S-MANİFOLDLARDA YARI SİMETRİK KONEKSİYONLAR

Mehmet Akif AKYOL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAYIS 2011
ANKARA

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mehmet Akif AKYOL

S-MANİFOLDLARDA YARI SİMETRİK KONEKSİYONLAR

(Yüksek Lisanivs Tezi)

Mehmet Akif AKYOL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2011

ÖZET

Bu çalışmada S-manifold üzerinde yarı simetrik metrik olmayan koneksiyon ve yarı simetrik metrik koneksiyonun tanımları verilerek bazı teoremler ispatlanıp örnekler verildi. Ayrıca, bu koneksiyonların eğrilikleri ve Ricci eğrilikleri hesaplanıp koneksiyonlarla ilgili yarı simetrik, Ricci yarı simetrik, Ricci projektif yarı simetrik ve projektif yarı simetrik şartları incelendi.

Bilim Kodu : 204.1.049
Anahtar Kelimeler : S- manifoldlar, Yarı simetrik Koneksiyon
Sayfa Adedi : 146
Tez Yöneticisi :Doç. Dr. Aysel TURGUT VANLI

SEMI SYMMETRIC CONNECTIONS ON S-MANIFOLDS

(M.Sc. Thesis)

Mehmet Akif AKYOL

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

May 2011

ABSTRACT

In this thesis, semi symmetric non-metric connection and semi symmetric metric connection are defined on S-manifolds. In addition some theorems and examples are given about these connections on S-manifolds. Moreover, the curvature and Ricci curvature of such connections are obtain, and the conditions of semi-symmetry, Ricci semi symmetric, Ricci projectif semi symmetry and projectif semi symmetry are investigated.

Science Code : 204.1.049
Key Words : S-manifolds, Semi symmetric connection
Page Number :146
Adviser :Assoc. Prof. Dr. Aysel TURGUT VANLI

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmanın her safhasında büyük yardımlarını ve desteklerini gördüğüm değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Aysel TURGUT VANLI’ ya ayrıca danışman hocamın yardımlarıyla yurt dışında tez araştırması için beraber çalıştığımız sayın Prof. Dr. Luis MANUEL FERNANDEZ’ e de teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında bana anlayış gösteren sevgili ailem ve dostlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamalarıyla birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$C^{\infty}(M,\mathbb{R})$	M de $\mathbb{R}$ ye diferensiyellenebilir fonksiyonlar
g	Metrik Tensörü
T_pM	$p \in M$ noktasındaki tanjant uzay
$\chi(M)$	Vektör alanlarının uzayı
TM	M Manifoldunun Tanjant Demeti
φ	f -yapı
ξ_α	karakteristik vektör alanları
η^α	1-formlar
L_X	X vektör alanına göre türev
M	Diferensiyellenebilir manifold
N_φ	φ nin Nijenhuis tensör alanı
$[,]$	Lie Parantez Operatörü
$\otimes$	Tensör Çarpımı
∇^*	Levi-Civita koneksiyon
∇	Yarı-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyon
$\overline{\nabla}$	Yarı-Simetrik Metrik Koneksiyon
R^*	Riemann Cristoffel Eğrilik Tensörü
R	Yarı-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonun Eğrilik tensörü

Simgeler	Açıklama
$\bar{R}$	Yarı-Simetrik Metrik Koneksiyonun Eğrilik Tensörü
S^*	Riemann Koneksiyonunun Ricci Tensörü
S	Yarı-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonun Ricci tensörü
P^*	Riemann Koneksiyonunun Weyl Projektif Eğrilik Tensörü
P	Yarı-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonun Weyl Projektif Eğrilik tensörü
$\bar{P}$	Yarı-Simetrik Metrik Koneksiyonun Weyl-Projektif Eğrilik Tensörü
K^*	Riemann Koneksiyonunun Kesit Eğriliği
K	Yarı-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonunun Kesit Eğriliği
$\bar{K}$	Yarı-Simetrik Metrik Koneksiyonunun Kesit Eğriliği
T^*	Riemann Koneksiyonuna Göre Torsiyon Tensörü
T	Yarı-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyona Göre Torsiyon Tensörü
$\bar{T}$	Yarı-Simetrik Metrik Koneksiyona Göre Torsiyon Tensörü

1. GİRİŞ

Hemen hemen kontakt metrik yapıların ve hemen hemen kompleks yapıların bir genelleştirilmesi olan metrik çatılı yapılar ilk kez Yano (1963) tarafından ortaya atılmış ve günümüze kadar bu alanda birçok çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazıları Nakagava (1966), Ishahara (1966), Kobayashi ve Tsuchiya (1972), Mihai (1983) ve Kobayashi (1990) dır. 1970 yılında Goldberg ve Yano, metrik çatılı manifoldlar üzerindeki f-yapı yardımı ile bir kompleks yapı tanımlayıp metrik çatılı yapıların normallik koşullarını inceleyerek bu alanda yapılacak olan çalışmalara ışık tutmuş oldular.

1970 yılında Blair, normal metrik çatılı yapılara, normal metrik çatılı yapıların sağlamış olduğu bazı yeni koşulları ilave ederek, hemen hemen Hermit durumunda Kaehler yapıların ve hemen hemen kontakt durumunda Sasakian yapıların bir genelleştirilmişi olan S-manifoldları tanıtmıştır.

1990 lı yıllarda İspanyol matematikçilerden Cabrerizo, Fernandez, L.M. ve Fernandez, M. S-manifoldlara ait ciddi çalışmalar yapmışlardır. Bunlardan bazıları Cabrerizo Fernandez, L.M: ve Fernandez, M. (1991,1992, 1993, 1996) dır. 1990 lı yıllarda yapılan çalışmaların yanı sıra günümüze kadar S-manifoldlar ile ilgili Kobayashi (1990), Lotta ve Pastore (2004), Dileo ve Lotta (2005), Terlizzi (2006) gibi çeşitli çalışmalarda yapmıştır.

Bir Riemann manifoldu üzerinde yarı simetrik lineer koneksiyon ilk kez Friedman ve Schouten (1924) tarafından tanımlanmıştır. Yarı simetrik metrik koneksiyon tanımı ise Hayden (1932) tarafından verilmiştir.Bir Riemann manifoldu üzerinde yarı simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımı Agashe ve Chafle (1992) tarafından verilmiştir.

Bu yüksek lisans çalışmasında Yarı simetrik metrik olmayan koneksiyon ve yarı simetrik metrik koneksiyonlu S- manifoldların tanımı verilerek bunlara ait bazı örnekler verildi. Ayrıca, bazı teoremler ispanlanıp bu koneksiyonlar üzerindeki eğriliklerin semi-simetrik şartları incelendi.

2.TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Riemann Manifoldları

2.1.1 Tanım

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. *M* üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve *M* den $\mathbb{R}$ ye C^{∞} fonksiyonlarının uzayı $C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

dönüşümü bilineer, simetrik ve pozitif tanımlı ise g ye *M* üzerinde bir Riemann metriği (veya metrik tensör) ve (M, g) ikilisine de bir *Riemann manifoldu* adı verilir [Hacısalihoğlu, 1983].

2.1.2 Tanım

M diferensiyellenebilir bir manifold ve bir $\nabla^{*}: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ dönüşümü verilsin. $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall\, f, g \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ için,

$i)\ \nabla^{*}_{X+Y}Z = \nabla^{*}_{X}Z + \nabla^{*}_{Y}Z$

$ii)\ \nabla^{*}_{X}(Y + Z) = \nabla^{*}_{X}Y + \nabla^{*}_{X}Z$

$iii)\ \nabla^{*}_{fX+gY}Z = f\nabla^{*}_{X}Z + g\nabla^{*}_{Y}Z$

özelliklerini sağlıyorsa ∇^{*} ya *M* manifoldu üzerinde bir *lineer koneksiyon* denir [Hacısalihoğlu, 1983].

2.1.3 Tanım

U bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$[,]: U \times U \to U$$
$$(X,Y) \to [X,Y]$$

dönüşümü

$i)$ 2-lineer

$ii)$ Anti-Simetrik $(\forall\, X,Y \in U \text{ için } [X,Y] = -[Y,X])$

$iii)$ $\forall\, X,Y,Z \in U$ için $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

şartlarını sağlıyorsa $[,]$ dönüşümüne, U üstünde bir *Lie operatörü* (Lie parantez operatörü) denir [Hacısalihoğlu, 1983].

2.1.1 Teorem

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$[,]: X(M) \times X(M) \to X(M)$$
$$(X,Y) \to [X,Y]$$

dönüşümü $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$[X,Y](f) = XY(f) - YX(f)$$

şeklinde tanımlanırsa $[,]$ operatörü $\chi(M)$ üzerinde bir Lie operatörüdür [Yano ve Kon, 1984].

2.1.4 Tanım

(M,g) bir Riemann manifoldu olsun ve L_X, X vektör alanına göre Lie türev operatörü olsun. Eğer $X \in \chi(M)$ için

$$L_X g = 0$$

ise X e Killing vektör alanı denir [Yano ve Kon,1984].

2.1.5 Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ $\forall$ $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$i) L_X(f) = X(f)$

$ii) L_X Y = [X,Y]$

$iii) L_X g(Y,Z) = X\big(g(Y,Z)\big) - g([X,Y],Z]) - g([X,Z],Y)$

dir [Yano ve Kon, 1984, Duggal ve Bejancu, 1996].

2.1.6 Tanım

(M, g) bir Riemann manifold olsun. M üzerinde verilen her bir diferensiyel s-forma bir diferensiyel $(s+1)$-form karşılık getiren diferensiyel operatörü *dış türev operatörü* olarak adlandırılır ve d ile gösterilir. Özel olarak bir 1-form w ve 2-form Ω için d operatörü

$$dw(X,Y) = \tfrac{1}{2}\{X\big(w(Y)\big) - Y(w(X)) - w([X,Y])\}$$

ve

$$d\Omega(X,Y,Z) = \frac{1}{3}(X\big(\Omega(Y,Z)\big) - Y\big(\Omega(X,Z)\big) - Z\big(\Omega(X,Y)\big) - \Omega([X,Y],Z)$$

$$+ \Omega([X,Z],Y) - \Omega([Y,Z],X))$$

olarak tanımlanır [Yano ve Kon, 1984].

2.1.2 Teorem

(M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇^* da M üzerinde bir lineer koneksiyon olsun.

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için Riemann koneksiyonu,

$$2g(\nabla^*_X Y, Z) = Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X])$$
$$+g(Z,[X,Y]) \qquad (2.1)$$

Kozsul formulu ile tek türlü belirtilir [Yano ve Kon, 1984].

2.1.7 Tanım

M diferensiyellenebilir bir manifold ve ∇^* da *M* üzerinde bir lineer koneksiyon olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$i)\nabla^*_X Y - \nabla^*_Y X = [X, Y]$ (Sıfır torsiyon özelliği)

$ii) Xg(Y,Z) = g(\nabla^*_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z)$ (Metrik ile bağdaşabilme özelliği)

şartlarını sağlıyorsa, ∇^* ya *M* üzerinde *Riemann koneksiyonu* veya *Levi-Civita koneksiyonu* denir [Hacısalihoğlu, 1983].

2.1.8 Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇^* *de M* üzerinde Riemann koneksiyonu olsun.

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için,

$R^*: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$

$$(X,Y,Z) \to R^*(X,Y,Z) = \nabla^*_X \nabla^*_Y Z - \nabla^*_Y \nabla^*_X Z - \nabla^*_{[X,Y]} Z \qquad (2.2)$$

şeklinde tanımlanan $(1,3)$ tipinden tensör alanı R^* ye *M* üzerinde *Riemann eğrilik tensör alanı*, $F(X,Y,Z,W) = g(R^*(X,Y)Z,W)$ tensörüne *M* nin *Riemann-Christofel eğrilik tensörü* veya kısaca *Riemann eğriliği* denir.

2.1.9 Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu ve R^* de M üzerinde Riemann eğrilik tensör alanı olsun. $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$i)\ g(R^*(X,Y)Z,W) = -g(R^*(Y,X)Z,W), \tag{2.3}$$

$$ii)\ g(R^*(X,Y)Z,W) = -g(R^*(X,Y)W,Z), \tag{2.4}$$

$$iii)\ g(R^*(X,Y)Z,W) = g(R^*(Z,W)X,Y), \tag{2.5}$$

dir [O`Neill, 1983].

2.1.10 Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu ve R^* de M üzerinde Riemann eğrilik tensör alanı olsun. $\forall\, X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R^*(X,Y)Z + R^*(Z,X)Y + R^*(Y,Z)X = 0$$

eşitliği *I.Bianchi özdeşliği* olarak adlandırılır [Yano ve Kon, 1984].

2.1.11 Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bir $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının, X_p, Y_p tanjant vektörleri tarafından gerilen 2-boyutlu bir uzay Π olmak üzere

$$K^*(\Pi) = \frac{g\left(R^*\left(X_p, Y_p\right)X_p, Y_p\right)}{g\left(X_p, X_p\right)g\left(Y_p, Y_p\right) - g\left(X_p, Y_p\right)^2} \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanan $K^*(\Pi)$ reel sayısına Π nin *kesit eğriliği* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.1.12 Tanım

n-boyutlu bir Riemann manifoldu (M, g), M üzerinde eğrilik tensörü R^* ve $\chi(M)$ nin bir ortonormal bazı $\{E_1, \dots, E_n\}$ olsun.

$$Q^*: \chi(M) \to \chi(M)$$

$$X \to Q^* X = -\sum_{i=1}^{n} R^*(E_i, X)E_i$$

şeklinde tanımlı Q^* operatörüne M nin *Ricci operatörü*,

$$S^*: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

olmak üzere

$$S^*(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R^*(E_i, X)Y, E_i) \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlı $(0,2)$ tipindeki S^* tensör alanına, M üzerinde *Ricci eğrilik tensörü* adı verilir.

2.1.13 Tanım

n-boyutlu bir Riemann manifoldu M üzerinde ortonormal vektör alanları $\{E_1, \dots, E_n\}$ olmak üzere M nin *skalar eğriliği,*

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} S^*(E_i, E_i)$$

şeklinde tanımlanır [Yano ve Kon, 1984].

