ÖZEL FONKSİYONLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

Tufan MERCAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2009

ANKARA

Tufan MERCAN tarafından hazırlanan ÖZEL FONKSİYONLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd.Doç.Dr. Esra ERKUŞ DUMAN
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı ……………………………..

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL ……………………………..
Matematik, Ankara Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN ……………………………..
Matematik, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Ogün DOĞRU ……………………………..
Matematik, Gazi Üniversitesi

28/12/2009

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL ……………………………….
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Tufan MERCAN

ÖZEL FONKSİYONLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

Tufan MERCAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Aralık 2009

ÖZET

Bu çalışmada özel fonksiyonların bazı özellikleri incelenmiştir. Tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, Pochammer sembolü, hipergeometrik fonksiyonlar, doğurucu fonksiyonlar ve tezde kullanılan bazı lemmalar verilmiştir. İkinci bölümde, Bessel fonksiyonu için bir doğurucu fonksiyon verilmiştir. Ayrıca Bessel fonksiyonunun rekürans bağıntıları, diferensiyel denklemi ve integral gösterimi hatırlatılmıştır. Üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde sırasıyla, Legendre, Hermite ve Laguerre polinomları için doğurucu fonksiyonlar, rekürans bağıntıları, diferensiyel denklemler, Rodrigues formülü, ortogonallik ve norm kavramları verilmiştir. Son bölümde, Bateman, Rice, Sister Celine, Bessel polinomları tanıtılmış ve bu polinomların bazı özelliklerine değinilmiştir.

Bilim Kodu	**:**	**204.1.138**
Anahtar Kelimeler	**:**	**Özel polinomlar, ortogonallik, rekürans bağıntısı, Rodrigues formülü, Pochammer sembolü, doğurucu fonksiyon**
Sayfa Adedi	**:**	**78**
Tez Yöneticisi	**:**	**Yrd. Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN**

SOME PROPERTIES OF SPECIAL FUNCTIONS
(M. Sc. Thesis)

Tufan MERCAN

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
December 2009

ABSTRACT

In this study, some properties of special functions are examined. The thesis is composed of six sections. In the first section, Pochammer symbol, hypergeometric functions, generating functions and some lemmas used in the thesis are given. In the second section, a generating function for Bessel functions is given. Recurrence relations, differential equation and integral representation of Bessel functions are recalled. In third, fourth and fifth sections generating functions, recurrence relations, differential equation, Rodrigues formula, ortogonality and the concept of norm are investigated for Legendre, Hermite and Laguerre polynomials. In the last section, Bateman, Rice, Sister Celine and Bessel polynomials are introdoced and generating functions for these polynomials are studied.

Science Code	**: 204.1.138**
Key Words	**: Special polynomials, orthogonality, recurrence relation, Rodrigues Formula, Pochammer symbol, generating function**
Page Number	**:78**
Adviser	**: Assist. Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN**

TEŞEKKÜR

Tez konumu verip, değerli görüş ve önerileri ile beni yönlendiren, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN'a, ayrıca varlıklarıyla bana güç veren aileme ve eşim Gülfem MERCAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$J_n(z)$	Bessel fonksiyonu
$P_n(x)$	Legendre polinomu
$H_n(x)$	Hermite polinomu
$L_n^{(\alpha)}(x)$	Genelleştirilmiş Laguerre polinomu
$L_n(x)$	Laguerre polinomu
$Z_n(x)$	Bateman polinomu
$H_n(\zeta, p, v)$	Rice polinomu
$C_n(x)$	Sister Celine polinomu
$\varphi_n(c, x)$	Bessel polinomları
$F(\alpha, \beta, \gamma, x)$	Hipergeometrik fonksiyon
$(\alpha)_\Gamma$	Pochammer sembolü
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu

1. GİRİŞ

1.1. Pochammer Sembolü ve Hipergeometrik Fonksiyonlar

a,b,c ler reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1+\frac{ab}{1c}z+\frac{a\left(a+1\right)b\left(b+1\right)}{1.2c\left(c+1\right)}z^{2}+... \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye hipergeometrik seri adı verilir. c sıfır ya da negatif bir tamsayı olmamalıdır.

α reel ya da kompleks bir sayı, n sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\begin{aligned} &\left(\alpha\right)_{n}=\alpha\left(\alpha+1\right)\left(\alpha+2\right)...\left(\alpha+n-1\right), && n\geq 1 \\ &\left(\alpha\right)_{0}=1, && \alpha\neq 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

olarak tanımlanan $\left(\alpha\right)_{n}$ ifadesine Pochammer sembolü adı verilir.

Bu sembol yardımıyla Eş. 1.1'deki hipergeometrik serisi

$${}_{2}F_{1}\left(a,b;c;z\right)=F\left(a,b;c;z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(a\right)_{n}\left(b\right)_{n}z^{n}}{\left(c\right)_{n}n!} \tag{1.3}$$

olarak yazılabilir.

Ayrıca Pochammer sembolü,

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}, \qquad (\alpha)_{n+1} = \alpha(\alpha+1)_n \tag{1.4}$$

özelliklerine sahiptir. Burada $\Gamma(\alpha)$,

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt\,, \qquad \operatorname{Re}(\alpha) > 0$$

olarak tanımlanan Gamma fonksiyonudur.

Hipergeometrik fonksiyonlar için,

$$F(a,b;c;z) = F\begin{bmatrix} a, & b; & \\ & & z \\ & c; & \end{bmatrix}$$

gösterimi de kullanılır. Böylece,

$${}_2F_1(a,b;c;z) = {}_2F_1\begin{bmatrix} a, & b; & \\ & & z \\ & c; & \end{bmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} z^n \tag{1.5}$$

şeklinde yazılır. F nin altındaki 2 ve 1 indisleri, F nin yapısında biri a ve diğeri c olmak üzere iki tip parametre bulunduğunu ifade eder.

Eş. 1.5 eşitliğinin daha geneli olarak,

$$
{}_pF_q\left(\alpha_{1,}\alpha_{2,}...\alpha_p;\beta_{1,}\beta_{2,}...\beta_q;z\right) = {}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_{1,}\alpha_{2,}...\alpha_p; & \\ \beta_{1,}\beta_{2,}...\beta_q; & \end{matrix} z\right]
$$

$$
= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n...(\alpha_p)_n}{(\beta_1)_n(\beta_2)_n...(\beta_q)_n}\frac{z^n}{n!}
$$

$$
= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{p}(\alpha_i)_n}{\prod_{j=1}^{q}(\beta_j)_n}\frac{z^n}{n!} \tag{1.6}
$$

şeklinde genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonlar tanımlanır.

1.2 Hipergeometrik Diferensiyel Denklemler

$$
\theta = z\left(\frac{d}{dz}\right)
$$

diferensiyel operatörünü kullanarak, hipergeometrik diferensiyel denklemi elde etmek için

$$
w = F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n\, n!}z^n \tag{1.7}
$$

hipergeometrik fonksiyonu ele alınırsa ve

$$
\theta(\theta + c - 1)w
$$

ifadesi hesaplanırsa

$$\theta(\theta+c-1)w=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+c-1)(a)_n(b)_n}{(c)_n\,n!}z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+c-1)(a)_n(b)_n}{c(c+1)(c+2)...(c+n-2)(c+n-1)n(n-1)!}z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_{n-1}(n-1)!}z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_n\,n!}z^{n+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a+1)...(a+n-1)(a+n)b(b+1)...(b+n-1)(b+n)}{(c)_n\,n!}z^{n+1}$$

$$=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+n)(b+n)(a)_n(b)_n}{(c)_n\,n!}z^n$$

$$=z(\theta+a)(\theta+b)w$$

bulunur.

Böylece, $w=F(a,b;c;z)$ fonksiyonu

$$\left[\theta(\theta+c-1)-z(\theta+a)(\theta+b)\right]w=0 \tag{1.8}$$

denkleminin bir çözümüdür.

Eş. 1.8’de

$\theta w=z\dfrac{dw}{dz}$ ve $\theta(\theta-1)w=z^2\dfrac{d^2w}{dz^2}$

değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$z(1-z)\frac{d^2w}{dz^2}+\left[c-(a+b+1)z\right]\frac{dw}{dz}-abw=0 \tag{1.9}$$

diferensiyel denklemine dönüşür.

1.3 Doğurucu Fonksiyon

İki değişkenli bir $F(x,t)$ fonksiyonu t nin kuvvetleri cinsinden,

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) t^n \tag{1.10}$$

şeklinde bir seriye açılabiliyorsa, $F(x,t)$ fonksiyonuna $\{f_n(x)\}$ fonksiyonlar cümlesinin doğurucu fonksiyonu denir. Burada c_n ler x ve t den bağımsız, n nin bir fonksiyonu olup değişik parametreler içerebilir.

1.4 Gelecek Bölümlerde Kullanılan Bazı Lemmalar

Lemma 1.

a) $$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} A(k,n-k) \tag{1.11.a}$$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} B(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} B(k,n+k) \tag{1.11.b}$$

dir.

İspat

a) n ve k doğal sayı olmak üzere; $0 \le k < \infty$, $0 \le n < \infty$ dır.
Burada yeni indisler k=j, n=m-j alınırsa,
j ve m doğal sayı olmak üzere,
$0 \le j < m$ ve $0 \le m < \infty$ biçiminde yazılır.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{m}A(j,m-j)$$

yazılabilir.

m, j indisleri yerine sırasıyla n, k indisleri konulursa Eş. 1.11.a bulunur.

b) Önceki eşitlikte,

$A(k,n-k)=B(k,n)$ alınması yeterlidir.

Lemma 2.

a) $$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]}A(k,n-2k) \qquad (1.12.a)$$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]}B(k,n)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}B(k,n+2k) \qquad (1.12.b)$$

dir.

Burada $[n/2]$, $n/2$ ye eşit olan ya da $n/2$ den küçük olan en büyük tamsayıyı göstermektedir.

İspat

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)t^{n+2k}$ serisini alalım.

$0\le k<\infty$, $0\le n<\infty$ dır.

Burada yeni indisler k=j, n=m-2j alınırsa,

j ve m doğal sayı olmak üzere,

$0\le j<\dfrac{m}{2}$ ve $0\le m<\infty$ biçiminde yazılır.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A(k,n)t^{n+k}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{[m/2]}A(j,m-2j)t^{m}$$

yazılabilir.

t=1 ve m,j indisleri yerine sırasıyla n,k indisleri konulursa Eş. 1.12.a bulunur.

b) Önceki eşitlikte,

$A(k,n-k)=B(k,n)$ alınması yeterlidir.

Lemma 3.

c reel ya da kompleks bir sayı, n ve k doğal sayı olmak üzere;

$$\frac{(c)_{n+k}}{(c)_n}=(c+n)_k \tag{1.13}$$

dir.

İspat

$$\begin{aligned}\frac{(c)_{n+k}}{(c)_n}&=\frac{c(c+1)...(c+n-1)(c+n)(c+n+1)...(c+n+k-1)}{c(c+1)...(c+n-1)}\\&=(c+n)(c+n+1)...(c+n+k-1)\\&=(c+n)_k\end{aligned}$$

bulunur.

Lemma 4.

n ve k doğal sayı olmak üzere;

$$\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{(-n)_k}{(-1)^k} \tag{1.14}$$

dır.

İspat

$$\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)(n-k)(n-k-1)...3.2.1}{(n-k)(n-k-1)...3.2.1}$$

$$=n(n-1)...(n-k+1)$$

$$=\frac{(-n)(-n+1)...(-n+k-1)}{(-1)^k}$$

$$=\frac{(-n)_k}{(-1)^k}$$

bulunur.

