SLANT VE SEMİ-SLANT ALTMANİFOLDLAR

Nazan Nur ÖĞÜNLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2010

ANKARA

Nazan Nur ÖĞÜNLÜ tarafından hazırlanan SLANT VE SEMİ-SLANT ALTMANİFOLDLAR adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç Dr. Aysel TURGUT VANLI …………………………………
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Baki KARLIĞA …………………………………
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç Dr. Aysel TURGUT VANLI …………………………………
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Yusuf YAYLI …………………………………
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Tarih: 17/06/2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU …………………………………
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Nazan Nur ÖĞÜNLÜ

SLANT VE SEMİ-SLANT ALTMANİFOLDLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Nazan Nur ÖĞÜNLÜ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2010

ÖZET

Bu tezde, Kenmotsu manifoldların slant, semi-slant ve bi-slant altmanifoldları çalışıldı. Bu altmanifoldlar üzerindeki dağılımların intagrallenebilirliği incelendi. Ayrıca, son bölümde, bir Kenmotsu manifold üzerinde semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon tanımlanarak semi-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu semi-slant altmanifoldlar incelendi.

Bilim Kodu	**:204.1.049**
Anahtar Kelimeler	**:Kenmotsu manifold, Slant altmanifold, Semi-slant altmanifold, Bi-slant altmanifold, Semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon.**
Sayfa Adedi	**:108**
Tez Yöneticisi	**:Doç. Dr. Aysel TURGUT VANLI**

SLANT AND SEMI-SLANT SUBMANIFOLDS
(M.Sc. Thesis)

Nazan Nur ÖĞÜNLÜ

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
June 2010

ABSTRACT

In this thesis, slant, semi-slant and bi-slant submanifolds of Kenmotsu manifolds are studied. In addition, integribility of distributions on these submanifolds were investigated. Moreover, semi-symmetric non-metric connection on Kenmotsu manifolds is defined, and semi-slant submanifolds of Kenmotsu manifold with semi-symmetric non-metric connection are worked.

Science Code : **204.1.049**
Key Words :**Kenmotsu manifold, Slant submanifold, Semi-slant submanifold, Bi-slant submanifold, Semi-symmetric non-metric connection.**
Page Number :**108**
Adviser :**Assoc. Prof. Aysel TURGUT VANLI**

Sevgili Oğlum Ahmet Erdem'e…

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, değerli vaktini harcamaktan çekinmeyen, yanlışa düştüğümde bana doğru yolu gösteren değerli hocam Doç. Dr. Aysel TURGUT VANLI’ya, bu zor süreçte maddi ve manevi desteğini bir an olsun benden esirgemeyen sevgili eşim Bilal ÖĞÜNLÜ’ye teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamalarıyla birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbf{A_N}$	Şekil operatörü
$\mathbf{C^{\infty}(M, IR)}$	M de IR ye diferensiyellenebilir fonksiyonlar
g	Riemann metriği
h	İkinci temel form
$\mathbf{L_X}$	Lie operatörü
M	Diferensiyellenebilir manifold
$\mathbf{N_{\phi}}$	ϕ nin Nijenhuis tensör alanı
R	Riemann eğrilik tensörü
IR	Reel sayılar uzayı
$\mathbf{T_P(M)}$	M nin p noktasındaki teğet uzayı
χ**(M)**	Vektör alanlarının uzayı
$\chi^{\perp}$**(M)**	Dik vektör alanlarının uzayı
$\mathbf{T_P(M)^{\perp}}$	M nin p noktasındaki dik uzay
ξ	Karakteristik vektör alanı
[,]	Lie braketi
η	1-form
ϕ	(1,1) tipinden tensör alanı
Γ**(D)**	D dağılımına ait vektör alanlarının uzayı

1. GİRİŞ

Binlerce yıl önce Eflatun (Platon) Akademia'nın kapısına "Geometri bilmeyen buraya giremez." diye yazdırarak, geometrinin o dönemlerin düşünce dünyasında ne kadar önemli olduğunu ortaya koymuş ve gelecekte ne kadar önemli olacağı mesajını da tüm dünyaya ifade etmiştir.

Antik çağdan günümüze kadar uzanan dönemde; değişen, gelişen düşünce dünyasında, bilimin ve teknolojinin içerisinde matematiğin ve geometrinin önemi daima korunmuştur. Bu süreçte geometri, yaşadığımız çevrenin anlaşılmasından da öte evrenin yapısının anlaşılmasında, hatta düşünme sisteminin bizzat kendisinin daha iyi algılanmasında önemli bir bilim dalı olmuştur. Özellikle matematiğin, fiziğin, mühendislik ve bilgisayar bilimlerinin geometriye uzak gibi görünen kolları dahi bugün geometriyi kullanır hale gelmişlerdir.

İnsanoğlunun zaman içerisinde oluşan ihtiyaçlarına göre geometri çeşitli dallara ayrılmış ve çalışmalar daha özgün yürütülmüştür. Bu alanlardan birisi de diferensiyel hesaplamanın ve özellikle diferensiyel hesabın geometriye tatbik edildiği dal olan diferensiyel geometridir.

Diferensiyel geometri, Matematiğin türev işlemi kullanılarak çalışılan, geometrinin bir koludur. Fonksiyonun bağımsız değişken sayısı uzayın koordinatlarına karşı getirtilebilir. İncelediği temel büyüklükler eğri, yüzey, teğet, düzlem, normal vektör olarak sayılabilir.

On dokuzuncu yüzyıldaki en değerli matematik kitaplarında diferensiyel geometrinin temeli, düzlem ve uzaydaki eğrilerle uzaydaki yüzeyler olmuştur. Diferensiyel geometrinin temel kavramları eğrilerin teğetleri, teğetlerin değişmeleri ve eğrilikleridir. Kartografyadaki bir yüzeyin bir başka yüzey üzerine haritasının çıkarılması diferensiyel geometri kavramlarına dayanan bir çalışmadır. Bu sahada vektör ve tensör hesap, düzenli bir şekilde kullanılır. Geometrinin bu bahsinin anlaşılmasında, diferensiyel hesap esaslarının iyi bilinmesi gerekmektedir.

Diferensiyel geometri türevin tanımlı olduğu Riemannn manifoldlarının özellikleriyle de ilgilenir. Başka bir deyişle, bu manifoldlar üzerindeki metrik kavramlarla uğraşır. Eğrilik, eğriler için burulma ve yüzeyler için değişik eğrilikler araştırılan özellikler arasındadır.

Manifold, her bir noktasının komşuluğunda topolojik olarak reel açık birim küreye özdeş olan bir topolojik uzaydır. Bir manifoldun, manifold özelliğini sağlayan herhangi bir altkümesine bu manifoldun altmanifoldu denir.

Katsuei Kenmotsu, 1972 yılında almost kontakt metrik manifoldların yeni bir sınıfını tanımlamıştır. Eğrilik tensörü ve Ricci eğrilik tensörü başta olmak üzere manifoldla ilgili bazı temel kavramlar üzerinde çalışmıştır. Tanımlanan bu manifold daha sonra Kenmotsu manifold olarak isimlendirilmiştir.

Slant altmanifold terimi ilk kez B.Y. Chen tarafından 1990 yılında ortaya konmuş ve Chen, almost Hermityan manifoldların slant altmanifoldları üzerinde çalışmıştır. Ayrıca, yine aynı yıllarda Chen ve Tazawa, C^2 ve C^4 ün slant altmanifoldlarının örneklerini vermişlerdir. 1993 yılında, Maeda, Ohnita ve Udagawa bir Kaehlerian manifoldun slant altmanifoldlarını tanımlamışlardır. Daha sonra, Lotta, 1996 yılında bir almost kontakt metrik manifoldun slant altmanifoldlarını tanımlamış ve bununla ilgili ilk çalışmayı yapmıştır. Lotta, ayrıca, K-kontakt manifoldların 3-boyutlu anti-invaryant olmayan slant altmanifoldlarının geometrisi ile ilgili çalışmalara öncülük etmiştir. Diğer taraftan, Cabrerizo ve arkadaşları bir Sasakian manifold ile bir K-kontakt manifoldun slant altmanifoldlarıyla ilgilenmişler ve yaptıkları çalışmalarla birçok enteresan sonuç elde etmişlerdir.

Bir Kenmotsu manifoldun slant altmanifoldları ile ilgili çalışmalar son yıllarda yapılmaya başlanmıştır. Bununla ilgili ilk adımı 2004 yılında Gupta ve arkadaşları atmış ve daha sonra bu çalışmalarını yeni çalışmalar ile ilerletmişlerdir. Ayrıca, 2007 yılında Khan ve arkadaşları da Kenmotsu manifold üzerinde slant altmanifoldlar ile ilgili çeşitli sonuçlar elde etmişlerdir.

CR-altmanifoldların bir genel versiyonu olan semi-slant altmanifoldlar ile ilgili çalışmalar 1994 yılında N. Papaghiuc tarafından başlatılmıştır. Daha sonra, Cabrerizo ve arkadaşları 1999 yılında Sasakian manifoldların semi-slant altmanifoldlarını ortaya koymak için Kaehlerian manifoldların semi-slant altmanifoldları çalışmasını ilerletmişlerdir. 2007 yılında Khan'lar araştırmalarında, Kenmotsu manifoldların semi-slant altmanifoldlarını oluşturmanın, Sasakian manifoldların semi-slant altmanifoldlarını oluşturmaktan tamamen farklı olduğunu görmüşlerdir. İşte bu durum üzerinde çalışılmaya değer bulunmuştur. Ayrıca, Cabrerizo ve arkadaşları 1999 yılında Almost kontakt metrik manifoldun bi-slant altmanifoldlarını tanıtmışlar ve bazı önemli sonuçlar bulmuşlardır.

Bu görüşler doğrultusunda bu tezde bir Kenmotsu manifoldun slant ve semi-slant altmanifoldları ve almost kontakt metrik manifoldun bi-slant altmanifoldları araştırılarak yeni çalışmalar eklenmiştir.

Bu tez çalışması özetle aşağıdaki kısımlardan oluşmaktadır.

İkinci bölümde, temel kavramlar açıklanırken, Riemann manifoldlar ve altmanifoldlar, almost kompleks ve almost kontakt manifoldlar, Kenmotsu manifoldlar ve bir Kenmotsu manifoldun altmanifoldu ile ilgili temel bilgi ve teoremler üzerinde durulmuştur.

Üçüncü bölümde, Kenmotsu manifoldun slant altmanifoldu tanımı verilmiş ve slant altmanifoldlar ile ilgili teorem ve örnekler üzerinde çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde, bir Kenmotsu manifoldun semi-slant altmanifoldu tanımı yapılmış ve semi-slant altmanifoldlar üzerinde yapılan çalışmalar verilmiştir.

Beşinci bölümde, bir almost kontakt metrik manifoldun bi-slant altmanifoldu tanımı verilmiş ve bi-slant altmanifoldun slant ve semi-slant altmanifoldlar ile ilişkisi incelenmiştir.

Altıncı bölümde, R. Sarı'nın, "Kenmotsu f-pk Manifoldlar" başlıklı Yüksek Lisans Tez çalışmasından faydalanılmış olup, semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir Kenmotsu manifoldun semi-slant altmanifoldlarına ilişkin orjinal çalışmamız sunulmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Riemann Manifoldlar ve Altmanifoldlar

2.1. Tanım

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den IR ye C^∞ fonksiyonlarının uzayı $C^\infty(M,IR)$ olmak üzere, M üzerinde;

$$g:\chi(M)\times\chi(M)\rightarrow C^\infty(M,IR)$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, bilineer $(0,2)$-tipinden tensör alanı g 'ye M üzerinde bir *Riemann metriği* ve g Riemann metriği ile birlikte M ye bir *Riemann manifoldu* denir ve (M,g) şeklinde gösterilir [Hacısalihoğlu, 1983].

2.2. Tanım

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere; $\forall f,g\in C^\infty(M,IR)$, $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}\nabla:\chi(M)\times\chi(M)&\rightarrow\chi(M)\\ (X,Y)\quad&\rightarrow\nabla(X,Y)=\nabla_X Y\end{aligned}$$

dönüşümü,

(i) $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$

(ii) $\nabla_{fX+gY}Z=f\nabla_X Z+g\nabla_Y Z$

(iii) $\nabla_X(fY)=f\nabla_X Y+X(f)Y$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ye M manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve ∇_X e de X *e göre kovaryant türev operatörü* denir [Hacısalihoğlu, 1983].

2.3. Tanım

(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin konneksiyon olsun. $\forall X,Y,Z\in\ \chi(M)$ için, ∇ dönüşümü

(i) $\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]$ (sıfır torsiyon özelliği)

(ii) $Xg(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z)$ (konneksiyonun metrikle bağdaşması özelliği)

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde *sıfır torsiyonlu Riemann konneksiyon* veya *Levi-Civita konneksiyon* denir [Hacısalihoğlu, 1983].

2.4. Tanım

U bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$\begin{aligned}[,]:U\times U&\to U\\ (X,Y)&\to[X,Y]\end{aligned}$$

dönüşümü de

(i) 2-lineer

(ii) Anti-Simetrik ($\forall X,Y\in U$ için $[X,Y]=-[Y,X]$)

(iii) $\forall X,Y,Z\in U$ için; $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$

şartlarını sağlıyorsa $[,]$ dönüşümüne, U *üstünde bir Lie operatörü* (*Lie parantez operatörü*) denir [Hacısalihoğlu, 1983].

2.1. Teorem

M bir diferensiyelllenebilir manifold ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$[,]:\chi(M)\times\chi(M)\rightarrow\chi(M)$$
$$(X,Y)\qquad\rightarrow[X,Y]$$

dönüşümü $\forall f\in C^{\infty}(M,IR)$ için

$$[X,Y](f)=X(Yf)-Y(Xf)$$

şeklinde tanımlanırsa, $[,]$ operatörü $\chi(M)$ üzerinde bir Lie operatörüdür [Yano ve Kon, 1984].

2.1.5. Tanım

M bir manifold olmak üzere

$$\varphi:\mathbb{R}\times M\rightarrow M$$
$$(t,p)\rightarrow\varphi_t(p)$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyor ise φ ye M nin diferensiyellenebilir bir 1-parametreli grubu adı verilir

(i) $\forall t\in\mathbb{R}$ için

$$\varphi_t:p\rightarrow\varphi_t(p)$$

bir difeomorfizim

(ii) $\forall t, s \in \mathbb{R}$ ve $p \in M$ için

$$\varphi_{t+s}(p) = \varphi_t(\varphi_s(p))$$

dir [Yano ve Kon, 1984].

2.6. Tanım

M üzerinde bir vektör alanı X ve X ile gerilmiş bir lokal dönüşümlü 1-parametreli grup φ_t olsun. X tensör alanına göre bir K tensör alanının X yönünde $L_X K$ ile gösterilen *Lie türevi*;

$$L_X K = [X, K]$$

olarak tanımlanır [Kobayashi ve Nomizu, 1963].

2.7. Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $X \in \chi(M)$ için L_X, keyfi (s, r) tipinde tensör alanını yine (s, r) tipinde bir tensör alanına götürür ve X *vektör alanına göre Lie türev operatörü* olarak adlandırılır [Yano ve Kon, 1984, Duggal ve Bejancu, 1996].

2.2. Teorem

(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall f \in C^{\infty}(M, IR)$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

(i) $L_X(f) = X(f)$, $\forall f \in C^{\infty}(M, R)$

(ii) $L_X Y = [X, Y]$, $\forall Y \in \chi(M)$

(iii) $L_X g(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y)$

dir [Yano ve Kon, 1984, Duggal ve Bejancu, 1996].

2.8. Tanım

(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun. $\forall X,Y,Z\in\ \chi(M)$ için Riemann konneksiyonu,

$$2g(\nabla_X Y,Z)=Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y)-g\big(X,[Y,Z]\big)+g\big(Y,[Z,X]\big)$$
$$+g\big(Z,[X,Y]\big)$$

Kozsul formülü ile tek türlü belirtilir [Yano ve Kon, 1984].

2.9. Tanım

M bir Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$R:\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$$
$$(X,Y,Z)\to R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z \qquad (2.1)$$

biçiminde tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde $(1,3)$- tipinden tensör alanıdır. Bu tensör alanına M *nin Riemann eğrilik tensörü* denir [Spivak, 1979].

2.3. Teorem

M bir Riemann manifoldu ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için,

(i) $g\big(R(X,Y)Z,W\big)=-g\big(R(Y,X)Z,W\big)$,

(ii) $g\big(R(X,Y)Z,W\big)=-g\big(R(X,Y)W,Z\big)$,

$(\text{iii})\ g\left(R(X,Y)Z,W\right)=g\left(R(Z,W)X,Y\right)$

dir [O'Neill, 1983].

2.10. Tanım

(M,g) bir Riemann manifoldu ve R, (M,g) nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$R(X,Y)Z+R(Z,X)Y+R(Y,Z)X=0$$

eşitliği *I. Bianchi Özdeşliği* olarak adlandırılır [Yano ve Kon, 1984].

2.11. Tanım

(M,g) bir Riemann manifoldu, M nin Riemann eğrilik tensörü R ve ∇ Levi-Civita konneksiyon olsun. $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için,

$$(\nabla_X R)(Y,Z)+(\nabla_Y R)(Z,X)+(\nabla_Z R)(X,Y)=0$$

eşitliği *II. Bianchi Özdeşliği* olarak adlandırılır [Yano ve Kon, 1984].

2.12. Tanım

M ve $\overline{M}$ sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifold ve $f:M\to\overline{M}$, bir C^∞ dönüşüm olsun. $\mathrm{boy}(f_*(T_pM))=q$ ise f nin $p\in M$ noktasındaki rankı q olup, $\mathrm{rank}f=q$ ile gösterilir. Eğer $\mathrm{boy}M=\mathrm{rank}f$ ise f ye *immersiyon* (daldırma) M ye de $\overline{M}$ nin *immersed altmanifoldu* denir.

f immersiyonu 1-1 ise f ye *imbeding (gömme)* M ye de $\overline{M}$ nin *gömülen altmanifoldu* yada sadece *altmanifoldu* denir [Chen, 1973].

2.13. Tanım

$(\overline{M},\overline{g})$ bir Riemann manifold ve M, $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Herhangi bir $p \in M$ noktası için,

$$T^{\perp}M = \left\{V_p \in T_p\overline{M} : \overline{g}\left(X_p, V_p\right) = 0, \forall X_p \in T_pM\right\}$$

cümlesi tanımlansın. $p \in M$ noktasında $\forall\ X_p \in T_pM$ için $\overline{g}\left(X_p, V_p\right) = 0$ koşulunu sağlayan V_p vektörüne M nin *normal vektörü*, V_p nin birim vektörü olması halinde de *M* nin *birim normal vektörü* denir. M nin tüm normal vektörlerini içeren $T^{\perp}M$ uzayına da M nin *normal demeti* adı verilir [Yano ve Kon, 1984].

2.14. Tanım

M, $\overline{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu ve $\overline{M}$ üzerindeki lineer konneksiyon $\overline{\nabla}$ olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanan denkleme *Gauss formülü* denir. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X,Y)$ sırasıyla $\overline{\nabla}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir.

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^{\perp}(M)$$

şeklinde tanımlanan h ya M *nin ikinci temel formu* denir. Eğer h = 0 ise M *ye total geodeziktir* denir [Chen, 1973].

2.15. Tanım

$(\overline{M}, \overline{g})$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M ve M nin birim normal vektör alanı V olsun.

$A_V : \chi(M) \to \chi(M)$

dönüşümü iyi tanımlıdır. $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^{\perp}{}_X V \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanan bağıntıya *Weingarten formülü* denir. $-A_V X$ ve $\nabla^{\perp}{}_X V$ sırasıyla $\overline{\nabla}_X V$ nin teğet ve normal bileşenleridir. Burada A_V ye M nin *şekil operatörü* ve $\nabla^{\perp}$ e de *M* nin $T^{\perp}M$ *normal demetindeki konneksiyon* adı verilir.

M nin şekil operatörü ile ikinci temel formu arasında

$$g(A_V X, Y) = \overline{g}(h(X, Y), V) \tag{2.4}$$

bağıntısı vardır. Burada g, M üzerine indirgenmiş Riemann metriğidir [Chen, 1973].