2.1.14 Tanım

$n \geq 2$ olmak üzere n-boyutlu bir Riemann manifoldu (M,g) olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için M nin *Weyl projektif eğrilik tensör* alanı;

$$P^*(X,Y)Z = R^*(X,Y)Z - \frac{1}{n-1}\{S^*(Y,Z)X - S^*(X,Z)Y\} \tag{2.8}$$

ile tanımlanır.

2.1.15 Tanım

$n \geq 2$ olmak üzere n boyutlu bir Riemann manifoldu (M,g) olsun. M üzerinde tanımlı $(0,2)$ tipinde bir simetrik tensör alanı A olmak üzere $\wedge_A$ endomorfizmi

$$\wedge_A : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X,Y,Z) = (X \wedge_A Y)Z = A(Y,Z)X - A(X,Z)Y$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $A = g$ alınırsa;

$$(X \wedge_g Y)Z = g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$$

olur. Bundan sonra $X \wedge_g Y$ yerine $X \wedge Y$ kullanılacaktır.

M üzerinde $(0,k)$ tipinde bir T^* tensör alanı ve $(0,2)$ tipinde bir simetrik A tensör alanı verildiğinde $R^*.T^*$ ve $Q^*(A,T^*)$ tensörleri sırasıyla;

$$(R^*.T^*)(X_1,\dots,X_k;X,Y) = -T^*(R^*(X,Y)X_1,\dots,X_k) - \cdots - T^*(X_1,\dots,R^*(X,Y)X_k)$$

ve

$$Q^*(A.T^*)(X_1,\dots,X_k;X,Y) = -T^*\big((X \wedge Y)X_1,\dots,X_k\big) - \cdots - T^*(X_1,\dots,(X \wedge Y)X_k)$$

şeklinde tanımlanır. O halde $T^{*}=R^{*}$ ve $A=g$ alınırsa,

$$(R^{*}.R^{*})(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-R^{*}(R^{*}(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\cdots$$

$$-R^{*}(X_1,X_2,X_3,R^{*}(X,Y)X_4)$$

$$Q^{*}(g,R^{*})(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-R^{*}\big((X\wedge Y)X_1,X_2,X_3,X_4\big)-\cdots$$

$$-R^{*}(X_1,X_2,X_3,(X\wedge Y)X_4)$$

$T^{*}=S^{*}$ ve $A=g$ alınırsa,

$$(R^{*}.S^{*})(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-S^{*}(R^{*}(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\cdots$$

$$-S^{*}(X_1,X_2,X_3,R^{*}(X,Y)X_4)$$

$$Q^{*}(g,S^{*})(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=\quad S^{*}\big((X\wedge Y)X_1,X_2,X_3,X_4\big)\quad\cdots$$

$$-S^{*}(X_1,X_2,X_3,(X\wedge Y)X_4)$$

$T^{*}=C^{*}$ ve $A=g$ alınırsa,

$$(R^{*}.C^{*})(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-C^{*}(R^{*}(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-\cdots$$

$$-C^{*}(X_1,X_2,X_3,R^{*}(X,Y)X_4)$$

$$Q^{*}(g,C^{*})(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-C^{*}\big((X\wedge Y)X_1,X_2,X_3,X_4\big)-\cdots$$

$$-C^{*}(X_1,X_2,X_3,(X\wedge Y)X_4)$$

Ayrıca $A=S^{*}$, $T^{*}=R^{*}$ için

$$Q^{*}(S^{*},R^{*})(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=\quad R^{*}\big((X\wedge_{S^{*}}Y)X_1,X_2,X_3,X_4\big)\quad\cdots$$

$-R^*(X_1,X_2,X_3,(X \wedge_{S^*} Y)X_4)$

olarak elde edilir.

(M,g) Riemann manifoldu için

$R^*.R^* = 0$ ise M ye yarı simetriktir

$R^*.S^* = 0$ ise M ye Ricci yarı simetriktir

$R^*.C^* = 0$ ise M ye Wely-yarı simetriktir

$R^*.P^* = 0$ ise M ye Projektif yarı simetrik

denir.

2.1.16 Tanım

$n-$boyutlu bir Riemann manifoldu M olsun. M nin her p noktasındaki T_pM teğet uzayındaki r boyutlu bir D_p alt uzayı bağlayan D dönüşümüne M üzerinde rankı r olan bir dağılım denir. $X \in \chi(M)$ ve $\forall p \in M$ için $X_p \in D_p$ ise X vektör alanına D dağılımına aittir denir. D dağılımına ait olan vektör alanlarının uzayı $\Gamma(D)$ ile gösterilir.

2.2 Bir Riemann Manifoldu Üzerinde Yarı Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyon

2.2.1 Tanım

(M,g) bir Riemann manifoldu ve * , M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu olsun.

$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$

şeklinde tanımlansın. Burada η bir 1-form ve $\xi \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\eta(Y) = g(Y,\xi) \tag{2.10}$$

ile tanımlıdır.

2.2.1 Teorem

(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. Eş. 2.9 de tanımlı ∇, M üzerinde bir lineer koneksiyondur [Agashe ve Chafle, 1992].

2.2.2 Tanım

(M,g) bir Riemann manifoldu üzerinde Eş. 2.9 ile tanımlı bir lineer koneksiyon ∇ olsun. ∇ nın torsiyon tensörü T olmak üzere $\forall X,Y \in \chi(M)$ için;

$$T(X,Y) = \eta(Y)X - \eta(X)Y \tag{2.11}$$

ise ya *yarı simetrik koneksiyon* adı verilir [Agashe ve Chafle, 1992].

2.2.3 Tanım

(M,g) bir Riemann manifoldu üzerinde Eş. 2.9 ile tanımlı bir yarı simetrik koneksiyon ∇ olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için;

ise koneksiyonuna *yarı simetrik metrik olmayan koneksiyon* denir [Agashe ve Chafle, 1992].

2.2.2 Teorem

(M,g) bir Riemann manifoldu üzerinde Eş. 2.9 ile tanımlı bir lineer koneksiyon ∇ olsun. ∇, M üzerinde bir yarı simetrik metrik olmayan koneksiyondur [Agashe ve Chafle, 1992].

2.3 Bir Riemann Manifoldu Üzerinde Yarı Simetrik Metrik Koneksiyon

2.3.1 Tanım

(M,g) bir Riemann manifoldu ve * , M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu olsun.

$\tilde{\nabla}: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$

şeklinde tanımlansın. Burada ξ bir vektör alanı ve η bir 1-form ol

$$\eta(Y) = g(Y,\xi) \tag{2.14}$$

ile tanımlıdır.

2.3.1 Teorem

(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. Eş. 2.13 de tanımlı $\tilde{\nabla}$, M üzerinde bir lineer koneksiyondur [Friedman ve Shouten, 1924].

2.3.2 Tanım

(M,g) bir Riemann manifoldu üzerinde Eş. 2.13 ile tanımlı bir lineer koneksiyon $\tilde{\nabla}$ olsun. $\tilde{\nabla}$ nın torsiyon tensörü $\tilde{T}$ olmak üzere $\forall X,Y \in \chi(M)$ için;

$$\tilde{T}(X,Y) = \eta(Y)X - \eta(X)Y \tag{2.15}$$

ise $\tilde{\nabla}$ ya *yarı simetrik koneksiyon* adı verilir [Friedman ve Shouten, 1924].

2.3.3 Tanım

(M,g) bir Riemann manifoldu üzerinde Eş. 2.13 ile tanımlı bir yarı simetrik koneksiyon $\tilde{\nabla}$ olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için;

$$(\tilde{\nabla}_X g)(Y,Z) = 0 \tag{2.16}$$

ise $\tilde{\nabla}$ koneksiyonuna *yarı simetrik metrik koneksiyon* denir [Friedman ve Shouten, 1924].

2.3.2 Teorem

(M, g) bir Riemann manifoldu üzerinde Eş. 2.13 ile tanımlı bir lineer koneksiyon $\tilde{\nabla}$ olsun. $\tilde{\nabla}$, M üzerinde bir yarı simetrik metrik koneksiyondur [Friedman ve Shouten, 1924].

2.4 Hemen hemen Kompleks ve Hemen hemen Kontakt Manifoldlar

2.4.1 Tanım

M bir diferensiyellenebilir reel manifold olsun. M nin her q noktasındaki T_qM tanjant uzayı üzerinde tanımlı bir

$$J : T_qM \to T_qM$$

lineer dönüşümü

$$J^2 = -I$$

koşulunu sağlıyor ise J ye M üzerinde *hemen hemen kompleks yapı*, M manifolduna da *hemen hemen kompleks manifold* denir. Her hemen hemen kompleks manifold çift boyutludur [Yano ve Kon, 1984].

2.4.2 Tanım

M bir hemen hemen kompleks manifold ve M üzerinde hemen hemen kompleks yapı J olsun. g, M üzerinde bir Riemann metrik olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(J(X), J(Y)) = g(X, Y)$$

özelliği sağlanıyor ise g ye M üzerinde *Hermit metrik* denir. M manifolduna da *hemen hemen Hermityan manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.4.3 Tanım

M bir $(2n+1)$ boyutlu manifold, φ, ξ ve η da M üzerinde sırasıyla, $(1,1)$ tipinde tensör alanı, bir vektör alanı ve bir 1-form olsun. Herhangi bir vektör alanı X için;

$$\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi \quad \text{ve} \quad \eta(\xi) = 1 \tag{2.17}$$

özellikleri sağlanıyorsa o zaman (φ, ξ, η) ya M üzerinde bir *hemen hemen kontakt yapı* ve M manifolduna da *hemen hemen kontakt manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.4.4 Tanım

$(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen kontakt manifold M olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve

$\xi \in \chi(M)$ için

$$\eta(X) = g(X, \xi) \tag{2.18}$$

ve

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.19}$$

koşullarını sağlayan bir g Riemann metriği (φ, ξ, η, g) dörtlüsüne bir *hemen hemen kontakt metrik yapı*, $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ beşlisine de bir *hemen hemen kontakt metrik manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.4.1 Teorem

M bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\varphi(X), \varphi(Y)) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği daima vardır [Blair, 1976].

2.4.5 Tanım

M $(2n+1)$-boyutlu bir manifold, η da M üzerinde bir 1-form olsun. Eğer,

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

koşulunu sağlıyor ise M ye bir *kontakt yapıya sahiptir* denir. M manifolduna da, *kontakt manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.4.2 Teorem

(M,φ,ξ,η) bir hemen hemen kontakt manifold olsun. $X,\xi \in \chi(M), X \neq \xi$ ve

$$\varphi : \chi(M) \to \chi(M)$$

için

$$(i)\ \varphi(\xi)=0,\ (ii)\ \eta \circ \varphi = 0,\ (iii)\ rank\varphi = 2n \qquad (2.20)$$

dir [Yano ve Kon, 1984].

2.4.6 Tanım

M bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$\Phi(X,Y) = -g(X,\varphi(Y)) = d\eta(X,Y) \qquad (2.21)$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne (φ,ξ,η,g) hemen hemen kontakt metrik yapının $temel\ 2-formu$ denir. Burada η kontak formu için yazılan $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ koşulu $\eta \wedge (\Phi)^n \neq 0$ halini alır [Yano ve Kon, 1984].

2.4.7 Tanım

$(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen kontakt metrik manifold M olsun. Eğer,

$$d\eta(X,Y) = g(X,\varphi(Y)) = \Phi(X,Y)$$

oluyorsa (φ,ξ,η,g) dörtlüsüne *kontakt metrik yapı* ve (M,φ,ξ,η,g) beşlisine de *kontakt metrik manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

Sonuç

Her hemen hemen kontakt metrik manifold aynı zamanda kontakt manifoldtur [Yano ve Kon, 1984].

2.4.3 Teorem

M bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. ∇^*, M üzerinde Riemann koneksiyon olmak üzere $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$d\eta(X,Y)=g(X,\varphi(Y))=\frac{1}{2}\left\{g\left(\nabla^*_X\xi,Y\right)-g\left(\nabla^*_Y\xi,X\right)\right\} \tag{2.22}$$

dır [Yano ve Kon, 1984].

2.4.4 Teorem

$(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen kontakt metrik manifold M olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$d\eta(X,\xi)=0 \tag{2.23}$$

ve

$$d\eta(\varphi(X),Y)+d\eta(X,\varphi(Y))=0 \tag{2.24}$$

dır [Yano ve Kon, 1984].

$(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen kontakt manifold M ve M üzerinde hemen hemen kontakt yapı (φ,ξ,η) olsun. Reel doğru IR ile gösterilirse $M\times IR$ manifoldu $(2n+2)$ boyutlu bir çarpım manifoldu olur. Burada X, $M\times IR$ üzerinde herhangi bir vektör alanı, t, IR nin bir koordinatı ve f de $M \times IR$ üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $M \times IR$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıyı veren $M \times IR$ nin tanjant uzayındaki bir J lineer dönüşümü;

$$J : \chi(M \times IR) \rightarrow \chi(M \times IR)$$

$$\left(X, f\frac{d}{dt}\right) \rightarrow J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = \left(\varphi(X) - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right) \tag{2.25}$$

şeklinde tanımlıdır.

2.4.8 Tanım

M bir diferensiyellenebilir manifold ve φ, M üzerinde bir $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$N_\varphi(X,Y) = \varphi^2[X,Y] + [\varphi(X), \varphi(Y)] - \varphi[\varphi(X), Y] - \varphi[X, \varphi(Y)]$$

şeklinde tanımlanan $(1,2)$ tipindeki tensör alanına φ nin *Nijenhuis tensör alanı* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.4.9 Tanım

Bir hemen hemen kompleks metrik manifold M, M üzerindeki hemen hemen kompleks yapı J olsun. J nin Nijenhuis tensör alanı N_J olmak üzere $N_J = 0$ ise J dönüşümüne *integrallenebilirdir* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.4.10 Tanım

Bir $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen kontakt manifold M ve (φ, ξ, η) de M üzerinde hemen hemen kontakt yapı olsun. Reel doğru IR olmak üzere $M \times IR$ çarpım manifoldu göz önüne alınsın. Eğer $M \times IR$ üzerindeki (2.25) ile verilen hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (φ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısı *normaldir* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.4.11 Tanım

Bir $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen kontakt manifold M olsun. $M \times IR$ çarpım manifoldu üzerinde

$$[,]: \chi(M \times R) \times \chi(M \times R) \to \chi(M \times R)$$

$$\left(\left(X, f\frac{d}{dt}\right), \left(Y, g\frac{d}{dt}\right)\right) \to \left[\left(X, f\frac{d}{dt}\right), \left(Y, g\frac{d}{dt}\right)\right] = \left([X,Y], \left(X(g) - Y(f)\right)\frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde tanımlanan operatör

(i) Anti-Simetriktir,

(ii) Jacobi özdeşliğini sağlar,

bu şekilde tanımlanan bu operatöre *Lie braketi* denir [Blair, 2002].

