BAZI ÖZEL TİPTE BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA : VAN DER POL DENKLEMİ VE DİFERENSİYEL TRANSFORM

Yaprak GÜRKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2010

ANKARA

Yaprak GÜRKAN tarafından hazırlanan Bazı Özel Tipte Başlangıç ve Sınır Değer Problemlerinin Yaklaşık Çözümleri Üzerine Bir Çalışma: Van Der Pol Denklemi ve Diferansiyel Transform adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Fatma AYAZ ……………………………….
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Nuri ÖZALP
Matematik A.D. , Ankara Üniversitesi ……………………………….

Doç. Dr. Fatma AYAZ ……………………………….
Matematik A.D. , Gazi Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ ……………………………….
Matematik A.D. , Gazi Üniversitesi

…05/ …02/ 2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU ……………………………….
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Yaprak GÜRKAN

BAZI ÖZEL TİPTE BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA : VAN DER POL DENKLEMİ VE DİFERENSİYEL TRANSFORM

(Yüksek Lisans Tezi)

Yaprak GÜRKAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 2010

ÖZET

Bu tezde, ikinci mertebeden lineer ve lineer olmayan bazı özel tipte başlangıç değer ve sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümleri araştırılmış ve yöntem olarak Diferensiyel Dönüşüm Metodu kullanılmıştır. Bu yöntem lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştürmekte ve bu cebirsel denklemler de bazı basit işlemler yardımıyla kolayca çözülebilmektedir.

Tezde ayrıca, ikinci mertebeden nonlineer denklem olan Van der Pol denklemi (osilatörü) de ele alınmıştır. Farklı parametre değerleri ve başlangıç şartlarına sahip durumlar için yine Diferensiyel Dönüşüm Yöntemi ve bir paket program yardımıyla algoritmalar ve hesaplamalar yapılarak yaklaşık çözümlere ulaşılmış, elde edilen sonuçlar tablolar ve grafikler yardımı ile gösterilmiştir. Yaklaşık hesaplamalar için tezde hata analizine de yer verilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.138
Anahtar Kelimeler : Diferensiyel dönüşüm metodu, Van der Pol denklemi, varlık teklik, hata analizi.
Sayfa Adedi : 83
Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Fatma AYAZ

A STUDY ON APPROXİMATE SOLUTİONS OF SOME PARTICULAR TYPE OF INITIAL AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS: VAN DER POL EQUATION AND DIFFERENTIAL TRANSFORMATION

(M.Sc. Thesis)

Yaprak GÜRKAN

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

February 2010

ABSTRACT

In this thesis, approximate solutions of some particular types of second order linear and nonlinear boundary or initial value problems have been investigated and the method have been used namely was Differential Transformation Method. Linear and nonlinear differential equations can be transformed to algebraic equations by using differential transformation method. This algebraic equations can be solved easily with some simple operations.

Furthermore, in this thesis, as initial value problem Van Der Pol equation(ossilator) which is a second order nonlinear equation has been examined as well. For different paramaters and initial conditions, approximate solutions have been obtained again by the Differential Transformation Methods. The results have been illustrated by the help of tables and graphics. For appoximate calculations error analysis has been done as well.

Science Code : 204.1.138
Key Words : Differential transformation method, Van der Pol equation, error analysis
Page Number : 83
Adviser : Doç. Dr. Fatma AYAZ

TEŞEKKÜR

Öncelikle bu tezi hazırlamamda benden hiçbir yardımı ve bilgi birikimini esirgemeyen, kaynaklarla destekleyen ve değerli zamanını bana ayıran sayın hocam Doç. Dr. Fatma AYAZ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, bu çalışma süresince manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış olan bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

Simgeler	**Açıklama**
BDP	Başlangıç değer problemi
DTM	Diferansiyel transform metod
SDP	Sınır değer problemi
y'	y'nin birinci mertebeden türevi
y''	y'nin ikinci mertebeden türevi
$\approx$	Yaklaşık değer
t_0	Başlangıç parametresi
$\boldsymbol{u}$	u vektörü

1.GİRİŞ

Genel olarak, temel bilimler (fizik, kimya vb), çeşitli mühendislik bilimleri, ekonomi ve matematikte araştırılan pek çok problemin matematiksel modellemelerinde diferensiyel denklemlerle karşılaşılmakta ve problemin doğasına uygun olarak verilen şartlar altındaki bu tür denklemlerin çözülmesi gerekmektedir. Bu tür problemlerin çözümlerinin bulunması, elde edilen bu çözümlerin teknolojide de kullanılabilir olması yönünden büyük önem arz etmektedir. Bu ise diferensiyel denklem problemlerinin günümüzde çözülebilmesi için birçok sayısal ve yaklaşık çözüm yöntemlerinin geliştirilmesine ve ortaya çıkmasına sebep olmuştur.

Sayısal yöntemler; matematik problemlerinin formülerle ifade edilip, aritmetik işlemlerle çözülmesini sağlayan tekniklerdir. Çok sayıda ve farklı türde sayısal yöntem bulunduğu halde bunların hepsinin ortak özelliği çok sayıda aritmetik işlemlerin yapılmasıdır. Son yıllarda bilgisayarların gelişmesiyle birlikte sayısal yöntemlerin verimli şekilde kullanılması ve geliştirilmesi mümkün olmuştur. Uygulamalı bilim dallarında ve pratikte karşılaşılan problemlerin sayısal yöntemlerle çözüm yollarının artışında, yüksek hızlı ve verimli bilgisayarların kullanılmaya başlanmasının etkisi büyüktür.

Analitik çözümlerin her durumda elde edilememesi, problemlerin çözülebilmesi için sayısal ve yaklaşık çözüm yöntemlerinin geliştirilmesini gerekli kılmıştır. Son yıllarda çeşitli bilim dallarında araştırılan problemlerin matematiksel modellemelerinde; problemlerin daha doğru kurulabilmesi ve daha az hata miktarıyla sonuca ulaşan çözümler elde edilebilmesi için lineer (doğrusal) problemlerden ziyade lineer olmayan problemler olarak kurulmasının gerekli olduğu sonucuna varılmıştır. Bu durum ise, lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin analitik biçimde bulunmasını çok daha zorlaştırmaktadır. Bu sorun sayısal ve yaklaşık çözüm yöntemlerinin geliştirilmesini daha da önemli kılmaktadır. Sayısal yöntemler teorinin pratikte uygulanabilirliği bakımından çok önemli bir role sahiptir. Hızlı bilgisayarların kullanılıyor olması uygulamalı bilim dallarında ve mühendislikte ortaya çıkan karmaşık problemlerin sayısal yöntemlerle daha hızlı ve daha az hata miktarına sahip olacak şekilde çözülmesine imkân vermektedir. Bugüne kadar birbirlerinden farklı birçok sayısal metot geliştirilmiştir. Daha sonraki yıllarda da bilgisayar teknolojisinin çok hızlı bir şekilde gelişmesiyle birlikte, kullanılan metotlar araştırılan problemlerin matematiksel modellerinin bilgisayar ortamında uygulanabilirliği ile doğru orantılı olarak gelişme göstermiş ve bu gelişimini günümüzde de sürdürmektedir.

Bu yüzden son dönemlerde daha kolay bir şekilde algoritması oluşturulabilen ve dolayısıyla da programlanabilen, çok daha hızlı sonuçlanan, hem lineer hemde nonlineer (lineer olmayan) problemlerin çözümünde kullanılabilen metotlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu tür özellikleri taşıyan yöntemlerden birisi de Diferensiyel Dönüşüm Metodu (Differential Transformation Method: DTM) dur.

İkinci mertebeden diferensiyel denklemlerde iki noktalı sınır değer problemlerinin analitik çözümleri belli tipteki problemlerle sınırlıdır. Bu tip problemlerin en genel formu için yaygın olarak kullanılan Shooting ve Sonlu Farklar metotlarının bazı dezavantajları olduğu bilinmektedir. Bu tez çalışmasında; öncelikli olarak Diferensiyel Dönüşüm Metodu (Differential Transformation Method: DTM) tanımı ve özellikleri verilmiş daha sonrasında da yöntemin ikinci mertebeden lineer ve lineer olmayan (nonlineer) bazı özel tipte başlangıç değer ve sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümleri araştırılmıştır. Bu yöntem, Van der Pol denklemine de uygulanarak konuyla ilgili bazı parametre ve başlangıç şartlarında denklemin çözümleri Shooting Metodu ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

İkinci bölümde ; tezin genelinde sıklıkla başvurulacak olan genel tanım ve teoremler yer almaktadır. Başlangıç ve sınır değer problemlerinin tanımları yapılarak 2. mertebeden, bir tek noktada 2 tane şart ile tanımlanmış

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \le x \le b, \qquad y(a) = \alpha_1, \qquad y'(a) = \alpha_2 \tag{1.1}$$

Eş.1.1 ile verilen başlangıç değer ve

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \le x \le b, \qquad y(a) = \alpha \quad , \quad y(b) = \beta \tag{1.2}$$

Eş.1.2 ile verilen sınır değer problemlerinin tek çözümünün olabilmesi için temel varlık ve teklik teoremlerine yer verilmiştir. Yine bu bölümde bir boyutlu Diferensiyel Dönüşüm Yönteminin(DTM) tanımları yapılarak bir çok özelliği maddeler halinde verilmiştir. Ayrıca, ikinci mertebeden verilen bazı özel tipte başlangıç değer problemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için Diferensiyel Dönüşüm Metodundan bahsedilmiş ve çeşitli örnekler verilerek sonuç olarak,

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) = Y(0) + Y(1)x^1 + Y(2)x^2 + \dots \tag{1.3}$$

biçiminde seri çözümler elde edilmiştir. Burada $Y(0)$, $Y(1)$, $Y(2)$ ... ler Taylor seri katsayıları olup elde edilen sonuçlar tablolar halinde gösterilerek karşılaştırmalar yapılmış ve grafikleri çizilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, yine ikinci mertebeden verilen bazı özel tipte sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümlerini elde etmek için Diferensiyel Dönüşüm Metodundan bahsedilmiş ve bazı özel tipte denklemlerin seri çözümler elde edilmiştir. Elde edilen yaklaşık çözümler bu bölümde de tablolar halinde gösterilerek karşılaştırmalar yapılmış ve grafikleri çizilmiştir.

Dördüncü bölümde; elektrik veya elektronik devrelerde oluşan salınımları modellemek için kullanılan, Hollandalı bir elektrik mühendisi olan Balthazar Van der Pol tarafından ilk kez tanımlanmış ve kendi adıyla literatüre geçen Van der Pol denkleminin farklı başlangıç şartları ve denklemin değişen parametreleri için algoritma oluşturulmuş, Diferensiyel Dönüşüm Metodu ve bir paket program yardımıyla çözümleri elde edilmiştir.

Beşinci bölümde; ikinci mertebeden verilen bazı özel tipte başlangıç değer ve sınır değer problemleri için hata analizi yapılarak bulunan değerler tablolar halinde gösterilmiştir.

Ekler bölümünde ise tezimizde kullandığımız bazı örneklerin çözümlerinin paket program kodlarına yer verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde adi diferensiyel denklemler için temel tanımlar verildikten sonra adi türevli denklemler için başlangıç ve sınır değer problemleri ile ilgili Varlık ve Teklik Teoremlerine yer verilmiştir.

2.1. Diferensiyel Denklem

Bir bağımsız değişken ile bağımlı değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini ihtiva eden denkleme diferensiyel denklem denir. Bu tür denklemler genel olarak

$$f(x, y, y', y'', ..., y, y^{(n)}) = 0 \qquad (2.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada $y^{(n)}$, y'nin x'e göre n'yinci türevidir.

2.2. Başlangıç Değer Problemi

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n)}) \qquad (2.2)$$

diferensiyel denklemi ile birlikte bağımsız değişkenin $x = a$ gibi bir tek noktasında tanımlanan

$$y(a) = \alpha_1 \ , \ y'(a) = \alpha_2 \ , \ldots , \ y^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1} \qquad (2.3)$$

şartlarıyla birlikte oluşturduğu probleme başlangıç değer problemi (b.d.p) denir.

2.3. Lipsichtz Şartı

$f(t,y)$ fonksiyonu $D \subset R^2$ olmak üzere

$y_1 < y_2$ ve $\forall (t,y_1) ve (t,y_2) \in D$ için

$$\left| f(t,y_2) - f(t,y_1) \right| \le L \left| y_2 - y_1 \right|$$

eşitsizliğini sağlarsa f 'ye Lipsichtz şartını sağlar denir.

$L > 0$ sayısına da Lipsichtz sabiti denir.

$a \le x \le b$ olmak üzere

$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3 ... u_n)^t$

$\boldsymbol{u'} = (u_1', u_2', u_3' ... u_n')^t$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 ... \alpha_n)$

$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3 ... f_n)^t$

ve

$\boldsymbol{u'} = \boldsymbol{f}(x; \boldsymbol{u})$ ve $\boldsymbol{u}_n(a) = \boldsymbol{\alpha}_n$

için

$u_1(a) = \alpha_1$

$u_2(a) = \alpha_2$

$u_3(a) = \alpha_3$

....

$u_n(a) = \alpha_n$

problemi bir başlangıç değer problemi tanımlar.

$$\frac{du_1}{dx} = f_1(x, u_1, u_2, u_3 ... u_n)$$
$$\frac{du_2}{dx} = f_2(x, u_1, u_2, u_3 ... u_n) \qquad (2.4)$$
$$....$$
$$\frac{du_n}{dx} = f_n(x, u_1, u_2, u_3 ... u_n)$$

Eş.2.4 ise 1.mertebeden bir diferensiyel denklem sistemidir.

$$y^{(n)} = F(t, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

n. mertebeden bir denklem olmak üzere bunu 1. mertebeden bir denklem sistemine dönüştürmek her zaman mümkündür.

$$y_1 = y$$
$$y_2 = y'$$
$$y_3 = y''$$
$$\dots$$
$y_n = y^{(n-1)}$ alınırsa bu durumda şunları yazabiliriz:

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_3$$
$$\dots$$
$$y_{(n-1)}' = y_n$$
$y_n' = F(t, y_1, y_2, ..., y_n)$ olur.

O halde sistemler üzerinde 1. mertebeden başlangıç değer problemi için varlık ve teklik teoremini göstermek yeterli olacaktır.

2.1. Teorem (Birinci mertebeden sistemler için başlangıç değer probleminin varlık ve teklik teoremi)

Eş.2.4 ile tanımlanan 1.mertebeden sistemler için başlangıç değer problemi

$$\boldsymbol{u}' = f(x;\boldsymbol{u}) \ , \ \boldsymbol{u}_n(\alpha) = \alpha_n \qquad (2.5)$$

şeklinde verilsin.