Lemma 5.

n ve k doğal sayılar olmak üzere;

$$\frac{(n+2k)!}{(2k)!}=(2k+1)_n \tag{1.15}$$

dir.

İspat

$$\frac{(n+2k)!}{(2k)!}=\frac{(n+2k)(n+2k-1)...(2k+1)(2k)(2k-1)...3.2.1}{(2k)(2k-1)...3.2.1}$$

$$=(n+2k)(n+2k-1)...(2k+1)$$

$$=(2k+1)(2k+2)...(2k+1+n-1)$$

$$=(2k+1)\left[(2k+1)+1\right]...\left[(2k+1)+n+1\right]$$

$$=(2k+1)_n$$

bulunur.

Lemma 6.

c reel ya da kompleks bir sayı, n doğal sayı olmak üzere

$$\binom{-c}{n}=\frac{(-1)^n(c)_n}{n!} \tag{1.16}$$

dir.

İspat

$$\binom{-c}{n}=\frac{(-c)(-c-1)...(-c-n+1)}{n!}$$

$$=\frac{(-1)^n(c)(c+1)...(c+n-1)}{n!}$$

$$=\frac{(-1)^n(c)_n}{n!}$$

elde edilir.

Lemma 7.

c reel ya da kompleks bir sayı, k da doğal sayı olmak üzere;

$$\frac{(c)_{2k}}{2^{2k}} = \left(\frac{c}{2}\right)_k \left(\frac{c}{2}+\frac{1}{2}\right)_k \tag{1.17}$$

dır.

İspat

$$\begin{aligned}\frac{(c)_{2k}}{2^{2k}} &= \frac{c(c+1)(c+2)\dots(c+2k-1)}{2^{2k}} \\ &= \frac{c}{2}\left(\frac{c}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{2}+\frac{2}{2}\right)\left(\frac{c}{2}+\frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{c}{2}+\frac{2k-1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{c}{2}\right)_k \left(\frac{c}{2}+\frac{1}{2}\right)_k\end{aligned}$$

bulunur.

Lemma 8.

n ve k doğal sayılar olmak üzere,

$$\frac{(n+k)!}{(n-k)!} = (n+1)_k (-1)^k (-n)_k \tag{1.18}$$

dır.

İspat

$$\frac{(n+k)!}{(n-k)!}=\frac{(n+k)(n+k-1)...(n+1)n(n-1)...(n-k+1)(n-k)...3.2.1}{(n-k)(n-k-1)...3.2.1}$$

$$=(n+k)(n+k-1)...(n+1)n(n-1)...(n-k+1)$$

$$=\left[(n+1)(n+2)...(n+k-1)(n+1+k-1)\right]\left[n(n-1)...(n-k+1)\right]$$

$$=(n+1)_k(-1)^k\left[(-n)(-n+1)...(-n+k-1)\right]$$

$$=(n+1)_k(-1)^k(-n)_k$$

bulunur.

Lemma 9.

k doğal sayı olmak üzere,

$$\frac{(2k)!}{2^{2k}k!}=\left(\frac{1}{2}\right)_k \tag{1.19}$$

dır.

İspat

$$\frac{(2k)!}{2^{2k}k!}=\frac{(2k)(2k-1)(2k-2)...3.2.1}{2^{2k}k(k-1)...3.2.1}$$

$$=\frac{(2k)(2k-1)(2k-2)...3.2.1}{2^k(2k)(2k-2)...6.4.2}$$

$$=\frac{(2k-1)(2k-3)...3.1}{2^k}$$

$$=\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)...\frac{3}{2}\frac{1}{2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)...\left(\frac{1}{2}+k-1\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\right)_k$$

bulunur.

Lemma 10.

$$\sum_{k=0}^{n} A(k,n)=\sum_{k=0}^{[n/2]} A(k,n)+\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} A(n-k,n) \tag{1.20}$$

dir.

İspat

$n \geq 1$ için, $n=1+\left[\frac{1}{2}n\right]+\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]$

$$\sum_{k=0}^{n} A(k,n)=\sum_{k=0}^{[n/2]} A(k,n)+\sum_{k=1+[n/2]}^{1+[n/2]+[(n-1)/2]} A(k,n)$$

ikinci toplamda k yerine n-k konursa,

$$\sum_{k=0}^{n} A(k,n)=\sum_{k=0}^{[n/2]} A(k,n)+\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} A(n-k,n)$$

elde edilir.

2. BESSEL FONKSİYONLARI

2.1. $J_n(z)$ nin Tanımı

${}_0F_1\left(-;1+n;-\frac{z^2}{4}\right)$ hipergeometrik fonksiyonu kullanılarak ifade edilen

$$J_n(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{\Gamma(1+n)}\,{}_0F_1\left(-;1+n;-\frac{z^2}{4}\right) \tag{2.1}$$

fonksiyonuna n. basamaktan (mertebeden) 1. tür Bessel fonksiyonu denir. Burada n negatif olmayan bir tamsayıdır.

$$\begin{aligned}
{}_0F_1\left(-;1+n;-\frac{z^2}{4}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{(1+n)_k\,k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{\frac{\Gamma(1+n+k)}{\Gamma(1+n)}k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+n)(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(1+n+k)\,k!\,2^{2k}}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Bu ifade Eş. 2.1 eşitliğinde yerine yazılırsa

$$J_n(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{\Gamma(1+n)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+n)(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(1+n+k)k!2^{2k}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+n}}{\Gamma(1+n+k)k!2^{2k+n}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(1+n+k)k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$$

bulunur.

Ayrıca,

$$J_n(-z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(1+n+k)k!}\left(-\frac{z}{2}\right)^{2k+n}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(1+n+k)k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}(-1)^{2k}(-1)^n$$

$$J_n(-z)=(-1)^n J_n(z)$$

dir.

2.2. Bessel Diferensiyel Denklemi

$$\left[\theta(\theta+b-1)-y\right]u=0 \tag{2.2}$$

denklemini ele alalım.

$$u={}_0F_1(-;b;y)$$

ifadesi Eş. 2.2 denkleminin bir çözümüdür.

$$\theta = y\frac{d}{dy}$$

şeklinde ifade edildiğinden Eş. 2.2 denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\left[\theta(\theta+b-1)-y\right]u=0$$

$$\left[y\frac{d}{dy}\left(y\frac{d}{dy}+b-1\right)-y\right]u=0$$

$$y\left[\frac{dy}{dy}\frac{du}{dy}+y\frac{d^2u}{dy^2}\right]+y\frac{d}{dy}(bu)-y\frac{du}{dy}-yu=0$$

$$y\frac{du}{dy}+y^2\frac{d^2u}{dy^2}+by\frac{du}{dy}-y\frac{du}{dy}-yu=0$$

$$y^2\frac{d^2u}{dy^2}+by\frac{du}{dy}-yu=0$$

Burada her bir terim y ile bölünürse;

$$y\frac{d^2u}{dy^2}+b\frac{du}{dy}-u=0 \qquad (2.3)$$

olur.

$b=1+n$ ve $y=-\dfrac{z^2}{4}$ alınırsa

$$\left(-\frac{z^2}{4}\right)\frac{d^2u}{dy^2}+(1+n)\frac{du}{dy}-u=0 \qquad (2.4)$$

bulunur.

$$y=-\frac{z^2}{4} \text{ ise } dy=-2\frac{z}{4}dz=-\frac{1}{2}zdz$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}=\frac{du}{dz}\left(-\frac{2}{z}\right)$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dy}\right)$$

$$=\frac{d}{dy}\left(-\frac{2}{z}\frac{du}{dz}\right)$$

$$=\frac{du}{dz}\left(-\frac{2}{z}\frac{du}{dz}\right)\frac{dz}{dy}$$

$$=\left(\frac{2}{z^2}\frac{du}{dz}-\frac{2}{z}\frac{d^2u}{dz^2}\right)\left(-\frac{2}{z}\right)$$

olup, bu değer Eş. 2.4'de yerine yazılırsa

$$\left(-\frac{z^2}{4}\right)\left(-\frac{4}{z^3}\frac{du}{dz}+\frac{4}{z^2}\frac{d^2u}{dz^2}\right)+(1+n)\left(-\frac{2}{z}\right)\frac{du}{dz}-u=0$$

$$\frac{1}{z}\frac{du}{dz}-\frac{d^2u}{dz^2}-\frac{2}{z}\frac{du}{dz}-\frac{2n}{z}\frac{du}{dz}-u=0$$

$$-\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{z}-\frac{2n}{z}\right)\frac{du}{dz}-u=0$$

$$z\frac{d^2u}{dz^2}+(1+2n)\frac{du}{dz}+uz=0 \tag{2.5}$$

elde edilir.

Böylece, Eş. 2.5 denkleminin bir çözümü

$$u = {}_0F_1\left(-;1+n;-z^2/4\right)$$

fonksiyonu olur.

Şimdi, $w = z^n u$ ifadesinin Eş. 2.5 denklemini sağladığını araştırmak için Eş. 2.5 denkleminde $u = z^{-n} w$ yazılırsa

$$\frac{du}{dz} = (-n)z^{-n-1}w + z^{-n}\frac{dw}{dz}$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = (-n)(-n-1)z^{-n-2}w + (-n)z^{-n-1}\frac{dw}{dz} + (-n)z^{-n-1}\frac{dw}{dz} + z^{-n}\frac{d^2w}{dz^2}$$

$$z\left(n(n+1)z^{-n-2}w - nz^{-n-1}\frac{dw}{dz} - nz^{-n-1}\frac{dw}{dz} + z^{-n}\frac{d^2w}{dz^2}\right)$$

$$+(1+2n)\left(-nz^{-n-1}w + z^{-n}\frac{dw}{dz}\right) + z^{-n}wz = 0$$

$$\left(n^2+n\right)z^{-n-1}w - nz^{-n}\frac{dw}{dz} - nz^{-n}\frac{dw}{dz} + z^{1-n}\frac{d^2w}{dz^2} - nz^{-n-1}w - 2n^2z^{-n-1}w$$

$$+z^{-n}\frac{dw}{dz} + 2nz^{-n}\frac{dw}{dz} + z^{-n}wz = 0$$

$$z^{1-n}\frac{d^2w}{dz^2} + \left(-2nz^{-n} + z^{-n} + 2nz^{-n}\right)\frac{dw}{dz}$$

$$+\left(\left(n^2+n\right)z^{-n-1} - nz^{-n-1} - 2n^2z^{-n-1} + z^{-n}z\right)w = 0$$

$$z^{1-n}\frac{d^2w}{dz^2} + z^{-n}\frac{dw}{dz} + \left(-n^2z^{-n-1} + z^{-n}z\right)w = 0$$

olur. Her bir terim z^{-n} ile bölünürse

$$z\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{dw}{dz} + \left(\frac{-n^2}{z} + z\right)w = 0$$

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + \left(z^2 - n^2\right)w = 0 \qquad (2.6)$$

n. basamaktan Bessel diferensiyel denklemine varılır ki bu denklemin çözümü

$$w = z^n {}_0F_1\left(-;1+n;-\frac{z^2}{4}\right)$$

şeklindedir.

2.3. Diferensiyel Rekürans Bağıntıları

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+n}}{\Gamma(1+n+k)k!2^{2k+n}} \tag{2.7}$$

denkleminin her iki tarafını z^n ile çarptıktan sonra z ye göre türev alınırsa

$$z^n J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+2n}}{\Gamma(1+n+k)k!2^{2k+n}}$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^n J_n(z)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(1+n+k)k!} \frac{(2k+2n)z^{2k+2n-1}}{2^{2k+n}}$$

$$= z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+n) z^{2k+n-1}}{2^{2k+n-1}(k+n)\Gamma(1+n-1+k)k!}$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^n J_n(z)\right) = z^n J_{n-1}(z) \tag{2.8}$$

bulunur.

