1) + \alpha(u_m', v^1) + (\nabla u_m, \nabla v^1) + (g(u_m), v^1) = (f, v^1) \qquad (3.20)$$

elde edilir. Eş. 3.20 nin sol tarafındaki ilk iç çarpım bırakılıp diğer ifadeler eşitliğin sağ tarafına atılırsa, her iki tarafın mutlak değerini alıp sağ tarafa üçgen eşitsizliği kullanırsa, bu durumda

$$\begin{aligned}\left|\langle u_m'', v^1\rangle\right| &\le \alpha\left|(u_m', v^1)\right| + \left|(\nabla u_m, \nabla v^1)\right| + \left|(g(u_m), v^1)\right| + \left|(f, v^1)\right| \\ &\le \alpha\left|u_m'\right| + |\nabla u_m| + |g(u_m)| + |f|\end{aligned} \qquad (3.21)$$

elde edilir. Her iki tarafın supremumu alınarak

$$\left\| u_m'' \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq C\left\{ \left| u_m' \right|^2 + \left| \nabla u_m \right|^2 + \left| g(u_m) \right|^2 + \left| f \right|^2 \right\} \tag{3.22}$$

bulunur. Bu ifade 0 dan T_0 integrali alınırsa $\forall T_0 \in [0,T]$ için

$$\int_0^T \left\| u_m'' \right\|^2 dx \leq M_5 T_0 \tag{3.23}$$

elde edilir. Buradan da $u_m'' \in L^2\left([0,T], H^{-1}(\Omega)\right)$ bulunmuş olur.

3. Adım (Limite geçiş)

Eş. 1.1 –Eş. 1.4 probleminin zayıf çözümünün varlığını göstereceğiz. Bundan önceki adımlarda elde edilen sonuçlara göre $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ da, $\left\{u_m'\right\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ da ve $\left\{u_m''\right\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi de $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ da sınırlıdır. Sonuç olarak $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisinin $\left\{u_{m_i}\right\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır ve

$$\begin{aligned} &u_m \to u \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ &u_m' \to u' \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ &u_m'' \to u'' \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \end{aligned} \tag{3,24}$$

Belirli bir N pozitif tamsayısı alalım ve bir v fonksiyonu $v \in C^1\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right)$

$$v(t) = \sum_{k=1}^{m} d_k(t) w_k \tag{3.25}$$

seçelim. Buradaki $d_k(t)$ ler yeterince düzgün fonksiyonlardır.

$$\left(u_m''(t), w_k\right) + \alpha\left(u_m'(t), w_k\right) + \left(\nabla u_m, \nabla w_k\right) + \left(g(u_m), w_k\right) = \left(f, w_k\right)$$

eşitliği yeterince büyük $m \geq N$ için $d_k(t)$ ile iç çarpım yapılıp $k = 1, \cdots, n$ kadar toplam alınırsa

$$\left(u_m'', v\right) + \alpha\left(u_m', v\right) + \left(\nabla u_m, \nabla v\right) + \left(g(u_m), v\right) = \left(f, v\right) \tag{3.26}$$

elde edilmiş olur. Elde edilen bu eşitliği 0 dan T ye integrali alınırsa

$$\int_0^T \left(u_m'', v\right)dt + \alpha\int_0^T \left(u_m', v\right)dt + \int_0^T \left(\nabla u_m, \nabla v\right)dt + \int_0^T \left(g(u_m), v\right)dt = \int_0^T \left(f, v\right)dt \tag{3.27}$$

bulunur. Son olarak Eş. 3.27 denklemi $m \to \infty$ için

$$\int_0^T \left(u'', v\right)dt + \alpha\int_0^T \left(u', v\right)dt + \int_0^T \left(\nabla u_m, \nabla v\right)dt + \int_0^T \left(g(u), v\right)dt = \int_0^T \left(f, v\right)dt \tag{3.28}$$

$v \in C^1\left(\left[0,T\right], H_0^1(\Omega)\right)$ elde edilir Eş. 3.25 fonksiyonu $L^2\left(\left[0,T\right]; H_0^1(\Omega)\right)$da yoğun olduğundan $\forall v \in L^2\left(\left[0,T\right]; H_0^1(\Omega)\right)$ vardır. Bu durumda $v \in H_0^1(\Omega)$ $0 \leq t < T$ olmak üzere son bulunan eşitlikten

$$\left(u'', v\right) + \alpha\left(u', v\right) + \left(\nabla u, \nabla v\right) + \left(g(u), v\right) = \left(f, v\right)$$

elde edilir. Ayrıca $u \in C\left(\left[0,T\right]; L^2(\Omega)\right)$ ve $u' \in C\left(\left[0,T\right]; H^{-1}(\Omega)\right)$ Bundan sonra da başlangıç koşullarının