2.4.12 Tanım

$(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen kontakt manifold M olsun. $N_J\left((X,0),(Y,0)\right)$ ve $N_J\left((X,0),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right)$ değerleri sırasıyla hesaplanarak

$$N^1(X,Y) = N_\varphi(X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi \tag{2.26}$$

$$N^2(X,Y) = \left(L_{\varphi(X)}\eta\right)Y - \left(L_{\varphi(Y)}\eta\right)X \tag{2.27}$$

$$N^3(X) = \left[\xi, \varphi(X)\right] - \varphi[X,\xi] \tag{2.28}$$

$$N^4(X) = \xi\eta(X) - \eta[X,\xi] \tag{2.29}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerle N^1, N^2, N^3 ve N^4 tensörleri tanımlanır.

2.4.5 Teorem

$(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen kontakt manifold M olsun. Bu yapının normal olabilmesi için gerek ve yeter şart N^1, N^2, N^3 ve N^4 tensörlerinin sıfır olmasıdır [Yano ve Kon, 1984].

2.4.6 Teorem

$(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen kontakt manifold M olsun. $N^1 = 0$ ise $N^2 = N^3 = N^4 = 0$ dır [Yano ve Kon, 1984].

2.4.13 Tanım

$(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen kontakt metrik manifold M olsun. Eğer M nin kontakt yapısı normal ise M bir *Sasaki yapıya* ya da *normal kontakt metrik yapıya sahiptir* denir. Sasaki yapıya sahip M manifolduna ise *Sasakian manifold* denir ve $(M, \varphi, g, \xi, \eta)$ ile gösterilir [Yano ve Kon, 1984].

3. HEMEN HEMEN S-MANİFOLDLAR VE S-MANİFOLDLAR

3.1 f-yapı

3.1.1 Tanım

(2n+s) boyutlu bir C^∞ manifold M olsun. M' nin tanjant demeti TM olmak üzere

$$f^3 + f = 0\,, \qquad rankf = 2n \tag{3.1}$$

koşulunu sağlayan (1,1) tipindeki diferensiyellenebilir , f tensör alanına f *-yapı* ve üzerinde bir f -yapı tanımlı M manifolduna da f *-manifold* denir [Goldberg ve Yano,1970].

s=0 ise f -yapı hemen hemen kompleks yapıdır. *s=1* ise f -yapı hemen hemen kontak yapıdır. f hemen hemen kontak yapı olması durumunda M manifoldu yönlendirilebilirdir.

$$(i)\ P = -f^2\,, \qquad (ii)\ Q = f^2 + I \tag{3.2}$$

ile tanımlanan iki bütünleyen izdüşüm operatörlerine karşılık sırasıyla D ve $D^\perp$ bütünleyen dağılımlar vardır. Burada boy(D)=$2n$ ve boy($D^\perp$)=s 'dir.

3.1.1 Lemma

(2n+s) boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold M olsun. φ, M üzerinde bir f -yapı, P ve Q ise Eş. 3.2 ile tanımlı bütünleyen izdüşüm fonksiyonları olmak üzere

$$(i)\ fP = Pf = f \quad (ii)\ fQ = Qf = 0 \quad (iii)\ f^2P = -P \quad (iv)\ f^2Q = 0 \tag{3.1.3}$$

dir [Ishihara ve Yano, 1964].

Eş. 3.1 koşulunu sağlayan P ve Q izdüşüm fonksiyonları yardımı ile M' nin tanjant demeti TM, biri $2n$ diğeri s boyutlu olan iki dağılımın direkt toplamı olarak yazılır. Yani;

$$TM = D \oplus D^\perp\,, \qquad D \cap D^\perp = \{0\} \tag{3.4}$$

dir.

3.1.2 Tanım

(2n+s) boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold M üzerinde bir f -yapı φ olsun. M üzerinde,

$$\varphi^2 = -I + \sum_{i=1}^{s} \eta^i \otimes \xi_i , \qquad \eta^i\left(\xi_j\right) = \delta_{ij} \tag{3.5}$$

olacak şekilde (1,1) tipinden bir φ tensör alanı, s -tane ξ_i vektör alanları ve s -tane η^i 1-formları var ise M' ye bir *global çatılandırılan manifold* ya da kısaca *çatılandırılan manifold* denir ve $\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i\right)$ ile gösterilir [Goldberg ve Yano,1970].

3.1.2 Lemma

$\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i\right)$ bir çatılandırılan manifold olsun. Bu durumda

$$(i)\ \ \varphi\left(\xi_i\right) = 0, \qquad (ii)\ \ \eta^i \circ \varphi = 0, \qquad (iii)\ \ rank\varphi = 2n \tag{3.6}$$

dir [Yano ve Kon, 1984, Sağbaş, 2010].

3.1.3 Lemma

φ' nin $\operatorname{Im}\varphi$'ye kısıtlanması $\operatorname{Im}\varphi$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı belirler [Yano ve Kon, 1984, Sağbaş, 2010].

Sonuç

$\left(\operatorname{Im}\varphi, \varphi^2\big|_{\operatorname{Im}\varphi}\right)$ bir hemen hemen kompleks manifolddur.

3.1.3 Tanım

$\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i\right)$ çatılandırılan manifold olsun. φ'nin Nijenhuis tensör alanı N_φ olmak üzere

$$S_\varphi = N_\varphi + 2\sum_{i=1}^{s} d\eta^i \otimes \xi_i \tag{3.7}$$

ile belirtilen (1,2) tipindeki S_φ tensör alanına *torsiyon tensör alanı* denir.

Burada N_φ, Nijenhuis tensör alanı $\forall V,W \in \chi(M)$ için

$$N_\varphi(V,W) = \varphi^2[V,W] + [\varphi V,\varphi W] - \varphi[\varphi V,W] - \varphi[V,\varphi W] \tag{3.8}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

3.1.4 Lemma

(2n+s) boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold *M* ve *M* üzerinde f -yapı φ olsun. φ ’ye karşılık gelen matris

$$\varphi = \begin{bmatrix} [0]_{n\times n} & -I_n & [0]_{s\times n} \\ I_n & [0]_{n\times n} & [0]_{s\times n} \\ [0]_{n\times s} & [0]_{n\times s} & [0]_{s\times s} \end{bmatrix}_{(2n+s)\times(2n+s)}$$

dir [Ishihara ve Yano, 1964].

3.1.5 Lemma

(M,φ,ξ_i,η^i) çatılandırılan manifold olsun. *M* üzerinde $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$g(\varphi X,\varphi Y) = g(X,Y) - \sum_{i=1}^{s} \eta^i(X)\eta^i(Y) \tag{3.9}$$

$$g(X,\xi_i) = \eta^i(X) \tag{3.10}$$

koşullarını sağlayan bir g Riemann metriği vardır [Yano ve Kon, 1984].

3.1.6 Lemma

(M,φ,ξ_i,η^i) çatılandırılan manifold üzerindeki g Riemann metriği

$$g(\varphi X, Y) + g(X, \varphi Y) = 0 \tag{3.11}$$

koşulunu sağlar, yani g anti-simetriktir [Yano ve Kon, 1984, Sağbaş, 2010].

3.1.2 Sonuç

$(M, \varphi, \xi_i, \eta^i)$ bir çatılandırılan manifold olsun. Eş. 3.9 ve Eş. 3.10 koşullarını sağlayan keyfi bir Riemann metriği her zaman bulunabilir [Duggal ve Bejancu, 1996].

3.1.4 Tanım

$(M, \varphi, \xi_i, \eta^i)$ çatılandırılan manifoldu üzerinde Eş. 3.1.9 ve Eş. 3.1.10 şartlarını sağlayan bir g Riemann metriğiyle birlikte $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ ye bir *çatılandırılan metrik manifold* yada *metrik f-manifold* denir.

3.1.5 Tanım

$(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$bir çatılandırılan metrik manifold olsun. $\forall\ X, Y \in \chi(M)$ için;

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y) \tag{3.12}$$

ile tanımlıΦ 'ye M üzerinde, *temel 2-form* denir [Yano ve Kon, 1984].

3.1.3 Sonuç

$(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$bir çatılandırılan metrik manifold olsun. Bu durumda $\forall\ V \in \chi(M)$ ve $\forall i \in \{1, ..., s\}$ için $\Phi(X, \xi_i) = 0$ dır [Yano ve Kon, 1984, Sağbaş, 2010].

3.2. Torsiyon Tensörü

$(2n+s)$-boyutlu bir çatılandırılan metrik manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ olsun. $M \times IR^s$ $(2n+2s)$-boyutlu bir çarpım manifoldtur. IR^s üzerindeki vektör alanları

$$\chi\left(IR^{s}\right)=\left\{\sum_{i=1}^{s} f_i \frac{\partial}{\partial t_i} : f_i \in C^{\infty}\left(IR^{s}, IR\right), 1 \leq i \leq s\right\}$$

şeklindedir.

$\left(X, f_1 \frac{\partial}{\partial t_1}, ..., f_s \frac{\partial}{\partial t_s}\right)$ ile $M \times IR^{s}$ ’deki vektör alanları gösterilmektedir. Burada *X*, M^{2n+s} ’de bir tanjant vektör alanı, $\left(t_1, ..., t_s\right)$ ile IR^{s} ’deki dik koordinat sistemi, f_i ’lerle $M^{2n+s} \times R^{s}$ üzerinde C^{∞} fonksiyonları gösterilmektedir. Ayrıca IR^{s} üzerinde hemen hemen kompleks yapı;

$$J : \chi\left(M \times IR^{s}\right) \rightarrow \chi\left(M \times IR^{s}\right)$$

$$\left(X, \sum_{i=1}^{s} f_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right) \rightarrow J\left(X, \sum_{i=1}^{s} f_i \frac{\partial}{\partial t_i}\right) = \left(\varphi X - \sum_{i=1}^{s} f_i \xi_i, \sum_{i=1}^{s} \eta^{i}\left(X\right) \frac{\partial}{\partial t_i}\right) \qquad (3.13)$$

olarak tanımlanır.

3.2.1 Lemma

J dönüşümü

(i) Lineerdir

(ii) $J^{2} = -I$ dir [Yano ve Kon, 1984, Sağbaş, 2010].

3.2.2 Lemma

$(2n+s)$-boyutlu bir çatılandırılan metrik manifold $\left(M, \varphi, \xi_i, \eta^{i}, g\right)$ olsun. Bu durumda $\left(M \times IR^{s}, J\right)$ bir hemen hemen kompleks manifoldtur.

3.2.1 Tanım

$(2n+s)$-boyutlu bir çatılandırılan manifold (M,φ,ξ_i,η^i) ve $(M\times R^s,J)$ bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Hemen hemen kompleks yapı J nin Nijenhuis tensörü Eş. 3.8 den $\forall\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right),\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\in\chi\left(M\times R^s\right)$ için

$$
\begin{aligned}
N_J\left(\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right),\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right) = J^2\left(\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right),\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right)& \\
+\left(J\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right),J\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right)& \\
-J\left(J\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right),\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right)& \\
-J\left(\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right),J\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right)&
\end{aligned}
$$

dir.

3.2.2 Tanım

$(M\times IR^s,J)$ bir hemen hemen kompleks manifold olsun. $M\times IR^s$ üzerinde

$$[,]:\chi\left(M\times IR^s\right)\times\chi\left(M\times IR^s\right)\to\chi\left(M\times IR^s\right)$$

$$\left(\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right),\left(Y,\sum_{i=1}^{s} g_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right)\to\left[\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right),\left(Y,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right]$$

olmak üzere

$$\left[\left(X,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right),\left(Y,\sum_{i=1}^{s} f_i\frac{\partial}{\partial t_i}\right)\right]=\left([X,Y],\sum_{i=1}^{s}\left(X(g_i)-Y(f_i)\right)\frac{\partial}{\partial t_i}\right) \tag{3.14}$$

şeklinde tanımlanan operatöre *braklet operatörü* denir.

3.2.3 Lemma

Eş. 3.14 ile tanımlı $[,]$ operatör

(i) Anti-simetriktir,

(ii) Jacobi özdeşliğini sağlar [Yano ve Kon, 1984, Sağbaş, 2010].

3.2.3 Tanım

Lemma 3.2.3. de tanımlanan operatöre *Lie braketi* denir.

3.2.4 Lemma

$(M \times IR^s, J)$ bir hemen hemen kompleks manifold ve J hemen hemen kompleks yapının Nijenhuis torsiyon tensörü N_J olmak üzere

$$N_J\left((X,0,...,0),(Y,0,...,0)\right) = \left\{N^1(X,Y), N^2(X,Y)\frac{\partial}{\partial t_i}\right\}$$

ve

$$N_J\left((X,0,...,0),\left(0,0,...0,\frac{\partial}{\partial t_i},0...,0\right)\right) = \left(N^3(X), N^4(X)\right)$$

dir [Blair, 2002, Sağbaş, 2010].

3.2.2 Tanım

$(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ bir çatılandırılan metrik manifold ve φ nin Nijenhuis tensör alanı N_φ olsun. $(M \times IR^s, J)$ hemen hemen kompleks manifoldun Nijenhuis tensör alanı $N_J = 0$ ise $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ ye *normaldir* denir [Yano ve Kon, 1984].

3.2.1 Teorem

$\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ bir çatılandırılan metrik manifold olsun. Bu yapının normal olabilmesi için gerek ve yeter koşul N^1,N^2,N^3 ve N^4 tensörlerinin sıfır olmasıdır [Yano ve Kon, 1984, Sağbaş, 2010].