$a \le x \le b, \quad |\boldsymbol{u}| < \infty$ sürekli ve

$her\ (x;\boldsymbol{u})$ ve $(x;\boldsymbol{v}) \in R$ için $|\boldsymbol{f}(x;\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{f}(x;\boldsymbol{v})| \le K|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|$ (*K*:sabit)

Lipschitz şartını sağlasın.

Eş.2.4 ile verilen başlangıç değer probleminin

i. $[a,b] \equiv \{x | a \le x \le b\}$ aralığında tanımlı $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x;\boldsymbol{\alpha})$ şeklinde bir tek çözümü vardır [1,3].

ii. Bu çözüm $\boldsymbol{\alpha}$’da Lipsichitz sürekli ve her $(x;\boldsymbol{\alpha})$ ve $(x;\boldsymbol{\beta}) \in R$ için

$$|\boldsymbol{u}(x;\boldsymbol{\alpha}) - \boldsymbol{u}(x;\boldsymbol{\beta})| \le e^{K(x-a)}|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}|$$

şartını sağlar [1].

İspat

Eğer Eş.2.5'in bir çözümü mevcutsa bu eşitliğin her iki tarafının integrali alındığında

$$\boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{\alpha} + \int_a^x \boldsymbol{f}(\xi;\boldsymbol{u}(\xi))d\xi \tag{2.6}$$

elde edilir [1]. Eğer $\boldsymbol{u}(x)$ sürekli ve Eş.2.6 denklemini sağlarsa diferensiyellenebilirdir. Picard iterasyon metodunu kullanarak bu integral denkleminin çözümünü oluşturursak

$$\boldsymbol{u}^{(0)}(x) \equiv \boldsymbol{\alpha},$$
$$\boldsymbol{u}^{(v+1)}(x) = \boldsymbol{\alpha} + \int_a^x \boldsymbol{f}(\xi;\boldsymbol{u}(\xi))d\xi, \qquad v = 0,1,....$$

$\boldsymbol{f}(x;\boldsymbol{u})$ lipschitz sürekli olduğundan

$$\left|\boldsymbol{u}^{(v+1)}(x) - \boldsymbol{u}^{(v)}(x)\right| \le \int_a^x K\left|\boldsymbol{u}^{(v)}(\xi) - \boldsymbol{u}^{(v-1)}(\xi)\right|d\xi, \qquad v = 1,2,... \ .$$

$[a,b]$ aralığında $\left|f(x;\boldsymbol{\alpha})\right| \le M$ şartı ile buradan

$$\left|\boldsymbol{u}^{(v+1)}(x) - \boldsymbol{u}^{(v)}(x)\right| \le \frac{M}{K}\frac{(K[x-a])^{v+1}}{(v+1)!} \tag{2.7}$$

elde edilebilir.

$$\boldsymbol{u}^{(v+1)}(x) = \boldsymbol{u}^0 + \sum_{\mu=0}^{v}\left[\boldsymbol{u}^{(\mu+1)}(x) - \boldsymbol{u}^{(\mu)}(x)\right]$$

olduğundan $\left\{\boldsymbol{u}^{(v)}(x)\right\}$ sürekli fonksiyonlar dizisinin $\left[a,b\right]$'de düzgün yakınsak olduğu gösterilebilir. Limit fonksiyonu açıkça üstteki integral denklemine ve dolayısıyla da Eş.2.6 'yı sağlar. Böylece herhangi bir $\boldsymbol{\alpha}$ için varlık gösterilmiş olur. $\boldsymbol{\beta}\to\boldsymbol{\alpha}$ iken $\boldsymbol{u}(x;\boldsymbol{\beta})$'nın sürekliliğinden de çözümün tekliği bulunur.

ii'yi göstermek için

$$\left[\boldsymbol{u}(x;\boldsymbol{\alpha})-\boldsymbol{u}(x;\boldsymbol{\beta})\right]=\left[\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\right]+\int_a^x\left[\boldsymbol{f}(\xi;\boldsymbol{u}(\xi;\boldsymbol{\alpha}))-\boldsymbol{f}(\xi;\boldsymbol{u}(\xi;\boldsymbol{\beta}))\right]d\xi$$

yazabiliriz. $\boldsymbol{f}$'nin Lipschitz süreklilik şartından

$$\left|\boldsymbol{u}(x;\boldsymbol{\alpha})-\boldsymbol{u}(x;\boldsymbol{\beta})\right|\le\left|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\right|+K\int_a^x\left|\boldsymbol{u}(\xi;\boldsymbol{\alpha})-\boldsymbol{u}(\xi;\boldsymbol{\beta})\right|d\xi \qquad (2.8)$$

elde edilir.

Hata, $E(x)\equiv\int_a^x\left|\boldsymbol{u}(\xi;\boldsymbol{\alpha})-\boldsymbol{u}(\xi;\boldsymbol{\beta})\right|d\xi$ alınırsa Eş.2.8 eşitsizliği

$$E'(x)-KE(x)\le\left|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\right|$$

şekline dönüşür. Bu diferensiyel denklem $e^{-K(x-a)}$ integral çarpanı ile çarpıldığında ve $\left[a,x\right]$ aralığında integrali alındığında

$$E(x)\le\frac{\left|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\right|}{K}\left[e^{K(x-a)}-1\right]$$

bulunur. Bu eşitsizlik ii'yi sağlar [1].

2.4. Sınır Değer Problemi

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n)}) \tag{2.9}$$

diferensiyel denklemi ile birlikte bağımsız değişkenin $x = a, b...$ gibi farklı noktalarında tanımlanan

$$y(a) = \alpha \ , \ y(b) = \beta \tag{2.10}$$

şartlarıyla birlikte oluşturduğu probleme sınır değer problemi (s.d.p) denir.

Aşağıdaki formda verilen ikinci mertebeden sınır değer probleminin

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \le x \le b, \qquad y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta, \tag{2.11}$$

çözümünün varlık ve tekliğini garanti eden genel koşulları aşağıdaki teorem ile verebiliriz:

2.2. Teorem (İkinci mertebeden sınır değer problemi için varlık ve teklik teoremi)

Varsayalım ki,

$$y'' = f(x, y, y') \ , \ a \le x \le b, \ y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta$$

koşulları ile verilen sınır değer probleminde bulunan f fonksiyonu $D = \{(x, y, y') \mid a \le x \le b, -\infty < y < \infty, -\infty < y' < \infty\}$ bölgesinde sürekli olsun. f_y ve $f_{y'}$ kısmi türevleri de D bölgesinde sürekli olsun.

Eğer

i. Her $(x,y,y')\in D$ için $f_y(x,y,y')>0$ ve

ii. $\left|f_{y'}(x,y,y')\right|\le M$, olacak şekilde her $(x,y,y')\in D$ için bir M sabiti var

oluyorsa sınır değer probleminin tek bir çözümü vardır [3].

Aşağıda verilen sınır değer probleminin 2.2.Teorem şartlarını sağladığını görelim.

$$y' = 1+tSin(ty) \qquad D=\{(t,y)/0\le t\le 2, \quad -\infty < y < \infty\} \tag{2.12}$$

Eş.2.12'de $f(t,y)=1+tSin(ty)$ 'dir.

i. $f(t,y)$ verilen D bölgesinde süreklidir.

ii. $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\le M$, $y(0)=0$ sürekli

$y_1 < y_2$ olmak üzere $\frac{f(t,y_2)-f(t,y_1)}{y_2-y_1} = \frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi) \qquad y_1<\xi<y_2$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left|t^2 Cost\xi\right| = t^2\left|Cost\xi\right|\le t^2$$

$$\left|f(t,y_2)-f(t,y_1)\right| = \frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi)\left|y_2-y_1\right|$$

$$\left|f(t,y_2)-f(t,y_1)\right| = 4\left|y_2-y_1\right|$$

O halde bu problemin bir tek çözümü vardır.

$$y'' = f(x,y,y') \tag{2.13}$$

Eş.2.13 için $f(x,y,y')$ aşağıdaki gibi tanımlandığından 2. mertebeden lineer denklem,

$$f(x,y,y') = p(x)y' + q(x)y + r(x) \tag{2.14}$$
$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \qquad a \le x \le b$$

şeklindedir. 2.3.Teorem'de bu problemin hangi durumlarda çözümünün elde edileceği görülmektedir.

2.3. Teorem (lineer sınır değer problemleri için varlık ve teklik teoremi)

$p(x), \quad q(x), \quad ve \quad g(x)$, $a \le x \le b$ aralığında sürekli olsunlar.

a_0, a_1, b_0, b_1 ve α, β sabitler olmak üzere

$|a_0| + |a_1| > 0$ ve $|b_0| + |b_1| > 0$ olsun.

Ya , α ve β'nın herhangi değerleri için

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \quad , \qquad a < x < b$$

$$a_0 y(a) + a_1 y'(a) = \alpha \tag{2.15}$$

$b_0 y(b) + b_1 y'(b) = \beta$ tek çözüme sahiptir.

Ya da, ilişkili homojen sınır değer problemi,

$$z'' + p(x)z' + q(x)z = 0 \quad , \qquad a < x < b$$

$$a_0 z(a) + a_1 z'(a) = 0 \tag{2.16}$$

$$b_0 z(b) + b_1 z'(b) = 0$$

Sıfır olmayan çözüme sahiptir.

İspat

$y_1(x)$, $y_2(x)$ ve $Y(x)$ aşağıdaki üç başlangıç değer problemlerinin çözümleri olsunlar.

$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \qquad y_1(a) = a_1 \; , \; y_1'(a) = -a_0$$

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \qquad y_2(b) = -b_1 \; , \; y_2'(b) = b_0 \tag{2.17}$$

$$Y'' + p(x)Y' + q(x)Y = 0 \qquad Y(a) = 0 \; , \; Y'(a) = 0$$

Her bir başlangıç değer probleminin $a < x < b$ aralığında çözümü vardır ve tektir.

Eş.2.17 başlangıç durumları

$$a_0 y_1(a) + a_1 y_1'(a) = 0$$

$$b_0 y_2(b) + b_1 y_2'(b) = 0$$

gibidir.

$W(x)$, $\{y_1, y_2\}$ çözüm kümesinin Wronksien'i olsun.

[a,b] aralığında

Ya , daima $W(x) = 0$'dır.

Ya da, $W(x) \neq 0$ dır.

2.1. Sonuç

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \le x \le b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

şeklinde verilen sınır değer problemi

i. [a,b] aralığında p(x), q(x) ve r(x) sürekli,
ii. [a,b] aralığında q(x)>0,

koşullarını sağlıyorsa sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır [3].

2.5. Diferensiyel Dönüşüm Metodu

Bu bölümde, Diferensiyel Dönüşüm *(DT)* yönteminin tanımı ve genel özellikleri ifade edilecektir. Yöntem diferensiyel denklemin Taylor seri çözümündeki katsayılarının farklı bir biçimde hesaplanmasını içermektedir. İlk olarak Zhou (1986) tarafından ortaya konulan diferensiyel dönüşüm yöntemi, diferensiyel denklemin içerdiği bağımsız değişken sayısına göre şekillenmektedir. Daha iyi anlaşılabilmesi için öncelikle bir tek bağımsız değişken içeren diferensiyel denklemler için bir boyutlu diferensiyel dönüşüm tanıtılacaktır [9].

Tek bileşenli $w(x)$ fonksiyonu diferensiyel dönüşüm fonksiyonu $W(k)$ olmak üzere, $w(x)$'in tek boyutlu diferensiyel dönüşümü ;

$$W(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k} w(x)\right]_{x=x_0} \tag{2.18}$$

olarak tanımlanır [4].

$W(k)$ dönüşüm fonksiyonunun ters diferensiyel dönüşüm fonksiyonu ;

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} W(k)(x-x_0)^k \qquad (2.19)$$

biçiminde tanımlanır.

Eş.2.18 ve Eş.2.19 kullanılarak,

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!}[\frac{d^k}{dx^k} w(x)]_{x=x_0} \qquad (2.20)$$

elde edilir [4].

Eş.2.20'yi kullanılarak temel matematiksel operasyonlar yardımıyla tek boyutlu Diferensiyel Dönüşüm için aşağıdaki özellikler verilebilir [4,5]:

	Fonksiyon	Diferensiyel Dönüşüm Fonksiyonu
1)	$w(x)$	$W(k) = \frac{1}{k!}[\frac{d^k}{dx^k} w(x)]_{x=0}$
2)	$w(x) = u(x) \pm v(x)$	$W(k) = U(k) \pm V(k)$
3)	$w(x) = cu(x)$, $c \in R$	$W(k) = cU(k)$, $c \in R$
4)	$w(x) = \frac{d}{dx}u(x)$	$W(k) = (k+1)U(k+1)$
		$= \frac{(k+1)!}{k!}U(k+1)$
5)	$w(x) = \frac{d^r}{dx^r}u(x)$	$W(k) = (k+1)(k+2)...(k+r)U(k+r)$
		$= \frac{(k+r)!}{k!}U(k+r)$
6)	$w(x) = u(x)v(x)$	$W(k) = \sum_{r=0}^{k} U(r)V(k-r)$

7) $w(x) = u(x)v(x)s(x)$ $\qquad W(k) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r} U(r)V(t)S(k-r+t)$

8) $w(x) = u'(x)v'(x)$ $\qquad W(k) = \sum_{r=0}^{k}(r+1)(k-r+1)U(r+1)V(k-r+1)$

9) $w(x) = x^m$ $\qquad W(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1 & k=m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$

10) $w(x) = u(x)v(x)\dfrac{d^2}{dx^2}s(x)$ $\qquad W(k) = \sum\sum U(k)V(k)(k+1)(k+2)S(k+2)$

11) $w(x) = a, a \in R$ $\qquad W(k) = \delta(k)$

12) $w(x) = ax, a \in R$ $\qquad W(k) = a\delta(k-1)$

13) $w(x) = ax^2, a \in R$ $\qquad W(k) = a\delta(k-2)$

14) $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx; a,b,c \in R$ $\qquad W(k) = a\delta(k-3) + b\delta(k-2) + c\delta(k)$

15) $w(x) = (1+x^m)$ $\qquad W(k) = \begin{cases} \dfrac{m(m-1)(m-2)...(m-k+1)}{k!} & m \geq k \\ 1 & m = k \end{cases}$

16) $w(x) = Sin(ax+b)$ $\qquad W(k) = \dfrac{a^k}{k!Sin(\frac{\pi k}{2}+b)}$

17) $w(x) = Cos(ax+b)$ $\qquad W(k) = \dfrac{a^k}{k!Cos(\frac{\pi k}{2}+b)}$

18) $w(x) = \alpha^{ax}; a \in R$ $\qquad W(k) = \dfrac{a^k(\ln\alpha)^k}{k!}$

19) $w(x) = e^{ax}; a \in R$ $\qquad W(k) = \dfrac{a^k}{k!}$

20) $w(x) = e^{ax+b}; a,b \in R$ $\qquad W(k) = \dfrac{a^k e^b}{k!}$

21) $w(x) = \ln(ax+b); a > 0, b > 1$ $\qquad W(k) = \dfrac{(-1)^{k+1}a^k b^{-k}}{k}; k > 0$

22) $w(x) = Sinh(ax+b)$ $\quad W(k) = \begin{cases} \dfrac{a^k e^b}{k!} & k \ tek \\ 0 & k \ çift \end{cases}$

23) $w(x) = Cosh(ax+b)$ $\quad W(k) = \begin{cases} 0 & k \ tek \\ \dfrac{a^k e^b}{k!} & k \ çift \end{cases}$

24) $w(x) = \int_{x_0}^{x} u(t)dt$ $\quad W(k) = \dfrac{U(k-1)}{k} = \dfrac{(k-1)!}{k!}U(k-1)$

25) $w(x) = v(x)\int_{x_0}^{x} u(t)dt$ $\quad W(k) = \dfrac{\sum_{r=0}^{k} V(r)U(k-r-1)}{(k-r)}$

26) $w(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_o}^{x_1} u(t)dt$ $\quad W(k) = \dfrac{(k-2)!}{k!}U(k-2)$

2.6. Diferensiyel Dönüşüm Yönteminin 2. Mertebeden Başlangıç Değer Problemlerine Uygulanması

$$y'' = f(x, y, y') \ , \ \ y(a) = \alpha_1 \ , \ \ y'(a) = \alpha_2$$

İle verilen başlangıç değer probleminin çözümünü elde edebilmek için denkleme diferensiyel dönüşüm uygulandığında, denklemin Taylor seri çözümündeki katsayıları olan $Y(k)$ değerleri $k = 0,1,2,...$ için hesaplanır ve

$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k)$ da yerine yazılır.

