VEKTÖR NORMLU UZAYLAR

Funda Sezen BİRCAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2010

ANKARA

Funda Sezen Bircan tarafından hazırlanan VEKTÖR NORMLU UZAYLAR adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Bahri TURAN
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Şafak ALPAY
Matematik, Ortadoğu Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Bahri TURAN
Matematik, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Ayşe UYAR
Matematik, Gazi Üniversitesi

Tarih: 18/01/2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Funda Sezen BİRCAN

VEKTÖR NORMLU UZAYLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Funda Sezen BİRCAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2010

ÖZET

E projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzayı olsun. E ‘nin bandları ile E üzerindeki sıra projeksiyonlarının arasındaki izomorfik ilişki iyi bilinmektedir. Bizde bu tezde önce A. G. Kusraev tarafından yayınlanan Dominated Operators isimli kitabında yer alan vektör normlu uzaylarda bandlar ile projeksiyonlar arasındaki izomorfik yapıyı inceledik. Sonra vektör normlu uzaylarda merkez operatörlerini tanımladık ardından bunlar ile Riesz uzayının merkezi arasındaki ilişkiyi inceledik.

Bilim Kodu : 204.1.055
Anahtar Kelimeler : Riesz uzayı, band, projeksiyon,
Sayfa Adedi : 55
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Bahri TURAN

VECTOR NORMED SPACES
(M.Sc. Thesis)

Funda Sezen Bircan

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
January 2010

ABSTRACT

Let E be a Riesz Space with projection property. Relationship between bands and projections of E are well known. In this thesis firstly we have studied the izomorphic relationship between bands and projections of vector normed spaces which are placed on the book named Dominared Operators introduced by A. G. Kusraev. Then we defined center operators of vector normed spaces afterwards we studied relationship between center of vector normed spaces and center of Riesz Spaces.

Science Code : **204.1.055**
Key Words : **Riesz Space, band, projection**
Page Number : **55**
Adviser : **Prof. Dr. Bahri TURAN**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda beni tez öğrencisi olarak kabul eden, tezin her aşamasında büyük katkıları olan, kaynaklarını, değerli bilgilerini ve tecrübesini paylaşan, Sayın Hocam Prof. Dr. Bahri TURAN ’a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmamda desteğinden dolayı Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu‘na teşekkür ederim.

Ayrıca her zaman olduğu gibi tez çalışmamda da maddi manevi desteğini esirgemeyen anneme, aileme ve arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT..v

TEŞEKKÜR.. vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER VE KISALTMALAR………………………………………………...viii

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL TANIMLAR VE ÖNERMELER 4

3. VEKTÖR NORMLU UZAYLAR 15

4. MERKEZ OPERATÖRLER...44

KAYNAKLAR 54

ÖZGEÇMŞ……………………………………………………………………55

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$A \oplus B$	İki bandin direkt toplamı
$A \perp B$	Dik kümeler
A^d	A kümesinin dik tümleyeni
$A\uparrow$	Yukarı yönlendirilmiş küme
B_x	x tarafından üretilen band
$(E)_{\square}$	E Riesz uzayının bandlerinin kümesi
E^+	E uzayının pozitif kısmı
I_x	x tarafından üretilen ideal
$(E)_{\square}$	E Riesz uzayının projeksiyonlarının kümesi
$x \wedge y$	x ile y 'nin infimumu
$x \vee y$	x ile y 'nin supremumu
x^+	x 'in pozitif kısmı
x^-	x 'in negatif kısmı
$\lvert x \rvert$	x 'in modülü (mutlak değeri)
$x \perp y$	Birbirine dik elemanlar
$x_\alpha \uparrow a$	Yukarı yönlendirilmiş vesupremumuaolanağ
$[\![x]\!]$	x 'in vektör normu

1.GİRİŞ

İlk bölümde gerekli temel tanım ve teoremler verilmiştir. Burada E Riesz uzayı olmak üzere idealleri, bandleri , projeksiyonları incelenmiş ve E üzerindeki band projeksiyonlarla bandler arasındaki izomorfik ilişki anlatılmıştır.

Vektör normlu uzaylar bölümünde, A. G. Kusraev ’in Dominated Operators isimli kitabından yararlanarak X vektör uzayı olmak üzere vektör normu yardımıyla vektör normlu uzay tanımını verdik. Vektör normlu X uzayı üzerinde ideal, band tanımı verilerek X ‘deki bandler ile X ‘in vektör normu altındaki görüntüsünün E Riesz uzayında ürettiği band arasındaki izomorfik ilişkiyi gösterdik. Daha sonra projeksiyon bandleri tanımlayarak bu izomorfizma yardımıyla X deki projeksiyon bandleri inceledik ve bandlerle bu band projeksiyonlar arasındaki izomorfik ilişkiyi verdik. Sonuç olarak X ‘in vektör normu altındaki görüntüsünün E Riesz uzayında ürettiği bandin projeksiyonları ile X vektör uzayının projeksiyonları arasında bir izomorfik dönüşüm elde ettik.

Merkez operatörler bölümünde E Riesz uzayındaki merkez operatörlerin tanımını verdik ve vektör normu yardımıyla X vektör uzayında merkez operatörü tanımladık. Daha sonra E Riesz uzayındaki Freudenthal Spektral teoremini kullanarak X ‘in vektör normu altındaki görüntüsünün E Riesz uzayında ürettiği bandin merkez operatörleri ile X vektör uzayının arasındaki ilişkiyi elde ettik. Son olarak da Freudenthal Spektral Teoremini X vektör normlu uzayı için elde ettik.

2. TEMEL TANIMLAR VE ÖNERMELER

Bu bölümde bazı temel tanımları vererek önermeleri özetliyoruz.

2.1. Tanım

E boştan farklı bir küme olsun. E üzerinde tanımlı " $\leq$ " bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, " $\leq$ " bağıntısına sıralama bağıntısı, (E, $\leq$) ikilisine de sıralı küme denir.

i) Her $x \in E$ için $x \leq x$

ii) Her x, $y \in$ E için $x \leq y$, $y \leq x$ iken $x = y$

iii) Her x, y, $z \in E$ için $x \leq y$, $y \leq z$ iken $x \leq z$

2.2. Tanım

(E, $\leq$) sıralı küme, her x, $y \in E$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise E ' ye tam sıralı küme denir.

2.3. Tanım

$E \neq \emptyset$, $\leq$ bir bağıntı olmak üzere

i) Her $x \in E$ için $x \leq x$

ii) Her x, y, $z \in E$ için $x \leq y$, $y \leq z$ iken $x \leq z$

iii) Her x, $y \in E$ için $x \leq z$ ve $y \leq z$ olacak şekilde $z \in E$ vardır koşulları sağlanırsa E kümesine yukarı yönlendirilmiş küme denir. $E\uparrow$ gösterilir.Yukarı yönlendirilmiş bir kümeden herhangi bir X kümesine tanımlı her fonksiyona X üzerinde bir ağ(net) denir.

(x_α)E Riesz uzayında bir net olsun ; her (x_α), (x_β) $\in (x_\alpha)$için E 'deki sıralamaya göre $(x_\alpha) \le (x_\lambda)$ ve$(x_\beta) \le (x_\lambda)$olacak şekilde bir $(x_\lambda) \in$ (x_α) varsa (x_α) neti yukarı yönlendirilmiştir denir ve (x_α) ile gösterilir. (x_α) $\uparrow$ ve sup(x_α) = a olacak şekilde a$\in$ E varsa(x_α) $\uparrow$a ile gösterilir. Benzer şekilde her (x_α) , $(x_\beta) \in (x_\alpha)$için E 'deki sıralamaya göre $(x_\lambda) \le (x_\alpha)$ ve$(x_\lambda) \le (x_\beta)$ olacak şekilde bir $(x_\lambda) \in (x_\alpha)$ varsa(x_α) neti aşağı yönlendirilmiştir denir ve$(x_\alpha)\downarrow$ ile gösterilir$(x_\alpha)\downarrow$ve inf (x_α)= b olacak şekilde b$\in$E varsa $(x_\alpha)\downarrow$b ile gösterilir.

$(x_\alpha) \in$ E neti yerine herhangi bir A$\subseteq$ E alt kümesi alındığında $A\uparrow$ ve supA =a olacak şekilde a$\in$ E varsa $A\uparrow$a, $A\downarrow$ ve infA =b olacak şekilde b$\in$ E varsa $A\downarrow$b şeklinde gösterilir.

2.4. Tanım

(A, $\le$) sıralı küme, B$\subseteq$A olmak üzere;

i) Her x$\in$B için x$\le$a

ii) Her x$\in$B , b$\in$A için x$\le$b iken a$\le$b

şartlarını sağlayacak şekilde a$\in$A varsa buna B kümesinin üst sınırlarının en küçüğü ya da supremumu denir, sup B =a ile gösterilir.

i)Her x$\in$B için a$\le$x

ii) Her $x \in B$, $b \in A$ için $b \leq x$ iken $b \leq a$

şartlarını sağlayacak şekilde $a \in A$ varsa buna B kümesinin alt sınırlarının en büyüğü ya da infimumu denir, inf B=a ile gösterilir.

B kümesi yerine iki elemanlı {x,y} kümesini alırsak $\sup\{x,y\}=x \vee y$
$\text{İnf}\,\{x,y\}=x \wedge y$ şeklinde göstereceğiz.

2.5. Tanım

$(E, \leq)$ sıralı bir küme, her $x,y \in E$ için sup {x,y}, inf $\{x.y\} \in E$ ise $(E, \leq)$ ikilisine latis denir.

2.6. Tanım

$(E, \leq)$ latis, her $x, y, z \in E$ için $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z)$ sağlanırsa $(E, \leq)$ ikilisine dağılmalı latis denir.

2.1. Teorem:

X latis olsun. X 'in dağılmalı olması için gerekli ve yeterli koşul x, y_1, y_2, $z \in X$ olmak üzere $x \wedge y_1 \leq z$ ve $x \wedge y_2 \leq z$ iken $x \wedge \left(y_1 \vee y_2\right) \leq z$ olmasıdır [2].

2.7. Tanım

$(E, \leq)$ latis, $a,b \in E$ olmak üzere $\{x \in E : a \leq x \leq b\}$ kümesine sıralı aralık denir, [a,b] ile gösterilir.

2.8. Tanım

(E, $\leq$) latis olmak üzere, varsa E 'nin en küçük elemanına en küçük eleman, en büyük elemanına birim eleman denir, sırasıyla θ ve I ile gösterilir.

2.9. Tanım

(E, $\leq$) latis ve $x \in E$ olmak üzere $x \wedge x'=\theta$, $x \vee x'=I$ olacak şekilde x' elemanı varsa x' elemanına x 'in tamlayanı denir.

2.10. Tanım

(E, $\leq$) dağılmalı latis olsun. E 'deki her elemanının tamlayanı, E 'nin en küçük ve birim elemanı varsa E 'ye $\leq$ sıralaması ile Boole Cebiri denir.

2.11. Tanım

A, B Boole Cebiri, $T:A\rightarrow B$ fonksiyon olsun.

i) Her x, $y\in A$ için $T(x\vee y)=T(x)\vee T(y)$ ve $T(x \wedge y)=T(x) \wedge T(y)$

ii)Her $x\in A$ için $T(x')=[T(x)]'$

iii)T birebir ve örten fonksiyon
koşulları sağlanıyorsa T fonksiyonuna Boole Cebir izomorfizmi denir.

2.12. Tanım

(E, $\leq$) latis olsun. Eğer E 'nin alttan sınırlı her alt kümesinin infimumu ve üstten sınırlı her alt kümesinin supremumu varsa E 'ye Dedekind tam latis denir.

2.13. Tanım

E vektör uzayı , "$\leq$" sıralama bağıntısı olmak üzere

i) Her x, y, $z \in E$ için $x \leq y$ iken $x+z \leq y+z$

ii)Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $x \leq y$ iken $\lambda x \leq \lambda y$ ise E 'ye sıralı vektör uzayı denir.

2.14. Tanım

E sıralı vektör uzayı ve θ E 'nin sıfırı olsun. E 'nin $\theta \leq x$ koşulunu sağlayan elemanlarına pozitif eleman denir.

2.15. Tanım

E, F sıralı vektör uzayı, θ_1 ve θ_2 sırasıyla E ve F 'nin sıfırları olsun. $T:E \rightarrow F$ lineer dönüşüm olmak üzere her $x \in E$ için $\theta_1 \leq x$ iken $\theta_2 \leq T(x)$ sağlanıyorsa T 'ye pozitif operatör denir.

2.16. Tanım:

E,F sıralı vektör uzayı, $T:E \rightarrow F$ lineer dönüşüm olmak üzere her $x,y \in E$ için $x \leq y$ iken $T(x) \leq T(y)$ ise T 'ye sıra koruyan operatör denir.

2.2. Teorem

E,F sıralı vektör uzayı, $T:E \rightarrow F$ lineer dönüşüm olmak üzere T ‘nin pozitif operatör olması için gerekli ve yeterli koşul T ‘nin sıra koruyan operatör olmasıdır [1].