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ u'(0) &= p_0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

olduğunu gösterelim. $v \in C^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ ve $v(T) = v'(T) = 0$ olsun. Eş. 3.28 ifadesine iki kere kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^T (u'',v)dt + \alpha \int_0^T (u',v)dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla v)\, dt + \int_0^T (g(u),v)\, dt = \int_0^T (f,v)\, dt \tag{3.30}$$

$$\int_0^T (u,v'')dt + \alpha \int_0^T (u',v)dt + \int_0^T (\nabla u, \nabla v)\, dt + \int_0^T (g(u),v)\, dt = \int_0^T (f,v)dt - (u(0),v'(0)) + (u'(0),v(0)) \tag{3.33}$$

elde edilir. Benzer olarak Eş. 3.27 denklemi için de iki kere kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^T (u_m,v'')dt + \alpha \int_0^T (u_m',v)dt + \int_0^T (\nabla u_m, \nabla v)\, dt + \int_0^T (g(u),v)\, dt = \int_0^T (f,v)dt - (u_m(0),v'(0)) + (u_m'(0),v(0)) \tag{3.34}$$

elde edilir. Eş. 3.7 ve Eş. 3.24 kullanılarak

$$\int_0^T (u,v'')dt + \alpha \int_0^T (u',v)dt + \int_0^T (\nabla u, v)\, dt + \int_0^T (g(u),v)\, dt = \int_0^T (f,v)dt - (u_0,v'(0)) + (p_0,v(0)) \tag{3.35}$$

yazılır. Eş. 3.33 ile Eş. 3.35 sol tarafları birbirine eşittir. Bu da bize $u(0) = u_0$ ve $u'(0) = p_0$ olduğunu söyler. Böylece u nun Eş. 1.1 - Eş. 1.4 probleminin bir zayıf çözüm olduğu gösterilmiş olur.

Eş. 1.1 - Eş. 1.4 probleminin çözümlerinin tekliği ise [9] da gösterilmiştir.

4. YUTAN KÜMENİN ELDE EDİLMESİ

Bu bölümde Eş. 1.1 - Eş. 1.4 ile verilen problemin yutan kümesi gösterilecektir. Bunun için aşağıdaki teoremi vereceğiz

4.1 Teorem [7]

u_0, p_0, α, f önceden verilen ifadeler olmak üzere g, Eş. 1.7- Eş. 1.10 şartlarını sağlasın. Eş. 1.1 - Eş. 1.4 probleminin bir tek zayıf çözümü mevcut olsun. Bu durumda $.t > 0$ için Eş. 1.1 - Eş. 1.4 problem yardımıyla oluşturulan $S(t)\left(u_0, p_0\right) = \left(u(t), p(t)\right)$ tanımlanarak $S(t)$ yarı gurubu probleminin sınırlı ve sönümlüdür.

İspat

$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = \min(\frac{\alpha}{4}, \frac{\lambda_1}{2\alpha})$ seçilsin. $v = u' + \varepsilon u$ seçilerek,

$$\begin{aligned} & u'' + \alpha u' - \Delta u + g(u) = f \\ & v' - \varepsilon u' + \alpha u' - \Delta u + g(u) = f \\ & v' + (\alpha - \varepsilon)(v - \varepsilon u) - \Delta u + g(u) = f \\ & v' + (\alpha - \varepsilon)v - \varepsilon(\alpha - \varepsilon)u - \Delta u + g(u) = f \end{aligned} \tag{4.1}$$

elde edilir. Bu son denklem v ile iç çarpım yapılırsa

$$\left(v', v\right) + (\alpha - \varepsilon)\left(v, v\right) - \varepsilon(\alpha - \varepsilon)\left(u, v\right) + \left(\nabla u, \nabla v\right) + \left(g(u), v\right) = \left(f, v\right) \tag{4.2}$$

elde edilir. Green formülü kullanılarak ve gerekli düzenlemeler sonucu

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u\|^2 + |v|^2\right\} + \varepsilon\|u\|^2 + (\alpha - \varepsilon)|v|^2 - \varepsilon(\alpha - \varepsilon)\left(u, v\right) + \left(g(u), v\right) = \left(f, v\right) \tag{4.3}$$

denklemi elde edilir. Seçilen ε ve $v = u' + \varepsilon u$ ile

$$\varepsilon \|u\|^2 + (\alpha - \varepsilon)|v|^2 - \varepsilon(\alpha - \varepsilon)|v|^2 \geq \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha}{2}|v|^2 \tag{4.4}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan,

$$\left(g(u), v)\right) = \left(g(u), u'\right) + \varepsilon\left(g(u), u\right) = \frac{d}{dt}G(u) + \varepsilon\left(g(u), u\right) \tag{4.5}$$

vardır.

Eş. 4.4 ve Eş. 4.5, Eş. 4.3'de kullanılarak

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u\|^2 + |v|^2 + 2G(u)\right\} + \frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2 + \frac{\alpha}{2}|v|^2 + \varepsilon\left(g(u), u\right) \leq \left(f, v\right) \tag{4.6}$$

elde edilmiş olur.