2.16. Tanım

$(\overline{M}, \overline{g})$ Riemann manifoldu ve (M, g), $(\overline{M}, \overline{g})$ nin bir altmanifoldu olsun. R ve $\overline{R}$ sırasıyla (M, g) ve $(\overline{M}, \overline{g})$ üzerindeki Riemann eğrilik tensörleri olmak üzere, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$\bar{g}\left(\bar{R}(X,Y)Z,W\right)=g\left(R(X,Y)Z,W\right)-\bar{g}\left(h(X,W),h(Y,Z)\right)+\bar{g}\left(h(Y,W),h(X,Z)\right)$$

ile tanımlanan bağıntıya *Gauss denklemi* denir. Gauss denkleminin normal bileşeninin alınması ile elde edilen

$$\left(R(X,Y)Z\right)^{\perp}=\left(\bar{\nabla}_X h\right)(Y,Z)-\left(\bar{\nabla}_Y h\right)(X,Z)$$

bağıntısına *Codazzi denklemi* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.17. Tanım

$\bar{M}$, n-boyutlu ve N, $(n-1)$-boyutlu birer C^{∞} manifold olsunlar. $f:N\to\bar{M}$ fonksiyonu bir immersiyon ise $f(N)=M$ manifolduna $\bar{M}$ nin bir *hiperyüzeyi* denir [Hacısalihoğlu, 1984, Brickell ve Clark, 1970].

$(\bar{M},\bar{g})$ n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $(\bar{M},\bar{g})$ nin $(n-1)$-boyutlu bir altmanifoldu (M,g) olsun. Bu durumda (M,g) bir hiperyüzeydir. Eş. 2.3 de belirtilen $\nabla_X{}^{\perp}V$ normal bileşeni için $\nabla_X{}^{\perp}V=0$ dır [Kobayashi ve Nomizu, 1969].

2.18. Tanım

$\bar{M}$ nin bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı V verilsin. $\bar{M}$ de Riemann konneksiyonu $\bar{\nabla}$ olmak üzere $\forall X\in\chi(M)$ için

$$A_V X=-\bar{\nabla}_X V \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlı, A_V dönüşümüne $\bar{M}$ üzerinde *şekil operatörü* veya *Weingarten dönüşümü* denir [Kobayashi ve Nomizu, 1969].

2.19. Tanım

$\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ bir Riemann manifoldunun hiperyüzeyi $\left(M,g\right)$ ve M nin şekil operatörü A_V olsun. Bu durumda,

1) $A_V : \chi\left(M\right) \to \chi\left(M\right)$ dir

2) A_V lineerdir [Hacısalihoğlu, 1983].

2.1. Önerme

Bir Riemann manifold $\left(\overline{M},\overline{g}\right)$ nin bir hiperyüzeyi $\left(M,g\right)$ ve M nin şekil operatörü A_V olsun. Bu durumda A_V simetriktir [Hacısalihoğlu, 1983].

2.20. Tanım

m-boyutlu bir Riemnann manifold $\overline{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. $p \in M$ için T_pM de bir ortonormal baz $e_1, e_2, \ldots, e_n$ olmak üzere;

$$H = (\frac{1}{n})\, iz\left(h\right) \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlanan H ye *ortalama eğrilik vektörü* denir. Burada; h, ikinci temel form ve $iz\left(h\right) = \sum_i h(e_i, e_i)$ dir. $iz\left(h\right)$ baz seçiminden bağımsızdır.

H = 0 ise M ye *minimal altmanifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.21. Tanım

n-boyutlu bir Riemann manifoldu M olsun. M nin her p noktasına T_pM teğet uzayında r-boyutlu bir D_p alt uzayı bağlayan D dönüşümüne M üzerinde rankı r olan bir *dağılım* denir. $X \in \chi(M)$ olsun. $\forall p \in M$ için $X_p \in D_p$ ise *X* vektör alanına *D dağılımına aittir* denir. D dağılımına ait olan vektör alanlarının uzayı $\Gamma(D)$ ile gösterilir. $\Gamma(D)$ nin baz vektör alanları diferensiyellenebilir ise D ye *diferensiyellenebilir dağılım* denir [Duggal ve Bejancu, 1996].

2.22. Tanım

M nin her bir p noktasında $T_p{}^{\perp}M$ normal uzayında (n-r) boyutlu $D_p{}^{\perp}$ alt uzayı bağlayan $D^{\perp}$ dönüşümüne D dağılımının *tümleyen dağılımı* denir [Duggal ve Bejancu, 1996].

2.23. Tanım

m-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold M nin r-boyutlu bir altmanifoldu N olsun. f: N $\rightarrow$ M, bir immersiyon ve D, M üzerinde bir dağılım olmak üzere, her bir $u \in N$ için,

$$(f_*)_u(T_uN) = D_{f(u)}$$

eşitliği sağlanıyorsa N ye D nin bir *integral manifoldu* denir [Duggal ve Bejancu, 1996].

2.24. Tanım

N, D dağılımının bağlantılı bir integral manifoldu ve $\bar{f}:\bar{N}\to M$ immersiyonu ile $f(N)\subset\bar{f}(\bar{N})$ olacak şekilde $\bar{N}$ bağlantılı olmayan bir integral manifold $\bar{N}$ yoksa N ye bir *maksimal integral manifold* ya da D nin bir *yaprağı* denir [Duggal ve Bejancu, 1996].

2.25. Tanım

Her bir $p\in M$ noktası için D nin p yi içeren bir integral manifoldu var ise D dağılımına *integrallenebilirdir* denir [Duggal ve Bejancu, 1996].

2.26. Tanım

n-boyutlu M Riemann manifoldu üzerinde bir dağılım D olsun. $X,Y\in\Gamma(D)$ için $[X,Y]\in\Gamma(D)$ oluyorsa D dağılımına *involutive dağılım* denir [Duggal ve Bejancu, 1996].

2.4. Teorem

n-boyutlu bir Riemann manifold M olsun. M üzerinde bir D dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart D dağılımının involutive dağılım olmasıdır [Duggal ve Bejancu, 1996].

2.2. Almost Kompleks ve Almost Kontakt Manifoldlar

2.27. Tanım

M, 2n-boyutlu bir manifold olsun. $\forall$ $x \in M$ için, $J: T_xM \rightarrow T_xM$ bir lineer endomorfizm olmak üzere,

$$J_x^2 = -I_x$$

şartını sağlayan (1.1) tipinde J tensör alanına bir almost kompleks yapı ve (M,J) ye de *almost kompleks manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.28. Tanım

(M,J) bir almost kompleks manifold ve g de M üzerinde bir Riemann metriği olsun. $\forall$ $X \in \chi(M)$ için,

$$g(JX,JY) = g(X,Y)$$

şartını sağlayan g ye bir Hermitian metrik ve (M,J,g) ye de bir *almost Hermitian manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.29. Tanım

M bir almost Hermitian manifold olsun.

$$\Phi(X,Y) = g(X,JY)$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne *almost Hermitian yapının temel 2-formu* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.30. Tanım

M bir almost kompleks manifold ve g de Hermitian metrik olsun. Temel 2-form kapalı yani, $d\Phi = 0$ ise g ye *Kaehlerian metrik* denir. Üzerinde Kaehlerian metriği olan kompleks manifolda da bir *Kaehlerian manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.5. Teorem

(M,J,g) bir almost hermitian manifold olsun. Φ, almost hermitian yapının temel 2-formu ve ∇ de g tarafından tanımlanan kovaryant diferensiyel operatör olmak üzere; M bir Kaehlerian manifolddur gerek ve yeter şart $\nabla_X J = 0$ (J,M üzerinde paralel) dır [Yano ve Kon, 1984].

2.31. Tanım

Bir $(2n+1)$ boyutlu manifold M, ϕ, ξ ve η da M üzerinde sırasıyla, $(1,1)$ tipinde tensör alanı, bir vektör alanı ve bir 1-form olsun. $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$\phi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \qquad \text{ve} \qquad \eta(\xi) = 1 \tag{2.7}$$

özellikleri sağlanıyorsa o zaman (ϕ, ξ, η) ya M üzerinde bir *almost kontakt yapı* ve M manifolduna da *almost kontakt manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.32. Tanım

$(2n+1)$-boyutlu bir almost kontakt manifold M olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi(M)$ için,

$$\eta(X) = g(X, \xi) \tag{2.8}$$

ve

$$g\left(\phi(X),\phi(Y)\right)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \tag{2.9}$$

koşullarını sağlayan bir g Riemann metriği varsa (ϕ,ξ,η,g) dörtlüsüne bir *almost kontakt metrik yapı*, (M,ϕ,ξ,η,g) beşlisine de bir *almost kontakt metrik manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.6. Teorem

M bir almost kontakt manifold olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$g\left(\phi(X),\phi(Y)\right)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği daima vardır [Blair, 1976].

Sonuç

(2n+1)-boyutlu bir almost kontakt manifold M ile (ϕ,ξ,η,g) almost kontakt metrik yapısı verilsin. Bu durumda;

$$g(\phi X,Y) = - g(X,\phi Y) \tag{2.10}$$

dir [Yano ve Kon, 1984].

2.7. Teorem

(M,ϕ,ξ,η) bir almost kontakt manifold olsun. Bu durumda,

$$(i)\ \phi(\xi)=0,\quad (ii)\ \eta\circ\phi=0,\quad (iii)\ \operatorname{rank}\phi=2n \tag{2.11}$$

dir [Yano ve Kon, 1984].

2.33. Tanım

M bir almost kontakt metrik manifold olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\Phi(X,Y)=g(X,\phi(Y)) \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne (ϕ,ξ,η,g) *almost kontakt metrik yapının temel 2-formu* denir. Burada η kontakt formu için yazılan $\eta\wedge(d\eta)^n\neq 0$ koşulu $\eta\wedge(\Phi)^n\neq 0$ halini alır [Yano ve Kon, 1984].

2.34. Tanım

M $(2n+1)$-boyutlu bir manifold, η da M üzerinde bir 1-form olsun. Eğer,

$$\eta\wedge(d\eta)^n\neq 0$$

koşulunu sağlıyor ise M ye bir *kontakt yapıya sahiptir* denir. M manifolduna da, *kontakt manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.35. Tanım

$(2n+1)$-boyutlu bir almost kontakt metrik manifold M olsun. Eğer,

$$\Phi(X,Y)=d\eta(X,Y)$$

oluyorsa (ϕ,ξ,η,g) dörtlüsüne *kontakt metrik yapı* ve (M,ϕ,ξ,η,g) beşlisine *kontakt metrik manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

Sonuç

Her almost kontakt metrik manifold aynı zamanda kontakt manifolddur [Yano ve Kon, 1984].

2.8. Teorem

M bir kontakt metrik manifold olsun. ∇, M üzerinde bir konneksiyon olmak üzere $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$d\eta(X,Y) = g(X,\phi(Y)) = \frac{1}{2}\{g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X)\} \tag{2.13}$$

dır. (Yano ve Kon, 1984).

2.9. Teorem

$(2n+1)$- boyutlu bir kontakt metrik manifold M olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$d\eta(X,\xi) = 0 \tag{2.14}$$

ve

$$d\eta(\phi(X),Y) + d\eta(X,\phi(Y)) = 0 \tag{2.15}$$

dir [Yano ve Kon, 1984].

$(2n+1)$-boyutlu bir almost kontakt manifold M ve M üzerinde almost kontakt yapı (ϕ,ξ,η) olsun. Reel doğru IR ile gösterilirse $M\times IR$ manifoldu $(2n+2)$ boyutlu bir çarpım manifoldu olur. Burada X, $M\times IR$ üzerinde herhangi bir vektör alanı, t, IR nin koordinatı ve f de $M\times IR$ üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $M\times IR$ üzerinde bir almost kompleks yapıyı veren J lineer dönüşümü;

$$J:\chi(M\times IR)\to\chi(M\times IR)$$

$$\left(X,f\frac{d}{dt}\right)\to J\left(X,f\frac{d}{dt}\right)=J\left(X,f\frac{d}{dt}\right)=\left(\phi(X)-f\xi,\eta(X)\frac{d}{dt}\right) \tag{2.16}$$

şeklinde tanımlıdır.

2.36. Tanım

M bir diferensiyellenebilir manifold ve ϕ, M üzerinde bir $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı olmak üzere, $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$N_\phi:\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$$

olmak üzere,

$$N_\phi(X,Y)=\phi^2[X,Y]+[\phi(X),\phi(Y)]-\phi[\phi(X),Y]-\phi[X,\phi(Y)] \tag{2.17}$$

şeklinde tanımlanan $(1,2)$ tipindeki tensör alanına ϕ nin *Nijenhuis tensör alanı* denir [Yano ve Kon, 1984].

$\phi = J$ almost kompleks yapı olması halinde,

$$N_J(X,Y) = J^2[X,Y] + [J(X),J(Y)] - J[J(X),Y] - J[X,J(Y)]$$
$$= -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]$$

şeklinde olup N_J tensör alanına *J almost kompleks yapısının Nijenhuis torsiyon tensörü* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.37. Tanım

Bir almost kompleks metrik manifold M, M üzerindeki almost kompleks yapı J olsun. J nin Nijenhuis tensör alanı N_J olmak üzere $N_J = 0$ ise J dönüşümüne *integrallenebilirdir* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.38. Tanım

Bir $(2n+1)$- boyutlu almost kontakt manifold M ve (ϕ,ξ,η) de M üzerinde almost kontakt yapı olsun. Reel doğru IR olmak üzere $M \times IR$ çarpım manifoldu göz önüne alınsın. Eğer $M \times IR$ üzerindeki Eş. 2.16 ile verilen almost kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ,ξ,η) almost kontakt yapısı *normaldir* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.39. Tanım

Bir $(2n+1)$-boyutlu almost kontakt manifold M olsun. $M \times IR$ çarpım manifoldu üzerindeki

$$[,] : \chi(M\times R)\times\chi(M\times R) \to \chi(M\times R)$$
$$\left(\left(X, f\frac{d}{dt}\right),\left(Y, g\frac{d}{dt}\right)\right) \to \left[\left(X, f\frac{d}{dt}\right),\left(Y, g\frac{d}{dt}\right)\right] = \left([X,Y],\left(X(g)-Y(f)\right)\frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde tanımlanan operatör

(i) Anti-simetriktir,

(ii) Jacobi özdeşliğini sağlar,

bu şekilde tanımlanan bu operatöre *Lie braketi* denir [Blair, 2002].

2.10. Teorem

(M,ϕ,ξ,η) almost kontakt manifoldu verilsin. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(L_{\phi X}\eta)Y = \phi(X)\eta(Y) - \eta([\phi X, Y]) \tag{2.18}$$

$$(L_{\xi}\eta)X = \xi\eta(X) - \eta([\xi, X]) \tag{2.19}$$

$$(L_{\xi}\phi)X = [\xi, \phi X] - \phi([\xi, X]) \tag{2.20}$$

dir [Blair, 2002].

2.11. Teorem

(M,ϕ,ξ,η) almost kontakt manifoldu verilsin. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(L_{\phi X}\eta)Y = (L_{\phi Y}\eta)X \tag{2.21}$$

dir [Yano ve Kon, 1984].

2.3. Kenmotsu Manifold

2.40. Tanım

$\left(2n+1\right)$- boyutlu bir almost kontakt metrik manifold $(\bar{M},\phi,\xi,\eta,g)$ olsun. Eğer η kapalı ($d\eta = 0$), $d\Phi = 2\eta \wedge \Phi$ ve $\bar{M}$ normal ise $(\bar{M},\phi,\xi,\eta,g)$ ye bir *Kenmotsu manifold* denir [Kenmotsu, 1972].

2.12. Teorem

$\left(2n+1\right)$-boyutlu bir almost kontakt metrik manifold $(\bar{M},\phi,\xi,\eta,g)$ olsun. $\bar{M}$ nin Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter şart

$$(\bar{\nabla}_X\phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X \tag{2.22}$$

olmasıdır. Burada $\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyondur [Kenmotsu, 1972].

2.13. Teorem

$\left(2n+1\right)$ boyutlu bir Kenmotsu manifold $(\bar{M},\phi,\xi,\eta,g)$ olsun. Bu durumda;

$$\bar{\nabla}_X\xi = X - \eta(X)\xi \tag{2.23}$$

dir [Kenmotsu, 1972].

2.14. Teorem

$\left(2n+1\right)$ boyutlu bir Kenmotsu manifold $(\bar{M},\phi,\xi,\eta,g)$ ve eğrilik tensörü R olsun. Bu durumda;

$$R(X,Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X\,, \tag{2.24}$$

$$R(X,\xi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X\,, \tag{2.25}$$

$$R(X,\xi)\xi = \eta(X)\xi - X \tag{2.26}$$

dir [Kenmotsu, 1972].

2.4. Bir Kenmotsu Manifoldun Altmanifoldu

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin, bir altmanifoldu M ve $\xi\in\chi(M)$ olsun. $\bar{M}$ üzerinde Riemann metrik g ve Levi-Civita konneksiyon $\bar{\nabla}$ olmak üzere Gauss ve Weingarten formulleri; $\forall$ $X,Y\in\chi(M)$ ve $\forall$ $V\in\chi^{\perp}(M)$ için,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{2.27}$$

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^{\perp}{}_X V \tag{2.28}$$

dir. Burada; ∇, M üzerine indirgenmiş konneksiyon; $\nabla^{\perp}$, M nin $T^{\perp}M$ normal demet üzerindeki konneksiyon, h ve A sırasıyla M nin ikinci temel formu ve şekil operatörüdür.h ve A arasında

$$g\big(h(X,Y),V\big) = g(A_V X, Y) \tag{2.29}$$

bağıntısı vardır.Bu eşitlikte M üzerinde indirgenmiş Riemann metriği aynı g sembolü ile gösterildi.

Herhangi bir $X\in\chi(M)$ ve $V\in\chi^{\perp}(M)$ için,

$$\phi X = TX+NX \tag{2.30}$$

$$\phi V = tV+nV \tag{2.31}$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada TX ve NX sırasıyla ϕX in teğetsel ve normal parçası; tV ve nV sırasıyla ϕV nin teğetsel ve normal parçasıdır.

Eş. 2.30 daki bağıntı bir endomorfizm doğurur. Bu T endomorfizminin karesi T^2, Q ile gösterilsin. M üzerinde tanımlanan bu endomorfizmler T ve Q (1,1) tipinde birer tensör alanlarıdır.

Sonuç

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. Bu durumda herhangi $X,Y \in \chi(M)$ için,

$$g(TX,Y)+g(X,TY) = 0 \tag{2.32}$$

dır.

İspat

Eş. 2.10 da Eş. 2.30 ve Eş 2.31 yerine yazılırsa,

$$g(TX+NX,Y)+g(X,TY+NY) = 0$$

elde edilir. Buradan, g metriği bilineer olduğundan,

$$g(TX,Y)+g(NX,Y)+g(X,TY)+g(X,NY) = 0$$

yazılabilir. $NX \in \chi^{\perp}(M)$ ve $Y \in \chi(M)$ olduğundan $g(NX,Y) = 0$ ve aynı şekilde $g(X,NY) = 0$ dır.Buradan,

$$g(TX,Y)+g(X,TY) = 0$$

sonucuna ulaşılır.

Böylece; T^2, yani Q self-adjointtir.

T, Q ve N tensör alanlarının kovaryant türevleri, her $X \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla_X T)Y = \nabla_X TY - T\nabla_X Y \tag{2.33}$$

$$(\nabla_X Q)Y = \nabla_X QY - Q\nabla_X Y \tag{2.34}$$

$$(\nabla_X N)Y = \nabla_X{}^{\perp} NY - N\nabla_X Y \tag{2.35}$$

şeklinde tanımlanır.

2.15. Teorem

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. Herhangi $X, Y \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X T)Y = -\eta(Y)TX + g(Y, TX)\xi \tag{2.36}$$

ise

$$(\nabla_X Q)Y = -\eta(Y)QX - g(QX, Y)\xi \tag{2.37}$$

dir.