Burada çarpımın türevi alınırsa

$$nz^{n-1}J_n(z) + z^n J_n'(z) = z^n J_{n-1}(z)$$

$$z^n J_n'(z) = z^n J_{n-1}(z) - nz^{n-1}J_n(z)$$

olup z^{n-1} ile bölünürse

$$zJ_n'(z) = zJ_{n-1}(z) - nJ_n(z) \tag{2.9}$$

diferensiyel rekürans bağıntısı elde edilir.

Şimdi Eş. 2.1'e geri dönüp eşitliğin her iki tarafı z^{-n} ile çarpılıp z ye göre türev alınırsa

$$z^{-n}J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(1+n+k)k!2^{2k+n}}$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^{-n}J_n(z)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k-1}2k}{\Gamma(1+n+k)k!2^{2k+n}}$$

$$= -z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+n-1}k}{\Gamma(1+n+k)k(k-1)!2^{2k+n-1}}$$

$$= -z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} z^{2k+n+1}}{\Gamma(1+n+1+k)k!2^{2k+n+1}}$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^{-n}J_n(z)\right) = -z^{-n}J_{n+1}(z) \tag{2.10}$$

çarpımın türevi alınırsa,

$$-nz^{-n-1}J_n(z) + z^{-n}J_n'(z) = -z^{-n}J_{n+1}(z)$$

$$z^{-n}J_n'(z) = -z^{-n}J_{n+1}(z) + nz^{-n-1}J_n(z)$$

z^{-n-1} ile bölünürse

$$zJ_n'(z) = -zJ_{n+1}(z) + nJ_n(z) \tag{2.11}$$

bulunur.

Eş. 2.11 ile Eş. 2.9 toplanırsa, Bessel fonksiyonları için

$$2J_n'(z) = J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) \tag{2.12}$$

reküransbağıntısı elde edilir.

Eş. 2.9 ve Eş. 2.11'in sol tarafları eşit olduğundan sağ tarafları eşitlenirse yine Bessel için başka bir reküransbağıntısı

$$zJ_{n-1}(z) - nJ_n(z) = -zJ_{n+1}(z) + nJ_n(z) \tag{2.13}$$

$$2nJ_n(z) = z\left[J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)\right] \tag{2.14}$$

olarak elde edilir.

2.4. Bessel Fonksiyonu İçin Doğurucu Fonksiyon

2.4 Teorem

z reel ve pozitif ve $t \neq 0$ bir kompleks değişkeni göstermek üzere

$$\exp\left[\frac{1}{2}z\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n \tag{2.15}$$

dir. Burada $F(z,t) = \exp\left[\frac{1}{2}z\left(t - \frac{1}{t}\right)\right]$ fonksiyonu $J_n(z)$ Bessel fonksiyonu için bir doğurucu fonksiyondur.

İspat

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(z)t^n + \sum_{n=0}^{\infty} J_n(z)t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} J_{-n-1}(z)t^{-n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} J_n(z)t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} J_{n+1}(z)t^{-n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} J_n(z)t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2k+n+1} (-1)^k}{2^{2k+n+1} k!(k+n+1)!} t^{-n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+n} t^n}{2^{2k+n} k!(k+n)!}$$

olup, Lemma 2 den bu eşitlik düzenlenirse,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{n-k+1} z^{n+1} (t)^{-n+2k-1}}{2^{n+1} k!(n+1-k)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k z^n t^{n-2k}}{2^n k!(n-k)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n-1/2]} \frac{(-1)^{n-k} z^n (t)^{-n+2k}}{2^n k!(n-k)!} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k t^{n-2k}}{k!(n-k)!} \frac{z^n}{2^n}$$

bulunur. Lemma 10 kullanılırsa,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{n-2k}}{k!(n-k)!} \frac{z^n}{2^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{t^{n-k} (-t^{-1})^k}{k!(n-k)!} \frac{z^n}{2^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(t - \frac{1}{t}\right)^n z^n}{n! 2^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[\frac{1}{2} z\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]^n}{n!}$$

$$= \exp\left[\frac{1}{2} z\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

2.5. Bessel Fonksiyonunun İntegral Gösterimi

2.5 Teorem

n bir tamsayı olmak üzere n yici basamaktan 1. tür Bessel fonksiyonu

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - z\sin\theta)\, d\theta \qquad , z > 0$$

integral gösterimine sahiptir.

İspat

Bir Laurent serisinin n yinci katsayısının formülünü

$$\exp\left(\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, t^n$$

eşitliğine uygulanırsa,

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \frac{dt}{t^{n+1}}$$

yazılabilir.

$t=e^{i\theta}$ denirse $dt=ie^{i\theta}d\theta$ olup

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{z}{2}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)}\frac{ie^{i\theta}}{\left(e^{i\theta}\right)^{n+1}}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi i}i\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{z}{2}\left(\cos\theta+i\sin\theta-\cos(-\theta)-i\sin(-\theta)\right)}e^{i\theta}e^{-i\theta(n+1)}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{z}{2}2i\sin\theta}e^{i\theta}e^{-i\theta(n+1)}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z\sin\theta-n\theta)}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\left(z\sin\theta-n\theta\right)+i\sin\left(z\sin\theta-n\theta\right)\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(z\sin\theta-n\theta\right)d\theta+\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\left(z\sin\theta-n\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi}2\int_{0}^{\pi}\cos\left(z\sin\theta-n\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos\left(z\sin\theta-n\theta\right)d\theta$$

bulunur ki, bu da istenilendir.

3. LEGENDRE POLİNOMLARI

3.1. Legendre Polinomları İçin Bir Doğurucu Fonksiyon

Legendre polinomları;

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)_{n-k}(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır.

3.1 Teorem

$|t|<1$ ve $|x|\le 1$ olmak üzere

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n \tag{3.2}$$

dir. Burada $F(x,t)=\left(1-2xt+t^2\right)^{-1/2}$ iki değişkenli fonksiyonu, Legendre polinomu için bir doğurucu fonksiyondur.

İspat

$(1-z)^{-\alpha}={}_1F_0(\alpha;-;z)$ olduğundan

$$\left(1-\left(2xt-t^2\right)\right)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(2xt-t^2\right)^n}{n!}$$

$\left(2xt-t^2\right)^n$ ifadesine binom açılımı uygulanırsa

$$\left(1-\left(2xt-t^2\right)\right)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}C\left(n,k\right)\left(-1\right)^k\left(2xt\right)^{n-k}\left(t^2\right)^k$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\left(-1\right)^k}{\left(n-k\right)!k!}\left(2x\right)^{n-k}t^{n+k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(-1\right)^k\left(2x\right)^{n-k}t^{n+k}}{\left(n-k\right)!k!}$$

olup, Lemma 1 den

$$\left(1-\left(2xt-t^2\right)\right)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[n/2\right]}\frac{\left(-1\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)_{n-k}\left(2x\right)^{n-2k}t^n}{k!\left(n-2k\right)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P_n\left(x\right)t^n$$

olarak elde edilir.

3.2. Legendre Polinomları İçin Diferensiyel Rekürans Bağıntıları

Eş. 3.2 ile verilen $\left(1-2xt+t^2\right)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n\left(x\right)t^n$ eşitliğinin x ve t değişkenlerine göre kısmi türevleri alınırsa

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-2t\right)\left(1-2xt+t^2\right)^{-3/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n'\left(x\right)t^n$$

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-3/2}=\sum_{n=1}^{\infty}P_n'\left(x\right)t^{n-1} \tag{3.3}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x+2t)\left(1-2xt+t^2\right)^{-3/2}=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}$$

$$(x-t)\left(1-2xt+t^2\right)^{-3/2}=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1} \tag{3.4}$$

bulunur. Eş. 3.3'deki $\left(1-2xt+t^2\right)^{-3/2}$ nin eşiti Eş. 3.4'de yerine yazılırsa,

$$(x-t)\sum_{n=1}^{\infty}P_n'(x)t^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}xP_n'(x)t^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(x)t^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(x)t^{n-1}$$

elde edilir. Bu eşitlik t^{n-1} e göre düzenlenirse

$$xP_n'(x)-P_{n-1}'(x)=nP_n(x) \tag{3.5}$$

rekürans bağıntısına ulaşılır.

Eş. 3.3 eşitliği $\left(1-t^2\right)$ ile, Eş. 3.4 eşitliği $2t$ ile çarpılırsa,

$$\left(1-t^2\right)\left(1-2xt+t^2\right)^{-3/2}=\left(1-t^2\right)\sum_{n=1}^{\infty}P_n'(x)t^{n-1}$$

$$\left(1-t^2\right)\left(1-2xt+t^2\right)^{-3/2}=\sum_{n=1}^{\infty}P_n'(x)t^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}P_n'(x)t^{n+1}$$

$$2t(x-t)\left(1-2xt+t^2\right)^{-3/2}=\sum_{n=0}^{\infty}2nP_n(x)t^{n}$$

olur. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkartılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\left[\left(1-t^2\right)-2t(x-t)\right]\left(1-2xt+t^2\right)^{-3/2}=\sum_{n=1}^{\infty}P_n'(x)t^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}P_n'(x)t^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}2nP_n(x)t^{n}$$

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-1/2}=\sum_{n=1}^{\infty}P_n'\left(x\right)t^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}P_n'\left(x\right)t^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}2nP_n\left(x\right)t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n\left(x\right)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_{n+1}'\left(x\right)t^n-\sum_{n=2}^{\infty}P_{n-1}'\left(x\right)t^n-\sum_{n=0}^{\infty}2nP_n\left(x\right)t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(2n+1\right)P_n\left(x\right)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_{n+1}'\left(x\right)t^n-\sum_{n=2}^{\infty}P_{n-1}'\left(x\right)t^n$$

$$\left(2n+1\right)P_n\left(x\right)=P_{n+1}'\left(x\right)-P_{n-1}'\left(x\right) \tag{3.6}$$

şeklinde başka bir rekürans bağıntısı bulunur.

Eş. 3.5 ve Eş. 3.6'daki diferensiyel rekürans bağıntıları taraf tarafa toplanırsa, Legendre polinomları için

$$xP_n'\left(x\right)=P_{n+1}'\left(x\right)-\left(n+1\right)P_n\left(x\right) \tag{3.7}$$

diferensiyel rekürans bağıntısı elde edilir.

Eş. 3.7'de n yerine (n-1) yazılırsa

$$xP_{n-1}'\left(x\right)=P_n'\left(x\right)-nP_{n-1}\left(x\right)$$

bulunur. Bu eşitlikte $P_{n-1}'\left(x\right)$ in Eş. 3.5'de bulunan değeri yerine yazılırsa

$$x\left[xP_n'\left(x\right)-nP_n\left(x\right)\right]=P_n'\left(x\right)-nP_{n-1}\left(x\right)$$

$$\left(x^2-1\right)P_n'\left(x\right)=nxP_n\left(x\right)-nP_{n-1}\left(x\right) \tag{3.8}$$

elde edilir. Eş. 3.8 ifadesi de Legendre polinomları için yeni bir rekürans bağıntısıdır.