Eş. 1.5, Eş. 1.6 eşitsizlikleri kullanılarak κ_1 ve κ_2 sabitler olmak üzere

$$G(\varphi) + \frac{1}{8(1+c_1)}\|\varphi\|^2 + \kappa_1 \geq 0 \tag{4.7}$$

$$\left(\varphi, g(\varphi)\right) - c_1 G(\varphi) + \frac{1}{8}\|\varphi\|^2 + \kappa_2 \geq 0 \tag{4.8}$$

eşitsizlikleri elde edilir ve bu eşitsizlikler Eş. 4.6 denkleminde kullanılarak

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u\|^2 + |v|^2 + 2G(u)\right\} + \frac{\varepsilon}{4}\|u\|^2 + \frac{\alpha}{2}|v|^2 + \varepsilon c_1 G(u) \leq \varepsilon(\kappa_2 + c_1\kappa_1) + \left(f, v\right) \tag{4.9}$$

$$\leq \varepsilon(\kappa_2 + c_1\kappa_1) + \frac{\alpha}{4}|v|^2 + \frac{1}{\alpha}|f|^2$$

elde edilir. Burada $\alpha_2 = \min(\frac{\alpha}{2}, \varepsilon c_1)$'dir. En son hal olarak

$$y(t) = \|u\|^2 + |v|^2 + 2G(u)$$

y fonksiyonunu tanımlayarak

$$\frac{d}{dt} y + \alpha_2 y \leq c_6' + \frac{2}{\alpha}|f|^2 \tag{4.10}$$

yazarız. Gronwall lemması kullanılarak,

$$y(t) \leq y(0)e^{-\alpha_2 t} + (\frac{c_6'}{\alpha_2} + \frac{2}{\alpha\alpha_2}|f|^2)(1 - e^{-\alpha_2 t}) \qquad \forall t \geq 0 \tag{4.11}$$

elde edilmiş olur.

$\limsup_{t\to\infty} y(t) \leq \mu_0^2$ ve $\mu_0^2 = (\frac{c_6'}{\alpha_2} + \frac{2}{\alpha\alpha_2}|f|^2)$ dir. $\mu_0' > \mu_0$ sabitlenerek ve $y(0) \leq R$ den $t_0(R, \mu_0') = \frac{1}{\alpha_2} \log \frac{R}{(\mu_0')^2 - \mu_0^2}$ t_0 bulunur. $t \geq t_0 = t_0(R, \mu_0^2)$ için $y(t) \leq \mu_0'$ elde edilmiş olur. Bu da bize yutan kümenin varlığını gösterir.

5 LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMİNİN YEREL OLMAYAN ÇEKİCİSİNİN VARLIĞI İÇİN ETKİN BİR METHOD

5.1 Teorem [13]

E konveks Banach uzayı ve $\{ S(t)\}_{t\geq 0}$, E den E ye sürekli operatörlerin bir yarı grup ailesi olsun. $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ E de sınırlı bir yutan kümeye sahip olsun ve (C) şartını sağlasın. O zaman E de $\{ S(t)\}_{t\geq 0}$ yarı grup operatörleri için bir yerel olmayan çekicisi vardır.

Ω, $\mathbb{R}^n$ de düzgün sınırlı, açık sınırlı bir küme olmak üzere bilinmeyen u=u(x,t) fonksiyonu birlikte Eş.1.1 - Eş. 1.4 problemini göz önüne alalım. Burada $x\in\Omega$ ve $t\in\mathbb{R}$ dir. Burada $L^2(\Omega)$ nın normu $|\,,|$, $H_0^1(\Omega)$ nın normu $\|\,,\|$ ile gösterilecektir. $H_0^1(\Omega)$ da iç çarpım $(u,v)_{H_0^1(\Omega)}=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v dx$ ile tanımlanacaktır. Enerji uzayı olarak E= $\left(y=(u,p):\quad u\in H_0^1(\Omega),\quad p\in L^2(\Omega)\right\}$ gösterilecek ve bu uzaya göre normu da

$$\|y\|_E=(\|u\|^2+|p|^2)^{1/2} \tag{5.1}$$

şeklinde alınacaktır. Herhangi verilen $(u_0,p_0)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ için Eş. 1.1 - Eş. 1.4 denklemleri tek çözüme sahip olduğu 3. Bölümde gösterildi. S(t) yarıgrup operatörünü