İspat

Eş. 2.36 da Y yerine TY yazılır ve Eş. 2.33 kullanılırsa,

$$(\nabla_X T)TY = -\eta(TY)TX + g(TY, TX)\xi$$

$$\nabla_X T(TY) - T(\nabla_X TY) = -\eta(TY)TX + g(TY, TX)\xi$$

$$\nabla_X T(TY) = -\eta(TY)TX + g(TY, TX)\xi + T(\nabla_X TY)$$

elde edilir. Diğer taraftan $Q = T^2$ olduğundan Eş. 2.33 den,

$$(\nabla_X Q)Y = (\nabla_X T^2)Y = \nabla_X T^2(Y) - T^2(\nabla_X Y)$$
$$= \nabla_X T(TY) - T(T(\nabla_X Y))$$

bulunur. Burada, yukarıda elde edilen $\nabla_X T(TY)$ nin eşiti yerine yazılır ve Eş. 2.33 ile Eş. 2.36 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}(\nabla_X Q)Y &= -\eta(TY)TX + g(TY,TX)\xi + T(\nabla_X TY) - T(-(\nabla_X T)Y + \nabla_X TY)\\ &= -\eta(TY)TX + g(TY,TX)\xi + T(\nabla_X TY) + T(\nabla_X T)Y - T(\nabla_X TY)\\ &= -\eta(TY)TX + g(TY,TX)\xi + T(\nabla_X T)Y\\ &= -\eta(TY)TX + g(TY,TX)\xi + T(-\eta(Y)TX + g(Y,TX)\xi)\\ &= -\eta(TY)TX + g(TY,TX)\xi - \eta(Y)T^2X + g(Y,TX)T\xi\end{aligned}$$

olur. Teorem 2.6 dan $\phi\xi = 0$ ve $\eta \circ \phi = 0$ dır. $\phi\xi = 0$ ise Eş. 2.30 dan

$$T\xi + N\xi = 0$$

yazılabilir. Buradan, teğet ve normal bileşenlerin her ikisi de sıfır olacağından $T\xi = 0$ ve $N\xi = 0$ elde edilir. Diğer taraftan, her $X \in \chi(M)$ için, $\eta(\phi X) = 0$ olduğundan

$$\eta(TX+NX) = 0$$
$$\eta(TX)+\eta(NX) = 0$$

bulunur. Buna göre, eşitliğin sol yanındaki teğet ve normal bileşenlerin sıfır olması gerektiğinden, $\eta(TX) = 0$ yani, $\eta \circ T = 0$ olur.

$$(\nabla_X Q)Y = -\eta(TY)TX + g(TY,TX)\xi - \eta(Y)T^2X + g(Y,TX)T\xi$$

$$= -\eta(TY)TX - g(Y, T^2X)\xi - \eta(Y)T^2X + g(Y, TX)T\xi$$

eşitliğinde $T\xi = 0$ ve $\eta \circ T = 0$ yerine yazılırsa,

$$(\nabla_X Q)Y = -\eta(Y)QX - g(QX, Y)\xi$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Sonuç

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. Herhangi $X \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi \tag{2.38}$$

ve

$$h(X,\xi) = 0 \tag{2.39}$$

dır.

İspat

Eş. 2.27 de $Y = \xi$ alınır ve Eş. 2.23 yerine yazılırsa,

$$\bar{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi + h(X,\xi)$$
$$X - \eta(X)\xi = \nabla_X \xi + h(X,\xi)$$

bulunur. Burada, eşitliğin her iki yanındaki teğet ve normal bileşenleri birbirine eşitlenirse,

$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi$ ve $h(X,\xi) = 0$

elde edilir.

Sonuç

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. Herhangi $V \in \chi^{\perp}(M)$ için,

$$A_V\xi = 0 \qquad \text{ve} \qquad \eta(A_V X) = 0 \tag{2.40}$$

dir.

İspat

Eş. 2.29 da $X = \xi$ alınır ve Eş. 2.39 kullanılırsa,

$$g(A_V\xi, Y) = g\left(h\left(\xi, Y\right), V\right)$$
$$g(A_V\xi, Y) = 0$$

bulunur. Her $Y \in \chi(M)$ için $g(A_V\xi, Y) = 0$ olduğundan,

$$A_V\xi = 0$$

elde edilir.

Diğer taraftan, Eş. 2.29 da $Y = \xi$ alınır ve Eş. 2.39 kullanılırsa,

$$g(A_V X, \xi) = g\left(h\left(X, \xi\right), V\right)$$

$$g(A_V X, \xi) = 0$$

bulunur. Böylece, Eş. 2.8 den,

$$\eta(A_V X) = 0$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç

Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$olsun. Herhangi $X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X T)Y = A_{NY}X + th(X,Y) + g(TX,Y)\xi - \eta(Y)TX \qquad (2.41)$$

$$(\nabla_X N)Y = -h(X,TY) + nh(X,Y) - \eta(Y)NX \qquad (2.42)$$

elde edilir.

İspat

$$(\overline{\nabla}_X \phi)Y = \overline{\nabla}_X \phi Y - \phi \overline{\nabla}_X Y$$

eşitliğinde Eş. 2.22, Eş. 2.27, Eş. 2.30 ve Eş. 2.31 in kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X &= \overline{\nabla}_X (TY + NY) - \phi(\nabla_X Y + h(X,Y)) \\ &= \overline{\nabla}_X TY + \overline{\nabla}_X NY - \phi\nabla_X Y - \phi(h(X,Y)) \\ &= \overline{\nabla}_X TY + \overline{\nabla}_X NY - (T\nabla_X Y + N\nabla_X Y) - (th(X,Y) + nh(X,Y)) \\ &= \overline{\nabla}_X TY + \overline{\nabla}_X NY - T\nabla_X Y - N\nabla_X Y - th(X,Y) - nh(X,Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, Eş. 2.27, Eş. 2.28, Eş. 2.30, Eş. 2.33 ve Eş. 2.35 kullanılırsa,

$$g(TX+NX,Y)\xi-\eta(Y)(TX+NX)=\nabla_X TY+h(X,TY)-A_{NY}X+\nabla_X^{\perp}NY$$
$$-T\nabla_X Y-N\nabla_X Y-th(X,Y)-nh(X,Y)$$
$$g(TX,Y)\xi+g(NX,Y)\xi-\eta(Y)TX-\eta(Y)NX=(\nabla_X T)Y+(\nabla_X N)Y+h(X,TY)$$
$$-A_{NY}X-th(X,Y)-nh(X,Y)$$
$$(\nabla_X T)Y+(\nabla_X N)Y=g(TX,Y)\xi-\eta(Y)TX-\eta(Y)NX-h(X,TY)+A_{NY}X$$
$$+th(X,Y)+nh(X,Y)$$

bulunur. Buradan, $(\nabla_X T)Y$ ve $(\nabla_X N)Y$ nin bileşenleri çekilirse,

$$(\nabla_X T)Y=A_{NY}X+th(X,Y)+g(TX,Y)\xi-\eta(Y)TX$$
$$(\nabla_X N)Y=-h(X,TY)+nh(X,Y)-\eta(Y)NX$$

eşitlikleri elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi\in\chi(M)$olsun. Herhangi $X,Y\in\chi(M)$ için,

$$(\nabla_X T)Y=-\eta(Y)TX+g(Y,TX)\xi \quad \text{gerek ve yeter şart} \quad A_{NY}X=A_{NX}Y \qquad (2.43)$$

dir [Gupta ve arkadaşları, 2004].

Sonuç

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi\in\chi(M)$ olsun. Herhangi $X,Y\in\chi(M)$ ve $V\in\chi^{\perp}(M)$ için,

$$(\nabla_X N)Y = -\eta(Y)NX \qquad \text{gerek ve yeter şart} \qquad A_V TY = -A_{nV}Y \qquad (2.44)$$

dir.

İspat

$\Rightarrow$: $(\nabla_X N)Y = -\eta(Y)NX$ olsun. Bu durumda, Eş. 2.42 den

$$h(X, TY) = nh(X, Y)$$

bulunur. $\forall$ $X,Y \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için Eş. 2.29 ve yukarıda bulunan eşitlik kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g(A_V TY, X) &= g\big(h\left(TY, X\right), V\big) \\ &= g(nh(X, Y), V) \\ &= -g(h(X, Y), nV) \\ &= g(-A_{nV}Y, X) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan; g bilineer olduğundan,

$$g(A_V TY + A_{nV}Y, X) = 0$$

olur. $\forall X \in \chi(M)$ için, bu eşitlik sağlandığından $A_V TY + A_{nV}Y = 0$ dır. Bu durumda,

$$A_V TY = -A_{nV}Y$$

sonucuna ulaşılır.

$\Leftarrow$: $A_V TY = -A_{nV}Y$ olsun. Buna göre, herhangi için $X \in \chi(M)$

$$g(A_V TY, X) = g(-A_{nV} Y, X)$$

yazılabilir.Buradan,Eş. 2.29 kullanılırsa,

$$g\big(h(TY,X),V\big) = -g(h(X,Y),nV)$$
$$= g(nh(X,Y),V)$$
$$g\big(h(TY,X),V\big) - g(nh(X,Y),V) = 0$$

bulunur. g, bilineer olduğundan

$$g(h(TY,X) - nh(X,Y),V) = 0$$

olur. $\forall X \in \chi(M)$ için, bu eşitlik var olduğundan,

$$h(TY,X) = nh(X,Y)$$

elde edilir. Bu eşitlik, Eş. 2.42 de yerine yazılırsa,

$$(\nabla_X N)Y = -\eta(Y)NX$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanmış olur.

2.41. Tanım

Bir almost kontakt metrik manifold $(\bar{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ nin bir altmanifoldu M olmak üzere, M nin her bir p noktasına T_pM de r-boyutlu bir D_p altvektör uzayı bağlayan dönüşüm D olsun. $\xi \in \chi(M)$ olmak üzere her $p \in M$ ve her $X_p \in \Gamma(D_p)$ vektörü için, ϕX_p ve D_p vektör altuzayı arasındaki $\theta_D(X_p)$ açısı sabit yani, $p \in M$ ve $X_p \in \Gamma(D_p)$ nin seçiminden bağımsız ise M üzerinde diferensiyellenebilir D dağılımına bir *slant* *dağılım* denir. θ_D sabit açısına da *D dağılımının slant açısı* denir [Cabrerizo ve arkadaşları, 1999].

2.16. Teorem

D, M üzerinde ξ ye ortogonal bir dağılım olsun. Bu durumda D nin slant olması için gerek ve yeter şart herhangi $X \in \Gamma(D)$ için,

$$(PT)^2 X = -\lambda X \tag{2.45}$$

eşitliğini sağlayan bir $\lambda \in [0,1]$ sabitinin var olmasıdır. Burada P, D üzerindeki dik izdüşüm fonksiyonunu gösterir. Bu durumda, $\lambda = \cos^2 \theta_D$ dir [Cabrerizo ve arkadaşları, 1999].

3. KENMOTSU MANİFOLDUN SLANT ALTMANİFOLDLARI

3.1. Slant Altmanifoldlar

3.1. Tanım

Bir almost kontakt metrik manifold $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu M olsun. Her bir $p\in M$ ve $X_p\in T_pM$ için $\{X_p, \xi_p\}$vektörleri lineer bağımsız olmak üzere ϕX_p ve T_pM arasındaki $\theta(X_p)$ açısı, p ve X_p nin seçilişinden bağımsız ise M ye $\bar{M}$ de *slant altmanifold* denir. $\theta = \theta(X_p)$ sabit açısına, M nin $\bar{M}$ üzerindeki *slant açısı* denir, sla(M) ile gösterilir ve $\theta(X_p)\in[0,\pi/2]$ dir.

Bir almost kontakt metrik manifoldun;

- anti-invaryant altmanifoldları $\pi/2$ slant açılı slant altmanifoldlardır,
- invaryant altmanifoldları ise sıfır slant açılı slant altmanifoldlardır.

Bir slant altmanifold invaryant ya da anti-invaryant değilse *öz slant altmanifold* olarak adlandırılır.

3.1. Teorem

$p\in M$ ve $\lambda(X_p)$ aygen değerine karşılık gelen Q nun bir aygen vektörü $X_p\in T_pM$ olsun. X_p ve ξ_p lineer bağımsız ise

$$\cos\theta(X_p) = \sqrt{-\lambda(X_p)}\,\frac{\|X_p\|}{\|\phi X_p\|} \tag{3.1}$$

dir.

İspat

$\lambda(X_p)$, Q nun aygen değeri olsun, yani $QX_p = \lambda(X_p)X_p$ sağlansın. Bu durumda, Eş. 2.32 den,

$$\begin{aligned}\|TX_p\|^2 &= g(TX_p, TX_p) = -g(X_p, T^2X_p) = -g(X_p, QX_p)\\ &= -g(X_p, \lambda(X_p)X_p) = -\lambda(X_p)g(X_p, X_p) = -\lambda(X_p)\|X_p\|^2\end{aligned}$$

elde edilir. O halde, bu son eşitlikten

$$\|TX_p\| = \sqrt{-\lambda(X_p)}\,\|X_p\|$$

bulunur. $\theta(X_p)$ in tanımından,

$$\begin{aligned}\cos\theta(X_p) &= \frac{g(\phi X_p, TX_p)}{\|TX_p\|\|\phi X_p\|} = \frac{g(TX_p + NX_p, TX_p)}{\|TX_p\|\|\phi X_p\|} = \frac{g(TX_p, TX_p) + g(NX_p, TX_p)}{\|TX_p\|\|\phi X_p\|}\\ &= \frac{g(TX_p, TX_p)}{\|TX_p\|\|\phi X_p\|} = \frac{\|TX_p\|^2}{\|TX_p\|\|\phi X_p\|} = \frac{\|TX_p\|}{\|\phi X_p\|}\end{aligned}$$

dir.

Yukarıda elde edilen $\|TX_p\|$ in eşiti yerine yazılırsa;

$$\cos\theta(X_p) = \frac{\|TX_p\|}{\|\phi X_p\|} = \sqrt{-\lambda(X_p)}\,\frac{\|X_p\|}{\|\phi X_p\|}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

3.1. Lemma

$\bar{M}$ nin anti-invaryant olmayan bir slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda herhangi bir $p \in M$ için Q, nun sıfırdan farklı aygen değeri yalnızca $-\cos^2\theta$ reel sayısıdır. Üstelik, ilgili aygen uzay H_p, D_p vektör uzayı tarafından kapsanır. Ayrıca,

$$\xi_p \in T_pM \Rightarrow \text{Çek}Q = Sp\{\xi_p\} \quad \text{ve} \quad T_pM = Sp\{\xi_p\} \oplus H_p \tag{3.2}$$

$$\xi_p \notin T_pM \Rightarrow \text{Çek}Q = \{0\} \quad \text{ve} \quad T_pM = H_p \subset D_p \tag{3.3}$$

dir. Burada, $D_p = Sp\{\xi_p\}^{\perp} \subset T_p\bar{M}$ dir.

İspat

$p \in M$ olsun. Eş. 3.1 den dolayı $\text{Çek}\,Q \neq T_pM$ dir. Çünkü, eğer $\text{Çek}Q = T_pM$ ise $sla(M) = \dfrac{\pi}{2}$ olur yani, M anti-invaryant altuzaydır ki bu hipotez ile çelişir. Q nun sıfırdan farklı keyfi bir aygen değeri λ ve H_p de buna karşılık gelen aygen uzay olsun. Boy D_p = 2m ve boyH_p çift, olduğundan boy$(H_p \cap D_p) \geq 1$ dir. O halde, $X_p \in H_p \cap D_p$ bir birim vektör alınırsa, ϕX_p de bir birim vektördür ve Eş. 3.1 den $\cos\theta = \sqrt{-\lambda(X_p)}$ olur. Bu sonuçtan ilk iddia elde edilir. Ayrıca herhangi $X_p \in H_p$ için Eş. 3.1 den; $\|\phi X_p\| = \|X_p\|$ elde edilir ve buradan $g(X_p,\xi_p) = 0$ bulunur. Bu durumda, $H_p \subset D_p$ dir.

Eş. 3.2 nin ispatı için, $X_p \in \text{Çek}Q - \{0\}$ olsun. O halde, $Q(X_p) = 0$ dır.Bu durumda,

$$Q(X_p) = T^2(X_p) = T(T(X_p)) = T(\phi(X_p) - N(X_p)) = T(\phi(X_p)) - T(N(X_p)) = 0$$

elde edilir. Burada, $T(N(X_p)) = 0$ olduğundan $T(\phi(X_p)) = 0$ bulunur. T lineer olduğundan $\phi(X_p) = 0$ olmalıdır. $\phi(X_p) = 0$ ise $\phi^2(X_p) = 0$ dır. O halde,

$\phi^2(X_p) = -X_p+\eta_p(X_p)\,\xi_p = 0$

bulunur. Böylece, $X_p=\eta_p(X_p)\,\xi_p$ ve $X_p \in Sp\{\xi_p\}$ olur. Yani, $\text{ÇekQ} \subset Sp\{\xi_p\}$ dir.

Tersine $X_p \in Sp\{\xi_p\}$ olsun. Bu durumda,

$X_p=\eta_p(X_p)\,\xi_p$

olarak yazılır.Buradan,

$T(X_p) = \eta_p(X_p)T(\xi_p)$

olur. $\phi\xi_p = 0$ olduğu bilinmektedir. Buradan, $T\xi_p+N\xi_p = 0$ yazılabilir. Burada, teğet ve normal bileşenler sıfır olacağından $T\xi_p = 0$ bulunur. O halde, $T(X_p) = 0$ dır. Buna göre, $T^2(X_p) = 0$ yani, $Q(X_p) = 0$ olup $X_p \in \text{ÇekQ}$ dur. Sonuç olarak, $\text{ÇekQ} = Sp\{\xi_p\}$ dir. Böylece $T_pM = Sp\{\xi_p\} \oplus H_p$ dir.

Son olarak Eş. 3.3 ün ispatı için $\xi_p \notin \chi(M)$ olsun. Herhangi $X_p \in \chi(M)$ için, $\theta(X_p)$ açısı sabit olduğundan $\theta(X_p) = \theta$ olarak tanımlanır. Burada ÇekQ = 0 olur. Çünkü, eğer ÇekQ $\neq$ 0 ise bu durumda Eş. 3.1 den $\cos\theta_p = 0$ olur. Sonuç olarak yukarıda ispatlanan ilk iddiadan $T_pM = H_p \subset D_p$ dir.

3.2. Teorem

Bir almost kontakt metrik manifold $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir slant altmanifoldu M ve sla(M)$\neq\pi/2$ olsun. O zaman,

n çift $\Leftrightarrow$ ξ, M ye diktir.

n tek $\Leftrightarrow$ ξ, M ye teğettir.

İspat

Kabul edelim n çift olsun. O zaman herhangi $p\in M$ için Eş. 3.2 den $\xi_p \notin T_pM$ dir. Buna göre, Eş. 3.3 den dolayı $T_pM \subset D_p$ dir. Böylece, $\forall$ $p\in M$ için ξ_p, T_pM ye diktir. O halde ξ, M ye diktir.

n tek olsun. Herhangi $p\in M$ için, $H_p \neq T_pM$ ve Eş. 3.3 den $\xi_p \in T_pM$ elde edilir. O halde, ξ, M ye teğettir.

Sonuç

(ϕ,ξ,η,g) yapısı ile bir almost kontakt metrik manifold $\bar{M}$ nin tek boyutlu bir slant altmanifoldu M ve sla(M) $\neq\pi/2$ olsun. O zaman, $\bar{\phi} = \dfrac{1}{\cos\theta}T$ olmak üzere, $(\bar{\phi},\xi,\eta,g)$ M üzerinde bir almost kontakt metrik yapıdır.

İspat

M tek boyutlu olduğundan, Teorem 3.2 den ξ, M ye teğettir. Bu durumda her $X\in\chi(M)$ için,

$$X = X_\xi + X_\xi{}^\perp \tag{3.4}$$

yazılabilir. Burada, $X_\xi = g(X,\xi)\xi$ ve $X_\xi{}^\perp$, ξ ye diktir. Ayrıca, Lemma 3.1 in kullanımıyla $\forall X\in\chi(M)$ için,

$$QX = -\cos^2\theta X_\xi{}^\perp \tag{3.5}$$

elde edilir.

Eş. 3.4, Eş 3.5 den herhangi X vektör alanı için,

$$QX = -\cos^2\theta(X - X_\xi)$$

bulunur. $X_\xi = g(X,\xi)\xi$ olduğundan

$$QX = -\cos^2\theta(X - g(X,\xi)\xi)$$

yazılabilir. Burada Eş. 2.8 kullanılırsa,

$$QX = -\cos^2\theta(X - \eta(X)\xi)$$

elde edilir. $Q = T^2$ den,

$$\frac{T^2X}{\cos^2\theta} = -X + \eta(X)\xi$$

olur. Ayrıca, $\overline{\phi} = \dfrac{1}{\cos\theta}T$ eşitliği ile buradan,

$$\overline{\phi}^2X = -X + \eta(X)\xi$$

bulunur. Diğer taraftan, Eş. 2.32 den herhangi X ve Y vektör alanları için,

$$\begin{aligned} g(TX,TY) &= -g(T^2X,Y) \\ &= -g(QX,Y) \end{aligned}$$

dir. Yukarıda bulunan QX in eşiti burada yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
g(TX,TY) &= -\,g(-\cos^2\theta(X-\eta(X)\xi),Y) \\
&= \cos^2\theta g(X,Y) - \cos^2\theta\eta(X)g(\xi,Y) \\
&= \cos^2\theta(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y))
\end{aligned}
$$

bulunur. $\overline{\phi} = \dfrac{1}{\cos\theta}T$ olduğundan son eşitlik,

$$g(\overline{\phi}X,\overline{\phi}Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

şeklini alır.

$$\overline{\phi}^2X = -X + \eta(X)\xi$$

$$g(\overline{\phi}X,\overline{\phi}Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

eşitliklerinden $(\overline{\phi},\xi,\eta,g)$, M üzerinde bir almost kontakt metrik yapıdır.