3.3. Legendre Polinomlarının Türev İçermeyen (Yalın) Rekürans Bağıntısı

Eş. 3.5 eşitliğinin her iki yanı x^2-1 ile çarpılırsa

$$\left(x^2-1\right)xP_n'\left(x\right)-\left(x^2-1\right)P_{n-1}'\left(x\right)=\left(x^2-1\right)nP_n\left(x\right)$$

olur. Eş. 3.8'den $\left(x^2-1\right)P_n'\left(x\right)$ ve $\left(x^2-1\right)P_{n-1}'\left(x\right)$ ifadelerinin değerleri bu eşitlikte yerine yazılırsa

$$x\left[nxP_n\left(x\right)-nP_{n-1}\left(x\right)\right]-\left[\left(n-1\right)xP_{n-1}\left(x\right)-\left(n-1\right)P_{n-2}\left(x\right)\right]=\left(x^2-1\right)nP_n\left(x\right)$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$nP_n\left(x\right)=\left(2n-1\right)xP_{n-1}\left(x\right)-\left(n-1\right)P_{n-2}\left(x\right), \qquad ,n\geq 2 \tag{3.9}$$

biçiminde Legendre polinomları için türev içermeyen bir rekürans bağıntısı elde edilir.

3.4. Legendre Diferensiyel Denklemi

Eş. 3.7'de n yerine n-1 yazılırsa

$$xP_{n-1}'\left(x\right)=P_n'\left(x\right)-nP_{n-1}\left(x\right) \tag{3.10}$$

olur.
Eş. 3.10 eşitliğinin her iki yanının x'e göre türevi alınırsa;

$$P_{n-1}'\left(x\right)+xP_{n-1}''\left(x\right)=P_n''\left(x\right)-nP_{n-1}'\left(x\right)$$

$$xP_{n-1}''\left(x\right)=P_n''\left(x\right)-\left(n+1\right)P_{n-1}'\left(x\right) \tag{3.11}$$

elde edilir.

Diğer yandan Eş. 3.5'in x'e göre türevi alınırsa;

$$P_n'(x)+xP_n''(x)=nP_n'(x)+P_{n-1}''(x)$$

$$P_{n-1}''(x)=(1-n)P_n'(x)+xP_n''(x) \tag{3.12}$$

elde edilir.

Eş. 3.5 ve Eş. 3.12 düzenlenip Eş. 3.11'de yerine yazılırsa;

$$x\left[xP_n''(x)+P_n'(x)-nP_n'(x)\right]=P_n''(x)-(n+1)\left[xP_n'(x)-nP_n(x)\right]$$

olup, bu eşitlik düzenlenirse,

$$x^2P_n''(x)+xP_n'(x)-nxP_n'(x)=P_n''(x)-nxP_n'(x)-n^2P_n(x)-xP_n'(x)+nP_n(x)$$

$$\left(1-x^2\right)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0 \tag{3.13}$$

şeklinde Legendre diferensiyel denklemi elde edilir.

3.5. Legendre Polinomları İçin Rodrigues Formülü

Legendre polinomları Eş. 3.1'de

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)_{n-k}(2x)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

şeklinde verilmişti.

Lemma 9 dan

$$2^{2n-2k}\left(\frac{1}{2}\right)_{n-k}=\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!}$$

değeri Legendre polinomunda yerine yazılırsa,

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!x^{n-2k}}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} \tag{3.14}$$

bulunur.

$$D=\frac{d}{dx} \text{ olmak üzere } D^s x^m=\frac{m!x^{m-s}}{(m-s)!} \tag{3.15}$$

olduğundan

Eş. 3.14'deki $\frac{(2n-2k)!\mathrm{x}^{n-2k}}{(n-2k)!}$ yerine $D^n x^{2n-2k}$ yazılırsa

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k D^n x^{2n-2k}}{2^n k!(n-k)!} \tag{3.16}$$

olur.

Burada $C_{n,k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ binom katsayısı dikkate alındığında Eş. 3.16 eşitliği

$$P_n(x)=\frac{D^n}{2^n n!}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_{n,k}x^{2n-2k} \tag{3.17}$$

bulunur.

Eş. 3.17 eşitliğinin sağındaki toplam k=0 dan k=n ye genişletilebilir. Çünkü $\left[n/2\right] < k \le n$ için $0 \le 2n-2k < n$ olup, k nın bu değeri için $D^n x^{2n-2k} = 0$ dır. Böylece

$$P_n\left(x\right) = \frac{D^n}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k C_{n,k} x^{2n-2k} \tag{3.18}$$

bulunur.

Diğer taraftan $\left(x^2-1\right)^n$ nin binom açılımının $\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^k C_{n,k} x^{2n-2k}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$P_n\left(x\right) = \frac{1}{2^n n!} D^n \left(x^2-1\right)^n \tag{3.19}$$

elde edilir.

Eş. 3.19 ifadesine Legendre polinomları için Rodrigues formülü denir.

Bu formül

$$P_n\left(x\right) = \frac{1}{2^n n!} D^n \left[\left(x-1\right)^n \left(x+1\right)^n\right]$$

olarak yazılıp,

$$D^n\left(uv\right) = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}\left(D^k u\right)\left(D^{n-k} v\right) \tag{3.20}$$

şeklindeki Leibnitz formülü kullanılırsa,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} \frac{n!(x-1)^{n-k} \, n!(x+1)^k}{(n-k)!\text{k}!}$$

ya da

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C^2{}_{n,k} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{x+1}{2}\right)^k \tag{3.21}$$

elde edilir.

3.6. Legendre Polinomları İçin Bateman Doğurucu Fonksiyonu

Eş. 3.21 formülü düzenlenirse

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2 \left[\frac{1}{2}(x-1)\right]^{n-k} \left[\frac{1}{2}(x+1)\right]^k}{\left[(n-k)!\right]^2 (\text{k}!)^2} \tag{3.22}$$

yazılabilir. Eş. 3.22 eşitliğinin her iki tarafı $\frac{t^n}{(n!)^2}$ ile çarpılıp, $n=0$ dan $n=\infty$ a kadar toplanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x) t^n}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n!)^2 \left[\frac{1}{2}(x-1)\right]^{n-k} \left[\frac{1}{2}(x+1)\right]^k}{\left[(n-k)!\right]^2 (\text{k}!)^2 (n!)^2} t^n$$

olur.

Lemma 1 den,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x)t^n}{(n!)^2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[\frac{1}{2}(x+1)t\right]^n}{(1)_n(n!)}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\left[\frac{1}{2}(x-1)t\right]^n}{(1)_n(n!)}\right)\right)$$

$$={}_0F_1\left(-;1;\frac{1}{2}(x+1)t\right){}_0F_1\left(-;1;\frac{1}{2}(x-1)t\right)$$

elde edilir ki bu, Legendre polinomları için Bateman doğurucu fonksiyonu adını alır.

3.7. Legendre Polinomunun Hipergeometrik Fonksiyon Cinsinden Gösterimi

Legendre polinomlarının bir doğurucu fonksiyonu,

$$\left(1-2xt+t^2\right)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$

şeklindeydi.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n&=\left(1-2xt+t^2\right)^{-1/2}\\&=\left[(1-t)^2-2t(x-1)\right]^{-1/2}\\&=(1-t)^{-1}\left[1-\frac{2t(x-1)}{(1-t)^2}\right]^{-1/2}\\&=(1-t)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n\left(\frac{2t(x-1)}{(1-t)^2}\right)^n\end{aligned}$$

yazılabilir.

Burada Lemma 6 kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = (1-t)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!} (-1)^n \left(\frac{2t(x-1)}{(1-t)^2} \right)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k 2^k t^k (x-1)^k}{k!(1-t)^{2k+1}}$$

olur.

$$(1-t)^{-2k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2k-1}{n} (-1)^n t^n$$

binom açılımı uygulanırsa yine Lemma 6 dan

$$(1-t)^{-2k-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2k+1)_n}{n!} t^n$$

yazılabilir.

Buna göre

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k 2^k t^k (x-1)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2k+1)_n}{n!} t^n$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k (2k+1)_n 2^k (x-1)^k t^{n+k}}{k!\mathrm{n}!}$$

bulunur.

Lemma 5 den $\left(2k+1\right)_n = \dfrac{\left(n+2k\right)!}{\left(2k\right)!}$ değeri yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(x\right)t^n = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k \left(n+2k\right)!2^k \left(x-1\right)^k t^{n+k}}{k!\mathrm{n}!\left(2k\right)!}$$

olur.

Burada Lemma 9 uygulanırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(x\right)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(n+2k\right)!\left(x-1\right)^k t^{n+k}}{k!\mathrm{n}!2^k k!}$$

bulunur. Sırasıyla Lemma 1a ve Lemma 8 kullanıldığında,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(x\right)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{\left(-1\right)^k \left(-n\right)_k \left(n+1\right)_k \left(x-1\right)^k t^n}{\left(k!\right)^2 2^k}$$

eşitliğine ulaşılır.

Buradan da hipergeometrik fonksiyonun tanımından,

$$P_n\left(x\right) = {}_2F_1\left[\begin{matrix} -n, & n+1; & \\ & & \dfrac{1-x}{2} \\ & 1; & \end{matrix}\right]$$

elde edilir.

3.8. Legendre Polinomlarının Ortogonalliği

$P_n(x)$ lerin sağladığı Legendre diferensiyel denkleminin

$$\left(1-x^2\right)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0 \tag{3.23}$$

olduğu bilinmektedir.

Eş. 3.23 denklemi düzenlenirse;

$$\left[\left(1-x^2\right)P_n'(x)\right]'+n(n+1)P_n(x)=0 \tag{3.24}$$

olur.

$P_m(x)$ Legendre polinomu Eş. 3.24 denklemini sağlayacağından,

$$\left[\left(1-x^2\right)P_m'(x)\right]'+m(m+1)P_m(x)=0 \tag{3.25}$$

yazılabilir.

Eş. 3.24 denklemi $P_m(x)$ ile, Eş. 3.25 denklemi $P_n(x)$ ile çarpılıp, taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}&P_m(x)\left[\left(1-x^2\right)P_n'(x)\right]'-P_n(x)\left[\left(1-x^2\right)P_m'(x)\right]'\\&+\left[n(n+1)-m(m+1)\right]P_n(x)P_m(x)=0\end{aligned} \tag{3.26}$$

bulunur.

Bu ifade düzenlenirse;

$$\left[\left(1-x^2\right)\left\{P_m(x)P_n'(x)-P_m'(x)P_n(x)\right\}\right]'+\left[n^2-m^2+n-m\right]P_n(x)P_m(x)=0$$

$$\left(n-m\right)\left(n+m+1\right)P_n(x)P_m(x)=\left[\left(1-x^2\right)\left\{P_m'(x)P_n(x)-P_m(x)P_n'(x)\right\}\right]' \tag{3.27}$$

olur.

Eş. 3.27 eşitliğinin $\left[-1,1\right]$ aralığında integrali alındığında,

$$\left(n-m\right)\left(n+m+1\right)\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=\left[\left(1-x^2\right)\left\{P_m'(x)P_n(x)-P_m(x)P_n'(x)\right\}\right]_{-1}^{1}$$

bulunur.

Buradan $n\neq m$ için

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx=0 \qquad , \tag{3.28}$$

elde edilir.

Eş. 3.28 , $\left[-1,1\right]$aralığında $P_m(x)$ Legendre polinomlarının ortogonal bir sistem oluşturduğunu gösterir.

3.9. Legendre Polinomlarının Normu

Legendre polinomlarının doğurucu fonksiyonundan

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n \tag{3.29}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{m=0}^{\infty}P_m(x)t^m \tag{3.30}$$

yazılabilir.