Açık olarak çözüm,

$$y(x) = Y(0)+Y(1)x^1+Y(2)x^2+....$$

$$y'(x)=Y(1)+2Y(2)x+3Y(3)x^2+....$$

$$y''(x)=2Y(2)+6Y(3)x+12Y(4)x^2....$$

şeklindedir.

Aşağıda lineer ve lineer olmayan(nonlineer) başlangıç değer problemlerine metodun uygulanması farklı durumlar için incelenmiştir:

2.1. Durum (Lineer denklem)

$$y''+2y'+y=0 \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=0 \tag{2.21}$$

biçiminde verilen lineer başlangıç değer probleminin çözümü aşağıdaki şekilde bulunabilir:

Denkleme diferensiyel dönüşüm uygulanırsa ,

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)+2(k+1)Y(k+1)+Y(k)=0$$

$$Y(k+2)=-\frac{2(k+1)Y(k+1)+Y(k)}{(k+1)(k+2)} \quad \text{olur.} \tag{2.22}$$

Şimdi başlangıç şartlarını yerine yazarsak,

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^kY(k)$$

$$y(x) = Y(0)+Y(1)x^1+Y(2)x^2+.... \tag{2.23}$$

$$y'(x) = Y(1) + 2Y(2)x + 3Y(3)x^2 + ... \qquad (2.24)$$

Eş.2.23'de $x = 0$ için $y(0) = Y(0) = 1$

Eş.2.24'de $x = 0$ için $y'(0) = Y(1) = 0$

elde edilir. Bulunan değerleri Eş.2.22'de yerine yazarsak,

$k = 0$ için $Y(2) = -\dfrac{2Y(1) + Y(0)}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$k = 1$ için $Y(3) = -\dfrac{4Y(2) + Y(1)}{6} = \dfrac{1}{3}$

$k = 2$ için $Y(4) = -\dfrac{6Y(3) + Y(2)}{12} = -\dfrac{1}{8}$

.
.
.

$Y(1), Y(2), Y(3), ...$ Taylor katsayıları Eş.2.23'de yerine yazılırsa denklemin seri çözümü

$$\begin{aligned} y(x) &= Y(0) + Y(1)x^1 + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 .... \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^4 ... \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Denklemin analitik çözümü;

$$y(x) = e^{-x} + xe^{-x}$$

dir.

Bu sonuç seri olarak yazılıp düzenlenirse,

$$(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3!}x^3)+x(1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3!}x^3+...)$$

$$=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3!}x^3+x-x^2+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{3!}x^4...$$

$$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{8}x^4...$$

Sonucu ile aynı olduğu açıktır.

Eş.2.21 ile verilen denklemin program yardımıyla çözümü

```
> for k from 0 while k<3 do
Y(0):=1;
Y(1):=0;
k:=k;
Y(k+2):=-(2*(k+1)*Y(k+1)+Y(k))/((k+1)*(k+2));
end do;
```

$$Y(0) := 1$$
$$Y(1) := 0$$
$$k := 0$$
$$Y(2) := \frac{-1}{2}$$
$$k := 1$$
$$Y(3) := \frac{1}{3}$$
$$k := 2$$
$$Y(4) := \frac{-1}{8}$$

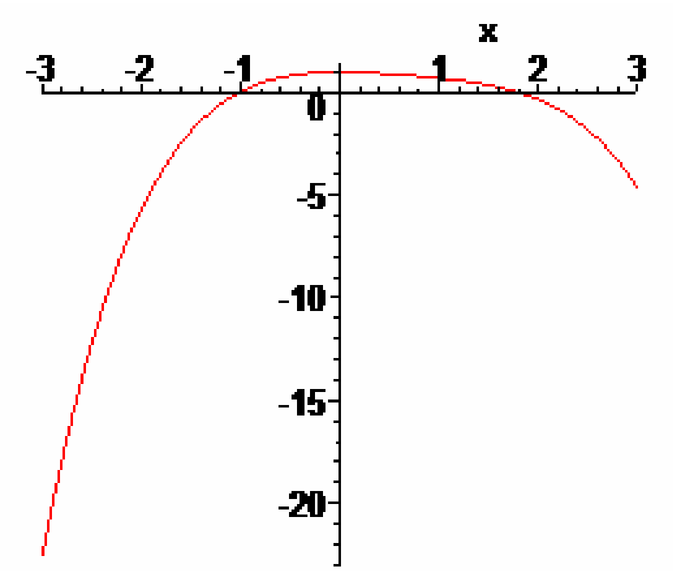
```
> topla:=proc(a,s,d,f,g)
a+s+d+f+g;
end proc;
```

$$topla := \mathrm{proc}\,(a, s, d, f, g)\ a + s + d + f + g\ \mathrm{end\ proc}$$

```
>
denklem:=topla(Y(0)*x^0,Y(1)*x^1,Y(2)*x^2,Y(3)*x^3,Y(4)*x^4);
```

$$denklem := 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{8}x^4$$

```
> plot(1-1/2*x^2+1/3*x^3-1/8*x^4,x=-3..3);
```



Şekil 2.1. Lineer başlangıç değer probleminin grafiği

2.2. Durum (Lineer olmayan denklem)

$$y'' - 2y + 3yy' = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0 \tag{2.25}$$

Eş.2.25 ile verilen lineer olmayan başlangıç değer probleminin her bir teriminin diferensiyel dönüşümünü bulalım :

$$y'' \to (k+1)(k+2)Y(k+2) \tag{2.26}$$

$$2y \rightarrow 2Y(k) \tag{2.27}$$

$$3yy' \rightarrow 3\sum_{r=0}^{k} Y(r)(k-r+1)Y(k-r+1) \tag{2.28}$$

elde edilen diferensiyel dönüşümler Eş.2.25' de yerine yazılırsa,

$$Y(k+2) = \frac{2Y(k) - 3\sum_{r=0}^{k} Y(r)(k-r+1)Y(k-r+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$y(0) = 1 \text{ , } y'(0) = 0 \tag{2.29}$$

olarak bulunur.

Şimdi verilen başlangıç şartları dönüşüme uygulandığında,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) = Y(0) + Y(1)x^1 + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + ... \tag{2.30}$$

$x = 0$ için $y(0) = 1$ den

$y(x) = Y(0) = 1$

olur.

Eş.2.30'dan birinci türev alırsak,

$$y'(x) = = Y(1) + 2Y(2)x + 3Y(3)x^2 + 4Y(4)x^3.... \tag{2.31}$$

elde edilir.

Eş.2.31'den,

$x=0$ için $y'(0)=0$ olduğundan

$y'(x)=Y(1)=0$

olur.

Eş.2.29'dan diferensiyel dönüşüm katsayılarını elde edelim:

$k=0$ için $Y(2)=\dfrac{2Y(0)-3[Y(0)Y(1)]}{(0+1)(1+2)}=1$

$k=1$ için $Y(3)=\dfrac{2Y(1)-3[Y(0)Y(1)+2Y(1)Y(2)]}{(1+1)(1+2)}=0$

$k=2$ için $Y(4)=\dfrac{2Y(2)-3[Y(0)Y(1)+2Y(1)Y(2)+3Y(2)Y(3)]}{(2+1)(2+2)}=-\dfrac{1}{3}$

.
.
.

bulunan değerler $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^kY(k)$ ters diferensiyel dönüşümde yerine yazılırsa,

$$y(x)= = Y(0)+Y(1)x^1+Y(2)x^2+Y(3)x^3+Y(4)x^4+....$$

$$y(x)= = 1+0x-1x^2+0x^3-\frac{1}{3}x^4.... \qquad (2.32)$$

olarak seri çözüm bulunmuş olur.

Eş.2.25 ile verilen denklemin program yardımıyla çözümü

```
> for k from 0 while k<8 do;
> Y(0):=1;
Y(1):=0;
k:=k;
Y(k+2):=(2*Y(k)-3*sum(Y(k)*Y(k-r+1)*(k-r+1),r=0..k))/((k+1)*(k+2));
 end do;
```

$$Y(0) := 1$$
$$Y(1) := 0$$
$$k := 0$$
$$Y(2) := 1$$
$$k := 1$$
$$Y(3) := 0$$
$$k := 2$$
$$Y(4) := \frac{-1}{3}$$
$$k := 3$$
$$Y(5) := 0$$
$$k := 4$$
$$Y(6) := 0$$
$$k := 5$$
$$Y(7) := 0$$
$$k := 6$$
$$Y(8) := 0$$
$$k := 7$$
$$Y(9) := 0$$

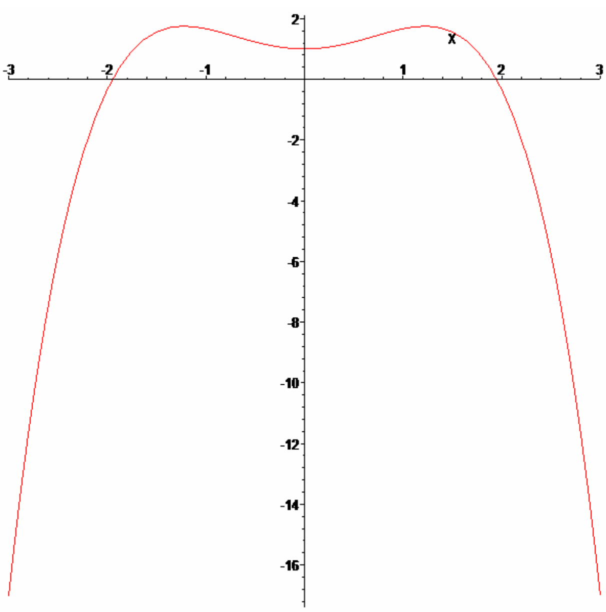
```
> topla:=proc(a,s,d,f,g,h,i,j,k)
a+s+d+f+g+h+i+j+k;
end proc;
```

$topla := \mathrm{proc}(a, s, d, f, g, h, i, j, k)\ a + s + d + f + g + h + i + j + k\ \mathbf{end\ proc}$

>Denklem:=topla(Y(0)*X^0,Y(1)*X^1,Y(2)*X^2,Y(3)*X^3,Y(4)*X^4, Y(5)*X^5,Y(6)*X^6+Y(7)*X^7,Y(8)*X^8,Y(9)*X^9);

$$Denklem := 1 + X^2 - \frac{1}{3}X^4$$

> plot(Denklem,X=-3..3);



Şekil 2.2. Lineer olmayan başlangıç değer probleminin grafiği

2.3. Durum (Lineer olmayan denklem)

$$y'' - Ny^m = 0 \quad , \qquad y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1 \tag{2.33}$$

N=1 ve m= 2 olsun

Denklem ;

$$y'' - y^2 = 0 \tag{2.34}$$

olur.

Eş.2.34 denklemine diferensiyel dönüşüm uygulanırsa,

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) - \sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r) = 0$$

$$Y(k+2) = \frac{\sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r)}{(k+1)(k+2)} \tag{2.35}$$

Şimdi başlangıç şartları denklemde yerine yazılırsa;

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k Y(k) \tag{2.36}$$

$$y(x) = Y(0) + Y(1)x^1 + Y(2)x^2 + ... \tag{2.37}$$

$$y'(x) = Y(1) + 2Y(2)x + 3Y(3)x^2 + ... \tag{2.38}$$

Eş.2.37'de $x = 0$ için $y(0) = Y(0) = 0$

Eş.2.38'de $x = 0$ için $y'(0) = Y(1) = 1$

Eş.2.35'den diferensiyel dönüşüm katsayılarını elde edelim,

$k = 0$ için $Y(2) = \frac{Y(0)Y(0)}{2} = 0$

$k=1$ için $$Y(3) = \frac{Y(0)Y(1)+Y(1)Y(0)}{2.3}=0$$

$k=2$ için $$Y(4) = \frac{Y(0)Y(2)+Y(1)Y(1)+Y(2)Y(0)}{3.4}=\frac{1}{12}$$

$k=3$ için $$Y(5) = \frac{Y(0)Y(3)+Y(1)Y(2)+Y(2)Y(1)+Y(3)Y(0)}{4.5}=0$$

$k=4$ için

$$Y(6) = \frac{Y(0)Y(4)+Y(1)Y(3)+Y(2)Y(2)+Y(3)Y(1)+Y(4)Y(0)}{5.6}=0$$

.
.
.

olur.

Bulunan değerler Eş.2.36'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} y(x) &= 0+1x+0x^2+0x^3+\frac{1}{12}x^4+0x^5+0x^6+O(x^7) \\ &= x+\frac{1}{12}x^4+O(x^7) \end{aligned}$$

olarak denklemin seri çözümü bulunmuş olur.

Eş.2.34 ile verilen denklemin program yardımıyla çözümü

```
> for k from 0 while k<3 do;
> Y(0):=0;
> Y(1):=1;
> k:=k;
> Y(k+2):=sum(Y(r)*Y(k-r),r=0..k)/((k+1)*(k+2));
> end do;
```

$$Y(0) := 0$$
$$Y(1) := 1$$
$$k := 0$$
$$Y(2) := 0$$
$$k := 1$$
$$Y(3) := 0$$
$$k := 2$$
$$Y(4) := \frac{1}{12}$$
$$k := 3$$
$$Y(5) := 0$$
$$k := 4$$
$$Y(6) := 0$$

```
>
y:=Y(0)*X^0+Y(1)*X^1+Y(2)*X^2+Y(3)*X^3+Y(4)*X^4+Y(5)*X^5+Y(6)*X^6;
```

$$y := X + \frac{1}{12} X^4$$

3. DİFERENSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN 2.MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$
$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta, \qquad a \le x \le b$$

İle verilen lineer sınır değer probleminin çözümünü elde edebilmek için denkleme aşağıdaki gibi diferensiyel dönüşüm uygulandığında, a ve b noktaları, $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k)$ dönüşümü yapılarak

$$y(x) = Y(0) + Y(1)x^1 + Y(2)x^2 + \ldots.$$
$$y'(x) = Y(1) + 2Y(2)x + 3Y(3)x^2 + \ldots.$$

sınır durumları için $y(0) = c$ dersek $y'(0) = 0$ olup, sınır durumlarının diferensiyel dönüşümünden $Y(0) = c$ elde edilir.

$Y(k) = \frac{1}{k!}[\frac{d^k}{dx^k} y(x)]_{x=0}$ den sınır koşullarının diferensiyel dönüşümü, yapılarak denklemin seri çözümünün $k = 0,1,2....$ için katsayıları c cinsinden bulunur.

c cinsinden bulunan Taylor katsayıları $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k)$ de yerine yazılıp sınır şartları uygulandığında c bulunur ve sonuçta bulunan katsayılar c cinsinden bulunan denklemde yerine yazılarak seri çözüm elde edilir.

3.1. Lineer ve Lineer Olmayan Sınır Değer Problemlerinin Diferensiyel Dönüşüm Yöntemiyle Çözümü

3.1. Durum (Lineer denklem)

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad y(0) - y'(0) = 0 \qquad y(1) + y'(1) = 0 \tag{3.1}$$

Eş.3.1 ile verilen lineer sınır değer probleminin her bir teriminin diferensiyel dönüşümünü bulalım :

$$y'' \rightarrow (k+1)(k+2)Y(k+2) \tag{3.2}$$

$$\lambda y \rightarrow \lambda Y(k) \tag{3.3}$$

Elde edilen diferensiyel dönüşümler Eş.3.1' de yerine yazılırsa,

$$Y(k+2) = -\frac{\lambda Y(k)}{(k+1)(k+2)} \qquad y(0) - y'(0) = 0 \qquad y(1) + y'(1) = 0 \tag{3.4}$$

olarak bulunur.

Şimdi verilen sınır durumlarını inceleyelim. Sınır şartlarına diferensiyel dönüşüm uygularsak,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) = Y(0) + Y(1)x^1 + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + ...$$

$$y'(x) = = Y(1) + 2Y(2)x + 3Y(3)x^2 + 4Y(4)x^3 .... \tag{3.5}$$

$x = 0$ için $y(0) - y'(0) = 0$ dan

$Y(0) - Y(1) = 0$

olur.

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n}x^{k}Y(k) \qquad \text{dan} \qquad \sum_{k=0}^{n}(1+k)Y(k)=0 \tag{3.6}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(1+k)Y(k)= Y(0)+2Y(1)+3Y(2)+4Y(3)+...+(n+1)Y(n)=0 \tag{3.7}$$

$Y(0)=c$ dersek $Y(1)=c$ olur.

Eş.3.4' den ;

$k=0$ için $Y(2)=-\dfrac{\lambda Y(0)}{(0+1)(0+2)}=-\dfrac{c}{2}\lambda$

$k=1$ için $Y(3)=-\dfrac{\lambda Y(1)}{(1+1)(1+2)}=-\dfrac{c}{6}\lambda$

$k=2$ için $Y(4)=-\dfrac{\lambda Y(2)}{(2+1)(2+2)}=\dfrac{c}{24}\lambda^{2}$

$k=3$ için $Y(5)=-\dfrac{\lambda Y(3)}{(3+1)(3+2)}=\dfrac{c}{120}\lambda^{2}$

$k=4$ için $Y(6)=-\dfrac{\lambda Y(4)}{(4+1)(4+2)}=-\dfrac{c}{720}\lambda^{3}$

.
.
.

bulunan değerler $\sum_{k=0}^{n}(1+k)Y(k)=0$ ters diferensiyel dönüşümde yerine yazılırsa,

$$\sum_{k=0}^{n}(1+k)Y(k)= Y(0)+2Y(1)+3Y(2)+4Y(3)+...+(n+1)Y(n)=0$$

$$f^{(6)}(\lambda)=3-\frac{13}{6}\lambda+\frac{131}{120}\lambda^{2}-\frac{7}{720}\lambda^{3}=0 \tag{3.8}$$

Eş.3.8'in çözümünden $\lambda=1.71,12.43$ olup gerçek kök $\lambda_1^{6}=1.71$ olur.

Benzer şekilde çözülürse $n = 5$ için $\lambda_1^5 = 1.75$ olur.

3.2. Durum (Lineer olmayan denklem)

$y'' - Ny^m = 0$, $\quad 0 \le x \le 1 \quad y(1) = 1 \quad y'(0) = 0$

tipinde verilen sınır değer problemlerine diferensiyel dönüşüm metodunun uygulanması:

N=1 ve m= 2 olsun

Denklem ;

$$y'' - y^2 = 0 \tag{3.9}$$

olur.

Eş.3.9 ile verilen denkleme diferensiyel dönüşüm uygulanırsa,

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) - \sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r) = 0$$

$$Y(k+2) = \frac{\sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r)}{(k+1)(k+2)} \tag{3.10}$$

Şimdi sınır durumlarını inceleyelim;

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k Y(k)$$

$$y(x) = Y(0) + Y(1)x^1 + Y(2)x^2 + ... \tag{3.11}$$

$$y'(x) = Y(1) + 2Y(2)x + 3Y(3)x^2 + ... \tag{3.12}$$

Eş.3.11'de

$y(0) = c$ dersek $y'(0) = 0$

sınır durumlarının diferensiyel dönüşümünden $Y(0) = c$ olur.

$y'(x) = Y(1) + 2Y(2)x + 3Y(3)x^2 + ...$ ise
$y'(0) = Y(1) = 0$

olur.

Eş.3.10 denkleminden diferensiyel dönüşüm katsayılarını elde edelim,

$k = 0$ için $Y(2) = \dfrac{Y(0)Y(0)}{2} = \dfrac{c^2}{2}$

$k = 1$ için $Y(3) = \dfrac{Y(0)Y(1) + Y(1)Y(0)}{2.3} = 0$

$k = 2$ için $Y(4) = \dfrac{Y(0)Y(2) + Y(1)Y(1) + Y(2)Y(0)}{3.4} = \dfrac{\frac{c^2}{2}c + \frac{c^2}{2}c}{12} = \dfrac{c^3}{12}$

$k = 3$ için $Y(5) = \dfrac{Y(0)Y(3) + Y(1)Y(2) + Y(2)Y(1) + Y(3)Y(0)}{4.5} = 0$

$k = 4$ için $Y(6) = \dfrac{Y(0)Y(4) + Y(1)Y(3) + Y(2)Y(2) + Y(3)Y(1) + Y(4)Y(0)}{5.6}$

$$= \frac{\frac{c^3}{12}c + \frac{c^2}{2}\frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{12}c}{30} = \frac{c^4}{72}$$

.
.
.

olur.

Bulunan değerler Eş.3.11'de yerine yazılırsa,

$$y(x) \quad = \quad c + \frac{c^2}{2}x^2 + \frac{c^3}{12}x^4 + \frac{c^4}{72}x^6 + O(x^7)$$

elde edilir.

$y(1) = 1$ ise $y(x)$ genel çözümünde yerine yazılarak c bulunur.

Eş.3.9 ile verilen denklemin program yardımıyla çözümü

```
> for k from 0 while k<5 do
Y(0):=c;
Y(1):=0;
k:=k;
Y(k+2):=sum(Y(r)*Y(k-r),r=0..k)/((k+1)*(k+2));
end do;
```

$$Y(0) := c$$

$$Y(1) := 0$$

$$k := 0$$

$$Y(2) := \frac{1}{2}c^2$$

$$k := 1$$

$$Y(3) := 0$$

$$k := 2$$

$$Y(4) := \frac{1}{12}c^3$$

$$k := 3$$

$$Y(5) := 0$$

$$k := 4$$

$$Y(6) := \frac{1}{72}c^4$$

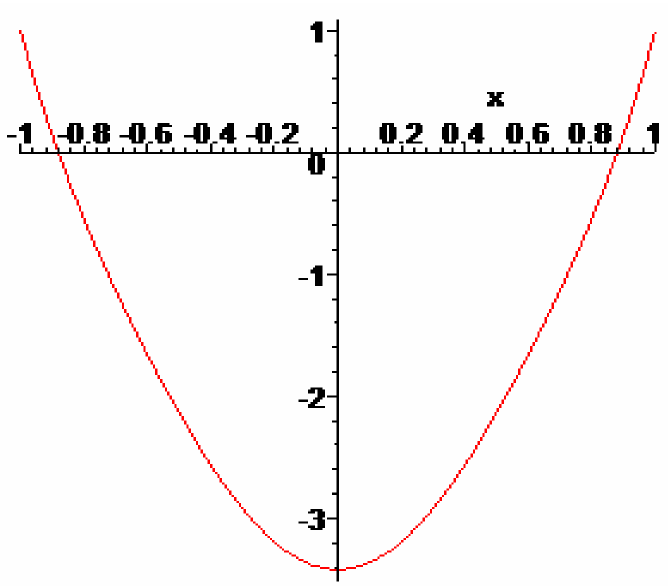
```
>y:=Y(0)*X^0+Y(1)*X^1+Y(2)*X^2+Y(3)*X^3+Y(4)*X^4+Y(5)*X^5+
Y(6)*X^6);
```

$$y := c + \frac{1}{2}c^2 X^2 + \frac{1}{12}c^3 X^4 + \frac{1}{72}c^4 X^6$$

```
> fsolve(c+(c^2)/2+(c^3)/12+(c^4)/72=1,{c});
```

$$\{c = -3.423019508\}, \{c = 0.7124733325\}$$

```
> plot(-3.423019508+1/2*(-3.423019508)^2*x^2+1/12*
  (-3.423019508)^3*x^4+1/72*(-3.423019508)^4*x^6, x=-1..1);
```



Şekil 3.1. Eş.3.9 ile verilen lineer olmayan sınır değer probleminin
c=-3.423019508 için grafiği

3.1.3. Durum3 (Lineer olmayan denklem

$$y'' + ((y')^2 - 2y - x^2) = 0\,, \qquad y(-1) = 0 \qquad y'(-1) = 0 \tag{3.13}$$

Eş.3.13 ile verilen denkleme diferensiyel dönüşüm uygulanırsa,

$$y'' \to (k+1)(k+2)Y(k+2) \tag{3.14}$$

$$(y')^2 \to \sum_{r=0}^{k}(r+1)(k-r+1)Y(r+1)Y(k-r+1) \tag{3.15}$$

$$2y \to 2Y(k) \tag{3.16}$$

$$x^2 \to \delta(k-2) \tag{3.17}$$

O halde

$$Y(k+2) = \frac{2Y(k) + \delta(k-2) - \sum_{r=0}^{k}(r+1)(k-r+1)Y(r+1)Y(k-r+1)}{(k+1)(k+2)} \tag{3.18}$$

Şimdi sınır durumlarını inceleyelim;

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k Y(k)$$

$$y(x) = Y(0) + Y(1)x^1 + Y(2)x^2 + ... \tag{3.19}$$

$$y(-1) = Y(0)(-1)^0 + Y(1)(-1)^1 + Y(2)(-1)^2 + ... = 0 \tag{3.20}$$

$$y(1) = Y(0)(1)^0 + Y(1)(1)^1 + Y(2)(1)^2 + ... = 0 \tag{3.21}$$

Sınır durumlarının diferensiyel dönüşümünden

$Y(0) = a$

$Y(1) = b$ diyelim.

Eş.3.18'den diferensiyel dönüşüm katsayılarını elde edelim,

$k=0$ için $\qquad Y(2) = a-\frac{b^2}{2}$

$k=1$ için $\qquad Y(3) = \frac{b}{3}-\frac{2b(a-\frac{b^2}{2})}{3}$

$k=2$ için $\qquad Y(4) = \frac{a}{6}-\frac{b^2}{12}+\frac{1}{12}-\frac{b(\frac{b}{3}-\frac{2b(a-\frac{b^2}{2})}{3})}{2}-\frac{(a-\frac{b^2}{2})^2}{3}$

$k=3$ için

$$Y(5) = \frac{b}{30}-\frac{b(a-\frac{b^2}{2})}{15}-\frac{2b(\frac{a}{6}-\frac{b^2}{12}+\frac{1}{12})}{5}-\frac{\frac{b(\frac{b}{3}-\frac{2b(a-\frac{b^2}{2})}{3}a-\frac{b^2}{2})}{2})-\frac{(a-\frac{b^2}{2})^2}{3}}{5}$$

$$-\frac{3(a-\frac{b^2}{2})(\frac{b}{3}-\frac{2b(a-\frac{b^2}{2})}{3})}{3}$$

$k=4$ için

$$Y(6)=\frac{a}{90}-\frac{b^2}{180}+\frac{1}{180}-\frac{b(\frac{b}{3}-\frac{2b(a-\frac{b^2}{2})}{3})}{30}-\frac{(a-\frac{b^2}{2})^2}{45}-b(\frac{b}{30}-\frac{b(a-\frac{b^2}{2})}{15}$$

$$-\frac{2b(\frac{a}{6}-\frac{b^2}{12}+\frac{1}{12}-\frac{b(\frac{b}{3}-\frac{2b(a-\frac{b^2}{2})}{3})}{2}-\frac{(a-\frac{b^2}{2})^2}{3})}{5}+(\frac{3(a-\frac{b^2}{2})(\frac{b}{3}-\frac{2b(a-\frac{b^2}{2})}{3})}{5})/3$$

$$-\frac{8(a-\frac{b^2}{2})(\frac{a}{6}-\frac{b^2}{12}+\frac{1}{12}-\frac{b(\frac{b}{3}-\frac{2b(a-\frac{b^2}{2})}{3})}{2}-\frac{(a-\frac{b^2}{2})^2}{3})}{15})-\frac{3(\frac{b}{3}-\frac{2b(a-\frac{b^2}{2})}{3})^2}{10})$$

.