Sonuç

θ slant açılı bir almost kontakt manifold $\overline{M}$ nin bir öz slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda herhangi $X\in\chi(M)$ için,

$$QX = -\cos^2\theta(X-\eta(X)\xi) \tag{3.6}$$

dir [Khan ve arkadaşları, 2007].

Cabrerizo ve arkadaşları üstteki teoremi bir kontakt metrik manifoldun bir slant altmanifoldu için bir karakterizasyonu olarak genişletmişler ve aşağıdaki önemli teoremi elde etmişlerdir.

3.3. Teorem

Bir almost kontakt metrik manifold $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. O zaman M slanttir gerek ve yeter şart

$$T^2 = Q = -\lambda(I - \eta \otimes \xi) \tag{3.7}$$

eşitliğini sağlayan bir sabit $\lambda \in [0,1]$ sayısı vardır. Ayrıca, bu durumda, M nin slant açısı θ ise $\lambda = \cos^2\theta$ dır.

İspat

$\Rightarrow$: Lemma 3.1 ve Teorem 3.2 den sonraki iki sonuçtan ispat açıktır.

$\Leftarrow$: $T^2 = -\lambda(I - \eta \otimes \xi)$ olacak şekilde bir λ sabiti olsun. O zaman, Eş. 2.30, Eş. 2.32, Eş. 2.7, Eş. 2.8 ve Eş. 2.9 un kullanılmasıyla her bir $X \in \chi(M) - Sp\{\xi\}$ için;

$$\begin{aligned}
\cos\theta(X) &= \frac{g(\phi X, TX)}{\|\phi X\|\|TX\|} \\
&= \frac{g(TX + NX, TX)}{\|\phi X\|\|TX\|} \\
&= \frac{g(TX, TX) + g(NX, TX)}{\|\phi X\|\|TX\|} \\
&= \frac{g(TX, TX)}{\|\phi X\|\|TX\|} \\
&= \frac{-g(X, T^2X)}{\|\phi X\|\|TX\|} \\
&= \frac{-g(X, \lambda(\phi^2 X))}{\|\phi X\|\|TX\|}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-\lambda g(X, \phi^2 X)}{\|\phi X\| \|TX\|}$$

$$= \frac{-\lambda g(X, -X + \eta(X)\xi)}{\|\phi X\| \|TX\|}$$

$$= \frac{-\lambda[-g(X, X) + \eta(X) g(X, \xi)]}{\|\phi X\| \|TX\|}$$

$$= \frac{-\lambda[-g(X, X) + \eta(X)\eta(X)]}{\|\phi X\| \|TX\|}$$

$$= \frac{-\lambda[-g(\phi X, \phi X)]}{\|\phi X\| \|TX\|}$$

$$= \frac{-\lambda[-\|\phi X\|^2]}{\|\phi X\| \|TX\|}$$

$$= \lambda \frac{\|\phi X\|}{\|TX\|}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\cos\theta(X) = \frac{g(\phi X, TX)}{\|\phi X\| \|TX\|}$$

$$= \frac{g(TX, TX) + g(NX, TX)}{\|\phi X\| \|TX\|}$$

$$= \frac{g(TX, TX)}{\|\phi X\| \|TX\|}$$

$$= \frac{\|TX\|^2}{\|\phi X\| \|TX\|}$$

$$= \frac{\|TX\|}{\|\phi X\|}$$

elde edilir. Böylece,

$$\cos\theta(X) = \lambda\,\frac{\|\phi X\|}{\|TX\|} \text{ ve } \cos\theta(X) = \frac{\|TX\|}{\|\phi X\|}$$

olduğundan taraf tarafa bu eşitlikler çarpılırsa, $\lambda = \cos^2\theta(X)$ elde edilir. O halde, $\theta(X)$ bir sabittir ve buradan M slanttir.

Sonuç

Bir almost kontakt metrik manifold $\bar{M}$ nin bir slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda her bir $X,Y\in\chi(M)$ için;

$$g(TX,TY) = \cos^2\theta(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)), \tag{3.8}$$

$$g(NX,NY) = \sin^2\theta(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)) \tag{3.9}$$

dir.

İspat

Eş. 2.32 de X yerine TX yazılır ve Eş. 3.6 kullanılırsa;

$$g(TX,TY) = -\, g(T^2X,Y)$$
$$g(TX,TY) = -\, g(-\cos^2\theta(X-\eta(X)\xi),Y)$$
$$g(TX,TY) = -[-\cos^2\theta g(X,Y)+ \cos^2\theta\eta(X)g(\xi,Y)]$$
$$g(TX,TY) = \cos^2\theta[g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)]$$

bulunur ve Eş. 3.8 ispatlanmış olur.

Eş.3.9 un ispatı için Eş. 2.9 ve Eş. 2.30 kullanılırsa

$$g(\phi X,\phi Y) = g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$$

$$g(TX+NX,TY+NY) = g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$$
$$g(TX,TY)+g(NX,TY)+g(TX,NY)+g(NX,NY) = g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$$
$$g(TX,TY)+g(NX,NY) = g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$$
$$g(NX,NY) = g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)-g(TX,TY)$$

elde edilir. Eş.3.8 den g(TX,TY) çekilerek bu eşitlikte yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} g(NX,NY) &= g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)-[\cos^2\theta(g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y))] \\ &= (1-\cos^2\theta)\ [g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)] \\ &= \sin^2\theta\ [g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)] \end{aligned}$$

bulunur. Böylece Eş. 3.9 un da ispatı tamamlanmış olur.

3.4. Teorem

Bir almost kontakt metrik manifold $\overline{M}$ nin bir slant altmanifoldu M olsun. O zaman her bir $p\in M$ noktasında $Q|_D$ bir tek λ aygen değerine sahiptir. Burada $\lambda = \cos^2\theta$ ve θ, M nin slant açısıdır [Lotta, 1996].

3.5. Teorem

Bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldunun bir slant altmanifoldu M olsun. O zaman Q paraleldir ($\nabla Q = 0$) gerek ve yeter şart M anti-invaryanttır.

İspat

Bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldunun bir slant altmanifoldu M olsun. O zaman herhangi $X,Y\in\chi(M)$ için, Eş. 3.6 eşitliği ile

$$Q\nabla_X Y = \cos^2\theta(-\nabla_X Y+\eta(\nabla_X Y)\xi) \tag{3.10}$$

ve

$$QY = \cos^2\theta(-Y+\eta(Y)\xi)$$

dır.

Son eşitliğin X e göre kovaryant diferensiyeli alınırsa,

$$\begin{aligned}\nabla_X QY = &-\cos^2\theta(\nabla_X Y)+\cos^2\theta\eta(\nabla_X Y)\xi\\ &+\cos^2\theta g(Y,\nabla_X\xi)\xi+\cos^2\theta\eta(Y)\nabla_X\xi\end{aligned} \tag{3.11}$$

eşitliği elde edilir.

M, $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun bir altmanifoldu olduğundan herhangi $X\in\chi(M)$ için $\nabla_X\xi = X-\eta(X)\xi$ yazılabilir. O halde, $\nabla_X\xi$ ın değerinin Eş. 3.11 de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\nabla_X QY = &-\cos^2\theta(\nabla_X Y)+\cos^2\theta\eta(\nabla_X Y)\xi+\cos^2\theta(g(Y,X)\xi\\ &-\eta(X)\eta(Y)\xi)+\cos^2\theta(\eta(Y)X-\eta(X)\eta(Y)\xi)\end{aligned} \tag{3.12}$$

eşitliği bulunur.

Buradan, Eş. 3.10 ve Eş. 3.12 ifadeleri Eş. 2.34 de yerine yazılırsa;

$$(\nabla_X Q)Y = \cos^2\theta(g(Y,X)\xi-2\eta(X)\eta(Y)\xi+\eta(Y)X) \tag{3.13}$$

eşitliği elde edilir.

O halde, Eş.3.13 de $\nabla_X Q = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\theta = \pi/2$ ya da $\chi(M)=Sp\{\xi\}$ olmasıdır. Bu son durumda boy $M = 1$ olup, M anti-invaryant altmanifolddur.

$\bar{M}$ almost kontakt metrik manifoldun bir slant altmanifoldu M olsun. O zaman M nin tanjant demeti,

$TM = D \oplus Sp\{\xi\}$

biçiminde yazılabilir. Burada D, TM içinde $Sp\{\xi\}$ nin tümleyeni olan slant dağılımdır. Yani, $Sp\{\xi\}^{\perp} = D$ dir. ξ, M nin her bir p noktasına M nin teğet vektörü T_pM in bir boyutlu alt vektör uzayını bağladığından $Sp\{\xi\}$, M üzerinde 1-boyutlu bir dağılımdır.

3.6. Teorem

Bir $\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. M altmanifoldunun slant olması için gerek ve yeter şart

(i) $Q|_D$ endomorfizmi, M nin her bir noktasında yalnızca bir aygen değere sahiptir.

(ii) $\lambda : M \to [0,1]$ olmak üzere $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X Q)Y = \lambda[g(Y,X)\xi - 2\eta(X)\eta(Y)\xi + \eta(Y)X] \qquad (3.14)$$

dir.

Eğer, M nin slant açısı θ ise, o zaman $\lambda = \cos^2\theta$ dır.

İspat

$\Rightarrow$: M slant altmanifold olsun. Bu durumda sırasıyla Teorem 3.4 ve Eş. 3.13 den direkt olarak (i) ve (ii) ifadeleri elde edilir.

$\Leftarrow$: $D = Sp\{\xi\}^{\perp}$ olsun, (i) ve (ii) ifadeleri sağlansın. Buna ek olarak, $Q|_D$ nin aygen değeri, M nin her bir p noktasında $\lambda_1(p)$ ve λ_1, ile birleştirilmiş bir birim aygen vektör $Y \in \Gamma(D)$ olsun, yani $QY = \lambda_1 Y$ dir. Bu durumda (i) den herhangi $X \in \chi(M)$ için,

$$X(\lambda_1)Y + \lambda_1 \nabla_X Y = \nabla_X QY = Q(\nabla_X Y) + \lambda g(X,Y)\xi$$

dır. $\nabla_X Y$ ve $Q(\nabla_X Y)$ nin her ikisi de Y ye dik olduğundan λ_1, M üzerinde sabittir sonucuna varılır.

M nin slant olduğunu göstermek için, Teorem 3.3 den,

$$Q = -\mu(I - \eta \otimes \xi)$$

olacak şekilde bir μ sabiti olsun. Şimdi, her bir $X \in \chi(M)$ için
$X = \overline{X} + \eta(X)\xi$ yazılabilir. Burada, $\overline{X} \in \Gamma(D)$ dir. Böylece, $\overline{X} = X - \eta(X)\xi$ olur. (i) ifadesinden $QX = Q\overline{X}$ olduğundan,

$$QX = \lambda_1 \overline{X} = \lambda_1(X - \eta(X)\xi)$$

olarak yazılır. $\mu = -\lambda_1$ alınmasıyla yukarıdaki eşitlik

$$QX = -\mu(X - \eta(X)\xi)$$

olur. $\lambda_1(= -\mu)$ bir sabit olduğundan, Teorem 3.3 ile M, $\overline{M}$ de slanttir. M slant ise Eş. 3.7 ve Eş. 3.14 den $\lambda = -\lambda_1 = \mu = \cos^2\theta$ elde edilir. Burada θ, M nin slant açısıdır.

3.7. Teorem

M altmanifoldu slanttir gerek ve yeter şart D, aynı slant açılı bir slant dağılımdır.

İspat

$\Rightarrow$: M bir slant altmanifold olsun. Bu durumda D aynı slant açı ile bir slant dağılımdır. Çünkü herhangi $X\in\Gamma(D)$ için $\theta(X) = \theta_D(X)$ dir.

$\Leftarrow$: $X\in\chi(M)-Sp\{\xi\}$ verildiğinde, $\theta(X)$ açısı,

$$\cos\theta(X) = \frac{g(\phi X, TX)}{\|\phi X\|\|TX\|} = \frac{\|TX\|}{\sqrt{\|X\|^2 - \eta^2(X)}} \tag{3.15}$$

eşitliğini sağlar.

Diğer taraftan, $X-\eta(X)\xi\in\Gamma(D)$ göz önüne alınırsa, o zaman;

$$\cos\theta'(X-\eta(X)\xi) = \frac{\|\Pi_D(X-\eta(X)\xi)\|}{\|X-\eta(X)\xi\|} \tag{3.16}$$

eşitliği yazılabilir. Burada Π_D, D üzerindeki ϕ nin dik izdüşüm fonksiyonunu gösterir. Ayrıca,

$$\sqrt{\|X\|^2 - \eta^2(X)} = \|X-\eta(X)\xi\| \qquad \text{ve} \qquad \|TX\| = \|\Pi_D(X-\eta(X)\xi)\|$$

eşitlikleri de vardır.

O halde, Eş. 3.15 ile Eş. 3.16 birbirine eşit olur. Buradan $\theta(X) = \theta'(X - \eta(X)\xi)$ bulunur. D slant olduğundan bu açılar sabit olup, $\theta = \theta'$ dür. Böylece M bir slant altmanifolddur.

3.2. Kenmotsu Manifoldların Slant İmmersiyonlarının Asli Karakterizasyonu

3.2. Lemma

Bir Kenmotsu Manifold $\overline{M}$ nin bir slant altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun.. O zaman M slant altmanifoldunun eğrilik vektör alanı,

$$R(X,Y)\xi = -(\eta(Y)X - \eta(X)Y) \tag{3.17}$$

$$R(\xi,X)\xi = X - \eta(X)\xi \tag{3.18}$$

$$R(X,\xi,\xi,X) = \eta^2(X) - g(X,X) \tag{3.19}$$

dır.

İspat

Eş. 2.38 den herhangi $X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi$$

ve

$$(\nabla_X T)Y = -\nabla_X \nabla_Y \xi + \nabla_{\nabla_X Y} \xi + 2\eta(X)\eta(Y)\xi - g(X,Y)\xi - \eta(Y)X \tag{3.20}$$

eşitlikleri, $R(X,Y)\xi$ nin tanımında yerine yazılırsa Eş. 3.17 elde edilir. Bu eşitlikte $X = \xi$ ve $Y = X$ yazılır ve Eş. 3.20 uygulanırsa,

$R(\xi,X)\xi = X-\eta(X)\xi$

olur. Buradan Eş. 3.19 elde edilir.

3.8. Teorem

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin bir immersed altmanifoldu M ve $\xi\in\chi(M)$ olsun. O zaman aşağıdaki durumlar birbirine denktir:

(i) M, θ slant açısı ile $\bar{M}$ de slanttir.

(ii) Herhangi $p\in M$ için, ξ_p i içeren T_pM nin herhangi iki boyutlu düzleminin kesitsel eğriliği -1 e eşittir.

İspat

(i) $\Rightarrow$ (ii): M, $\bar{M}$ nin slant altmanifoldu olsun. O zaman Teorem 3.3 ile ξ ye dik herhangi birim vektör alanı $X\in\chi(M)$ için

$QX = -\cos^2\theta\, X$

eşitliği vardır. Buradan Eş. 3.19 ile $R(X,\xi,\xi,X) = -1$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $\cos\theta\neq 0$ olsun. Herhangi $X\in\chi(M)$ için $X = X_\xi{}^{\perp} + X_\xi$ ayrışımı kullanılırsa hipotezden,

$$\frac{R(X_\xi{}^{\perp},\xi,X_\xi{}^{\perp},\xi)}{\left\|X_\xi{}^{\perp}\right\|^2} = -1 \tag{3.21}$$

elde edilir. Burada $X_\xi = g(X,\xi)\xi$ dir.

X bir birim vektör alanı için, $QX = 0$ ise o zaman Eş. 3.19 dan

$\left\| X_\xi{}^{\perp} \right\|^2 = -\left\| X_\xi{}^{\perp} \right\|^2$ yazılabilir. Yani $\left\| X_\xi{}^{\perp} \right\|^2 = 0$ dır. Buradan X = X_ξ elde edilir. Buna göre, $\forall p \in M$ için

$$\text{ÇekQ} = \text{Sp}\{\xi_p\} \tag{3.22}$$

olduğu görülür.

QX = λ_1X olacak şekilde birim vektör alanı X olsun. Burada λ_1:M→R bir differensiyellenebilir fonksiyondur ve herhangi p∈M için $\lambda_1(p) = 0$ dır. Açıktır ki, X, ξ ye diktir yani X = $X_\xi{}^{\perp}$ dir. Eş. 3.19 ve Eş. 3.21 in kulanılmasıyla,

$$\lambda_1 = -\cos^2\theta$$

elde edilir. Buna göre herhangi p∈M için $-\cos^2\theta$ sayısı Q nun sıfırdan farklı tek aygen değeridir. O halde, Eş. 3.22 göz önünde bulundurulursa M, θ slant açısı ile $\bar{M}$ de slanttir.

Şimdi, farz edelim ki cosθ = 0 ve X, Q nun aygen vektörlerinin herhangi bir birim vektör alanı olsun. O zaman QX = λ_1X dir. Burada λ_1, M üzerinde bir fonksiyondur. Eş. 3.19 ve Eş. 3.21 ile g(QX,X) = 0, yani $\lambda_1 = 0$ elde edilir. Buna göre Q = 0 olur. Buradan; M anti-invaryanttır. Böylece (i) ispatlanmış olur.

3.3. Bir Slant Altmanifold Üzerinde Yapı

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. M, bir invaryant manifold ise o zaman $\bar{M}$ nin yapısı (doğal olarak) M üzerine bir Kenmotsu yapı indirger. Bu durumdaki altmanifolda da genellikle bir *Kenmotsu altmanifold* denir. Bu bölümde Teorem 3.2 den sonraki sonuç kullanılarak bir invaryant olmayan slant altmanifold üzerinde bir indirgenmiş Kenmotsu yapı elde etmeye çalışılacaktır.

3.3. Lemma

Bir almost kontakt metrik manifold $\overline{M}$ nin bir anti-invaryant olmayan slant altmanifoldu M olsun. O zaman, M, indirgenmiş metriğe göre, ξ vektör alanı yapısı ve $\overline{\phi} = (\sec\theta)T$ ile verilen almost kontakt yapı ile bir almost kontakt metrik manifolddur. Burada θ, M nin slant açısıdır.

İspat

İspat için Teorem 3.2 den sonraki sonucun ispatına bakınız.

Şimdi, M üzerinde bir Kenmotsu yapı indirgemek için ∇T ye uygun bir koşul bulunmalıdır.

Herhangi, $X,Y \in \chi(M)$ vektör alanları için,

$$(\nabla_X T)Y = -\eta(Y)TX + g(Y,TX)\xi \tag{3.23}$$

dır. O halde, $\overline{\phi}$ ile verilen almost kontakt metrik yapı Eş. 3.23 den bir Kenmotsu yapıdır. Yani, herhangi X,Y vektör alanları için

$$(\nabla_X \overline{\phi})Y = -\eta(Y)\overline{\phi}X + g(Y,\overline{\phi}X)\xi$$

eşitliği vardır.

Eş. 2.41 ve Eş. 2.42 den bir Kenmotsu manifoldun invaryant ve anti-invaryant altmanifoldları için,

$$(\nabla_X T)Y = -\eta(Y)TX + g(Y,TX)\xi \tag{3.24}$$

$$(\nabla_X N)Y = -\eta(Y)NX \tag{3.25}$$

eşitlikleri elde edilir.

M, bir Kenmotsu manifoldun invaryant ve anti-invaryant altmanifoldları ise $\bar{M}$ nin yapısının (doğal olarak) M üzerinde bir Kenmotsu yapı oluşturduğunu göstermek kolaydır. İşte, bu durumda altmanifold genellikle bir Kenmotsu altmanifold olarak adlandırılır.

O halde, buradan hareketle aşağıdaki teorem vardır.

3.9. Teorem

Bir Kenmotsu manifoldun bir slant altmanifoldu da bir Kenmotsu manifolddur [Gupta ve Pandey, 2008].

3.4. 3-Boyutlu Slant Altmanifoldlar

3.4. Lemma

Bir almost kontakt metrik manifold $\bar{M}$ nin, 3-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. ξ vektör alanı M ye teğet olmak üzere, M ye teğet e_1,e_2 vektör alanları için, $\{e_1,e_2,\xi\}$ ortonormal bazı

$$Te_1 = \lambda_1 e_2, \qquad Te_2 = \lambda_1 e_1$$

eşitliklerini sağlar.

Burada λ_1, M üzerinde lokal olarak tanımlı bir fonksiyondur. Eğer, M, θ slant açısı ile slant ise $\lambda_1 = \cos\theta$ dır.