Bu eşitlikler taraf tarafa çarpılırsa,

$$\frac{1}{1-2xt+t^2}=\sum_{\substack{n,m=0\\ n=m}}^{\infty}P_n(x)P_m(x)t^{n+m}+\sum_{\substack{n,m=0\\ n\neq m}}^{\infty}P_n(x)P_m(x)t^{n+m}$$

olur. Burada her iki yanın $[-1,1]$ aralığında x değişkenine göre integrali alındığında, eşitliğin sol tarafı

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1-2xt+t^2}&=\left[-\frac{1}{2t}\ln\left(1+t^2-2xt\right)\right]_{-1}^{1}\\&=-\frac{1}{2t}\ln\frac{(1-t)^2}{(1+t)^2}\\&=t^{-1}\left[\ln(1+t)-\ln(1-t)\right]\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^m}{m+1}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2t^{2n}}{2n+1}\qquad (m=2n \text{ alınırsa})\end{aligned}$$

olur.

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0 \qquad , m \neq n$$

olduğu dikkate alınarak eşitliğin sağ tarafı integre edildiğinde,

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^{1} \left[P_n(x) \right]^2 dx + \sum_{n,m=0}^{\infty} t^{n+m} \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} \int_{-1}^{1} \left[P_n(x) \right]^2 dx$$

bulunur. t^{2n} in katsayılarının eşitlenmesiyle,

$$\int_{-1}^{1} \left[P_n(x) \right]^2 dx = \frac{2}{2n+1} = \left\| P_n \right\|^2$$

elde edilir.

Buna göre, Legendre polinomlarının normu

$$\left\| P_n \right\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}, \qquad n = 0,1,2,... \qquad (3.31)$$

olarak bulunur.

4. HERMİTE POLİNOMLARI

4.1. Hermite Polinomları İçin Bir Doğurucu Fonksiyon

Hermite polinomları,

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}\, n!}{k!(n-2k)!} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır. Diğer taraftan,

$$\exp\left(2xt - t^2\right) = \exp(2xt)\exp\left(-t^2\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n t^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}$$

olup,
Lemma 2a dan

$$\exp\left(2xt - t^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}\, t^n}{k!(n-2k)!}$$

bulunur.

Buradan x ve t nin tüm sonlu değerleri için

$$\exp\left(2xt - t^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)\, t^n}{n!} \tag{4.2}$$

şeklinde Hermite polinomları için bir doğurucu fonksiyon elde edilir.

4.2. Hermite Polinomları İçin Rekürans Bağıntıları

$$F = G\left(2xt - t^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n\left(x\right) t^n}{n!} \tag{4.3}$$

eşitliğinin x ve t değişkenliklerine göre kısmi türevleri alınırsa

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(2t\right) G' , \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \left(2x - 2t\right) G' \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n{}'\left(x\right)}{n!} t^n , \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n H_n\left(x\right) t^{n-1}}{n!} \tag{4.5}$$

olur.

Eş. 4.4’den,

$$\left(x - t\right) \frac{\partial F}{\partial x} - t \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{4.6}$$

bulunur.

Eş. 4.5 düzenlenip Eş. 4.6’da yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} x \frac{H_n{}'\left(x\right)}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n{}'\left(x\right)}{n!} t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{H_n\left(x\right)}{n!} t^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x \frac{H_n{}'\left(x\right)}{n!} t^n - \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{H_n\left(x\right)}{n!} t^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}{}'\left(x\right)}{\left(n-1\right)!} t^n$$

bulunur.

Eşitlik t^n in katsayılarına göre düzenlenirse;

$$\frac{xH_n{}'(x)}{n}-\frac{nH_n(x)}{n}=H_{n-1}{}'(x)$$

$$xH_n{}'(x)-nH_n(x)=nH_{n-1}{}'(x) \tag{4.7}$$

şeklinde Hermite polinomları için bir rekürans bağıntısı elde edilir.

Diğer taraftan, Eş. 4.2 ve Eş. 4.4'den

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2H_n(x)}{n!}t^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n{}'(x)}{n!}t^n \tag{4.8}$$

yazılabilir.

$H_0{}'(x)=0$ ve $n\geq 1$ olmak üzere Eş. 4.8 t^n in katsayılarına göre düzenlenirse

$$H_n{}'(x)=2nH_{n-1}(x), \qquad (n\geq 1) \tag{4.9}$$

bulunur ki bu da, Hermite polinomları için başka bir rekürans bağıntısıdır.

Eş. 4.9'da bulunan $H_n{}'(x)$ değeri Eş. 4.7'de yerine yazılıp düzenlenirse;

$$H_n(x)=2xH_{n-1}(x)-H_{n-1}{}'(x) \tag{4.10}$$

şeklinde başka bir diferensiyel rekürans bağıntısı elde edilir.

Eş. 4.9’da n yerine n-1 alınırsa

$$H_{n-1}'(x) = 2(n-1)H_{n-2}(x)$$

bulunur.

$H_{n-1}'(x)$ in bu değeri Eş. 4.10’da yerine yazılırsa;

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x) \tag{4.11}$$

şeklinde Hermite polinomu için yalın bir rekürans bağıntısı elde edilir.

4.3. Hermite Diferensiyel Denklemi

Eş. 4.9’da eşitliğin her iki yanının x e göre türevi alınırsa,

$$H_n''(x) = 2nH_{n-1}'(x) \tag{4.12}$$

olup,

Eş. 4.10’dan $H_{n-1}'(x)$ çekilip Eş. 4.12’de yerine yazılırsa,

$$H_n''(x) = 2n\left[2xH_{n-1}(x) - H_n(x)\right] \tag{4.13}$$

bulunur.

Eş. 4.13'deki $H_{n-1}(x)$ yerine Eş. 4.9'daki eşiti yazıldığında,

$$H_n''(x) = 2n\left[2x\frac{H_n'(x)}{2n} - H_n(x)\right]$$

olur. Buradaki terimler düzenlenirse

$$H_n''(x) = 2xH_n'(x) - 2nH_n(x)$$

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0 \tag{4.14}$$

şeklinde Hermite diferensiyel denklemi elde edilir.

4.4. Hermite Polinomları İçin Rodrigues Formülü

Eş. 4.2'de Hermite polinomlarının doğurucu fonksiyonu olan $\exp\left(2xt - t^2\right)$ ifadesine Maclaurin açılımı uygulanırsa,

$$H_n(x) = \left[\frac{d^n}{dt^n}\exp\left(2xt - t^2\right)\right]_{t=0} \tag{4.15}$$

bulunur.

t den bağımsız $\exp\left(-x^2\right)$ fonksiyonu Eş. 4.15 eşitliğinin her iki tarafı ile çarpılırsa;

$$\exp\left(-x^2\right)H_n(x) = \left[\frac{d^n}{dt^n}\exp\left\{-(x-t)^2\right\}\right]_{t=0}$$

yazılır.

Burada $x-t=w$ dönüşümü yapılırsa,

$$\exp\left(-x^2\right)H_n\left(x\right)=\left(-1\right)^n\left[\frac{d^n}{dw^n}\exp\left\{-w^2\right\}\right]_{w=x}$$

$$\exp\left(-x^2\right)H_n\left(x\right)=\left(-1\right)^n\frac{d^n}{dx^n}\exp\left(-x^2\right)$$

olur.
Bu eşitlik düzenlendiğinde,

$$H_n\left(x\right)=\left(-1\right)^n\exp\left(x^2\right)\frac{d^n}{dx^n}\exp\left(-x^2\right) \tag{4.16}$$

olarak Hermite polinomları için Rodrigues formülü elde edilir.

4.5. Hermite Polinomları İçin Başka Bir Doğurucu Fonksiyon

Hermite polinomunun Eş. 4.1 ile verilen tanımının her iki tarafı $\frac{(c)_n t^n}{n!}$ ile çarpılıp, $n=0$ dan $n=\infty$ a kadar toplam alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n H_n\left(x\right)t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{\left(-1\right)^k\left(c\right)_n\left(2x\right)^{n-2k}t^n}{k!\left(n-2k\right)!} \tag{4.17}$$

yazılabilir.

Eş. 4.17 eşitliğinde Lemma 2b uygulanırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n H_n\left(x\right)t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k\left(c\right)_{n+2k}\left(2x\right)^n t^{n+2k}}{k!n!}$$

bulunur.

Lemma 3 den,

$(c)_{n+2k} = (c+2k)_n (c)_{2k}$ değeri yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n H_n(x) t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c+2k)_n (2xt)^n}{n!} \frac{(-1)^k (c)_{2k} t^{2k}}{k!}$$

olup, sırasıyla Lemma 6 ve Lemma 7 kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n H_n(x) t^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}c\right)_k \left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\right)_k (-1)^k 2^{2k} t^{2k}}{k!(1-2xt)^{c+2k}}$$

elde edilir.

Bu eşitlik düzenlenirse,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n H_n(x) t^n}{n!} = (1-2xt)^{-c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}c\right)_k \left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\right)_k -4t^2}{k!(1-2xt)^2}$$

$$= (1-2xt)^{-c} \, {}_2F_0 \left[\begin{matrix} \frac{1}{2}c, \quad \frac{1}{2}c+\frac{1}{2}; & \\ & \dfrac{-4t^2}{(1-2xt)^2} \\ -; & \end{matrix} \right] \tag{4.18}$$

olarak Hermite polinomları için c keyfi sabitini içeren bir doğurucu fonksiyon bulunur.

4.6. Hermite Polinomlarının Ortogonalliği ve Normu

Hermite polinomları, $(-\infty,\infty)$ aralığında $\exp(-x^2)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir.

Bu polinomların normu da

$$\|H_n\| = \left(2^n n!\sqrt{\pi}\right)^{1/2}; \qquad n = 0,1,2 \tag{4.19}$$

şeklindedir.

Bu polinomlar için ortogonallik ve norm özellikleri Legendre polinomlarına benzer olarak gösterilebilir.

5. LAGUERRE POLİNOMU

5.1. $L_n^{(\alpha)}(x)$ in Tanımı

n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere Laguerre polinomları,

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!} {}_1F_1(-n; 1+\alpha; x) \tag{5.1}$$

$$= \frac{(1+\alpha)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \, x^k}{(1+\alpha)_k \, k!}$$

olarak tanımlanır.

$(-n)_k$ için Lemma 4 uygulanırsa,

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \, n! x^k}{(n-k)!(1+\alpha)_k \, k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (1+\alpha)_n \, x^k}{(n-k)!(1+\alpha)_k \, k!} \tag{5.2}$$

bulunur.

Bu polinomlar Laguerre, genelleştirilmiş Laguerre ya da Sonine polinomları olarak bilinir. $\alpha = 0$ olduğunda Laguerre ya da basit Laguerre polinomu olarak adlandırılır.

$$L_n(x) = L_n^{(0)}(x) = {}_1F_1(-n; 1; x) \tag{5.3}$$

şeklinde yazılabilir.

5.2. Genelleştirilmiş Laguerre Polinomu İçin Doğurucu Fonksiyon

Eş. 5.1 eşitliğinin her iki yanı $\dfrac{t^n}{(1+\alpha)_n}$ ile çarpılır ve n=0 dan ∞ a kadar toplam alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^{(\alpha)}(x)t^n}{(1+\alpha)_n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^k t^n}{(n-k)!(1+\alpha)_k\, k!} \tag{5.4}$$

bulunur.