$$S(t):E\to E$$
$$S(t)(u_0,p_0)=y(t)=\{\,u(t),p(t)\,\}$$

şeklinde tanımlanırsa $\forall t\in R$ için $S(t):E\to E$ süreklidir sonucu [2] den bilinmekte ve $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ Eş. 1.5, Eş. 1.6 şartlarla bir absorbing (yutan) kümeye sahip olduğu 4. Bölümde gösterilmiştir. 3. Bölümde yer alan 3.1.2.Teorem in ispatında belirtilmiş olan $\{ w_k \}_{k=1}^{\infty} \subset H_0^1(\Omega)$ öz vektörleri $H = L^2(\Omega)$ bir ortonormal bazıdır. H_1, ilk N vektörle gerilmiş H ın bir alt uzayı olsun. Buradaki N sonradan belirlenecektir. H_2 geri kalan vektörler tarafından gerilmiş bir alt uzay olsun. Öyle ki $H = H_1 \oplus H_2$, $P_H : H \to H_1$ izdüşüm operatörü olmak üzere $p \in H$ için $(I - P_H)p = p_2$ tanımlansın. $\left\{ \lambda_k^{-1/2} w_k \right\}$ vektörleri $V = H_0^1(\Omega)$ uzayının bir ortonormal baz oluşturur. Benzer olarak V nin V_1 ve V_2 alt uzaylarını tanımlayalım öyle ki $V = V_1 \oplus V_2$ ve P_V ile V den V_1 üzerine kanonik izdüşümü gösterilsin. $u \in V$ için $(I - P_V)u = u_2$ tanımlansın. Her u_2 için,

$$|u_2|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} \|u_2\|^2 \tag{5.2}$$

eşitsizliği vardır. Sonuç olarak $P : E \to V_1 \times H_1$ izdüşüm operatörü tanımlanır. $y \in E$ için $(I - P)y = y_2 = \{u_2, p_2\} \in V_2 \times H_2$ tanımlansın. Ortonormallikten $\|y\|_E^2 = \|Py\|_E^2 + \|y_2\|_E^2$ vardır. Şimdi Teorem 1 deki (C) şartını sağlandığı gösterilecektir.

5.2 Teorem

$\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda E nin herhangi bir sınırlı B kümesi için $\forall y \in B$ için $t \geq t_*$ olduğu zaman $\|y_2(t)\|_E \leq \varepsilon$ sağlanacak şekilde $t_* > 0$ ve bir N >0 vardır.

İspat

B , E nin herhangi bir alt kümesi, $y_0 = (u_0, p_0)$ B deki başlangıç koşulları olsun. Yutan yuvarın varlığı, $t > t_0$ iken $S(t)B \subset B(0,\delta)$ olacak şekilde $\delta > 0$ ve $t_0(B) > 0$ varlığını garanti eder. Böylece genelliği bozmaksızın $t_0 = 0$ ve

$\forall t > 0$ için $y(t) = \{u(t), p(t)\} \in B(0,\delta)$ kabul edilsin. Bu ise $\forall t \geq 0$ için $\|u(t)\| < \delta, |p(t)| < \delta$ verir. $\frac{\partial u}{\partial t} = u'$ olmak üzere Eş. 1.1 denklemi yeniden yazılırsa

$$u'' + \alpha u' - \Delta u + g(u) = f \tag{5.3}$$

olur.

$v = u' + \varepsilon u = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) e_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t) e_i(x)$ oluşturulsun. Burada $0 < \varepsilon < \alpha/4$ 'dür.

Eş. 5.3 denklemini v ye göre tekrar yazılır ve $(I - P)v = v_2 = u_2' + \varepsilon u_2$ İle skaler çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned}
&u'' + \alpha u' - \Delta u + g(u) = f \\
&v' - \varepsilon u' + \alpha u' - \Delta u + g(u) = f \\
&v' + (\alpha - \varepsilon)(v - \varepsilon u) - \Delta u + g(u) = f \\
&v' + (\alpha - \varepsilon)v - \varepsilon(\alpha - \varepsilon)u - \Delta u + g(u) = f
\end{aligned} \tag{5.4}$$

elde edilir. L^2 de v_2 ile skaler çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned}
&(v', v_2) + (\alpha - \varepsilon)(v, v_2) - \varepsilon(\alpha - \varepsilon)(u, v_2) + (\nabla u, \nabla v_2) + (g(u), v_2) \\
&= (f, v_2)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

elde edilir.

w_k baz vektörlerinin ortonormalliği, 1.Green özdeşliği ve sınır üstünde $v_2 = 0$ olması kullanılırsa aşağıdaki son denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u_2\|^2 + |v_2|^2) + \varepsilon \|u_2\|^2 + (\alpha - \varepsilon) |v_2|^2 - \varepsilon(\alpha - \varepsilon)(u_2, v_2) + (g(u), v_2) \\
&= (f, v_2)
\end{aligned}$$

bu denklemdeki $\left(g(u),v_2\right)$ $v_2 = u_2{}' + \varepsilon u_2$ alınırsa ve $g(u)$ ile iç çarpım yapılırsa

$$\begin{aligned}\left(g(u),v_2\right) &= \left(g(u),(u_2' + \varepsilon u_2)\right)\\ &= \int g(u)\cdot(u_2' + \varepsilon u_2)dx = \int g(u)u_2'dx + \varepsilon\int g(u)u_2 dx\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\int \frac{d}{dt}(g(u)u_2)dx = \int g'(u)u'u_2 dx + \int g(u)u_2' dx$$