2.17. Tanım

E sıralı vektör uzayı olmak üzere her $x,y \in E$ için $\inf\{x,y\}$, $\sup\{x,y\} \in E$ ise E' ye vektör latis ya da Riesz uzayı denir.

2.18. Tanım

E Riesz uzayı, $x \in E$ olsun.

i) $x \vee 0$ elemanına x 'in pozitif kısmı denir x^+ ile gösterilir.

ii) $-x \vee 0$ elemanına x 'in negatif kısmı denir x^- ile gösterilir

iii) $-x \vee x$ elemanına x 'in modülü (mutlak kısmı) denir, $|x|$ ile gösterilir.

2.3. Teorem:

E Riesz uzayı, $x \in E$ olsun.

i) $x = x^+ - x^-$

ii) $|x| = x^+ + x^-$

iii) $x^+ \wedge x^- = 0$ dır [1].

2.19. Tanım

E Riesz uzayı, her $x \in E^+$, $n \in \mathbb{N}^+$ için $(1/n)x \downarrow 0$ ise E 'ye Arşimedyan Riesz uzayı denir.

2.20. Tanım

E Riesz uzayı, $V \subseteq E$ alt vektör uzayı olmak üzere her x, $y \in V$ için $x \wedge y \in V$ ise V 'ye E 'nin Riesz alt uzayı denir.

2.21. Tanım

E Riesz uzayı, $x, y \in E$ olmak üzere $|x| \wedge |y| = 0$ ise x y 'ye diktir denir ve $x \perp y$ ile gösterilir.

2.4. Teorem (Riesz Ayrıştırma Özelliği)

E Riesz uzayı, $x, y_1, y_2, \ldots, y_n \in E$ olsun. Eğer $|x| \leq |y_1 + y_2 + \ldots + y_n|$ ise $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ ve $|x_i| \leq |y_i|$ olacak şekilde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ vardır [1].

2.22. Tanım:

E Riesz uzayı, $A \subseteq E$ olsun.Her $x \in A$ ve $y \in E$ için $|y| \leq |x|$ iken $y \in A$ ise A 'ya katı denir. Katı alt uzaya ideal denir.

2.23. Tanım

E Riesz uzayı, $A, B \subseteq E$ ve A, B katı olsun. $A+B=\{a+b : a \in A, b \in B\}$ kümesine A ile B 'nin cebirsel toplamı denir. Ayrıca $A \cap B = \varnothing$ ise buna direkt toplam denir ve $A \oplus B$ şeklinde gösterilir.

2.5. Teorem

E Riesz uzayı, $A, B \subseteq E$ olmak üzere A ve B ideal ise $A \cap B$ de idealdir [1].

2.6. Teorem

E Riesz uzayı, A, B $\subseteq$ E olmak üzere A ve B ideal ise A+B de idealdir [1].

2.24. Tanım

E Riesz uzayı, G E 'nin Riesz alt uzayı olsun. Eğer her $0<x\in E$ için $0<y\leq x$ olacak şekilde $y\in G$ varsa G 'ye E içinde sıra yoğundur denir.

2.7. Teorem

E Arşimedyan Riesz uzayı, G E 'nin Riesz alt uzayı olsun. G nin sıra yoğun olması için gerek ve yeter şart her $x\in E^+$ için

$\{y\in G: 0\leq y\leq x\}\uparrow x$ olmasıdır, ya da net tanımı gereğince denk olarak her $x\in E^+$ için en az bir $(x_\alpha)\subseteq$ G vardır öyle ki $(x_\alpha)\uparrow x$ [1].

2.25. Tanım

E Riesz uzayı, $\varnothing\neq G\subseteq E$ olsun. $x\in E$ olmak üzere her $y\in G$ için $x\perp y$ koşulunu sağlayan tüm x elemanlarının kümesine G 'nin diki denir. G^d ile gösterilir. Yani $G^d=\{x : \text{her } y\in G \text{ için } x\perp y\}$

2.26. Tanım

E Riesz uzayı, A ideal olmak üzere $(x_\alpha)\subseteq$ A ve $0\leq (x_\alpha)\uparrow x$ iken $x\in A$ ise A 'ya band denir.

2.8. Teorem

E Riesz uzayı, $\varnothing\neq A\subseteq E$ ise A^d banddir [1].

2.9. Teorem

E Riesz uzayı, $A \subseteq E$ ideal olsun. A 'nın E 'de sıra yoğun olması için gerek ve yeter şart $A^d = \{0\}$ olmasıdır [1].

2.10. Teorem

E Riesz uzayı, $A \subseteq E$ ideal olsun. A ideali A^{dd} içinde sıra yoğundur [1].

2.27. Tanım

E Riesz uzayı, $A \subseteq E$ olsun. A 'yı kapsayan en küçük ideale (bande) A 'nın ürettiği ideal (band) denir.

$A \subseteq E$ alt kümesinin ürettiği ideal:

$$I_A = \left\{ y \in E : x_1, x_2 ..., x_n \in A,\ \lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_n \in \mathbb{R}^+,\ |y| \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|,\ n \in \mathbb{N} \right\} \text{ dır.}$$

E Riesz uzayındaki herhangi bir x elemanının ürettiği ideal ise

$I_x = \{y \in E : \lambda \in \mathbb{R}^+ ,\ |y| \le \lambda\, |x|\}$ olur.

$A \subseteq E$ alt kümesinin ürettiği band

$B_A = \{y \in E : \exists\ (x_\alpha) \subseteq A \ni 0 \le (x_\alpha) \uparrow |y|\ \}$ biçiminde elde edilir.

Dolayısıyla E Riesz uzayında herhangi x elemanının ürettiği band

$B_x = \{y \in E : |y| \wedge n|x| \uparrow |y|\}$ dir [1].

2.11. Teorem

E Arşimedyan Riesz uzayı, $A \neq \emptyset$, $A \subseteq E$ olmak üzere A 'nın ürettiği band A^{dd} dir, dolayısıyla eğer A band ise $A = A^{dd}$ dir [1].

2.12. Teorem

E Riesz uzayı, E 'deki herhangi A ideali için A^{dd}, her $0 \neq x \in B$ için en az bir $0 \neq y \in A$ öyle ki; $|y| \leq |x|$ koşulunu sağlayan B ideallerinin en büyüğüdür [2].

2.13. Teorem

A ve B E Riesz uzayında iki ideal olsun. Bu durumda $\left(A \cap B\right)^{dd} = A^{dd} \cap B^{dd}$ dir [2].

2.14. Teorem

A ve B E Riesz uzayında iki band olsun. Bu durumda $\left(A+B\right)^{d} = A^{d} \cap B^{d}$ dir.

2.15. Teorem

E Arşimedyan Riesz uzayı, $\mathbb{B}(E)$ E 'deki tüm bandlerin kümesi ve

$\mathbb{A} = \{D : D \subseteq E \text{ , } D = D^{dd}\}$ olmak üzere $\mathbb{A} = \mathbb{B}(E)$ dir [2].

2.16. Teorem

E Riesz uzayı, $\mathbb{B}(E)$ E 'deki tüm bandlerin kümesi olmak üzere $(\mathbb{B}(E) , \subseteq)$ Boole Cebridir [2].

2.28. Tanım

E vektör uzayı, P:E→E lineer dönüşüm olsun. Eğer P=P² ise P 'ye projeksiyon denir.P, E Riesz uzayı üzerinde projeksiyon ve pozitif operatör ise, P 'ye "pozitif projeksiyon" denir.

2.29. Tanım

E Riesz uzayında bir B bandı için E=B$\oplus$ B^d ise B 'ye projeksiyon band denir.

2.30. Tanım

E Riesz uzayındaki her B bandi projeksiyon band ise E'ye projeksiyon özelliğine sahip Riesz uzayı denir.

Sonuç

Eğer E Dedekind tam Riesz uzayı ise her B $\subseteq$E bandi için $E = B \oplus B^d$ sağlanır.

B $\subseteq$ E projeksiyon band olsun. Bu durumda $E = B \oplus B^d$ ve her x$\in$ E için $x = x_1 + x_2$; $x_1 \in B$, $x_2 \in B^d$ dir.

P_B: E→E $P_B(x) = x_1$ biçiminde tanımlayalım.

$P_B{}^2(x)=$ $P_B(P_B(x)) = P_B(x_1) = P_B(x_1 + 0) = x_1 = P_B(x)$ olduğundan P_B projeksiyondur.

x≥0 iken $x_1 \in B$, $x_2 \in B^d$ olmak üzere $x = x_1 + x_2$, $0 \le x_1$, $0 \le x_2$ yazılışı tek türlüdür. Ayrıca $P_B(x) = x_1 \ge 0$ olduğundan P_B pozitiftir. Benzer şekilde

$P_B{}^d : E \to E$; $P_B{}^d(x) = x_2$ tanımlanırsa $P_B{}^d$ 'in de pozitif projeksiyon olduğu görülür.

Bu şekilde tanımlanan P_B projeksiyonuna "sıra projeksiyon" ya da "band projeksiyon" denir.

2.17. Teorem

E Riesz uzayı, T:E→F operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

1) T sıra projeksiyondur.

2) I:E→E birim operatör olmak üzere T projeksiyon ve $0 \leq T \leq I$ 'dir.

3) T ve I-T 'nin görüntüleri diktir. Yani her $x,y \in E$ için $Tx \perp y-Ty$ 'dir [1].

2.18. Teorem

E Riesz uzayı olmak üzere A, B $\subseteq$ E, projeksiyon band iseler A^d , $A \cap B$, A+B projeksiyon banddir ve aşağıdakiler sağlanır:

i) $P_{A^d} = I - P_A$

ii) $P_{A \cap B} = P_A \cdot P_B = P_B \cdot P_A$

iii) $P_{A+B} = P_A + P_B - P_{A \cap B}$ [1].

2.19. Teorem

E Riesz uzayı ve $A,B \subseteq E$ projeksiyon band olmak üzere, aşağıdaki önermeler birbirine denktir:

i) $A \subseteq B$

ii) $P_A\ P_B = P_B P_A = P_A$

iii) $P_A \leq P_B$ [1].

2.31. Tanım

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere, x 'in ürettiği band olan B_x projeksiyon band ise x 'e projeksiyon eleman, ürettiği bande principal band denir. Bir Riesz uzayında her eleman projeksiyon eleman ise bu uzaya principal projeksiyon özelliğine sahiptir denir.

2.20. Teorem

E Dedekind tam Riesz uzayı, $\mathbb{P}(E) = \{P_B : B$ E 'de band$\}$ olmak üzere $(\mathbb{P}(E), \leq)$ Boole cebiridir [2].

2.21. Teorem

E Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere;

$\psi : \mathbb{B}(E) \rightarrow \mathbb{P}(E)$: $A \in \mathbb{B}(E)$, $\psi(A) = P_A$ dönüşümü Boole cebir izomorfizmidir.

3. VEKTÖR NORMLU UZAYLAR

Bu bölümde vektör normu tanımını vererek bir vektör uzayındaki bandleri projeksiyonları ve bunların Riesz uzayındakilerle ilişkisini inceleyeceğiz.

3.1. Tanım

X vektör uzayı, E latis ve $[\![\ ]\!]: X \to E^+$ bir fonksiyon olsun.

(1) $[\![x]\!] = \theta \Leftrightarrow x = \theta$

(2) Her $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$ için $[\![\lambda x]\!] = |\lambda| [\![x]\!]$

(3) Her $x, y \in X$ için $[\![x+y]\!] \leq [\![x]\!] + [\![y]\!]$

(4) Her $e_1, e_2 \in E^+$ ve $x \in X$ için $[\![x]\!] = e_1 + e_2$ ise $x = x_1 + x_2$ ve $[\![x_1]\!] = e_1$, $[\![x_2]\!] = e_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in X$ vardır.

koşullarından ilk üçü sağlanırsa bu fonksiyona vektör normu denir. Bu koşulların dördü de sağlanırsa bu vektör normuna Kantorovich normu, X uzayına da ayrılabilir vektör uzayı ya da latis normlu uzay denir ve $(X, [\![\ ]\!], E)$ ile gösterilir. (4) koşulu sadece birbirine dik e_1 , e_2 için sağlanıyorsa X ‘e d-ayrılabilir vektör uzayı denir.

3.1. Örnek

X vektör uzayı, E = $\mathbb{R}$ alınırsa daha önceden bildiğimiz herhangi bir $\|\ \|: X \to \mathbb{R}$ normunun bir Kantorovich normu olduğu görülür..

Bu normun vektör normu koşullarını sağladığı açıktır. (4) koşulunu sağladığını görelim:

Her $e_1, e_2 \in E^+$ ve $x \in X$ için $\|x\| = e_1 + e_2$ iken $x = x_1 + x_2$ ve $\|x_1\| = e_1$, $\|x_2\| = e_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in X$ olduğunu göstermeliyiz.

$\|x\| = 0 \Rightarrow e_1 = e_2 = 0$ olur .

$\|x\| \neq 0$ olsun.

i) $\|x\| = 1$ durumunu inceleyelim:

$\|x\| = 1 \Rightarrow 1 = e_1 + e_2$

$x_1 = e_1 x = (1 - e_2)x$, $x_2 = e_2 x$ olarak tanımlayalım. Bu durumda;

$x = x_1 + x_2$, $x_1, x_2 \in X$ ve , $\|x_1\| = e_1$, $\|x_2\| = e_2$ sağlanır.

ii) $\|x\| \neq 1$ durumunuinceleyelim

$\|x\| = e_1 + e_2 \quad e_1, e_2 \in E^+$

$\dfrac{x}{\|x\|} = y$ dersek; $1 = \dfrac{\|x\|}{\|x\|} = \left\| \dfrac{x}{\|x\|} \right\| = \|y\| = 1 = \dfrac{e_1}{\|x\|} + \dfrac{e_2}{\|x\|}$ olur.

(i) den ;

$y = y_1 + y_2$ ve $\|y_1\| = \dfrac{e_1}{\|x\|}$, $\|y_2\| = \dfrac{e_2}{\|x\|}$ olacak şekilde $y_1, y_2 \in X$ vardır.

$y = \dfrac{x}{\|x\|} \Rightarrow x = y \cdot \|x\| = (y_1 + y_2) \cdot \|x\| = y_1 \cdot \|x\| + y_2 \cdot \|x\|$ olur.

O halde;

$x_1 = y_1 \cdot \|x\|$, $x_2 = y_2 \cdot \|x\|$ diyelim. $x = x_1 + x_2 \ni x_1, x_2 \in X$ ve $\|x_1\| = e_1$, $\|x_2\| = e_2$ sağlanır.

Sonuç:

Her norm bir Kantorovich normudur.

3.2. Örnek

X vektör uzayı, E Riesz uzayı olmak üzere E = X alınırsa $[\![\ ]\!]: X \to E$

$x \to [\![x]\!] = |x|$

bildiğimiz anlamda x ‘in modülü olarak alınırsa bu bir Kantorovich normudur.

3.2. Tanım:

$\left(X,\ [\![\ ]\!],\ E\right)$ latis normlu uzay olsun. x , $y \in X$ için $[\![x]\!] \wedge [\![y]\!] = 0$ ise x ile y $[\![\ ]\!]-$diktir denir, $x \perp y$ ile gösterilir.

3.3. Tanım:

$\left(X,\ [\![\ ]\!],\ E\right)$ latis normlu uzay olsun. $M \neq \emptyset,\ M \subseteq X$ olmak üzere $M^{\perp} = \{x \in X : \forall y \in M \text{ için } x \perp y\}$ kümesine $[\![\ ]\!]-$band denir. X ‘deki tüm bandlerin kümesi $\mathbb{B}(X)$ ile gösterilir.

Sonuç:

$\mathbb{B}(X) = \left\{B :\ \exists \emptyset \neq M \subseteq X \ni\ M^{\perp} = B\right\}$

3.1. Teorem:

A, $B \subseteq X$, $A \subseteq B$ olsun. $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$ dir.

İspat:

$x \in B^{\perp}$ alalım. Her $y \in B$ için $x \perp y$ dir. Hipotezden her $y \in A$ için $x \perp y$ olur. Buradan $x \in A^{\perp}$ elde edilir.

3.3. Tanım:

$(X, [\![\ ]\!], E)$ latis normlu uzay, $A \subseteq X$ alt uzay olsun. Her $x \in X$ ve $a \in A$ için $[\![x]\!] \leq [\![a]\!]$ iken $x \in A$ ise A 'ya $[\![\ ]\!]$-ideal denir.

Sonuç:

Her $[\![\ ]\!]-$band $[\![\ ]\!]$-idealdir.

İspat:

$B \in \mathbb{B}(X)$ alalım. $B \in \mathbb{B}(X)$ ise $B=M^{\perp}$ olacak şekilde $M \subseteq X$ kümesi vardır.

B nin alt uzay olduğunu görelim:

(a) $x, y \in B=M^{\perp} \Rightarrow x+y \in M^{\perp}$ (?)

$x \in B=M^{\perp} \Rightarrow$ Her $u \in M$ için $x \perp u \Rightarrow$ Her $u \in M$ için $[\![x]\!] \wedge [\![u]\!] = 0$

$y \in B=M^{\perp} \Rightarrow$ Her $u \in M$ için $y \perp u \Rightarrow$ Her $u \in M$ için $[\![y]\!] \wedge [\![u]\!] = 0$

Her $u \in M$ için $[\![x+y]\!] \leq [\![x]\!] + [\![y]\!]$ olduğu düşünülürse

$$0 \leq [\![x+y]\!] \wedge [\![u]\!] \leq ([\![x]\!] + [\![y]\!]) \wedge [\![u]\!] \leq ([\![x]\!] \wedge [\![u]\!]) + ([\![y]\!] \wedge [\![u]\!]) = 0$$

olduğundan $([\![x]\!] + [\![y]\!]) \wedge [\![u]\!] = 0$ dır. Buradan $x+y \perp u$ elde edilir.

Yani $x+y \in M^{\perp} = B$ dir.

(b) $\lambda \in \mathbb{R}$, her $x \in M^{\perp}$ için $\lambda \cdot x \in M^{\perp}$ (?)

$x \in M^{\perp}$ ise her $u \in M$ için $[\![x]\!] \wedge [\![u]\!] = 0$ dır. Böylece her $u \in M$ için $0 \leq [\![\lambda \cdot x]\!] \wedge [\![u]\!] = |\lambda| \cdot [\![x]\!] \wedge [\![u]\!] \leq (|\lambda| + 1) \cdot ([\![x]\!] \wedge [\![u]\!]) = 0$ olur. Buradan da

$[\![\lambda \cdot x]\!] \wedge [\![u]\!] = 0$ elde edilir.. Yani $\lambda \cdot x \in$ $M^{\perp}$ dir.

(a) ve (b) den B X ‘in alt uzayıdır.

B ‘nin $[\![\ ]\!]$-ideal olduğunu görelim:

Her $x \in B$ ve $y \in X$ için $[\![y]\!] \leq [\![x]\!]$ iken $y \in B$ mi?

$x \in B = M^{\perp} \Rightarrow$ Her $u \in M$ için $x \perp u$

$\Rightarrow$ Her $u \in M$ için $[\![x]\!] \wedge [\![u]\!] = 0$

$\Rightarrow [\![y]\!] \wedge [\![u]\!] \leq [\![x]\!] \wedge [\![u]\!] = 0$

$\Rightarrow [\![y]\!] \wedge [\![u]\!] = 0$

$\Rightarrow y \in B = M^{\perp}$.

Sonuç olarak B idealdir.

3.2. Teorem:

A, $B \subseteq X$, A ve B $[\![\ ]\!]$-ideal ise A+B de $[\![\ ]\!]$-idealdir.

İspat:

A, B X ‘in alt uzayı olduğundan A+B de X ‘in alt uzayıdır.

A+B $[\![\ ]\!]$-ideal mi bakalım.

Her $y \in A+B$ ve $x \in X$ için $\left[\!\left[x\right]\!\right] \leq \left[\!\left[y\right]\!\right]$ iken $x \in A+B$ olduğunu göstereceğiz.

$y \in A+B \Rightarrow$ y=a+b olacak şekilde $a \in A$ ve $b \in B$ vardır. Ayrıca,

$\left[\!\left[x\right]\!\right] \leq \left[\!\left[y\right]\!\right] = [\![a+b]\!] \leq [\![a]\!] + [\![b]\!]$ dir.

Burada Riesz ayrıştırma özelliğini kullanırsak:

$[\![x]\!] = e_1 + e_2$, $e_1 \leq [\![a]\!]$ ve $e_2 \leq [\![b]\!]$ olacak şekilde $e_1, e_2 \in E$ vardır. Vektör normunun (4) özelliğinden $x = x_1 + x_2$, $[\![x_1]\!] = e_1$ ve $[\![x_2]\!] = e_2$ olacak şekilde x_1, $x_2 \in X$ vardır.

$x_1 \in A \quad x_2 \in B$ olduğunu görelim:

$0 \leq [\![x_1]\!] = e_1 \leq [\![a]\!],\ a \in A$ ve A $[\![\ ]\!]$-ideal olduğundan $x_1 \in A$ ve $0 \leq [\![x_2]\!] = e_2 \leq [\![b]\!],\ b \in B$ ve B $[\![\ ]\!]$-ideal olduğundan $x_2 \in B$ olur.

Sonuç olarak A+B idealdir.

3.3. Teorem:

$(X, [\![\ ]\!], E)$ latis normlu uzay olsun. $\mathbb{A} = \{A : A \subseteq X \ni A = A^{\perp\perp}\}$ olmak üzere $\mathbb{A} = \mathbb{B}(X)$ dir.

İspat:

Öncelikle herhangi bir $M \subseteq X$ için $M^{\perp} = M^{\perp\perp\perp}$ olduğunu görelim:

i) $M^{\perp\perp\perp} \subseteq M^{\perp}$ dir. Gerçekten;

Her $x \in M$ için ;

$x \in M \Rightarrow \forall y \in M^{\perp}$ için $x \perp y$

$\Rightarrow x \in M^{\perp\perp}$

$\Rightarrow M \subseteq M^{\perp\perp}$

$\Rightarrow M^{\perp\perp\perp} \subseteq M^{\perp}$

İi) $M^{\perp} \subseteq M^{\perp\perp\perp}$ dir. Gerçekten;

$x \in M^{\perp}$ alalım. Her $y \in M^{\perp\perp}$ için $x \perp y$ dir. O halde $x \in M^{\perp\perp\perp}$ olur.

$\Rightarrow M^{\perp} \subseteq M^{\perp\perp\perp}$

(i) ve (ii) den $M^{\perp} = M^{\perp\perp\perp}$

$\mathbb{A} = \mathbb{B}(X)$ olduğunu görelim.

$A \in \mathbb{B}(X) \Rightarrow \exists \varnothing \neq M \subseteq X : A = M^{\perp} = M^{\perp\perp\perp} = (M^{\perp})^{\perp\perp} = A^{\perp\perp} \Rightarrow A \in \mathbb{A}$

$A \in \mathbb{A} \Rightarrow A = A^{\perp\perp} = (A^{\perp})^{\perp} = M^{\perp} \quad (M = A^{\perp} \subseteq X)$

$\Rightarrow A \in \mathbb{B}(X)$

Sonuç olarak $\mathbb{A} = \mathbb{B}(X)$ dir.

3.4. Teorem:

$A, B \subseteq X$ olmak üzere, eğer A ve B X 'de $[\![\ ]\!]-$band ise $A \cap B$ de $[\![\ ]\!]-$banddir.

İspat:

A, B $\in \mathbb{B}(X)$ ise $A=M^{\perp}$ ve $B=N^{\perp}$ olacak şekilde M, $N \subseteq X$ vardır.

Önce $(M \cup N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$ olduğunu görelim:

i) $(M \cup N)^{\perp} \subseteq M^{\perp} \cap N^{\perp}$ dir.Gerçekten;

$M \subseteq M \cup N \Rightarrow (M \cup N)^{\perp} \subseteq M^{\perp}$

$N \subseteq M \cup N \Rightarrow (M \cup N)^{\perp} \subseteq N^{\perp}$

olduğundan $(M \cup N)^{\perp} \subseteq M^{\perp} \cap N^{\perp}$ dir.

ii) $(M \cup N)^{\perp} \supseteq M^{\perp} \cap N^{\perp}$ dir. Gerçekten:

Keyfi bir $x \in M^{\perp} \cap N^{\perp}$ alalım.

$x \in M^{\perp} \cap N^{\perp} \Rightarrow$ $x \in M^{\perp}$ ve $x \in N^{\perp}$

$\Rightarrow \forall\ u \in M$ için $x \perp u$ ve $\forall\ v \in N$ için $x \perp v$

$\Rightarrow \forall\ y \in M \cup N$ için $x \perp y$

$\Rightarrow$ $x \in (M \cup N)^{\perp}$ olur ki bu

$(M \cup N)^{\perp} \supseteq M^{\perp} \cap N^{\perp}$ demektir.

(İ) ve (ii) den $(M \cup N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$ olur. Dolayısıyla;

$A \cap B = M^{\perp} \cap N^{\perp} = (M \cup N)^{\perp} = L^{\perp} \quad (L \subseteq X)$

$A \cap B \in B(X)$ dir.

3.5. Teorem:

$(X, [\![\ ]\!], E)$ ayrılabilir latis normlu uzay olsun. X 'deki herhangi bir boş kümeden farklı A $[\![\ ]\!]-$ ideali için $A^{\perp\perp}$, her $0 \neq b \in B$ için en az bir $0 \neq a \in A$, $[\![a]\!] \leq [\![b]\!]$ koşulunu sağlayan B $[\![\ ]\!]-$ ideallerinin en büyüğüdür.

İspat:

Öncelikle $A^{\perp\perp}$ in bu koşulu sağladığını görelim:

$0 \neq b \in A^{\perp\perp}$ alalım. Olmayana ergi yöntemini kullanalım;

$[\![a]\!] \leq [\![b]\!]$ koşulunu sağlayan $0 \neq a \in A$ bulunmasın. Bu durumda her $h \in A$ için $[\![b]\!] \wedge [\![h]\!] = 0$ dır. Gerçekten;

$g_0 = [\![b]\!] \wedge [\![h]\!] \neq 0$ ise en az bir $h_0 \in A$ var dır öyle ki $0 \leq g_0 \leq [\![h_0]\!]$ dır.

$[\![h_0]\!] = ([\![h_0]\!] - g_0) + g_0$ yazarsak normun (4) özelliğinden:

$h_0 = h_1 + h_2$ ve $[\![h_1]\!] = [\![h_0]\!] - g_0$, $[\![h_2]\!] = g_0$ olacak şekilde $h_1, h_2 \in X$ vardır. O halde $0 \leq g_0 = [\![h_2]\!] \leq [\![h_0]\!]$ elde edilir, ayrıca $h_0 \in A$ ve A ideal olduğundan $h_2 \in A$ olur. Diğer yandan $g_0 = [\![h_2]\!]$, $g_0 \neq 0$ olduğundan normun (1) özelliğinden $h_2 \neq 0$ olur.Yani; $g_0 = [\![h_2]\!] \leq [\![b]\!]$ olacak şekilde $0 \neq h_2 \in A$ bulunur. Bu ise kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla $[\![b]\!] \wedge [\![h]\!] = 0$ dır. Buradan $b \in A^{\perp}$ ve $b \in A^{\perp\perp}$ elde edilir. Sonuç olarak b=0 bulunur. Bu da hipotezle çelişir.

$A^{\perp\perp}$ istenilen koşulu sağlar.

Son olarak $B \subseteq A^{\perp\perp}$ olduğunu görelim:

Olmayana ergi yöntemini kullanalım;

$B \subseteq A^{\perp\perp}$ olmasın.

$B \not\subseteq A^{\perp\perp} \Rightarrow \ \exists\, 0 \neq u \in B : u \notin A^{\perp\perp}$

$\Rightarrow \ \exists\ 0 \neq u \in B \ , \forall h \in A^{\perp}$ için $u \not\perp h$

$\Rightarrow \exists\, 0 \neq u \in B \ , \forall h \in A^{\perp}$ için $[\![u]\!] \wedge [\![h]\!] \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, 0 \neq u \in B \ , \forall h \in A^{\perp}$ için $\exists k = [\![u]\!] \wedge [\![h]\!] \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, 0 \neq u \in B \ , \forall h \in A^{\perp}$ için $\exists k : 0 \leq k \leq [\![h]\!]$

$[\![h]\!] = [\![h]\!] - k + k$ denirse normun (4) özelliğinden ;

$h = h_1 + h_2$, $[\![h_1]\!] = [\![h]\!] - k$ ve $[\![h_2]\!] = k$ olacak şekilde $h_1,\ h_2 \in X$ vardır.

$A^{\perp}$ideal ve $[\![h_2]\!] \leq [\![h]\!]$ olduğundan $h_2 \in A^{\perp}$ olur.

Ayrıca infimum tanımından $[\![h_2]\!] \leq [\![u]\!]$ ve B ideal olduğundan $h_2 \in B$ dir. Sonuç olarak $h_2 \in A^{\perp} \cap B$ dir. Hipotezden en az bir $0 \neq a \in A$ vardır öyle ki; $[\![a]\!] \leq [\![h_2]\!]$ dir. $A^{\perp}$ ideal olduğundan $a \in A^{\perp}$ ve $a \in A$ bulunur.Buradan a=0 olduğu görülür. Bu ise çelişkidir.

Sonuç olarak $B \subseteq A^{\perp\perp}$ dir.

3.6. Teorem:

$A,B \subseteq X$ olmak üzere, eğer A ve B X 'de $[\![\ \ ]\!]$ – ideal ise $(A \cap B)^{\perp\perp} = A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp}$ dir.

İspat:

i) $A \cap B \subseteq A \ \ \Rightarrow (A \cap B)^{\perp\perp} \subseteq A^{\perp\perp}$

Benzer şekilde ;

$A \cap B \subseteq B \ \ \Rightarrow (A \cap B)^{\perp\perp} \subseteq B^{\perp\perp}$ dir. Buradan $(A \cap B)^{\perp\perp} \subseteq A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp}$ elde edilir.

ii) $0 \neq u \in A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp}$ alalım. Buradan $u \in A^{\perp\perp}$ ve $u \in B^{\perp\perp}$ olur. Bir önceki teoremden $A^{\perp\perp}$ in sağladığı koşulu kullanırsak en az bir $0 \neq h \in A$ vardır öyle ki $[\![h]\!] \leq [\![u]\!]$ dır. Diğer yandan $u \in B^{\perp\perp}$ ve $B^{\perp\perp}$ ideal olduğundan $h \in B^{\perp\perp}$ olur.

Benzer şekilde bir önceki teoremden $B^{\perp\perp}$ in sağladığı koşulu kullanalım.

En az bir $0 \neq g \in B$ vardır öyle ki $[\![g]\!] \leq [\![h]\!]$ dır. Ayrıca $h \in A$ ve A ideal olduğundan $g \in A$ olur. Sonuç olarak en az bir $0 \neq g \in A \cap B$ var ve $[\![g]\!] \leq [\![h]\!]$ dir. Yani $A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp}$ bir önceki teoremdeki koşulu $A \cap B$ için sağlar. Yine aynı teoreme göre bu koşulu $A \cap B$ için sağlayan ideallerin en büyüğü $(A \cap B)^{\perp\perp}$ dir. Yani $A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp} \subseteq (A \cap B)^{\perp\perp}$ elde edilir.

(i) ve (ii) den $(A \cap B)^{\perp\perp} = A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp}$ dir.

3.7. Teorem:

$A,B \subseteq X$ olmak üzere, eğer A ve B X 'de $[\![\ \ ]\!]-$band ise $(A+B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$ dir.

İspat:

i) $A \subseteq A+B \quad \Rightarrow \quad (A+B)^{\perp} \subseteq A^{\perp}$

$B \subseteq A+B \quad \Rightarrow \quad (A+B)^{\perp} \subseteq B^{\perp}$

olduğundan $(A+B)^{\perp} \subseteq A^{\perp} \cap B^{\perp}$ dir.

ii) Her x için

$x \in A^{\perp} \cap B^{\perp} \;\Rightarrow\; x \in A^{\perp}$ ve $x \in B^{\perp}$

$\Rightarrow$ her $y \in A$ için $x \perp y$, her $z \in B$ için $x \perp z$

u=y+z olmak üzere her $u \in$ A+B için y+z $\perp$ x olduğunu göstermeliyiz. Üçgen eşitsizliğinden;

$0 \leq [\![y+z]\!] \wedge [\![x]\!] \leq \left([\![y]\!] \wedge [\![x]\!]\right) + \left([\![z]\!] \wedge [\![x]\!]\right) = 0$ yazılabilir. Sıkıştırma teoreminden $[\![y+z]\!] \wedge [\![x]\!] = 0$ olduğu görülür. Buradan $x \in (A+B)^{\perp}$ elde edilir.

Sonuç olarak $(A+B)^{\perp} \supseteq A^{\perp} \cap B^{\perp}$ dir.

(i) ve (ii) den $(A+B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$

3.8. Teorem:

$(\mathbb{B}(X), \subseteq)$ Boole cebiridir.

İspat:

$\mathbb{B}(X)$ in latis olduğunu görelim.

A, B $\in \mathbb{B}(X)$ olmak üzere $A \wedge B = A \cap B \in \mathbb{B}(X)$ olduğunu göstermeliyiz.

$A \cap B \subseteq A$ ve $A \cap B \subseteq B$ olduğundan $A \cap B$ A ve B için bir alt sınırdır. $A \cap B$'nin alt sınırların en büyüğü olduğunu göstermek için başka bir alt sınır C alalım. Bu durumda $C \subseteq A$ ve $C \subseteq B$ olur. Buradan $C \subseteq A \cap B$ elde edilir. Aldığımız başka alt sınır $A \cap B$ den küçük kaldığına göre $A \wedge B = A \cap B$ dir. $A \cap B \in \mathbb{B}(X)$ daha önce gösterilmişti.

A, B $\in \mathbb{B}(X)$ olmak üzere $A \vee B = (A+B)^{\perp\perp} \in \mathbb{B}(X)$ olduğunu göstermeliyiz.

Öncelikle $(A+B)^{\perp\perp} \in B(X)$ olduğunu görelim:

$(A+B)^{\perp\perp} = \left(A^{\perp} \cap B^{\perp}\right)^{\perp}$, $A^{\perp} \cap B^{\perp} \subseteq X \Rightarrow \left(A^{\perp} \cap B^{\perp}\right)^{\perp} = (A+B)^{\perp\perp} \in \mathbb{B}(X)$ dir.

$A \vee B = (A+B)^{\perp\perp}$ olduğunu görelim.

$A \subseteq A+B \subseteq (A+B)^{\perp\perp}$

$B \subseteq A+B \subseteq (A+B)^{\perp\perp}$

olduğundan $(A+B)^{\perp\perp}$ A ve B için bir üst sınırdır. $(A+B)^{\perp\perp}$ 'nin üst sınırlarının en büyüğü olduğunu göstermek için başka bir üst sınır C alalım. Bu durumda $A \subseteq C$ ve $B \subseteq C$ olur. $C^{\perp} \subseteq A^{\perp}$ ve $C^{\perp} \subseteq B^{\perp}$ elde edilir. Buradan $C^{\perp} \subseteq A^{\perp} \cap B^{\perp}$ olur.

$$C^{\perp} \subseteq A^{\perp} \cap B^{\perp} \Rightarrow \left(A^{\perp} \cap B^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq C^{\perp\perp} = C$$

$$\Rightarrow (A+B)^{\perp\perp} \subseteq C$$

elde edilir. Aldığımız üst sınır $(A+B)^{\perp\perp}$ 'den büyük kaldığına göre $A \vee B = (A+B)^{\perp\perp}$ dir.

Her $A \in \mathbb{B}(X)$ için $\{0\} \subseteq A$ olduğundan $\{0\}$ en küçük elemandır.

Her $A \in \mathbb{B}(X)$ için $A \subseteq X$ ve $X = X^{\perp\perp}$ olduğundan $X \in \mathbb{B}(X)$ dir. X birim elemandır.

$\mathbb{B}(X)$ 'deki her elemanın tamlayanı olduğunu göstermeliyiz.

Her $A \in \mathbb{B}(X)$ için $A^{\perp}$ 'in A 'nın tamlayanı olduğunu görelim:

$A \wedge A^{\perp} = A \cap A^{\perp} = \{0\}$

$A \vee A^{\perp} = \left(A + A^{\perp}\right)^{\perp\perp} = \left(A^{\perp} \cap A^{\perp\perp}\right)^{\perp} = \left(\{0\}\right)^{\perp} = X$

$\mathbb{B}(X)$ in dağılmalı olduğunu gösterelim.

Yardımcı teorem olarak teorem 2.1 i kullanırsak;

A, B_1, B_2, $C \in B(X)$ olmak üzere $A \cap B_1 \subseteq C$ ve $A \cap B_2 \subseteq C$ iken $A \cap \left(B_1 + B_2\right)^{\perp\perp} \subseteq C$ olduğunu göstermeliyiz.

Önce $A \cap \left(B_1 + B_2\right) \subseteq C$ olduğunu görelim:

$A \cap B_1 \subseteq C$ ve $A \cap B_2 \subseteq C$ olsun,

$f \in A \cap \left(B_1 + B_2\right) \Rightarrow f \in A$ ve $f \in \left(B_1 + B_2\right)$

$\Rightarrow f \in A$ ve $f = f_1 + f_2$ olacak biçimde $f_1 \in B_1$, $f_2 \in B_2$ vardır.

$[\![f]\!] = [\![f_1 + f_2]\!] \leq [\![f_1]\!] + [\![f_2]\!]$

Riesz ayrıştırma özelliğinden:

$[\![f]\!] = e_1 + e_2$ ve $e_1 \leq [\![f_1]\!]$, $e_2 \leq [\![f_2]\!]$ olacak şekilde $e_1, e_2 \in E^+$ vardır.

Normun (4) özelliğinden:

$f = x_1 + x_2$ ve $[\![x_1]\!] = e_1$, $[\![x_2]\!] = e_2$ olacak şekilde $x_1,\ x_2 \in X$ vardır.

$[\![x_1]\!] \leq [\![f_1]\!]$ ve $[\![x_2]\!] \leq [\![f_2]\!]$, $f_1 \in B_1$ ve $f_2 \in B_2$ elde edilir. B_1 ve B_2 ideal olduğundan $x_1 \in B_1$ ve $x_2 \in B_2$ bulunur.

Ayrıca $[\![x_1]\!] = e_1 \leq [\![f]\!]$ ve A ideal olduğundan $x_1 \in A$

$[\![x_2]\!] = e_2 \leq [\![f]\!]$ ve A ideal olduğundan $x_2 \in A$ dır.

Sonuç olarak $x_1 \in A \cap B_1$ ve $x_2 \in A \cap B_2$ elde edilir.

$f = x_1 + x_2$, $A \cap B_1 \subseteq C$ ve $A \cap B_2 \subseteq C$ olduğundan $f \in C$ olur.

Buradan $A \cap (B_1 + B_2) \subseteq C$ bulunur.

$A \cap (B_1 + B_2) \subseteq C \Rightarrow [A \cap (B_1 + B_2)]^{\perp\perp} \subseteq C^{\perp\perp}$ dir.

Son olarak $A \cap (B_1 + B_2)^{\perp\perp} = A^{\perp\perp} \cap (B_1 + B_2)^{\perp\perp} \subseteq C^{\perp\perp} = C$ elde edilerek ispat tamamlanır.

$\mathbb{B}(X)$ dağılmalı latistir. Sonuç olarak $(\mathbb{B}(X), \subseteq)$ Boole cebridir.

3.9. Teorem:

$(X, [\![\ ]\!], E)$ latis normlu uzay , $E_0 = [\![X]\!]^{\perp\perp}$ olmak üzere E_0 'ın her B bandi için $[\![x_0]\!] \in B$ olacak biçimde $0 \neq x_0 \in X$ var olsun. $\mathbb{B}(X)$ ile $\mathbb{B}([\![X]\!]^{\perp\perp})$ Boole izomorfiktir [3].

İspat:

İzomorfizma olacak şekilde bir h fonksiyonu tanımlayalım.

$h : \mathbb{B}([\![X]\!]^{\perp\perp}) \rightarrow \mathbb{B}(X)$

$B \rightarrow h(B) = \{x \in X : [\![x]\!] \in B\}$

h 'ın fonksiyon olduğunu görelim:

h 'ın iyi tanımlığı tanımından açıktır. h 'ın anlamlılığına bakalım;

$B \in \mathbb{B}(\llbracket X \rrbracket^{\perp\perp}) \Rightarrow h(B) \in \mathbb{B}(X)$ olduğunu görelim.

Öncelikle $h\left(B^{\perp}\right) = \left[h(B)\right]^{\perp}$ olduğunu görmeliyiz.

$y \in h\left(B^{\perp}\right)$ alalım.

$y \in h\left(B^{\perp}\right) \Rightarrow \llbracket y \rrbracket \in B^{\perp}$

$\Rightarrow$ her $u \in B$ için $u \perp \llbracket y \rrbracket$

Her $z \in h(B)$ için $\llbracket z \rrbracket \in B$ olduğundan $\llbracket z \rrbracket \perp \llbracket y \rrbracket$ dir. Buradan $\llbracket z \rrbracket \wedge \llbracket y \rrbracket = 0$ olur. $y \in \left[h(B)\right]^{\perp}$ elde edilir.

Tersine $0 \neq x \in \left[h(B)\right]^{\perp}$ alalım.

$x \in \left[h(B)\right]^{\perp} \Rightarrow$ her $z \in h(B)$ için $x \perp z$

$\Rightarrow \llbracket z \rrbracket \in B$ ve $\llbracket z \rrbracket \wedge \llbracket x \rrbracket = 0$ (*)

Olmayana ergi yöntemini kullanalım;

$x \notin h(B^{\perp}) \Rightarrow \llbracket x \rrbracket \notin B^{\perp}$

$\Rightarrow \exists\ y \in B$ için $\llbracket x \rrbracket \wedge y \neq 0$

$\llbracket x \rrbracket \wedge y = e$ diyelim. Bu durumda infimum tanımından $0 \leq e \leq \llbracket x \rrbracket$ olur. Keyfi $0 \leq k \in I_e$ alalım.

$k \in I_e$ ise $k \leq \lambda e$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ vardır. Ayrıca $e \leq \llbracket x \rrbracket$ olduğundan $k \leq \lambda e \leq \lambda \llbracket x \rrbracket$ dır. Diğer yandan $u \in X$ için $\llbracket u \rrbracket = \llbracket u \rrbracket + k - k$ yazılabileceğinden ayrılabilirlik özelliğinden u=v+m , $\llbracket m \rrbracket = k$ olacak şekilde en az bir $m \in X$

vardır. $I_e \subseteq$ B ve B band olduğundan $[\![m]\!] = k \in B$ olur. (*) dan $[\![m]\!] \wedge [\![x]\!]=0$ elde edilir.

$$[\![m]\!] \wedge [\![x]\!]=0 \Rightarrow [\![m]\!] \wedge \lambda [\![x]\!]=0$$
$$\Rightarrow [\![m]\!]=0$$
$$\Rightarrow k=0$$

Ayrıca $k \in \{e\}^{\perp\perp}$ ise en az bir $(k_\alpha) \subseteq \{I_e\}$ vardır öyle ki $k_\alpha \uparrow k$ dır. O halde her α için $(k_\alpha)=0$ olacağından k=0 elde edilir..

Bu ise çelişkidir. Sonuç olarak $x \in h(B^{\perp})$ elde edilir. .

Son olarak her B için $h(B)=h(B^{\perp\perp})=[h(B)]^{\perp\perp}$ olduğundan $h(B) \in \mathbb{B}(X)$ dir.

Sonuç olarak h anlamlıdır.

h ‘ın latis işlemlerini koruduğunu görelim

Her A, B $\in \mathbb{B}([\![X]\!]^{\perp\perp})$ için $h(A \wedge B)=h(A) \wedge h(B)$ olduğunu gösterelim.

$$h(A \wedge B)=h(A \cap B)=\{x \in X : [\![x]\!] \in A \cap B\}$$
$$=\{x \in X : [\![x]\!] \in A\} \cap \{x \in X : [\![x]\!] \in B\}$$
$$=h(A) \cap h(B)$$
$$=h(A) \wedge h(B)$$

$h(A \vee B)=h(A) \vee h(B)$ olduğunu gösterelim.

$$h(A \vee B)=h\left[(A+B)^{\perp\perp}\right]$$
$$=h\left[\left(A^{\perp} \cap B^{\perp}\right)^{\perp}\right]$$
$$=\left[h\left(A^{\perp} \cap B^{\perp}\right)\right]^{\perp}$$

$$=\left[h\left(A^{\perp}\right)\cap h\left(B^{\perp}\right)\right]^{\perp}$$

$$=\left[h\left(A\right)^{\perp}\cap h\left(B\right)^{\perp}\right]^{\perp}$$

$$=\left[h\left(A\right)+h\left(B\right)\right]^{\perp\perp}$$

$$= h(A)\vee h(B)$$

h ‘ın birebirliğini görelim:

B_1, $B_2 \in$ $\mathbb{B}(\llbracket X\rrbracket^{\perp\perp})$ için $h\left(B_1\right)=h\left(B_2\right)$ iken $B_1=B_2$ olduğunu göstermemiz yeterlidir.

B_1, $B_2 \in$ $\mathbb{B}(\llbracket X\rrbracket^{\perp\perp})$ için $h\left(B_1\right)=h$ olsun. Herhangi bir $x\in B_1$ pozitif elemanını alalım.

$x\in B_1\subseteq\llbracket X\rrbracket^{\perp\perp}$ ve $\llbracket X\rrbracket^{\perp\perp}$ $\llbracket X\rrbracket$ ‘in ürettiği band olduğundan $x_\alpha\uparrow x$ olacak şekilde en az bir $\left(x_\alpha\right)\subseteq\llbracket X\rrbracket$ vardır. O halde $\llbracket u_x\rrbracket=x_\alpha$ her α için en az bir $u_x\in X$ vardır. Ayrıca B_1 band olduğundan idealdir ve $x_\alpha\le x$ olduğundan $x_\alpha\in B_1$ dir. Buradan $\llbracket u_x\rrbracket\in B_1$ elde edilir.

$$\llbracket u_x\rrbracket\in B_1\Rightarrow\ u_x\in h\left(B_1\right)=h\left(B_2\right)$$

$$\Rightarrow u_x\in h\left(B_2\right)$$

$$\Rightarrow\llbracket u_x\rrbracket\in B_2$$

$$\Rightarrow x_\alpha\in B_2$$

B_2 band ve $x_\alpha\uparrow x$ olduğundan $x\in B_2$ olur. $B_1\subseteq B_2$ bulunur.

Keyfi $x \in B_1$ için $x = x^+ - x^-$ ve $0 < x^+$, x^- olduğundan x^+, $x^- \in B_2$ olur. Dolayısıyla $x \in B_2$ elde edilir.

Benzer şekilde $B_2 \subseteq B_1$ olduğu kolayca görülür.

$B_1 = B_2$ sonucuna varılır.

Sonuç olarak h birebir fonksiyondur.

h ‘ın örtenliğini görelim:

Her A $\in \mathbb{B}(X)$ için h(B)=A olacak şekilde en az bir B$\in$ $\mathbb{B}(\llbracket X \rrbracket^{\perp\perp})$ varlığını göstermeliyiz. Keyfi bir A $\in \mathbb{B}(X)$ alalım. B=$\llbracket A \rrbracket^{\perp\perp} \subseteq E_0$ olarak tanımlayalım. B banddir.

h(B)=A olduğunu göstermek için öncelikle $h(\llbracket A \rrbracket) = A$ olduğunu görelim.

$h(\llbracket A \rrbracket) = \{x \in X : \llbracket x \rrbracket \in \llbracket A \rrbracket\}$

Her y$\in$A için $\llbracket y \rrbracket \in \llbracket A \rrbracket$ olduğundan $y \in h(\llbracket A \rrbracket)$ dır. A $\subseteq$ $h(\llbracket A \rrbracket)$

Diğer yandan her $y \in h(\llbracket A \rrbracket)$ için;

$$
\begin{aligned}
y \in h(\llbracket A \rrbracket) &\Rightarrow \llbracket y \rrbracket \in \llbracket A \rrbracket \\
&\Rightarrow \exists u \in A : \llbracket u \rrbracket = \llbracket y \rrbracket \\
&\Rightarrow \exists u \in A : \llbracket y \rrbracket \leq \llbracket u \rrbracket
\end{aligned}
$$

A ideal olduğundan $y \in A$ olur. $h(\llbracket A \rrbracket) \subseteq A$

$h(\llbracket A \rrbracket) = A$ olduğu görüldü.

$$h(B)=h\left(\llbracket A \rrbracket^{\perp\perp}\right)=\left[h(\llbracket A \rrbracket)\right]^{\perp\perp}=A^{\perp\perp}=A$$

Sonuç olarak h örten fonksiyondur.

h Boole cebir izomorfizmidir.

3.10. Teorem:

X, $y \in X$ olmak üzere $x \perp y$ ise $[\![x+y]\!] = [\![x]\!] + [\![y]\!]$ dir [3].

İspat:

Vektör normunun tanımından $[\![x+y]\!] \leq [\![x]\!] + [\![y]\!]$ dır. (1)

$x \perp y$ olduğundan $[\![x]\!] \wedge [\![y]\!] = 0$ dır

Ayrıca;

$$[\![x]\!] = [\![x+y-y]\!] \leq [\![x+y]\!] + [\![-y]\!]$$

$$= [\![x+y]\!] + |-1| \cdot [\![y]\!]$$

$$= [\![x+y]\!] + [\![y]\!]$$

Buradan,

$$[\![x]\!] \wedge [\![x]\!] \leq \left[[\![x+y]\!] + [\![y]\!]\right] \wedge [\![x]\!]$$

$\leq \left[[\![x+y]\!] \wedge [\![x]\!]\right] + [\![x]\!] \wedge [\![y]\!]$ elde edilir.

$$\Rightarrow [\![x]\!] \leq \left[[\![x+y]\!] \wedge [\![x]\!]\right] \leq [\![x+y]\!]$$

$$\Rightarrow [\![x]\!] \leq [\![x+y]\!]$$

Benzer şekilde $[\![y]\!] \leq \left[[\![x+y]\!] \wedge [\![x]\!]\right] \leq [\![x+y]\!]$ elde edilir.

O halde;

$[\![x]\!] \vee [\![y]\!] \leq [\![x+y]\!]$ bulunur.

$[\![x]\!] \vee [\![y]\!] = [\![x]\!] + [\![y]\!] - [\![x]\!] \wedge [\![y]\!]$ göz önüne alınırsa,

$[\![x]\!] + [\![y]\!] \leq [\![x+y]\!]$ olduğu görülür. (2)

(1) ve (2) den $[\![x+y]\!] = [\![x]\!] + [\![y]\!]$ dir.

3.11. Teorem:

$e_1, e_2 \in E$ ve $e_1 \perp e_2$ olmak üzere $[\![x]\!] = e_1 + e_2$ olsun. Bu durumda $x = x_1 + x_2$, $[\![x_1]\!] = e_1$ ve $[\![x_2]\!] = e_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in X$ varsa tektir [3].