$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n t^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}t^n$ şeklindeki iki kuvvet serisinin Cauchy çarpımı uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^{(\alpha)}(x)t^n}{(1+\alpha)_n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^n t^n}{n!(1+\alpha)_n}\right)$$

$$e^t\,{}_0F_1(-;1+\alpha;-xt)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^{(\alpha)}(x)t^n}{(1+\alpha)_n} \tag{5.5}$$

olarak genelleştirilmiş Laguerre polinomu için bir doğurucu fonksiyon bulunur.

c keyfi bir sabit olmak üzere

Eş. 5.2 eşitliğinin her iki yanı $\dfrac{(c)_n t^n}{(1+\alpha)_n}$ ile çarpılır ve n=0 dan ∞ a kadar toplanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n L_n^{(\alpha)}(x)t^n}{(1+\alpha)_n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(c)_n(-x)^k t^n}{(n-k)!(1+\alpha)_k\, k!}$$

olur.

Eşitliğin sağına Lemma 1b uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n L_n^{(\alpha)}(x)t^n}{(1+\alpha)_n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c)_{n+k}(-x)^k t^{n+k}}{n!(1+\alpha)_k\, k!}$$

bulunur.

$(c)_{n+k}$ nın değeri Lemma 3 ten yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n L_n^{(\alpha)}(x)t^n}{(1+\alpha)_n}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c+k)_n t^n (c)_k (-xt)^k}{n!(1+\alpha)_k\, k!}$$

olur.

Lemma 6 dan $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c+k)_n t^n}{n!}=(1-t)^{-c-k}$ değeri yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(c)_n L_n^{(\alpha)}(x)t^n}{(1+\alpha)_n}&=\frac{1}{(1-t)^c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c)_k(-xt)^k}{(1+\alpha)_k\, k!(1-t)^k}\\&=\frac{1}{(1-t)^c}\,{}_1F_1\begin{bmatrix}c; & \dfrac{-xt}{1-t}\\ 1+\alpha; & \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{5.6}$$

c keyfi sabitini içeren genelleştirilmiş Laguerre polinomları için farklı bir doğurucu fonksiyon elde edilir.

Eş. 5.6'da $c=1+\alpha$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha)_n L_n^{(\alpha)}(x)t^n}{(1+\alpha)_n}=\frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}}\,{}_1F_1\left[\begin{matrix}1+\alpha; & \dfrac{-xt}{1-t}\\ 1+\alpha; & \end{matrix}\right]$$

$$=\frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha)_n}{(1+\alpha)_n}\left(\frac{-xt}{1-t}\right)^n$$

$$=\frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-xt}{1-t}\right)^n$$

$$=\frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}}\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right) \tag{5.7}$$

olur.

Eş. 5.7'de genelleştirilmiş Laguerre polinomları için diğer bir doğurucu fonksiyondur.

5.3. Genelleştirilmiş Laguerre Polinomları İçin Diferensiyel Rekürans Bağıntıları

Eş. 5.5'de gösterilen doğurucu fonkisyona $G(x,t)$ denilirse;

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^{(\alpha)}(x)t^n}{(1+\alpha)_n}=e^t\,{}_0F_1(-;1+\alpha;-xt)$$

$$=e^t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n t^n}{n!(1+\alpha)_n} \tag{5.8}$$

olur.

Eşitliğin her iki yanının x ve t değişkenlerine göre kısmi türevleri alınırsa,

$$\frac{\partial G}{\partial x}=e^{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}nx^{n-1}t^{n}}{n!\left(1+\alpha\right)_{n}} \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}=e^{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}x^{n}t^{n}}{n!\left(1+\alpha\right)_{n}}+e^{t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}x^{n}nt^{n-1}}{n!\left(1+\alpha\right)_{n}} \tag{5.10}$$

olur.

Eş. 5.8’den $G\left(x,t\right)$ değeri ve Eş. 5.9’dan $\frac{\partial G}{\partial x}$ değeri Eş. 5.10’da yerine yazılırsa,

$$\frac{\partial G}{\partial t}=G+\frac{1}{t}x\frac{\partial G}{\partial x}$$

$$x\frac{\partial G}{\partial x}=t\frac{\partial G}{\partial t}-tG \tag{5.11}$$

bulunur.

$D=\frac{d}{dx}$ olmak üzere;

Eş. 5.11’de G nin türevlerinin değerleri yerlerine yazılırsa,

$$x\sum_{n=1}^{\infty}DL_{n}^{(\alpha)}\left(x\right)\frac{t^{n}}{\left(1+\alpha\right)_{n}}=t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_{n}^{(\alpha)}\left(x\right)nt^{n-1}}{\left(1+\alpha\right)_{n}}-t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_{n}^{(\alpha)}\left(x\right)t^{n}}{\left(1+\alpha\right)_{n}}$$

olur.

Terimler $\frac{t^n}{(1+\alpha)_n}$ e göre düzenlenirse,

$$x\sum_{n=1}^{\infty} DL_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{(1+\alpha)_n} = \sum_{n=1}^{\infty} nL_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{(1+\alpha)_n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_{n-1}^{(\alpha)}(x)t^n}{(1+\alpha)_{n-1}}$$

bulunur.

$$\frac{1}{(1+\alpha)_{n-1}} = \frac{(\alpha+n)}{(1+\alpha)_n}$$

olduğu da dikkate alındığında,

$$xDL_n^{(\alpha)}(x) = nL_n^{(\alpha)}(x) - (\alpha+n)L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \qquad (n \geq 1) \tag{5.12}$$

biçiminde genelleştirilmiş Laguerre polinomları için bir rekürans bağıntısı elde edilir.

Eş. 5.7 eşitliğinin her iki tarafının x değişkenine göre türevi alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} DL_n^{(\alpha)}(x)t^n = \frac{1}{(1-t)^{1+\alpha}}\left(\frac{-t}{1-t}\right)\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)$$

olur.

Buradan eşitlik düzenlenirse,

$$\sum_{n=0}^{\infty} DL_n^{(\alpha)}(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} DL_n^{(\alpha)}(x)t^{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x)t^{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} DL_n^{(\alpha)}(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(DL_{n-1}^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)\right)t^n$$

bulunur.

Burada da t^n in katsayıları eşitlenirse;

$$DL_n^{(\alpha)}(x) = DL_{n-1}^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \qquad n \geq 1 \tag{5.13}$$

biçiminde bir başka rekürans bağıntısı elde edilir.

Eş. 5.12 eşitliğinin her iki yanı x ile bölünürse,

$$DL_n^{(\alpha)}(x) = \frac{n}{x} L_n^{(\alpha)}(x) - \frac{(\alpha+n)}{x} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) \tag{5.14}$$

bulunur.

Eş. 5.14'te n yerine n-1 alınırsa,

$$DL_{n-1}^{(\alpha)}(x) = \frac{n-1}{x} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - \frac{(\alpha+n-1)}{x} L_{n-2}^{(\alpha)}(x) \tag{5.15}$$

biçiminde yazılabilir.

Eş. 5.14 ve Eş. 5.15 deki $DL_n^{(\alpha)}(x)$ ve $DL_{n-1}^{(\alpha)}(x)$ değerleri, 5.13'de yerlerine yazılırsa,

$$\frac{n}{x} L_n^{(\alpha)}(x) - \frac{\alpha+n}{x} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = \frac{n-1}{x} L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - \frac{\alpha+n-1}{x} L_{n-2}^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$$

bulunur.

Bu son eşitlik de düzenlendiğinde,

$$nL_n^{(\alpha)}(x) = (2n-1+\alpha-x)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n-1+\alpha)L_{n-2}^{(\alpha)}(x) \tag{5.16}$$

biçiminde genelleştirilmiş Laguerre polinomları için türev içermeyen bir rekürans bağıntısı elde edilir.

5.4. Genelleştirilmiş Laguerre Diferensiyel Denklemi

Eş. 5.12 eşitliğinden $L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$ çekilirse,

$$L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = \frac{n}{\alpha+n}L_n^{(\alpha)}(x) - \frac{x}{\alpha+n}DL_n^{(\alpha)}(x) \tag{5.17}$$

olur.

Eşitliğin her iki yanının x değişkenine göre türevi alınırsa,

$$DL_{n-1}^{(\alpha)}(x) = \frac{n}{\alpha+n}DL_n^{(\alpha)}(x) - \frac{x}{\alpha+n}D^2L_n^{(\alpha)}(x) - \frac{1}{\alpha+n}DL_n^{(\alpha)}(x) \tag{5.18}$$

bulunur.

$L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$ ve $DL_{n-1}^{(\alpha)}(x)$ lerin Eş. 5.17 ve Eş. 5.18'deki değerleri Eş. 5.13'de yerine yazılırsa,

$$DL_n^{(\alpha)}(x) = \frac{n}{\alpha+n}DL_n^{(\alpha)}(x) - \frac{x}{\alpha+n}D^2L_n^{(\alpha)}(x) - \frac{1}{\alpha+n}DL_n^{(\alpha)}(x)$$

$$-\frac{n}{\alpha+n}L_n^{(\alpha)}(x) + \frac{x}{\alpha+n}DL_n^{(\alpha)}(x)$$

bulunur.

Eşitlik düzenlenirse,

$$xD^2L_n^{(\alpha)}(x)+(1+\alpha-x)DL_n^{(\alpha)}(x)+nL_n^{(\alpha)}(x)=0 \tag{5.19}$$

şeklinde genelleştirilmiş Laguerre diferensiyel denklemi elde edilir.

5.5. Genelleştirilmiş Laguerre Polinomlarının Ortogonalliği ve Normu

$L_n^{(\alpha)}(x)$ genelleştirilmiş Laguerre polinomlarının kümesi, $(0,\infty)$ aralığında $x^\alpha e^{-x}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal bir sistem teşkil ederler.

Genelleştirilmiş Laguerre polinomlarının normu da,

$$\left\|L_n^{(\alpha)}\right\|=\left[\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{n!}\right]^{1/2}$$

şeklindedir.

6. DİĞER POLİNOM AİLELERİ

6.1. Diğer Polinom Aileleri İçin Doğurucu Fonksiyon

6.1 Teorem

c keyfi ve

$$\psi(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n u^n \qquad \gamma_0\neq 0$$

olmak üzere $f_n(x)$ fonksiyonları,

$$(1-t)^{-c}\,\psi\left(\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)t^n \tag{6.1}$$

formunda bir doğurucu fonksiyon bağıntısına sahip olsunlar. O takdirde, $n\geq 1$ için Eş. 6.1 ile tanımlanan $f_n(x)$ polinomları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$f_n(x)=\frac{(c)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,(c+n)_k\,\gamma_k x^k}{\left(\frac{1}{2}c\right)_k\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\right)_k} \tag{6.2}$$

$$xf_n^{'}(x)-nf_n(x)=-(c+n-1)f_{n-1}(x)-xf_{n-1}^{'}(x), \qquad n\geq 1 \tag{6.3}$$

$$xf_n^{'}(x)-nf_n(x)=-c\sum_{k=0}^{n-1}f_k(x)-2x\sum_{k=0}^{n-1}f_k^{'}(x), \qquad n\geq 1 \tag{6.4}$$

$$xf_n^{'}(x)-nf_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}(c+2k)f_k(x), \qquad n\geq 1 \tag{6.5}$$

İspat

Eş. 6.1'den,

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n = (1-t)^{-c}\,\psi\left(\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right)$$

$$= (1-t)^{-c}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k\left(\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k(-4)^k x^k t^k}{(1-t)^{2k+c}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\gamma_k(-4)^k x^k t^k (2k+c)_n}{n!}t^n$$

$$= \sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{\gamma_k(-1)^k(2)^{2k}x^k(c)_{2k+n}}{n!(c)_{2k}}t^{n+k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\gamma_k x^k (c)_{k+n}\,t^n}{(n-k)!\frac{(c)_{2k}}{2^{2k}}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\gamma_k x^k (c)_{k+n}}{(n-k)!\left(\frac{c}{2}\right)_k\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\right)_k}t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\gamma_k x^k (c+n)_k (c)_n}{\mathrm{n}!\left(\frac{1}{2}c\right)_k\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\right)_k}\right]t^n$$

olur.