İspat

$TM = D \oplus Sp\{\xi\}$ olduğundan $D = Sp\{e_1, e_2\}$ dir. Buna göre, $Te_1 = Ae_1 + Be_2$ biçiminde yazılır. Burada,

$$g(e_1,\phi e_1) = g(e_1,Te_1+Ne_1) = g(e_1,Te_1) = A$$

ve $g(e_1,\phi e_1) = 0$ olduğundan $A = 0$ elde edilir. Benzer şekilde,

$$g(e_2,\phi e_1) = g(e_2,Te_1+Ne_1) = g(e_2,Te_1) = B$$

bulunur. Buradaki B, λ_1 ile gösterilirse,

$$Te_1 = \lambda_1 e_2$$

olur.

Aynı uygulamayla, $Te_2 = Ce_1 + De_2$ yazılırsa,

$$g(e_1,\phi e_2) = g(e_1,Te_2+Ne_2) = g(e_1,Te_2) = C$$

ve

$$g(e_2,\phi e_2) = g(e_2,Te_2+Ne_2) = g(e_2,Te_2) = D$$

bulunur. $g(e_2,\phi e_2) = 0$ olduğundan $D = 0$ dır.Burada, C, μ_1 ile gösterilirse,

$$Te_2 = \mu_1 e_1$$

elde edilir. $g(X,TY) = -\, g(TX,Y)$ eşitliği kulanılırsa,

$g(e_1,Te_2) = -\, g(Te_1,e_2)$

$\mu_1 = -\, \lambda_1$

bulunur. Yani,

$Te_2 = -\, \lambda_1 e_1$

olur.

3.10. Teorem

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin 3-boyutlu bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. Bu durumda, M slanttir gerek ve yeter şart herhangi $X,Y \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X T)Y = -\eta(Y)TX + g(Y,TX)\xi \tag{3.26}$$

olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$: Lemma 3.4 den, $Q|_D$ yalnızca bir $-\lambda_1^2$ aygen değerine sahiptir. Ayrıca,

$QX = -\, \lambda_1^2(X - \eta(X)\xi)$

eşitliği de vardır. Eş. 2.33 ve Eş. 2.34 den $\lambda = -\, \lambda_1^2$ ile Q, Eş. 3.14 ü sağlar.

Böylece, T, Eş. 3.26 yı sağlarsa Teorem 3.6 dan, M slanttir.

$\Leftarrow$: M slant olsun. $p\in M$ ve Lemma 3.4. deki gibi p nin bir U komşuluğundaki ortonormal çatı $\{e_1,e_2,\xi\}$ olsun. w_i^j, M ye teğet her bir X vektör alanı için $\nabla_X e_i = \sum_{j=1}^{3} w_i^{\,j}(X)e_j$ ile tanımlı yapı 1-form olsun.

Buna göre, Eş. 2.22 ve Eş. 2.23 den

$$(\nabla_X T)e_3 = \nabla_X Te_3 - T(\nabla_X e_3) = -TX$$

elde edilir.

Benzer olarak,

$$(\nabla_X T)e_1 = \cos\theta w_2^{\,3}(X)e_3$$

ve

$$(\nabla_X T)e_2 = -\cos\theta w_1^{\,3}(X)e_3$$

dir.

Diğer taraftan, her $Y\in\chi(M)$ için,

$$Y = \eta(Y)e_3+g(Y,e_1)e_1+g(Y,e_2)e_2$$

dir.Ayrıca, yukarıdaki formülün kullanılmasıyla

$$(\nabla_X T)Y = -\eta(Y)TX + g(Y,TX)\xi$$

elde edilir. Buradan Eş. 3.26 elde edilir.

Sonuç

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin 3-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. O zaman M slanttir gerek ve yeter şart her bir $X,Y \in \chi(M)$ için $A_{NY}X = A_{NX}Y$ dir [Gupta ve arkadaşları, 2004].

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin bir invaryant altmanifoldu M ise o zaman Eş. 3.26 elde edilir ve $\nabla N = 0$ sağlanır. Diğer taraftan, M bir anti-invaryant altmanifold ise, $\nabla T = 0$ dır. Yani, Eş. 3.26 bulunur. Ayrıca, her bir $X,Y \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X N)Y = nh(X,Y) - \eta(Y)NX$$

dir.

3.11. Teorem

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin bir anti-invaryant altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. boy M = 3, boy $\bar{M}$ = 5 ve $TM = D \oplus Sp\{\xi\}$ ise o zaman $\forall\ X \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X N\big|_D = 0$$

dır.

İspat

Eş. 3.9 dan, $\chi(M)$ nin bir $\{e_1,e_2,\xi\}$ lokal ortonormal çatısı seçilirse, o zaman $\{Ne_1,Ne_2\}$, $\chi^{\perp}M$ nin bir lokal ortonormal çatısıdır ve böylece n = 0 ve $\forall\ Y \in \Gamma(D)$ için, $\eta(Y) = 0$ dır. Sonuç olarak, her $Y \in \Gamma(D)$ ve her bir $X \in \chi(M)$ için $(\nabla_X N)Y = 0$ elde edilir.

Şimdi, 5-boyutlu bir Kenmotsu Manifold. $\bar{M}$ nin 3-boyutlu bir slant altmanifoldu M için ∇N nin değeri hesaplanacaktır.

M, θ slant açısı ile öz slant altmanifold olsun. O zaman M nin ξ ye dik bir birim teğet vektör alanı e_1 için,

$e_2 = (\sec\theta)Te_1, \quad e_3 = \xi, \quad e_4 = (\mathrm{cosec}\theta)Ne_1, \quad e_5 = (\mathrm{cosec}\theta)Ne_2$

yazılır.

O zaman, $e_1 = -(\sec\theta)Te_2$ ve Eş. 3.8 ile Eş. 3.9 dan dolayı e_1,e_2,e_3 M ye teğet ve e_4,e_5 M ye normal olan bir ortonormal çatı $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ dir. Bu ortonormal çatıya adapte slant çatı denir.

Ayrıca,

$te_4 = -\sin\theta e_1, \quad te_5 = -\sin\theta e_5, \quad ne_4 = -\cos\theta e_5, \quad ne_5 = -\cos\theta e_4$

dir.

Eğer $h_{ij}^r = g(h(e_i,e_j),e_r)$, i,j = 1,2,3, r = 4,5 yazılırsa, o zaman aşağıdaki teorem ifade edilir.

3.5. Lemma

Yukarıdaki koşullar altında,

$$h_{12}^4 = h_{11}^5, \qquad h_{22}^4 = h_{12}^5 \tag{3.27}$$
$$h_{13}^4 = h_{32}^4 = h_{33}^4 = h_{13}^5 = h_{23}^5 = h_{33}^5 = 0 \tag{3.28}$$

dir.

İspat

Teorem 3.10 dan sonraki sonuçtan Eş. 3.27 elde edilir. $\bar{M}$ bir Kenmotsu manifold olduğundan Eş. 3.28 sağlanır.

3.12. Teorem

5-boyutlu bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin 3-boyutlu bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. O zaman M, $\bar{M}$ nin bir minimal öz slant altmanifoldudur gerek ve yeter şart her bir $X,Y \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X N)Y = -\eta(Y)NX \tag{3.29}$$

dir.

İspat

$\Rightarrow$: Eş. 3.29 un ispatı için, bir adapte slant çatı olarak e_1,e_2,e_3,e_4,e_5 seçilirse, o zaman Eş. 2.42, Eş. 3.27 ve Eş. 3.28 den Eş. 3.29 elde edilir.

$\Leftarrow$: Her $X,Y \in \chi(M)$ için Eş. 3.29 var olsun.

$e_2 = (\sec\theta_1)Te_1, \quad e_3 = \xi, \quad e_4 = (\operatorname{cosec}\theta_1)Ne_1, \quad e_5 = (\operatorname{cosec}\theta_1)Ne_2$

ve

$te_4 = -\sin\theta_1 e_1, \quad te_5 = -\sin\theta_1 e_2, \quad ne_4 = -\cos\theta_1 e_5, \quad ne_5 = \cos\theta_1 e_4$

olacak şekilde ξ ye dik bir birim lokal vektör alanı e_1 seçilirse, $(\nabla_X N)Y = -\eta(Y)NX$ olduğundan Eş. 2.44 ten her bir $X,Y \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}M$ için,

$$A_V TY = -\, A_{nV} Y$$

olur.

Böylece,

$$A_{Ne_1} e_2 = A_{Ne_2} e_1 \text{ ve } A_{Ne_1} e_3 = A_{Ne_2} e_3 = 0$$

bulunur. Buradan, her bir $X,Y \in \chi(M)$ için $A_{NX}Y = A_{NY}X$ elde edilir.

O halde, Teorem 3.10 dan sonraki sonuçtan söylenebilir ki $\theta_1 = \theta(e_1) \in (0,\pi/2)$ ile M bir slant altmanifolddur. M nin ortalama eğrilik vektör alanı,

$$H = \frac{1}{\text{boy}M} \text{ iz}(h)$$

olduğundan, H = 0 olup, M minimaldir.

3.5. Kenmotsu Manifoldların Slant Altmanifold Örnekleri

$\{\phi_0,\xi,\eta,g\}$ almost kontakt yapısı ile IR^{2n+1} in slant altmanifoldlarının bazı örnekleri verilecektir. Burada, $X,Y \in \chi(IR^{2n+1})$ için,

$$(\bar{\nabla}_X \phi_0)(Y) = g(\phi_0 X, Y)\xi - \eta(Y)\phi_0 X,$$

$$\bar{\nabla}_X \xi = X - \eta(X)\xi$$

dir.

IR^{2n+1} üzerinde Kenmotsu yapı,

$$\eta = dt, \qquad \xi = \partial/\partial t \tag{3.30}$$

$$g = \eta\otimes\eta + e^{2t}\left(\sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i + dy^i \otimes dy^i\right) \tag{3.31}$$

$$\phi_0\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\frac{\partial}{\partial x^i} + Y_i\frac{\partial}{\partial y^i}\right) + Z\frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(-Y_i\frac{\partial}{\partial x^i} + X_i\frac{\partial}{\partial y^i}\right) \tag{3.32}$$

dir.

Burada, (x^i, y^i, t), $IR^{2n+1} = C^n x\, IR$ nin kartezyen koordinatlarıdır. Burada C^n n-boyutlu kompleks uzaydır.

Şimdi, $(IR^5, \phi_0, \xi, \eta, g)$ de slant altmanifoldların örnekleri verilecektir.

3.13. Teorem

2-boyutlu kompleks uzay C^2, alışılmış Kaehlerian yapısı ile göz önüne alınsın

$$x(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v), f_4(u,v)),$$

parametrik denklemi, $\partial/\partial u$ ve $\partial/\partial v$ sıfırdan farklı ve birbirine dik olmak üzere C^2 de bir S slant altyüzeyi tanımlasın.Bu durumda,

$$y(u,v,w) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v), f_4(u,v),w)$$

parametrik ifadesi ile verilen M altmanifoldu için, $e_1 = \frac{1}{e^t}\frac{\partial}{\partial u}$, $e_2 = \frac{1}{e^t}\frac{\partial}{\partial v}$ olmak üzere $\chi(M) = Sp\{e_1, e_2, \xi\}$ olup, M, $(R^5, \phi_0, \xi, \eta, g)$ de aynı slant açı ile 3-boyutlu bir slant altmanifolddur.

İspat

$\chi(M) = Sp\{e_1,e_2,\xi\}$ olduğundan M, IR^5 in 3-boyutlu bir altmanifoldudur. Şimdi, M nin slant olduğu ispatlanacaktır.

$X\in\chi(M)$ olmak üzere, $X = \lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\eta(X)\xi$ yazılırsa, o zaman,

$$\sqrt{\|X\|^2-\eta^2(X)}=\sqrt{\lambda_1^{\,2}+\lambda_2^{\,2}} \tag{3.33}$$

dir. Eş. 2.28 den,

$$\|TX\|^2=\frac{g^2(\phi_0 X,e_1)}{g(e_1,e_1)}+\frac{g^2(\phi_0 X,e_2)}{g(e_2,e_2)} \tag{3.34}$$

elde edilir.

$X_0\in\chi(S)$ vektör alanı, $X_0 = \lambda_1\frac{\partial}{\partial u}+\lambda_2\frac{\partial}{\partial v}$ olarak yazılır. C^2 nin alışılmış almost kompleks yapısı J ile gösterilirse bu durumda;

$$g(\phi_0 X,e_1)=g(JX_0,\frac{\partial}{\partial u}),\quad g(\phi_0 X,e_2)=g(JX_0,\frac{\partial}{\partial v})$$

bulunur. Eğer, TX_0, JX_0 ın teğetsel parçası ve θ, S nin slant açısı ise o zaman Eş. 3.33 ve Eş. 3.34 den

$$\frac{\|TX\|}{\sqrt{\|X\|^2-\eta^2(X)}}=\frac{\|TX_0\|}{\|X_0\|}=\cos\theta$$

bulunur. Böylece; M, aynı θ slant açısı ile bir slant altmanifolddur.

[B.Y. Chen, 1990] da verilen örnekler ve yukarıdaki Teorem ile (R^5,ϕ_0,ξ,η,g) de Kenmotsu manifoldların slant altmanifoldlarının bazı örnekleri verilecektir.

Örnek

(R^5,ϕ_0,ξ,η,g) 5-boyutlu bir Kenmotsu manifolddur. $\theta\in[0,\pi/2]$ olmak üzere,

$$x(u,v,w) = (u\cos\theta, u\sin\theta, v, 0, w)$$

parametrik denklemi ile verilen M altmanifoldu, θ slant açılı (R^5,ϕ_0,ξ,η,g) nin 3-boyutlu bir minimal slant altmanifoldudur. Gerçekten,

$$e_1 = \frac{1}{e^t}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x^1} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial x^2}\right)$$

$$e_2 = \frac{1}{e^t}\frac{\partial}{\partial y^1}, \qquad \xi = \frac{\partial}{\partial t}$$

olmak üzere, $\chi(M) = Sp\{e_1,e_2,\xi\}$ dir. Ayrıca,

$$e_1^* = \frac{1}{e^t}\left(-\sin\theta\frac{\partial}{\partial x^1} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial x^2}\right) \quad \text{ve} \quad e_2^* = \frac{1}{e^t}\frac{\partial}{\partial y^2},$$

$\chi^{\perp}M$ in bir ortonormal bazıdır.

$\overline{\nabla}$, R^{2n+1} üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere,

$$\overline{\nabla}_{e_1}e_1 = -\xi,\ \overline{\nabla}_{e_2}e_2 = -\xi \ \text{ ve } \ \overline{\nabla}_{\xi}\xi = 0$$

bulunur. M nin ikinci temel formunun bileşenleri,

$$h\left(e_i, e_j\right) \;=\; g(A_{V_r}(e_i), e_j) = -g(\overline{\nabla}_{e_i} V_r, e_j) = g(V_r, \overline{\nabla}_{e_i} e_j)$$

dir. Burada $\chi^{\perp}(M) = Sp\{V_1, V_2\}$ dir. Yani, $V_r \in \chi^{\perp}(M)$, r = 1,2 dir. Böylece;

$$h(e_1,e_1) = g(V_r, \overline{\nabla}_{e_1} e_1) = -g(V_r, \xi) = 0,$$

$$h(e_2,e_2) = g(V_r, \overline{\nabla}_{e_2} e_2) = -g(V_r, \xi) = 0,$$

$$h(\xi,\xi) = g(V_r, \overline{\nabla}_{e_\xi} e_\xi) = 0$$

olur. M nin ortalama eğrilik vektör alanı,

$$H = \frac{1}{boyM}\;\; iz(h) = \frac{1}{3}(h(e_1, e_1) + h(e_2, e_2) + h(\xi, \xi)) = 0$$

bulunur. Buradan, M slant altmanifoldu minimaldir.

Örnek

Herhangi bir k sabiti için,

$$x\left(u, v, w\right) = (e^{ku}\cos u \cos v, e^{ku}\sin u \cos v, e^{ku}\cos u \sin v, e^{ku}\sin u \sin v, w)$$

şeklinde tanımlı M altmanifoldu göz önüne alınsın.

$$e_1 = \frac{1}{e^t}\left(\frac{e^{-ku}}{\sqrt{1+k^2}}\frac{\partial}{\partial u}\right)$$

$$e_2 = \frac{1}{e^t}\left(e^{-ku}\frac{\partial}{\partial v}\right), \qquad \xi = \frac{\partial}{\partial t}$$

olmak üzere, $\chi(M)$ = Sp$\{e_1,e_2,\xi\}$ dir. Direkt hesaplama ile M, $\theta = \cos^{-1}(\frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}})$ slant açılı, 3-boyutlu bir slant altmanifolddur.

Örnek

Herhangi bir pozitif k sabiti için,

$$x(u,v,w) = (u,k\cos v,v,k\sin v,w),$$

şeklinde tanımlı M altmanifoldu göz önüne alınsın. Buradan gerekli hesaplamalar yapılırsa M, $\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}})$ slant açılı 3-boyutlu minimal olmayan bir slant altmanifolddur.Ayrıca, aşağıdaki durumlar birbirlerine denktir:

(i) $k = 0$,

(ii) M, anti-invaryant,

(iii) M, minimal

[Gupta ve Pandey, 2008].

4. BİR KENMOTSU MANİFOLDUN SEMİ-SLANT ALTMANİFOLDLARI

4.1. Tanım

Bir almost kontakt metrik manifold $\bar{M}$ nin, bir altmanifoldu M olsun.

(i) $TM = D_1 \oplus D_2 \oplus Sp\{\xi\}$ dir,

(ii) D_1 dağılımı, ϕ altında invaryanttır, yani $\phi(D_1) = D_1$ dir,

(iii) D_2 dağılımı, $\theta \neq 0$ açısı ile slant dağılımdır,

özellikleri sağlanacak şekilde, M üzerinde D_1 ve D_2 iki ortogonal tümler dağılım varsa, M ye $\bar{M}$ nin bir *semi-slant altmanifoldu* denir.Bu durumda, θ açısına M *altmanifoldunun slant açısı* denir.

Bir semi-slant altmanifoldda;

- invaryant dağılım, sıfır açısıyla bir slant dağılımdır,
- $\theta = \pi/2$ ise semi-slant altmanifold, semi-invaryant altmanifold olarak adlandırılır.

$boyD_i = d_i,\ i = 1,2$ olsun.Bu durumda,

- $d_2 = 0$ ise M bir invaryant altmanifolddur.
- $d_1 = 0$ ve $\theta = \pi/2$ ise M bir anti-invaryant altmanifolddur.
- $d_1 = 0$ ve $\theta \neq \pi/2$ ise M, θ slant açısı ile bir öz slant altmanifolddur.

Eğer, $d_1 d_2 \neq 0$ ve $\theta \neq \pi/2$ ise M ye bir *öz semi-slant altmanifold* denir.

Eş. 2.30 ve Eş. 2.31 den,

$$\forall\ X \in \chi(M) \text{ için, } \phi X = TX + NX \qquad \text{ve} \qquad \forall\ V \in \chi^{\perp}M \text{ için, } \phi V = tV + nV$$

olduğu bilinmektedir. M nin tanjant demeti $TM = D_1 \oplus D_2 \oplus Sp\{\xi\}$ dir. D_2 slant dağılımının, $T^{\perp}M$ normal demeti içinde ND_2 dağılımı mevcuttur. Bu dağılımın ortogonal tümleyeni, $T^{\perp}M$ nin bir invaryant altdemeti olup, μ ile gösterilecektir.

Bu durumda, $T^{\perp}M = ND_2 \oplus \mu$ şeklinde yazılır.

M bir semi-slant altmanifold olsun. O zaman $TM = D_1 \oplus D_2 \oplus Sp\{\xi\}$ olduğundan, herhangi X vektör alanı,

$$X = P_1X + P_2X + \eta(X)\xi \tag{4.1}$$

şeklinde yazılır. Burada P_1 ve P_2 sırasıyla, D_1 ve D_2 dağılımları üzerindeki izdüşüm fonksiyonlarıdır. Bu durumda, $P_1X \in \Gamma(D_1)$ ve $P_2X \in \Gamma(D_2)$ dir.

Eş. 4.1 e ϕ dönüşümünün uygulanmasıyla,

$$\phi X = \phi P_1X + TP_2X + NP_2X \tag{4.2}$$

elde edilir. Burada,

$$\phi P_1X = TP_1X, \quad NP_1X = 0, \quad TP_2X \in D_2 \tag{4.3}$$

olduğu görülür. Böylece,

$$TX = \phi P_1X + TP_2X \tag{4.4}$$

ve

$$NX = NP_2X \tag{4.5}$$

olur.

Sonuç

Herhangi $X,Y \in \chi(M)$ için,

$$g(TX,TP_2Y) = \cos^2\theta\, g(X,P_2Y) \tag{4.6}$$
$$g(NX,NP_2Y) = \sin^2\theta\, g(X,P_2Y) \tag{4.7}$$

dir.