İspat:

$e_1, e_2 \in E$ ve $e_1 \perp e_2$ olmak üzere $[\![x]\!] = e_1 + e_2$ olsun. Bu durumda $x = x_1 + x_2$, $[\![x_1]\!] = e_1$ ve $[\![x_2]\!] = e_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in X$ vardır.
$[\![x_1]\!] = [\![y_1]\!] = e_1$, $[\![x_2]\!] = [\![y_2]\!] = e_2$ ve $x = x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ olduğunu varsayalım. Buradan $(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = 0$ yazılabilir. Üçgen eşitsizliğinden

$$[\![x_1 - y_1]\!] \leq [\![x_1]\!] + [\![y_1]\!] = 2 \cdot e_1 \ , \ [\![x_2 - y_2]\!] \leq [\![x_2]\!] + [\![y_2]\!] = 2 \cdot e_2$$

$\Rightarrow \quad 0 \leq [\![x_1 - y_1]\!] \wedge [\![x_2 - y_2]\!] \leq 2e_1 \wedge 2e_2 = \leq 2(e_1 \wedge e_2) = 0$

$\Rightarrow \quad [\![x_1 - y_1]\!] \wedge [\![x_2 - y_2]\!] = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 - y_1 \perp x_2 - y_2$

$\Rightarrow \quad 0 = [\![(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2)]\!] = [\![(x_1 - y_1)]\!] + [\![(x_2 - y_2)]\!] = 0$

$\Rightarrow \quad [\![x_1 - y_1]\!] = 0$ ve $[\![x_2 - y_2]\!] = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = y_1 \ , \ x_2 = y_2$

Dolayısıyla $x_1, x_2 \in X$ tektir.

3.4. Tanım:

$K \in \mathbb{B}(X)$ olmak üzere $X = K \oplus K^{\perp}$ ise K ‘ya projeksiyon band denir.

3.5. Tanım:

Her K$\in\mathbb{B}$(X) projeksiyon band ise X ‘e projeksiyon özelliğine sahiptir denir.

3.12. Teorem:

B_1, B_2 $\in\mathbb{B}(E_0)$, h daha önce tanımlanan izomorfizma olmak üzere $h(B_1+B_2) = h(B_1)+h(B_2)$ dir.

İspat:

Her z için,

$$
\begin{aligned}
z\in h(B_1+B_2) \;&\Rightarrow [\![z]\!]\in B_1+B_2\\
&\Rightarrow [\![z]\!] = e_1+e_2 : e_1\in B_1 \;,\; e_2\in B_2\\
&\Rightarrow \exists\, x_1,\, x_2\in X : z=x_1+x_2 \text{ ve } [\![x_1]\!]=e_1 \;,\; [\![x_2]\!]=e_2\\
&\Rightarrow \exists\, x_1,\, x_2\in X : \; [\![z]\!]=[\![x_1]\!]+[\![x_2]\!] \;,\; [\![x_1]\!]\in B_1 \;,\; [\![x_2]\!]\in B_2\\
&\Rightarrow \exists\, x_1,\, x_2\in X : \; [\![z]\!]=[\![x_1]\!]+[\![x_2]\!] \;,\; x_1\in h(B_1),\; x_2\in h(B_2)\\
&\Rightarrow z\in h(B_1)+h(B_2)
\end{aligned}
$$

Her z için,

$$
\begin{aligned}
z\in h(B_1)+h(B_2) \Rightarrow\; & z=x_1+x_2 : x_1\in h(B_1),\; x_2\in h(B_2)\\
&\Rightarrow [\![z]\!]=[\![x_1+x_2]\!]\le[\![x_1]\!]+[\![x_2]\!] \text{ ve } [\![x_1]\!]\in B_1,\; [\![x_2]\!]\in B_2
\end{aligned}
$$

B_1 ve B_2 ideal olduğundan B_1+B_2 de idealdir. Buradan $[\![z]\!]\in B_1+B_2$ elde edilir.h ‘ın tanımından $z\in h(B_1+B_2)$ bulunur.

3.13. Teorem:

$E_0=[\![X]\!]^{\perp\perp}$ projeksiyon özelliğine sahip ise X de projeksiyon özelliğine sahiptir [3].

İspat:

Her $K\in\mathbb{B}(X)$ için $X=K\oplus K^{\perp}$ olduğunu göstermeliyiz.

$K\in\mathbb{B}(X)$ alalım. h 'ın örtenliğinden h(B)=K olacak şekilde en az bir $B\in\mathbb{B}(E_0)$ vardır. E_0 projeksiyon özelliğine sahip olduğundan $E_0=B\oplus B^{\perp}$ olduğu göz önüne alınırsa:

$X = h(E_0) = h(B+B^{\perp}) = h(B)+h(B^{\perp}) \subseteq h(B)+\left[h(B)\right]^{\perp} = K+K^{\perp}$

$X\subseteq K+K^{\perp}$ ve $K\cap K^{\perp}=\{0\}$ olduğundan $X\subseteq K\oplus K^{\perp}$

Diğer yandan $K\oplus K^{\perp}\subseteq X$ açıktır. Sonuç olarak $X= K\oplus K^{\perp}$ elde edilir.

3.14. Teorem:

X projeksiyon özelliğine sahip olsun. $K\in\mathbb{B}(X)$ için

$\pi_K : X \to K$

$x= x_1+ x_2 \to \pi_K(x)=x_1$

$\pi_K^{\perp} : X \to K^{\perp}$

$x= x_1+ x_2 \to \pi_K^{\perp}(x)=x_2$

biçiminde tanımlı π_K ve $\pi_K^{\perp}$ band projeksiyondur ve $\pi_K^{\perp}=I-\pi_K$ dır.

İspat:

π_K tanımından anlamlı , hipotezden $x= x_1+ x_2$ yazılışı tek olduğundan iyi tanımlıdır, dolayısıyla fonksiyondur.

π_K ‘nın lineerliğini görelim.

Her x, $y \in X$ için $\pi_K(x+y) = \pi_K(x) + \pi_K(y)$ olduğunu göstermeliyiz.

$x, y \in X$ ise $x = x_1 + x_2$ ve $y = y_1 + y_2$ olacak şekilde $x_1, y_1 \in K$ ve $x_2, y_2 \in K^{\perp}$ vardır.

$$\pi_K(x+y) = \pi_K(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) = \pi_K(x_1 + y_1 + x_2 + y_2) = x_1 + y_1 = \pi_K(x) + \pi_K(y)$$

π_K ’nın projeksiyon olduğunu görelim:

${\pi_K}^2 = \pi_K$ olduğunu göstermeliyiz.

$${\pi_K}^2(x) = \pi_K(\pi_K(x)) = \pi_K(x_1) = x_1 = \pi_K(x)$$

${\pi_K}^{\perp} = I - \pi_K$ olduğunu görelim:

Her $x \in X$ için $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in K$, $x_2 \in K^{\perp}$

$\Rightarrow x_2 = x - x_1$

$\Rightarrow {\pi_K}^{\perp}(x) = x_2 = x - x_1 = I(x) - \pi_K(x)$

$\Rightarrow {\pi_K}^{\perp}(x) = (I - \pi_K)(x)$

$\Rightarrow {\pi_K}^{\perp} = I - \pi_K$

3.15. Teorem:

X projeksiyon özelliğine sahip olsun , $K_1, K_2 \in \mathbb{B}(X)$ için

i) $K_1 \cap K_2$ ve $K_1 + K_2$ projeksiyon banddir.

ii) $\pi_{K_1 \cap K_2} = \pi_{K_1} \circ \pi_{K_2} = \pi_{K_2} \circ \pi_{K_1}$

iii) $\pi_{K_1 + K_2} = \pi_{K_1} + \pi_{K_2} - \pi_{K_1 \cap K_2}$ dir.

İspat:

i) K_1, $K_2 \in \mathbb{B}(X)$ için $K_1 \cap K_2 \in \mathbb{B}(X)$ ve X projeksiyon özelliğine sahip olduğundan $K_1 \cap K_2$ projeksiyon banddir.

K_1, $K_2 \in \mathbb{B}(X)$ için $K_1 + K_2$ nin projeksiyon band olduğunu görelim.

K_1, $K_2 \in \mathbb{B}(X)$ alalım, h 'ın örtenliğinden $h(B_1)=K_1$ ve $h(B_2)=K_2$ olacak şekilde B_1, $B_2 \in \mathbb{B}(E_0)$ vardır. Ayrıca E_0 projeksiyon özelliğine sahip olduğundan B_1+B_2 projeksiyon banddir.

$K_1+K_2 = h(B_1)+h(B_2)=h(B_1+B_2)$

h 'ın anlamlılığından $h(B_1+B_2)$ X 'de banddir. X projeksiyon özelliğine sahip olduğundan $h(B_1+B_2)$ projeksiyon banddir. Sonuç olarak K_1+K_2 projeksiyon banddir.

ii) K_1, $K_2 \in \mathbb{B}(X)$ için $K_1 \cap K_2$ projeksiyon band olduğundan $X=K_1 \cap K_2 \oplus (K_1 \cap K_2)^{\perp}$ yazılabilir.

Her x için

$x \in X$ ise $x = x_1 + x_2$ olacak biçimde $x_1 \in K_1 \cap K_2$, $x_2 \in (K_1 \cap K_2)^{\perp}$ vardır. Bu durumda $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in K_1$ ve $x_1 \in K_2$, $x_2 \in (K_1 \cap K_2)^{\perp}$ olur.

Her x için ;

$\pi_{K_1 \cap K_2}(x) = x_1$

$\pi_{K_1} \circ \pi_{K_2}(x) = \pi_{K_1}(\pi_{K_2}(x)) = \pi_{K_1}(x_1) = x_1$

olduğundan $\pi_{K_1 \cap K_2} = \pi_{K_1} \circ \pi_{K_2}$ dır.

$\pi_{K_2} \circ \pi_{K_1}(x) = \pi_{K_2}\left(\pi_{K_1}(x)\right) = \pi_{K_2}(x_1) = x_1$

iii) $K_1 + K_2$ 'in projeksiyon band olduğunu gördük.

$K_1 \perp K_2$ olsun.

Her x için

$x \in X$ ise $x = x_1 + x_2$ olacak biçimde $x_1 \in K_1 + K_2$, $x_2 \in (K_1 + K_2)^{\perp}$ vardır.

Buradan $x = x_1 + x_2$, $x_1 = u_1 + u_2$ yazılabilir öyle ki $u_1 \in K_1, u_2 \in K_2$ ve $x_2 \in (K_1 + K_2)^{\perp}$ dir

$\Rightarrow x = u_1 + u_2 + x_2 : u_1 \in K_1,\ x_2 \in (K_1 + K_2)^{\perp}$

Ayrıca;

$K_1 \subseteq K_1 + K_2 \Rightarrow (K_1 + K_2)^{\perp} \subseteq K_1^{\perp}$ olduğundan $x_2 \in K_1^{\perp} = K_2 \subseteq K_1 + K_2$

O halde

$x = u_1 + u_2 + x_2 : u_1 \in K_1,\ u_2 + x_2 \in K_2$ elde edilir.

$\pi_{K_1+K_2}(x) = x_1 + x_2 = u_1 + u_2 + x_2$

$\pi_{K_1} + \pi_{K_2}(x) = \pi_{K_1}(x) + \pi_{K_2}(x) = u_1 + u_2 + x_2$

Dolayısıyla $\pi_{K_1+K_2} = \pi_{K_1} + \pi_{K_2}$ dır.

Keyfi $K_1,\ K_2 \in \mathbb{B}(X)$ için

$K_1 + K_2 = \left(K_1 \cap K_2^{\perp}\right) + K_2$ ve $\left(K_1 \cap K_2^{\perp}\right) \perp K_2$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\pi_{K_1+K_2} &= \pi_{\left(K_1 \cap K_2^{\perp}\right)+K_2} \\
&= \pi_{\left(K_1 \cap K_2^{\perp}\right)} + \pi_{K_2} \\
&= \pi_{K_1} \circ \pi_{K_2^{\perp}} + \pi_{K_2} \\
&= \pi_{K_1}\left(I - \pi_{K_2}\right) + \pi_{K_2}
\end{aligned}$$

$$= \pi_{K_1} - \pi_{K_1} \circ \pi_{K_2} + \pi_{K_2}$$

$$= \pi_{K_1} + \pi_{K_2} - \pi_{K_1 \cap K_2}$$

3.16. Teorem:

$\mathbb{P}(X) = \{\pi_K : K \text{ X'de projeksiyon band}\}$ kümesi $K_1, K_2 \in \mathbb{B}(X)$ için $\pi_{K_1} \leq \pi_{K_2} \Leftrightarrow K_1 \subseteq K_2$ sıralamasıyla bir Boole cebiridir.

İspat:

$\mathbb{P}(X)$ 'in latis olduğunu görelim.