3.2.2 Teorem

$\left(2n+s\right)$-boyutlu M manifoldu $\left(\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ çatılandırılan metrik yapısıyla verilsin. Eğer $N^1=0$ ise $N^2=N^3=N^4=0$ dir [Blair, 2002, Sağbaş, 2010].

3.2.3 Teorem

$\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ bir çatılandırılan metrik manifold olsun. ∇^*, M nin Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere $\forall X,Y,Z\in\chi\left(M\right)$ için

$$\begin{aligned}2g\left(\left(\nabla^*{}_X\varphi\right)Y,Z\right)&=3d\Phi\left(X,\varphi\left(Y\right),\varphi\left(Z\right)\right)-3d\Phi\left(X,Y,Z\right)+g\left(N^1\left(Y,Z\right),\varphi\left(X\right)\right)\\&+\sum_{i=1}^{s}\left\{N^2\left(Y,Z\right)\eta^i\left(X\right)+2d\eta^i\left(\varphi\left(Y\right),X\right)\eta^i\left(X\right)\right.\\&\left.-2d\eta^i\left(\varphi\left(Z\right),X\right)\eta^i\left(Y\right)\right\}\end{aligned}\tag{3.15}$$

dir [Blair, 2002, Sağbaş, 2010].

3.3. Hemen Hemen S-Manifoldlar

3.3.1 Tanım

$\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ bir çatılandırılan metrik manifold olsun. Eğer $\forall i\in\{1,...,s\}$ için $d\eta^i=\Phi$ ise M ye *hemen hemen S-manifold* denir.

Sonuç

$(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen S-manifold M olsun. $s=1$ ise M bir hemen hemen kontakt manifoldtur.

3.3.1 Lemma

$(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ bir hemen hemen S-manifold ve $X\in\Gamma(D)$ olsun. O halde, $\forall i\in\{1,...,s\}$ için $[X,\xi_i]\in\Gamma(D)$ dir.

İspat: $\forall i,j\in\{1,...,s\}$ ve $X\in\Gamma(D)$ için

$$\eta^j([X,\xi_i]) = -2d\eta^j(X,\xi_i)+X(\eta^j(\xi_i))-\xi_i(\eta^j(X))$$

$$= -2\Phi g(X,\xi_i)+X(\delta_{ij})-\xi_i(\eta^j(X))$$

$$=0$$

dir. O halde $[X,\xi_i]\in\Gamma(D)$ dir.

3.3.2 Lemma

Hemen hemen S-manifoldlarda $\forall i\in\{1,...,s\}$ ve $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

(i) N^2 ve N^4 tensör alanları sıfırdır,

(ii) N^3=0 $\Leftrightarrow$ ξ_i lar Killing vektör alanıdır.

İspat:

(i) N^2 nin tanımından

$$N^2(X,Y) = 2d\eta^i(\varphi(X),Y)-2d\eta^i(\varphi(Y),X)$$

$$=2\Phi(\varphi(X),Y)-2\Phi(\varphi(Y),X)$$

$$=2g(\varphi(X),\varphi(Y))-2g(\varphi(Y),\varphi(X))$$

$$= 0$$

bulunur. $\forall i \in \{1,...,s\}$ için

$$L_{\xi_i}\eta^i = \left(d \circ i\xi_i + i\xi_i \circ d\right)\left(\eta^j\right)$$

olur. Bu nedenle $N^4 = 0$ dır.

(ii) $L_{\xi_i}\Phi = L_{\xi_i} d\eta^j = d \circ i\xi_i \circ d\eta^j + i\xi_i \circ d^2\eta^j = 0$

dır. Buradan, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$0 = \left(L_{\xi_i}\Phi\right)(X,Y)$$

$$= \xi_i\left(g\left(X, \varphi(Y)\right)\right) - g\left([\xi_i, X], \varphi(X)\right) - g\left(X, \varphi[\xi_i, Y]\right)$$

$$= \left(L_{\xi_i} g\right)\left(X, \varphi(Y)\right) + g\left(L_{\xi_i}\varphi(Y), X\right)$$

$$= \left(L_{\xi_i} g\right)\left(X, \varphi(Y)\right) + g\left(N^3(Y), X\right)$$

bulunur. Bu eşitlikten ispat açıktır.

Sonuç

Hemen hemen S-manifoldlarda $\forall i \in \{1,...,s\}$ ve $\forall X, Y \in \Gamma(D)$ için

$$\eta^i\left(\left[\varphi(X), Y\right]\right) = \eta^i\left(\left[\varphi(Y), X\right]\right)$$

dir.

İspat:

$\forall X, Y \in \Gamma(D)$ için $N^2 = 0$ olduğundan

$$0 = N^2(X,Y) = \left(L_{\varphi(X)}\eta^i\right)(Y) - \left(L_{\varphi(Y)}\eta^i\right)(X)$$

$$= \varphi(X)\left(\eta^i(Y)\right) - \eta^i\left(\left[\varphi(X), Y\right]\right) - \varphi(Y)\left(\eta^i(X)\right) + \eta^i\left(\left[\varphi(Y), X\right]\right)$$

$$= -\eta^i\left(\left[\varphi(X), Y\right]\right) + \eta^i\left(\left[\varphi(Y), X\right]\right)$$

olur, $d\eta^i\left(\varphi(X), Y\right) + d\eta^i\left(X, \varphi(Y)\right) = 0$ olduğundan

$$\eta^i\left(\left[\varphi(X), Y\right]\right) = \eta^i\left(\left[\varphi(Y), X\right]\right)$$

dir.

3.3.1 Önerme

Hemen hemen S-manifoldlarda $\forall i \in \{1,...,s\}$ ve $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(i)\ 2g\left(\left(\nabla^*{}_X\varphi\right)Y, Z\right) = g\left(N^1(Y,Z), \varphi(X)\right) + 2g\left(\varphi(X), \varphi(Y)\right)\eta^i(Z)$$

$$-2g\left(\varphi(X), \varphi(Z)\right)\eta^i(Y),$$

(ii) $\nabla^*{}_{\xi_i}\varphi = 0$,

(iii) $\nabla^*{}_{\xi_i}\xi_j = 0$.

dır.

İspat:

(i) 3.2.3 Teorem ve 3.3.2 Lemma' dan ispat kolayca yapılır.

(ii) (i) de $X = \xi_i$ yazılırsa

$$2g\left(\left(\nabla^*{}_{\xi_i}\varphi\right)Y, Z\right) = g\left(N^1(Y,Z), \varphi(\xi_i)\right) + 2g\left(\varphi(\xi_i), \varphi(Y)\right)\eta^i(Z)$$

$$-2g\left(\varphi(\xi_i), \varphi(Z)\right)\eta^i(Y)$$

$$= 0$$

elde edilir. Buradan

$\nabla^*_{\xi_i}\varphi = 0$

dir.

(iii) (ii) de $Y = \xi_j$ yazılırsa

$0 = \left(\nabla^*_{\xi_i}\varphi\right)\xi_j = \nabla^*_{\xi_i}\varphi\left(\xi_j\right) - \varphi\left(\nabla^*_{\xi_i}\xi_j\right) = -\phi\left(\nabla^*_{\xi_i}\xi_j\right)$

bulunur. Buradan

$\nabla^*_{\xi_i}\xi_j \in D^{\perp}$ böylece $\forall i \in \{1,...,s\}$ için

$\eta^i\left(\left[\xi_i,\xi_j\right]\right) = -2d\eta^{\gamma}\left(\xi_i,\xi_j\right) = -2\Phi\left(\xi_i,\xi_j\right) = 0$

olup $\left[\xi_i,\xi_j\right] = 0$ olur. Ancak , $g\left(\xi_i,\xi_j\right) = \delta_{ij} = sabit$ olduğundan

$$2g\left(\nabla^*_{\xi_i}\xi_j,\xi_\gamma\right) = \xi_i\left(g\left(\xi_j,\xi_\gamma\right)\right) + \xi_j\left(g\left(\xi_\gamma,\xi_i\right)\right) - \xi_\gamma\left(g\left(\xi_i,\xi_j\right)\right) - g\left(\left[\xi_j,\xi_\gamma\right],\xi_i\right)$$

$$+g\left(\left[\xi_\gamma,\xi_i\right],\xi_j\right)g\left(\left[\xi_i,\xi_j\right],\xi_\gamma\right)$$

$$=0$$

elde edilir. Buradan $\nabla^*_{\xi_i}\xi_j \in \Gamma(D)$ olacağından $\nabla^*_{\xi_i}\xi_j = 0$ dır.

3.3.2 Tanım

$\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ bir hemen hemen S-manifold olsun. $\forall i \in \{1,...,s\}$ ve $\forall X \in \chi(M)$ için, h_i tensör alanı

$h_i : \chi(TM) \to \chi(TM)$

$$X \to h_i(X) = \frac{1}{2}L_{\xi_i}\varphi(X) = \frac{1}{2}N^3(X)$$

ile tanımlıdır.

3.3.3 Lemma

$\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ bir hemen hemen S-manifold olsun. M de $\forall X,Y\in\chi\left(M\right)$ ve $\forall i\in\{1,...,s\}$ için aşağıdakiler sağlanır.

(i) $\varphi\left(N\left(X,Y\right)+N\left(\varphi\left(X\right),Y\right)\right)=2\eta^i\left(Y\right)h_i\left(Y\right)$

(ii) $g\left(N\left(\varphi\left(X\right),Y\right),\xi_i\right)=0$

3.3.2 Önerme

$\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ bir hemen hemen S-manifold olsun. $\forall X,Y,Z\in\chi\left(M\right)$ ve $\forall i\in\{1,...,s\}$ için , h_i tensör alanı olmak üzere

$$\nabla^*{}_X\xi_i=-\varphi\left(X\right)-\varphi\left(h_i\left(X\right)\right)$$

dir.

İspat:

3.3.3 Lemma da $X=\xi_i$ konulursa, $\forall Y,Z\in\chi\left(M\right)$ için

$$\begin{aligned}g\left(N\left(\xi_i,Y\right),\varphi(Z)\right)&=-g\left(\varphi\left(N\left(\xi_i,Z\right)\right),Y\right)\\&=-2\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^i\left(\xi_i\right)g\left(h_\gamma\left(Z\right),Y\right)\\&=-2g\left(h_i\left(Z\right),Y\right)\end{aligned}$$

dır. Önerme 3.3.1' den

$$g\left(N\left(\xi_i,Z\right),\varphi(Y)\right)=2g\left(\left(\nabla^*{}_Y\varphi\right)\xi_i,Z\right)-2g\left(\varphi\left(\xi_i\right),\varphi(Y)\right)\eta^i\left(Z\right)$$

$$+2g\left(\varphi(Z),\varphi(Y)\right)\eta^{i}\left(\xi_{i}\right)$$

$$=-2g\left(\varphi\left(\nabla^{*}{}_{Y}\xi_{i}\right),Z\right)+2g\left(Z,Y\right)-2\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^{\gamma}\left(Z\right)\eta^{\gamma}\left(Y\right)$$

bulunur. Böylece

$$g\left(\varphi\left(\nabla^{*}{}_{Y}\xi_{i}\right),Z\right)=g\left(h_{i}\left(Z\right),Y\right)+g\left(Z,Y\right)-\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^{\gamma}\left(Z\right)\eta^{\gamma}\left(Y\right)$$

$$=g\left(h_{i}\left(Y\right),Z\right)+g\left(Y,Z\right)-\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^{\gamma}\left(Y\right)\eta^{\gamma}\left(Z\right)$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi\left(\nabla^{*}{}_{Y}\xi_{i}\right)=h_{i}\left(Y\right)+Y-\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^{\gamma}\left(Y\right)\xi_{\gamma}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafınının φ altında görüntüsü alınırsa

$$\varphi^{2}\left(\nabla^{*}{}_{Y}\xi_{i}\right)=\varphi\left(h_{i}\left(Y\right)\right)+\varphi\left(Y\right)-\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^{\gamma}\left(Y\right)\varphi\left(\xi_{\gamma}\right)$$

bulunur. φ^{2} nin değeri yerine yazılırsa

$$\nabla^{*}{}_{Y}\xi_{i}=-\varphi\left(h_{i}\left(Y\right)\right)-\varphi\left(Y\right)$$

elde edilir. Burada $\sum_{j=1}^{s}\eta^{j}\left(\nabla^{*}{}_{Y}\xi_{i}\right)\xi_{j}=0$ dır. Gerçekten;

$$2\eta^{j}\left(\nabla^{*}{}_{Y}\xi_{i}\right)=2g\left(\nabla^{*}{}_{Y}\xi_{i},\xi_{j}\right)$$

$$=Y\left(g\left(\xi_{i},\xi_{j}\right)\right)+\xi_{i}\left(g\left(\xi_{j},Y\right)\right)-\xi_{j}\left(g\left(Y,\xi_{i}\right)\right)-g\left(Y,\left[\xi_{i},\xi_{j}\right]\right)$$

$$-g\left(\xi_{i},\left[Y,\xi_{j}\right]\right)+g\left(\xi_{j},\left[Y,\xi_{i}\right]\right)$$

$$= \xi_i\left(\eta^j(Y)\right) - \xi_j\left(\eta^i(Y)\right) - \eta^i\left(\left[Y,\xi_j\right]\right) + \eta^j\left(\left[Y,\xi_i\right]\right)$$

$$= d\eta^j\left(\xi_i, Y\right) + d\eta^i\left(Y, \xi_j\right)$$

$$= 0$$

dır.

3.3.3 Önerme

$\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ bir hemen hemen S-manifold olsun. M üzerinde $\forall i\in\{1,...,s\}$ için, h_i tensör alanı aşağıdakileri sağlar

(i) h_i simetrik tensör alanıdır,

(ii) $h_i\left(\xi_j\right)=0$,

(iii) h_i, φ ile anti-değişimlidir.

İspat:

(i) Önerme 3.3.1 den $\nabla^*_{\xi_i}\varphi = 0$ dır. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$g\left(\left(L_{\xi_i}\varphi\right)X,Y\right) = g\left(\left[\xi_i,\varphi(X)\right]-\varphi\left[\xi_i,X\right],Y\right)$$

$$= g\left(\nabla^*_{\xi_i}\varphi(X) - \nabla^*_{\varphi(X)}\xi_i - \varphi\left(\nabla^*_{\xi_i}X\right) + \varphi\left(\nabla^*_X\xi_i\right),Y\right)$$

$$= g\left(\left(\nabla^*_{\xi_i}\varphi\right)X - \nabla^*_{\varphi(X)}\xi_i + \varphi\left(\nabla^*_X\xi_i\right),Y\right)$$

$$= g\left(-\left(\nabla^*_{\varphi(X)}\xi_i\right) + \varphi\left(\nabla^*_X\xi_i\right),Y\right)$$

dır. Burada $\forall i\in\{1,...,s\}$ için $X=\xi_j$ ya da $Y=\xi_j$ yazılırsa sonuç özdeş sıfır olacaktır. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için, Sonuç yardımı ile

$$g\left(\left(L_{\xi_i}\varphi\right)X,Y\right)=-g\left(\left(\nabla^*{}_{\varphi(X)}\xi_i\right),Y\right)-g\left(\left(\nabla^*{}_X\xi_i\right),\varphi(Y)\right)$$

$$=-\xi_i\left(g\left(\varphi(X),Y\right)\right)+g\left(\xi_i,\nabla^*{}_{\varphi(X)}Y\right)-\xi_i\left(g\left(X,\varphi(Y)\right)\right)$$

$$+g\left(\xi_i,\nabla^*{}_X\varphi(Y)\right)$$

$$=\eta^i\left(\nabla^*{}_{\varphi(X)}Y\right)+\eta^i\left(\nabla^*{}_X\varphi(Y)\right)$$

$$=\eta^i\left(\nabla^*{}_Y\varphi(X)\right)+\eta^i\left(\left[\varphi(X),Y\right]\right)+\eta^i\left(\nabla^*{}_{\varphi(Y)}X\right)$$

$$+\eta^i\left(\left[X,\varphi(Y)\right]\right)$$

$$=\eta^i\left(\nabla^*{}_Y\varphi(X)\right)+\eta^i\left(\nabla^*{}_{\varphi(Y)}X\right)$$

$$=g\left(\left(L_{\xi_i}\varphi\right)Y,X\right)$$

bulunur. Buradan h_i, simetrik operatördür.

(ii) $h_i\left(\xi_j\right)=\frac{1}{2}\left(L_{\xi_i}\varphi\right)\left(\xi_j\right)=\frac{1}{2}\left(L_{\xi_i}\varphi\left(\xi_j\right)-\varphi\left(L_{\xi_i}\xi_j\right)\right)=0$ dır.

(iii) $2g\left(X,\varphi(Y)\right)=2\Phi\left(X,Y\right)=2d\eta^i\left(X,Y\right)$

$$=g\left(\nabla^*{}_X\xi_i,Y\right)-g\left(\nabla^*{}_Y\xi_i,X\right)$$

$$=g\left(-\varphi(X)-\varphi\left(h_i(X)\right),Y\right)-g\left(-\varphi(Y)-\varphi\left(h_i(Y)\right),X\right)$$

$$=g\left(X,\varphi(Y)\right)+g\left(-\varphi\left(h_i(X)\right),Y\right)+g\left(X,\varphi(Y)\right)$$

$$+g\left(Y,-h_i\left(\varphi(X)\right)\right)$$

dır. O halde;

$$g\left(-\varphi\left(h_i\left(X\right)\right),Y\right)+g\left(-h_i\left(\varphi\left(X\right)\right),Y\right)=0$$

dır. $\forall Y\in\chi\left(M\right)$ için sağlandığından ve g non-dejenere olduğundan

$\varphi\left(h_i\left(X\right)\right)+h_i\left(\varphi\left(X\right)\right)=0$ olup buradan

$$\varphi\circ h_i+h_i\circ\varphi=0$$

dır.

3.3.4 Önerme

$\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ bir hemen hemen S-manifold olsun. $\forall X,Y\in\chi\left(M\right)$ için

$$\left(\nabla^*{}_X\varphi\right)Y+\left(\nabla^*{}_{\varphi(X)}\varphi\right)\varphi\left(Y\right)=2g\left(\varphi\left(X\right),\varphi\left(Y\right)\right)\xi_i+\sum_{i=1}^{s}\eta^i\left(Y\right)\varphi^2\left(X\right)-\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^\gamma\left(Y\right)h_\gamma\left(X\right)$$

dir.

İspat:

$\forall X,Y,Z\in\chi\left(M\right)$ ve $\forall\gamma,i\in\{1,...,s\}$ için

$$2g\left(\left(\nabla^*{}_X\varphi\right)Y,Z\right)+g\left(\left(\nabla^*{}_{\varphi(X)}\varphi\right)\varphi\left(Y\right),Z\right)=\Big(2g\left(Z,-\eta^\gamma\left(Y\right)h_\gamma\left(X\right)\right)+2g\left(X,Y\right)\xi_i$$

$$-2\eta^\gamma\left(X\right)\eta^\gamma\left(Y\right)\xi_\gamma-\eta^i\left(Y\right)X$$

$$-\eta^\gamma\left(X\right)\eta^\gamma\left(Y\right)\xi_\gamma\Big)$$

dır. O halde;

$$\left(\nabla^*{}_X\varphi\right)Y+\left(\nabla^*{}_{\varphi(X)}\varphi\right)\varphi\left(Y\right)=-\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^\gamma\left(Y\right)h_\gamma\left(X\right)+2g\left(X,Y\right)\xi_\gamma-2\eta^\gamma\left(X\right)\eta^\gamma\left(Y\right)\xi_\gamma$$

$$-\sum_{i=1}^{s}\eta^i\left(Y\right)\left(X-\eta^i\left(X\right)\xi_i\right)$$

$$= 2g\left(\varphi\left(X\right),\varphi\left(Y\right)\right)\xi_i + \sum_{i=1}^{s}\eta^i\left(Y\right)\varphi^2\left(X\right) - \sum_{\gamma=1}^{s}\eta^\gamma\left(Y\right)h_\gamma\left(Y\right)$$

dir.

Sonuç

$\forall X, Y \in \chi\left(M\right)$ için

$\left(i\right)$ $\left(\nabla^*{}_X\varphi\right)Y + \left(\nabla^*{}_{\varphi(X)}\varphi\right)\varphi\left(Y\right) = 2\sum_{i=1}^{s} g\left(X,Y\right)\xi_i$

$\left(ii\right)$ $\left(\nabla^*{}_X\varphi\right)\varphi\left(Y\right) = \left(\nabla^*{}_{\varphi(X)}\varphi\right)Y$

$\left(iii\right)$ Eğer $s = 1$ alınırsa

$$\left(\nabla^*{}_X\varphi\right)Y + \left(\nabla^*{}_{\varphi(X)}\varphi\right)\varphi\left(Y\right) = 2g\left(X,Y\right)\xi - \eta\left(Y\right)\left(X + h\left(X\right) + \eta\left(X\right)\xi\right)$$

dir.

İspat:

$\left(i\right)$ 3.3.4 Önerme de 3.3.2 Tanım kullanılır ve denklem düzenlenirse istenilen sonuç elde edilir.

$\left(i\right)$ de $Y = \varphi\left(X\right)$ alınırsa

$$\left(\nabla^*{}_X\varphi\right)\left(\varphi\left(X\right)\right) + \left(\nabla^*{}_{\varphi(X)}\varphi\right)\left(\varphi^2\left(X\right)\right) = 2\sum_{i=1}^{s} g\left(X,\varphi\left(X\right)\right)\xi_i = 0$$

olur, burada $\varphi^2\left(X\right) = -X$ olduğundan

$$\left(\nabla^*{}_X\varphi\right)\left(\varphi\left(X\right)\right) = \left(\nabla^*{}_{\varphi(X)}\varphi\right)\left(X\right)$$

dir.

$\left(iii\right)$ $s = 1$ alınırsa 3.3.4 Önerme den kolayca görülür.

3.4. S-Manifoldlar

3.4.1 Tanım

$\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ bir çatılandırılan metrik manifold ve Φ bir temel 2-form olsun. Eğer M normal, $\xi_1,...,\xi_s$ vektör alanları birer Killing vektör alanı ve Φ, 2-formu kapalıysa, yani $d\Phi=0$ ise M *normal çatılandırılan metrik manifold* veya *K-manifold* olarak adlandırılır.

3.4.2 Tanım

$\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ bir K-manifold olsun. $\forall i\in\{1,...,s\}$ için ξ_i nin duali η^i olmak üzere $\eta^1\wedge...\wedge\eta^s\wedge\left(d\eta^i\right)^n\neq 0$ ise K-manifolduna yönlendirilebilirdir denir

[Terlizzi ve Pastore, 2002].

3.4.3 Tanım

$\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ bir K-manifold olsun. Eğer

$$\Phi\left(X,Y\right)=d\eta^i\left(X,Y\right)$$

oluyorsa $\left(M,\phi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ ye *S-manifold* denir [Terlizzi ve Pastore, 2002].

Örnek

E^{2n+s} öklid uzayının dik koordinat sistemi $\left(x_1,x_2,...,x_n,y_1,y_2,...,y_n,z_1,z_2,...,z_s\right)$ olsun.

$$\xi_i=2\frac{\partial}{\partial z_i}\quad,\quad i=1,2,...,s$$

$$\eta^i=\frac{1}{2}\left(dz_i-\sum_{j=1}^{n}y_j dx_j\right),$$

$$\varphi X=\sum_{j=1}^{n}Y^{j}\frac{\partial}{\partial x_{j}}-\sum_{j=1}^{n}X^{j}\frac{\partial}{\partial y_{j}}+\left(\sum_{j=1}^{n}Y^{j}y^{j}\right)\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial}{\partial z_{i}}\right),$$

$$g=\sum_{i=1}^{s}\eta^{i}\otimes\eta^{i}+\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(dx_{j}\otimes dx_{j}+dy_{j}\otimes dy_{j}\right)$$

olarak alınırsa

$$\eta^{1}\wedge...\wedge\eta^{s}\wedge\Phi^{n}\neq 0$$

ve

$$d\eta^{1}=...=d\eta^{s}=\sum_{i=1}^{s}dx_{i}\wedge dy_{i}$$

dır. Ayrıca E^{2n+s} de herhangi bir vektör alanı

$$X=\sum_{j=1}^{n}\left(X^{j}\frac{\partial}{\partial x_{j}}+Y^{j}\frac{\partial}{\partial y_{j}}\right)+\sum_{i=1}^{s}Z^{i}\frac{\partial}{\partial z_{i}}$$

dır. Sonuç olarak (ϕ, g, ξ_i) yapısıyla birlikte E^{2n+s} bir S-manifoldtur.

3.4.1 Lemma

$(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ bir S-manifold olsun. $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ üzerinde ∇^*, Levi-Civita koneksiyonu, φ, f-yapı, ξ_i, $1\leq i\leq s$, vektör alanları olmak üzere $\forall X\in\chi(M)$ için

$$\nabla^{*}_{X}\xi_{i}=-\varphi X \tag{3.16}$$

dir.

İspat:

$\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$0=\left(L_{\xi_i}g\right)(X,Y)=\xi_{i}g(X,Y)-g\left([\xi_i,X],Y\right)-g\left(X,[\xi_i,Y]\right)$$

$$= g\left(\nabla^*_{\xi_i} X, Y\right) + g\left(X, \nabla^*_{\xi_i} Y\right) - g\left(\nabla^*_{\xi_i} X, Y\right) + g\left(\nabla^*_X \xi_i, Y\right)$$

$$-g\left(X, \nabla^*_{\xi_i} Y\right) + g\left(X, \nabla^*_Y \xi_i\right)$$

$$= g\left(\nabla^*_X \xi_i, Y\right) + g\left(X, \nabla^*_Y \xi_i\right)$$

dır. Buradan;

$$g\left(\nabla^*_X \xi_i, Y\right) = -g\left(X, \nabla^*_Y \xi_i\right) \tag{3.17}$$

olup g anti-simetriktir.

Temel 2-formun ve S-manifoldun tanımından;

$$\Phi\left(X, Y\right) = g\left(X, \varphi\left(Y\right)\right) = d\eta^i\left(X, Y\right) = -g\left(\varphi\left(X\right), Y\right)$$

dir.

$$2d\eta^i\left(X, Y\right) = X\eta^i\left(Y\right) - Y\eta^i\left(X\right) - \eta^i\left(\left[X, Y\right]\right)$$

$$= Xg\left(Y, \xi_i\right) - Yg\left(X, \xi_i\right) - g\left(\left[X, Y\right], \xi_i\right)$$

$$= g\left(Y, \nabla^*_X \xi_i\right) - g\left(X, \nabla^*_Y \xi_\alpha\right) \tag{3.18}$$

olur. Eş. 3.17 ve Eş. 3.18’ den

$$2d\eta^i\left(X, Y\right) = 2g\left(\nabla^*_X \xi_i, Y\right) \Rightarrow \; d\eta^i\left(X, Y\right) = g\left(\nabla^*_X \xi_i, Y\right) = -g\left(\varphi\left(X\right), Y\right)$$

dir. $\forall Y \in \chi\left(M\right)$ için g non-dejenere olduğundan $\nabla^*_X \xi_i = -\varphi\left(X\right)$

olur.

3.4.1 Önerme

$\left(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g\right)$ bir S-manifold ve ∇^*, Levi-Civita koneksiyonu olsun. $\forall X, Y \in \chi\left(M\right)$ için,

$$\left(\nabla^*_X\varphi\right)Y=\sum_{i=1}^{s}\left(g\left(\varphi X,\varphi Y\right)\xi_i+\eta^i\left(Y\right)\varphi^2\left(X\right)\right) \tag{3.19}$$

dir.