.

.

olur.

Bulunan değerler Eş.3.19'da yerine yazılırsa,

$$y(x) = a + bx + (a - \frac{b^2}{2})x^2 + (\frac{b}{3} - \frac{2b(a - \frac{b^2}{2})}{3})x^3 + (\frac{a}{6} - \frac{b^2}{12} + \frac{1}{12} - \frac{b(\frac{b}{3} - \frac{2b(a - \frac{b^2}{2})}{3})}{2} - \frac{(a - \frac{b^2}{2})^2}{3})x^4$$

elde edilir. (3.22)

Eş.3.20 ve Eş.3.21 şartları uygulanırsa,

$$\frac{13a}{6} - \frac{4b}{3} - \frac{7b^2}{12} + \frac{2b(a - \frac{b^2}{2})}{3} + \frac{1}{12} - \frac{b(\frac{b}{3} - \frac{2b(a - \frac{b^2}{2})}{3})}{2} - \frac{(a - \frac{b^2}{2})^2}{3} \qquad (3.23)$$

ve

$$\frac{13a}{6} + \frac{4b}{3} - \frac{7b^2}{12} - \frac{2b(a - \frac{b^2}{2})}{3} + \frac{1}{12} - \frac{b(\frac{b}{3} - \frac{2b(a - \frac{b^2}{2})}{3})}{2} - \frac{(a - \frac{b^2}{2})^2}{3} \qquad (3.24)$$

elde edilir.

Eş.3.23 ve Eş.3.24 denklemlerinden a ve b çözülürse,

$$\{a = -0.03823660948, b = 0\}$$

olarak a ve b nin yaklaşık değerleri bulunur.

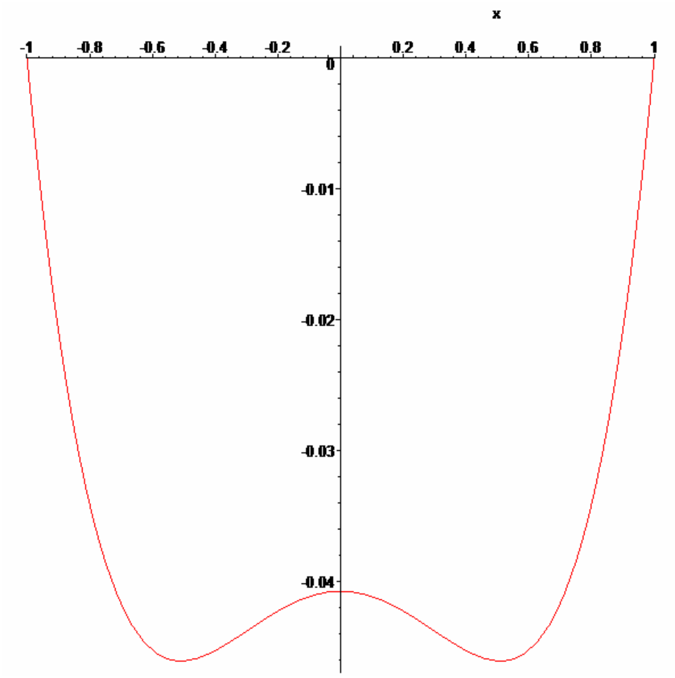
Bulunan a ve b değerleri Eş.3.22'de yerine yazılırsa

$$y = -0.03823660948 - 0.03823660948x^2 + 0.07647321898x^4 \qquad (3.25)$$

elde edilir.

Çizelge 3.1. Eş 3.13 Lineer olmayan sınır değer probleminin DT metoduyla elde edilen yaklaşık çözümleri ile Shooting çözümünden bulunan değerlerin karşılaştırılması ve Fark

x_i	**DTM ile çözüm**	**Shooting Metoduyla çözüm**	**Fark**
−1.0	-0.00000000010	0.00000000000	0.00000000010
−0.9	-0.02081077217	-0.20663841730	-0.18582764513
−0.8	-0.03409216445	-0.33903257930	-0.30494041485
−0.7	-0.04169512238	-0.04150574830	0.00018937408
−0.6	-0.04522441517	-0.04504745711	0.00017695806
−0.5	-0.04603743153	-0.04587456532	0.00016286621
−0.4	-0.04525104332	-0.04510032962	0.00015071370
−0.3	-0.04375314823	-0.04361181967	0.00014132856
−0.2	-0.04221602400	-0.04208128550	0.00013473850
−0.1	-0.04110914800	-0.04097831458	0.00013083342
0.0	-0.04070965777	-0.04058012707	0.00012953070
0.1	-0.04110914800	-0.04097834578	0.00013080222
0.2	-0.04221602400	-0.04208134608	0.00013467792
0.3	-0.04375314823	-0.04361190590	0.00014124233
0.4	-0.04525104332	-0.04510043574	0.00015060758
0.5	-0.04603743153	-0.04587468334	0.00016274819
0.6	-0.04522441517	-0.04504757688	0.00017683829
0.7	-0.04169512238	-0.04150585780	0.00018926458
0.8	-0.03409216445	-0.03390334397	0.00018882048
0.9	-0.02081077217	-0.02066389106	0.00014688111
1.0	-0.00000000010	-0.00000000060	-0.00000000050



Şekil 3.2. Eş.3.13 ile verilen lineer olmayan sınır değer probleminin $a = -0.03823660948, b = 0$ için grafiği

3.4. Durum (Lineer olmayan denklem)

$$y'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - yy'), \qquad 1 \le x \le 3, \qquad y(1) = 17, \qquad y(3) = \frac{43}{3} \tag{3.26}$$

Eş.3.26 denklemine diferensiyel dönüşüm uygulanırsa,

$$y'' \to (k+1)(k+2)Y(k+2) \tag{3.27}$$

$$yy' \to \sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r+1)(k-r+1) \tag{3.28}$$

$$x^3 \to \delta(k-3) \tag{3.29}$$

O halde

$$Y(k+2) = \frac{32 + 2\delta(k-3) - \sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r+1)(k-r+1)}{8(k+1)(k+2)} \tag{3.30}$$

Şimdi sınır durumlarını inceleyelim;

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(x-x_0)^k Y(k) \tag{3.31}$$

$$y(x) = Y(0)(x-x_0)^0+Y(1)(x-x_0)^1+Y(2)(x-x_0)^2+.... \tag{3.32}$$

$1\leq x\leq 3$, olduğundan $x_0=2$ için Eş.3.32 eşitliği,

$$y(x) = Y(0)(x-2)^0+Y(1)(x-2)^1+Y(2)(x-2)^2+.... \tag{3.33}$$

olur.

Sınır durumlarının diferensiyel dönüşümünden

$Y(0)=a$

$Y(1)=b$ diyelim.

Eş.3.30’dan diferensiyel dönüşüm katsayılarını elde edelim,

$k=0$ için $\qquad Y(2) = 2-\frac{ab}{16}$

$k=1$ için $\qquad Y(3) = \frac{2}{3}-\frac{a(2-\frac{ab}{16})}{24}-\frac{b^2}{48}$

$k=2$ için $\qquad Y(4) = \frac{1}{3}-\frac{a(\frac{2}{3}-\frac{a(2-\frac{ab}{16})}{24}-\frac{b^2}{48})}{32}-\frac{b(2-\frac{ab}{16})}{32}$

$k=3$ için $Y(5)$ =

$$\frac{17}{80}-\frac{a(\frac{1}{3}-\frac{a(\frac{2}{3}-\frac{a(2-\frac{ab}{16})}{24})-\frac{b^2}{48}}{32})-\frac{b(2-\frac{ab}{16})}{32})}{40}-\frac{b(\frac{2}{3}-\frac{a(2-\frac{ab}{16})}{24})-\frac{b^2}{48}}{40}-\frac{(2-\frac{ab}{16})^2}{80}$$

.
.
.

olur.

Bulunan değerler Eş.3.31'de yerine yazılırsa,

$$y(x)=a+b(x-2)+(2-\frac{ab}{16})(x-2)^2+(\frac{2}{3}-\frac{a(2-\frac{ab}{16})}{24})-\frac{b^2}{48})(x-2)^3+$$
$$(\frac{1}{3}-\frac{a(\frac{2}{3}-\frac{a(2-\frac{ab}{16})}{24})-\frac{b^2}{48}}{32})-\frac{b(2-\frac{ab}{16})}{32})(x-2)^4+(\frac{17}{80})-$$
$$\frac{\frac{a(\frac{2}{3}-\frac{a(2-\frac{ab}{16})}{24})-\frac{b^2}{48}}{32}-\frac{b(2-\frac{ab}{16})}{32}}{40}-\frac{b(\frac{2}{3}-\frac{a(2-\frac{ab}{16})}{24}-\frac{b^2}{48})}{40}-\frac{(2-\frac{ab}{16})^2}{80})(x-2)^5$$

elde edilir. (3.34)

Sınır şartları uygulanırsa,

$$-b+a-\frac{ab}{16}+\frac{b^2}{48}+\frac{a(2-\frac{ab}{16})}{24}-\frac{a(\frac{2}{3}-\frac{a(2-\frac{ab}{16})}{24})-\frac{b^2}{48})}{32}-\frac{b(2-\frac{ab}{16})}{32}+$$
$$\frac{a(\frac{1}{3}-\frac{a(\frac{2}{3}-\frac{a(2-\frac{ab}{16})}{24})-\frac{b^2}{48}}{32}}{40}-\frac{\frac{b(2-\frac{ab}{16})}{32}}{40}+\frac{b(\frac{2}{3}-\frac{a(2-\frac{ab}{16})}{24}-\frac{b^2}{48})}{40}+\frac{(2-\frac{ab}{16})^2}{80}$$

(3.35)

ve

$$b+a-\frac{ab}{16}-\frac{b^2}{48}-\frac{a(2-\frac{ab}{16})}{24}-\frac{a(\frac{2}{3}-\frac{a(2-\frac{ab}{16})}{24})-\frac{b^2}{48}}{32})-\frac{b(2-\frac{ab}{16})}{32}-$$

$$\frac{a(\frac{1}{3}-\frac{a(\frac{2}{3}-\frac{a(2-\frac{ab}{16})}{24})-\frac{b^2}{48}}{32}}{40}-\frac{\frac{b(2-\frac{ab}{16})}{32}}{40}-\frac{b(\frac{2}{3}-\frac{a(2-\frac{ab}{16})}{24}-\frac{b^2}{48})}{40}-\frac{(2-\frac{ab}{16})^2}{80} \tag{3.36}$$

elde edilir.

Eş.3.35 ve Eş3.36 denklemleri çözüldüğünde a ve b değerleri

$$\{a=12.24204427, b=-0.6849025968\}$$

olarak bulunur.

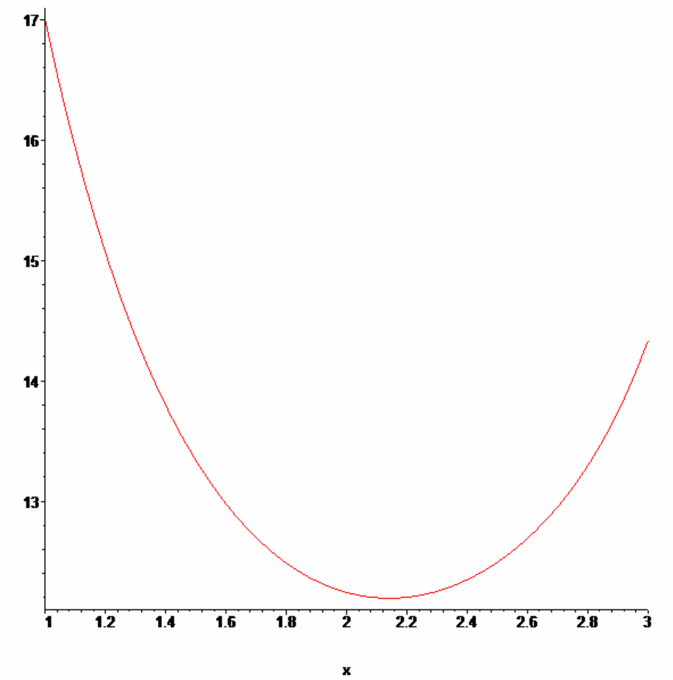
Bulunan a ve b değerleri (3.34) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$y=13.61184946-0.6849025968x+2.524037994(x-2)^2-0.6305804439(x-2)^3+$$
$$0.6285931422(x-2)^4-0.07031337886(x-2)^5 \tag{3.37}$$

elde edilir.

Çizelge 3.2. Eş 3.31 Lineer olmayan sınır değer probleminin DT metoduyla elde edilen yaklaşık çözümleri ile Shooting çözümünden bulunan değerlerin karşılaştırılması ve Fark

x_i	**DTM ile çözüm**	**Shooting Metoduyla çözüm**	**Fark**
1,0	16.999999	17.000000	0.000001
1,1	15.931008	15.755496	-0.175512
1,2	15.064036	14.773391	-0.290644
1,3	14.361604	13.997754	-0.363850
1,4	13.794230	13.388632	-0.405598
1,5	13.338920	12.916723	-0.422197
1,6	12.977823	12.560051	-0.417772
1,7	12.697108	12.301810	-0.395298
1,8	12.486071	12.128928	-0.357143
1,9	12.336469	12.031086	-0.305383
2,0	12.242044	12.000029	-0.242015
2,1	12.198226	12.029072	-0.169154
2,2	12.201976	12.112748	-0.089228
2,3	12.251783	12.246538	-0.005245
2,4	12.347829	12.426679	0.078850
2,5	12.492419	12.650010	0.157591
2,6	12.690783	12.913854	0.223071
2,7	12.952459	13.215931	0.263472
2,8	13.293532	13.554289	0.260757
2,9	13.740083	13.927243	0.187160
3,0	14.333333	14.333333	0.000000



Şekil 3.3. Lineer olmayan sınır değer probleminin grafiği

3.5. Durum (Lineer olmayan denklem)

$$y'' + 2y^2 + 2y + 1 = 0, \qquad y(-1) = y(1) = 0 \tag{3.38}$$

sınır değer problemi verilsin.

Verilen denkleme Diferensiyel Dönüşüm uygulanırsa,

$$y'' \rightarrow (k+1)(k+2)Y(k+2) \tag{3.39}$$

$$2y^2 \rightarrow 2\sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r) \tag{3.40}$$

$$2y \rightarrow 2Y(k) \tag{3.41}$$

O halde

$$Y(k+2) = -\frac{1+2Y(k)+2\sum_{r=0}^{k} Y(r)Y(k-r)}{(k+1)(k+2)} \tag{3.42}$$

Şimdi sınır durumlarını inceleyelim;

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_0)^k Y(k) \tag{3.43}$$

$x_0 = 0$ için

$$y(x) = Y(0) + Y(1)x^1 + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 .... \tag{3.44}$$

olur.