$K_1, K_2 \in \mathbb{B}(X)$ için

$\pi_{K_1} \wedge \pi_{K_2} = \pi_{K_1 \cap K_2}$ olduğunu gösterelim:

$K_1 \cap K_2 \subseteq K_1 \Rightarrow \pi_{K_1 \cap K_2} \leq \pi_{K_1}$

$K_1 \cap K_2 \subseteq K_2 \Rightarrow \pi_{K_1 \cap K_2} \leq \pi_{K_2}$

olduğundan $\pi_{K_1 \cap K_2}$, π_{K_1} ve π_{K_2} için bir alt sınırdır. Alt sınırların en büyüğü olduğunu görmek için başka bir alt sınır π_C alalım. Bu durumda;

$\pi_C \leq \pi_{K_1} \Rightarrow C \subseteq K_1$

$\pi_C \leq \pi_{K_2} \Rightarrow C \subseteq K_2$ olur. Buradan $C \subseteq K_1 \cap K_2$ elde edilir.

$C \subseteq K_1 \cap K_2 \Rightarrow \pi_C \leq \pi_{K_1 \cap K_2}$

$$\Rightarrow \pi_{K_1} \wedge \pi_{K_2} = \pi_{K_1 \cap K_2}$$

$\pi_{K_1} \vee \pi_{K_2} = \pi_{K_1 + K_2}$ olduğunu görelim:

$K_1 \subseteq K_1 + K_2 \Rightarrow \pi_{K_1} \leq \pi_{K_1 + K_2}$

$K_2 \subseteq K_1 + K_2 \Rightarrow \pi_{K_2} \leq \pi_{K_1 + K_2}$

olduğundan $\pi_{K_1+K_2}$, π_{K_1} ve π_{K_2} için bir üst sınırdır. Üst sınırların en küçüğü olduğunu görmek için başka bir üst sınır π_C alalım.

$\pi_{K_1} \leq \pi_C \Rightarrow K_1 \subseteq C$

$\pi_{K_2} \leq \pi_C \Rightarrow K_2 \subseteq C$ olur. Buradan K_1 ve K_2 alt uzay olduğundan $K_1+K_2 \subseteq C$ elde edilir.

$$
\begin{aligned}
K_1+K_2 \subseteq C &\Rightarrow \pi_{K_1+K_2} \leq \pi_C \\
&\Rightarrow \pi_{K_1} \vee \pi_{K_2} = \pi_{K_1+K_2}
\end{aligned}
$$

$\mathbb{P}(X)$ ' in dağılmalı latis olduğunu görelim:

π_A , π_B , $\pi_C \in \mathbb{P}(X)$ için

$$
\begin{aligned}
\pi_A \wedge (\pi_B \vee \pi_C) &= \pi_A \wedge \pi_{B+C} \\
&= \pi_A \circ (\pi_B + \pi_C - \pi_{B \cap C}) \\
&= (\pi_A \circ \pi_B) + (\pi_A \circ \pi_C) - \pi_A \circ \pi_{B \cap C} \\
&= (\pi_A \circ \pi_B) + (\pi_A \circ \pi_C) - \pi_{A \cap B \cap C}
\end{aligned}
$$

Diğer yandan;

$$
\begin{aligned}
(\pi_A \wedge \pi_B) \vee (\pi_A \wedge \pi_C) &= (\pi_A \circ \pi_B) + (\pi_A \circ \pi_C) - \pi_A \circ \pi_B \circ \pi_A \circ \pi_C \\
&= (\pi_A \circ \pi_B) + (\pi_A \circ \pi_C) - \pi_{A \cap B \cap C}
\end{aligned}
$$

olduğundan $\mathbb{P}(X)$ dağılmalı latistir.

$\{\theta\}$, $X \in \mathbb{B}(X)$ ve π_θ , $\pi_X \in \mathbb{P}(X)$ olmak üzere;

Her A için $\pi_\theta \leq \pi_A$ olduğundan π_θ en küçük elemandır.

Her A için $\pi_A \leq \pi_X$ olduğundan π_X birim elemandır.

Her $K \in \mathbb{B}(X)$ için $\pi_{K^\perp} = \pi_K{}^\perp$ dir.

$\pi_K{}^\perp$ π_K nın tamlayanıdır. Gerçekten;

$\pi_{K^\perp} \wedge \pi_K = \pi_{K^\perp \cap K} = \pi_\theta$

$\pi_{K^\perp} \vee \pi_K = \pi_{K^\perp} + \pi_K - \pi_{K^\perp \cap K} = \pi_{K^\perp + K} = \pi_X$

Sonuç olarak $\mathbb{P}(X)$ Boole cebridir.

3.17. Teorem:

$\varphi : \mathbb{B}(X) \rightarrow \mathbb{P}(X)$

$K \rightarrow \varphi(K) = \pi_K$ dönüşümü Boole cebiri izomorfizmasıdır.

İspat:

φ 'nin fonksiyon olduğunu göstermiştik, şimdi sırasıyla birebir ve örten olduğunu gösterelim.

$K_1, K_2 \in \mathbb{B}(X)$ için $\varphi(K_1) = \varphi(K_2)$ olsun.

$$\begin{aligned} \varphi(K_1) = \varphi(K_2) &\Rightarrow \pi_{K_1} = \pi_{K_2} \\ &\Rightarrow \pi_{K_1} \leq \pi_{K_2} \text{ ve } \pi_{K_2} \leq \pi_{K_1} \\ &\Rightarrow K_1 \subseteq K_2 \text{ ve } K_2 \subseteq K_1 \\ &\Rightarrow K_1 = K_2 \end{aligned}$$

O halde φ birebirdir.

φ 'nin tanımından örten olduğu açıktır.

φ 'nin latis işlemlerini koruduğunu görelim.

$K_1, K_2 \in \mathbb{B}(X)$ için

$\varphi(K_1 \wedge K_2) = \varphi(K_1) \wedge \varphi(K_2)$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} \varphi(K_1 \wedge K_2) &= \pi_{K_1 \wedge K_2} \\ &= \pi_{K_1 \cap K_2} \end{aligned}$$

$$= \pi_{K_1} \circ \pi_{K_2}$$

$$= \pi_{K_1} \wedge \pi_{K_2}$$

$$= \varphi(K_1) \wedge \varphi(K_2)$$

$\varphi(K_1 \vee K_2) = \varphi(K_1) \vee \varphi(K_2)$ olduğunu göstermeliyiz.

K_1, $K_2 \in \mathbb{B}(X)$ ve X projeksiyon özelliğine sahip olduğundan $K_1 + K_2$ projeksiyon banddir. Dolayısıyla $K_1 + K_2 = (K_1 + K_2)^{\perp\perp}$ dir. Buradan

$$\varphi(K_1 \vee K_2) = \pi_{(K_1+K_2)^{\perp\perp}}$$

$$= \pi_{K_1+K_2}$$

$$= \pi_{K_1} \vee \pi_{K_2}$$

$$= \varphi(K_1) \vee \varphi(K_2)$$

Son olarak , $K \in \mathbb{B}(X)$ için

$\varphi(K^{\perp}) = [\varphi(K)]^{\perp}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\varphi(K^{\perp}) = \pi_K^{\perp}$$

$$= \pi_K^{\perp}$$

$$= [\varphi(K)]^{\perp}$$

Sonuç olarak φ Boole cebri izomorfizmidir.

Sonuç:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}(E_0) & \xleftrightarrow{\;h\;} & \mathbb{B}(X) \\ \updownarrow \psi & & \updownarrow \varphi \\ \mathbb{P}(E_0) & \xleftrightarrow{\;\hat{h}\;} & \mathbb{P}(X) \end{array}$$

şekilde gösterilen dönüşümlerle $\hat{h} : \psi \circ \varphi$ izomorfizmi elde edilir. Yani $\mathbb{P}(E_0)$ ile $\mathbb{P}(X)$ Boole izomorfiktir.

3.18. Teorem:

E_0 projeksiyon özelliğine sahip. X ayrılabilir olsun. $\pi \in \mathbb{P}(E_0)$ olmak üzere $\hat{h}(\pi) = \pi' \in \mathbb{P}(X)$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $\pi(\llbracket x \rrbracket) = \llbracket \pi'(x) \rrbracket$ dir [3].

İspat:

$\pi \in \mathbb{P}(E)$ ve $\mathbb{R}(E_0) \cong \mathbb{B}(E_0)$ olduğundan $\pi_B = \pi$ olacak şekilde bir B bandi vardır. E_0 projeksiyon özelliğine sahip olduğundan $E_0 = B \oplus B^{\perp}$ olarak yazılabilir. Şimdi her $x \in X$ için $\llbracket x \rrbracket \in E_0$ olacağından $\llbracket x \rrbracket = e_1 + e_2$, $e_1 \in B$, $e_2 \in B^{\perp}$ olacak şekilde e_1, e_2 vardır. X ayrılabilir olduğundan $x = x_1 + x_2$ ve $\llbracket x_1 \rrbracket = e_1$, $\llbracket x_2 \rrbracket = e_2$ olacak şekilde x_1, $x_2 \in X$ vardır. Bu durumda $\pi(\llbracket x \rrbracket) = \llbracket x_1 \rrbracket = e_1$, $\pi^{\perp}(\llbracket x \rrbracket) = \llbracket x_2 \rrbracket = e_2 = 0$ olur.

Diğer yandan E_0 projeksiyon özelliğine sahip olduğundan X de projeksiyon özelliğine sahiptir. Dolayısıyla $B \in \mathbb{B}(E_0)$ için $h(B) = K \in \mathbb{B}(X)$ ve $X = K \oplus K^{\perp}$ dir.

Ayrıca $\hat{h}(\pi)(x) = \pi'(x) \in K = h(B) = h(\pi(E_0))$ olduğundan h 'ın tanımından $\left\llbracket \hat{h}(\pi)(x) \right\rrbracket \in \pi(E_0)$ olur.

Buradan $\pi^{\perp}\left(\left[\!\left[\hat{h}(\pi)(x)\right]\!\right]\right) = 0$ ve $\pi\left(\left[\!\left[\hat{h}(\pi)(x)\right]\!\right]\right) = \left[\!\left[\hat{h}(\pi)(x)\right]\!\right]$ elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\pi([\![x]\!]) &= \pi([\![x_1]\!] + [\![x_2]\!]) \\
&= \pi\left(\left[\!\left[\hat{h}(\pi)(x)\right]\!\right] + \left[\!\left[\hat{h}(\pi)^{\perp}(x)\right]\!\right]\right) \\
&= \pi\left(\left[\!\left[\hat{h}(\pi)(x)\right]\!\right]\right) + \pi\left(\left[\!\left[\hat{h}(\pi)^{\perp}(x)\right]\!\right]\right) \\
&= \pi([\![\pi'(x)]\!] + \pi([\![(\pi')^{\perp}(x)]\!]) \\
&= \pi([\![\pi'(x)]\!] + \pi([\![x_2]\!]) \\
&= \pi([\![\pi'(x)]\!]) + 0 \\
&= \pi([\![\pi'(x)]\!]) \\
&= [\![\pi'(x)]\!]
\end{aligned}
$$

4. MERKEZ OPERATÖRLER

Bu bölümde vektör normlu X uzayı için merkez operatörler tanımı verilerek X vektör normlu uzayı için Freudenthal Spektral Teoremi elde edilmiştir.

4.1. Tanım:

$e \in E^+$ olmak üzere $x \wedge (e - x) = 0$ olacak şekilde $x \in E^+$ varsa x 'e e'nin komponenti denir.

4.2. Tanım:

E Riesz uzayı, $0 < x \in E$ $x_1, x_2,$ x_n x 'in ikişer dik komponentleri olsun. $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ ve $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in E$ elemanına x-adım fonksiyonu denir.

4.3. Tanım:

E Riesz uzayı, T: $E \to E$ operatör olmak üzere her $x \in E$ için $|Tx| \leq \lambda |x|$ olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}^+$ varsa T 'ye merkez operatörü denir. Merkez operatörlerin kümesi Z(E) ile gösterilir.

4.4. Tanım:

X ayrılabilir vektör uzayı, T: $X \to X$ operatör olmak üzere her $x \in X$ ve bir $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $[\![T(x)]\!] \leq \lambda [\![x]\!]$ oluyorsa T 'ye $[\![\ ]\!]$- merkez operatörü denir. $[\![\ ]\!]$- merkez operatörlerin kümesi Z(X) ile gösterilir.

4.5. Tanım

$e \in E^{+}$ alalım. Her $\varepsilon > 0$ için $\alpha_\varepsilon \leq \alpha$ iken $[\![x_\alpha - x]\!] \leq \varepsilon \cdot e$ olacak şekilde α_ε varsa x_α neti x ‘e br yakınsaktır denir ve $x = br - \lim_{\alpha} x_\alpha$ ile gösterilir.

4.6. Tanım

Eğer $\left(x_\alpha - x_\beta\right)$ sıfıra br-yakınsak ise x_α netine br-Cauchy denir.