İspat:

3.2.3 Teorem de $d\varphi=0$ ve $N^1=N^2=0$ olduğu yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$g\left(\left(\nabla^*_X\varphi\right)Y,Z\right)=\sum_{i=1}^{s}\left\{d\eta^i\left(\varphi X,Y\right)\eta^i\left(Z\right)-d\eta^i\left(\varphi Z,X\right)\eta^i\left(Y\right)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\left\{\Phi\left(\varphi X,Y\right)\eta^i\left(Z\right)-\Phi\left(\varphi Z,X\right)\eta^i\left(Y\right)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\left\{g\left(\varphi X,\varphi Y\right)\eta^i\left(Z\right)-g\left(\varphi Z,\varphi X\right)\eta^i\left(Y\right)\right\}$$

$$=\sum_{i=1}^{s}\left\{g\left(g\left(\varphi X,\varphi Y\right)\xi_i+\varphi^2\left(X\right)\eta^i\left(Y\right),Z\right)\right\}$$

bulunur. $\forall Z\in\chi\left(M\right)$ için g non-dejenere olduğundan;

$$\left(\nabla^*_X\varphi\right)Y=\sum_{i=1}^{s}\left(g\left(\varphi X,\varphi Y\right)\xi_i+\eta^i\left(Y\right)\varphi^2\left(X\right)\right)$$

dir.

3.4.2 Önerme

$\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ bir S-manifold olsun. L, M üzerinde Lie türevi olmak üzere, $\forall X,Y\in\chi\left(M\right)$ için,

$$\left(L_{\varphi X}\eta^i\right)\left(Y\right)=\left(L_{\varphi Y}\eta^i\right)\left(X\right) \tag{3.20}$$

dir.

İspat:

$$\left(L_{\varphi X}\eta^{i}\right)(Y)=\varphi X\eta^{i}(Y)-\eta^{i}\left([\varphi X,Y]\right)$$

$$=\varphi Xg\left(Y,\xi_{i}\right)-g\left([\varphi X,Y],\xi_{i}\right)$$

$$=g\left(\nabla^{*}_{\varphi X}Y,\xi_{i}\right)+g\left(Y,\nabla^{*}_{\varphi X}\xi_{i}\right)-g\left(\nabla^{*}_{\varphi X}Y,\xi_{i}\right)+g\left(\nabla^{*}_{Y}\varphi X,\xi_{i}\right)$$

$$=g\left(Y,\nabla^{*}_{\varphi X}\xi_{i}\right)+g\left(\nabla^{*}_{Y}\varphi X,\xi_{i}\right) \tag{3.21}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$2d\eta^{i}\left(\varphi X,Y\right)=\varphi X\eta^{i}(Y)-Y\eta^{i}\left(\varphi X\right)-g\left([\varphi X,Y],\xi_{i}\right)$$

$$=g\left(\nabla^{*}_{\varphi X}Y,\xi_{i}\right)+g\left(Y,\nabla^{*}_{\varphi X}\xi_{i}\right)-g\left(\nabla^{*}_{Y}\varphi X,\xi_{i}\right)-g\left(\varphi X,\nabla^{*}_{Y}\xi_{i}\right)$$

$$-g\left(\nabla^{*}_{\varphi X}Y,\xi_{i}\right)+g\left(\nabla^{*}_{Y}\varphi X,\xi_{i}\right)$$

$$=g\left(Y,\nabla^{*}_{\varphi X}\xi_{i}\right)-g\left(\varphi X,\nabla^{*}_{X}\xi_{i}\right)$$

$$=g\left(Y,\nabla^{*}_{\varphi X}\xi_{i}\right)+g\left(\nabla^{*}_{Y}\varphi X,\xi_{i}\right) \tag{3.22}$$

olur. Eş. 3.21 ve Eş. 3.22 den

$$\left(L_{\varphi X}\eta^{i}\right)(Y)=2d\eta^{i}\left(\varphi X,Y\right)=2\Phi\left(\varphi X,Y\right)$$

$$\left(L_{\varphi Y}\eta^{i}\right)(X)=2d\eta^{i}\left(\varphi Y,X\right)=2\Phi\left(\varphi Y,X\right)$$

olduğu görülür. Buradan,

$$\left(L_{\varphi X}\eta^{i}\right)(Y)=\left(L_{\varphi Y}\eta^{i}\right)(X)$$

dir.

3.4.3 Önerme

$\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ bir S-manifold olsun. $i\in\{1,..,s\}$ için h_i tensör alanı aşağıdaki eşitlikleri sağlar;

(i) h_i, simetrik tensör alanıdır,

(ii) $h_i\xi_j=0,\quad j\in\{1,...,s\}$.

dır.

İspat:

$\forall X,Y\in\chi(M)$ için,

$h_i:\chi(M)\to\chi(M)$

$$X\to h_i(X)=\frac{1}{2}\left(L_{\xi_i}\varphi\right)(X)=\frac{1}{2}\left(L_{\xi_i}\varphi(X)-\varphi L_{\xi_i}X\right)$$

dir.

$$(i)\ h_i(X)=\frac{1}{2}\left(L_{\xi_i}\varphi(X)-\varphi L_{\xi_i}X\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\nabla^*_{\xi_i}\varphi X-\nabla^*_{\varphi X}\xi_i-\varphi\left(\nabla^*_{\xi_i}X\right)-\phi\left(\nabla^*_X\xi_i\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\nabla^*_{\xi_i}\varphi X+\varphi^2(X)-\varphi\nabla^*_{\xi_i}X-\varphi^2(X)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\nabla^*_{\xi_i}\varphi X-\varphi\nabla^*_{\xi_i}X\right) \tag{3.23}$$

dir. Buradan

$$g\left(h_i(X),Y\right)=\frac{1}{2}\,g\left(\nabla^*_{\xi_i}\varphi X-\varphi\nabla^*_{\xi_i}X,Y\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{g\left(\nabla^*_{\xi_i}\varphi X,Y\right)-g\left(-\varphi\nabla^*_{\xi_i}X,Y\right)\right\}$$

olur. Burada $\forall i\{1,...,s\}$ için $X=\xi_j$ ya da $Y=\xi_j$ yazıldığında özdeş sıfır olur.

Diğer taraftan,

$$\eta^i\left([\varphi X,Y]\right)+\eta^i\left([X,\varphi Y]\right)$$

$$=g\left(\nabla^*_{\varphi X}Y,\xi_i\right)-g\left(\nabla^*_Y\varphi X,\xi_i\right)+g\left(\nabla^*_X\varphi Y,\xi_i\right)-g\left(\nabla^*_{\varphi Y}X,\xi_i\right)$$

$$=g\left(\nabla^*_{\varphi X}\xi_i,Y\right)-g\left(\nabla^*_Y\xi_i,\varphi X\right)+g\left(\nabla^*_X\xi_i,\varphi Y\right)-g\left(\nabla^*_{\varphi Y}\xi_i,X\right)$$

$$=-g\left(\varphi^2X,Y\right)+g\left(\varphi Y,\varphi X\right)-g\left(\varphi X,\varphi Y\right)+g\left(\varphi^2Y,X\right)$$

$$=0$$

dır. Eş. 3.23 de X ve Y ξ_i ya dik ise;

$$\left(L_{\varphi X}\eta^i\right)(Y)=\left(L_{\varphi Y}\eta^i\right)(X) \qquad (3.24)$$

dir.

$$g\left(h_i(X),Y\right)=\frac{1}{2}g\left(\left(L_{\xi_i}\varphi\right)X,Y\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{g\left(\nabla^*_{\xi_i}\varphi X,Y\right)-g\left(\varphi\nabla^*_{\xi_i}X,Y\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\eta^i\left(\nabla^*_{\varphi X}Y\right)+\eta^i\left(\nabla^*_X\varphi Y\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\eta^i\left(\nabla^*_Y\varphi X\right)+\eta^i\left(\nabla^*_{\varphi Y}X\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}g\left(\left(L_{\xi_i}\varphi\right)Y,X\right)$$

$$=g\left(h_i(Y),X\right)$$

olup h_i simetriktir.

(ii) $h_i\xi_j = \frac{1}{2}\left(L_{\xi_i}\varphi\right)\xi_j$

$$= \frac{1}{2}\left(L_{\xi_i}\varphi\xi_j - \varphi L_{\xi_i}\xi_j\right)$$

$$= 0$$

dir.

3.4.4 Önerme

$\left(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g\right)$ bir S-manifold olsun. O halde $\forall X \in \chi(M)$ ve $\forall i \in \{1,...,s\}$ için

$$(i)\ \nabla^*_X\xi_i - \sum_{j=1}^{s}\eta^j\left(\nabla^*_X\xi_i\right)\xi_j = -\varphi h_i(X) - \varphi(X) \tag{3.25}$$

$$(ii)\ h_i(X) = \frac{1}{2}\left\{\varphi\left(\nabla^*_X\xi_i\right) - \nabla^*_{\varphi(X)}\xi_i\right\} \tag{3.26}$$

dir.

İspat:

3.3.1 Önerme den $\forall X,Z \in \chi(M)$ ve $\forall i \in \{1,...,s\}$ için

$$2g\left(\left(\nabla^*_X\varphi\right)\xi_i,Z\right) = -g\left(\varphi\left(L_{\xi_i}\varphi\right)Z,\varphi(X)\right) - 2g\left(\varphi(X),\varphi(Z)\right)$$

$$= -g\left(\left(L_{\xi_i}\varphi(Z)\right),X\right) - 2g(X,Z) + 2\sum_{j=1}^{s}\eta^j(X)\eta^j(Z)$$

dir. h_i simetrik olduğundan

$$2g\left(\left(\nabla^*_X\varphi\right)\xi_i,Z\right) = -g\left(\left(L_{\xi_i}\varphi\right)X,Z\right) - 2g(X,Z) + 2\sum_{j=1}^{s}\eta^j(X)g\left(\xi_j,Z\right)$$

olur. $\forall Z \in \chi(M)$ için g non-dejenere olduğundan;

$$2\left(\nabla^*_X \varphi(\xi_i) - \varphi \nabla^*_X \xi_i\right) = -\left(L_{\xi_i}\varphi\right)X - 2X + 2\sum_{j=1}^{s}\eta^j(X)\xi_j$$

$$-2\varphi\left(\nabla^*_X \xi_i\right) = -2h_i(X) + 2\varphi^2(X)$$

$$-\varphi\left(\nabla^*_X \xi_i\right) = -h_i(X) + \varphi^2(X)$$

bulunur. Her iki tarafa φ uygulanırsa

$$-\varphi^2\left(\nabla^*_X \xi_i\right) = -\varphi\left(h_i(X)\right) + \varphi^3(X)$$

$$\nabla^*_X \xi_i - \sum_{j=1}^{s}\eta^j\left(\nabla^*_X \xi_i\right)\xi_j = -\varphi\left(h_i(X)\right) - \varphi(X)$$

dır. Gerçektende;

$$g\left(\varphi\left(L_{\xi_i}\varphi\right)Z, \varphi(X)\right) = g\left(\left(L_{\xi_i}\varphi\right)Z, X\right) - \sum_{j=1}^{s}\eta^j\left(\left(L_{\xi_i}\varphi\right)(Z)\right)\eta^j(X)$$

$$= g\left(\left(L_{\xi_i}\varphi\right)Z, X\right) - \sum_{j=1}^{s}\eta^j(X)\left(\eta^j\left(L_{\xi_i}\varphi(Z)\right) - \eta^j\left(\varphi L_{\xi_i}Z\right)\right)$$

$$= g\left(\left(L_{\xi_i}\varphi\right)Z, X\right) - \sum_{j=1}^{s}\eta^j(X)\left(\eta^j\left(\nabla_{\xi_i}\varphi(Z)\right) - \eta^j\left(\nabla^*_{\varphi(Z)}\xi_i\right)\right.$$

$$\left. -\eta^j\left(\varphi\nabla^*_{\xi_i}Z\right) + \eta^j\left(\varphi\nabla^*_Z \xi_i\right)\right)$$

$$= g\left(\left(L_{\xi_i}\varphi\right)Z, X\right) - \sum_{j=1}^{s}\eta^j(X)\left(\eta^j\left(\nabla^*_{\xi_i}\varphi(Z)\right) - \eta^j\left(\varphi^2(Z)\right)\right.$$

$$\left. -\eta^j\left(\varphi\nabla^*_{\xi_i}Z\right) + \eta^j\left(\varphi^2(Z)\right)\right)$$

$$= g\left(\left(L_{\xi_i}\varphi\right)Z, X\right) - \sum_{j=1}^{s}\eta^j(X)\left(\eta^j\left(\nabla^*_{\xi_i}\varphi(Z)\right) + \eta^j\left(\varphi^2(Z)\right)\right)$$

$$= g\left(\left(L_{\xi_i}\varphi\right)Z, X\right) - \sum_{j=1}^{s}\eta^j(X)\left(-g\left(\nabla^*_{\xi_i}\xi_j, \varphi(Z)\right)\right.$$

$$\left. + g\left(\varphi\nabla^*_{\xi_i}\xi_j, Z\right)\right)$$

$$= g\left(\left(L_{\xi_i}\varphi\right)Z, X\right)$$

dir.

(ii) $\frac{1}{2}\left(L_{\xi_i}\varphi\right)(X) = \frac{1}{2}\left(L_{\xi_i}\varphi(X) - \varphi\left(L_{\xi_i}X\right)\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\nabla^*_{\xi_i}\varphi(X) - \nabla^*_{\varphi(X)}\xi_i - \varphi\nabla^*_{\xi_i}X + \varphi\nabla^*_X\xi_i\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\nabla^*_{\xi_i}\varphi(X) - \varphi^2(X) - \varphi\nabla^*_{\xi_i}X + \varphi^2(X)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\nabla^*_{\xi_i}\varphi(X) - \varphi\nabla^*_{\xi_i}X\right)$$

dir.

3.4.1 Teorem

$\left(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g\right)$ bir S-manifold olsun. Bu durumda $i \in \{1, 2, ..., s\}$ için ξ_i vektör alanı bir Killing vektör alanıdır $\Leftrightarrow$ $h_i = 0$

dır.