Bu son eşitlikte t^n in katsayıları eşitlenirse,

$$f_n(x)=\frac{(c)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,\gamma_k x^k\,(c+n)_k}{\text{n!}\left(\frac{1}{2}c\right)_k\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\right)_k}$$

bulunur.

Şimdi, Eş. 6.1'den,

$$F(x,t)=(1-t)^{-c}\,\psi\left(\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right) \tag{6.6}$$

olsun. $F(x,t)$ fonksiyonunun x ve t değişkenlerine göre kısmi türevleri alınırsa,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{-4t}{(1-t)^2}(1-t)^{-c}\,\psi'$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-4t(1-t)^{-c-2}\,\psi' \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=-c(1-t)^{-c-1}(-1)\psi+(-4x)\left[\frac{(1-t)^2-2(1-t)(-1)t}{(1-t)^4}\right](1-t)^{-c}\,\psi'$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=c(1-t)^{-c-1}\,\psi-4x\left[\frac{1-2t+t^2+2t-2t^2}{(1-t)^4}\right](1-t)^{-c}\,\psi'$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=c(1-t)^{-c-1}\,\psi-4x\frac{(1-t)(1+t)}{(1-t)^4}(1-t)^{-c}\,\psi'$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=c(1-t)^{-c-1}\,\psi-4x(1+t)(1-t)^{-c-3}\,\psi' \tag{6.8}$$

olurlar.

Bu son ifadelerden ψ ve ψ' yok edilirse,

$$\frac{\partial F}{\partial t}=c\left(1-t\right)^{-c-1}\frac{F}{\left(1-t\right)^{-c}}-4x\left(1+t\right)\left(1-t\right)^{-c-3}\frac{1}{-4t\left(1-t\right)^{-c-2}}\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=c\left(1-t\right)^{-1}F+\frac{x}{t}\left(1+t\right)\left(1-t\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{cF}{\left(1-t\right)}+\frac{x}{t\left(1-t\right)}\left(1+t\right)\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$t\left(1-t\right)\frac{\partial F}{\partial t}=ctF+x\left(1+t\right)\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$x\left(1+t\right)\frac{\partial F}{\partial x}-t\left(1-t\right)\frac{\partial F}{\partial t}=-ctF \tag{6.9}$$

bulunur.

Eş. 6.9 denklemi değişik formlarda düzenlenerek,

$$x\frac{\partial F}{\partial x}+xt\frac{\partial F}{\partial x}-t\frac{\partial F}{\partial t}+t^2\frac{\partial F}{\partial t}=-ctF$$

$$x\frac{\partial F}{\partial x}-t\frac{\partial F}{\partial t}=-ctF-t^2\frac{\partial F}{\partial t}-xt\frac{\partial F}{\partial x} \tag{6.10}$$

$$x\frac{\partial F}{\partial x}-t\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{-ct}{1-t}F-\frac{2xt}{1-t}\frac{\partial F}{\partial x} \tag{6.11}$$

$$x\frac{\partial F}{\partial x}-t\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{-ct}{1+t}F-\frac{2t^2}{1+t}\frac{\partial F}{\partial t} \tag{6.12}$$

biçimlerinde yazılabilir. Eş. 6.1 ve Eş. 6.6'dan,

$$F\left(x,t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\left(x\right)t^n \tag{6.13}$$

olup, Eş. 6.13'ün kendisi ve kısmi türevleri Eş. 6.10'da yerlerine yazılırlarsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} xf_n'(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} tnf_n(x)t^{n-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} cf_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} t^2 nf_n(x)t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} xtf_n'(x)t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} xf_n'(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} nf_n(x)t^n = -\sum_{n=0}^{\infty} cf_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} nf_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} xf_n'(x)t^{n+1}$$

bulunur.

Bu ifade de düzenlendikten sonra, t^n nin katsayıları eşitlenirse,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(xf_n'(x) - nf_n(x)\Big)t^n = -\sum_{n=1}^{\infty} cf_{n-1}(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)f_{n-1}(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} xf_{n-1}'(x)t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(xf_n'(x) - nf_n(x)\Big)t^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(c+n-1)f_{n-1}(x) - xf_{n-1}'(x)\Big]t^n$$

$$xf_n'(x) - nf_n(x) = -(c+n-1)f_{n-1}(x) - xf_{n-1}'(x)$$

elde edilir ki bu Eş. 6.3 ile verilen reküarans bağıntısıdır.

Şimdi de,

$$\frac{t}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}$$

olduğu dikkate alınarak, Eş. 6.13'ün kendisi ve kısmi türevleri Eş. 6.11'de yerlerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} xf_n'(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} tnf_n(x)t^{n-1} = -c\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)t^n\right) - 2x\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)t^n\right)$$

olur.

Burada iki kuvvet serisinin Cauchy çarpımı uygulanırsa ve t^n nin katsayıları eşitlenirse,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x f_n'(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} n f_n(x) t^n = -c\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} f_k(x) t^{n+1} - 2x\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} f_k'(x) t^{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(x f_n'(x) - n f_n(x)\Big) t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left[-c\sum_{k=0}^{n-1} f_k(x) - 2x\sum_{k=0}^{n-1} f_k'(x)\right] t^n$$

$$x f_n'(x) - n f_n(x) = -c\sum_{k=0}^{n-1} f_k(x) - 2x\sum_{k=0}^{n-1} f_k'(x)$$

elde edilir ki bu Eş. 6.4'deki rekürans bağıntısıdır.

Son olarak,

$$\frac{t}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{n+1}$$

olduğu dikkate alınarak, Eş. 6.13'ün kendisi ve kısmi türevleri Eş. 6.12'de yerlerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x f_n'(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} t n f_n(x) t^{n-1} = -c\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) t^n\right) - 2\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{n+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} n f_n(x) t^{n-1} t\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x f_n'(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} n f_n(x) t^n = -c\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} f_k(x) t^{n+1} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} k f_k(x) t^{n+1}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}(c+2k) f_k(x) t^{n+1}$$

n yerine $n-1$ alındığında

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(x f_n'(x) - n f_n(x)\Big) t^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}(c+2k) f_k(x)\right] t^n$$

$$x f_n'(x) - n f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}(c+2k) f_k(x)$$

elde edilir ki bu Eş. 6.5 ile gösterilen rekürans bağıntısıdır.

6.2. Bateman'ın $Z_n(x)$ Polinomu

1936 yılında Bateman,

$$Z_n(x) = {}_2F_2(-n, n+1; 1, 1; x) \tag{6.14}$$

polinomunu tanımladı [1] . Burada hipergeometrik fonksiyonun tanımı kullanıldığında,

$$Z_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k (n+1)_k}{(1)_k (1)_k k!} x^k$$

$$Z_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k (n+1)_k}{(k!)^3} x^k \tag{6.15}$$

olarak yazılabilir.

6.3. $Z_n(x)$ İçin Bir Doğurucu Fonksiyon

$Z_n(x)$ Bateman polinomları,

$$(1-t)^{-1} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{-4x}{(1-t)^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(x) t^n \tag{6.16}$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir.

Bunu gösterebilmek için Teorem 6.1 den faydalanacağız.

Teorem 6.1 de

$$f_n(x)=\frac{(c)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,\gamma_k x^k\,(c+n)_k}{\left(\frac{1}{2}c\right)_k\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\right)_k}$$

şeklindeydi.

Burada c=1 alınırsa

$$f_n(x)=\frac{(1)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,\gamma_k x^k\,(1+n)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!}$$

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,\gamma_k x^k\,(1+n)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!} \tag{6.17}$$

bulunur.

Eş. 6.15 ile Eş. 6.17 karşılaştırıldığında,

$$\gamma_k=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{(k!)^2}$$

alınmalıdır.

Buna göre Teorem 6.1 den,

$$\psi(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n u^n$$

$$\psi(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(n!)^2}u^n$$

$$\psi\left(\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(n!)(1)_n}\left(\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right)^n \tag{6.18}$$

olup, Eş. 6.1'de $f_n(x)$ yerine $Z_n(x)$ ve $\psi\left(\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right)$ in Eş. 6.18'deki değeri yazılırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}Z_n(x)t^n &=(1-t)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!(1)_n}\left(\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right)^n\\ &=(1-t)^{-1}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2};1;\frac{-4x}{(1-t)^2}\right)\end{aligned}$$

bulunur.

Böylelikle Bateman polinomu için Eş. 6.16 doğurucu fonksiyonu elde edilir.

Yine Eş. 6.3, Eş. 6.4, Eş. 6.5'te c=1 ve $f_n(x)=Z_n(x)$ alındığında, Bateman polinomları için rekürans bağıntıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$xZ_n'(x)-nZ_n(x)=-nZ_{n-1}(x)-xZ_{n-1}'(x)$$

$$xZ_n'(x)-nZ_n(x)=-\sum_{k=0}^{n-1}Z_k(x)-2x\sum_{k=0}^{n-1}Z_k'(x)$$

$$xZ_n'(x)-nZ_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}(1+2k)Z_k(x)$$

6.4. $H_n(\zeta,p,v)$ Rice Polinomu

Rice,

$$H_n(\zeta,p,v)={}_3F_2(-n,n+1,\zeta;1,p;v) \tag{6.19}$$

polinomunu tanımlamıştır [2]. Burada hipergeometrik fonksiyonun tanımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}H_n(\zeta,p,v)&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k(n+1)_k(\zeta)_k}{(1)_k(p)_k\,k!}(v)^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k(n+1)_k(\zeta)_k}{(k!)^2(p)_k}(v)^k\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

6.5. $H_n(\zeta,p,v)$ İçin Bir Doğurucu Fonksiyon

Rice polinomları,

$$(1-t)^{-1}F\left[\begin{matrix}\zeta, & \frac{1}{2}; & \\ & & \dfrac{-4vt}{(1-t)^2}\\ & p; & \end{matrix}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(\zeta,p,v)t^n \tag{6.20}$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir. Gerçekten, Teorem 6.1 den

$$f_n(x)=\frac{(c)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,\gamma_k x^k\,(c+n)_k}{\left(\frac{1}{2}c\right)_k\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\right)_k}$$

şeklindeydi.

Burada $c=1$ ve $x=v$ alınırsa,

$$f_n(v)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,\gamma_k v^k\,(1+n)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!}$$

olur.

$$\gamma_k=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k(\zeta)_k}{(p)_k\,k!}$$

alınırsa,

$$f_n(v)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(1+n)_k(\zeta)_k}{(p)_k(k!)^2}(v)^k$$

bulunur.

$$\psi(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n u^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n(\zeta)_n}{(p)_n(\mathrm{n}!)}u^n$$

$$\psi\left(\frac{-4vt}{(1-t)^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n(\zeta)_n}{(p)_n(\mathrm{n}!)}\left(\frac{-4vt}{(1-t)^2}\right)^n$$

ve Teorem 6.1 de $f_n(x)$ yerine $H_n(\zeta,p,v)$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}H_n(\zeta,p,v)t^n=(1-t)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n(\zeta)_n}{(p)_n(\mathrm{n}!)}\left(\frac{-4vt}{(1-t)^2}\right)^n$$

$$=(1-t)^{-1}F\left[\begin{matrix}\zeta, & \frac{1}{2}; & \\ & & \frac{-4vt}{(1-t)^2} \\ & p; & \end{matrix}\right]$$

elde edilir ki bu da Eş. 6.20 için doğurucu fonksiyondur.