X br-tam , E Dedekind tam Riesz Uzayı olsun.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{B}(E_0) & \overset{h}{\longleftrightarrow} & \mathbb{B}(X) \\
\updownarrow \psi & & \updownarrow \varphi \\
\mathbb{P}(E_0) & \overset{\hat{h}}{\longleftrightarrow} & \mathbb{P}(X)
\end{array}
$$

diyagramını oluşturmuştuk. Şimdi bunun yardımıyla $\mathbb{Z}(E_0)$ ile $\mathbb{Z}(X)$ arasındaki ilişkiyi oluşturacağız.

4.1. Freudenthal Spectral Teorem:

E Dedekind tam Riesz Uzayı olsun. $0 < x \in E$ olmak üzere her $y \in I_X$ için $0 \leq y - u_n \leq \frac{1}{n} x$ ve $u_n \uparrow y$ olacak şekilde u_n x –adım fonksiyonu vardır.

4.2. Teorem

X vektör normlu uzay, E Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere
$F : Z(E_0) \rightarrow Z(X)$ fonksiyonu vardır.

İspat:

E Dedekind tam olduğundan $L_b(E)$ Riesz uzayıdır ve I birim dönüşümünün ürettiği ideal Z(E) dir. Dolayısıyla Freudenthal Spectral Teoreminden her $0 \le \pi \in Z(E)$ için $0 \le \pi - \pi_n \le \frac{1}{n} I$, $\pi_n \uparrow \pi$ olacak şekilde π_n I - adım fonksiyonları vardır.

π_n I-adım fonksiyonu ise P_i ler I birim operatörünün ikişer dik komponentleri , $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$, $\sum_{i=1}^{k} P_i = I$ olmak üzere $\pi_n = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$ olarak yazılabilir. Burada $\sum_{i=1}^{k} P_i = I$ olduğundan $P_i \in P(E_0)$ olur.

φ fonksiyonu yardımıyla $\pi_n' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi(P_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i'$, $P_i' \in P(X)$ olmak üzere π_n' elde edilir.

Diğer yandan $P_i' \in P(X)$, $P_i \in P(E_0)$ olmak üzere her $x \in X$ için $[\![P_i'(x)]\!] = P_i([\![x]\!]) \le [\![x]\!]$ olduğundan $P_i' \in Z(X)$ dir. Z(X) vektör uzayı olduğundan $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i' = \pi_n' \in Z(X)$ dir.

Şimdi $\pi' : X \to X$

$x \to \pi'(x) = br - \lim(\pi_n')$ tanımlayalım.

π' nin anlamlılığını gösterelim.

Öncelikle m<n için $0 \le \pi_n - \pi_m \le \pi - \pi_m \le \frac{1}{m} I$ olduğunu söyleyelim.

Ayrıca her $x \in X$ için

$$\left[\!\left[\pi_n{}'(x) \right]\!\right] = \left[\!\left[\sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i{}'(x) \right]\!\right] = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left[\!\left[P_i{}'(x) \right]\!\right] = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i(\left[\!\left[x \right]\!\right]) = \pi_n \left[\!\left[x \right]\!\right] \text{ dir.}$$

O halde her $x \in X$ için

$\left[\!\left[\pi_n{}'(x) - \pi_m{}'(x) \right]\!\right] = \left[\!\left[(\pi_n{}' - \pi_m{}')(x) \right]\!\right] = (\pi_n - \pi_m)\left[\!\left[x \right]\!\right] \le \frac{1}{m}\left[\!\left[x \right]\!\right]$ dir. Bu da $\pi_n{}'(x)$ in br-Cauchy olduğunu gösterir. X br-tam olduğundan $br - \lim(\pi_n{}')$ vardır. π' anlamlıdır.

Limitin özelliklerinden π' nün iyi tanımlı ve lineerdir.

Bu tanımladığımız π' Z(X) ‘in elemanıdır.

Gerçekten;

$\left[\!\left[\pi'(x) \right]\!\right] = \left[\!\left[\lim \pi_n{}'(x) \right]\!\right] = \lim \left[\!\left[\pi_n{}'(x) \right]\!\right] \le \lim(\lambda \cdot \left[\!\left[x \right]\!\right]) = \lambda \cdot \left[\!\left[x \right]\!\right]$ dir.

O halde $\pi' \in Z(X)$ dir.

Bulunan bu π' elemanı seçilen diziden bağımsızdır.

$0 \le \pi - \pi_n \le \frac{1}{n} I,\ \pi_n \uparrow \pi$ ve $0 \le \pi - s_n \le \frac{1}{n} I\ \ s_n \uparrow \pi$ olacak şekilde (π_n) ve (s_n) I - adım fonksiyonlarının dizisini alalım.

$$\begin{aligned}
\left[\!\left[\pi_n{}'(x) - s_n{}'(x) \right]\!\right] &= \left[\!\left[(\pi_n{}' - s_n{}')(x) \right]\!\right] \\
&\le |\pi_n - s_n| \left[\!\left[x \right]\!\right] \\
&\le |\pi_n - \pi| \left[\!\left[x \right]\!\right] + |\pi - s_n| \left[\!\left[x \right]\!\right] \\
&\le \frac{1}{n}\left[\!\left[x \right]\!\right] + \frac{1}{n}\left[\!\left[x \right]\!\right] \\
&= \frac{2}{n}\left[\!\left[x \right]\!\right]
\end{aligned}$$

olduğundan br-lim $(\pi_n{}'(x) - s_n{}'(x))$=0 bulunur. Bu ise

br-lim $(\pi_n{}'(x))$= br-lim $(s_n{}'(x))$ olmasını verir.

Keyfi $\pi \in Z(E_0)$ için $\pi = \pi^+ - \pi^-$ biçiminde tek türlü yazılabilir.

Şimdi F: $Z(E_0) \to Z(X)$

$\pi \quad \to F(\pi) = (\pi^+)' - (\pi^-)'$ biçiminde tanımlayalım. F nin anlamlılığı Z(X) in vektör uzayı olmasından, iyi tanımlılığı ise seçilen diziden π' nün bağımsız olmasından kolayca elde edilir.

4.6. Tanım:

$x \in X$, $[\![x]\!] > 0$ olmak üzere $[\![y]\!] \wedge ([\![x]\!] - [\![y]\!]) = 0$ olacak şekilde $y \in X$ varsa y 'ye x'nin $[\![\ \ ]\!]-$komponenti denir.

4.7. Tanım:

E Riesz uzayı, $0 < [\![x]\!] \in E$, $x_1, x_2,$ x_n x 'in ikişer dik komponentleri olsun. $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$ ve $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $[\![z]\!] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [\![x_i]\!]$ sağlayan $z \in X$ elemanına x-adım fonksiyonu denir.

4.3. Teorem:

$x \in X$, $(a_n) \subseteq E^+$ artan bir dizi, $(a_n) \leq [\![x]\!]$ ($n \in \mathbb{N}$) olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ ve n<m için 1) $[\![x_n]\!] = [\![a_n]\!]$

2) $[\![x - x_n]\!] = [\![x]\!] - a_n$

3) $[\![x_m - x_n]\!] = a_n - a_m$ olacak biçimde $(x_n) \subseteq X$ vardır.

İspat

$(a_n) \subseteq E^+$ artan bir dizi, $(a_n) \leq [\![x]\!]$ ($n \in \mathbb{N}$) olsun.

1) $b_n = [\![x]\!] - a_n$, $b_0 = [\![x]\!]$ olarak tanımlayalım.

n=1 $\Rightarrow b_1 = [\![x]\!] - a_1$

$\Rightarrow b_1 + a_1 = [\![x]\!]$

$\Rightarrow x = u_1 + v_1$ ve $[\![u_1]\!] = a_1, [\![v_1]\!] = b_1$ olacak şekilde $u_1, v_1 \in X$ vardır.

$b_1 = b_1 - b_2 + b_2$ yazalım. Bu durumda $[\![v_1]\!] = b_1 - b_2 + b_2$ olur.

$[\![v_1]\!] = b_1 - b_2 + b_2 \Rightarrow \; v_1 = u_2 + v_2$, $[\![u_2]\!] = b_1 - b_2$, $[\![v_2]\!] = b_2$ olacak şekilde $u_2, v_2 \in X$ var.

$b_2 = b_2 - b_3 + b_3$ yazılırsa;

$[\![v_2]\!] = b_2 - b_3 + b_3 \Rightarrow \; v_2 = u_3 + v_3$, $[\![u_3]\!] = b_2 - b_3$, $[\![v_3]\!] = b_3$ olacak şekilde $u_3, v_3 \in X$

Benzer şekilde parçalanma yapılırsa ;

$v_n = u_{n+1} + v_{n+1}$, $[\![u_{n+1}]\!] = b_n - b_{n+1}$, $[\![v_{n+1}]\!] = b_{n+1}$ olacak şekilde $u_{n+1}, v_{n+1} \in X$ olduğu görülür. O halde

$x = u_1 + v_1 = u_1 + u_2 + v_2 = \sum_{k=1}^{n} u_k + v_n$ olur.

$x_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ seçelim. Bu durumda $x = x_n + v_n$ olur. (*)

$$[\![x_n]\!] = \left[\!\!\left[\sum_{k=1}^{n} u_k\right]\!\!\right] \le \sum_{k=1}^{n} [\![u_k]\!] = \sum_{k=1}^{n} (b_{k-1} - b_k) = b_0 - b_n = a_n$$

Ayrıca

$[\![x]\!] = [\![x_n + v_n]\!] \le [\![x_n]\!] + [\![v_n]\!] \le a_n + b_n = [\![x]\!]$ dir.

Sıkıştırma teoreminden $[\![x_n]\!] + [\![v_n]\!] = [\![x]\!] = a_n + b_n$ elde edilir. Buradan $[\![x_n]\!] = [\![a_n]\!]$ elde edilir.

2) (*) dan $[\![x - x_n]\!] = [\![x_n + v_n - x_n]\!] = [\![v_n]\!] = b_n = [\![x]\!] - a_n$ bulunur.

3) n<m için

$$[\![x_m - x_n]\!] = \left[\!\!\left[\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right]\!\!\right] \leq \sum_{k=n+1}^{m} [\![u_k]\!] = \sum_{k=n+1}^{m} \left(b_{k-1} - b_k\right)$$

$$= b_0 - b_m + b_n - b_0 =$$

$$= a_m - a_n$$

$$= [\![x_m]\!] - [\![x_n]\!] \leq [\![x_m - x_n]\!]$$

sıkıştırma teoreminden $[\![x_m - x_n]\!] = a_m - a_n$ elde edilir.

4.4 Teorem:

X ayrılabilir vektör uzayı, $x \in X$, $0 < [\![x]\!] \in E$ olmak üzere her $y \in I_x$ için X içinde $\{z_n\}$ x-adım fonksiyonu vardır öyle ki; $z_n \xrightarrow{br} y$.

İspat:

$$y \in I_x \Rightarrow [\![y]\!] \leq \lambda \cdot [\![x]\!]$$

$$\Rightarrow [\![y]\!] \in I_{[\![x]\!]}$$

Freudenthal Spectral teoreminden en az bir u_n $[\![x]\!]$-adım fonsiyonu vardır öyle ki; $0 \leq [\![y]\!] - u_n \leq \frac{1}{n}[\![x]\!]$ ve $u_n \uparrow [\![y]\!]$ dir.

u_n $[\![x]\!]$-adım fonsiyonu ise e_1, e_2, …, $e_k \in E$ $[\![x]\!]$ ‘in ikişer dik komponentleri, $[\![x]\!] = e_1 + e_2 + ... + e_k$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $u_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$ dir. X ayrılabilir olduğundan $x = x_1 + x_2 + ... + x_k$ ve $[\![x_i]\!] = e_i$ olacak şekilde $x_1, x_2, ..., x_k \in X$ vardır.

Sonuç olarak;

$u_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i [\![x_i]\!]$, x_i ler x 'in komponenti ve $0 \le u_n \le [\![y]\!]$ bulunur.

Buradan yardımcı teoremden $[\![z_n]\!] = u_n$ ve $[\![y - z_n]\!] = [\![y]\!] - u_n$ olacak şekilde $z_n \in X$ vardır. O halde $0 \le [\![y - z_n]\!] = [\![y]\!] - u_n \le \frac{1}{n}[\![x]\!]$ elde edilir. Yani $z_n \xrightarrow{br} y$ dir.

KAYNAKLAR

1. Aliprantis, C.D., Burkinshaw, O., “Positive Operators”, ***Academic Press***, Orlando, 3-13, 29-36 (1985).

2. Luxemburg, W.A,J.,Zaanen, A.C., “Riesz Spaces I”, ***North-Holland***, Amsterdam, 3-5, 12-15, 105-107, 116-119 , 171- 175 (1971).

3. Kusraev, A.G, “Dominated Operators”, ***Kluwer Academic*** , Netherlands, 45-47, 49 (2000).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: Bircan, Funda Sezen
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 19.01.1986 Ankara
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (312) 250 73 74
e-mail	: fszn1can@hotmail.com.

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Ankara Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2007
Lise	Fethiye Kemal Mumcu Anadolu Lisesi	2003

Yabancı Dil

İngilizce