İspat:

$L_{\xi_i}\Phi = di\xi_i\Phi + i\xi_i d\Phi = 0$ dır. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$\left(L_{\xi_i}\Phi\right)(X, Y) = \xi_i\Phi(X, Y) - \Phi\left(L_{\xi_i}X, Y\right) - \Phi\left(X, L_{\xi_i}Y\right)$

$$= \xi_i\Phi(X, Y) - d\eta^i\left(L_{\xi_i}X, Y\right) - d\eta^i\left(X, L_{\xi_i}Y\right)$$

$$= \xi_i \Phi(X,Y) - g\left(L_{\xi_i} X, \varphi(Y)\right) - g\left(X, \varphi\left(L_{\xi_i} Y\right)\right)$$

$$= \xi_i \Phi(X,Y) - g\left(L_{\xi_i} \varphi(Y), X\right) - g\left(X, L_{\xi_i} \varphi(Y)\right) + g\left(X, \left(L_{\xi_i} \varphi\right) Y\right)$$

$$= \xi_i \Phi(X,Y) + g\left(X, \left(L_{\xi_i} \varphi\right) Y\right) \tag{3.27}$$

olur.

$\Rightarrow$

ξ_i bir Killing vektör alanı olsun. Yani $L_{\xi_i} g = 0$ olduğundan

$$g\left(X, \left(L_{\xi_i} \varphi\right) Y\right) = \left(L_{\xi_i} \Phi\right)(X,Y) = 0$$

dir. $\forall X \in \chi(M)$ için g non-dejenere olduğundan

$$L_{\xi_i} \varphi = \frac{1}{2} h_i = 0 \Rightarrow h_i = 0$$

bulunur.

$\Leftarrow$

Karşıt olarak $h_i = 0$ ise $\forall j \in \{1, 2, ..., s\}$ için Eş. 3.27 den;

$$\left(L_{\xi_i} g\right)\left(X, \varphi(Y)\right) = \left(L_{\xi_i} \Phi\right)(X,Y) = 0$$

olur.

$$\left(L_{\xi_i} g\right)\left(X, \varphi^2(Y)\right) = \left(L_{\xi_i} g\right)\left(X, -Y + \sum_{j=1}^{s} \eta^j(Y) \xi_j\right) = 0$$

$$0 = -\left(L_{\xi_i} g\right)(X,Y) + \sum_{j=1}^{s} \eta^j(Y) \left(L_{\xi_i} \eta^j\right)(X)$$

$$\left(L_{\xi_i} g\right)(X,Y) = \sum_{j=1}^{s} \eta^j(Y)\left(L_{\xi_i}\eta^j\right)(X)$$

$$= 0$$

dır. Ayrıca

$$\left(L_{\xi_i}\eta^j\right) = \left(d \circ i_{\xi_i} + i_{\xi_i} \circ d\right)\left(\eta^j\right)$$

$$= d\left(i_{\xi_i}\eta^j\right) + i_{\xi_i}\left(d\eta^j\right)$$

$$= d\left(\eta^j(\xi_i)\right) + 2d\eta^j(\xi_i, Y)$$

$$= 2\left(g\left(\nabla^*_{\xi_i}\xi_j, Y\right) + g\left(\xi_i, \nabla^*_{\xi_i} Y\right)\right)$$

$$= -2g\left(Y, \nabla^*_{\xi_j}\xi_i\right)$$

$$= 0$$

dır. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $L_{\xi_i} g = 0$ olduğundan ξ_i bir Killing vektör alanıdır.

3.4.5 Önerme

$\left(M^{2n+s}, \varphi, \xi_i, \eta^i, g\right)$ bir K-manifold olsun. O halde $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall i, j \in \{1, 2, ..., s\}$ için

$$(i)\quad R^*(X, \xi_i)Y = \nabla^*_X \nabla^*_Y \xi_i - \nabla^*_{\nabla^*_X Y}\xi_i \tag{3.28}$$

$$(ii)\quad R^*\left(\xi_i, X, \xi_j, Y\right) = -g\left(\nabla^*_X \xi_j, \nabla^*_Y \xi_i\right) \tag{3.29}$$

$$(iii)\quad K^*(\xi_i, X) = \left\|\nabla^*_X \xi_i\right\|^2 \tag{3.30}$$

$$(iv)\quad R^*\left(\xi_i, \varphi(X), \xi_j, \varphi(Y)\right) = R^*\left(\xi_i, X, \xi_j, Y\right) \tag{3.31}$$

$(v)\ R^*\left(X,\xi_i\right)\xi_j = -\varphi^2 X$ (3.32)

dir.

İspat:

(i) ξ_i bir Killing vektör alanı olduğundan;

$$L_{\xi_i}\nabla^*_X Y - \nabla^*_X L_{\xi_i} Y = \nabla^*_{L_{\xi_i}X} Y$$

$$\left[\xi_i, \nabla^*_X Y\right] - \nabla^*_X \left[\xi_i, Y\right] = \nabla^*_{[\xi_\alpha, X]} Y$$

$$\nabla^*_{\xi_\alpha}\nabla^*_X Y - \nabla^*_{\nabla^*_X Y}\xi_i - \nabla^*_X \nabla^*_{\xi_i} Y + \nabla^*_X \nabla^*_Y \xi_i = \nabla^*_{[\xi_i, X]} Y$$

$$\left[\xi_i, X\right] Y - \nabla^*_{[\xi_i, X]} Y = -\nabla^*_X \nabla^*_Y \xi_i + \nabla^*_{\nabla^*_X Y}\xi_i$$

dır. 2.1.2 Teorem' den;

$$R^*\left(X,\xi_i\right)Y = \nabla^*_X \nabla^*_Y \xi_i - \nabla^*_{\nabla^*_X Y}\xi_i$$

olur.

(ii) 2.1.2 Teorem ve (i)' den

$$\begin{aligned}
R^*\left(\xi_i, X, \xi_j, Y\right) &= g\left(R^*\left(\xi_i, X\right)\xi_j, Y\right) \\
&= g\left(R^*\left(\xi_j, Y\right)\xi_i, X\right) \\
&= -g\left(R^*\left(\xi_j, Y\right)X, \xi_i\right) \\
&= g\left(R^*\left(Y, \xi_j\right)X, \xi_i\right) \\
&= -g\left(\nabla^*_{\nabla^*_Y X}\xi_j, \xi_i\right) + g\left(\nabla^*_Y \nabla^*_X \xi_j, \xi_i\right) \\
&= g\left(\nabla^*_{\xi_i}\xi_j, \nabla^*_Y X\right) + g\left(\nabla^*_Y \nabla^*_X \xi_j, \xi_i\right)
\end{aligned}$$

dır. ξ_i Killing vektör alanı olduğundan;

$$R^*\left(\xi_i, X, \xi_j, Y\right) = g\left(\nabla^*_Y \nabla^*_X \xi_j, \xi_i\right)$$

$$= -g\left(\nabla^*_Y \xi_i, \nabla^*_X \xi_j\right)$$

$$= -g\left(\nabla^*_X \xi_j, \nabla^*_Y \xi_i\right)$$

dir.

(iii) (i)' den;

$$K^*\left(\xi_i, X\right) = R^*\left(\xi_i, X, X, \xi_i\right)$$

$$= g\left(R^*\left(\xi_i, X\right) X, \xi_i\right)$$

$$= -g\left(R^*\left(\xi_i, X\right) \xi_i, X\right)$$

$$= -g\left(\xi_i, X, \xi_i, X\right)$$

$$= g\left(\nabla^*_X \xi_i, \nabla^*_X \xi_i\right)$$

$$= \left\|\nabla^*_X \xi_i\right\|^2$$

dir.

(iv) $R^*\left(\xi_i, \varphi(X), \xi_j, \varphi(Y)\right) = g\left(R^*\left(\xi_i, \varphi(X)\right) \xi_j, \varphi(Y)\right)$

$$= g\left(R^*\left(\xi_i, X\right) \xi_j, Y\right) - \sum_{\gamma=1}^{s} \eta^\gamma\left(R^*\left(\xi_i, X\right) \xi_j\right) \eta^\gamma(Y)$$

$$= g\left(R^*\left(\xi_i, X\right) \xi_j, Y\right)$$

$$= R^*\left(\xi_i, X, \xi_j, Y\right)$$

dir. Gerçektende;

$$\eta^{\gamma}\left(R^{*}\left(\xi_i,X\right)\xi_j\right)=\eta^{\gamma}\left(\nabla^{*}_{\xi_i}\nabla^{*}_{X}\xi_j-\nabla^{*}_{\nabla^{*}_{\xi_i}X}\xi_j\right)$$

$$=g\left(\nabla^{*}_{\xi_i}\nabla^{*}_{X}\xi_j,\xi_{\gamma}\right)-g\left(\nabla^{*}_{\nabla^{*}_{\xi_i}X}\xi_j,\xi_{\gamma}\right)$$

$$=-g\left(\nabla^{*}_{\xi_i}\xi_{\gamma},\nabla^{*}_{X}\xi_{\beta}\right)+g\left(\nabla^{*}_{\xi_{\gamma}}\xi_j,\nabla^{*}_{\xi_i}X\right)$$

$$=0$$

dır.

(v) (i) de $Y=\xi_j$ alınıp 3.3.1 Önerme ve Eş. 3.16 kullanılırsa

$$R^{*}\left(X,\xi_i\right)\xi_j=\nabla^{*}_{X}\nabla^{*}_{\xi_j}\xi_i-\nabla^{*}_{\nabla^{*}_{X}\xi_j}\xi_i$$

$$=-\nabla^{*}_{-\varphi X}\xi_i$$

$$=-\varphi^{2}X$$

elde edilir.

3.4.6 Önerme

$\left(M^{2n+s},\varphi,\xi_i,\eta^{i},g\right)$ bir K-manifold olsun. $\left(M^{2n+s},\varphi,\xi_i,\eta^{i},g\right)$ bir S-manifold ise

$$R^{*}\left(X,Y\right)\xi_i=\sum_{j=1}^{s}\left\{\eta^{j}\left(X\right)\varphi^{2}\left(Y\right)-\eta^{j}\left(Y\right)\varphi^{2}\left(X\right)\right\} \tag{3.33}$$

dır.

İspat:

Eş. 3.16' den;

$$R^{*}\left(X,Y\right)\xi_i=\nabla^{*}_{X}\nabla^{*}_{Y}\xi_i-\nabla^{*}_{Y}\nabla^{*}_{X}\xi_i-\nabla^{*}_{[X,Y]}\xi_i$$

$$=-\nabla^*_X\varphi(Y)+\nabla^*_Y\varphi(X)+\varphi([X,Y])$$

$$=-(\nabla^*_X\varphi)Y-\varphi(\nabla^*_XY)+(\nabla^*_Y\varphi)X+\varphi(\nabla^*_YX)+\varphi(\nabla^*_XY)-\varphi(\nabla^*_YX)$$

$$=-(\nabla^*_X\varphi)Y+(\nabla^*_Y\varphi)X$$

dir.

3.4.1 Önerme den

$$R^*(X,Y)\xi_i=\sum_{j=1}^{s}g(\varphi(Y),\varphi(X))\xi_j+\eta^j(X)\varphi^2(Y)$$

$$=-\sum_{j=1}^{s}\{g(\varphi(X),\varphi(Y))\xi_j-\eta^j(Y)\varphi^2(X)\}$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\{\eta^j(X)\varphi^2(Y)-\eta^j(Y)\varphi^2(X)\}$$

dir.

3.4.1 Sonuç

$(M^{2n+s},\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ bir K-manifold olsun. $(M^{2n+s},\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ bir S-manifold ise

$$(i)\ R^*(X,\xi_i)Y=-(\nabla^*_X\varphi)Y \tag{3.34}$$

$$(ii)\ R^*(\xi_k,X)\xi_i=\varphi^2X \tag{3.35}$$

$$(iii)\ R^*(\xi_k,\xi_h)\xi_i=0 \tag{3.36}$$

dir.

İspat:

$$(i)\ R^*(X,\xi_i)Y=\nabla^*_X\nabla^*_{\xi_i}Y-\nabla^*_{\xi_i}\nabla^*_XY-\nabla^*_{[X,\xi_\alpha]}Y$$

olup Eş. 3.16 ve Eş. 3.28’ den

$$R^{*}\left(X,\xi_{i}\right)Y=\nabla_{X}^{*}\varphi\left(Y\right)-\varphi\left(\nabla_{X}^{*}Y\right)$$

$$=-\left(\nabla_{X}^{*}\varphi\right)Y$$

elde edilir.

(ii) Eş. 3.33 de $X=\xi_{k}$ ve $Y=X$ yazılırsa

$$R^{*}\left(\xi_{k},X\right)\xi_{i}=\sum_{j=1}^{s}\left\{\eta^{j}\left(\xi_{k}\right)\varphi^{2}\left(X\right)-\eta^{j}\left(X\right)\varphi^{2}\left(\xi_{k}\right)\right\}$$

$$=\varphi^{2}X$$

bulunur.

(iii) Eş. 3.33 de $X=\xi_{k}$ ve $Y=\xi_{h}$ alınırsa

$$R^{*}\left(\xi_{k},\xi_{h}\right)\xi_{i}=\sum_{j=1}^{s}\left\{\eta^{j}\left(\xi_{k}\right)\varphi^{2}\left(\xi_{h}\right)-\eta^{j}\left(\xi_{h}\right)\varphi^{2}\left(\xi_{k}\right)\right\}$$

$$=0$$

bulunur.

3.4.7 Önerme

$\left(M^{2n+s},\varphi,\xi_{i},\eta^{i},g\right)$ bir K-manifold olsun. $\left(M^{2n+s},\varphi,\xi_{i},\eta^{i},g\right)$ bir S-manifold ise

$$S^{*}(X,\xi_{i})=2n\sum_{j=1}^{s}\eta^{j}(X) \tag{3.37}$$

dir [Kobayashi, M. ve Tsuchiya, S. 1972].

4. YARI SİMETRİK METRİK OLMAYAN KONEKSİYONLU S-MANİFOLDLAR

4.1 Yarı Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyon

4.1.1 Tanım

(2n+s) boyutlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$olsun. S-manifold üzerinde Levi-Civita koneksiyon ∇^* olmak üzere

$\nabla:\chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$

$$(X,Y)\to\nabla_X Y=\nabla_X^* Y+\sum_{j=1}^{s}\eta^j(Y)X \tag{4.1}$$

dönüşümü tanımlansın.