Diğer taraftan, yine Teorem 6.1 den Eş. 6.3, Eş. 6.4, Eş.6.5'de $c=1$ ve $f_n(x)=H_n(\zeta,p,v)$ alındığında, Rice polinomları için bazı rekürans bağıntıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$vH_n'(\zeta,p,v)+vH_{n-1}'(\zeta,p,v)=n\left[H_n(\zeta,p,v)-H_{n-1}(\zeta,p,v)\right]$$

$$vH_n'(\zeta,p,v)-nH_n(\zeta,p,v)=-\sum_{k=0}^{n-1}\left[H_k(\zeta,p,v)+2vH_k'(\zeta,p,v)\right]$$

$$vH_n'(\zeta,p,v)-nH_n(\zeta,p,v)=-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}(1+2k)H_k(\zeta,p,v)$$

6.6. Bateman'ın $F_n(z)$ Polinomu

$F_n(z)$ Bateman polinomları,

$$F_n(z) = {}_3F_2\left(-n, n+1, \frac{1}{2}(1+z); 1, 1; 1\right) \tag{6.21}$$

şeklinde tanımlanır [3].

$$F_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k (n+1)_k \left(\frac{1}{2}(1+z)\right)_k}{(1)_k (1)_k k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)_k (n+1)_k \left(\frac{1}{2}(1+z)\right)_k}{(k!)^3}$$

olarak da yazılabilir.

6.7. $F_n(z)$ İçin Bir Doğurucu Fonksiyon

$F_n(z)$ polinomları,

$$(1-t)^{-1}\, {}_2F_1\left[\begin{matrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}z; & \\ & & \frac{-4t}{(1-t)^2} \\ & 1; & \end{matrix}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(z) t^n \tag{6.22}$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir. Gerçekten

Teorem 6.1 den

$$f_n(x) = \frac{(c)_n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \, \gamma_k x^k \, (c+n)_k}{\left(\frac{1}{2}c\right)_k \left(\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\right)_k}$$

şeklindeydi.

Burada $c = 1$ ve $x = z$ alınırsa,

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \, \gamma_k z^k \, (1+n)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!}$$

olur.

$$\gamma_k = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2}\right)_k \left(\frac{1}{2}\right)_k}{(k!)^2 \, (z)^k}$$

alınırsa,

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2}\right)_k \left(\frac{1}{2}\right)_k z^k \, (1+n)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k (k!)^2 \, k! \mathrm{z}^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{2}\right)_k (1+n)_k}{(k!)^3}$$

bulunur.

$$\psi(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n u^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(\mathrm{n}!)^2 z^n}u^n$$

$$\psi\left(\frac{-4zt}{(1-t)^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(\mathrm{n}!)^2 z^n}\left(\frac{-4t}{(1-t)^2}\right)^n z^n$$

olup, Teorem 6.1 de $f_n(x)$ yerine de $F_n(z)$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_n(z)t^n=(1-t)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(\mathrm{n}!)^2}\left(\frac{-4t}{(1-t)^2}\right)^n$$

$$=(1-t)^{-1}\,{}_2F_1\left[\begin{array}{ll}\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}z; & \\ & \frac{-4t}{(1-t)^2}\\ 1; & \end{array}\right]$$

elde edilir.

6.8. $C_n(x)$ Sister Celine Polinomu

Sister Celine polinomları,

$$C_n(x)={}_{p+2}F_{q+2}\left[\begin{array}{lll}-n, & n+1, & a_1,\ldots,a_p; \\ & & \qquad x \\ 1, & \frac{1}{2}, & b_1,\ldots,b_q;\end{array}\right] \tag{6.23}$$

şeklinde tanımlanır [4].

$$C_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k\,(n+1)_k\,(a_1)_k\,...(a_p)_k}{(1)_k\left(\frac{1}{2}\right)_k(b_1)_k\,...(b_q)_k\,k!}x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)_k\,(n+1)_k\,(a_1)_k\,...(a_p)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k(b_1)_k\,...(b_q)_k\,(k!)^2}x^k$$

olarak da yazılabilir.

6.9. $C_n(x)$ İçin Bir Doğurucu Fonksiyon

$$(1-t)^{-1}\,{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,...,a_p; & \dfrac{-4xt}{(1-t)^2}\\ b_1,...,b_q; & \end{matrix}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x)\,t^n \tag{6.24}$$

Sister Celine polinomları için bir doğurucu fonksiyondur. Gerçekten,

Teorem 6.1 den

$$f_n(x)=\frac{(c)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,\gamma_k x^k\,(c+n)_k}{\left(\frac{1}{2}c\right)_k\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\right)_k}$$

şeklindeydi.

Burada $c=1$ alınırsa,

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,\gamma_k x^k\,(1+n)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k k!}$$

olur.

$$\gamma_k = \frac{(a_1)_k \ldots (a_p)_k}{(b_1)_k \ldots (b_q)_k \, k!}$$

seçilirse,

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k (1+n)_k (a_1)_k \ldots (a_p)_k}{\left(\frac{1}{2}\right)_k (k!)^2 (b_1)_k \ldots (b_q)_k} x^k$$

bulunur.

O halde, $f_n(x) = C_n(x)$ olur.

$$\psi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n u^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_n \ldots (b_q)_n \, \mathrm{n}!} u^n$$

$$\psi\left(\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_n \ldots (b_q)_n \, \mathrm{n}!} \left(\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right)^n$$

olup, Teorem 6.1 de $f_n(x)$ yerine $C_n(x)$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) t^n = (1-t)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \ldots (a_p)_n}{(b_1)_n \ldots (b_q)_n \, \mathrm{n}!} \left(\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right)^n$$

$$= (1-t)^{-1} {}_pF_q \left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_p; \\ b_1, \ldots, b_q; \end{matrix} \; \frac{-4xt}{(1-t)^2} \right]$$

elde edilir ki böylelikle Sister Celine polinomları için bir doğurucu fonksiyon bulunmuş olur.

Teorem 6.1 den Eş. 6.3, Eş. 6.4, Eş. 6.5 eşitliklerinde $c=1$ ve $f_n(x)=C_n(x)$ alındığında, Sister Celine polinomunun aşağıdaki rekürans bağıntıları aşağıdaki gibi elde edilir:

$$xC_n'(x)-nC_n(x)=-nC_{n-1}(x)-xC_{n-1}'(x)$$

$$xC_n'(x)-nC_n(x)=-\sum_{k=0}^{n-1}\left[C_k(x)+2xC_k'(x)\right]$$

$$xC_n'(x)-nC_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}(1+2k)C_k(x)$$

6.10. Bessel Polinomu

1949 yılında Kral ve Frink

$$Y_n(x)={}_2F_o\left(-n,1+n;-;-\frac{1}{2}x\right)$$

şeklinde tanımlanan basit Bessel polinomlarını

$$\varphi_n(c,x)=\frac{(c)_n}{n!}\,{}_2F_0(-n,c+n;-;x)$$

$$\varphi_n(c,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(c+n)_k(c)_n}{k!n!}x^k$$

biçiminde genelleştirdi [5].

6.11. $\varphi_n(c,x)$ Polinomları İçin Bir Doğurucu Fonksiyon

$\varphi_n(c,x)$ polinomları,

$$(1-t)^{-c}\,{}_2F_0\left(\frac{1}{2}c,\frac{1}{2}c+\frac{1}{2};-;\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(c,x)\,t^n$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir. Gerçekten,
Teorem 6.1 den,

$$f_n(x)=\frac{(c)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,\gamma_k x^k\,(c+n)_k}{\left(\frac{1}{2}c\right)_k\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\right)_k}$$

şeklindeydi.

$$\gamma_k=\frac{\left(\frac{1}{2}c\right)_k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}c\right)_k}{k!}$$

alınırsa,

$$f_n(x)=\frac{(c)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\left(\frac{1}{2}c\right)_k\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}c\right)_k(c+n)_k}{\mathrm{k}!\left(\frac{1}{2}c\right)_k\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}\right)_k}x^k$$

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,(c+n)_k\,(c)_n}{\mathrm{k}!\,n!}x^k$$

$$f_n(x)=\varphi_n(c,x)$$

bulunur.

$$\psi(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n u^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}c\right)_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}c\right)_n}{\text{n!}}u^n$$

$$\psi\left(\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}c\right)_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}c\right)_n}{\text{n!}}\left(\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right)^n$$

olup, Teorem 6.1 de $f_n(x)$ yerine $\varphi_n(c,x)$ yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(c,x)t^n=(1-t)^{-c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}c\right)_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}c\right)_n}{\text{n!}}\left(\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right)^n$$

$$=(1-t)^{-c}\,{}_2F_0\left(\frac{1}{2}c,\frac{1}{2}c+\frac{1}{2};-;\frac{-4xt}{(1-t)^2}\right)$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Bateman, H., “Two Systems of Polynomials for the Solution of Laplace’s İntegral Equation”, ***Duke Math. Journal***, 2:569-577 (1936).

2. Rice, S.O., “Some Properties of ${}_3F_2\left(-n,n+1,\zeta;1,p:v\right)$”, ***Duke Math. Journal,*** 6:108-119 (1940).

3. Bateman, H., “Some Properties of a Certain Set of Polynomials”, ***Tohoku Math. Journal,*** 37:23-38 (1933).

4. Fasenmyer, Sister M. Celine, “Some Generalized Hypergeometric Polynomials”, ***Bull. Amer. Math. Soc.***, 53:806-812 (1947).

5. Krall, H.L. and Frink, O., “A New Class of Orthogonal Polynomials:the Bessel Polynomials”, ***Trans. Amer. Math. Soc.***, 65:100-115 (1949).

6 Andrews, G.E., Askey, R., Roy R., “Special Functions”, ***Cambridge University Pres,*** Cambridge, 1-644 (1999).

7. Bailey, W.N., “Generalized Hypergeometric Series”, ***Cambridge University Press,*** Cambridge, 108 (1935).

8. Barry, P.D. and Hurley D. J., “Generating Functions for Relatives of Classical Polynomials”, ***Proc. Amer. Math. Soc.***, 3:103 (1988).

9. Brafman, F., “Generating Functions of Related Polynomials”, ***Proc. Amer. Math. Soc.***, 2:942-949 (1951).

10. Chan, W.C.C., Chan, C.J., Srivastava, H.M., “The Lagrange Polynomials in Several Variables”, ***Integral Transform and Special Functions,*** 139-148 (2001).

11. Erkuş, E., “Klasik Ortogonal Polinomların Doğurucu Fonksiyonları”, Yüksek Lisans Tezi, ***Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,*** Ankara, 1-13, 30-31, 45-46, 61-63 (1999).

12. McBridge, E.B., “Obtaining Generating Functions”,***Springer-Verlag,*** Berlin, 100 (1971).

13. Rainville, E.D., “Special Functions”, ***The Macmillan Company,*** New York, 108-114, 157-167, 187-191, 200-205, 285-294 (1960).

14. Srivastava, H.M., Manocha, H.L., “A Treatise on Generating Functions” ***Halsted Press, Ellis Horwood Limited, John Wiley and Sons,*** New York, Chichester, New York, 1-569 (1984).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: MERCAN, Tufan
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 04.04.1974 Ankara
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (312) 335 99 44
e-mail	: tufanmercan@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Ankara Üniversitesi/ Matematik Bölümü	1998
Lise	Yenimahalle Alparslan Lisesi	1991

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
1998-	MEB	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce