SAÇILMA VE POTANSİYEL TEORİ

Selcan TURAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NİSAN 2010
ANKARA

Selcan TURAN tarafından hazırlanan Saçılma ve Potansiyel Teori adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Ogün DOĞRU
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Tarih : 13.04.2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Selcan TURAN

SAÇILMA VE POTANSİYEL TEORİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Selcan TURAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Nisan 2010

ÖZET

Bu tez çalışmasında IR^3'te Laplace denklemi için Dirichlet ve Neumann problemleri, Fredholm integral denklemleri olarak formüle edilmiştir. Helmholtz denklemi için tek katlı ve çift katlı Helmholtz potansiyelleri incelenmiştir. Homogen olmayan bir ortamda zaman harmonik dalga yayılması probleminin çözümü verilmiştir.

Bilim Kodu	:	**204.1.138**
Anahtar Kelimeler	:	**Saçılma teorisi, tek ve çift katlı potansiyeller, Fredholm integral denklemleri**
Sayfa Adedi	:	**86**
Tez Yöneticisi	:	**Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR**

SCATTERİNG AND POTENTIAL THEORY
(M.Sc.Thesis)

Selcan TURAN

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
April 2010

ABSTRACT

In this thesis, the Dirichlet and Neumann problems for the Laplace Equation are formulated as the Fredholm integral equations in IR^3. Single layer and double layer potentials for the Helmholtz equation are investigated. The solution of the problem for the time harmonic wave propagation is given in a nonhomogeneus medium.

Science Code	**:**	**204.1.138**
Key Words	**:**	**Scattering theory, single and double layer potentials, Fredholm integral equations**
Page Number	**:**	**86**
Advisor	**:**	**Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR'a ve tez çalışmam sırasında desteklerini benden esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
∂D	D bölgesinin sınırı
$\overline{D}$	D bölgesinin kapanışı
IR^n	n boyutlu Euclid uzayı
C(D)	D de tanımlı reel veya kompleks değerli sürekli fonksiyonların normlu uzayı
$C^k(D)$	D de tanımlı k-inci mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli olan reel veya kompleks değerli fonksiyonların normlu uzayı
Δ	Laplace operatörü
∇	Gradient
$L^2(\partial\Omega)$	$\partial\Omega$ da karesi integrallenebilir fonksiyonların normlu uzayı
o	Landau sembolü

1. GİRİŞ

Bu çalışmada IR^3 teki tek katlı ve çift katlı potansiyellerin tanımları verilerek, Laplace Denklemi için Dirichlet ve Neumann Problemleri Fredholm integral denklemleri olarak ifade edilmiştir. Ayrıca tek katlı ve çift katlı Helmholtz potansiyelleri incelenerek, temel bağıntılar kurulmuştur. Son bölümde direkt ve ters saçılma problemleri tanımlanarak, homogen olmayan bir ortamda zaman harmonik dalga yayılması probleminin çözümü incelenmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışmamızda kullanacağımız bazı tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.1. Sürekli Fonksiyonlar

2.1. Tanım

f fonksiyonu $A \subset IR^n$ kümesinde tanımlansın. Kabul edelim ki f ve f nin k. mertebeye kadar olan tüm kısmi türevleri, $B \subset A$ kümesinde sürekli olsun. O zaman f fonksiyonuna, B kümesinde C^k sınıfındadır denir.

B de C^k sınıfından olan fonksiyonlar ailesi $C^k(B)$ ile gösterilerilir. B de sürekli olan fonksiyonlar ailesi C(B) ile gösterilir.

2.2. Harmonik Fonksiyonlar

2.2. Tanım

$D \subset IR^n$ bir bölge olsun. Bir $u \in C^2(D)$ fonksiyonu, D de

$$\Delta u(x) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

Laplace denklemini sağlasın. O zaman u ya, D de harmoniktir denir.

$n \geq 3$ için Laplace denkleminin temel çözümü, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ve $y = (y_1, \ldots, y_n)$, IR^n de herhangi iki nokta olmak üzere, $x \neq y$ için

$$u(x,y) = \frac{1}{\left[(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2\right]^{(n-2)/2}} = \frac{1}{|x-y|^{n-2}}$$

olur.

Özel olarak $n = 3$ için Laplace denkleminin temel çözümü, $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$, IR^3 te herhangi iki nokta olmak üzere, $x \neq y$ için

$$u(x,y)=\frac{1}{|x-y|}$$

olur.

2.1. Teorem (Kuvvetli Maksimum Prensibi)

$D \subset IR^n$ sınırlı bir bölge ve $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, D de harmonik olsun ve bir sabite eşit olmasın. O zaman u(x), maksimum ve minimum değerine D nin ∂D sınırında ulaşır [1].

2.3. Green Özdeşlikleri, Laplace Denklemleriyle Birlikte Tanımlanan Sınır Değer Problemleri

2.2. Teorem

$D \subset IR^3$ sınırlı bölgesi aşağıdaki şartları sağlasın.

a) D nin ∂D sınırı, sonlu sayıda düzgün yüzeyden oluşsun.

b) Koordinat eksenlerine paralel doğrular ∂D yüzeyini ya sonlu sayıda noktada kessin ya da ∂D ile ortak noktaları bir aralık oluştursun.

∂D yüzeyi üzerinde, D nin dışına yönlendirilmiş birim normal vektör
$n = (n_x, n_y, n_z)$ olsun.

Kabul edelim ki $u,w \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ olsunlar.

Birinci Green Özdeşliği olarak bilinen

$$\int_D u\nabla^2 w d\nu = \int_{\partial D} u\frac{\partial w}{\partial n}d\sigma - \int_D (\nabla u)(\nabla w)d\nu$$

bağıntısı sağlanır.

İkinci Green Özdeşliği olarak bilinen

$$\int_D (u\nabla^2 w - w\nabla^2 u)d\nu = \int_{\partial D} \left(u\frac{\partial w}{\partial n} - w\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma$$

bağıntısı sağlanır (Burada $d\nu$, D nin hacim elementi, $d\sigma$ ∂D nin yüzey alan elementidir.) [1].

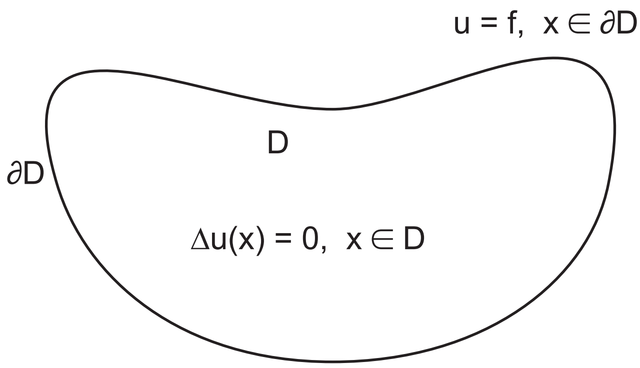
2.3. Tanım

$D \subset IR^n$ sınırlı bir bölge olsun ve D nin ∂D sınırı, düzgün olsun. $f \in C(\partial D)$ verilmiş bir fonksiyon olsun.

$$\Delta u(x) = 0 \quad , \quad x \in D \text{ ise} \tag{2.1}$$

$$u(x) = f(x) \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise} \tag{2.2}$$

denklemlerini sağlayan $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ fonksiyonunun aranması problemine Dirichlet problemi denir. Eğer D, bir sınırlı bölgenin dışı ise bu probleme dış Dirichlet problemi denir [1].



Şekil 2.1. Dirichlet problemi

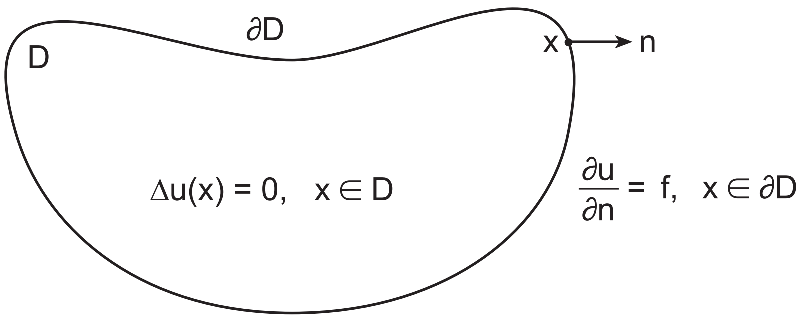
2.4. Tanım

$D \subset IR^n$ sınırlı bir bölge olsun ve ∂D sınırı düzgün olsun. ∂D sınırı üzerinde, $x \in \partial D$ noktasında ∂D nin birim dış normalini $n = n(x)$ ile gösterelim. $f \in C(\partial D)$ verilmiş bir fonksiyon olsun.

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D \text{ ise} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = f(x), \quad x \in \partial D \text{ ise} \tag{2.4}$$

denklemlerini sağlayan $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ fonksiyonunun aranması problemine Neumann problemi denir. Eğer D, bir sınırlı bölgenin dışı ise bu probleme dış Neumann problemi denir [1].



Şekil 2.2. Neumann problemi

2.3. Teorem

Eş.2.1 ve Eş.2.2 denklemleri ile tanımlanan Dirichlet probleminin en çok bir çözümü vardır [1].

İspat

Problemin herhangi iki çözümünün özdeş olduğunu göstermeliyiz. Problemin herhangi iki çözümü u_1 ve u_2 olsun. $\overline{u} = u_1 - u_2$ diyelim. O zaman $\overline{u}$, $\overline{D}$ de sürekli, D de harmonik ve ∂D sınırı üzerinde sıfır olur;

yani $\overline{u}$

$\Delta \overline{u}(x) = 0$, $x \in D$ ise

$\overline{u}(x) = 0$, $x \in \partial D$ ise

denklemlerini sağlar. Maksimum prensibinden $\overline{u}$, maksimum minimum değerlerine ∂D sınırı üzerinde ulaşır. Böylece $x \in \overline{D}$ için $\overline{u} \equiv 0$ olur ve buradan $x \in \overline{D}$ için $u_1 \equiv u_2$ elde edilir.

2.4. Teorem

Eş.2.3 ve Eş.2.4 denklemleri ile tanımlanan Neumann probleminin mevcut olan herhangi iki çözümü, birbirinden sadece bir sabit kadar farklıdır [1].

İspat

u_1 ve u_2 fonksiyonları Neumann probleminin herhangi iki çözümü olsun. $\overline{u} = u_1 - u_2$ fonksiyonu

$$\Delta\overline{u}(x) = 0\,, \quad x \in D \text{ ise}$$

$$\frac{\partial\overline{u}(x)}{\partial n} = 0 \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise}$$

denklemlerini sağlar. Birinci Green özdeşliğinden,

$$\int_D \overline{u}\nabla^2\overline{u}dv = \int_{\partial D} \overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial n}d\sigma - \int_D (\nabla\overline{u}).(\nabla\overline{u})dv$$

$$\int_D \overline{u}\nabla^2\overline{u}dv + \int_D |\nabla\overline{u}|^2 dv = \int_{\partial D} \overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial n}d\sigma$$

$$\int_D |\nabla\overline{u}|^2 dv = 0$$

elde edilir. Böylece $\nabla\overline{u} = 0$ ve $\overline{u}$, D de sabittir.

2.5. Teorem

Eş.2.3 ve Eş.2.4 denklemleri ile tanımlanan Neumann probleminin bir çözümünün mevcut olması için,

$$\int_{\partial D} f(x)d\sigma = 0$$

sağlanmalıdır [1].

İspat

u fonksiyonu Neumann probleminin bir çözümü olsun. Divergens teoremi uygulanarak,

$$0 = \int_D \nabla^2 u d\nu = \int_D \nabla.\nabla u d\nu = \int_{\partial D} \nabla u.n d\sigma = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int_{\partial D} f(x) d\sigma$$

elde edilir.

2.4. Fredholm Alternatifi

2.6. Teorem (Fredholm Alternatifi)

$\Phi - K\Phi = 0$

ve

$\Psi - K^*\Psi = 0$

operatör denklemlerin her ikisi de, ya yalnız $\Phi = \Psi = 0$ özdeş sıfır çözümüne sahiptir ya da, her iki denklem de aynı $m \in N$ sayıda lineer bağımsız Φ_1, Φ_2, …, Φ_m ve Ψ_1, Ψ_2, …, Ψ_m çözümlerine sahiptir. İlk durumda, yani $\Phi - K\Phi = 0$ ve $\Psi - K^*\Psi = 0$ denklemlerinin her ikisi de yalnız $\Phi = \Psi = 0$ çözümüne sahip ise,

$\Phi - K\Phi = f$

ve

$\Psi - K^*\Phi = g$

denklemleri verilmiş her bir $f \in L^2$ ve $g \in L^2$ fonksiyonları için bir tek $\Phi \in L^2$ ve $\Psi \in L^2$ çözümüne sahiptir. İkinci durumda, yani, $\Phi - K\Phi = 0$ ve $\Psi - K^*\Psi = 0$ denklemleri aynı $m \in N$ sayıda lineer bağımsız Φ_1, Φ_2, …, Φ_m ve Ψ_1, Ψ_2, …,

Ψ_m çözümlerine sahip ise $\Phi - K\Phi = f$ denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul, $(f, \Psi_n) = 0$, $(n = 1, 2, \ldots, m)$ olmasıdır yani, f nin $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_m$ ye ortogonal olmasıdır. Aynı şekilde $\Psi - K^*\Psi = g$ denkleminin de bir çözümünün olması için gerek ve yeter koşul, $(g, \Phi_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots, m)$ olmasıdır [1].

2.5. Zayıf Singüler Çekirdekli İntegral Operatörler

2.5. Tanım

Ω, m-boyutlu Euclid uzayında sınırlı, ölçülebilir bir küme olsun. x ve y, Ω da herhangi iki nokta ve $r = |x - y|$ olsun. A(x, y), $\Omega \times \Omega$ da sınırlı ölçülebilir bir fonksiyon olsun:

$$|A(x, y)| \le c, \quad c = \text{sabit}$$

$$K(x, y) = \frac{A(x, y)}{r^{\alpha}}, \quad 0 \le \alpha < m, \quad \alpha = \text{sabit}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonuna zayıf singüler çekirdek denir.

$$(Ku)(x) = \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy = \int_{D} \frac{A(x, y)}{r^{\alpha}} u(y)dy$$

ile tanımlanan K operatörüne zayıf singüler çekirdekli integral operatör denir [2].

2.7. Teorem

Zayıf singüler çekirdekli integral operatör C(G) de kompaktır [2].

3. POTANSİYEL TEORİ

Bu bölümde, IR^3 te çift katlı ve tek katlı potansiyel kavramlarını vereceğiz. Bu potansiyellerin süreklilik özelliklerinden faydalanarak, IR^3 te Laplace denklemi için verilen Dirichlet ve Neumann problemlerini Fredholm integral denklemlerine indirgeyeceğiz. Bunu yaparken Dirichlet probleminin çözümünü çift katlı potansiyel, Neumann probleminin çözümünü ise tek katlı potansiyel biçiminde arayacağız.

Çalışmalarımızda, Gauss formülüne ihtiyacımız olduğundan, IR^3 te Gauss formülünü verelim.

3.1. Teorem (Gauss Formülü)

$D \subset IR^3$ sınırlı, basit bağıntılı bir bölge olsun. D nin sınırı ∂D, C^2 sınıfından yani ∂D sürekli eğriliğe sahip olsun.

ν, ∂D sınırının birim dış normali, ds(y) yüzey alan elementi olmak üzere,

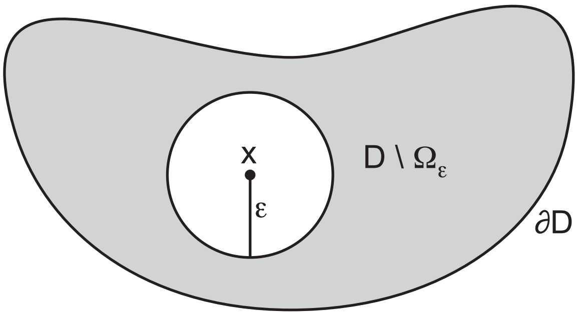
Gauss formülü;

$$\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) = \begin{cases} -4\pi \ , & x \in D \text{ ise} \\ -2\pi \ , & x \in \partial D \text{ ise} \\ 0 \ , & x \in IR^3 \setminus \overline{D} \text{ ise} \end{cases} \tag{3.1}$$

sağlanır.

İspat

1) $x \in D$ olsun. $\varepsilon > 0$ yeteri kadar küçük olsun ve $\Omega_\varepsilon = \{y : |y - x| \le \varepsilon\}$ yuvarı D nin içinde yatsın. $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesinde ikinci Green özdeşliğini yazalım. dy hacim elementi olmak üzere,



Şekil 3.1. $x \in D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi

$$\int\limits_{D\setminus\Omega_\varepsilon}\left[1.\nabla^2\frac{1}{|x-y|}-\frac{1}{|x-y|}\nabla^2(1)\right]dy$$
$$=\int\limits_{\partial D}\left[1\cdot\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}-\frac{1}{|x-y|}\cdot\frac{\partial}{\partial\nu(y)}1\right]ds(y)$$
$$+\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}\left[1\cdot\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}-\frac{1}{|x-y|}\cdot\frac{\partial}{\partial\nu(y)}1\right]ds(y)$$
$$=\int\limits_{\partial D}\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y)+\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y)$$
$$0=\int\limits_{\partial D}\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y)-\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{d}{d\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\right)\varepsilon^2\sin\Phi\, d\Phi\, d\theta$$
$$0=\int\limits_{\partial D}\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y)-\left(-\varepsilon^{-2}\right)\cdot\varepsilon^2\cdot 4\pi$$

yazarız. $\partial\Omega_\varepsilon$ üzerinde, $\dfrac{\partial}{\partial\nu}=-\dfrac{d}{d\varepsilon}$ olur.

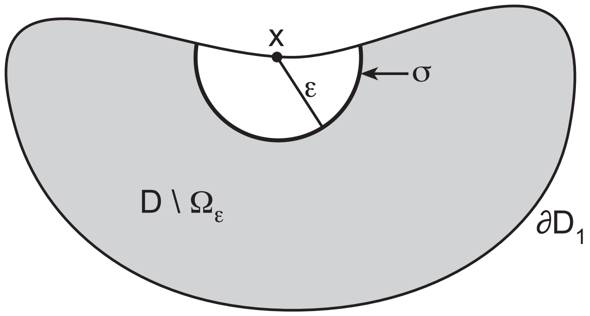
Böylece $\varepsilon\to 0$ sıfıra gittiğinde,

$$\int\limits_{\partial D}\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y)=-4\pi \qquad (3.2)$$

elde edilir.

2) $x\in\partial D$ olsun. $\sigma = D\cap\partial\Omega_\varepsilon = D\cap\{y:|y-x|=\varepsilon\}$ olsun.

$\partial D_1 = \partial D \setminus (\partial D \cap \{y : |y - x| \le \varepsilon\})$ olsun.



Şekil 3.2. $x \in \partial D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi

$D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesinde ikinci Green özdeşliğini yazalım.

$$\int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \left[1.\nabla^2 \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|} \nabla^2(1) \right] dy$$

$$= \int_{\partial D_1} \left[1 \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu(y)} 1 \right] ds(y)$$

$$+ \int_{\sigma} \left[1 \cdot \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu(y)} 1 \right] ds(y)$$

$$= \int_{\partial D_1} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) + \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y)$$

$$0 = \int_{\partial D_1} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \right) \varepsilon^2 \sin \Phi d\Phi d\theta$$

$$0 = \int_{\partial D_1} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) - (-\varepsilon^{-2}) \cdot \varepsilon^2 \cdot 2\pi$$

$\varepsilon \to 0$ sıfıra gittiğinde,

$$\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) = -2\pi \qquad (3.3)$$

elde edilir.

3) $x \in IR^3 \setminus \overline{D}$ ise $\frac{1}{|x-y|}$ fonksiyonu D bölgesinde singüler değildir. D de ikinci Green özdeşliğini yazarsak,

$$\int_D \left[1.\nabla^2 \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|}\nabla^2(1)\right]dy$$
$$= \int_{\partial D}\left[1\cdot\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|}\cdot\frac{\partial}{\partial\nu(y)}1\right]ds(y)$$
$$\int_{\partial D}\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y) = 0 \tag{3.4}$$

elde edilir.

3.1. Tanım

$\Psi(y)$, $y \in \partial D$ için tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun. ∂D nin birim dış normali ν olsun.

$$W(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y),\ x \in IR^3 \setminus \partial D \tag{3.5}$$

ye, $\Psi(y)$ yoğunluklu iki katlı (double layer) potansiyel denir.

İki katlı potansiyel, $x \in IR^3 \setminus \partial D$ için Laplace denkleminin bir çözümüdür. Çözüm olduğu kolayca gösterilebilir.

$x = (x_1, x_2, x_3) \in IR^3 \setminus \partial D$ için,

$$\Delta_3 W(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)W(x)$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\frac{1}{|x-y|}ds(y)$$
$$= 0$$

sağlanır.

Çift katlı potansiyelin süreklilik özelliğinden faydalanarak iç Dirichlet ve dış Dirichlet problemini Fredholm integral denklemine indirgeyelim.

3.2. Teorem

$D \subset IR^3$ bölgesi sınırlı, basit bağlantılı ve ∂D sınırı C^2 sınıfından olsun.
$u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ ve $f \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta_3 u(x) = 0 & , & x \in D \text{ ise} \\ u(x) = f(x) & , & x \in \partial D \text{ ise} \end{array}\right\} \tag{3.6}$$

İç Dirichlet probleminin çözümünü, $\Psi \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$W(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y) \;, \quad x \in IR^3 \setminus \partial D$$

iki katlı potansiyel biçiminde arayalım.

O zaman iç Dirichlet probleminin çözümü,

$$\Psi(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y) = -2f(x) \;, \quad x \in \partial D$$

integral denkleminin çözümüne indirgenir.

İspat

$x \in IR^3 \setminus \partial D$ noktasının, $x_0 \in \partial D$ noktasına yaklaşması halinde iki katlı potansiyelin süreklilik özelliğinden bazı sonuçlar çıkaralım. $v \in C^2(\overline{D})$ olsun. Birinci Green özdeşliğini ve Eş.3.1 Gauss formülünü kullanalım.

$$\int_D \left(v\nabla^2 u + \nabla v \cdot \nabla u\right)dy = \int_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \nu}ds(y) \tag{3.7}$$

Birinci Green özdeşliğini $v \in C^2(\overline{D})$ ve $u = \dfrac{1}{|x-y|}$ fonksiyonları için yazalım.

$\Omega_\varepsilon = \{y : |y-x| \le \varepsilon\} \subset D$ olsun. O zaman Eş.3.7 yi $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesine yazarsak,

$$\int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \left[v(y)\nabla_y^2 \frac{1}{|x-y|} + \nabla v(y).\nabla_y \frac{1}{|x-y|} \right] dy$$

$$= \int_{\partial D} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) + \int_{\partial \Omega_\varepsilon} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) \tag{3.8}$$

olur.

1) $x \in D$ olsun. O zaman integraller için ortalama değer teoremini kullanarak,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial \Omega_\varepsilon} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y)$$

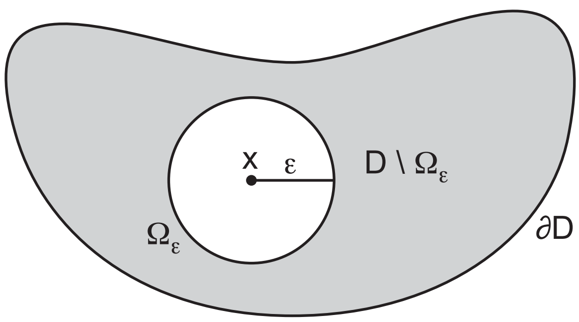
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} v(y) \left(-\frac{d}{d\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \right) \varepsilon^2 \cdot \sin\Phi d\Phi d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} -\left(-\varepsilon^{-2}\right) \cdot \varepsilon^2 \cdot 4\pi \cdot v\left(x_1 + \varepsilon\cos\theta^* . \sin\Phi^*, x_2 + \varepsilon\sin\theta^* . \sin\Phi^*, x_3 + \varepsilon\cos\Phi^*\right)$$

$$0 \le \theta^* \le 2\pi,\ 0 \le \Phi^* \le \pi$$

$$= 4\pi v(x) \tag{3.9}$$

elde edilir.

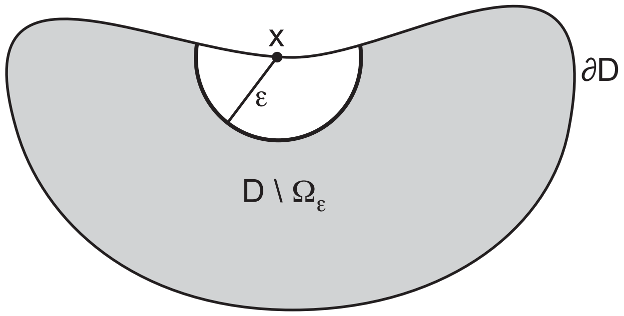


Şekil 3.3. $x \in D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi

2) $x \in \partial D$ olsun. O zaman,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial \Omega_\varepsilon} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) = 2\pi v(x) \tag{3.10}$$

elde edilir.



Şekil 3.4. $x \in \partial D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi

3) $x \in IR^3 \setminus \overline{D}$ olsun. O zaman $\frac{1}{|x-y|}$ fonksiyonu, $y \in D$ için tanımlıdır. Dolayısıyla,

$$\int_D \left[v(y) \nabla_y^2 \frac{1}{|x-y|} + \nabla v(y) \cdot \nabla_y \frac{1}{|x-y|} \right] dy$$
$$= \int_{\partial D} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) \tag{3.11}$$

olur.

Böylece Eş.3.8 $\varepsilon \to 0$ için,

$$\int_D \left[v(y) \nabla_y^2 \frac{1}{|x-y|} + \nabla v(y) \cdot \nabla_y \frac{1}{|x-y|} \right] dy$$
$$= \int_{\partial D} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) - pv(x)$$

veya

$$\int_{D} \nabla v(y) \cdot \nabla_y \frac{1}{|x-y|} dy + pv(x) = \int_{\partial D} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) \qquad (3.12)$$

olur, bu formülde p sayı,

$$p = \begin{cases} -4\pi & , \quad x \in D \text{ ise} \\ -2\pi & , \quad x \in \partial D \text{ ise} \\ 0 & , \quad x \in IR^3 \setminus \overline{D} \text{ ise} \end{cases} \qquad (3.13)$$

dır.

Benzer olarak ikinci Green özdeşliğinden,

$$\int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \left[v(y) \nabla_y^2 \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|} \nabla^2 v(y) \right] dy$$
$$= \int_{\partial D} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y)$$
$$+ \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \qquad (3.14)$$

Eş.3.9, Eş.3.10 ve Eş.3.11 den,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial \Omega_\varepsilon} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) = \begin{cases} 4\pi v(x) & , \quad x \in D \text{ ise} \\ 2\pi v(x) & , \quad x \in \partial D \text{ ise} \\ 0 & , \quad x \in IR^3 \setminus \overline{D} \text{ ise} \end{cases} \qquad (3.15)$$

olduğunu biliyoruz.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left| \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) ds(y) \right|$$
$$\leq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \left| \frac{1}{x-y} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right| ds(y)$$

$$\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\max_{y\in\overline{D}}\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}(y)\right|\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{\varepsilon}\right|\varepsilon^2\sin\Phi d\Phi d\theta$$

$$\leq \lim_{\varepsilon\to 0}K\cdot\varepsilon^2\left|\frac{1}{\varepsilon}\right|\cdot 4\pi = 0 \qquad (3.16)$$

$$K = \max_{y\in\overline{D}}\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}(y)\right|$$

Böylece $\varepsilon \to 0$ sıfırı gittiğinde Eş.3.14,

$$-\int_D \frac{1}{|x-y|}\nabla^2 v(y)dy = \int_{\partial D}\left[v(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|}\frac{\partial v}{\partial \nu}(y)\right]ds(y) - pv(x)$$

veya

$$pv(x) = \int_D \frac{1}{|x-y|}\nabla^2 v(y)dy + \int_{\partial D}\left[v(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|}\frac{\partial v}{\partial \nu}(y)\right]ds(y) \qquad (3.17)$$

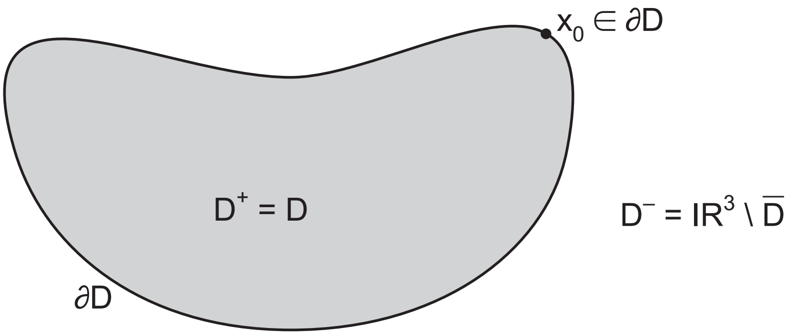
olur.

Şimdi Eş.3.5 ile tanımlanan iki katlı potansiyeli gözönüne alalım ve kabul edelim ki, $\Psi \in C^2(\partial D)$ olsun. O zaman Ψ fonksiyonu $\overline{D}$ da, C^2 sınıfındandır.

$D^+ = D \quad D^- = IR^3 \setminus \overline{D} \quad$ ve $\quad x_0 \in \partial D$ olsun.

$$W^+(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^+}} W(x) \quad , \quad W^-(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D^-}} W(x)$$

tanımlayalım.



Şekil 3.5. D^+ ve D^- bölgeleri

Eş.3.12 de v(x) = Ψ(x) koyalım ve iki katlı potansiyelin tanımını kullanalım.

$$\int_D \nabla\Psi(y)\nabla_y \frac{1}{|x-y|}dy + p\Psi(x) = \int_{\partial D} \Psi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y)$$
$$= 4\pi W(x) \tag{3.18}$$

olur.

Eş.3.18 de, D üzerindeki integral süreklidir. Şimdi Eş.3.18 de $x \in D^+$ olmak üzere $x \to x_0 \in \partial D$ ye limit hesaplarsak,

$$\int_D \nabla\Psi(y).\nabla_y \frac{1}{|x_0-y|}dy - 4\pi\Psi(x_0) = 4\pi W^+(x_0) \tag{3.19}$$

elde edilir. $x_0 \in \partial D$ için Eş.3.18,

$$\int_D \nabla\Psi(y).\nabla_y \frac{1}{|x_0-y|}dy - 2\pi\Psi(x_0) = 4\pi W(x_0),\ x_0 \in \partial D \tag{3.20}$$

olur. Eş.3.20 den Eş.3.19 u çıkarırsak,

$$2\pi\Psi(x_0) = 4\pi\left[W(x_0) - W^+(x_0)\right]$$

veya

$$\Psi(x_0) = 2\left[W(x_0) - W^{+}(x_0)\right] \tag{3.21}$$

elde edilir. Şimdi Eş.3.18 de, $x \in D^{-}$ olmak üzere $x \to x_0 \in \partial D$ ye limit hesaplayalım.

$$\int_D \nabla\Psi(y).\nabla_y \frac{1}{|x_0 - y|}dy - 0\cdot\Psi(x_0) = 4\pi W^{-}(x_0) \tag{3.22}$$

elde edilir. Eş.3.20 den Eş.3.22 yi çıkarırsak,

$$-2\pi\Psi(x_0) = 4\pi\left[W(x_0) - W^{-}(x_0)\right]$$

veya

$$-\Psi(x_0) = 2\left[W(x_0) - W^{-}(x_0)\right] \tag{3.23}$$

elde edilir. Böylece Eş.3.21 ve Eş.3.23 ü,

$$\left.\begin{aligned} W^{+}(x_0) - W(x_0) &= -\frac{1}{2}\Psi(x_0) \\ W^{-}(x_0) - W(x_0) &= +\frac{1}{2}\Psi(x_0) \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

yazarız. Eş.3.24 denklemlerinden,

$$W^{+}(x_0) - W^{-}(x_0) = -\Psi(x_0) \tag{3.25}$$

sıçrama bağıntısı elde edilir.

Şimdi tekrar Eş.3.17 ye dönelim. Eş.3.17 de $v \in C^2(\overline{D})$ seçelim öyle ki $x \in \partial D$ için,

$$\begin{aligned} & v(x) = \Psi(x) \quad , \quad x \in \partial D \ \text{ise} \\ & \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) = 0 \quad , \quad x \in \partial D \ \text{ise} \end{aligned} \tag{3.26}$$

olsun. Böylece Eş.3.26 koşulları altında Eş.3.17,

$$pv(x) = \int_D \frac{1}{|x-y|} \nabla^2 v(y) dy + \int_{\partial D} \left[\Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \nu}(y)}_{=0} \right] ds(y)$$

veya iki katlı potansiyelin tanımı ile,

$$pv(x) = \int_D \frac{1}{|x-y|} \nabla^2 v(y) dy + 4\pi W(x) \tag{3.27}$$

olur. Şimdi Eş.3.27 nin iki yanının, $x \in D^+$ olmak üzere $x \to x_0 \in \partial D$ için $\frac{\partial}{\partial \nu(x)}$ türevini hesaplayalım,

$$-4\pi \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0)}_{=0} = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{1}{|x_0 - y|} \nabla^2 v(y) dy + 4\pi \frac{\partial W^+}{\partial \nu}(x_0) \tag{3.28}$$

olur. Yine Eş.3.27 nin iki yanının, $x \in D^-$ olmak üzere, $x \to x_0 \in \partial D$ için $\frac{\partial}{\partial \nu(x)}$ türevini hesaplarsak,

$$0 \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{1}{|x_0 - y|} \nabla^2 v(y) dy + 4\pi \frac{\partial W^-}{\partial \nu}(x_0) \tag{3.29}$$

elde edilir. Eş.3.28 ve Eş.3.29 dan iki katlı potansiyelin türevleri için,

$$\frac{\partial W^+}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial W^-}{\partial \nu}(x_0) \tag{3.30}$$

aynı süreksizlik özelliği ortaya çıkar, burada,

$$\frac{\partial W^+}{\partial \nu}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D^+}} \frac{\partial W}{\partial \nu}(x) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial W^-}{\partial \nu}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D^-}} \frac{\partial W}{\partial \nu}(x)$$

anlamındadır. Böylece iki katlı potansiyelin, ∂D nin normali doğrultusundaki türevi, x değişkeni sınırdan $x_0 \in \partial D$ noktasındaki normali boyunca geçerken, sürekli olarak değişir.

Şimdi, $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ ve $f \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta_3 u(x) = 0 & , & x \in D \text{ ise} \\ u(x) = f(x) & , & x \in \partial D \text{ ise} \end{array}\right\} \qquad (3.6)$$

İç Dirichlet problemini gözönüne alalım. Eş.3.6 probleminin çözümünü, iki katlı potansiyel biçiminde arayalım. İki katlı potansiyel $x \in IR^3 \setminus \partial D$ için Laplace denkleminin bir çözümüdür.

$$W(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \cdot \frac{1}{|x-y|} ds(y) \ , \quad x \in IR^3 \setminus \partial D$$

iki katlı potansiyelin $x \in D$ ve $x \to x_0 \in \partial D$ limiti,

$$W^+(x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x_0 - y|} ds(y) = f(x_0) \qquad (3.31)$$

şeklindedir. Eş.3.31 i Eş.3.24 ün ilk denkleminde yerine yazalım.

$$W^+(x_0) - W(x_0) = -\frac{1}{2}\Psi(x_0)$$
$$f(x_0) - W(x_0) = -\frac{1}{2}\Psi(x_0)$$

veya $\Psi(x)$ bilinmeyen yoğunluklu,

$$f(x_0) - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\frac{1}{|x_0 - y|}ds(y) = -\frac{1}{2}\Psi(x_0)$$

$$\Psi(x_0) - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\frac{1}{|x_0 - y|}ds(y) = -2f(x_0), \quad x_0 \in \partial D \tag{3.32}$$

integral denklemi elde edilir. Böylece Eş.3.6 iç Dirichlet probleminin çözümü Eş.3.32 integral denkleminin çözümüne indirgendi.

3.3. Teorem

$D \subset IR^3$ bölgesi sınırlı, basit bağlantılı ve ∂D sınırı C^2 sınıfından olsun.
$u \in C^2(IR^3 \setminus \overline{D}) \cap C(IR^3 \setminus D)$ ve $f \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta_3 u(x) = 0 & , & x \in IR^3 \setminus \overline{D} \text{ ise} \\ u(x) = f(x) & , & x \in \partial D \text{ ise} \end{array}\right\} \tag{3.33}$$

dış Dirichlet probleminin çözümünü $\Psi(y) \in C(\partial D)$ olmak üzere

$$W(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\frac{1}{|x - y|}ds(y) \;, \; x \in IR^3 \setminus \partial D$$

iki katlı potansiyel biçiminde arayalım.

O zaman dış Dirichlet probleminin çözümü,

$$\Psi(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\frac{1}{|x - y|}ds(y) = 2f(x), \quad x \in \partial D$$

integral denkleminin çözümüne indirgenir.

İspat

Dış Dirichlet probleminin çözümünü,

$$W(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y)\ ,\quad x\in IR^3\setminus\partial D$$

iki katlı potansiyel biçiminde arayalım. $x \in IR^3 \setminus \overline{D}$ olmak üzere $x \to x_0 \in \partial D$ için iki katlı potansiyelin limiti,

$$W^-(x_0) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x_0-y|}ds(y) = f(x_0) \tag{3.34}$$

olmalıdır. Eş.3.34 ü Eş.3.24 ün ikinci denkleminde yerine yazarsak,

$$W^-(x_0) - W(x_0) = \frac{1}{2}\Psi(x_0)$$
$$f(x_0) - W(x_0) = \frac{1}{2}\Psi(x_0)$$

veya $\Psi(x)$ bilinmeyen yoğunluklu,

$$f(x_0) - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\cdot\frac{1}{|x_0-y|}ds(y) = \frac{1}{2}\Psi(x_0)$$
$$\Psi(x_0) + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\cdot\frac{1}{|x_0-y|}ds(y) = 2f(x_0),\quad x_0\in\partial D \tag{3.35}$$

integral denklemi elde edilir.

Böylece Eş.3.33 Dış Dirichlet probleminin çözümü Eş.3.35 integral denklemi-nin çözümüne indirgendi.

3.2. Tanım

$\Psi(y)$, $y \in \partial D$ için tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman,

$$V(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\frac{1}{|x-y|}ds(y)\ ,\quad x\in IR^3\setminus\partial D \tag{3.36}$$

ye, $\Psi(y)$ yoğunluklu tek katlı (single layer) potansiyel denir.

Tek katlı potansiyel, $x \in IR^3 \setminus \partial D$ için Laplace denkleminin bir çözümüdür. Çözüm olduğu kolayca gösterilebilir.

$x = (x_1, x_2, x_3) \in IR^3 \setminus \partial D$ için

$$\begin{aligned}\Delta_3 V(x) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) V(x) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\frac{1}{|x-y|}ds(y) \\ &= 0\end{aligned}$$

sağlanır.

Tek katlı potansiyeelin süreklilik özelliğinden faydalanarak İç Neumann ve dış Neumann problemini Fredholm integral denklemine indirgeyelim.

3.4. Teorem

$D \subset IR^3$ bölgesi sınırlı, basit bağlantılı ve ∂D sınırı C^2 sınıfından olsun. $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, $g \in C(\partial D)$ ve ν, ∂D sınırının birim dış normali olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned}\Delta_3 u(x) = 0 \quad &, \quad x \in D \text{ ise} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x) \quad &, \quad x \in \partial D \text{ ise}\end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

İç Neumann probleminin çözümünü, $\Psi \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$V(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\frac{1}{|x-y|}ds(y) \ , \quad x \in IR^3 \setminus \partial D$$

tek katlı potansiyel biçiminde arayalım.

O zaman iç Neumann probleminin çözümü,

$$\Psi(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\frac{1}{|x-y|}ds(y)=2g(x)\ ,\quad x\in\partial D$$

integral denklemin çözümüne indirgenir.

İspat

Eş.3.17 de, yani;

$$pv(x)=\int_{D}\frac{1}{|x-y|}\nabla^2 v(y)dy+\int_{\partial D}\left[v(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}-\frac{1}{|x-y|}\frac{\partial v}{\partial\nu}(y)\right]ds(y)\quad (3.17)$$

formülünde v(x) fonksiyonunu $v\in C^2(\overline{D})$ ve

$$\left.\begin{aligned} v(x)=0\qquad &,\quad x\in\partial D\ \text{ise}\\ \frac{\partial v}{\partial\nu}(x)=\Psi(x), &\quad x\in\partial D\ \text{ise}\end{aligned}\right\}\quad (3.38)$$

seçelim,

Eş.3.38 koşulları, Eş.3.17 de yazılırsa,

$$pv(x)=\int_{D}\frac{1}{|x-y|}\cdot\nabla^2 v(y)dy-\int_{\partial D}\Psi(y)\frac{1}{|x-y|}ds(y)\quad (3.39)$$

denklemi elde edilir. Eş.3.39 u tek katlı potansiyel ile ifade edersek,

$$pv(x)=\int_{D}\frac{1}{|x-y|}\cdot\nabla^2 v(y)dy-4\pi V(x)\quad (3.40)$$

olur.

Şimdi, tek katlı potansiyelin, $x\in IR^3$ için sürekli olduğunu gösterelim. Eş.3.40 ın $x\in D^+\to x_0\in\partial D$ ye limitini hesaplarsak,

$$-4\pi \underbrace{v(x_0)}_{=0} = \int_D \frac{1}{|x_0 - y|} \nabla^2 v(y) dy - 4\pi V^+(x_0) \qquad (3.41)$$

olur. Eş.3.40 ın $x \in D^- \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye limitini hesaplarsak,

$$0 \cdot v(x_0) = \int_D \frac{1}{|x_0 - y|} \nabla^2 v(y) dy - 4\pi V^-(x_0) \qquad (3.42)$$

olur. Eş.3.41 ve Eş.3.42 den, $x_0 \in \partial D$ için,

$$V^+(x_0) = V^-(x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{1}{|x_0 - y|} \nabla^2 v(y) dy \qquad (3.43)$$

elde edilir. Eş.3.40 ı $x_0 \in \partial D$ için yazarsak,

$$-2\pi \underbrace{v(x_0)}_{=0} = \int_D \frac{1}{|x_0 - y|} \nabla^2 v(y) dy - 4\pi V(x_0) \qquad (3.44)$$

olur. Eş.3.43 ve Eş.3.44 den, V(x) tek katlı potansiyel, $x \in IR^3$ için süreklidir.

Eş.3.40 ın $x \in D^+ \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye ν doğrultusundaki türevi

$$-4\pi \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{1}{|x_0 - y|} \nabla^2 v(y) dy - 4\pi \frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0)$$

veya

$$-4\pi \Psi(x_0) = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{1}{|x_0 - y|} \nabla^2 v(y) dy - 4\pi \frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0) \qquad (3.45)$$

olur. Eş.3.40 ın $x \in D^- \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye ν doğrultusundaki türevi

$$0 \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{1}{|x_0 - y|} \nabla^2 v(y) dy - 4\pi \frac{\partial V^-}{\partial \nu}(x_0) \qquad (3.46)$$

olur. $x_0 \in \partial D$ için Eş.3.40 ın ν doğrultusundaki türevi

$$-2\pi \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0)}_{=\Psi(x_0)} = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{1}{|x_0 - y|} \nabla^2 v(y)dy - 4\pi \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0)$$

veya

$$-2\pi\Psi(x_0) = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{1}{|x_0 - y|} \nabla^2 v(y)dy - 4\pi \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) \tag{3.47}$$

olur. Eş.3.45 den Eş.3.47 çıkarılırsa,

$$\frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) = \frac{1}{2}\Psi(x_0) \quad , \; x_0 \in \partial D \tag{3.48}$$

elde edilir. Eş.3.46 dan Eş.3.47 çıkartılırsa,

$$\frac{\partial V^-}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) = -\frac{1}{2}\Psi(x_0) \quad , \; x_0 \in \partial D \tag{3.49}$$

olur. Eş.3.48 ve Eş.3.49 dan,

$$\frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial V^-}{\partial \nu}(x_0) = \Psi(x_0) \quad , \; x_0 \in \partial D \tag{3.50}$$

tek katlı potansiyellerin, ν doğrultusundaki türevleri için sıçrama (jump) bağıntısı elde edilir.

Şimdi $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ ve $g \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} \Delta_3 u(x) &= 0 \quad , \quad x \in D \text{ ise} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= g(x) \; , \quad x \in \partial D \text{ ise} \end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

iç Neumann problemini gözönüne alalım. Eş.3.37 probleminin çözümünü tek katlı potansiyel biçiminde arayalım. Tek katlı potansiyel $x \in IR^3 \setminus \partial D$ için Laplace denkleminin bir çözümüdür.

$$V(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\frac{1}{|x-y|}ds(y) \ , \ x \in IR^3 \setminus \partial D$$

tek katlı potansiyelin $x \in D^+ \to x_0 \in \partial D$ ye $\frac{\partial}{\partial \nu}$ türevi

$$\frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0) = \frac{1}{4\pi}\int_{D} \Psi(y)\frac{\partial}{\partial \nu(x_0)}\frac{1}{|x_0-y|}ds(y) = g(x_0) \tag{3.51}$$

olur. Eş.3.51 i Eş.3.48 de yazarsak,

$$\frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) = \frac{1}{2}\Psi(x_0) \ , \ x_0 \in \partial D$$
$$g(x_0) - \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) = \frac{1}{2}\Psi(x_0)$$

veya $x_0 \in \partial D$ için

$$g(x_0) - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\frac{\partial}{\partial \nu(x_0)}\frac{1}{|x_0-y|}ds(y) = \frac{1}{2}\Psi(x_0)$$
$$\Psi(x_0) + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\frac{\partial}{\partial \nu(x_0)}\frac{1}{|x_0-y|}ds(y) = 2g(x_0) \tag{3.52}$$

integral denklemi elde edilir. Böylece Eş.3.37 iç Neumann probleminin çözümü Eş.3.52 integral denkleminin çözümüne indirgendi.

3.5. Teorem

$D \subset IR^3$ bölgesi sınırlı, basit bağlantılı ve ∂D sınırı C^2 sınıfından olsun.

$u \in C^2(IR^3 \setminus \overline{D}) \cap C^I(IR^3 \setminus D)$ ve $g \in C(\partial D)$ ve ν, ∂D sınırının birim dış normali olmak üzere,

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta_3 u(x) = 0 \quad , \quad x \in IR^3 \setminus \overline{D} \text{ ise} \\
&\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x) \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise}
\end{aligned}\right\} \tag{3.53}
$$

Dış Neumann probleminin çözümünü, $\Psi \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$
V(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{1}{|x-y|} ds(y) \ , \quad x \in IR^3 \setminus \partial D
$$

tek katlı potansiyel biçiminde arayalım.

O zaman Dış Neumann probleminin çözümü,

$$
\Psi(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) = -2g(x) \ , \quad x \in \partial D
$$

integral denkleminin çözümüne indirgenir.

İspat

Eş.3.53 Dış Neumann probleminin çözümünü, tek katlı potansiyel biçiminde arayalım. $x \in D^- \to x_0 \in \partial D$ ye tek katlı potansiyelin $\frac{\partial}{\partial \nu}$ türevini hesaplayalım.

$$
\frac{\partial V^-}{\partial \nu}(x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{1}{|x_0 - y|} ds(y) = g(x_0) \tag{3.54}
$$

olur. Eş.3.54 ü Eş.3.49 da yazarsak,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial V^-}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) = -\frac{1}{2}\Psi(x_0) \quad , \ x_0 \in \partial D \\
&g(x_0) - \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) = -\frac{1}{2}\Psi(x_0) \\
&g(x_0) - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{1}{|x_0 - y|} ds(y) = -\frac{1}{2}\Psi(x_0)
\end{aligned}
$$

$$\Psi(x_0) - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\frac{\partial}{\partial \nu(x_0)}\frac{1}{|x_0 - y|}ds(y) = -2g(x_0), \quad x_0 \in \partial D \tag{3.55}$$

integral denklemi elde edilir. Böylece Eş.3.53 dış Neumann probleminin çözümü Eş.3.55 integral denklemin çözümüne indirgendi.

4. DİRİCHLET VE NEUMANN PROBLEMLERİNE UYGULAMALAR

4.1. İç Dirichlet Problemi

$$\Delta_3 u(x) = 0 \quad , \quad x \in D \text{ ise} \tag{4.1}$$

$$u(x) = f(x) \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise} \tag{4.2}$$

İç Dirichlet probleminin $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ çözümünü, $\Psi \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y) \ , \ \ x \in D \tag{4.3}$$

iki katlı potansiyel biçiminde arayalım. x, ∂D sınırına gittiğinde iki katlı potansiyeller için olan sıçrama bağıntıları kullanılarak

$$\Psi(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y) = -2f(x) \ , \ \ x \in \partial D \tag{4.4}$$

integral denklemi elde edilir. Şimdi Eş.4.4 integral denkleminin bir tek çözümünün varlığını göstermek için, Fredholm alternatifinden,

$$\Psi(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y) = 0 \ , \ \ x \in \partial D \tag{4.5}$$

homojen denklemin çözümünün sadece $\Psi(x) \equiv 0$ olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki $\Psi(x)$, Eş.4.5 i sağlasın ve u(x) i, Eş.4.3 ile tanımlayalım. O zaman u(x), D de harmonik ve $x \in \partial D$ için u(x) = 0 olur. İç Dirichlet probleminin çözümünün tekliğinden, $x \in D$ için $u(x) \equiv 0$ olur. Bu sonuç, $x \in \partial D$ için $\partial u(x) / \partial\nu$ = 0 olmasını gerektirir. Şimdi, u(x), Eş.4.3 iki katlı potansiyel olarak, $x \in IR^3 \setminus \overline{D}$ için verilmiş olsun. O zaman u(x), $IR^3 \setminus \overline{D}$ de harmonik olur ve iki katlı potansiyelin normal doğrultusundaki türevinin süreklilik özelliğinden, $x \in \partial D$ için $\partial u(x) / \partial\nu = 0$ olur. (x i $IR^3 \setminus \overline{D}$ dan ∂D ye yaklaştırıyoruz.) Ayrıca x sonsuza gittiğinde, Eş.4.3 iki katlı potansiyeli,

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\frac{1}{|x-y|} = \nabla_y\left(\frac{1}{|x-y|}\right).\nu$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial y_1}i + \frac{\partial}{\partial y_2}j + \frac{\partial}{\partial y_3}k\right)\frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}}.\nu$$
$$= \frac{(x-y).\nu}{|x-y|^3} \tag{4.6}$$

olduğundan $|x| = r \to \infty$ için

$$u(x) = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad , \quad r \to \infty$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial r} = o\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad , \quad r \to \infty$$

ye gider. Böylece Green formülünden,

$\Omega_R = \{x : |x| \leq R\}$ ve $D \subset \Omega_R$

olmak üzere,

$$\int_{\Omega_R \setminus D} \nabla(u\nabla u)dx = \int_{\Omega_R \setminus D}\left(|\nabla u|^2 + \underbrace{u\nabla^2 u}_{=0}\right)dx = \int_{\Omega_R \setminus D}|\nabla u|^2 dx$$

ve

$$\int_{\Omega_R \setminus D}|\nabla u|^2 dx = \int_{\partial\Omega_R \cup \partial D} u\frac{\partial u}{\partial \nu}ds$$
$$= \int_{\partial\Omega_R} u\frac{\partial u}{\partial \nu}ds + \int_{\partial D}\underbrace{u}_{=0}\frac{\partial u}{\partial \nu}ds$$
$$= \int_{\partial\Omega_R} u\frac{\partial u}{\partial \nu}ds = o\left(\frac{1}{R^3}\right) \quad , \quad R \to \infty \tag{4.7}$$

olur. $R \to \infty$ gittiğinde $x \in IR^3 \setminus D$ için $u(x)$ in bir sabite eşit olduğunu görürüz. Fakat $|x| \to \infty$ sonsuza gittiğinde $u(x) \to 0$ sıfıra gittiğini biliyoruz. Böylece

Eş.4.3 iki katlı potansiyel ile tanımlanan u(x), D de ve $IR^3 \setminus \overline{D}$ da u(x) = 0 olur ve iki katlı potansiyelin,

$u^+(x) - u^-(x) = -\Psi(x) \quad , \quad x \in \partial D$

süreksizlik özelliğinden, $x \in \partial D$ için $\Psi(x) = 0$ elde edilir.

4.2. Dış Dirichlet Problemi

$$\Delta_3 u(x) = 0 \quad , \quad x \in IR^3 \setminus \overline{D} \text{ ise} \tag{4.8}$$

$$u(x) = f(x) \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise} \tag{4.9}$$

u(x) sonsuzda sınırlı (4.10)

dış Dirichlet probleminin bir $u \in C^2(IR^3 \setminus \overline{D}) \cap C(IR^3 \setminus D)$ çözümünü arayalım. Dış Dirichlet probleminin çözümünün varlığını gösterelim. Bunun için, Eş.4.8 - Eş.4.10 probleminin bir çözümünü, $\Psi \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) \ , \quad x \in IR^3 \setminus \overline{D} \tag{4.11}$$

iki katlı potansiyel biçiminde arayalım. İki katlı potansiyelin sıçrama süreksizliği bağıntısından $\Psi(x)$,

$$\Psi(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) = 2f(x) \ , \quad x \in \partial D \tag{4.12}$$

Fredholm integral denklemini sağlamalıdır. Fakat, $x \in \partial D$ için Gauss formülü,

$$1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) = 0 \tag{4.13}$$

olduğundan, Eş.4.13 ü $\Psi(x) \equiv$ sabit ile çarparsak, $\Psi(x) \equiv$ sabit fonksiyonu

$$\Psi(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y)=0 \tag{4.14}$$

homojen integral denkleminin bir çözümü olur. Böylece Fredholm alternatifinden,

$$\Phi(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\Phi(y)\overline{\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}}ds(y)=0$$

veya

$$\Phi(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\Phi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\frac{1}{|x-y|}ds(y)=0 \tag{4.15}$$

homojen adjoint integral denklemin, özdeş sıfır olmayan reel değerli bir $\Phi(x)$ çözümü vardır. Eş.4.15 ile tanımlanan homojen adjoint denklemin $\Phi(x)$ çözümü f(x) e ortogonal değil ise, Eş.4.12 integral denklemin bir çözümü mevcut değildir. Yani Eş.4.12 nin bir çözümünün mevcut olması için,

$$\int_{\partial D}f(x)\Phi(x)ds(x)=0 \tag{4.16}$$

olmalıdır. Genel olarak f(x) in Eş.4.16 koşulunu sağladığını kabul edemeyiz. Bu nedenle, yöntemimizde değişiklik yapmalıyız. Özel olarak, dış Dirichlet probleminin çözümü, genel olarak iki katlı potansiyel biçiminde gösterilemez. İkinci olarak, dış Dirichlet probleminin çözümünü, $\Psi\in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\left[\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}+1\right]ds(y)\ ,\quad x\in R^3\setminus\overline{D} \tag{4.17}$$

biçiminde arayalım. O zaman Eş.4.17 ile tanımlanan u(x) fonksiyonu $x\in IR^3\setminus\overline{D}$ için harmonik, sonsuzda sınırlı ve $x\in\partial D$ için u(x) = f(x) sağlaması için $\Psi(x)$ fonksiyonu,

$$\Psi(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\left[\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|} + 1\right]ds(y) = 2f(x)\ ,\quad x \in \partial D \tag{4.18}$$

Fredholm integral denklemini sağlamalıdır. Yine Fredholm alternatifinden Eş.4.18 in birtek çözümünün olması için,

$$\Psi(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\left[\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|} + 1\right]ds(y) = 0\ ,\quad x \in \partial D \tag{4.19}$$

homojen integral denklemin çözümü yalnız, $\Psi(x) \equiv 0$ olmalıdır.

Kabul edelim ki Eş.4.19 homojen denklemin bir çözümü $\Psi(x)$ olsun ve u(x) fonksiyonu, bu $\Psi(x)$ için Eş.4.17 ile tanımlansın. O zaman, $x \in \partial D$ için u(x) = 0 olur. (Çünkü Eş.4.19 homojen integral denklemi, $x \in \partial D$ için f(x) = 0 sınır koşullu probleme karşılık gelir.) O zaman dış Dirichlet probleminin çözümünün tekliğinden $x \in IR^3 \setminus \overline{D}$ için u(x) = 0 elde edilir. Eş.4.17 de $x \to \infty$ sonsuza gittiğinde, u(x) sonsuzda sınırlı olduğundan,

$$\begin{aligned}\lim_{|x|\to\infty} u(x) &= \lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\left[\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}\right]ds(y) \\ &\quad + \lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)ds(y) \\ &= o\left(\frac{1}{r^2}\right)\ ,\quad r = |x|\end{aligned} \tag{4.20}$$

yazarız. İki katlı potansiyelin $|x| \to \infty$ için,

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y) = o\left(\frac{1}{r^2}\right) \tag{4.21}$$

olduğundan

$$\int_{\partial D}\Psi(y)ds(y) = 0 \tag{4.22}$$

elde edilir. Böylece Eş.4.19 homojen integral denklem

$$\Psi(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y)=0 \tag{4.23}$$

olur.

Eş.4.23 ile Eş.4.14 aynı denklemlerdir. Yani sadece $\Psi(x)$ = sabit bir çözümdür. Eş.4.22 den dolayı $\Psi(x)\equiv 0$ olmak zorundadır. Böylece, Eş.4.19 homojen denklemin çözümü yalnız $\Psi(x) = 0$ olur. ve Eş.4.18 integral denklemin bir tek çözümü mevcuttur.

4.3. İç Neumann Problemi

$$\Delta_3 u(x)=0 \quad , \quad x\in D \text{ ise} \tag{4.24}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}=g(x) \quad , \quad x\in \partial D \text{ ise} \tag{4.25}$$

İç Neumann probleminin $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ çözümünü, $\Psi \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\frac{1}{|x-y|}ds(y) \ , \quad x\in D \tag{4.26}$$

tek katlı potansiyel biçiminde arayalım. x, ∂D sınırına gittiğinde, tek katlı potansiyellerin normal türevleri için olan, sıçrama bağıntıları kullanılarak,

$$\Psi(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(x)}\frac{1}{|x-y|}ds(y)=2g(x) \ , \quad x\in \partial D \tag{4.27}$$

Fredholm integral denklemi elde edilir.

Eğer u(x), İç Neumann probleminin bir çözümü ise c herhangi sabiti için
u(x) + c de bir çözümdür.

Eş.4.27 integral denkleminde $\Psi(x)$ i belirleyelim. Eş.4.27 integral denkleminin bir çözümünün mevcut olduğunu göstermek için, Fredholm alternatifini izleyerek,

$$\Psi(x) + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y) = 0 \ , \quad x \in \partial D \tag{4.28}$$

homojen adjoint denklemin her çözümünün, g(x) e ortagonal olduğunu göstermeliyiz.

$$\int_D (u\Delta_3 v - v\Delta_3 u)dx = \int_{\partial D}\left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)ds$$

ikinci Green özdeşliğinde u harmonik ve v = 1 ise

$$0 = \int_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial \nu}ds$$

veya Eş.4.25 sınır koşulu ile

$$\int_{\partial D} g(x)ds = 0 \tag{4.29}$$

elde edilir. Böylece Eş.4.24, Eş.4.25 iç Neumann probleminin bir çözümünün mevcut olması için, Eş.4.29 koşulu sağlanmalıdır. Şimdi Eş.4.29 un sağlandığını kabul edelim.

Kabul edelim ki $\Psi(x)$ fonksiyonu, Eş.4.28 adjoint homojen denklemi sağlasın ve $x \in IR^3 \setminus \overline{D}$ için tanımlanmış harmonik, iki katlı potansiyeli,

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\frac{1}{|x-y|}ds(y) \ , \quad x \in IR^3 \setminus \overline{D} \tag{4.30}$$

fonksiyonu göz önüne alalım. Genelliği bozmadan kabul edelim ki, $\Psi(x)$ reel değer olsun. x değişkeni, $IR^3 \setminus \overline{D}$ den ∂D sınırına gittiğinde, iki katlı potansiyellerin sıçrama süreksizlikleri kullanılırsa,

$$\lim_{x \in IR^3 \setminus \overline{D} \to x_0 \in \partial D} u(x) = u^-(x_0)$$

olmak üzere,

$$u^-(x_0) - u(x_0) = \frac{1}{2}\Psi(x_0) \;,\quad x_0 \in \partial D \tag{4.31}$$

elde edilir. Eş.4.28 homojen adjoint denklemi ile Eş.4.30 denklemi birlikte düşünüldüğünde $x_0 \in \partial D$ için Eş.4.28 adjoint homojen denklemi,

$$\Psi(x_0) + 2u(x_0) = 0 \;,\quad x_0 \in \partial D$$

veya

$$u(x_0) = -\frac{1}{2}\Psi(x_0) \tag{4.32}$$

olur. Eş.4.32 yi Eş.4.31 de yerine koyarsak,

$$u^-(x_0) = 0$$

elde ederiz. u(x), Eş.4.30 ile tanımlı olduğundan, iki katlı potansiyeller, $|x| \to \infty$ sonsuza gittiğinde,

$$u(x) = o\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \;,\quad |x| \to \infty$$

sıfıra gider. Maksimum prensibinden $x \in IR^3 \setminus \overline{D}$ için $u(x) \equiv o$ elde ederiz. Eş.4.30 iki katlı potansiyelin normal doğrultudaki türevi sürekli olduğundan; yani,

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}(x_0) \quad , \quad x_0 \in \partial D \tag{4.33}$$

olduğundan, $x \in D$ için $u(x)$ harmonik ve $x \in \partial D$ için

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 \quad , \quad x \in \partial D$$

elde edilir. Böylece, $x \in D$ için $u(x)$ = sabit elde edilmiş olur. İki katlı potansiyellerin sıçrama süreksizliğinden,

$$\underbrace{u^+(x_0)}_{=\,\text{sabit}} - \underbrace{u(x_0)}_{=\,\text{sıfır}} = -\frac{1}{2}\Psi(x_0) \quad , \quad x_0 \in \partial D$$

$\Psi(x_0)$ = sabit elde edilir. Gauss formülünden,

$$\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) = \begin{cases} -4\pi \ , & x \in D \text{ ise} \\ -2\pi \ , & x \in \partial D \text{ ise} \\ 0 \ , & x \in IR^3 \setminus \overline{D} \text{ ise} \end{cases} \tag{4.34}$$

$x \in \partial D$ için,

$$1 + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{1}{|x-y|} ds(y) = 0 \tag{4.35}$$

yazarız. Eş.4.35 den, $\Psi(x)$ = sabit, Eş.4.28 homojen adjoint denklemin bir çözümüdür. Eş.4.29 koşulundan, her $\Psi(x)$ = sabit fonksiyonu için,

$$\int_{\partial D} \Psi g(x) ds(x) = \Psi \int_{\partial D} g(x) ds(x) = 0 \tag{4.36}$$

ortogonallik şartı sağlanır. Böylece Eş.4.27 integral denklemin bir çözümü mevcuttur.

4.4. Dış Neumann Problemi

$$\Delta_2 u(x) = 0 \quad , \quad x \in IR^2 \setminus \overline{D} \text{ ise} \tag{4.37}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = g(x) \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise} \tag{4.38}$$

u(x) sonsuzda düzgün (regular) (4.39)

koşullarını sağlayan bir $u \in C^2(IR^2 \setminus \overline{D}) \cap C^I(IR^2 \setminus \overline{D})$ çözümünü arayalım. Bu problemde Eş.4.39 sonsuzda düzgünlük koşulu şöyle tanımlanır; (r, θ) kutupsal koordinatlar olmak üzere, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ için düzgün olarak,

$$\lim_{r \to \infty} |ru(r,\theta)| < \infty$$

ve

$$\lim_{r \to \infty} \left| r^2 \frac{\partial u}{\partial r}(r,\theta) \right| < \infty$$

ise u(x) sonsuzda düzgündür denir. $\Omega_R = \{x : |x| \leq R\}$ ve $D \subset \Omega_R$ olsun. $\Omega_R \setminus D$ bölgesinde, Birinci Green özdeşliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_R \setminus D} \left(v\Delta_2 u + \nabla v . \nabla u\right) dx &= \int_{\partial(\Omega_R \setminus D)} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \\ &= \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds + \int_{\partial \Omega_R} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds\end{aligned} \tag{4.40}$$

yazarız. Eş.4.40 da v = 1 alırsak ve u(x), Eş.4.37 - Eş.4.39 probleminin bir çözümü ise,

$$0 = \int_{\partial D} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)}_{g(x)} ds(x) - \int_{\partial \Omega_R} \frac{\partial}{\partial R} u(x) ds(x)$$

veya

$$\int_{\partial D} g(x)ds(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial R} R d\theta = 2\pi \frac{\partial u}{\partial R} \cdot R$$
$$= 2\pi R^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial R} \cdot \frac{1}{R} = o\left(\frac{1}{R}\right)$$

olur. Böylece dış Neumann probleminin bir çözümünün mevcut olması için bir gerek koşulu; yani,

$$\int_{\partial D} g(x)ds(x) = 0 \tag{4.41}$$

elde ettik. Şimdi yine Eş.4.37 - Eş.4.39 probleminin bir çözümünü $\Psi \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \ , \quad x \in IR^2 \setminus \overline{D} \tag{4.42}$$

tek katlı potansiyel biçiminde arayalım. Eğer $\Psi \in C(\partial D)$ fonksiyonu,

$$\int_{\partial D} \Psi(x)ds(x) = 0 \tag{4.43}$$

koşulunu sağlar ise, Eş.4.42 tek katlı potansiyel ile tanımlanan u(x) fonksiyonu sonsuzda düzgün (regular) olur. x, ∂D sınırına gittiğinde Eş.4.42 tek katlı potansiyelin normal türevinin sıçrama süreksizliklerini kullanarak, $\Psi(x)$ in sağlaması gereken,

$$\Psi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = -2g(x) \ , \quad x \in \partial D \tag{4.44}$$

Fredholm integral denklemini elde ederiz. Fredholm alternatifine göre,

$$\Psi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = 0 \ , \quad x \in \partial D \tag{4.45}$$

homojen denklemin çözümü yalnız $\Psi \equiv 0$ ise, Eş.4.44 integral denklemin bir tek çözümü mevcuttur.

Kabul edelim ki $\psi(x)$, Eş.4.45 in bir çözümü olsun. Eş.4.45 in iki yanını ∂D üzerinden integrallersek,

$$\int_{\partial D} \Psi(x) ds(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \left\{ \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \right\} ds(x) = 0$$

veya

$$\int_{\partial D} \Psi(x) ds(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \left[\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(x) \right] ds(y) = 0 \qquad (4.46)$$

elde ederiz. $x \in \partial D$ için Gauss formülünden,

$$\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = -\pi$$

veya

$$1 = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \qquad (4.47)$$

yazarız. Eş.4.47 nin iki yanını $\Psi(x)$ ile çarpıp, ∂D sınırı üzerinden integrallersek,

$$\int_{\partial D} \Psi(x) ds(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(x) \left[\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \right] ds(x) \qquad (4.48)$$

olur. Eş.4.48 i Eş.4.46 da yazarsak,

$$2 \int_{\partial D} \Psi(x) ds(x) = 0 \qquad (4.49)$$

elde ederiz. Böylece $\Psi(x)$, Eş.4.43 koşulunu sağlar. Yani Eş.4.42 tek katlı potansiyeli ile tanımlanan u(x) fonksiyonu harmoniktir ve sonsuzda düzgündür. Böylece, $\Psi(x)$, Eş.4.45 homojen denklemin çözümü kabulü ile (g(x) = 0), Eş.4.42 tek katlı potansiyel ile tanımlanan u(x) harmoniktir ve $x \in \partial D$ için,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x) = 0 \quad , \quad x \in \partial D$$

olur. Green formülünden,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_R \setminus D} |\nabla u|^2 dx &= \int_{\partial\Omega_R} u\frac{\partial u}{\partial \nu} ds + \int_{\partial D} u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu} ds}_{=0} \\ &= \int_{\partial\Omega_R} u\frac{\partial u}{\partial \nu} ds \\ &= 2\pi u \frac{\partial u}{\partial R} \cdot R = 2\pi . R u . R^2 \frac{\partial u}{\partial R} \cdot \frac{1}{R^2} = o\left(\frac{1}{R^2}\right)\end{aligned}$$

yazarız. Buradan $\nabla u = 0$ ve u = sabit elde edilir. Fakat,

$$\lim_{|x| \to \infty} |x| u(x) < \infty$$

olduğundan $|x| \to \infty$ için u(x) = 0 olur. Buradan, $x \in IR^2 \setminus \overline{D}$ için $u(x) \equiv 0$ elde edilir. Özel olarak sonsuzda düzgünlük koşulu, dış Neumann probleminin çözümünün tekliğini verir. Tek katlı potansiyelin sürekliliğinden u(x), D de harmonik ve $x \in \partial D$ için u(x) = 0 olur. Böylece $x \in D$ için $u(x) \equiv 0$ olur. Tek katlı potansiyelin, normal doğrultudaki türevlerinin

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial u^-}{\partial \nu}(x) = \Psi(x) \quad , \quad x \in \partial D \tag{4.50}$$

denklemini sağladığını biliyoruz. Buradan $\Psi(x) \equiv 0$ elde edilir. Böylece Eş.4.44 integral denklemin bir çözümü mevcuttur.