buradan

$$\int g(u)u_2{}'dx = \int \frac{d}{dt}(g(u)u_2)dx - \int g'(u)u'u_2 dx \tag{5.7}$$

elde edilir. İlk denklemde yerine yazılırsa

$$\left(g(u),v_2\right) = \varepsilon\int g(u)u_2 dx + \int \frac{d}{dt}(g(u)u_2)dx - \int g'(u)u'u_2 dx$$

$$\left(g(u),v_2\right) = \varepsilon\left(g(u),u_2\right) + \frac{d}{dt}\left(g(u),u_2\right) - \left(g'(u)u',u_2\right) \tag{5.8}$$

en son hali elde edilmiş olur.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\ \|u_2\|^2 + |v_2|^2) + \varepsilon\ \ \|u_2\|^2 + (\alpha-\varepsilon)\ \ |v_2|^2 - \varepsilon(\alpha-\varepsilon)\left(u_2,v_2\right) + \left(g(u)\ ,v_2\right)$$
$$= \left(f,v_2\right)$$

denklemin de $\left(g(u)\ ,v_2\right)$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u_2\|^2 + |v_2|^2) + \varepsilon\|u_2\|^2 + (\alpha-\varepsilon)|v_2|^2 - \varepsilon(\alpha-\varepsilon)\left(u_2,v_2\right)\\ &+\varepsilon\left(g(u)\ ,u_2\right) + \frac{d}{dt}\left(g(u)\ ,u_2\right) - \left(g'(u)u'\ ,u_2\right) = \left(f,v_2\right)\end{aligned} \tag{5.9}$$

bulunur ve düzenleme yapıldığında

$$\left(f\ ,v_2\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ \left(\|u_2\|^2+|v_2|^2+2\left(g(u)\ ,u_2\right)\right)\ +\varepsilon\|u_2\|^2+(\alpha-\varepsilon)|v_2|^2$$
$$-\varepsilon(\alpha-\varepsilon)\left(u_2\ ,v_2\right)+\varepsilon\left(g(u)\ ,u_2\right)-\left(g'(u)u'\ ,u_2\right) \tag{5.10}$$

elde edilir. Yeterince büyük N seçersek;

$$\lambda_{N+1}\ \geq\ \alpha^{\ 2} \tag{5.11}$$

dir. Hölder eşitsizliğinden

$$\left(u_2\ ,v_2\right)\leq|u_2|\cdot|v_2|$$

elde edilir ve Eş. 5.2 ile gösterilen ifade de kullanılarak

$$-\varepsilon(\alpha-\varepsilon)\left(u_2\ ,v_2\right)\geq-\varepsilon(\alpha-\varepsilon)\ \ |u_2|\cdot|v_2|\geq\frac{-\varepsilon(\alpha-\varepsilon)}{\sqrt{\lambda_{N+1}}}\|u_2\|\ \cdot|v_2| \tag{5.12}$$

elde edilir. Eş. 5.11 den $\sqrt{\lambda_{N+1}}\geq\alpha-\varepsilon$ olduğundan

$$-\varepsilon(\alpha-\varepsilon)\left(u_2\ ,v_2\right)\geq-\varepsilon\ \ (\frac{1}{2}\ \|u_2\|^2+\frac{1}{2}|v_2|^2) \tag{5.13}$$

bulunur.

Şimdi $\left(g'(u)u'\ ,u_2\right)$terimi için uzayın boyutuna bağlı kestirimler elde edeceğiz.

1.Durum

Eş. 1.7 ile tanımladığımız eşitsizlikte $n \geq 4$ olduğu zaman $\gamma = 0$ olduğundan

$$\forall s \in \mathbb{R} \qquad\qquad |g'(s)| \leq 2\kappa$$

dir. Eş. 5.2 ve Hölder Eşitsizliği ve Cauchy-Shwardz eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\left(g'(u)u' \,, u_2\right) &\leq \int g'(u)u' \cdot u_2 dx \\
&\leq \int |g'(u)|\, |u'|\, |u_2| dx \\
&\leq 2\kappa \Big(\int (u')^2 dx\Big)^{1/2} \cdot \Big(\int (u_2)^2 dx\Big)^{1/2} \\
&\leq 2\kappa\, |u'| \cdot |u_2| \\
&\leq \frac{2\kappa}{\sqrt{\lambda_{N+1}}} |u'| \cdot \|u_2\| \\
&\leq \frac{2\kappa}{\sqrt{\lambda_{N+1}}} \Big(\frac{1}{2}|u'|^2 + \frac{1}{2}\|u_2\|^2 \Big) \\
&\leq \frac{\kappa}{\sqrt{\lambda_{N+1}}} \Big(|u'|^2 + \|u_2\|^2 \Big) \qquad (5.14)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\|u(t)\| < \delta$ kullanılarak

$$\left(g'(u)u',u_2\right) \leq \frac{2\kappa\delta^2}{\sqrt{\lambda_{N+1}}}$$

burada $c_0 = 2\kappa\delta^2$ alınırsa

$$\left(g'(u)u',u_2\right) \leq \frac{c_0}{\sqrt{\lambda_{N+1}}} \tag{5.15}$$

elde edilir.