Sınır durumlarının diferensiyel dönüşümünden

$Y(0) = a$

$Y(1) = b$ diyelim.

Eş.3.42'den diferensiyel dönüşüm katsayılarını elde edelim:

$k=0$ için $Y(2) = -a^2 - a - \frac{1}{2}$

$k=1$ için $Y(3) = \frac{2}{3}ab - \frac{1}{3}b - \frac{1}{6}$

$k=2$ için $Y(4) = -\frac{a(-a^2 - a - \frac{1}{2})}{3} - \frac{b^2}{6} + \frac{a^2}{6} + \frac{a}{6}$

$k=3$ için $Y(5) = -\frac{a(\frac{2}{3}ab - \frac{1}{3}b - \frac{1}{6})}{5} - \frac{b(-a^2 - a - \frac{1}{2})}{5} + \frac{ab}{15} + \frac{b}{30} - \frac{1}{30}$

.
.
.

elde edilir.

Bulunan değerler Eş.3.44'de yerine yazılırsa,

$$y(x) = a + bx + (-a^2 - a - \frac{1}{2})x^2 + (\frac{2}{3}ab - \frac{1}{3}b - \frac{1}{6})x^3 +$$

$$(-\frac{a(-a^2 - a - \frac{1}{2})}{3} - \frac{b^2}{6} + \frac{a^2}{6} + \frac{a}{6})x^4 + (-\frac{a(\frac{2}{3}ab - \frac{1}{3}b - \frac{1}{6})}{5})$$

$$-\frac{b(-a^2 - a - \frac{1}{2})}{5} + \frac{ab}{15} + \frac{b}{30} - \frac{1}{30})x^5 \tag{3.45}$$

bulunur.

Sınır şartları uygulanırsa,

$$-\frac{2263b}{3240} + \frac{131a}{840} - \frac{709a^2}{840} + \frac{977ab}{1620} - \frac{131b^2}{840} - \frac{131a(-a^2 - a - \frac{1}{2})}{420} \tag{3.46}$$

ve

$$\frac{2263b}{3240} + \frac{131a}{840} - \frac{709a^2}{840} - \frac{977ab}{1620} - \frac{131b^2}{840} - \frac{131a(-a^2 - a - \frac{1}{2})}{420} \tag{3.47}$$

elde edilir.

Eş.3.46 ve Eş.3.47 denklemleri çözüldüğünde a ve b değerleri

$$\{a = 2.230143226, b = 0.1185874654\}$$

olarak bulunur.

Bulunan a ve b değerleri Eş.3.45'de yerine yazılırsa

$$y = 2.230143226 + 0.1185874654x - 7.703682034x^2 - 0.3825071769x^3$$
$$+6.925041275x^4 + 0.3415719009x^5 \qquad (3.48)$$

olarak elde edilir.

4. VAN DER POL DENKLEMİ

Elektrik veya elektronik devrelerdeki, kalp atışındaki veya mekanik sistemlerde oluşan salınımları modellemek için kullanılan, Hollandalı bir elektrik mühendisi olan Balthazar Van der Pol tarafından ilk kez tanımlanmış ve kendi adıyla literatüre geçen Van der Pol denkleminin (osilatörünün) standart formu;

$$y'' - \mu(1-y^2)y' + y = 0 \qquad (4.1)$$

biçimindedir [2,7,8].

Burada y zamanın fonksiyonu olup, ikinci terim lineer olmayan damping (bir salınımlı sistemde salınımların genliğini azaltmaya yarayan kuvvet) terimi olarak tanımlanır. μ ise lineer olmayan damping teriminin büyüklüğünü gösteren bir sabit sayıdır.

$y(0) = a$ $\qquad$ $y'(0) = b$ başlangıç şartları ile

$$y'' - \mu(1-y^2)y' + y = 0 \qquad (4.2)$$

Eş.4.2 bir başlangıç değer problemi tanımlar. Denklemin diferensiyel dönüşüm yöntemi ile çözümü aşağıdaki algoritma ile verilebilir:

<u>Girdi :</u> a ve b noktaları, $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k)$ dönüşümü yapılarak

$$y(x) = Y(0) + Y(1)x^1 + Y(2)x^2 + ...$$

$$y'(x) = Y(1) + 2Y(2)x + 3Y(3)x^2 + ...$$

başlangıç koşullarının diferensiyel dönüşümü, $Y(k) = \frac{1}{k!}[\frac{d^k}{dx^k}y(x)]_{x=x_0}$ ile elde edilir.

Çıktı : $y(x)$'in seri çözümü $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k)$ dan bulunur.

4.1. Diferensiyel Dönüşüm Metodunun Farklı Parametreler İçin Van der Pol Denklemine Uygulamaları

4.1. Durum (μ=*0* için Van der Pol denkleminin diferensiyel dönüşüm metoduyla çözüm algoritması)

$\mu = 0$ için Van Der Pol denklemi;

$$y'' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 0 \tag{4.3}$$

biçiminde olur.

Adım 1: Eş.4.3 ile verilen başlangıç değer probleminin her bir teriminin diferensiyel dönüşümünü bulalım :

$$y'' \to (k+1)(k+2)Y(k+2) \tag{4.4}$$

$$y \to Y(k) \tag{4.5}$$

Elde edilen diferensiyel dönüşümler Eş.4.3' de yerine yazılırsa,

$$Y(k+2) = -\frac{Y(k)}{(k+1)(k+2)} \tag{4.6}$$

olarak bulunur.

Adım 2: Eş.4.3 ile verilen başlangıç durumlarını inceleyelim. Başlangıç şartlarına diferensiyel dönüşüm uygularsak,

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) = Y(0)+Y(1)x^1+Y(2)x^2+Y(3)x^3+.... \quad (4.7)$$

$x=0$ için $y(0)=2$ den $Y(0)=2$

olur.

Eş.4.7' den birinci türev alırsak,

$$y'(x)= = Y(1)+2Y(2)x+3Y(3)x^2+4Y(4)x^3.... \quad (4.8)$$

elde edilir.

Buradan,

$x=0$ için $y'(0)=0$ olduğundan

$y'(x)=Y(1)=0$

olur.

Adım 3: Eş.4.6' dan diferensiyel dönüşüm katsayılarını elde edelim:

$k=0$ için $Y(2)=-\dfrac{Y(0)}{(0+1)(1+2)}=-1$

$k=1$ için $Y(3)=-\dfrac{Y(1)}{6}=0$

$k=2$ için $Y(4)=-\dfrac{Y(2)}{12}=\dfrac{1}{12}$

...

Adım4: Bulunan $Y(1), Y(2), Y(3), \ldots$ değerleri $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k)$ ters diferensiyel dönüşümünde yerine yazılırsa,

$$y(x) = = Y(0)x^0 + Y(1)x^1 + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + \ldots.$$

den

$$y(x) = \; 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{360}x^6 \ldots. \qquad (4.9)$$

olarak seri çözüm bulunmuş olur.

4.2. Durum (μ=*1* için Van der Pol denkleminin diferensiyel dönüşüm metoduyla çözüm algoritması)

$\mu = 1$ için Van Der Pol denklemi;

$$y'' - (1 - y')y + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0 \qquad (4.10)$$

biçiminde olur.

Adım 1: Eş .4.10 ile verilen başlangıç değer probleminin her bir teriminin diferensiyel dönüşümünü bulalım :

$$y'' \rightarrow (k+1)(k+2)Y(k+2) \qquad (4.11)$$

$$yy' \rightarrow \sum_{r=0}^{k} Y(r)(k-r+1)Y(k-r+1) \qquad (4.12)$$

Elde edilen diferensiyel dönüşümler Eş.4.10' da yerine yazılırsa,

$$Y(k+2) = -\frac{\sum_{r=0}^{k} Y(r)(k-r+1)Y(k-r+1)}{(k+1)(k+2)} \qquad y(0)=1 \ , \ y'(0)=0 \qquad (4.13)$$

olarak bulunur.

Adım 2: Eş.4.10 ile verilen başlangıç durumlarını inceleyelim. Başlangıç şartlarına diferensiyel dönüşüm uygularsak,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) = Y(0) + Y(1)x^1 + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + ... \qquad (4.14)$$

$x = 0$ için $y(0) = 1$ den

$y(x) = Y(0) = 1$

olur.

Eş.4.14' den birinci türev alırsak,

$$y'(x) = = Y(1) + 2Y(2)x + 3Y(3)x^2 + 4Y(4)x^3 .... \qquad (4.15)$$

elde edilir. Buradan,

$x = 0$ için $y'(0) = 0$ olduğundan

$y'(x) = Y(1) = 0$

olur.

Adım 3: Eş.4.13' den diferensiyel dönüşüm katsayılarını elde edelim:

$k = 0$ için $\qquad Y(2) = \frac{-[Y(0)Y(1)]}{(0+1)(1+2)} = 0$

$k=1$ için $$Y(3)=\frac{-[Y(0)Y(1)+2Y(1)Y(2)]}{(1+1)(1+2)}=0$$

$k=2$ için $$Y(4)=\frac{-[Y(0)Y(1)+2Y(1)Y(2)+3Y(2)Y(3)]}{(2+1)(2+2)}=0$$

.
.
.

Adım 4: Bulunan $Y(1),Y(2),Y(3),\ldots$ değerleri $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^kY(k)$ ters diferensiyel dönüşümünde yerine yazılırsa,

$$y(x)= = Y(0)+Y(1)x^1+Y(2)x^2+Y(3)x^3+Y(4)x^4+....$$

den

$$y(x)= = 1+0x+0x^2+0x^3+0x^4.... \qquad (4.16)$$

olarak seri çözüm bulunmuş olur.

4.3. Durum (μ=*3* için Van der Pol denkleminin diferensiyel dönüşüm metoduyla çözüm algoritması)

$\mu=3$ için Van Der Pol denklemi;

$$y''-3(1-y')y+y=0 \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=0 \qquad (4.17)$$

biçiminde olur.

Adım 1: Eş.4.17 ile verilen başlangıç değer probleminin her bir teriminin diferensiyel dönüşümünü bulalım :

$$y'' \rightarrow (k+1)(k+2)Y(k+2) \tag{4.18}$$

$$yy' \rightarrow \sum_{r=0}^{k} Y(r)(k-r+1)Y(k-r+1) \tag{4.19}$$

$$2y \rightarrow 2Y(k) \tag{4.20}$$

Elde edilen diferensiyel dönüşümler Eş .4.17' de yerine yazılırsa,

$$Y(k+2) = \frac{2Y(k) - \sum_{r=0}^{k} Y(r)(k-r+1)Y(k-r+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$y(0)=1 \;,\; y'(0)=0 \tag{4.21}$$

olarak bulunur.

Adım 2: Eş.4.17 ile verilen sınır durumlarını inceleyelim. Sınır şartlarına diferensiyel dönüşüm uygularsak,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) \;=\; Y(0) + Y(1)x^1 + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + ... \tag{4.22}$$

$x = 0$ için $y(0) = 1$ den

$y(x) = Y(0) = 1$

olur.

Eş.4.22' den birinci türev alırsak,

$$y'(x) = \;=\; Y(1) + 2Y(2)x + 3Y(3)x^2 + 4Y(4)x^3.... \tag{4.23}$$

elde edilir.

Buradan,

$x=0$ için $y'(0)=0$ olduğundan

$y'(x)=Y(1)=0$

olur.

Adım 3: Eş.4.21' den diferensiyel dönüşüm katsayılarını elde edelim:

$k=0$ için $Y(2)=\dfrac{2Y(0)-[Y(0)Y(1)]}{(0+1)(1+2)}=1$

$k=1$ için $Y(3)=\dfrac{2Y(1)-[Y(0)Y(1)+2Y(1)Y(2)]}{(1+1)(1+2)}=-\dfrac{1}{3}$

$k=2$ için $Y(4)=\dfrac{2Y(1)-[Y(0)Y(1)+2Y(1)Y(2)+3Y(2)Y(3)]}{(2+1)(2+2)}=\dfrac{1}{4}$

.
.
.

Adım 4: Bulunan $Y(1), Y(2), Y(3), \ldots$ değerleri $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k)$ ters diferensiyel dönüşümünde yerine yazılırsa,

$$y(x)= = Y(0)+Y(1)x^1+Y(2)x^2+Y(3)x^3+Y(4)x^4+....$$

den

$$y(x)= 1+0x+1x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4.... \qquad (4.24)$$

olarak seri çözüm bulunmuş olur.

4.4.Durum (μ=*5.6* için Van der Pol denkleminin diferensiyel dönüşüm metoduyla çözüm algoritması)

$\mu = 5,6$ için Van Der Pol denklemi;

$$y'' - \frac{28}{5}(1-y')y + y = 0 \qquad y(0)=1 \qquad y'(0)=0 \tag{4.25}$$

biçiminde olur.

Adım 1: Eş.4.25 ile verilen başlangıç değer probleminin her bir teriminin diferensiyel dönüşümünü bulalım :

$$y'' \to (k+1)(k+2)Y(k+2) \tag{4.26}$$

$$\frac{28}{5}yy' \to \frac{28}{5}\sum_{r=0}^{k} Y(r)(k-r+1)Y(k-r+1) \tag{4.27}$$

$$\frac{23}{5}y \to \frac{23}{5}Y(k) \tag{4.28}$$

Elde edilen diferensiyel dönüşümler Eş.4.25’ de yerine yazılırsa,

$$Y(k+2) = \frac{\frac{23}{5}Y(k) - \frac{28}{5}\sum_{r=0}^{k} Y(r)(k-r+1)Y(k-r+1)}{(k+1)(k+2)}$$

$$y(0)=1 \ , \ y'(0)=0 \tag{4.29}$$

olarak bulunur.

Adım 2: Eş.4.25 ile verilen sınır durumlarını inceleyelim. Sınır şartlarına diferensiyel dönüşüm uygularsak,

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k Y(k) = Y(0) + Y(1)x^1 + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + ... \tag{4.30}$$

$x=0$ için $y(0)=1$ den

$y(x)=Y(0)=1$

olur.

Eş.4.30' dan birinci türev alırsak,

$$y'(x)= = Y(1)+2Y(2)x+3Y(3)x^2+4Y(4)x^3.... \tag{4.31}$$

elde edilir. Buradan,

$x=0$ için $y'(0)=0$ olduğundan

$y'(x)=Y(1)=0$

olur.