Kabul edelim ki $\Psi(x)$, Eş.4.44 integral denkleminin bir tek çözümü olsun. Eş.4.44 ün iki yanını, ∂D sınırı üzerinden integrallersek, Eş.4.41 koşulu ile

$$\int_{\partial D} \Psi(x)ds(x) - \frac{1}{\pi}\int_{\partial D} \Psi(y)\left[\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \log\frac{1}{|x-y|} ds(x)\right] ds(y)$$
$$= -2\int_{\partial D} g(x)ds(x) \qquad (4.51)$$

veya Gauss formülünden $x \in \partial D$ için

$$2\int_{\partial D} \Psi(x)ds(x) = 0 \qquad (4.52)$$

elde edilir. Böylece Eş.4.43 koşulu sağlanır. $\Psi(x)$, Eş.4.44 integral denklemin bir tek çözümüdür ve dolayısıyla Eş.4.42 tek katlı potansiyel, dış Neumann denkleminin bir tek çözümüdür [1].

5. HELMHOLTZ DENKLEMİ İÇİN POTANSİYEL TEORİ

Bu bölümde Helmholtz denklemi için çift katlı ve tek katlı potansiyellerin özelliklerini inceleyeceğiz.

5.1. Helmholtz Denklemi

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\ , \quad x \neq y$$

$\Delta_3 u + k^2 u = 0$ Helmholtz denkleminin bir çözümüdür. Kolaylıkla türev alınarak gösterilebilir ki, sabit $y \in IR^3$ ve $x \neq y$ için $\dfrac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$ Helmholtz denklemini sağlar.

5.1. Teorem

$D \subset IR^3$ sınırlı, basit bağlantılı bir bölge olsun. D nin sınırı ∂D, C^2 sınıfından yani ∂D sürekli eğriliğe sahip olsun.

ν, ∂D sınırının birim dış normali ve u, $\Delta_3 u + k^2 u = 0$, Helmholtz denkleminin bir çözümü olmak üzere

$$\int_{\partial D}\left[u(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\frac{\partial u}{\partial\nu(y)}(y)\right]ds(y) = \begin{cases} -4\pi u(x)\ , & x \in D \text{ ise} \\ -2\pi u(x)\ , & x \in \partial D \text{ ise} \\ 0\ , & x \in IR^3 \setminus \overline{D} \text{ ise} \end{cases} \qquad (5.1)$$

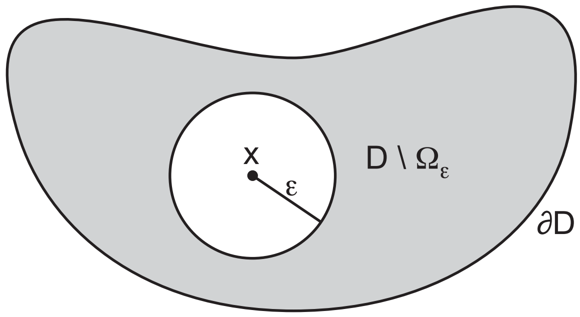
sağlanır.

İspat

1) $x \in D$ olsun. $\varepsilon > 0$ yeteri kadar küçük olsun ve $\Omega_\varepsilon = \{y : |y - x| \leq \varepsilon\}$ yuvarı D nin içinde yatsın. $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesinde ikinci Green özdeşliğini yazalım. İntegraller için ortalama değer teoremi yardımıyla,

$$\int_{D\setminus\Omega_\varepsilon}\left[u(y)\cdot\underbrace{\nabla^2\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}}_{-k^2\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}}-\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\underbrace{\nabla^2 u(y)}_{-k^2 u}\right]dy$$

$$=\int_{\partial D}\left[u(y)\cdot\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}-\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\cdot\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\right]ds(y)$$
$$+\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\left[u(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}-\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\cdot\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\right]ds(y)$$



Şekil 5.1. $x\in D$ için $D\setminus\Omega_\varepsilon$ bölgesi

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon}u(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}ds(y)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}u(y)\left(-\frac{d}{d\varepsilon}\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\right)\varepsilon^2\sin\Phi d\Phi d\theta$$
$$=u(y^*)\left[\frac{e^{ik\varepsilon}-ike^{ik\varepsilon}.\varepsilon}{\varepsilon^2}\right]\varepsilon^2.4\pi,\ \ y^*\in\partial\Omega_\varepsilon$$

ve

$$\left|\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\cdot\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)ds(y)\right|\le\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\left|\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\right|\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\right|ds(y)$$
$$\le\max_{y\in\overline{D}}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\right|\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\right|\varepsilon^2\sin\Phi d\Phi d\theta$$
$$\le M.\varepsilon^2.\left|\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\right|.4\pi$$

Burada,

$$M = \max_{y \in \overline{D}} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right|$$

dir.

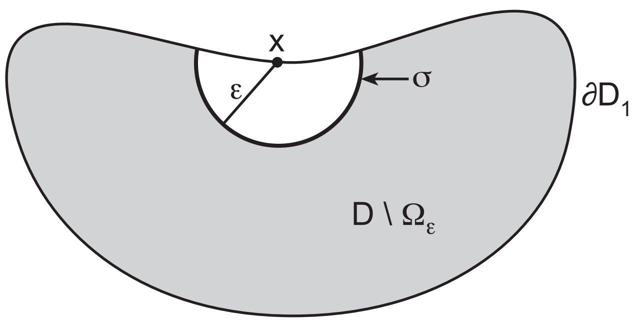
$\varepsilon \to 0$ sıfıra gittiğinde,

$$\int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) = -4\pi u(x) \tag{5.2}$$

elde edilir.

2) $x \in \partial D$ olsun. $\sigma = D \cap \partial \Omega_\varepsilon = D \cap \{y : |y - x| = \varepsilon\}$ olsun.

$\partial D_1 = \partial D \setminus (\partial D \cap \{y : |y - x| \le \varepsilon\})$ olsun.



Şekil 5.2. $x \in \partial D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi

$D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesinde ikinci Green özdeşliğini yazalım.

$$\int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \left[u(y).\nabla^2 \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \nabla^2 u(y) \right] dy$$
$$= \int_{\partial D_1} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] ds(y)$$
$$+ \int_{\sigma} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] ds(y)$$

(1) dekine benzer bir inceleme ile $\varepsilon \to 0$ sıfıra gittiğinde,

$$\int_{\partial D}\left[u(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}-\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\right]ds(y)=-2\pi u(x) \tag{5.3}$$

elde edilir.

3) $x\in IR^3\setminus\overline{D}$ ise $\dfrac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$ fonksiyonu D bölgesinde singüler değildir. D de ikinci Green özdeşliğini yazarsak,

$$\int_{D}\left[u(y).\nabla^2\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}-\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\nabla^2u(y)\right]dy$$
$$=\int_{\partial D}\left[u(y)\cdot\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}-\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\cdot\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\right]ds(y)$$
$$\int_{\partial D}\left[u(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\cdot\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}-\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\right]ds(y)=0 \tag{5.4}$$

elde edilir.

5.1. Tanım

$\Psi(y)$, $y\in\partial D$ için tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun. ∂D nin birim dış normali ν olsun.

$$W(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\Psi(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}ds(y),\ \ x\in IR^3\setminus\partial D \tag{5.5}$$

ye $\Psi(y)$ yoğunluklu iki katlı Helmholtz potansiyeli denir.

Eş.5.5, $\Delta_3u(x)+k^2u(x)=0$ Helmholtz denkleminin bir çözümüdür. Çözüm olduğu kolayca gösterilebilir.

$$\Delta_3 W(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) W(x)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right)}_{-k^2 \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}} ds(y)$$

$$\Delta_3 W(x) = \frac{-k^2}{4\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y)$$

$$\Delta_3 W(x) + k^2 W(x) = 0$$

sağlanır.

5.2. İki Katlı Helmholtz Potansiyelin Süreklilik Özellikleri

$x \in IR^3 \setminus \partial D$ noktasının, $x_0 \in \partial D$ noktasına gitmesi halinde, iki katlı potansiyelin süreklilik özelliğinden bazı sonuçlar çıkaralım. $v \in C^2(\overline{D})$ olsun. Birinci Green özdeşliğini ve Eş.5.1 i kullanalım.

$$\int_D \left(v\nabla^2 u + \nabla v \cdot \nabla u \right) dy = \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds(y) \tag{5.6}$$

Birinci Green özdeşliğini $v \in C^2(\overline{D})$ ve $u = \dfrac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$ fonksiyonları için yazalım.

$\Omega_\varepsilon = \{y : |y - x| \le \varepsilon\} \subset D$ olsun. O zaman Eş.5.6 yı, $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi üzerinden yazarsak,

$$\int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \left[v(y) \nabla_y^2 \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} + \nabla v(y) \nabla_y \cdot \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right] dy$$

$$= \int_{\partial D} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y) + \int_{\partial \Omega_\varepsilon} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y)$$

yani

$$\int_{D\setminus\Omega_\varepsilon}\left[-k^2 v(y)\cdot\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}+\nabla v(y)\nabla_y\cdot\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\right]dy$$

$$=\int_{\partial D} v(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}ds(y)+\int_{\partial\Omega_\varepsilon} v(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}ds(y) \tag{5.7}$$

olur.

1) $x\in D$ olsun. O zaman, integraller için ortalama değer teoremi kullanılarak,

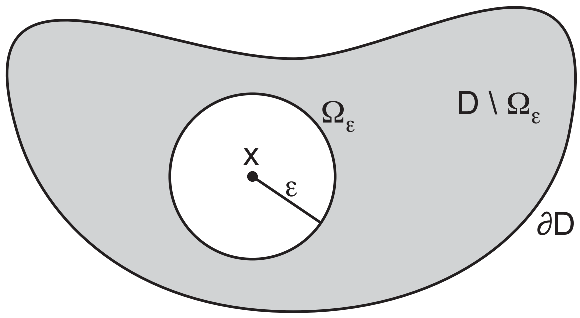
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} v(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}ds(y)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} v(y)\left(-\frac{d}{d\varepsilon}\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\right)\varepsilon^2\cdot\sin\Phi d\Phi d\theta$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{e^{ik\varepsilon}-ik.\varepsilon.e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon^2}\right)\cdot\varepsilon^2\cdot 4\pi\cdot v(y^*)\ ,\quad y^*\in\partial\Omega_\varepsilon$$

$$=4\pi v(x) \tag{5.8}$$

elde edilir.

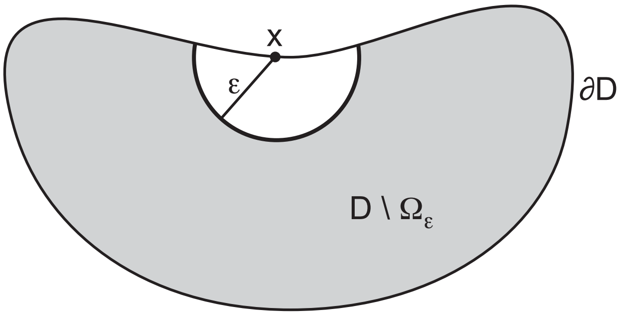


Şekil 5.3. $x\in D$ için $D\setminus\Omega_\varepsilon$ bölgesi

2) $x\in\partial D$ olsun. O zaman,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon} v(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}ds(y)=2\pi v(x) \tag{5.9}$$

elde edilir.



Şekil 5.4. $x \in \partial D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi

3) $x \in IR^3 \setminus \overline{D}$ ise $\dfrac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$ fonksiyonu, $y \in D$ için tanımlıdır. Dolayısıyla,

$$\int_D \left[v(y)\nabla_y^2 \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} + \nabla v(y)\cdot\nabla y \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right] dy$$

$$= \int_{\partial D} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y) \tag{5.10}$$

olur.

Böylece Eş.5.7 $\varepsilon \to 0$ için,

$$\int_D \left[-k^2 v(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} + \nabla v(y)\cdot\nabla_y \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right] dy$$

$$= \int_{\partial D} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y) - pv(x)$$

veya

$$\int_D \nabla v(y)\cdot\nabla_y \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dy + pv(x)$$

$$= k^2 \int_D v(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dy + \int_{\partial D} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y) \tag{5.11}$$

olur, bu formülde p sayı,

$$p = \begin{cases} -4\pi & , \quad x \in D \text{ ise} \\ -2\pi & , \quad x \in \partial D \text{ ise} \\ 0 & , \quad x \in IR^3 \setminus \overline{D} \text{ ise} \end{cases} \tag{5.12}$$

dır.

Benzer olarak, ikinci Green özdeşliğinden,

$$\begin{aligned} &\int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \left[v(y) \nabla_y^2 \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \nabla^2 v(y) \right] dy \\ &= \int_{\partial D} \left[v(y). \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \\ &+ \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} &\int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \left[-k^2 v(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \nabla^2 v(y) \right] dy \\ &= \int_{\partial D} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \\ &+ \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \end{aligned} \tag{5.13}$$

yazarız.

Eş.5.8, Eş.5.9 ve Eş.5.10 dan

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial \Omega_\varepsilon} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y) = \begin{cases} 4\pi v(x) & , \quad x \in D \text{ ise} \\ 2\pi v(x) & , \quad x \in \partial D \text{ ise} \\ 0 & , \quad x \in IR^3 \setminus \overline{D} \text{ ise} \end{cases} \tag{5.14}$$

dır.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\frac{\partial v}{\partial \nu}(y)ds(y)\right|$$
$$\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega_\varepsilon}\left|\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\right|\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}(y)\right|ds(y)$$
$$\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\max_{y\in\overline{D}}\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}(y)\right|\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\right|\varepsilon^2\sin\Phi d\Phi d\theta$$
$$\leq \lim_{\varepsilon\to 0}K\cdot\varepsilon^2\left|\frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon}\right|4\pi = 0$$

Burada,

$$K = \max_{y\in\overline{D}}\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}(y)\right|$$

dır.

Böylece $\varepsilon \to 0$ sıfırı gittiğinde Eş.5.13,

$$\int_D\left[-k^2v(y)\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}-\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\nabla^2v(y)\right]dy$$
$$=\int_{\partial D}\left[v(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}-\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\frac{\partial v}{\partial\nu}(y)\right]ds(y)-pv(x)$$

veya

$$pv(x)=\int_D\left[k^2v(y)\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}+\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\nabla^2v(y)dy\right]$$
$$+\int_{\partial D}\left[v(y)\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}-\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\frac{\partial v}{\partial\nu}(y)\right]ds(y) \qquad (5.15)$$

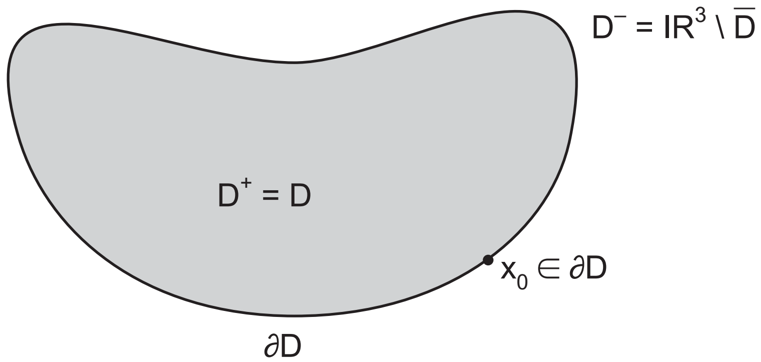
olur.

Şimdi Eş.5.5 iki katlı Helmholtz potansiyeli gözönüne alalım ve kabul edelim ki, $\Psi \in C^2(\partial D)$ olsun. O zaman Ψ fonksiyonu $\overline{D}$ da, C^2 sınıfndandır.

$D^+ = D \quad D^- = IR^3 \setminus \overline{D}$ ve $x_0 \in \partial D$ olsun.

$$W^+(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D^+}} W(x) \quad , \quad W^-(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D^-}} W(x)$$

tanımlayalım.