2. Durum

Eş. 1.7 ile tanımlanan eşitsizlikte $n = 3$ olduğu zaman $0 \leq \gamma < 2$ olduğundan $p_1 = \dfrac{6}{\gamma}$, $p_2 = \dfrac{6}{3-\gamma}$, $p_3 = 2$ alınarak ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left(g'(u)u',u_2\right) &\leq \left(\int g'(u)^{p_1}\right)^{1/p_1} \cdot \left(\int (u')^{p_2}\right)^{1/p_2} \cdot \left(\int (u_2)^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left\|g'(u)\right\|_{L^{\frac{6}{\gamma}}} \cdot \left\|u_2\right\|_{L^{\frac{6}{3-\gamma}}} \cdot \left|u'\right|\end{aligned} \tag{5.16}$$

eşitsizliği elde edilir. L^p uzayında İnterpolasyon eşitsizliğinden $0 \leq \gamma < 2$ için $2 \leq \dfrac{6}{3-\gamma} < 6$ dır. $\gamma = 0$ durumun da yukarıdakiler alınacaktır. Böylece $2 \leq \dfrac{6}{3-\gamma} < 6$ kabul ederiz. $\theta \in (0,1)$ ‘vardır öyle ki,

$$\left\|u_2\right\|_{L^{\frac{6}{3-\gamma}}} \leq \left|u_2\right|^{\theta} \cdot \left\|u_2\right\|_{L^6}^{(1-\theta)} \tag{5.17}$$

dır.

Sobolev Gömme teoremi ve $\|u_2\| \leq \|u\| \leq \delta$ eşitsizliği kullanarak bir C sabiti vardır öyle ki,

$$\|u_2\|_{L^6}^{(1-\theta)} \leq C\|u_2\|^{(1-\theta)} \leq C\rho^{(1-\theta)} = C_1 \tag{5,18}$$

eşitsizliği elde edilir. Eş. 5.2 ifadesini ve Eş. 5,18 kullanarak

$$\|u_2\|_{L^{\frac{6}{3-\tau}}} \leq C_1 |u_2|^{\theta} \leq C_1 \frac{\|u_2\|^{\theta}}{(\lambda_{N+1})^{\theta/2}} \leq \frac{C_1\delta^{\theta}}{(\lambda_{N+1})^{\theta/2}} = \frac{C_2}{(\lambda_{N+1})^{\theta/2}}$$

elde edilir. Eş. 1.7 şartını, $\|u\| \leq \delta$ olduğu zaman $\|g'(u)\|_{L^{\frac{6}{\tau}}} \leq C_4$ eşitliğini elde ederiz.

$$\|g'(u)\|_{L^{\frac{6}{\gamma}}}^{\frac{6}{\gamma}} \leq \int_{\Omega} [\kappa(1+|u|^{\gamma})]^{6/\gamma} dx \leq \kappa c(\gamma)[|\Omega| + \|u\|_{L^6}^{6}]$$

$$\leq \kappa c(\tau)[|\Omega| + \delta^{6}] \leq C_3$$

Böylece

$$\left(g'(u)u' \,, u_2\right) \leq C_4 \frac{C_2}{(\lambda_{N+1})^{\theta/2}} |u'| = \frac{C_5}{(\lambda_{N+1})^{\theta/2}} \tag{5.19}$$

bulunur.

3. Durum

Eş. 1.7 de n=1, 2 olsun Bu durumda $p_1 = 4$, $p_2 = 4$, $p_3 = 2$ olmak üzere tekrar Hölder eşitsizliği kullanılır ise

$$\left(g'(u)u'\ ,u_2\right) \leq \|g'(u)\|_{L^4}\ \|u_2\|_{L^4}|u'| \tag{5.20}$$

elde ederiz. İnterpolasyon eşitsizliği ve Sobolev Gömme teoremi kullanılarak

$$\|u_2\|_{L^4} \leq |u_2|^{1/4}\|u_2\|_{L^6}^{3/4} \leq \frac{C_6}{(\lambda_{N+1})^{1/8}}$$

eşitsizliği elde edilir. $n = 3$ için yapılan benzer hesaplamalardan sonra

$$\|g'(u)\|_{L^4} \leq C_7\int_{\Omega}(1+|u|^{4\gamma})dx \leq C_8 \tag{5.21}$$

olduğu gösterilir. Çünkü $H_0^1(\Omega)$, $L^{4\gamma}(\Omega)$ ye kopmak gömülmektedir. $|u'| < \delta$ eşitsizliği kullanılırsa Eş.5.20 ifadesi

$$\left(g'(u)u'\ ,u_2\right) \leq \frac{C_6C_8\delta}{(\lambda_{N+1})^{1/8}} = \frac{C_9}{(\lambda_{N+1})^{1/8}} \tag{5.22}$$

olur. Eş. 5.15, Eş. 5.19 ve Eş.5.22 sonuçlarından $N_0 > 0$ vardır öyle ki, $N > N_0$ olduğunda λ_{N+1}

$$\left(g'(u)u'\ ,u_2\right) \leq \frac{\varepsilon^3}{32} \tag{5.23}$$

eşitsizliğini garanti edecek şekilde yeterince büyütülür.