Adım 3: Eş.4.29' dan diferensiyel dönüşüm katsayılarını elde edelim:

$k=0$ için $$Y(2)=\frac{\frac{23}{5}Y(0)-\frac{28}{5}[Y(0)Y(1)]}{(0+1)(1+2)}=\frac{23}{10}$$

$k=1$ için $$Y(3)=\frac{\frac{23}{5}Y(0)-\frac{28}{5}[Y(0)Y(1)+2Y(1)Y(2)]}{(1+1)(1+2)}=-\frac{322}{75}$$

$k=2$ için

$$Y(4)=\frac{\frac{23}{5}Y(0)-\frac{28}{5}[Y(0)Y(1)+2Y(1)Y(2)+3Y(2)Y(3)]}{(2+1)(2+2)}=\frac{20677}{3000}$$

.
.
.

Adım 4: Bulunan $Y(1),Y(2),Y(3),...$ değerleri $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^kY(k)$ ters diferensiyel dönüşümde yerine yazılırsa,

$$y(x) = \; = Y(0)+Y(1)x^1+Y(2)x^2+Y(3)x^3+Y(4)x^4+....$$

$$y(x) = \; = 1+0x+\frac{23}{10}x^2-\frac{322}{75}x^3+\frac{20677}{3000}x^4.... \qquad (4.32)$$

olarak genel çözüm bulunmuş olur.

5. HATA ANALİZİ

5.1. Taylor Serisi

Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $x_o = c$ de her mertebeden türevi varsa,

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f'(c)}{2!}(x-c)^2 + ... + \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n + ... \quad (5.1)$$

İfadesine, yani kısaca

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n \quad (5.2)$$

toplamına $x_o = c$ noktasında $f(x)$ fonksiyonunun Taylor Serisi denir. Eğer Eş.5.2 ile verilen denklemde $c = 0$ alınırsa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}(x)^n \quad (5.3)$$

elde edilir. Eş.5.3 toplamına Maclaurin serisi adı verilir.

Eğer $y'(t) = f(t, y(t))$ olmak üzere $a \leq t \leq b$ için $y(a) = \alpha$ şartı altında n. mertebeden Taylor serisine açılırsa, adım aralığı h ve $y \in C^{n+1}[a,b]$ olmak şartıyla Lokal Kesme Hatası $O(h^n)$ dir.

5.1. Teorem (Taylor teoremi)

$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) de $(n+1)$. mertebeden türevlenebilir olsun.

$x \in (a,b)$ ve $R_n(x) = \dfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^n$ olmak üzere

$a < \xi < b$ için $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ şeklinde yazılabilir.

Burada,

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots\ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

şeklinde $n.$ dereceden bir polinomdur.

Eş.2.21 ile ikinci bölümde verilen

$$y'' + 2y' + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0 \tag{5.4}$$

denklemin diferensiyel dönüşüm metoduyla çözümünü

$y(x) = Y(0) + Y(1)x^1 + Y(2)x^2 + Y(3)x^3 + Y(4)x^4 + O(h^5)$

$Y(0) = 1$

$Y(1) = 0$

$Y(2) = -\dfrac{1}{2}$

$Y(3) = \dfrac{1}{3}$

$Y(4) = -\dfrac{1}{8}$

$Y(5) = \dfrac{1}{30}$

$Y(6) = -\dfrac{1}{144}$

$$Y(7)=\frac{1}{840}$$

.
.
.

Taylor katsayılarını yerine yazdığımızda

$$y(x) \;=\; 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{30}x^5-\frac{1}{144}x^6+\frac{1}{840}x^7+O(h^8)$$

olarak seri çözüm elde etmiştik.

Burada hata terimi $\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ olup $n=8$ ve $x_0=0$ alınırsa hata terimi $\frac{f^8(0)}{8!}(x)^8$ olur. $-1<x<1$ aralığında Eş.5.4 denkleminde mutlak hata aşağıdaki tabloda verilmiştir. Burada gerçek çözüm bellidir.

Çizelge 5.1. Eş.5.4 Lineer olmayan sınır değer probleminin DT metoduyla elde edilen yaklaşık çözümleri ile hata

x_i	**DTM ile çözüm**	**Hata**
−1.0	0.00019841274	-0.00238095219
−0.9	0.24604453640	-0.00113880210
−0.8	0.44514056120	-0.00049932200
−0.7	0.60413678570	-0.00019608180
−0.6	0.72885067430	-0.00006665170
−0.5	0.82436135910	-0.00001860160
−0.4	0.89509493850	-0.00000390050
−0.3	0.94490117710	-0.00000052040
−0.2	0.97712220700	-0.00000003020
−0.1	0.99465382640	-0.00000000010
0.0	1.00000000000	0.00000000000
0.1	0.99532115980	0.00000000020
0.2	0.98247690420	0.00000003040
0.3	0.96306369790	0.00000052080
0.4	0.93844817270	0.00000390100
0.5	0.90979662710	0.00001860120
0.6	0.87810132570	0.00006665140
0.7	0.84420420050	0.00019608160
0.8	0.80881855000	0.00049932200
0.9	0.77254933860	0.00113880220
1.0	0.73591269840	0.00238095240

KAYNAKLAR

1. Keller, H.B., “Numerical Methods For Two-Point Boundary-Value Problems”, ***Dover Publications, Inc***, New York, 1-3,191-209 (1992).

2. Gümüş, G, “ Bazı özel tipte başlangıç değer ve sınır değer problemlerinin maple ve nümerik yöntemler yardımıyla sayısal çözümleri”, Yüksek Lisans Tezi, ***Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Ankara, 5-8 (2008).

3. Burden, R.L., Faires J.D., “Boundary-value problems for ordinary differential equations”, Numerical Analysis 7^{th} ed., ***Brooks Cole***, USA, 645-660 (2001).

4. Ertürk, V.S, “ Differential transform method for solving a class of singular two-point boundary value problems”, ***SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi***, 4-7 (2006).

5. Y. Nejatbakhsh, T. Allahviranloo, N.A. Kiani “Solving fuzzy integral equations by differantial transform method”, ***Department of Applied Mathematics***, Tehran, 29-31 (2007).

6. Mirasyedioğlu,Ş., “ A new symbolic computational approach to singular initial value problems in the second-order ordinary differential equations”, ***Department of Mathematics Gazi University***,Kırşehir, 1219-1221, 1224 (2005)

7. Bradie, B., “A Friendly Introduction to Numerical Analysis”, ***Pearso Education, Inc***, New Jersey, 714-715 (2006).

8. Tsatsos, M., “ the Van der Pol equation” ***Aristotle University of Thessaloniki School of Science, Department of Physics, Section of Astrophysics Astonomy and Mechanics***, Thessaloniki, 8-10,33 (2006).

9. Zhou, JK., “Differential Transformation and its Applications for Electrical for Circuits”, ***Huazhong Un. Press***, Wuhan, China, 12-64,674-721 (1986).

EKLER

EK-1 Farklı parametre değerleri için Van der Pol denkleminin program yardımıyla çözümü

Durum 1 : $\mu = 0$ için Van Der Pol denklemi;

$$y'' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 0$$

Başlangıç değer probleminin diferensiyel dönüşüm metodu ile yaklaşık çözümü aşağıdaki gibi program yardımı ile elde edilmektedir:

```
> for k from 0 while k<6 do
Y(0):=2;
Y(1):=0;
k:=k;
Y(k+2):=-(Y(k))/((k+1)*(k+2));
end do;
```

$$Y(0) := 2$$
$$Y(1) := 0$$
$$k := 0$$
$$Y(2) := -1$$
$$k := 1$$
$$Y(3) := 0$$
$$k := 2$$
$$Y(4) := \frac{1}{12}$$
$$k := 3$$
$$Y(5) := 0$$
$$k := 4$$
$$Y(6) := \frac{-1}{360}$$

EK-1 (Devam) Farklı parametre değerleri için Van der Pol denkleminin program yardımıyla çözümü

$$k := 5$$

$$\mathrm{Y}(7) := 0$$

```
> topla:=proc(a,s,d,f,g,h,i,j)
a+s+d+f+g+h+i+j;
end proc;
```

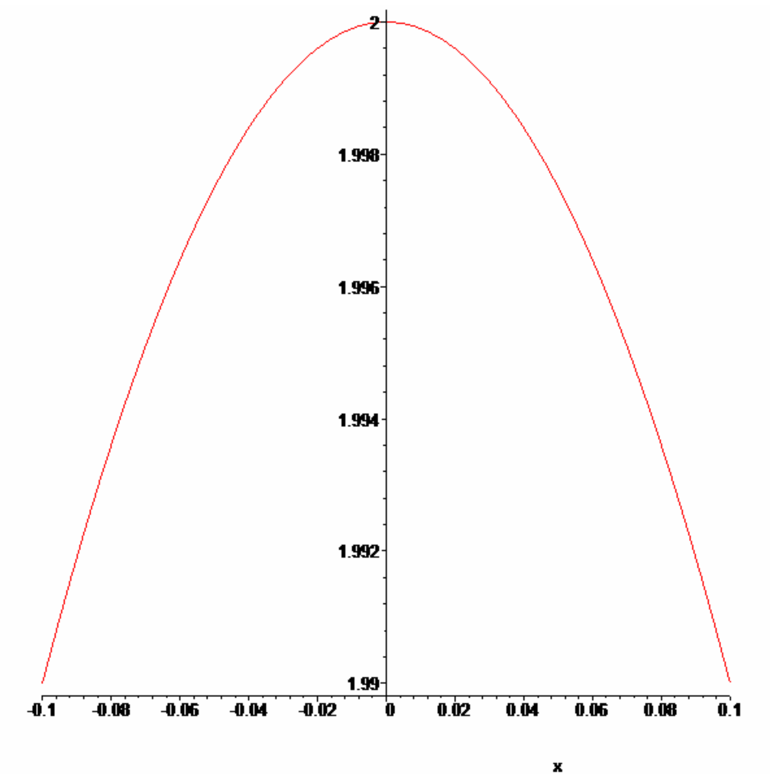
$$topla := \mathbf{proc}\,(a, s, d, f, g, h, i, j)\; a+s+d+f+g+h+i+j \;\mathbf{end\ proc}$$

```
> y:=topla(Y(0)*x^0,Y(1)*x^1,Y(2)*x^2,Y(3)*x^3,Y(4)*x^4,Y(5)*x^5,Y(6)*x^6,
Y(7)*x^7,Y(8)*x^8);
```

$$y := 2 - x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{360}x^6$$

```
> plot(y,x=-0.1..0.1);
```

EK-1 (Devam) Farklı parametre değerleri için Van der Pol denkleminin program yardımıyla çözümü



Şekil 4.1. Eş.4.3 ile verilen Van der Pol denkleminin grafiği

Durum 2 : $\mu = 1$ için Van Der Pol denklemi;

$$y'' - (1 - y')y + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

Başlangıç değer probleminin diferensiyel dönüşüm metodu ile yaklaşık çözümü aşağıdaki gibi program yardımı ile elde edilmektedir:

```
> for k from 0 while k<8 do
Y(0):=1;
Y(1):=0;
k:=k;
```

EK-1 (Devam) Farklı parametre değerleri için Van der Pol denkleminin program yardımıyla çözümü

```
Y(k+2):=-sum(Y(r)*Y(k-r+1)*(k-r+1),r=0..k)/((k+1)*(k+2));
end do;
```

$$\mathrm{Y}(0) := 1$$
$$\mathrm{Y}(1) := 0$$
$$k := 0$$
$$\mathrm{Y}(2) := 0$$
$$k := 1$$
$$\mathrm{Y}(3) := 0$$
$$k := 2$$
$$\mathrm{Y}(4) := 0$$
$$k := 3$$
$$\mathrm{Y}(5) := 0$$
$$k := 4$$
$$\mathrm{Y}(6) := 0$$
$$k := 5$$
$$\mathrm{Y}(7) := 0$$
$$k := 6$$
$$\mathrm{Y}(8) := 0$$
$$k := 7$$
$$\mathrm{Y}(9) := 0$$

```
> topla:=proc(a,s,d,f,g,h,i,j)
a+s+d+f+g+h+i+j;
end proc;
```

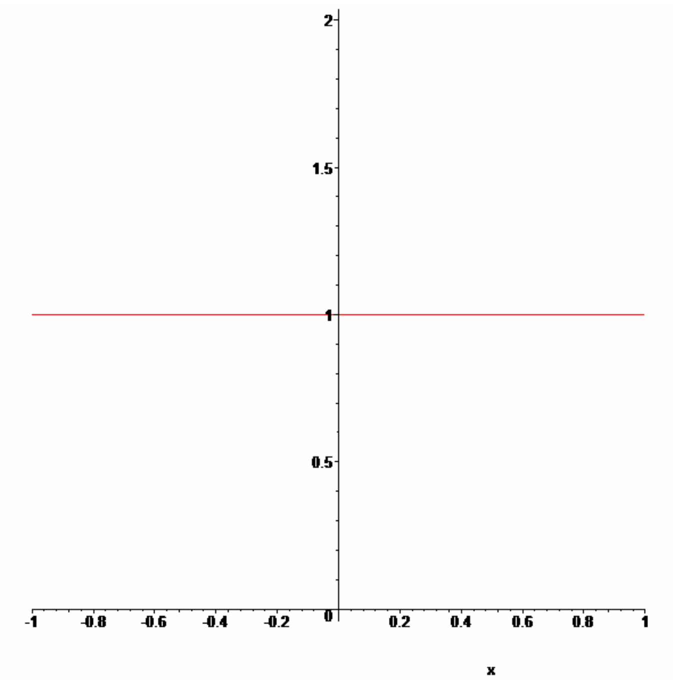
$$topla := \mathbf{proc}\,(a, s, d, f, g, h, i, j)\; a + s + d + f + g + h + i + j \;\mathbf{end\ proc}$$

EK-1 (Devam) Farklı parametre değerleri için Van der Pol denkleminin program yardımıyla çözümü

```
>y:=topla(Y(0)*x^0,Y(1)*x^1,Y(2)*x^2,Y(3)*x^3,Y(4)*x^4,Y(5)*x^5,Y(6)*x^6,Y(7)*x^7,Y(8)*x^8);
```

$$y := 1$$

```
> plot(y,x=-1..1);
```



Şekil 4.2. Eş.4.10 ile verilen Van der Pol denkleminin grafiği

Durum 3 : $\mu = 3$ için Van Der Pol denklemi;

$$y'' - 3(1 - y')y + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

Başlangıç değer probleminin diferensiyel dönüşüm metodu ile yaklaşık çözümü aşağıdaki gibi program yardımı ile elde edilmektedir:

EK-1 (Devam) Farklı parametre değerleri için Van der Pol denkleminin program yardımıyla çözümü

```
> for k from 0 while k<5 do
Y(0):=1;
Y(1):=0;
k:=k;
Y(k+2):=(2*Y(k)-sum(Y(r)*Y(k-r+1)*(k-r+1),r=0..k))/((k+1)*(k+2));
end do;
```

$$Y(0) := 1$$
$$Y(1) := 0$$
$$k := 0$$
$$Y(2) := 1$$
$$k := 1$$
$$Y(3) := \frac{-1}{3}$$
$$k := 2$$
$$Y(4) := \frac{1}{4}$$
$$k := 3$$
$$Y(5) := \frac{-11}{60}$$
$$k := 4$$
$$Y(6) := \frac{37}{360}$$

```
> topla:=proc(a,s,d,f,g,h,i,j)
a+s+d+f+g+h+i+j;
end proc;
```