Şekil 5.5. D^+ ve D^- bölgeleri

Eş.5.11 de $v(x) = \Psi(x)$ koyalım ve iki katlı potansiyelin tanımını kullanalım.

$$\int_D \nabla\Psi(y)\nabla_y \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}dy + p\Psi(x)$$
$$= k^2 \int_D \Psi(y)\cdot\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}dy + \int_{\partial D} \Psi(y)\cdot\frac{\partial}{\partial\nu(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}ds(y)$$

yani

$$\int_D \nabla\Psi(y).\nabla y\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}dy + p\Psi(x)$$
$$= k^2 \int_D \Psi(y)\cdot\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}dy + 4\pi W(x) \tag{5.16}$$

Eş.5.16 da $x \in D^+$ olmak üzere $x \to x_0 \in \partial D$ ye limit hesaplarsak,

$$\int_D \nabla\Psi(y).\nabla_y \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|}dy - 4\pi\Psi(x_0)$$
$$= k^2 \int_D \Psi(y)\cdot\frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|}dy + 4\pi W^+(x_0) \tag{5.17}$$

elde edilir. $x_0 \in \partial D$ için Eş.5.16,

$$\int_D \nabla\Psi(y).\nabla_y \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|}dy - 2\pi\Psi(x_0)$$
$$= k^2 \int_D \Psi(y)\cdot\frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|}dy + 4\pi W(x_0) \tag{5.18}$$

Eş.5.18 den Eş.5.17 yi çıkarırsak,

$$2\pi\Psi(x_0) = 4\pi\left[W(x_0) - W^+(x_0)\right]$$

veya

$$\Psi(x_0) = 2\left[W(x_0) - W^+(x_0)\right] \tag{5.19}$$

elde edilir. Şimdi Eş.5.16 da, $x \in D^-$ olmak üzere $x \to x_0 \in \partial D$ ye limit hesaplayalım.

$$\int_D \nabla\Psi(y).\nabla_y \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|}dy - 0\cdot\Psi(x_0)$$
$$= k^2 \int_D \Psi(y)\cdot\frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|}dy + 4\pi W^-(x_0) \tag{5.20}$$

Eş.5.18 den Eş.5.20 yi çıkarırsak,

$$-2\pi\Psi(x_0) = 4\pi\left[W(x_0) - W^-(x_0)\right]$$

veya

$$-\Psi(x_0) = 2\left[W(x_0) - W^-(x_0)\right] \tag{5.21}$$

elde edilir. Böylece Eş.5.19 ve Eş.5.21 den,

$$\left.\begin{aligned} W^+(x_0) - W(x_0) &= -\frac{1}{2}\Psi(x_0) \\ W^-(x_0) - W(x_0) &= +\frac{1}{2}\Psi(x_0) \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

yazarız. Eş.5.22 den,

$$W^+(x_0) - W^-(x_0) = -\Psi(x_0) \tag{5.23}$$

sıçrama (jump) bağıntısı elde edilir.

Şimdi tekrar Eş.5.15 e dönelim. Eş.5.15 de $v \in C^2(\overline{D})$ seçelim öyle ki $x \in \partial D$ için

$$\begin{aligned} v(x) &= \Psi(x) \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise} \\ \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) &= 0 \quad\quad , \quad x \in \partial D \text{ ise} \end{aligned} \tag{5.24}$$

olsun. Böylece Eş.5.24 koşulları altında Eş.5.15,

$$\begin{aligned} pv(x) = &\int_D \left[k^2 v(y)\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} + \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\nabla^2 v(y)\right]dy \\ &+ \int_{\partial D}\left[\Psi(y)\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\underbrace{\frac{\partial v}{\partial \nu}(y)}_{=0}\right]ds(y) \end{aligned}$$

veya iki katlı Helmholtz potansiyelin tanımı ile,

$$pv(x) = \int_D \left[k^2 v(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} + \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \nabla^2 v(y) \right] dy + 4\pi W(x)$$

$$pv(x) = \int_D \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \left[\nabla^2 v(y) + k^2 v(y) \right] dy + 4\pi W(x) \tag{5.25}$$

olur. Şimdi Eş.5.25 nin iki yanının, $x \in D^+$ olmak üzere $x \to x_0 \in \partial D$ için $\frac{\partial}{\partial \nu(x)}$ türevini hesaplayalım.

$$-4\pi \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0)}_{=0} = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} \left[\nabla^2 v(y) + k^2 v(y) \right] dy + 4\pi \frac{\partial W^+}{\partial \nu}(x_0) \tag{5.26}$$

olur. Yine Eş.5.25 nin iki yanının, $x \in D^-$ olmak üzere, $x \to x_0 \in \partial D$ için $\frac{\partial}{\partial \nu(x)}$ türevini hesaplarsak,

$$0 \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} \left[\nabla^2 v(y) + k^2 v(y) \right] dy + 4\pi \frac{\partial W}{\partial \nu}(x_0) \tag{5.27}$$

elde edilir. Eş.5.26 ve Eş.5.27 den iki katlı Helmholtz potansiyelin türevleri için,

$$\frac{\partial W^+}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial W^-}{\partial \nu}(x_0) \tag{5.28}$$

aynı süreksizlik özelliği ortaya çıkar, burada,

$$\frac{\partial W^+}{\partial \nu}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D^+}} \frac{\partial W}{\partial \nu}(x) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial W^-}{\partial \nu}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D^-}} \frac{\partial W}{\partial \nu}(x)$$

anlamındadır. Böylece iki katlı potansiyelin, ∂D nin normali doğrultusundaki türevi, x değişkeni sınırdan $x_0 \in \partial D$ noktasındaki normali boyunca geçerken, sürekli olarak değişir.

5.2. Tanım

$\Psi(y)$, $y \in \partial D$ için tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman,

$$V(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y) \ , \quad x \in IR^3 \setminus \partial D \tag{5.29}$$

ye, $\Psi(y)$ yoğunluklu tek katlı Helmholtz potansiyel denir.

Tek katlı potansiyel, $x \in IR^3 \setminus \partial D$ için Helmholtz denkleminin bir çözümüdür. Çözüm olduğu kolayca gösterilebilir.

$$\Delta_3 V(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) V(x)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}}_{-k^2 \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}} ds(y)$$

$$\Delta_3 V(x) = \frac{-k^2}{4\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y)$$

$$\Delta_3 V(x) + k^2 V(x) = 0$$

sağlanır.

5.3. Tek Katlı Helmholtz Potansiyelin Süreklilik Özellikleri

Tek katlı potansiyelin süreklilik özelliklerini kurarken $\Psi \in C^{I}(\partial D)$ kabul edelim. Eş.5.15 de yani,

$$pv(x) = \int_{D} \left[k^2 v(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} + \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \nabla^2 v(y) dy \right]$$

$$+ \int_{\partial D} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \tag{5.15}$$

formülünde v(x) fonksiyonunu $v \in C^2(\overline{D})$ ve

$$\left.\begin{array}{ll} v(x) = 0 & , \quad x \in \partial D \text{ ise} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu}(x) = \Psi(x) & , \quad x \in \partial D \text{ ise} \end{array}\right\} \tag{5.30}$$

seçelim. Eş.5.30 koşulları, Eş.5.15 de yazılırsa,

$$pv(x) = \int_D \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\left[\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)\right]dy - \int_{\partial D} \Psi(y)\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}ds(y) \tag{5.31}$$

denklemi elde edilir. Eş.5.31 i tek katlı Helmholtz potansiyel ile ifade edersek,

$$pv(x) = \int_D \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\left[\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)\right]dy - 4\pi V(x) \tag{5.32}$$

olur.

Şimdi, tek katlı Helmholtz potansiyelin, $x \in IR^3$ için sürekli olduğunu gösterelim. Eş.5.32 nin $x \in D^+ \to x_0 \in \partial D$ ye limitini hesaplarsak,

$$-4\pi \underbrace{v(x_0)}_{=0} = \int_D \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|}\left[\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)\right] - 4\pi V^+(x_0) \tag{5.33}$$

olur. Eş.5.32 nin $x \in D^- \to x_0 \in \partial D$ ye limitini hesaplarsak,

$$0 \cdot v(x_0) = \int_D \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|}\left[\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)\right]dy - 4\pi V^-(x_0) \tag{5.34}$$

olur. Eş.5.33 ve Eş.5.34 den $x_0 \in \partial D$ için,

$$V^+(x_0) = V^-(x_0) = \frac{1}{4\pi}\int_D \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|}\left[\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)\right]dy \tag{5.35}$$

elde edilir. Eş.5.32 yi $x_0 \in \partial D$ için yazarsak,

$$-2\pi \underbrace{v(x_0)}_{=0} = \int_{D} \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|}\left[\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)\right] - 4\pi V(x_0) \tag{5.36}$$

olur. Eş.5.35 ve Eş.5.36 dan, V(x) tek katlı Helmholtz potansiyel, $x \in IR^3$ için süreklidir.

Eş.5.32 in $x \in D^+ \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye ν doğrultusundaki türevi,

$$-4\pi \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \int_{D} \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|}\left[\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)\right]dy - 4\pi \frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0)$$

veya

$$-4\pi \Psi(x_0) = \int_{D} \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|}\left[\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)\right]dy - 4\pi \frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0) \tag{5.37}$$

olur. Eş.5.32 nin $x \in D^- \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye ν doğrultusundaki türevi

$$0 \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \int_{D} \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}\left[\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)\right]dy - 4\pi \frac{\partial V^-}{\partial \nu}(x_0) \tag{5.38}$$

olur. $x_0 \in \partial D$ için Eş.5.30 nin ν doğrultusundaki türevi

$$-2\pi \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0)}_{=\Psi(x_0)} = \int_{D} \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|}\left[\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)\right]dy - 4\pi \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) \tag{5.39}$$

olur. Eş.5.37 den Eş.5.39 çıkarılırsa,

$$\frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) = \frac{1}{2}\Psi(x_0) \quad , \; x_0 \in \partial D \tag{5.40}$$

elde edilir. Eş.5.38 den Eş.5.39 çıkartılırsa,

$$\frac{\partial V^-}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) = -\frac{1}{2}\Psi(x_0) \quad , \; x_0 \in \partial D \tag{5.41}$$

olur. Eş.5.40 ve Eş.5.41 den,

$$\frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial V^-}{\partial \nu}(x_0) = \Psi(x_0) \quad , \; x_0 \in \partial D \tag{5.42}$$

tek katlı Helmholtz potansiyellerin, ν doğrultusundaki türevleri için, sıçrama (jump) bağıntısı elde edilir.

6. FİZİKSEL ALTYAPI

Akışkan bir ortamda hareket eden acustic dalgaları gözönüne alalım. $V(x,\ t)$, $x \in IR^3$ noktasındaki parçacağın t zamanındaki hız vektörü olsun. Akışkanın basıncını, yoğunluğunu ve spesifik entropisini sırasıyla $p(x, t)$, $\rho(x, t)$ ve $s(x, t)$ ile gösterelim. Akışkan üzerine hiç dış kuvvetin etki etmediğini varsayalım. O zaman parçacığın hareketi aşağıdaki denklemlerle ifade edilir;

Euler denklemi

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} + (V(x,t).\nabla)V(x,t) + \gamma V(x,t) + \frac{1}{\rho(x,t)}\nabla p(x,t) = 0 \tag{6.1}$$

Süreklilik denklemi

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \nabla\left[\rho(x,t)V(x,t)\right] = 0 \tag{6.2}$$

Durum denklemi

$$f(\rho(x,t), s(x,t)) = p(x,t) \tag{6.3}$$

Adiabatic hipotezi

$$\frac{\partial s(x,t)}{\partial t} + V(x,t)\nabla s(x,t) = 0 \tag{6.4}$$

Burada f akışkana bağlı bir fonksiyondur. γ sönüm katsayısıdır. Bu sistem V, ρ, p ve s bilinmeyen fonksiyonlarına göre lineer değildir. Başlangıç hali olarak $V_0 = 0$, zaman bağımsız dağılımlar $\rho = \rho_0(x)$, $s = s_0(x)$ ve p_0 sabiti $p_0 = f(\rho_0(x), s_0(x))$ şeklinde olsun. Bu lineer olmayan sistemin lineerleştirilmesi, bu sistemin $(V_0,\ p_0,\ \rho_0,\ s_0)$ daki türevleri

$$V(x,t) = \varepsilon_1 V_1(x,t) + o(\varepsilon^2)$$
$$p(x,t) = p_0 + \varepsilon_1 p_1(x,t) + o(\varepsilon^2)$$
$$\rho(x,t) = \rho_0(x) + \varepsilon_1 \rho_1(x,t) + o(\varepsilon^2)$$
$$s(x,t) = s_0(x) + \varepsilon_1 s_1(x,t) + o(\varepsilon^2)$$

ile verilir ve bu son eşitlikleri Eş.6.1, Eş.6.2, Eş.6.3, Eş.6.4 de yerine koyalım. $o(\varepsilon^2)$ yi içeren terimleri ihmal edersek,

$$\frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} + \gamma V_1(x,t) + \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla p_1(x,t) = 0 \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} + \nabla\left[\rho_0(x) V_1(x,t)\right] = 0 \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial f(\rho_0, s_0)}{\partial \rho} \rho_1(x,t) + \frac{\partial f(\rho_0, s_0)}{\partial s} s_1(x,t) = p_1(x,t) \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial s_1(x,t)}{\partial t} + V_1(x,t) \nabla s_0(x) = 0 \tag{6.8}$$

lineer sistem oluşur [3].

Bunu görelim.

$$\frac{\partial\left(\varepsilon_1 V_1(x,t)\right)}{\partial t} + \left(\varepsilon_1 V_1(x,t).\nabla\right)\left(\varepsilon_1 V_1(x,t)\right) + \gamma\left(\varepsilon_1 V_1(x,t)\right)$$
$$+ \frac{1}{\rho_0(x) + \varepsilon_1 \rho_1(x,t)} \nabla\left(p_0 + \varepsilon_1 p_1(x,t)\right) = 0$$
$$\varepsilon_1 \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} + \varepsilon_1^2 \left(V_1(x,t).\nabla\right) V_1(x,t) + \gamma \varepsilon_1 V_1(x,t) + \frac{1}{\rho_0(x) + \varepsilon_1 \rho_1(x,t)} \varepsilon_1 \nabla p_1(x,t) = 0$$
$$\varepsilon_1 \left[\frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} + \varepsilon_1 \left(V_1(x,t).\nabla\right) V_1(x,t) + \gamma V_1(x,t) + \frac{1}{\rho_0(x) + \varepsilon_1 \rho_1(x,t)} \nabla p_1(x,t)\right] = 0$$

$$\frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} + \varepsilon_1\left(V_1(x,t).\nabla\right)V_1(x,t) + \gamma V_1(x,t) + \frac{1}{\rho_0(x) + \varepsilon_1\rho_1(x,t)}\nabla p_1(x,t) = 0$$

olur. $\varepsilon_1 \to 0$ gittiğinde

$$\frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} + \gamma V_1(x,t) + \frac{1}{\rho_0(x)}\nabla p_1(x,t) = 0 \tag{6.5}$$

denklemi elde edilir.

$$\frac{\partial\left(\rho_0(x) + \varepsilon_1\rho_1(x,t)\right)}{\partial t} + \nabla\left[\left(\rho_0(x) + \varepsilon_1\rho_1(x,t).\left(\varepsilon_1 V_1(x,t)\right)\right)\right] = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial\rho_0(x)}{\partial t}}_{=0} + \varepsilon_1\frac{\partial\rho_1(x,t)}{\partial t} + \nabla\left[\varepsilon_1\rho_0(x)V_1(x,t) + \varepsilon_1^{\,2}\rho_1(x,t)V_1(x,t)\right] = 0$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial\rho_1(x,t)}{\partial t} + \varepsilon_1\nabla\left(\rho_0(x)V_1(x,t)\right) + \varepsilon_1^{\,2}\nabla\left(\rho_1(x,t)V_1(x,t)\right) = 0$$

$$\varepsilon_1\left[\frac{\partial\rho_1(x,t)}{\partial t} + \nabla\left(\rho_0(x)V_1(x,t)\right) + \varepsilon_1\nabla\left(\rho_1(x,t)V_1(x,t)\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial\rho_1(x,t)}{\partial t} + \nabla\left(\rho_0(x)V_1(x,t)\right) + \varepsilon_1\nabla\left(\rho_1(x,t)V_1(x,t)\right) = 0$$

olur. $\varepsilon_1 \to 0$ gittiğinde

$$\frac{\partial\rho_1(x,t)}{\partial t} + \nabla\left(\rho_0(x).V_1(x,t)\right) = 0 \tag{6.6}$$

denklemi elde edilir.

$$p(x,t) = f(\rho(x,t), s(x,t)), \qquad p_0 = f(\rho_0, s_0)$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial t}\right|_{p = p_0 + \varepsilon_1 p_1} = \left.\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\cdot\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial t}\right)\right|_{\substack{\rho = \rho_0 + \varepsilon_1\rho_1 \\ s = s_0 + \varepsilon_1 s_1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p_0+\varepsilon_1 p_1\right)=\left[\frac{\partial}{\partial \rho} f\left(\rho_0+\varepsilon_1 \rho_1, s_0+\varepsilon_1 s_1\right)\right] \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0+\varepsilon_1 \rho_1\right)$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial s} f\left(\rho_0+\varepsilon_1 \rho_1, s_0+\varepsilon_1 s_1\right)\right] \frac{\partial}{\partial t}\left(s_0+\varepsilon_1 s_1\right)$$
$$\varepsilon_1 \frac{\partial p_1}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \rho} f\left(\rho_0+\varepsilon_1 \rho_1, s_0+\varepsilon_1 s_1\right) \varepsilon_1 \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial t}$$
$$+\frac{\partial}{\partial s} f\left(\rho_0+\varepsilon_1 \rho_1, s_0+\varepsilon_1 s_1\right) \varepsilon_1 \frac{\partial s_1}{\partial t}$$
$$\frac{\partial p_1}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \rho} f\left(\rho_0+\varepsilon_1 \rho_1, s_0+\varepsilon_1 s_1\right) \frac{\partial \rho_1}{\partial t}$$
$$+\frac{\partial}{\partial s} f\left(\rho_0+\varepsilon_1 \rho_1, s_0+\varepsilon_1 s_1\right) \frac{\partial s_1}{\partial t}$$

$\varepsilon_1 \rightarrow 0$ gittiğinde

$$\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial \rho} f\left(\rho_0(x), s_0(x)\right) \frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s} f\left(\rho_0(x), s_0(x)\right) \frac{\partial s_1(x,t)}{\partial t}$$

veya ses hızı c

$$c^2(x)=\frac{\partial}{\partial \rho} f\left(\rho_0(x), s_0(x)\right)$$

ile tanımlanırsa

$$\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t}=[c(x)]^2 \frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s} f\left(\rho_0(x), s_0(x)\right) \frac{\partial s_1(x,t)}{\partial t} \tag{6.9}$$

olur.

$$\nabla p_0=\nabla f\left(\rho_0(x), s_0(x)\right)$$
$$0=\frac{\partial f\left(\rho_0, s_0\right)}{\partial \rho} \nabla \rho_0+\frac{\partial f\left(\rho_0, s_0\right)}{\partial s} \nabla s_0 \tag{6.10}$$

yazılabilir.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(s_0(x)+\varepsilon_1 s_1(x,t)\right)+\left(\varepsilon_1 V_1(x,t)\right)\nabla\left(s_0(x)+\varepsilon_1 s_1(x,t)\right)=0$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial s_1(x,t)}{\partial t}+\varepsilon_1 V_1(x,t)\left[\nabla s_0(x)+\varepsilon_1\nabla s_1(x,t)\right]=0$$

$$\frac{\partial s_1(x,t)}{\partial t}+V_1(x,t)\left[\nabla s_0(x)+\varepsilon_1\nabla s_1(x,t)\right]=0$$

$\varepsilon_1\to 0$ gittiğinde

$$\frac{\partial s_1(x,t)}{\partial t}+V_1(x,t).\nabla s_0(x)=0 \tag{6.8}$$

elde edilir.