Şimdi $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i(x)$ ve $f_N(x) = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i e_i(x)$ kısmi toplamları alalım. Bu durumda $N_1 > 0$ vardır öyle ki

$$N \geq N_1 \tag{5.24}$$

olduğunda $\left|f - f_N\right| < \dfrac{\varepsilon^2}{4}$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}\left(f,\ v_2\right) = \left(f - f_N,\ v_2\right) &\leq \left(\int (f - f_N)^2 dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int v_2^{\,2} dx\right)^{1/2} \\ &\leq \left|f - f_N\right|\left|v_2\right| \\ &\leq \left(\frac{1}{2\varepsilon}\left|f - f_n\right|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\left|v_2\right|^2\right)\end{aligned} \tag{5.25}$$

elde edilir. Son olarak $\left|f - f_N\right| < \dfrac{\varepsilon^2}{4}$ kullanılarak son eşitsizlik

$$\left(f,\ v_2\right) \leq \frac{\varepsilon^3}{32} + \frac{\varepsilon}{2}\left|v_2\right|^2 \tag{5.26}$$

halini alır.

Eş. 5.13, Eş. 5.23 ve Eş. 5.26 da bulduğumuz eşitsizlikleri Eş. 5.10 ifadesinde yerine

yazarsak

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left\|u_2\right\|^2 + \left|v_2\right|^2 + 2\left(g(u)\,,u_2\right)\right) + \left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left\|u_2\right\|^2 + \left(\alpha - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left|v_2\right|^2 \\ &+\varepsilon\left(g(u)\,,u_2\right) \leq \frac{\varepsilon^3}{32} + \frac{\varepsilon^3}{32}\end{aligned} \tag{5.27}$$

elde edilir.

$\varepsilon < \alpha/4$ için $\alpha - 2\varepsilon > \varepsilon$ eşitsizliğine sahip oluruz. Böylece

$$\frac{d}{dt}\left(\|u_2\|^2+|v_2|^2+2\left(g(u)\ ,u_2\right)\right)\ +\varepsilon\|u_2\|^2+\varepsilon|v_2|^2+2\varepsilon\left(g(u)\ ,u_2\right)\le\frac{\varepsilon^3}{8} \quad (5.28)$$

elde edilir.

$$\phi(t)=\|u_2(t)\|^2+|v_2(t)|^2+2\left(g(u),u_2\right) \quad (5.29)$$

yazıp Eş. 5.28 de bunu yerine yazarsak

$$\frac{d}{dt}\phi+\varepsilon\phi\le\frac{\varepsilon^3}{8}$$

elde ederiz. Gronwall lemması kullanılırsa;

$$\frac{d}{dt}(e^{\varepsilon t}\phi)\le\frac{\varepsilon^3}{8}e^{\varepsilon t}$$

$$\int\frac{d}{dt}(e^{\varepsilon t}\phi)dt\le\int\frac{\varepsilon^3}{8}e^{\varepsilon t}dt$$

$$e^{\varepsilon t}\phi(t)-e^{\varepsilon t_0}\phi(t_0)\le\frac{\varepsilon^2}{8}e^{\varepsilon t}-\frac{\varepsilon^2}{8}e^{\varepsilon t_0}$$

$$\phi(t)\le\phi(t_0)\exp(\varepsilon(t-t_0))+\frac{\varepsilon^2}{8}(1-\exp(\varepsilon(t-t_0)) \quad (5.30)$$

elde edilir.

g, V den H sınırlı bir operatör olduğundan R > 0 vardır öyle ki $\|u\|\le\delta$ olduğunda $|g\ (u\ )|\le\ R$ dir. Böylece

$$2\left(g(u),\ u_2\right) \le 2\left|g(u)\right|\ \left|u_2\right| \le \frac{2R}{\sqrt{\lambda_{N+1}}}\left\|u_2\right\| \le \frac{2R\delta}{\sqrt{\lambda_{N+1}}} \le \frac{\varepsilon^2}{8} \tag{5.31}$$

$$\lambda_{N+1} \ge \left(\frac{8R\delta}{\varepsilon^2}\right) \tag{5.32}$$

garanti edecek şekilde yeterince büyük N lerin seçimiyle kestirimini elde ederiz.