İspat

Eş. 3.8 in kullanılmasıyla,

$$g(TX,TP_2Y) = \cos^2\theta g(X,P_2Y) - \cos^2\theta\eta(P_2Y)\eta(X)$$

bulunur. $P_2Y \in \Gamma(D_2)$ olduğundan $\eta(P_2Y) = 0$ dır. O halde,

$$g(TX,TP_2Y) = \cos^2\theta g(X,P_2Y)$$

dir.

Eş.4.7 nin ispatı için, Eş. 3.9 kullanılırsa,

$$g(NX,NP_2Y) = \sin^2\theta[g(X,P_2Y) - \eta(X)\eta(P_2Y)]$$

olur. $\eta(P_2Y) = 0$ olduğundan

$$g(NX,NP_2Y) = \sin^2\theta g(X,P_2Y)$$

elde edilir.

Böylece, Eş. 4.6 ve Eş. 4.7 nin ispatı tamamlanmış oldu.

4.1. Teorem

Bir almost kontakt metrik manifold $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. O zaman M, semi-slanttir gerek ve yeter şart

(i) $\wp = \{X \in Sp\{\xi\}^{\perp} | T_2 X = -\lambda X\}$ bir dağılımdır.

(ii) $\wp$ ye dik olan $X \in \chi(M)$ için, $NX = 0$ olacak şekilde bir $\lambda \in [0,1)$ sabiti vardır.

Ayrıca, $\lambda = \cos^2\theta$ olması durumunda buradaki θ açısı, M nin slant açısıdır.

İspat

$\Rightarrow$: M semi-slant altmanifold olsun. θ, M nin slant açısı olmak üzere, $\lambda = \cos^2\theta$ olması durumunda Eş. 4.3 den $\wp = D_2$ dir. Buradan, $\wp$ ye dik olan $X \in \chi(M)$ için $NX = 0$ dır.

$\Leftarrow$: $TM = D \oplus D^{\perp} \oplus Sp\{\xi\}$ ortogonal direkt ayrışımından, $T(\wp) \subseteq \wp$ dir. $\wp$ ye dik olan $X \in \chi(M)$ için $NX = 0$ olduğundan $D^{\perp}$ bir invaryant dağılımdır. Sonuç olarak, Teorem 2.15 ve (i) şıkkından $\wp$; $\lambda = \cos^2\theta$ eşitliğini sağlayan θ slant açılı bir slant dağılımdır. O halde, M bir semi-slant altmanifolddur. Böylece ispat tamamlanır.

Genelde, Teorem 4.1 in (i) şıkkından (ii) şartı çıkarılamaz.

Sonuç

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu $\bar{\nabla}$ olsun. Bu durumda, her $Y \in \Gamma(D_1 \oplus D_2)$ için,

$$\bar{\nabla}_{\xi} \phi Y = \phi \bar{\nabla}_{\xi} Y \tag{4.8}$$

dır.

İspat

$Y \in \Gamma(D_1 \oplus D_2)$ olmak üzere, Eş 2.22 kullanılırsa,

$$\bar{\nabla}_\xi \phi Y = (\bar{\nabla}_\xi \phi)Y + \phi \bar{\nabla}_\xi Y$$
$$\bar{\nabla}_\xi \phi Y = g(\phi\xi, Y)\xi - \eta(Y)\phi\xi + \phi \bar{\nabla}_\xi Y$$

bulunur. $Y \in \Gamma(D_1 \oplus D_2)$ olduğuna göre, $\eta(Y) = 0$ dır.

Ayrıca, $\phi\xi = 0$ olduğundan,

$$\bar{\nabla}_\xi \phi Y = \phi \bar{\nabla}_\xi Y$$

elde edilir.

Sonuç

M semi-slant altmanifold üzerinde indirgenmiş konneksiyon ∇ olsun. Her $Y \in \Gamma(D_1)$ için,

$$\nabla_\xi \phi Y = \phi \nabla_\xi Y \tag{4.9}$$

dir.

İspat

$Y \in \Gamma(D_1)$ olmak üzere Eş. 2.27 kullanılırsa,

$$\overline{\nabla}_{\xi}\phi Y = \nabla_{\xi}\phi Y + h(\xi, \phi Y)$$

bulunur.

$Y \in \Gamma(D_1)$ ve $\phi D_1 = D_1$ olduğundan bu eşitlik

$$\overline{\nabla}_{\xi}\phi Y = \nabla_{\xi}\phi Y + h(\xi, Y)$$

şeklini alır.

Böylece, Eş. 2.39 dan,

$$\overline{\nabla}_{\xi}\phi Y = \nabla_{\xi}\phi Y \qquad (4.10)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, yine Eş. 2.27 kullanılırsa,

$$\overline{\nabla}_{\xi} Y = \nabla_{\xi} Y + h(\xi, Y)$$

olur. Eş. 2.39 dan,

$$\overline{\nabla}_{\xi} Y = \nabla_{\xi} Y \qquad (4.11)$$

bulunur.

Eş. 4.10 ve Eş. 4.11 ifadeleri Eş. 4.8 de yerine yazılırsa,

$$\nabla_{\xi}\phi Y = \phi\nabla_{\xi} Y$$

bulunur.

Bunun anlamı şu ki, $\forall\ Y \in \Gamma(D_1)$ için $\nabla_\xi Y \in \Gamma(D_1)$ dir.

4.2. Teorem

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu M olsun. O zaman her $X \in \chi(M)$, $Y \in \Gamma(D_1)$ ve $Z \in \Gamma(D_2)$ vektör alanları için,

$$g(h(X,Y),\phi Z) = g(\nabla_X Z,\phi Y) \tag{4.12}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. 2.28 ve Eş. 2.29 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g(h(X,Y),\phi Z) &= g(A_{\phi Z}X,Y) = g(\nabla_X^{\perp}\phi Z - \bar{\nabla}_X \phi Z, Y) \\ &= g(\nabla_X^{\perp}\phi Z, Y) - g(\bar{\nabla}_X \phi Z, Y) = -\, g(\bar{\nabla}_X \phi Z, Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, Eş. 2.27 ve Eş. 2.10 un kullanımıyla,

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Z,\phi Y) &= g(\bar{\nabla}_X Z - h(X,Z),\phi Y) \\ &= g(\bar{\nabla}_X Z, \phi Y) - g(h(X,Z),\phi Y) \\ &= -\, g(\phi \bar{\nabla}_X Z, Y) = -\, g(\phi \bar{\nabla}_X Z, Y) \end{aligned}$$

bulunur.Bu durumda,

$$g(h(X,Y),\phi Z = -\,g(\overline{\nabla}_X \phi Z, Y) \tag{4.13}$$

$$g(\nabla_X Z,\phi Y) = -\,g(\phi\overline{\nabla}_X Z, Y) \tag{4.14}$$

eşitlikleri elde edilir. Eş. 2.22 kullanılırsa;

$$\begin{aligned} g(\overline{\nabla}_X \phi Z, Y) &= g(((\overline{\nabla}_X \phi)Z + \phi\,\overline{\nabla}_X Z), Y) \\ &= g((\overline{\nabla}_X \phi)Z, Y) + g(\phi\,\overline{\nabla}_X Z, Y) \\ &= g((g(\phi X,Z)\xi - \eta(Z)\phi X), Y) + g(\phi\,\overline{\nabla}_X Z, Y) \\ &= g(\phi X,Z)g(\xi,Y) - \eta(Z)g(\phi X,Y) + g(\phi\,\overline{\nabla}_X Z, Y) \\ &= g(\phi X,Z)\,\eta(Y) - \eta(Z)g(\phi X,Y) + g(\phi\,\overline{\nabla}_X Z, Y) \end{aligned}$$

olur.Burada, $Y\in\Gamma(D_1)$ ve $Z\in\Gamma(D_2)$ olduğundan $\eta(Y) = 0$ ve $\eta(Z) = 0$ dır.

O halde,

$$g(\overline{\nabla}_X \phi Z, Y) = g(\phi\,\overline{\nabla}_X Z, Y)$$

dir. Buna göre, Eş. 4.13 ve Eş. 4.14 de hesaba katıldığında

$$g(h(X,Y),\phi Z) = g(\nabla_X Z,\phi Y)$$

bulunur ve ispat tamamlanmış olur.

4.3. Teorem

Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu M üzerinde her bir $X\in\Gamma(D_1)$ için $[X,\xi]\in\Gamma(D_1\oplus Sp\{\xi\})$ dır.

İspat

Her bir $X\in\Gamma(D_1)$ ve $Y\in\Gamma(D_2)$ için Eş. 2.23, Eş. 2.10 ve Eş. 2.39 ile metrikte bağdaşabilirlik özelliğinin kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned} g([X,\xi],Y) &= g(\overline{\nabla}_X\xi-\overline{\nabla}_\xi X,Y) \\ &= g(\overline{\nabla}_X\xi,Y)-g(\overline{\nabla}_\xi X,Y) \\ &= g((X-\eta(X)\xi),Y)-g(\nabla_\xi X+h(\xi,X),Y) \\ &= g(X,Y)-\eta(X)g(\xi,Y)-g(\nabla_\xi X,Y) \\ &= g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)-g(\nabla_\xi X,Y) \\ &= -g(\nabla_\xi X,Y) \\ &= g(X,\nabla_\xi Y) \end{aligned}$$

bulunur.

$X\in\Gamma(D_1)$ olduğundan, $X = \phi Z$ olacak şekilde bir $Z\in\Gamma(D_1)$ vardır. Bu durumda, yukarıdaki son eşitlikte Eş. 4.12 ve Eş. 2.36 nın kullanılmasıyla,

$$g([X,\xi],Y) = g(X,\nabla_\xi Y) = g(\phi Z,\nabla_\xi Y) = g(h(\xi,Z),\phi Y) = 0$$

elde edilir. O halde, $Y\in\Gamma(D_2)$ olduğundan $[X,\xi]\in\Gamma(D_1\oplus Sp\{\xi\})$ dir.

4.4. Teorem

Bir Kenmotsu manifoldu $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu M üzerinde, her bir $Z\in\Gamma(D_2)$ için $[Z,\xi]\in\Gamma(D_2\oplus Sp\{\xi\})$ dir.

İspat

Herbir $Z\in\Gamma(D_2)$ ve $Y\in\Gamma(D_1)$ için Eş. 2.23, Eş. 2.10 ve Eş. 2.39 ile metrikte bağdaşabilirlik özelliğinin kullanılmasıyla,

$$
\begin{aligned}
g([Z,\xi],Y) &= g(\bar{\nabla}_Z\xi-\bar{\nabla}_\xi Z,Y)\\
&= g(\bar{\nabla}_Z\xi,Y)-g(\bar{\nabla}_\xi Z,Y)\\
&= g((Z-\eta(Z)\xi),Y)-g(\bar{\nabla}_\xi Z,Y)\\
&= g(Z,Y)-\eta(Z)\eta(Y)-g(\nabla_\xi Z+h(\xi,Z),Y)\\
&= -\,g(\nabla_\xi Z,Y)\\
&= g(Z,\nabla_\xi Y)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$Y\in\Gamma(D_1)$ olduğundan, $Y=\phi X$ olacak şekilde bir $X\in\Gamma(D_1)$ vardır. Bu durumda Eş. 4.9 kullanılırsa,

$$g([Z,\xi],Y) = g(Z,\nabla_\xi Y) = g(Z,\nabla_\xi\phi X) = g(Z,\phi\nabla_\xi X) = 0$$

bulunur. O halde, $Y\in\Gamma(D_1)$ ve $g([Z,\xi],Y)=0$ olduğundan $[Z,\xi]\in\Gamma(D_2\oplus Sp\{\xi\})$ dir.

4.5. Teorem

Bir Kenmotsu Manifold $\bar{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu M olsun. O zaman, herhangi $X,Y\in\chi(M)$ için,

$$
\begin{aligned}
&P_1(\nabla_X\phi P_1Y)+P_1(\nabla_X TP_2Y)\\
&= \phi P_1(\nabla_X Y)+P_1(A_{NP_2Y}X)-\eta(Y)P_1X, \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

$P_2(\nabla x\phi P_1Y)+P_2(\nabla xTP_2Y)$

$$= TP_2(\nabla xY)+P_2(A_{NP_2Y}X)+th(X,Y)-\eta(Y)P_2X, \qquad (4.16)$$

$\eta(\nabla x\phi P_1Y)+\eta(\nabla xTP_2Y)$

$$= \eta(A_{NP_2Y}X)+g(\phi X,Y)-\eta(Y)\eta(X) \qquad (4.17)$$

$h(\phi P,Y,X)+h(TP_2Y,X)+\nabla x^{\perp}NP_2Y)$

$$= NP_2\nabla xY+nh(X,Y) \qquad (4.18)$$

dir.

İspat

Eş. 2.27, Eş. 2.28, Eş. 2.22, Eş. 4.1, Eş. 4.2 ve Eş. 4.3 ün kullanımıyla, herhangi $X,Y\in\chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X\phi Y &= \overline{\nabla}_X(\phi P_1Y+TP_2Y+NP_2Y)\\ &= \overline{\nabla}_X(\phi P_1Y)+\overline{\nabla}_X(TP_2Y)+\overline{\nabla}_X(NP_2Y)\\ &= \nabla_X\phi P_1Y+h(\phi P_1Y,X)+\nabla_XTP_2Y+h(TP_2Y,X)-A_{NP_2Y}X+\nabla_X{}^{\perp}NP_2Y \qquad (4.19)\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X\phi Y &= \phi\overline{\nabla}_XY+(\overline{\nabla}_X\phi)Y\\ &= \phi(\nabla_XY+h(X,Y))+(\overline{\nabla}_X\phi)Y\\ &= \phi\nabla_XY+\phi h(X,Y)+g(\phi X,Y)\xi-\eta(Y)\phi X\\ &= \phi P_1\nabla_XY+TP_2\nabla_XY+NP_2\nabla_XY+th(X,Y)+nh(X,Y)+g(\phi X,Y)\xi\\ &\quad -\eta(Y)P_1X-\eta(Y)P_2X-\eta(Y)\eta(X)\xi \qquad (4.20)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde, Eş. 4.19 ve Eş. 4.20 den,

$$
\begin{aligned}
&\nabla_X \phi P_1 Y + h(\phi P_1 Y, X) + \nabla_X T P_2 Y + h(T P_2 Y, X) - A_{NP_2 Y} X + \nabla_X{}^{\perp} N P_2 Y \\
&= \phi P_1 \nabla_X Y + T P_2 \nabla_X Y + N P_2 \nabla_X Y + th(X, Y) + nh(X, Y) + g(\phi X, Y)\xi \\
&- \eta(Y) P_1 X - \eta(Y) P_2 X - \eta(Y)\eta(X)\xi
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

bulunur. Buradan bileşenler yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
&P_1(\nabla_X \phi P_1 Y) + P_2(\nabla_X \phi P_1 Y) + \eta(\nabla_X \phi P_1 Y) + P_1(\nabla_X T P_2 Y) + P_2(\nabla_X T P_2 Y) \\
&+ \eta(\nabla_X T P_2 Y) + h(\phi P_1 Y, X) + h(T P_2 Y, X) + \nabla_X{}^{\perp} N P_2 Y \\
&= P_1(A_{NP_2 Y} X) + P_2(A_{NP_2 Y} X) + \eta(A_{NP_2 Y} X) + \phi P_1 \nabla_X Y \\
&+ T P_2 \nabla_X Y + N P_2 \nabla_X Y + th(X, Y) + nh(X, Y) + g(\phi X, Y)\xi \\
&- \eta(Y) P_1 X - \eta(Y) P_2 X - \eta(Y)\eta(X)\xi
\end{aligned}
$$

eşitliğine ulaşılır.

Böylece, sırasıyla D_1, D_2, $Sp\{\xi\}$ ve $T^{\perp}M$ üzerindeki bileşenlerin tanımlanmasıyla Eş. 4.15 – Eş. 4.18 eşitlikleri elde edilir.

Dikkat edilmeli ki, Eş. 4.3 ve Eş. 4.15 – Eş. 4.18 eşitliklerinin ispatında D_2 için bir slant dağılım olma gerekliliği yoktur. Böylece, semi-slant altmanifold tanımındaki (i) ve (ii) koşullarını sağlayan her altmanifold için bu sonuçlar mevcuttur.

İntegrallenebilir Dağılım

4.6. Teorem

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu M olsun. O zaman, $D_1 \oplus Sp\{\xi\}$ dağılımı integrallenebilirdir gerek ve yeter şart herhangi $X,Y \in \Gamma(D_1 \oplus Sp\{\xi\})$ için,

$$h(X,\phi Y) = h(Y,\phi X)$$

dir.

İspat

$\Rightarrow$: Herhangi $X,Y \in \Gamma(D_1 \oplus Sp\{\xi\})$ için $D_1 \oplus Sp\{\xi\}$ integrallenebilir olsun. Eş. 4.18 kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
h(X,\phi Y) - h(Y,\phi X) &= h(X,\phi P_1 Y + TP_2 Y + NP_2 Y) - h(Y,\phi P_1 X + TP_2 X + NP_2 X) \\
&= h(X,\phi P_1 Y) + h(X,TP_2 Y) + h(X,NP_2 Y) \\
&\quad - h(Y,\phi P_1 X) - h(Y,TP_2 X) - h(Y,NP_2 X) \\
&= -\nabla_X{}^{\perp} NP_2 Y + NP_2 \nabla_X Y + nh(X,Y) + h(X,NP_2 Y) \\
&\quad - [-\nabla_Y{}^{\perp} NP_2 X + NP_2 \nabla_Y X + nh(X,Y)] - h(Y,NP_2 X) \\
&= -\nabla_X{}^{\perp} NP_2 Y + \nabla_Y{}^{\perp} NP_2 X + NP_2 \nabla_X Y \\
&\quad - NP_2 \nabla_Y X + h(X,NP_2 Y) - h(Y,NP_2 X) \\
&= NP_2 \nabla_X Y - NP_2 \nabla_Y X \\
&= NP_2 [X,Y] \qquad (4.22)
\end{aligned}$$

elde edilir. $D_1 \oplus Sp\{\xi\}$ integrallenebilir olduğundan $X,Y \in \Gamma(D_1 \oplus Sp\{\xi\})$ için $[X,Y] \in \Gamma(D_1 \oplus Sp\{\xi\})$ dir. Buradan $P_2[X,Y] = 0$ olur. O halde $NP_2[X,Y] = 0$; yani,

$$h(X,\phi Y)-h(Y,\phi X)= NP_2[X,Y]=0$$

dır. Böylece,

$$h(X,\phi Y)=h(Y,\phi X)$$

elde edilir.

$\Leftarrow$: $h(X,\phi Y)=h(Y,\phi X)$ olsun. $X,Y\in\Gamma(D_1\oplus Sp\{\xi\})$ için Eş. 4.1 den,

$$\begin{aligned}
h(X,\phi Y)-h(Y,\phi X) &= h(P_1X+P_2X+\eta(X)\xi,\phi P_1X+TP_2X+NP_2X)\\
&\quad -h(P_1Y+P_2Y+\eta(Y)\xi,\phi P_1Y+TP_2Y+NP_2Y)\\
&= h(P_1X,\phi P_1X)+h(P_1X,TP_2X)+h(P_1X,NP_2X)+h(P_2X,\phi P_1X)\\
&\quad +h(P_2X,TP_2X)+h(P_2X,NP_2X)+h(\eta(X)\xi,\phi P_1X)\\
&\quad +h(\eta(X)\xi,TP_2X)+h(\eta(X)\xi,NP_2X)-h(P_1Y,\phi P_1Y)\\
&\quad -h(P_1Y,TP_2Y)-h(P_1Y,NP_2Y)-h(P_2Y,\phi P_1Y)-h(P_2Y,TP_2Y)\\
&\quad -h(P_2Y,NP_2Y)-h(\eta(Y)\xi,\phi P_1Y)-h(\eta(Y)\xi,TP_2Y)-h(\eta(Y)\xi,NP_2Y)\\
&= h(P_1X,\phi P_1X)-h(P_1Y,\phi P_1Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Hipotezden,

$$h(X,\phi Y)-h(Y,\phi X)=h(P_1X,\phi P_1X)-h(P_1Y,\phi P_1Y)=0$$

olur. Eş. 4.22 den $NP_2[X,Y]=0$ elde edilir. O halde $P_2[X,Y]=0$ olmalıdır. Çünkü D_2, sıfırdan farklı bir slant açı ile slant dağılımdır. Buradan, $P_2[X,Y]=0$ ise $[X,Y]\in\Gamma(D_1\oplus Sp\{\xi\})$ dir. O halde, $D_1\oplus Sp\{\xi\}$ integrallenebilirdir.

4.7. Teorem

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda, $D_2 \oplus Sp\{\xi\}$ dağılımı integrallenebilirdir gerek ve yeter şart herhangi $X, Y \in \Gamma(D_2 \oplus Sp\{\xi\})$ için,

$$P_1(\nabla_X TY - \nabla_Y TX + A_{NX}Y - A_{NY}X) = 0$$

dır.