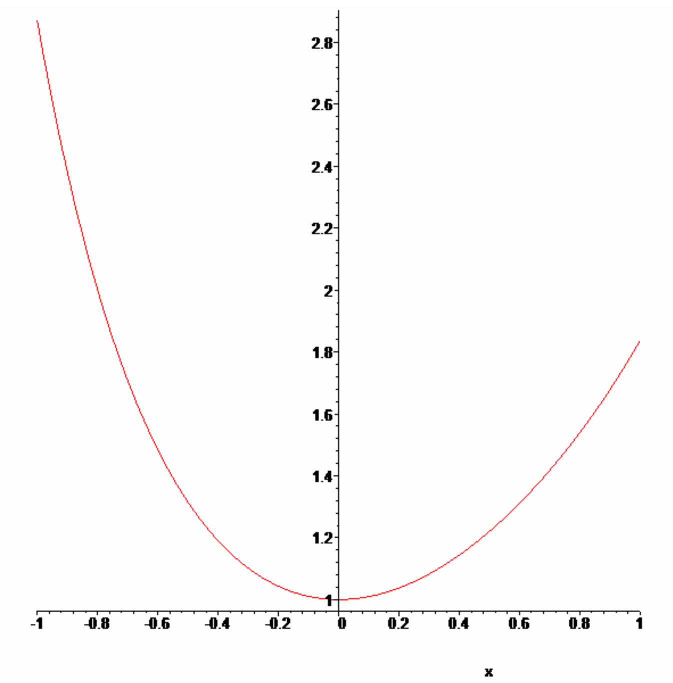
EK-1 (Devam) Farklı parametre değerleri için Van der Pol denkleminin program yardımıyla çözümü

$$topla := \mathbf{proc}\,(a, s, d, f, g, h, i, j)\ a + s + d + f + g + h + i + j\ \mathbf{end\ proc}$$

>y:=topla(Y(0)*x^0,Y(1)*x^1,Y(2)*x^2,Y(3)*x^3,Y(4)*x^4,Y(5)*x^5,Y(6)*x^6, Y(7)*x^7,Y(8)*x^8);

$$y := 1 + x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{11}{60}x^5 + \frac{37}{360}x^6$$

> plot(y,x=-1..1);



Şekil 4.3. Eş.4.17 ile verilen Van der Pol denkleminin grafiği

EK-1 (Devam) Farklı parametre değerleri için Van der Pol denkleminin program yardımıyla çözümü

Durum 4 :

$\mu = 5.6$ için Van Der Pol denklemi;

$$y'' - \frac{28}{5}(1 - y')y + y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

```
> for k from 0 while k<5 do
Y(0):=1;
Y(1):=0;
k:=k;
Y(k+2):=(23/5*Y(k)-28/5*sum(Y(r)*Y(k-r+1)*(k-r+1),r=0..k))/((k+1)*(k+2));
end do;
```

$$Y(0) := 1$$

$$Y(1) := 0$$

$$k := 0$$

$$Y(2) := \frac{23}{10}$$

$$k := 1$$

$$Y(3) := \frac{-322}{75}$$

$$k := 2$$

$$Y(4) := \frac{20677}{3000}$$

$$k := 3$$

EK-1 (Devam) Farklı parametre değerleri için Van der Pol denkleminin program yardımıyla çözümü

$$Y(5) := \frac{-72933}{6250}$$

$$k := 4$$

$$Y(6) := \frac{5291127}{250000}$$

```
> topla:=proc(a,s,d,f,g)
a+s+d+f+g;
end proc;
```

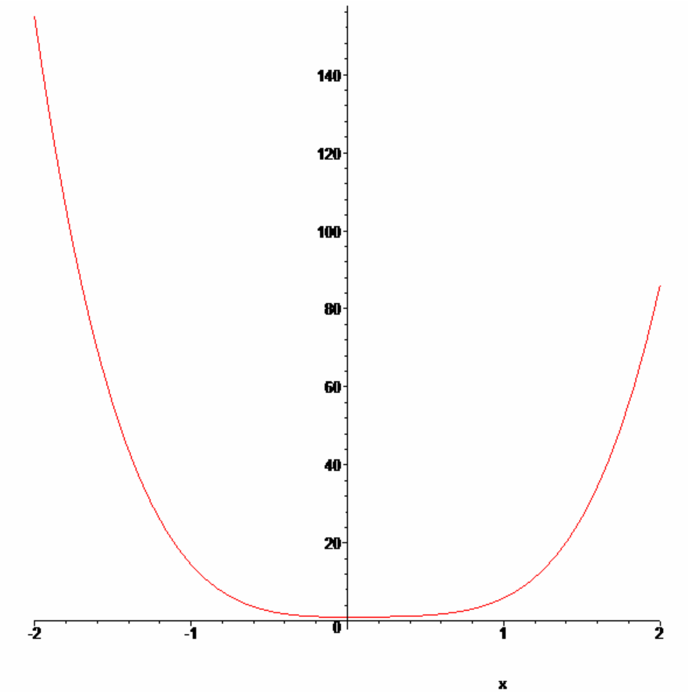
$$topla := \textbf{proc}\,(a, s, d, f, g)\; a + s + d + f + g\; \textbf{end proc}$$

```
>denklem:=topla(Y(0)*x^0,Y(1)*x^1,Y(2)*x^2,Y(3)*x^3,Y(4)*x^4,Y(5)*x^5,
Y(6)*x^6);
```

$$denklem := 1 + \frac{23}{10}x^2 - \frac{322}{75}x^3 + \frac{20677}{3000}x^4$$

```
> plot(denklem,x=-2..2);
```

EK-1 (Devam) Farklı parametre değerleri için Van der Pol denkleminin program yardımıyla çözümü



Şekil 4.4. Eş.4.25 ile verilen Van der Pol denkleminin grafiği

EK-2 Lineer Olmayan Denklemler İçin Diferensiyel Dönüşüm Metodu

Durum 3 :

$$y'' + ((y')^2 - 2y - x^2) = 0\,, \qquad y(-1) = 0 \qquad y'(-1) = 0 \tag{3.13}$$

```
> for k from 0 while k<5 do
Y(0):=a;
Y(1):=b;
k:=k;
delta(k-2):=eval(piecewise(k=2,1,k<>2,0));
Y(k+2):=(2*Y(k)+delta(k-2)-(sum((r+1)*(k-r+1)*Y(r+1)*Y(k-
r+1),r=0..k)))/((k+1)*(k+2));
end do;
```

$$\mathrm{Y}(0) := a$$

$$\mathrm{Y}(1) := b$$

$$k := 0$$

$$\delta(-2) := 0$$

$$\mathrm{Y}(2) := a - \frac{b^2}{2}$$

$$k := 1$$

$$\delta(-1) := 0$$

$$\mathrm{Y}(3) := \frac{b}{3} - \frac{2\,b\left(a - \frac{b^2}{2}\right)}{3}$$

$$k := 2$$

$$\delta(0) := 1$$

$$\mathrm{Y}(4) := \frac{a}{6} - \frac{b^2}{12} + \frac{1}{12} - \frac{b\left(\frac{b}{3} - \frac{2\,b\left(a - \frac{b^2}{2}\right)}{3}\right)}{2} - \frac{\left(a - \frac{b^2}{2}\right)^2}{3}$$

EK-2 (Devam) Lineer Olmayan Denklemler İçin Diferensiyel Dönüşüm Metodu

$$k := 3$$

$$\delta(1) := 0$$

$$Y(5) := \frac{b}{30} - \frac{b\left(a - \frac{b^2}{2}\right)}{15} - \frac{2\,b\left(\frac{a}{6} - \frac{b^2}{12} + \frac{1}{12} - \frac{b\left(\frac{b}{3} - \frac{2\,b\left(a - \frac{b^2}{2}\right)}{3}\right)}{2} - \frac{\left(a - \frac{b^2}{2}\right)^2}{3}\right)}{5} - \frac{3\left(a - \frac{b^2}{2}\right)\left(\frac{b}{3} - \frac{2\,b\left(a - \frac{b^2}{2}\right)}{3}\right)}{5}$$

$$k := 4$$

$$\delta(2) := 0$$

$$Y(6) := \frac{a}{90} - \frac{b^2}{180} + \frac{1}{180} - \frac{b\left(\frac{b}{3} - \frac{2\,b\left(a - \frac{b^2}{2}\right)}{3}\right)}{30} - \frac{\left(a - \frac{b^2}{2}\right)^2}{45} - b\left(\frac{b}{30} - \frac{b\left(a - \frac{b^2}{2}\right)}{15} - \frac{2\,b\left(\frac{a}{6} - \frac{b^2}{12} + \frac{1}{12} - \frac{b\left(\frac{b}{3} - \frac{2\,b\left(a - \frac{b^2}{2}\right)}{3}\right)}{2} - \frac{\left(a - \frac{b^2}{2}\right)^2}{3}\right)}{5} - \frac{3\left(a - \frac{b^2}{2}\right)\left(\frac{b}{3} - \frac{2\,b\left(a - \frac{b^2}{2}\right)}{3}\right)}{5}\right)/3$$

$$- \frac{8\left(a - \frac{b^2}{2}\right)\left(\frac{a}{6} - \frac{b^2}{12} + \frac{1}{12} - \frac{b\left(\frac{b}{3} - \frac{2\,b\left(a - \frac{b^2}{2}\right)}{3}\right)}{2} - \frac{\left(a - \frac{b^2}{2}\right)^2}{3}\right)}{15}$$

EK-2 (Devam) Lineer Olmayan Denklemler İçin Diferensiyel Dönüşüm Metodu

$$-\frac{3\left(\frac{b}{3}-\frac{2\,b\left(a-\frac{b^2}{2}\right)}{3}\right)^2}{10}$$

> topla:=proc(a,s,d,f,g)
a+s+d+f+g;
end proc;

$$topla := \textbf{proc}\,(a, s, d, f, g)\; a+s+d+f+g\; \textbf{end proc}$$

>y:=topla(Y(0)*x^0,Y(1)*x^1,Y(2)*x^2,Y(3)*x^3,Y(4)*x^4,Y(5)*x^5,Y(6)*x^6);

$$y := a + b\,x + \left(a-\frac{b^2}{2}\right)x^2 + \left(\frac{b}{3}-\frac{2\,b\left(a-\frac{b^2}{2}\right)}{3}\right)x^3 + \left(\frac{a}{6}-\frac{b^2}{12}+\frac{1}{12}-\frac{b\left(\frac{b}{3}-\frac{2\,b\left(a-\frac{b^2}{2}\right)}{3}\right)}{2}-\frac{\left(a-\frac{b^2}{2}\right)^2}{3}\right)x^4$$

> denklem1:=subs(x=-1,y);

$$denklem1 := \frac{13\,a}{6}-\frac{4\,b}{3}-\frac{7\,b^2}{12}+\frac{2\,b\left(a-\frac{b^2}{2}\right)}{3}+\frac{1}{12}-\frac{b\left(\frac{b}{3}-\frac{2\,b\left(a-\frac{b^2}{2}\right)}{3}\right)}{2}-\frac{\left(a-\frac{b^2}{2}\right)^2}{3}$$

EK-2 (Devam) Lineer Olmayan Denklemler İçin Diferensiyel Dönüşüm Metodu

> denklem2:=subs(x=1,y);

$$denklem2 := \frac{13\,a}{6} + \frac{4\,b}{3} - \frac{7\,b^2}{12} - \frac{2\,b\left(a - \frac{b^2}{2}\right)}{3} + \frac{1}{12} - \frac{b\left(\frac{b}{3} - \frac{2\,b\left(a - \frac{b^2}{2}\right)}{3}\right)}{2} - \frac{\left(a - \frac{b^2}{2}\right)^2}{3}$$

> fsolve({13/6*a-4/3*b-7/12*b^2+2/3*b*(a-1/2*b^2)+1/12-1/2*b*(1/3*b-2/3*b*(a-1/2*b^2))-1/3*(a-1/2*b^2)^2=0,13/6*a+4/3*b-7/12*b^2-2/3*b*(a-1/2*b^2)+1/12-1/2*b*(1/3*b-2/3*b*(a-1/2*b^2))-1/3*(a-1/2*b^2)^2=0},{a,b});

$$\{a = -0.03823660948\,,\ b = 0.\}$$

> denklem3:=subs(a=-.3823660948e-1,b =0.,y);

$$denklem3 := -0.03823660948 - 0.03823660948\ x^2 + 0.07647321898\ x^4$$

> subs(x=0.1,denklem3);
subs(x=0.2,denklem3);
subs(x=0.3,denklem3);
subs(x=0.4,denklem3);
subs(x=0.5,denklem3);
subs(x=0.6,denklem3);
subs(x=0.7,denklem3);
subs(x=0.8,denklem3);
subs(x=0.9,denklem3);
subs(x=1.0,denklem3);

EK-2 (Devam) Lineer Olmayan Denklemler İçin Diferensiyel Dönüşüm Metodu

```
subs(x=-0.1,denklem3);
subs(x=-0.2,denklem3);
subs(x=-0.3,denklem3);
subs(x=-0.4,denklem3);
subs(x=-0.5,denklem3);
subs(x=-0.6,denklem3);
subs(x=-0.7,denklem3);
subs(x=-0.8,denklem3);
subs(x=-0.9,denklem3);
subs(x=-1.0,denklem3);
```

-0.03861132825

-0.03964371671

-0.04105847126

-0.04239675259

-0.04301618566

-0.04209085971

-0.03861132825

-0.03138460906

-0.01903418419

$0.2\ 10^{-10}$

-0.03861132825

-0.03964371671

-0.04105847126

-0.04239675259

-0.04301618566

-0.04209085971

-0.03861132825

EK-2 (Devam) Lineer Olmayan Denklemler İçin Diferensiyel Dönüşüm Metodu

-0.03138460906

-0.01903418419

$0.2\ 10^{-10}$

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: GÜRKAN, Yaprak
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 16.10.1980 Mazgirt
Medeni hali	: Bekar
e-mail	:yaprakgurkan@hotmail.com.

Eğitim Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Ankara Üniversitesi Matematik Bölümü	2003
Lise	Elazığ Lisesi Matematik/Fen Bölümü	1994

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2003–2010	Türk Telekom A.Ş.	Programcı

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Bilgisayar teknolojileri, Kitap, Müzik, Sinema