Böylece Eş. 5.31 ifadesi

$$\left\|u_2(t)\right\|^2 + \left|v_2(t)\right|^2 \le \frac{\varepsilon^2}{8} + \phi(t_0)\exp(\varepsilon(t_0 - t)) + \frac{\varepsilon^2}{8}(1 - \exp(\varepsilon(t_0 - t)) \tag{5.33}$$

halini alır.

$$\begin{aligned}\left\|u_2\right\|^2 + \left|u_2'\right|^2 &\le \left\|u_2\right\|^2 + \left|(u_2' + \varepsilon u_2) - \varepsilon u_2\right|^2 \\ &\le \left\|u_2\right\|^2 + 2\left|v_2\right|^2 + 2\varepsilon^2\left|u_2\right|^2 \\ &\le \left\|u_2\right\|^2 + 2\left|v_2\right|^2 + \frac{2\varepsilon^2}{\lambda_{N+1}}\left\|u_2\right\|^2 \\ &\le 2\,(\left\|u_2\right\|^2 + \left|v_2\right|^2)\end{aligned} \tag{5.34}$$

elde ederiz. Eş. 5.12 ifadesinden $\lambda_{N+1} \ge 2\varepsilon^2$ sonucuna varılır. Eş. 5.33 eşitsizliği

$$\left\|y_2\right\|_E^2 = \left\|u\right\|^2 + \left|u'\right|^2 \le \frac{\varepsilon^2}{4} + 2\,\phi(t_0)\exp(\varepsilon(t_0 - t)) + \frac{\varepsilon^2}{4}(1 - \exp(\varepsilon(t_0 - t)) \tag{5.35}$$

halini alır.

Eş. 5.35 eşitsizliğinin sağ tarafı ε^2 den küçük bırakılabilmesi için bir $t_* > 0$ bulunacaktır. Bunun için

$$t_* = t_0 + \frac{1}{\varepsilon}\ln(\frac{8\phi(t_0) - \varepsilon^2}{2\varepsilon^2}) \tag{5.36}$$

seçeriz.

Buradan bir $\varepsilon > 0$ için eğer Eş. 5.11, Eş. 5.24, ve Eş. 5.32 sağlayacak şekilde bir N seçilir ise o zaman $\forall t \geq t_*$ için $\left\| y(t) \right\|_E < \varepsilon$ eşitsizliği elde edilir.. Böylece teorem ispatlanmış olur.[13]

KAYNAKLAR

1. Abdallah Ahmed Y, "Exponential Attractor for a Nonlinear Boussinesq Equation", ***Acta Mathematicae Applicatae Sinica***, English Series, 443–450 (2006)

2. Babin A. V. and Vishik M. I., "Attarctors of Partical Differential Evolution Equations and Estimates of Their Dimensions", ***Russian Math Surveys*** 38, 151-213 (1983a)

3. Bergh J., Löfström J."Interpolation spaces",***Springer,*** Varlas, Berlin, Haldelberg, Newyork, 1-207 (1576)

4. Ghidaglia J. M. and Temam R., "Attarctors for Damped Nonlinear Hyperbolic Equations", ***J. Math Pures Applied*** 66, 273-319 (1987)

5. Kesevan S., "Topics in Functional Analysis And Applications", ***John Wiley & Sons***, India, 1-267 (1989)

6. Kolmogorov A.N., "Fomin S.V., Introductory Real Analysis,Dover Publ"., ***New York***, 1-404 (1970)

7. Kurt A., "Exiztence of Absrbing Set for a Nonlinear Wave Equation", ***Applied Mathematics E-Notes***, 98-101, 2(2002)

8. Ladyzhenskaya Q. A., "On The Determination of Minimal Global Attactors for The Navier-Stokes and Other Partial Differential Equations" ***, English Translation, Russian math Surveys*** 42, 27-73 (1987)

9. LionsJ.L.,"Quelquesmethodes de resolution des problaemes aux limites non-linearies", ***Dunod***, ***Gauthier –Villars***, Paris, 1-554 (1969)

10. Ma Q., Wang S. and Zhong C., "Necessary and sufficent conditions for the existence of global attractors for semigroups and applications***", Indiana Math.J***. 51(No 6),1542-1570, (2002)

11. Robinson James C., "Infinite-Dimensional Dynamical Systems", ***Cambridge University Press,*** 11-360 (2001)

12. Sel G. R.and You Y., "Dynamics of Evolutionary Equations",***Springer,*** 351-359 (200)

13. Sengul M. T., "An Effective Method for the Existence of the Global Attractor of A Nonlinear Wave Equation", ***Applied Mathematics E-Notes***, 179-185 (2007)

14. Suhubi, E.S., "Fonksiyonel Analiz", ***İTÜ Vakfı Yayınları,*** İstanbul, 1-638 (2001).

15. Temam. R. “Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics”. Applied Mathematical Science Volume 68, ***Springer-Verlag***, New York, 53-482 (1988).

16. Walter W., “Ordinary differential equations”, ***Springer***.9-357(1991)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: KATİPOĞLU, Gözde
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 04.08.1984 Ankara
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (535) 946 64 01
e-mail	: gozde903@hotmail.com.

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Ankara Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2007
Lise	Gölbaşı Anadolu Lisesi	2002

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Kitap okumak, Yüzmek