İspat

$X, Y \in \Gamma(D_2 \oplus Sp\{\xi\})$ için, Eş. 4.15 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\phi P_1[X, Y] &= \phi P_1(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= \phi P_1(\nabla_X Y) - \phi P_1(\nabla_Y X) \\
&= P_1(\nabla_X \phi P_1 Y) + P_1(\nabla_X TP_2 Y) - P_1(A_{NP_2Y}X) + \eta(Y)P_1X \\
&\quad - P_1(\nabla_Y \phi P_1 X) - P_1(\nabla_Y TP_2 X) + P_1(A_{NP_2X}Y) - \eta(X)P_1Y \\
&= P_1(\nabla_X \phi P_1 Y + \nabla_X TP_2 Y - \nabla_Y \phi P_1 X - \nabla_Y TP_2 X) \\
&\quad - P_1(A_{NP_2Y}X - A_{NP_2X}Y) + \eta(Y)P_1X - \eta(X)P_1Y \\
&= P_1(\nabla_X(\phi P_1 Y + TP_2 Y) - \nabla_Y(\phi P_1 X + TP_2 X)) \\
&\quad - P_1(A_{NY}X - A_{NX}Y) + \eta(Y)P_1X - \eta(X)P_1Y \\
&= P_1(\nabla_X TY - \nabla_Y TX) - P_1(A_{NY}X - A_{NX}Y) \\
&= P_1(\nabla_X TY - \nabla_Y TX + A_{NX}Y - A_{NY}X)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda, $P_1(\nabla_X TY - \nabla_Y TX + A_{NX}Y - A_{NY}X) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\phi P_1[X, Y] = 0$ olmasıdır.

$X,Y \in \Gamma(D_2 \oplus Sp\{\xi\})$ için $\phi P_1[X,Y] = 0$ olması $D_2 \oplus Sp\{\xi\}$ nin bir integrallenebilir dağılım olmasına eşdeğerdir.

Öyleyse, $D_2 \oplus Sp\{\xi\}$ integrallenebilirdir gerek ve yeter şart herhangi $X,Y \in \Gamma(D_2 \oplus Sp\{\xi\})$ için, $P_1(\nabla_X TY - \nabla_Y TX + A_{NX}Y - A_{NY}X) = 0$ dır.

Sonuç

Bir Kenmotsu manifold $\bar{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu M olsun. O zaman, $D_2 \oplus Sp\{\xi\}$ dağılımı integrallenebilirdir gerek ve yeter şart $\forall$ $X,Y \in \Gamma(D_2 \oplus Sp\{\xi\})$ için;

$$(\nabla_X TY - \nabla_Y TX + A_{NX}Y - A_{NY}X) \in \Gamma(D_2)$$

dir.

İspat

İspatı Teorem 4.7 den açıktır.

T tensörünün Nijenhuis tensör alanı S olmak üzere, her $X,Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X,Y) = [TX,TY] + T^2[X,Y] - T[TX,Y] - T[X,TY]$$

ile verilir. Eğer, $X \in \Gamma(D_1)$ ve $Z \in \Gamma(D_2)$ ise,

$$S(X,Z) = (\nabla_{TX}T)Z - (\nabla_{TZ}T)X - T(\nabla_Z T)X - T(\nabla_X T)Z$$

olur. Eş. 2.41 uygulanırsa,

$$S(X,Z) = A_{NZ}TX + th(TX,Z) - th(TZ,X) + th(X,X) - T(A_{NZ}X + th(X,Z))$$

ya da

$$S(X,Z) = A_{NZ}TX + th(TX,Z) - th(TZ,X) - TA_{NZ}X \tag{4.23}$$

elde edilir.

4.8. Teorem

Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu M üzerinde $D_1 \oplus Sp\{\xi\}$dağılımı integrallenebilir ve onun yaprakları M de total olarak jeodezik ise o zaman;

(i) $h(D_1,D_1) \in \mu$,

(ii) $S(D_1,D_2) \in \Gamma(D_2)$

dir.

İspat

(i) Herhangi $X,Y \in \Gamma(D_1)$ ve $Z \in (D_2)$ için hipotezden,

$$g(\nabla_x Y,Z) = 0$$

ve Gauss formülü ile

$$g(\overline{\nabla}_x Y, Z) = 0$$

olur.Bu eşitlikle Eş. 2.9, Eş. 2.22, Eş. 2.27 ve Eş. 2.30 un kullanılmasıyla;

$$g(\overline{\nabla}_x Y, Z) = g(\phi\overline{\nabla}_x Y, \phi Z) + \eta(\overline{\nabla}_x Y)\eta(Z)$$

$$= g(\phi\overline{\nabla}_x Y, \phi Z)$$

$$= g(\overline{\nabla}_x \phi Y - (\overline{\nabla}_x \phi)Y, \phi Z)$$

$$= g(\overline{\nabla}_x \phi Y, \phi Z) - g((\overline{\nabla}_x \phi)Y, \phi Z)$$

$$= g(\nabla_x \phi Y + h(X, \phi Y), \phi Z) - g((\overline{\nabla}_x \phi)Y, \phi Z)$$

$$= g(\nabla_x \phi Y, \phi Z) - g(h(X, \phi Y), \phi Z) - g((g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X, \phi Z)$$

$$= g(\nabla_x \phi Y, \phi Z) - g(h(X, \phi Y), \phi Z) - g(\phi X, Y)g(\xi, \phi Z) + \eta(Y)g(\phi X, \phi Z)$$

$$= g(\nabla_x \phi Y, \phi Z) + g(h(X, \phi Y), \phi Z)$$

$$= g(\nabla_x \phi Y, TZ + NZ) + g(h(X, \phi Y), TZ + NZ)$$

$$= g(\nabla_x \phi Y, TZ) + g(\nabla_x \phi Y, NZ) + g(h(X, \phi Y), TZ) + g(h(X, \phi Y), NZ)$$

$$= g(h(X, \phi Y), NZ)$$

bulunur. O halde, buradan,

$$g(h(X, \phi Y), NZ) = 0$$

elde edilir. Böylece, $h(X,\phi Y)$, NZ ye diktir. $T^{\perp}M = ND_2 \oplus \mu$ ve $NZ \in ND_2$ olduğundan $h(X,\phi Y) \in \mu$ dür.

Herhangi $X \in \Gamma(D_1)$ ve $\phi Y \in \Gamma(D_1)$ için $h(X,\phi Y) \in \mu$ olduğundan $h(D_1,D_1) \in \mu$ dür.

(ii) Herhangi $X,Y \in \Gamma(D_1)$ ve $Z \in \Gamma(D_2)$ için $g(S(X,Z),Y)$ yi göz önüne alınırsa. Eş. 4.23 ile bu,

$$g(S(X, Z), Y) = g(A_{NZ}TX + th(TX, Z) - th(TZ, X) - TA_{NZ}X, Y)$$

olur. (i) den $g(h(X, \phi Y), NZ) = 0$ olduğundan, Eş. 2.29 dan,

$$g(h(X, \phi Y), NZ) = g(A_{NZ}X, \phi Y) = 0$$

elde edilir. Buradan, Eş. 2.10 ve Eş. 2.30 un kullanılmasıyla,

$$
\begin{aligned}
g(A_{NZ}X, \phi Y) &= -g(\phi(A_{NZ}X), Y) \\
&= -g(T(A_{NZ}X) + N(A_{NZ}X), Y) \\
&= -g(T(A_{NZ}X), Y) - g(N(A_{NZ}X), Y) \\
&= -g(T(A_{NZ}X), Y) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

bulunur.Böylece,

$$g(T(A_{NZ}X), Y) = 0 \tag{4.24}$$

olur. Ayrıca, Teorem 4.6 dan $h(X, \phi Y) = h(Y, \phi X)$ olduğundan

$$g(h(X, \phi Y), NZ) = g(h(\phi X, Y), NZ) = 0$$

dır. Bu durumda, Eş. 2.29 ve Eş. 2.30 kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
g(h(\phi X, Y), NZ) &= g(A_{NZ}\phi X, Y) \\
&= g(A_{NZ}(TX + NX), Y) \\
&= g(A_{NZ}TX, Y) + g(A_{NZ}NX, Y) \\
&= g(A_{NZ}TX, Y) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

bulunur. Yani,

$$g(A_{NZ}TX, Y) = 0 \tag{4.25}$$

dır.

Ayrıca, M total jeodezik ise ikinci temel form, h = 0 olduğundan,

$$g(th(TX,Z),Y)=0 \tag{4.26}$$

ve

$$g(th(TZ,X),Y)=0 \tag{4.27}$$

olur.

Bu durumda, Eş. 4.24 – Eş. 4.27 den,

$$\begin{aligned} g(S(X,Z),Y) &= g(A_{NZ}TX,Y)+g(th(TX,Z),Y)-g(th(TZ,X),Y)-g(TA_{NZ}X,Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Buna göre, $Y\in\ \Gamma(D_1)$ olduğundan $S(X,Z)\in\ \Gamma(D_2)$ dir. Herhangi $X\in\Gamma(D_1)$ ve $Z\in\Gamma(D_2)$ için, $S(X,Z)\in\Gamma(D_2)$ ise $S(D_1,D_2)\in\Gamma(D_2)$ dir.

4.9. Teorem

Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu M üzerinde slant dağılımı $D_2\oplus Sp\{\xi\}$ integrallenebilir ve onun yaprakları M de total olarak jeodezik ise o zaman;

(i) $h(D_1,D_2)\in\mu$,

(ii) $S(D_1,D_2)\in\Gamma(D_1)$

dir [Khan ve arkadaşları, 2007].

5. Bİ-SLANT ALTMANİFOLDLAR

5.1. Tanım

Bir almost kontakt metrik manifold $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu M olsun. M üzerinde,

(i) $TM = D_1 \oplus D_2 \oplus Sp\{\xi\}$,

(ii) Herhangi i = 1,2 için D_i, slant açı θ_i ile slant dağılım

şartlarını sağlayan iki ortogonal dağılım D_1 ve D_2 var ise M ye $\bar{M}$ nin bir *bi-slant altmanifoldu* denir.

Bir bi-slant altmanifold M verildiğinde, herhangi $X \in \chi(M)$ için,

$$X = P_1 X + P_2 X + \eta(X)\xi \tag{5.1}$$

yazılabilir.

Burada, $P_i X$, herhangi i = 1,2 için D_i de X in bileşenini gösterir. Özel olarak, $X \in \Gamma(D_i)$ ise $X = P_i X$ elde edilir. Eğer $T_i = P_i \circ T$ olarak tanımlanırsa, o zaman herhangi $X \in \chi(M)$ için, Eş. 5.1 den,

$$\phi X = P_1(\phi X) + P_2(\phi X) + \eta(\phi X)\xi$$

dir. $\eta(\phi X) = 0$ ve Eş. 2.27 nin kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}
\phi X &= P_1(\phi X) + P_2(\phi X) \\
&= P_1(TX + NX) + P_2(TX + NX) \\
&= P_1(TX) + P_1(NX) + P_2(TX) + P_2(NX) \\
&= (P_1 \circ T)(X) + (P_2 \circ T)(X) + (P_1 \circ N)(X) + (P_2 \circ N)(X) \\
&= T_1(X) + T_2(X) + N(X)
\end{aligned}$$

yani,

$$\phi X = T_1X+T_2X+NX \tag{5.2}$$

olur. i = 1,2 verildiğinde, Teorem 2.16 dan dolayı herhangi $X\in\Gamma(D_i)$ için

$$T_i^2X = -\cos^2\theta_i X \tag{5.3}$$

bulunur.

D_1 ve D_2 dağılımlarının boyutu sırasıyla d_1 ve d_2 ile gösterilsin. Teorem 3.7 den dolayı, d_1 veya d_2 sıfır ise (her ikisi de sıfır olabilir) bi-slant altmanifolda slant altmanifold denir.

O halde, slant altmanifoldlar ve buna bağlı olarak invaryant ve anti-invaryant altmanifoldlar bi-slant altmanifoldların özel durumlarıdır.

5.1. Teorem

$\theta_1 = \theta_2 = \theta$ açıları ile bir bi-slant altmanifold M olsun. Eğer, herhangi $X\in\Gamma(D_1)$ ve $Y\in\Gamma(D_2)$ için $g(\phi X,Y) = 0$ ise M, θ açısı ile slanttir [Cabrerizo ve arkadaşları, 1999].

5.2. Tanım

Bir almost kontakt metrik manifold $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu M olsun. M üzerinde,

(i) $TM = D\oplus D^{\perp}\oplus Sp\{\xi\}$,

(ii) D dağılımı invaryanttır, yani $\phi D = D$,

(iii) $D^{\perp}$ dağılımı anti-invaryanttır, yani $\phi D^{\perp}\subset T^{\perp}M$

şartlarını sağlayan iki ortogonal dağılım D ve $D^{\perp}$ varsa, M ye *semi-invaryant altmanifold* denir.

Açıkça görülür ki, semi-invaryant altmanifoldlar, $\theta_1 = 0$ ve $\theta_2 = \pi/2$ açılarıyla bi-slant altmanifoldlardır. Yani, bi-slant altmanifoldlar semi-invaryant altmanifoldların genelleştirilmiş halidir.

Aşağıdaki lemmayı hesaba aldığımızda ayrıca bunun tersinin de doğru olduğu görülür.

5.1. Lemma

$$TM = D_1 \oplus D_2 \oplus Sp\{\xi\}$$

olacak şekilde, M üzerinde D_1 ve D_2 ortogonal dağılımları var olsun.

Bu durumda, D_1 invaryanttır gerek ve yeter şart D_1 dağılımı $\theta_1 = 0$ açısı ile slanttır. Ayrıca, bu durumda, herhangi $X \in \Gamma(D_2)$ için $TX = T_2X$ dir.

İspat

$\Rightarrow$: D_1 invaryant ise sıfır slant açısı ile slant olduğu açıktır

$\Leftarrow$: D_1 in slant açısı $\theta_1 = 0$ olsun. D_1 sıfır slant açısı ile bir slant dağılım ise Eş. 5.3 den herhangi $X \in \Gamma(D_1)$ için,

$$T_1^2X = -\cos^2\theta_1 X$$

dır. Buradan, $\theta_1 = 0$ ise $T_1^2X = -X$ olur. O halde,

$$\|T_1X\|^2 = g(T_1X, T_1X)$$
$$= -g(X, T_1^2X)$$

$= -g(X, -X)$

$= g(X, X)$

$= \|X\|^2$

dir. Böylece, $\|T_1X\| = \|X\|$ elde edilir. Buradan hesaplamalara devam edilirse,

$\|T_1X - X\| = 0$

$T_1X - X = 0$

$T_1X = X$

bulunur. Bu durumda, D_1 invaryanttır.

Diğer taraftan, D_1 invaryant ise, herhangi $X \in \Gamma(D_2)$ve $Y \in \Gamma(D_1)$ için,

$\phi X = TX+NX$ eşitliğinden $\phi X = TX$ dir. Bu durumda,

$g(TX,Y) = g(\phi X,Y) = -g(X,\phi Y)$

olup $X \in \Gamma(D_2)$ve $Y \in \Gamma(D_1)$ olduğundan $g(X,\phi Y) = 0$ dır. Buradan, $\forall Y \in \Gamma(D_1)$ için,

$g(TX,Y) = 0$

bulunur. O zaman D_1 de $TX = 0$ dır. Yani, $TX = T_1X+T_2X = 0$ dır. Bu durumda, $X \in \Gamma(D_2)$ olduğundan $T_2X \in \Gamma(D_2)$ ve $T_1X = 0$ dır. O halde, $TX = T_2X$ dir.

Lemma 5.1 den dolayı, bir semi-slant altmanifoldun invaryant dağılımı, sıfır slant açısıyla bir slant dağılımdır. Bu durumda, semi-slant altmanifoldlar bi-slant altmanifoldların özel durumlarıdır.

6. SEMİ-SİMETRİK METRİK OLMAYAN KONNEKSİYON İLE TANIMLI BİR KENMOTSU MANİFOLDUN SEMİ-SLANT ALTMANİFOLDLARI

Bu bölümde, 4. Bölümde Riemann konneksiyonu ile tanımlı bir Kenmotsu manifoldun semi-slant altmanifolduna ilişkin çalışmalar, semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir Kenmotsu manifoldun semi-slant altmanifoldu üzerinde yapılmıştır.

(2n+1)-boyutlu bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu M olsun. $\overline{M}$ de indirgenmiş bir g metriği ile $\overline{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu alındığında, bilindiği üzere, Gauss ve Weingarten formülleri; her $X,Y \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}M$ için

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)$$
$$\overline{\nabla}_X V = \nabla_X^{\perp} V - A_V X$$

biçimindedir. Burada, $\nabla^{\perp}$ normal konneksiyon, h ikinci temel form, A_V şekil operatörüdür. İkinci temel form ile şekil operatörü arasında,

$$g(h(X,Y),V) = g(A_V X,Y)$$

bağıntısı vardır.

$(\overline{M},\phi,\xi,\eta,g)$ bir Kenmotsu manifold olsun. $\overline{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyon $\overline{\nabla}$ olmak üzere $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \eta(Y)X \tag{6.1}$$

biçiminde tanımlı $\tilde{\nabla}$, $\overline{M}$ üzerinde bir lineer konneksiyondur.

6.1. Teorem

$(\bar{M},\phi,\xi,\eta,g)$ bir Kenmotsu manifold ve $\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyon olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X Y + \eta(Y)X$$

biçiminde tanımlı $\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyonu $\bar{M}$ üzerinde semi-simetrik metrik olmayan bir konneksiyondur.

İspat

$\bar{\nabla}$, Levi-Civita konneksiyonu olduğundan metrik bir konneksiyondur ve bu durumda $\bar{\nabla}g = 0$ dır. O halde,

$$(\bar{\nabla}_X g)(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g(\bar{\nabla}_X Y,Z) - g(Y,\bar{\nabla}_X Z) = 0$$

dır. Buradan,

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z) &= g(\bar{\nabla}_X Y,Z) + g(Y,\bar{\nabla}_X Z) \\ &= g(\tilde{\nabla}_X Y - \eta(Y)X,Z) + g(Y,\tilde{\nabla}_X Z - \eta(Z)X) \\ &= g(\tilde{\nabla}_X Y,Z) + g(Y,\tilde{\nabla}_X Z) - \eta(Y)g(X,Z) - \eta(Z)g(Y,X) \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$Xg(Y,Z) - g(\tilde{\nabla}_X Y,Z) - g(Y,\tilde{\nabla}_X Z) = -\eta(Y)g(X,Z) - \eta(Z)g(Y,X)$$

$$(\tilde{\nabla}_X g)(Y,Z) = \eta(Y)g(X,Z) - \eta(Z)g(Y,X) \tag{6.2}$$

elde edilir. O halde, $\tilde{\nabla}$ metrik konneksiyon değildir.

$\overline{\nabla}$, Levi-Civita konneksiyonu olduğundan simetrik bir konneksiyondur. Buradan $\overline{T}(X,Y) = 0$ dır. Buna göre,

$$\overline{T}\left(X,Y\right)=\overline{\nabla}_X Y-\overline{\nabla}_Y X-[X,Y]=0$$

olduğundan,

$$[X,Y]=\overline{\nabla}_X Y-\overline{\nabla}_Y X$$

dir. Eş. 6.1 den,

$$[X,Y]=\tilde{\nabla}_X Y-\eta(Y)X-\tilde{\nabla}_Y X-\eta(X)Y$$

$$\tilde{\nabla}_X Y-\tilde{\nabla}_Y X-[X,Y]=\eta(Y)X-\eta(X)Y$$

$$\tilde{T}(X,Y)=\eta(Y)X-\eta(X)Y \tag{6.3}$$

bulunur. O halde, $\tilde{\nabla}$, semi-simetrik metrik olmayan (metrikle bağdaşmayan) bir konneksiyondur.

6.2. Teorem

($\overline{M}$,ϕ,ξ,η,g) bir Kenmotsu manifold ve $\tilde{\nabla}$, $\overline{M}$ üzerinde tanımlı semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon olsun. Bu durumda $\forall X,Y\in\chi(M)$ için,

$$(\tilde{\nabla}_X\phi)Y=g(\phi X,Y)\xi-2\eta(Y)\phi X \tag{6.4}$$

dir.