Önce s_1 i yok edelim.

Eş.6.8 ve Eş.6.10, Eş.6.9 da kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t}&=[c(x)]^2\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}f\left(\rho_0(x),s_0(x)\right)\underbrace{\frac{\partial s_1(x,t)}{\partial t}}_{-V_1(x,t)\nabla s_0(x)}\\
&=[c(x)]^2\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial s}f\left(\rho_0(x),s_0(x)\right)\left(-V_1(x,t)\nabla s_0(x)\right)\\
&=[c(x)]^2\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t}-V_1(x,t)\underbrace{\frac{\partial}{\partial s}f\left(\rho_0(x),s_0(x)\right).\nabla s_0(x)}_{-\frac{\partial f(\rho_0,s_0)}{\partial \rho}\nabla\rho_0}\\
&=[c(x)]^2\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t}+V_1(x,t)\underbrace{\frac{\partial f\left(\rho_0,s_0\right)}{\partial \rho}}_{[c(x)]^2}\nabla\rho_0(x)\\
&=[c(x)]^2\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t}+V_1(x,t)[c(x)]^2\nabla\rho_0(x)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t}=[c(x)]^2\left[\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t}+V_1(x,t)\nabla\rho_0(x)\right] \tag{6.11}$$

Şimdi V_1 ve ρ_1 i yok edelim. Bunun için Eş.6.11 in t ye göre türevini alalım.

$$\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2} = [c(x)]^2 \left[\frac{\partial^2 \rho_1(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} \nabla \rho_0(x) \right] \tag{6.12}$$

Eş.6.6 nın t ye göre türevini alalım.

$$\frac{\partial \rho_1(x,t)}{\partial t} + \nabla\left[\rho_0(x) V_1(x,t)\right] = 0 \tag{6.6}$$

$$\frac{\partial^2 \rho_1(x,t)}{\partial t^2} = -\nabla \left[\rho_0(x) \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} + V_1(x,t) \underbrace{\frac{\partial \rho_0(x)}{\partial t}}_{0} \right]$$

$$= -\nabla \left[\rho_0(x) \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} \right] \tag{6.13}$$

olur. Eş.6.13 de, Eş.6.5 i yani

$$\frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} = -\gamma V_1(x,t) - \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla p_1(x,t)$$

yi kullanırsak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_1(x,t)}{\partial t^2} &= -\nabla \left[\rho_0(x) \left(-\gamma V_1(x,t) - \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla p_1(x,t) \right) \right] \\ &= \nabla\left[\nabla p_1(x,t) + \gamma \rho_0(x) V_1(x,t)\right] \\ &= \nabla^2 p_1(x,t) + \gamma \nabla\left(\rho_0(x) V_1(x,t)\right) \end{aligned} \tag{6.14}$$

olur.

Eş.6.5 ve Eş.6.14, Eş.6.12 de yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2} = [c(x)]^2 \left[\frac{\partial^2 \rho_1(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial V_1(x,t)}{\partial t} \nabla \rho_0(x) \right] \tag{6.12}$$

$$\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2} = [c(x)]^2\Big[\nabla^2 p_1(x,t) + \gamma\nabla\big(\rho_0(x)V_1(x,t)\big)$$
$$+\left(-\gamma V_1(x,t) - \frac{1}{\rho_0(x)}\nabla p_1(x,t)\right)\nabla\rho_0(x)\Big]$$
$$\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2} = [c(x)]^2\Big[-\gamma\frac{\partial\rho_1(x,t)}{\partial t} + \nabla^2 p_1(x,t) - \gamma V_1(x,t)\nabla\rho_0(x)$$
$$-\frac{1}{\rho_0}\nabla p_1(x,t)\nabla\rho_0(x)\Big] \tag{6.15}$$

elde edilir. Eş.6.15 te $\frac{\partial\rho_1}{\partial t}$ yerine Eş.6.11 den

$$\frac{\partial\rho_1(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{[c(x)]^2}\left[\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} - [c(x)]^2 V_1(x,t)\nabla\rho_0(x)\right]$$

yazılırsa

$$\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2} = [c(x)]^2\Bigg[-\gamma\frac{1}{[c(x)]^2}\left(\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} - [c(x)]^2 V_1(x,t)\nabla\rho_0(x)\right)$$
$$+\nabla^2 p_1(x,t) - \gamma V_1(x,t)\nabla\rho_0(x) - \frac{1}{\rho_0(x)}\nabla\rho_0(x)\nabla p_1(x,t)\Bigg]$$
$$\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2} = -\gamma\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} + [c(x)]^2\left[\nabla^2 p_1(x,t) - \frac{1}{\rho_0}\nabla\rho_0(x)\nabla p_1(x,t)\right]$$
$$\frac{\partial^2 p_1(x,t)}{\partial t^2} + \gamma\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} = [c(x)]^2\rho_0(x)\nabla\left[\frac{1}{\rho_0(x)}\nabla p_1(x,t)\right] \tag{6.16}$$

elde edilir. Bu p_1 için dalga denklemidir.

Şimdi kabul edelim ki $p_1(x, t)$ zaman periyodik (veya zaman harmonik) yani,

$$p_1(x,t) = \mathrm{Re}\left[u(x)e^{-iwt}\right] \tag{6.17}$$

sadece uzaysal değişkene bağlı kompleks değerli bir u = u(x) fonksiyonu ve w > 0 frekansı ile tanımlansın. Eş.6.17 i, dalga denklemi Eş.6.16 da yerine koyarsak, u için üç boyutlu Helmholtz denklemi sağlanır.

$$\nabla^2 u(x) + \frac{w^2}{[c(x)]^2}\left(1 + i\frac{\gamma}{w}\right)u(x) = \frac{1}{\rho_0(x)}\nabla\rho_0(x).\nabla u(x) \tag{6.18}$$

Serbest uzayda c = c_0 sabit ve γ = 0 dır. "Dalga sayısı" ve "kırılma indeksi"ni,

$$k = \frac{w}{c_0} > 0 \qquad \text{ve} \qquad n(x) = \frac{c_0^2}{[c(x)]^2}\left(1 + i\frac{\gamma}{w}\right) \tag{6.19}$$

ile tanımlıyoruz.

O zaman Helmholt denklemi

$$\Delta u(x) + k^2 n(x).u(x) = \frac{1}{\rho_0(x)}\nabla\rho_0(x).\nabla u(x) \tag{6.20}$$

olur. Burada Ren(x) ≥ 0 ve Imn(x) ≥ 0 olmak üzere n(x) bir kompleks değerli fonksiyondur.

Eş.6.20, küçük genlikli zaman harmonik ses dalgalarının homogen olmayan bir ortamda yayılmasını belirtir.

Bu denklem IR^3 deki her serbest kaynak bölgesinde sağlanır. Kabul edelim ki her $|x| \geq a$ için $c(x) = c_0$ ve $\gamma(x) = 0$ yani $|x| \geq a$ için $n(x) = 1$ olacak biçimde a > 0 sayısı mevcut olsun. Bunun anlamı, homogen olmayan

$$\{x \in IR^3 : n(x) \neq 1\}$$

ortamı sınırlıdır ve a yarıçaplı

$$K(0,a) = \{y \in IR^3 \ : \ |y| < a\}$$

yuvarının içinde yatmasıdır. K(0, a) nın kapanışı,

$$K[0,a] = \{y \in IR^3 \ : \ |y| \leq a\}$$

ile tanımlanır. Ek olarak kaynağın K[0, a] yuvarının dışında olduğunu kabul edelim.

Bu kaynaklar, u^i olay dalgayı üretir, öyle ki K[0, a| yuvarının içinde,

$\Delta u^i + k^2 u^i = 0$

Helmholtz denklemini sağlar. Biz u^i yi “noktasal kaynak” veya “düzlemsel dalga” olarak alacağız, yani, zamana bağımlı olay dalga, kaynak z de ise

$$p_1^i(x,t) = \frac{1}{|x-z|} \mathrm{Re}\, e^{ik|x-z| - iwt} \quad \text{yani} \quad u^i(x) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}, \ |z| > a$$

veya

$$p_1^i(x,t) = \mathrm{Re}\, e^{ik\widehat{\theta}.x - iwt} \quad \text{yani} \quad u^i(x) = e^{ik\widehat{\theta}.x}$$

$\widehat{\theta} \in IR^3$ birim vektör olmak üzere.

Her durumda, K[0, a] yuvarının içinde u^i, $\Delta u^i + k^2 u^i = 0$ Helmholtz denkleminin bir çözümüdür. İlk durumda, p_1^i bir “küresel dalga”yı tanımlar öyle ki küresel dalga kaynaktan c_0 hızıyla uzaklaşır.

İkinci durumda $p_1^i(x,t)$ bir düzlemsel dalgadır, öyle ki $\widehat{\theta}$ doğrultusunda c_0 hızıyla yayılır.

Olay dalga n(x) kırılma indeksiyle tanımlanan homogen olmayan ortamda, $u^s(x)$ “saçılan dalga”yı üretir.

$u = u^i + u^s$ toplam alanı, kaynağın dışında $\Delta u + k^2 u = 0$ Helmholtz denklemini sağlar. Ayrıca biz saçılan dalganın homogen olmayan ortamdan, bir küresel dalga olarak uzaklaştığını beklemeliyiz.

Bu, aşağıdaki “yayılma koşulu” ile tanımlanır.

$$\lim_{r=|x|\to\infty} r\left(\frac{\partial u^s(x)}{\partial r} - iku^s(x)\right) = 0 \tag{6.21}$$

$\frac{x}{|x|} \in s^2$, burada s^2, IR^3 deki birim küredir [3].

6.1. Direkt Saçılma Problemi

$k > 0$ dalga sayısı, $|x| \geq a$ için $n(x) = 1$ olmak üzere kırılma indeksi $n = n(x)$ olsun ve u^i olay dalga verilsin. IR^3 te kaynak alanın dışında,

$$\Delta u + k^2 n(x) u = 0 \tag{6.22}$$

Helmholtz denklemini sağlayan (eğer $\Delta\rho_0 = 0$ ise) u toplamanı, öyle ki, $u^s = u - u^i$ saçılan alan Eş.6.12 yayılma koşulunu sağlamak üzere, belirleme problemidir.

6.2. Ters Saçılma Problemi

$K(0, a)$ yuvarının dışında, çok sayıda farklı u^i olay dalga ve (veya) farklı k dalga sayısına karşılık gelen $u(x)$ toplam alanın değerlerinden $n = n(x)$ kırılma indeksinin belirlenmesi problemidir.

6.3. Homogen Olmayan Bir Ortamda Zaman Harmonik Dalga Yayılması

Uzayda az yoğunluklu veya çok yoğunluklu bir bölgeden geçerek yayılan, zaman harmonik ses dalgasını gözönüne alalım. Kabul edelim ki, bölgenin yoğunluğu $\rho_0 = \rho_0(x)$ fonksiyonu ile verilsin ve $\rho_0(x)$ yavaş değişsin; yani $\nabla\rho_0(x)$ terimi ihmal edilebilir olsun. Bu nedenle $\nabla\rho_0(x) = 0$ alacağız. $U(x, t)$ hız potansiyeli, $x \in IR^3$, $(x, t) \in IR^4$ için,

$$\Delta_3 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^{\,2}} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^{\,2}} = \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \tag{6.23}$$

dalga denklemini gerçekler. Eş.6.23 de $c(x) \in C^1(IR^3)$, ses hızı olarak tanımlanır. $a > 0$, $c_0 > 0$ pozitif sabitler olmak üzere, $|x| \geq a$ için $c(x) = c_0$ tanımlansın. Eş.6.23 dalga denkleminin,

$$U(x, t) = u(x)T(t) \tag{6.24}$$

biçiminde değişkenlerine ayrılabilir çözümü arandığında, $-w^2$ ayırma sabiti olmak üzere, u(x) ve T(t) fonksiyonları,

$$\Delta_3 u(x) + \frac{w^2}{c^2(x)} u(x) = 0 \tag{6.25}$$

$$T''(t) + w^2 T(t) = 0 \tag{6.26}$$

denklemlerini sağlamalıdır. Eş.6.26 nın çözümleri, $e^{\mp iwt}$ olur. Burada w ses dalgasının frekansıdır. Ses dalgası, zaman harmonik olduğundan Eş.6.24 ayrılabilir çözümü,

$$U(x, t) = u(x)e^{-iwt} \tag{6.27}$$

olur. Böylece,

$$k^2 = \frac{w^2}{c_0^{\,2}} \quad \text{ve} \quad m(x) = 1 - \frac{c_0^{\,2}}{c^2(x)} \tag{6.28}$$

olmak üzere kompleks değerli u(x) fonksiyonu,

$$\Delta_3 u(x) + k^2[1 - m(x)]u(x) = 0 \tag{6.29}$$

indirgenmiş dalga denklemini sağlamalıdır.

U(x, t) yi iki fonksiyonun toplamı olarak düşünelim; Bunlar $U^i(x, t)$ olay dalga ve $U^s(x, t) = U(x, t) - U^i(x, t)$ saçılan dalga olsunlar. Dikkat edilirse, az yoğunluklu ya da çok yoğunluklu bir bölge yok ise $U^s(x, t) \equiv 0$ ve $U(x, t) = U^i(x, t)$ olur. Kabul edelim ki $U^i(x, t)$ olay dalga, düzlemsel dalga olsun. $U^i(x, t)$ düzlemsel dalga,

$$\Delta_3 U^i(x,t) - \frac{1}{c_0^{\,2}} \frac{\partial^2 U^i(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{6.30}$$

denklemini gerçekler. $\alpha \in IR^3$, $|\alpha| = 1$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_3)$ birim vektör olsun.

O zaman her bir t için

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 - c_0 t = \text{sabit}$$

denklemi, IR^3 de bir düzlem belirtir. Dolayısıyla keyfi, $F_1 \in C^2$ fonksiyonu olmak üzere,

$$U(x,t) = F_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 - c_0 t) \tag{6.31}$$

fonksiyonu, Eş.6.30 dalga denkleminin bir çözümüdür. Eş.6.31 fonksiyonu düzlemsel dalga olarak bilinir.