İspat

Eş. 6.1, Eş. 2.11 ve Eş. 2.22 kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X\phi)Y &= \tilde{\nabla}_X\phi Y - \phi\tilde{\nabla}_X Y \\
&= \overline{\nabla}_X\phi Y + \eta(\phi Y)X - \phi\overline{\nabla}_X Y - \phi(\eta(Y)X) \\
&= \overline{\nabla}_X\phi Y - \phi\overline{\nabla}_X Y - \eta(Y)\phi X \\
&= (\overline{\nabla}_X\phi)Y - \eta(Y)\phi X \\
&= g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X - \eta(Y)\phi X \\
&= g(\phi X, Y)\xi - 2\eta(Y)\phi X
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

6.3. Teorem

($\overline{M}$,ϕ,ξ,η,g) bir Kenmotsu manifold ve $\tilde{\nabla}$, $\overline{M}$ üzerinde tanımlı semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon olsun. Bu durumda $\forall X\in\chi(M)$ için,

$$\tilde{\nabla}_X\xi = 2X - \eta(X)\xi \tag{6.5}$$

dir.

İspat

Eş. 6.2 de Y = Z = ξ alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&(\tilde{\nabla}_X g)(\xi,\xi) = -\eta(\xi)g(X,\xi) - \eta(\xi)g(\xi,X) \\
&\tilde{\nabla}_X g(\xi,\xi) - g(\tilde{\nabla}_X\xi,\xi) - g(\xi,\tilde{\nabla}_X\xi) = -2\eta(X) \\
&-2g(\tilde{\nabla}_X\xi,\xi) = -2\eta(X)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan,

$$\eta(\tilde{\nabla}_X \xi) = \eta(X) \tag{6.6}$$

bulunur. Eş. 6.4 eşitliğinde Eş. 2.11, Eş. 2.22 ve Eş. 6.6 kullanılırsa,

$$(\tilde{\nabla}_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - 2\eta(Y)\phi X$$

$$(\tilde{\nabla}_X \phi)\xi = g(\phi X, \xi)\xi - 2\eta(\xi)\phi X$$

$$\tilde{\nabla}_X \phi\xi - \phi\tilde{\nabla}_X \xi = -g(X, \phi\xi)\xi - 2\phi X$$

$$-\phi\tilde{\nabla}_X \xi = -2\phi X$$

$$-\phi^2\tilde{\nabla}_X \xi = -2\phi^2 X$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi - \eta(\tilde{\nabla}_X \xi)\xi = -2(-X + \eta(X)\xi)$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi - \eta(X)\xi = 2X - 2\eta(X)\xi$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi = 2X - \eta(X)\xi$$

elde edilir.

$\bar{M}$ Kenmotsu manifoldunun bir semi-slant altmanifoldu M ve $\bar{M}$ üzerinde tanımlı semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon $\tilde{\nabla}$ olsun. Bu durumda Gauss denklemi

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla^*{}_X Y + m(X, Y)$$

dir. Burada ∇^*, M üzerine indirgenmiş konneksiyon ve m de M semi-slant altmanifoldu üzerinde (0,2) tipinden tensör alanıdır.

Eş. 2.27 ve Eş. 6.1 eşitlikleri kullanılırsa,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X Y + \eta(Y)X$$

$$\nabla^*_X Y + m(X,Y) = \nabla_X Y + h(X,Y) + \eta(Y)X$$

bulunur. Buradan teğet ve normal kısımları birbirine eşitlenirse,

$$\nabla^*_X Y = \nabla_X Y + \eta(Y)X \tag{6.7}$$

$$m(X,Y) = h(X,Y) \tag{6.8}$$

olur.

Ayrıca; Eş. 2.28 ve Eş. 6.7 kulanılırsa,

$$\begin{aligned}
\nabla^*_X V &= \nabla_X V + \eta(V)X \\
&= -A_V X + \eta(V)X \\
&= (-A_V + \eta(V))X \\
&= (-A_V + a)X
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $a = \eta(V)$ dir.

O halde, semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir Kenmotsu manifoldunun semi-slant altmanifoldu için Gauss ve Weingarten formülleri;

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla^*_X Y + h(X,Y) \tag{6.9}$$

$$\tilde{\nabla}_X V = (-A_V + a)X + \nabla^{*\perp}_X V \tag{6.10}$$

olur. Burada, $a = \eta(V)$, h; M nin ikinci temel formu, A_V; M nin şekil operatörüdür. İkinci temel form ile şekil operatörü arasında

$$g\big(h(X,Y),V\big) = g(A_V(-a)X,Y) \tag{6.11}$$

bağıntısı vardır.

$\forall$ X,Y$\in\chi$(M) ve V$\in\chi^{\perp}$(M) için,

$$X = P_1X+P_2X+\eta(X)\xi \tag{6.12}$$

$$\phi V = tV+nV \tag{6.13}$$

tV ve nV sırasıyla ϕV nin teğet ve normal kısmıdır.

6.4. Teorem

Semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir Kenmotsu manifoldun semi-slant altmanifoldu M olsun. O zaman her bir $X\in\Gamma(D_1)$ ve $Z\in\Gamma(D_2)$ için $[X,\xi]\in\Gamma(D_1\oplus Sp\{\xi\})$ ve $[Z,\xi]\in\Gamma(D_2\oplus Sp\{\xi\})$dır.

İspat

Eş. 6.1, Eş. 6.5, Eş. 6.7 ve Eş. 6.9 kullanılırsa,

$X\in\Gamma(D_1)$ ve $Y\in\Gamma(D_2)$ için,

$$\begin{aligned}
g([X,\xi],Y) &= g(\overline{\nabla}_X\xi-\overline{\nabla}_\xi X,Y) \\
&= g(\overline{\nabla}_X\xi,Y)-g(\overline{\nabla}_\xi X,Y) \\
&= g(\tilde{\nabla}_X\xi-\eta(\xi)X,Y)-g(\tilde{\nabla}_\xi X-\eta(X)\xi,Y) \\
&= g(\tilde{\nabla}_X\xi,Y)-g(X,Y)-g(\tilde{\nabla}_\xi X,Y)+\eta(X)g(\xi,Y) \\
&= g(2X-\eta(X)\xi,Y)-g(X,Y)-g(\tilde{\nabla}_\xi X,Y)+\eta(X)\eta(Y) \\
&= 2g(X,Y)-\eta(X)g(\xi,Y)-g(X,Y)-g(\tilde{\nabla}_\xi X,Y)+\eta(X)\eta(Y) \\
&= g(X,Y)-g(\tilde{\nabla}_\xi X,Y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -g(\tilde{\nabla}_{\xi} X, Y) \\
&= -g(\nabla^{*}_{\xi} X + h(\xi, X), Y) \\
&= -g(\nabla_{\xi} X + \eta(X)\xi, Y) \\
&= -g(\nabla_{\xi} X, Y) - g(\eta(X)\xi, Y) \\
&= -g(\nabla_{\xi} X, Y) - \eta(X) g(\xi, Y) \\
&= -g(\nabla_{\xi} X, Y)
\end{aligned}
$$

olur. Buradan, metrikte bağdaşabilirlik kuralının uygulanmasıyla,

$$
g([X, \xi], Y) = g(X, \nabla_{\xi} Y)
$$

bulunur. Burada, Teorem 4.3 ün ispatı göz önüne alınırsa,

$$
g([X, \xi], Y) = 0
$$

elde edilir. O halde, $Y \in \Gamma(D_2)$ olduğundan $[X,\xi] \in \Gamma(D_1 \oplus Sp\{\xi\})$ dır.

İkinci kısmın ispatı için, birinci kısımın ispatında kullanılan eşitliklerin aynı biçimde kullanılmasıyla,

$Z \in \Gamma(D_2)$ ve $Y \in \Gamma(D_1)$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
g([Z, \xi], Y) &= g((\overline{\nabla}_{Z} \xi - \overline{\nabla}_{\xi} Z), Y) \\
&= g(\overline{\nabla}_{Z} \xi, Y) - g(\overline{\nabla}_{\xi} Z, Y) \\
&= g(\tilde{\nabla}_{Z} \xi - \eta(\xi) Z, Y) - g(\tilde{\nabla}_{\xi} Z - \eta(Z)\xi, Y) \\
&= g(\tilde{\nabla}_{Z} \xi, Y) - \eta(\xi) g(Z, Y) - g(\tilde{\nabla}_{\xi} Z, Y) + \eta(Z)\eta(Y) \\
&= g(2Z - \eta(Z)\xi, Y) - g(Z, Y) - g(\tilde{\nabla}_{\xi} Z, Y) + \eta(Z)\eta(Y)
\end{aligned}
$$

$$= 2g(Z,Y) - \eta(Z)\eta(Y) - g(Z,Y) - g(\tilde{\nabla}_{\xi}Z,Y) + \eta(Z)\eta(Y)$$

$$= g(Z,Y) - g(\tilde{\nabla}_{\xi}Z,Y)$$

$$= -g(\tilde{\nabla}_{\xi}Z,Y)$$

$$= -g(\nabla^{*}_{\xi}Z + h(\xi,Z),Y)$$

$$= -g(\nabla^{*}_{\xi}Z,Y)$$

$$= -g(\nabla_{\xi}Z + \eta(Z)\xi,Y)$$

$$= -g(\nabla_{\xi}Z,Y) - \eta(Z)\eta(Y)$$

$$= -g(\nabla_{\xi}Z,Y)$$

$$= g(Z,\nabla_{\xi}Y)$$

elde edilir. Burada, Teorem 4.4 ün ispatından faydalanılırsa,

$$g([Z,\xi],Y) = 0$$

bulunur. O halde, $Y \in \Gamma(D_1)$ olduğundan $[Z,\xi] \in \Gamma(D_2 \oplus Sp\{\xi\})$ dır.

6.5. Teorem

Semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir Kenmotsu manifoldun semi-slant altmanifoldu M olsun. O zaman $D_1 \oplus D_2$ dağılımı integrallenebilirdir.

İspat

Eş. 6.1, Eş. 6.5, Eş. 2.7 ve Eş. 2.8 in kullanımıyla,

$\forall$ $X,Y \in \Gamma(D_1 \oplus D_2)$ için,

$$g([X,Y],\xi) = g((\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X),\xi)$$

$$
\begin{aligned}
&= g(\overline{\nabla}_X Y,\xi) - g(\overline{\nabla}_Y X,\xi)\\
&= -g(Y,\tilde{\nabla}_X\xi - \eta(\xi)X) + g(X,\tilde{\nabla}_Y\xi - \eta(\xi)Y)\\
&= -g(Y,\tilde{\nabla}_X\xi - X) + g(X,\tilde{\nabla}_Y\xi - Y)\\
&= -g(Y,2X - \eta(X)\xi - X) + g(X,2Y - \eta(Y)\xi - Y)\\
&= -g(Y,X - \eta(X)\xi) + g(X,Y - \eta(Y)\xi)\\
&= -g(Y,X) + \eta(X)g(Y,\xi) + g(X,Y) - \eta(Y)g(Y,\xi)\\
&= -g(Y,X) + \eta(X)\eta(Y) + g(X,Y) - \eta(Y)\eta(X)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde $[X,Y]\in\Gamma(D_1\oplus D_2)$ dir. Bu durumda $D_1\oplus D_2$ dağılımı integrallenebilirdir.

6.6. Teorem

Semi-simetrik merik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir Kenmotsu manifoldun semi-slant altmanifoldu M olsun. $D_1\oplus Sp\{\xi\}$ dağılımı integrallenebilirdir gerek ve yeter şart her $X,Y\in\Gamma(D_1\oplus Sp\{\xi\})$ için,

$$h(X,\phi Y) = h(\phi X,Y)$$

dir.

İspat

Eş. 2.27, Eş. 6.1 ve Eş. 6.9 kullanılırsa, her $X,Y\in\Gamma(D_1\oplus Sp\{\xi\})$ için,

$$
\begin{aligned}
\phi([X,Y]) &= \phi(\nabla_X Y - \nabla_Y X)\\
&= \phi(\overline{\nabla}_X Y - h(X,Y) - \overline{\nabla}_Y X + h(X,Y))\\
&= \phi(\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X)
\end{aligned}
$$

$$= \phi(\tilde{\nabla}_X Y - \eta(Y)X - \tilde{\nabla}_Y X + \eta(X)Y)$$

$$= \phi(\tilde{\nabla}_X Y) - \phi(\eta(Y)X) - \phi(\tilde{\nabla}_Y X) + \phi(\eta(X)Y)$$

$$= \tilde{\nabla}_X \phi Y - (\tilde{\nabla}_X \phi)Y - \eta(Y)\phi X - \tilde{\nabla}_Y \phi X + (\tilde{\nabla}_Y \phi)X + \eta(X)\phi Y$$

$$= \nabla^*{}_X \phi Y + h(X, \phi Y) - (g(\phi X, Y)\xi - 2\eta(Y)\phi X)$$

$$-\eta(Y)\phi X - \nabla^*{}_Y \phi X - h(Y, \phi X) + g(\phi Y, X)\xi$$

$$-2\eta(X)\phi Y + \eta(X)\phi Y$$

$$= \nabla^*{}_X \phi Y + h(X, \phi Y) - g(\phi X, Y)\xi + 2\eta(Y)\phi X$$

$$-\eta(Y)\phi X - \nabla^*{}_Y \phi X - h(Y, \phi X) + g(\phi Y, X)\xi$$

$$-2\eta(X)\phi Y + \eta(X)\phi Y$$

$$= \nabla^*{}_X \phi Y - \nabla^*{}_Y \phi X + 2g(X, \phi Y)\xi + \eta(Y)\phi X$$

$$-\eta(X)\phi Y + h(X, \phi Y) - h(Y, \phi X)$$

bulunur. Son eşitlikte $\phi([X,Y])$ nin eşitinin normal kısmı $h(X, \phi Y) - h(Y, \phi X)$ dir.

Ayrıca,

$[X,Y] \in \Gamma(D_1 \oplus Sp\{\xi\})$ ise $\phi([X,Y]) = 0$ dır. O halde,

$$h(X, \phi Y) - h(Y, \phi X) = 0$$

olmalıdır. Buradan,

$$h(X, \phi Y) = h(Y, \phi X)$$

elde edilir.

6.7. Teorem

Semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir Kenmotsu manifoldun semi-slant altmanifoldu M olsun. $D_2 \oplus Sp\{\xi\}$ dağılımının integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $X,Y \in \Gamma(D_2 \oplus Sp\{\xi\})$ için;

$$A_{\phi X}Y = A_{\phi Y}X$$

olmasıdır.

İspat

Eş. 2.27, Eş. 6.1, Eş. 6.9 ve Eş. 6.10 un kullanılmasıyla, her $X,Y \in \Gamma(D_2 \oplus Sp\{\xi\})$ için,

$$\begin{aligned}
\phi([X,Y]) &= \phi(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= \phi(\overline{\nabla}_X Y - h(X,Y) - \overline{\nabla}_Y X + h(Y,X)) \\
&= \phi(\tilde{\nabla}_X Y - \eta(Y)X - \tilde{\nabla}_Y X + \eta(X)Y) \\
&= \phi(\tilde{\nabla}_X Y) - \eta(Y)\phi X - \phi(\tilde{\nabla}_Y X) + \eta(X)\phi(Y) \\
&= \tilde{\nabla}_X \phi Y - (\tilde{\nabla}_X \phi)Y - \eta(Y)\phi X - \tilde{\nabla}_Y \phi X + (\tilde{\nabla}_Y \phi)X + \eta(X)\phi(Y) \\
&= (-A_{\phi Y} + a)X + {\nabla^*_X}^{\perp}\phi Y - (g(\phi X, Y)\xi - 2\eta(Y)\phi X) \\
&\quad -\eta(Y)\phi X - (-A_{\phi X} + a)Y - {\nabla^*_Y}^{\perp}\phi X + (g(\phi Y, X)\xi \\
&\quad -2\eta(X)\phi Y) + \eta(X)\phi Y \\
&= -A_{\phi Y}X + {\nabla^*_X}^{\perp}\phi Y - g(\phi X, Y)\xi + \eta(Y)\phi X \\
&\quad +A_{\phi X}Y - {\nabla^*_Y}^{\perp}\phi X + g(\phi Y, X)\xi - \eta(X)\phi Y \\
&= 2g(\phi Y, X)\xi + \eta(Y)\phi X - \eta(X)\phi Y + {\nabla^*_X}^{\perp}\phi Y \\
&\quad -{\nabla^*_Y}^{\perp}\phi X + A_{\phi X}Y - A_{\phi Y}X \\
&= A_{\phi X}Y - A_{\phi Y}X
\end{aligned}$$

bulunur.

$[X,Y] \in \Gamma(D_2 \oplus Sp\{\xi\})$ ise $\phi([X,Y]) = 0$ olur. O halde, $A_{\phi X}Y - A_{\phi Y}X = 0$ dır.

Buradan,

$$A_{\phi X}Y = A_{\phi Y}X$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

Bejancu A. ve Papaghiuc N. “Semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold”, ***An. st. Univ. A.I. Cuza, Iasi,*** 27: 163-170 (1981).

Blair D.E, “Contact Manifolds in Riemannian Geometry”, ***Lecture Notes in Math., Berlin,*** 509: 28-75 (1976).

Brickell, F., Clark, RS, “Differentiable Manifolds”, ***Van Nostrand Reinhold, London,*** (1970).

Cabrerizo J.L., Carriazo A., Fernandez L.M. ve Fernandez M., “Semi-slant sub-manifolds of a Sasakian manifold”, ***Geom. Dedicata,*** 78: 183-199 (1999).

Cabrerizo J. L., Carriazo A.,. Fernández L. M ve Fernández M., “Slant sub-manifolds in Sasakian manifolds”, ***Glasgow Mathematical Journal,*** 42, 1: 125-138, (2000).

Chen B.Y., “Slant immersions”, ***Bull. Austral. Math. Soc.,*** 41: 135–147, (1990).

Chen B.Y., “Geometry of Slant Submanifolds", ***Katholieke Universiteit Leuven***, (1990).

Chen B.Y., Tazawa Y., “Slant surfaces with codimension 2”, ***Ann. Fac. Sci. Toulouse XI,*** 3: 29-43, (1990).

Chen, B. Y., Tazawa, Y., “Slant submanifolds in complex Euclidean spaces”, ***Tokyo. J. Math.,*** 14 (1): 101-120 (1991).

Duggal, K.L., Bejancu, A.: “Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications”, ***Kluwer, Dordrecht*** 364, (1996)

Gupta R.S., Khursheed Haider S.M. ve Shahid M.H., “Slant submanifolds of. Kenmotsu manifolds”, ***Radovi Matematicki Yugoslavia*** 12: 205-214, (2004).

Gupta, R.S., Pandey, P.K., “Structure on a slant submanifold of a Kenmotsu manifold”, ***Differential Geometry-Dynamical Systems*** 10: 139-147, (2008).

Hacisalihoğlu, H.H., “Diferensiyel Geometri”, ***İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi. Yayınları,*** 2: (1983).

Hacısalihoğlu H.Hilmi, Ekmekci N.,”Tensör Geometri” ***Ankara University Fen Fakültesi, Matemetik Bölümü***, (2003).

Kenmotsu K., “A class of almost contact Riemannian manifolds”, ***Tohoku Math. J.*** 24: 93-103, (1972).

Khan V.A., Khan M.A, Khan K.A., "Slant and semi-slant submanifolds of a Kenmotsu manifold", ***Mathematica Slovaca,*** Vol. 57, 5: 483–494, (2007).

Kobayashi S., Nomizu K., "Foundations of differential geometry", ***Interscience,*** Vol. II, New York, (1969)

Lotta A.: "Slant submanifolds in contact geometry", ***Bull. Math. Soc. Romania,*** 39: 183-198, (1996).

Lotta A., "Three-Dimensional slant submanifolds of K-contact manifolds", ***Balkan J. Geom. Appl***. 3, 1: 37-51, (1998).

Pandey P.K., Gupta R.S., "Characterization of a slant submanifold of a Kenmotsu manifold", ***Journal of Mathematics, Novi Sad,*** 38, 11: 97-102, (2008).

Papaghıuc, N.: "Semi-slant submanifolds of Kahlerian manifold", ***An Stiint. Univ. AI. I. Cuza. Iasi. Inform. (N.S.)*** 9: 55-61, (1994).

Vilms J., "Totally geodesic maps", ***J. Differential Geometry,*** 4: 73-79, (1970).

Yano K. ve Kon M., "Structures on Manifolds", ***Series in Pure Math., World Scientific***, Vol.3, (1984).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ÖĞÜNLÜ, Nazan Nur
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 16.08.1980 Kahramanmaraş
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (312) 256 63 67
e-mail	: nazannur@hotmail.com.

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Bölümü	2001

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2007-Halen	Yenimahalle Anadolu Teknik Lisesi	Matematik Öğretmeni
2004-2007	İbn-i Sina Lisesi, Ankara	Matematik Öğretmeni
2001-2004	Sarıyar Lisesi, Ankara	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Aldığı Ödüller

Takdir Belgesi, üstün başarı, Sincan Kaymakamlığı, 2007, Ankara.

Hobiler

Parasailing yapmak, bowling oynamak, rafting yapmak.