Eş.6.28 dan dolayı düzlemsel dalgayı,

$$U(x,t) = F_1\left(\alpha.x - \frac{w}{k} t\right)$$

veya

$$U(x,t) = F(k\alpha x - wt), \; F \in C^2$$

yazarız. α doğrultusundaki düzlemsel dalgayı özel olarak,

$$U^i(x,t) = e^{i(k\alpha.x - wt)} = e^{ik\alpha.x}.e^{-iwt} \tag{6.32}$$

alalım. $U^i(x, t)$ düzlemsel dalga α doğrultusunda hareket eder. Şimdi tekrar saçılan dalgaya dönelim $U^s(x, t)$ saçılan dalganın, engel bölgeden büyük uzaklıklardaki davranışı, uzaklaşan zaman harmonik küresel dalgalara benzer; yani $U^s(x, t)$

$$\Delta_3 U^s(x,t) = \frac{1}{c_0^{\,2}} \frac{\partial^2 U^s(x,t)}{\partial t^2} \tag{6.33}$$

dalga denklemi sağlar. Eş.6.33 dalga denkleminin

$$U^s(x,t) = u^s(x)T(t) \tag{6.34}$$

biçiminde değişkenlerine ayrılabilir çözümü arandığında, $-w^2$ ayırma sabiti ve $w^2 = c_0^{\,2}k^2$ olmak üzere, $u^s(x)$ ve $T(t)$ fonksiyonları

$$\Delta_3 u^s(x) + k^2 u^s(x) = 0 \tag{6.35}$$

$$T''(t) + w^2 T(t) = 0 \tag{6.36}$$

denklemlerini sağlamalıdır. Eş.6.35 in $x_1 = r\cos\theta\sin\Phi,\ x_2 = r\sin\theta\sin\Phi,$ $x_3 = r\cos\Phi$ küresel koordinatlardaki biçimi,

$$\frac{\partial^2 u^s}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u^s}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\Phi}\frac{\partial}{\partial\Phi}\left(\sin\Phi\frac{\partial u^s}{\partial\Phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\Phi}\frac{\partial^2 u^s}{\partial\theta^2} + k^2u^s = 0 \tag{6.37}$$

olur. Eş.6.37 in $u^s(r,\theta,\Phi) = R(r)F(\theta,\Phi)$ biçiminde çözümü arandığında $R(r)$ ve $F(\theta, \Phi)$ fonksiyonları

$$\frac{1}{\sin\Phi}\frac{\partial}{\partial\Phi}\left(\sin\Phi\frac{\partial F}{\partial\Phi}\right) + \frac{1}{\sin^2\Phi}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2} + \gamma F = 0$$

$$r^2R'' + 2rR' + \left(k^2r^2 - \gamma\right)R = 0 \tag{6.38}$$

denklemlerini sağlamalıdır. γ ayırma sabiti, $\gamma = n(n + 1)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ seçilirse, Eş.6.38 denklemi $v = r^{1/2}R$ bağımlı değişken değiştirmesiyle, $(n + 1/2)$. mertebeden

$$r^2v'' + rv' + \left[k^2r^2 - (n + 1/2)^2\right]v = 0 \tag{6.39}$$

Bessel denklemine dönüşür. Böylece Eş.6.38 in lineer bağımsız çözümleri,

$$r^{-1/2}J_{(n+1/2)}(kr) \quad \text{ve} \quad r^{-1/2}J_{-(n+1/2)}(kr)$$

olur. Yani $u^s(r, \theta, \Phi)$ yi

$$u^s(r, \theta, \Phi) = F(\theta, \Phi)r^{-1/2}J_{\mp(n+1/2)}(kr)$$

biçiminde yazarız. Bessel fonksiyonlarının, çok büyük r ler için asimtotik değeri kullanılırsa çok büyük r ler için,

$$u^s(r, \theta, \Phi) \sim \frac{F(\theta, \Phi)}{r}e^{ikr} \tag{6.40}$$

olur. Böylece çok büyük r ler için,

$$U^s(x, t) \sim \frac{F(\theta, \Phi)}{r}e^{i(kr - wt)} \tag{6.41}$$

yazarız. Eş.6.40 koşulu, $U^s(x, t)$ saçılan dalganın Sommerfeld yayılma koşulunu sağlamasını garanti eder yani

$$\lim_{r \to \infty} r\left(\frac{\partial U^s}{\partial r} - ikU^s\right) = 0$$

Bu incelemeler bizi, aşağıda tanımlanan probleme götürür. Kompleks değerli bir $u \in C^2(IR^3)$ fonksiyonu bulmalıyız öyle ki; u,

$$\Delta_3 u(x) + k^2[1 - m(x)]u(x) = 0 \ , \quad x \in IR^3 \tag{6.42}$$

$$u(x) = e^{ik\alpha . x} + u^s(x) \tag{6.43}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = 0 \tag{6.44}$$

denklemlerini sağlasın.

Eş.6.42 – Eş.6.44 problemi için bir çözüm kuralım.

$\Omega = \{x: \ |x| \leq a\}, \ \Omega_\delta = \{y: \ |y - x| < \delta\}$ ve $\Omega_\delta \subset \Omega$

olsun.

$x \in \Omega$ için

$$I(x) = \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} m(y)u(y)dy$$

integralini inceleyelim.

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{\Omega_\delta} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} m(y)u(y)dy + \int_{\Omega \setminus \Omega_\delta} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} m(y)u(y)dy \\ &= I^{(1)}(x) + I^{(2)}(x) \end{aligned} \tag{6.45}$$

yazalım.

$x \neq y$ için $\dfrac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$ fonksiyonu, $\Delta_3 u + k^2 u = 0$ denklemini sağlar. Böylece,

$$\Delta_3 I(x) + k^2 I(x) = \Delta_3 I^{(1)}(x) + k^2 I^{(1)}(x)$$

olur.

$$I^{(1)}(x) = \int_{\Omega_\delta} \frac{e^{ik|x-y|}-1}{|x-y|} m(y)u(y)dy + \int_{\Omega_\delta} \frac{1}{|x-y|} m(y)u(y)dy$$

yazalım.

$$\Delta_3 I^{(1)}(x) + k^2 I^{(1)}(x) = \int_{\Omega_\delta} \left(\Delta_3 + k^2\right)\left(\frac{e^{ik|x-y|}-1}{|x-y|}\right) m(y)u(y)dy$$
$$+\Delta_3 \int_{\Omega_\delta} \frac{1}{|x-y|} m(y)u(y)dy + k^2 \int_{\Omega_\delta} \frac{1}{|x-y|} m(y)u(y)dy$$

olur.

$\delta \to 0$ sıfıra gittiğinde,

$$\Delta_3 I(x) + k^2 I(x) = -4\pi m(x)u(x) \qquad (6.46)$$

elde edilir. $e^{ik\alpha.x}$, $\Delta_3 u + k^2 u = 0$ denkleminin bir çözümüdür. Bu nedenle eğer u(x),

$$u(x) = e^{ik\alpha.x} - \frac{k^2}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} m(y)u(y)dy \qquad (6.47)$$

integral denkleminin bir çözümü ise o zaman u(x)

$$\Delta_3 u(x) + k^2[1 - m(x)]u(x) = 0$$

denkleminin $x \in \Omega$ için bir çözümüdür.

Eş.6.47 integral denklemini kurarken $x \in \Omega$ kabul etmiştik. $x \in IR^3 \setminus \Omega$ ise o zaman $|x| \geq a$ için m(x) = 0 olduğundan ve $x \in IR^3 \setminus \Omega$ için $\dfrac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$ fonksiyonu Ω da singüler olamayacağından u(x), açık olarak Eş.6.42 nin bir çözümüdür.

Eş.6.47 integral denkleminin, Ω içinde sürekli olan bir u(x) çözümünü bulabileceğimizi kabul edelim. O zaman, $u(x) \in C^2(IR^3)$ ve u(x) in IR^3 de Eş.6.42 nin bir çözümü olduğunu gösterebiliriz.

$u^s(x)$ saçılan dalga fonksiyonunu,

$$u^s(x) = -\frac{k^2}{4\pi}\int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} m(y)u(y)dy \tag{6.48}$$

ile tanımlayalım. Böylece Eş.6.47 yi

$$u(x) = e^{ik\alpha.x} + u^s(x)$$

yazarız.

r > a için $u^s(x)$,

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u^s(x)}{\partial r} - iku^s(x)\right) = 0$$

yayılma koşulunu sağlar. Yani u(x), Eş.6.47 integral denkleminin bir çözümü ise Eş.6.48 ile tanımlanan $u^s(x)$ saçılan dalga,

$$u(x) = e^{ik\alpha.x} + u^s(x)$$

ve

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u^s(x)}{\partial r} - iku^s(x)\right) = 0$$

denklemlerini sağlar. Bu nedenle Eş.6.42 – Eş.6.44 denklemleriyle tanımlanan saçılma probleminin bir çözümünü bulmak için, Eş.6.47 integral denkleminin bir sürekli çözümünü bulmak gerekir. Eş.6.47 integral denklemini, yeteri kadar küçük k lar için, ardışık yaklaşmalar yöntemini uygulayarak çözeceğiz.

$T:C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$

lineer operatörünü,

$$(Tu)(x) = -\frac{k^2}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}m(y)u(y)dy \tag{6.49}$$

ile tanımlayalım. Böylece Eş.6.47 yi

$$u(x) = e^{ik\alpha.x} + (Tu)(x) \tag{6.50}$$

yazarız. Ardışık yaklaşmalar dizisini,

$$u_0(x) = 0$$
$$u_{n+1}(x) = e^{ik\alpha.x} + \left(Tu_n\right)(x)\ ,\quad (n \geq 0\ \text{için}) \tag{6.51}$$

tanımlayalım.

$\{u_n(x)\}$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[u_{n+1}(x) - u_n(x)\right] \tag{6.52}$$

serisinin yakınsak olmasıdır.

Eğer $x \in \Omega$ için

$$\left\|u_{n+1} - u_n\right\| \leq M\gamma^n \tag{6.53}$$

eşitsizliğini sağlayan M > 0 ve 0 < γ < 1 pozitif sabitleri bulunabilirse Eş.6.52 serisi düzgün yakınsak olur. Burada $\|u\| = \max_{x\in\Omega}|u(x)|$ şeklindedir. T bir daralma operatörü ise Eş.6.53 sağlanır.

T bir daralma operatörü ise her u, v $\in C(\Omega)$ ve 0 < γ < 1 için

$$\|Tu - Tv\| \leq \gamma \|u - v\| \tag{6.54}$$

sağlanır. T lineer olduğundan Eş.6.54 eşitsizliği, $u \in C(\Omega)$ için

$$\|Tu\| \leq \gamma \|u\| \tag{6.55}$$

eşitsizliğine denktir.

Eğer $\|Tu\| \leq \gamma \|u\|$ sağlanıyor ise o zaman $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[u_{n+1}(x) - u_n(x)\right]$ serisi düzgün yakınsak olur ve bir $u \in C(\Omega)$ fonksiyonu mevcuttur öyle ki,
$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\| = 0$

olur. u(x) in Eş.6.47 integral denkleminin bir çözümü olduğunu biliyoruz.

Şimdi T nin bir daralma operatörü olduğunu göstermeliyiz; yani, $0 < \gamma < 1$ yı sağlayan γ lar için

$$\|Tu\| \leq \gamma \|u\| \ , \quad u \in C(\Omega)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$u \in C(\Omega)$ için

$$\|Tu\| = \max_{x \in \Omega} \frac{k^2}{4\pi} \left| \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} m(y)u(y)dy \right| \leq \frac{k^2 \mu \|u\|}{4\pi} \left\| \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} dy \right\| \leq \frac{1}{2} k^2 \mu a^2 \|u\| \tag{6.56}$$

olur.
Burada

$$\mu = \max_{x \in \Omega} |m(x)|$$

dir.

Eğer,

$$\frac{k^2\mu a^2}{2} < 1$$

ise yani,

$$k^2 < \frac{2}{\mu a^2} \tag{6.57}$$

ise Eş.6.47 integral denklemi, ardışık yaklaşmalar ile çözülebilir.

Şimdi Eş.6.47 integral denklemin çözümünün,

$$k^2 < \frac{2}{\mu a^2}$$

koşulu altında tek olduğunu gösterelim. Bunu görmek için kabul edelim ki iki çözüm $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ olsun. O zaman $V(x) = u_1(x) - u_2(x)$ fonksiyonu V = TV ve her $n \in IN$ için $V = T^nV$ denklemlerini sağlar.

Her $n \in IN$ için

$$\|V\| = \|T^nV\| \leq \frac{1}{2^n}k^{2n}\mu^n a^{2n}\|V\| \tag{6.58}$$

eşitsizliği sağlanır ve Eş.6.57 eşitsizliği kullanılırsa $n \to \infty$ gittiğinde $V \equiv 0$ olduğu gösterilir.

Şimdi Eş.6.57 eşitsizliği sağlandığında Eş.6.42 – Eş.6.44 probleminin çözümünün tek olduğunu görelim yani $u \in C^2(IR^3)$ fonksiyonu,

$$\Delta_3 u + k^2[1 - m(x)]u = 0 \quad , \quad x \in IR^3 \tag{6.59}$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0 \tag{6.60}$$

denklemlerini sağlasın.

Dikkat edilirse Eş.6.42 – Eş.6.44 saçılma probleminin iki çözümü

$$u_1 = e^{ik\alpha.x} + u_1^s \quad , \quad u_2 = e^{ik\alpha.x} + u_2^s$$

ise u = u_1 – u_2 fonksiyonu Eş.6.59 – Eş.6.60 ı sağlar.

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0$$

yayılma koşulu $|y| = a$ küresi üzerinden,

$$\lim_{a\to\infty} \int_{|y|=a} \left|\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right|^2 ds(y) = 0 \tag{6.61}$$

dır ve İkinci Green özdeşliğinden

$$\int_{|y|=a} \left(\bar{u}\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right) ds(y) = 0 \tag{6.62}$$

u nun kompleks eşleniği $\bar{u}$ olmak üzere yazabiliriz.

Eş.6.61 ve Eş.6.62 den

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{a\to\infty} \int_{|y|=a} \left|\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right|^2 ds(y) \\ &= \lim_{a\to\infty} \int_{|y|=a} \left[\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 + k^2|u|^2 + ik\left(\bar{u}\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}\right)\right] ds(y) \\ &= \lim_{a\to\infty} \int_{|y|=a} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 + k^2|u|^2\right) ds(y) \end{aligned} \tag{6.63}$$

elde edilir.

IR^3 te keyfi a > 0 için $|y| \le a$ bölgesinde gösterilim teoreminden

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=a} \left[\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial r}(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right] ds(y)$$

$$- \frac{k^2}{4\pi} \int_{|y| \le a} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} m(y) u(y) d(y) \tag{6.64}$$

olur. Schwarz eşitsizliğinden

$$\frac{1}{4\pi} \left| \int_{|y|=a} \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial r}(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right) ds(y) \right| \le \frac{1}{4\pi} \left[\int_{|y|=a} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + |u|^2 \right) ds(y) \right]^{1/2}$$

$$\left[\int_{|y|=a} \left(\left| \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right|^2 + \left| \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right|^2 \right) ds(y) \right]^{1/2} \tag{6.65}$$

Eş.6.63 den

$$\lim_{a \to \infty} \int_{|y|=a} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 ds(y) = \lim_{a \to \infty} \int_{|y|=a} |u|^2 ds(y) = 0$$

elde edilir.

$r = |x|$ için ve yeteri kadar büyük r ler için

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

yazılabilir. Böylece $a \to \infty$ sonsuza gittiğinde Eş.6.65 in sol yanı sıfıra gider. Diğer yandan $|x| \geq a$ için $m(x) \equiv 0$ olduğundan Eş.6.64 $a \to \infty$ için ve $|x| < a$ için

$$u(x) = -\frac{k^2}{4\pi} \int_{|x| \leq a} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} m(y)u(y)dy \qquad (6.66)$$

olur. Fakat k, $k^2 < \dfrac{2}{\mu a^2}$ eşitsizliğini sağladığından $a \to \infty$ için $k^2 \to 0$ sıfıra gider. Böylece Eş.6.66 integral denklemin çözümü yalnız $u(x) \equiv 0$ olur. Biz bu işlemi, a keyfi ve $|x|$, $|x| < a$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir nokta için yaptık.

Eş.6.42 – Eş.6.44 saçılma problemini, bir integral denklem olarak yazabilmek için Helmholtz denkleminin bir temel çözümünü kullandık. Eş.6.47 integral denklemini çözebilmek için, T operatörünün bir daralma dönüşümü olduğunu göstermek gerekir. Eğer, $k^2 < \dfrac{2}{\mu a^2}$ sağlanmaz ise, T bir daralma dönüşümü olmaz [1,4].

KAYNAKLAR

1. Anar, İ.E, “Kısmi Diferansiyel Denklemler”, ***Palme***, Ankara, 187-386 (2005).
2. Mikhlin, S.G., “Mathematical Physics an Advanced Course”, ***North-Holland Publishing Company,*** 151-181, 217-270, 357-387 (1970).
3. Colton, D, And Kress, R., “İnverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory”, ***Springer-Verlag***, Berlin, 13-21, 211-214 (1992).
4. Colton,D., “Partial Differential Equations: An Introduction”, ***Random House***, New York, 181-220 (1988).
5. Colton, D. And Kress,R., “Integral Equations Methods in Scattering Theory”, ***John Wiley***, New York, 46-58, 66-84 (1983).
6. John, F., “Partial Differential Equations, Ed.2” , ***Springer- Verlag***, New York, 94-125 (1975).
7. Kaplan, W., “Advanced Calculus, Ed. 4”, ***Addison Vesley***, New York, 317-378 (1991).
8. Sobolev, S. L., “Partial Differential Equations of Mathematical Physics” , ***Pergamon Press*** , Elmsford, 228-260 (1965).
9. Zachmanoglou, E.C. And Dale, W., “Introduction to Partial Differential Equations with Applications” , ***Dover Publications***, New York, 171-260 (1986).
10. Bitzade, A.V. “Equations of Mathematical Physics”, ***Mir Publishers***, Moscow, 47-94 (1980).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: TURAN, Selcan
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 11.05.1981 Ankara
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (533) 431 01 96
e-mail	: turan.selcan@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek Lisans	Ankara Üniversitesi Ortaöğretim Alan Öğretmenliği Tezsiz Yüksek Lisans	2005
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2003
Lise	Kocatepe Mimar Kemal Lisesi	1998

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2005-	Ulaştırma Bakanlığı	Bilgisayar İşletmeni