4.1.1 Teorem

(2n+s) boyutlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ ve $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\nabla_X Y=\nabla_X^* Y+\sum_{j=1}^{s}\eta^j(Y)X$$

şeklinde tanımlı ∇, M üzerinde bir *lineer koneksiyon* dur.

İspat:

$\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ ve $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için,

$$i)\nabla_{X+Y}Z=\nabla_{X+Y}^* Z+\sum_{j=1}^{s}\eta^j(Z)(X+Y)$$

$$= \nabla^*_X Z + \sum_{j=1}^{s} \eta^j (Z) X + \nabla^*_Y Z + \sum_{j=1}^{s} \eta^j (Z) Y$$

$$= \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

elde edilir.

$$ii) \nabla_X (Y + Z) = \nabla^*_X (Y + Z) + \sum_{j=1}^{s} \eta^j (Y + Z) X$$

$$= \nabla^*_X Y + \sum_{j=1}^{s} \eta^j (Y) X + \nabla^*_X Z + \sum_{j=1}^{s} \eta^j (Z) X$$

$$= \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

bulunur.

$$iii) \nabla_{fX} (Y) = \nabla^*_{fX} (Y) + \sum_{j=1}^{s} \eta^j (Y) f X$$

$$= f(\nabla^*_X Y + \sum_{j=1}^{s} \eta^j (Y) X)$$

$$= f(\nabla_X Y)$$

elde edilir. Son olarak

$$= X[f] Y + f(\nabla^*_X Y + \sum_{j=1}^{s} \eta^j (Y) X)$$

$$= X[f] Y + f(\nabla_X Y)$$

bulunur. Buradan ∇, M üzerinde bir lineer koneksiyondur.

4.1.2 Teorem

(2n+s) boyutlu bir S-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ olsun. Eş. 4.1.1 de tanımlanan lineer koneksiyon ∇, M üzerinde yarı simetrik metrik olmayan koneksiyondur.

İspat:

∇ lineer koneksiyonun torsiyon tensör alanı T olmak üzere, herhangi iki vektör alanları X, Y için,

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{4.2}$$

$$= \nabla^*_X Y + \sum_{j=1}^{s} \eta^j(Y)X - (\nabla^*_Y X + \sum_{j=1}^{s} \eta^j(X)Y) - [X,Y]$$

$$= T^*(X,Y) + \sum_{j=1}^{s} \{\eta^j(Y)X - \eta^j(X)Y\}$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \{\eta^j(Y)X - \eta^j(X)Y\}$$

elde edilir. Burada T^*, M üzerinde ∇^* Levi-Civita koneksiyonun torsiyon tensör alanıdır. Bu durumda lineer koneksiyon ∇, M üzerinde yarı simetrik bir koneksiyondur. Şimdi, ∇ lineer koneksiyonunun M üzerinde tanımlı g Riemann metrik tensörüyle bağdaşabilir olmadığı gösterilecektir. Metrikle bağdaşabilir olmayan koneksiyona kısaca metrik olmayan koneksiyon ifadesi kullanılacaktır.

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = X[g(Y,Z)] - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \tag{4.3}$$

$$= X[g(Y,Z)] - g\left(\nabla^{*}_{X}Y + \sum_{j=1}^{s}\eta^{j}(Y)X, Z\right)$$

$$g\left(Y, \nabla^{*}_{X}Z + \sum_{j=1}^{s}\eta^{j}(Z)X\right)$$

$$= -\sum_{j=1}^{s}\{\eta^{j}(Y)g(X,Z) + \eta^{j}(Z)g(Y,X)\}$$

elde edilir. Bu durumda lineer koneksiyon ∇, M üzerinde bir metrik olmayan koneksiyondur. O halde Eş. 4.2 ve Eş. 4.3 den lineer koneksiyon ∇, M üzerinde yarı simetrik metrik olmayan bir koneksiyondur.

Örnek

E^{2n+s} Öklid uzayının dik koordinat sistemi $(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n, z_1, z_2, ..., z_s)$ olsun.

$$\xi_i = 2\frac{\partial}{\partial z_i} \quad , \quad i = 1, 2, ..., s$$

$$\eta^i = \frac{1}{2}\left(dz_i - \sum_{j=1}^{n} y_j dx_j\right),$$

$$\varphi X = \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial}{\partial y_j} + \left(\sum_{j=1}^{n} Y^j y^j\right)\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial}{\partial z_i}\right),$$

$$g = \sum_{i=1}^{s}\eta^i \otimes \eta^i + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(dx_j \otimes dx_j + dy_j \otimes dy_j\right)$$

veya metriği matris olarak ifade edersek

$$(g_{kh}) = \begin{pmatrix} g_{ij} & g_{ij}^{*} & g_{ib'} \\ g_{i^*j} & g_{i^*j^*} & g_{i^*b'} \\ g_{a'j} & g_{a'i^*} & g_{a'b'} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \delta_{ij}+sy^i y^j & 0 & -y^i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ -y^j & 0 & \delta_{ab} \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

burada $g_{kh} = \langle \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^h} \rangle, (1 \leq k,\ h \leq 2n+s)$ $i^* = n + i(1 \leq i \leq n)$ ve

$a' = 2n + a\ (1 \leq a \leq s)$ dir. Bu matrisin ters matrisi

$$(g_{kh}) = \begin{pmatrix} g^{ij} & g^{ij^*} & g^{ib'} \\ g^{i^*j} & g^{i^*j^*} & g^{i^*b'} \\ g^{a'j} & g^{a'j^*} & g^{a'b'} \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} \delta_{ij} & 0 & -y^i \\ 0 & \delta_{ij} & 0 \\ y^j & 0 & \delta_{ab} + \sum_{k=1}^{n} (y^k)^2 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

olup bu matris yardımıyla Riemann koneksiyonunun bileşenlerinin ifadesi;

$$\Gamma_{i^*j}^{h} = \frac{s}{2}\delta_{ih}y^j,\ \ \Gamma_{ij}^{h^*} = -\frac{s}{2}\left(\delta_{ih}y^j + \delta_{jh}y^i\right),\ \ \Gamma_{ia'}^{h^*} = \frac{1}{2}\delta_{ih}, \Gamma_{i^*j}^{a'} = \frac{1}{2}\left(sy^i y^j - \delta_{ij}\right)$$

$$\Gamma_{i^*b'}^{a'} = -\frac{1}{2}y^i, \Gamma_{i^*a'}^{h} = -\frac{1}{2}\delta_{ih} \tag{4.6}$$

olup geriye kalan bileşenleri sıfırdır [Hasegawa, Okuyama, Abe, 1986]. Buradan Eş. 4.4, Eş. 4.5 ve Eş. 4.6 yi kullanarak Eş. 4.1 de tanımlanan yeni koneksiyonu bileşenlerine göre ifade edelim.

$$\nabla_{e_i} e_j = \nabla_{e_i}^{*} e_j + \sum_{\alpha=1}^{s} \eta^{\alpha}(e_j) e_i$$

$$\sum_{k=1}^{s} \Gamma_{ij}^{k} e_k = \sum_{k=1}^{s} \Gamma_{ij}^{*k} e_k + \sum_{\alpha=1}^{s} \eta^{\alpha}(e_j) e_i, \qquad \eta^{\alpha}(e_j) = \begin{cases} -\frac{1}{2}y_j, & j-1,\dots,n \\ 0, & j = n+1,\dots,2n \\ \frac{1}{2}\delta_{\alpha j}, & j = 2n+1,\dots,s \end{cases}$$

olup buradan

$$\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{*k} - \frac{1}{2} s y_j \delta_{ik}; \qquad \Gamma_{i\alpha}^{k} = \Gamma_{i\alpha}^{*k} + \frac{1}{2}\delta_{ik}$$

ve

$$\Gamma_{ij}^{h} = \frac{s}{2}\delta_{ih} y^{j},\ \ \Gamma_{ij}^{h} = -\frac{s}{2}\left(\delta_{ih} y^{j} + \delta_{jh} y^{i}\right),\ \ \Gamma_{i\alpha}^{h\cdot} = \frac{1}{2}\delta_{ih}, \Gamma_{ij}^{a'} = \frac{1}{2}\left(s y^{i} y^{j} - \delta_{ij}\right)$$

$$\Gamma_{ib}^{a'\cdot} = -\frac{1}{2} y^{i}, \Gamma_{i\alpha}^{h\cdot} = -\frac{1}{2}\delta_{ih}$$

olup geriye kalan bileşenleri sıfırdır.

Sonuç

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X \xi_i = -\varphi X + X \tag{4.7}$$

ve

$$(\nabla_X \eta^i) Y = -g(Y, \varphi X) - \sum_{j=1}^{s} \eta^j(Y)\eta^i(X) \tag{4.8}$$

dir.

İspat:

Eş. 4.1 de $Y = \xi_i$ alınır ve Eş. 3.16 kullanılırsa

$$\nabla_X \xi_i = \nabla_X^* \xi_i + \sum_{j=1}^{s} \eta^j(\xi_i) X$$
$$= -\varphi X + X$$

bulunur. Diğer taraftan Eş. 4.1 ve Eş. 3.16 kullanılırsa

$$\nabla_X \eta^i(Y) = X\left[\eta^i(Y)\right] - \eta^i(\nabla_X Y)$$

$$= Xg(Y,\xi_i) - \eta^i(\nabla_X Y)$$

$$= g(\nabla^*_X Y,\xi_i) + g(Y,\nabla^*_X \xi_i) - \eta^i(\nabla_X Y)$$

$$= g(\nabla^*_X Y,\xi_i) - g(Y,\varphi X) - \eta^i(\nabla^*_X Y) - \sum_{j=1}^{s} \eta^j(Y)\eta^i(X)$$

$$= -g(Y,\varphi X) - \sum_{j=1}^{s} \eta^j(Y)\eta^i(X)$$

elde edilir.

4.1.3 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \varphi)Y = \sum_{j=1}^{s} \{g(\varphi X,\varphi Y)\xi_j + \eta^j(Y)(\varphi^2 X - \varphi X)\} \tag{4.9}$$

dir.

İspat:

Eş. 4.1 ve Eş. 3.19 kullanılırsa

$$(\nabla_X \varphi)Y = \nabla_X \varphi Y - \varphi \nabla_X Y$$

$$= \nabla^*_X \varphi Y + \sum_{j=1}^{s} \eta^j(\varphi Y)X - \varphi\left(\nabla^*_X Y + \sum_{j=1}^{s} \eta^j(Y)X\right)$$

$$= (\nabla^*_X \varphi)Y - \sum_{j=1}^{s} \eta^j(Y)\varphi X$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \{g(\varphi X,\varphi Y)\xi_j + \eta^j(Y)(\varphi^2 X - \varphi X)\}$$

elde edilir.

Sonuç

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \varphi)\xi_i = -\nabla_{\varphi X}\xi_i = \varphi^2 X - \varphi X \qquad (4.10)$$

ve

$$\nabla_{\xi_i} \varphi X = \varphi \nabla_{\xi_i} X \qquad (4.11)$$

dir.

İspat:

Eş. 4.9 da $Y = \xi_i$ alınırsa

$$(\nabla_X \varphi)\xi_i = \varphi^2 X - \varphi X$$

bulunur. Diğer taraftan

$$(\nabla_X \varphi)\xi_i = \nabla_X \varphi\xi_i - \varphi\nabla_X \xi_i$$

$$= -\varphi\nabla_X \xi_i = \varphi^2 X - \varphi X$$

elde edilir. Diğer taraftan Eş. 4.9 da $X = \xi_i$ ve $Y = X$ alınırsa

bulunur. Buradan

elde edilir.

Şimdi, metrik f-manifoldların genel bir hali olan ve S-manifoldla normallik şartı dışında aynı şartları taşıyan ve Eş. 4.1 de tanımlanan lineer ∇ koneksiyonunu üzerinde bulunduran hemen hemen S-manifoldlar ele alınacaktır. Hemen hemen S-manifold da

$$h_i : \chi(M) \to \chi(M), \qquad h_i(X) = \frac{1}{2} L_{\xi_i}(\varphi X), \quad i \in \{1, \dots, s\} \tag{4.12}$$

şeklinde tanımlanır.

4.1.1 Lemma

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir hemen hemen S-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ olsun. Bu taktirde $\forall i \in \{1, \dots, s\}$ için h_i simetrik tensör alanıdır.

İspat:

Eş. 4.12 deki ifadenin Y vektör alanı ile iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned} g(h_i(X), Y) &= \frac{1}{2} g\left(\left(L_{\xi_i}\varphi\right)X, Y\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{g\left(\nabla^*_{\xi_i}\varphi X - \varphi\nabla^*_{\xi_i}X, Y\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{g\left(\nabla^*_{\xi_i}\varphi X, Y\right) - g\left(\varphi\nabla^*_{\xi_i}X, Y\right)\right\} \end{aligned}$$

bulunur. Burada Eş. 4.1 ve Eş. 4.11 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(h_i(X), Y) &= \frac{1}{2}\left\{g\left(\nabla_{\xi_i}\varphi X, Y\right) - g\left(\varphi\nabla_{\xi_i}X, Y\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{g\left(\nabla_{\varphi X}Y, \xi_i\right) + g\left(\xi_i, \nabla_X\varphi Y\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\eta^i\left(\nabla_{\varphi X}Y\right) + \eta^i\left(\nabla_X\varphi Y\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2} g\left(\left(L_{\xi_i}\varphi\right)Y, X\right) \\ &= g(h_i(Y), X) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan h_i simetrik tensör alanıdır.

4.1.4 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir hemen hemen S-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X \xi_i - \sum_{j=1}^{s} \eta^j (\nabla_X \xi_i) \xi_j = -\varphi h_i X - \varphi(X) - \varphi^2(X) \qquad (4.13)$$

ve

$$h_i X = \frac{1}{2}\{\varphi(\nabla_X \xi_i) - \nabla_{\varphi X} \xi_i\} \qquad (4.14)$$

dir.

İspat:

3.3.1 Önerme ve Eş. 4.1 kullanılırsa

$$2g((\nabla_X^* \varphi)\xi_i, Z) = 2g(\nabla_X^* \varphi \xi_i - \varphi \nabla_X^* \xi_i, Y)$$

$$= 2g(\nabla_X \varphi \xi_i - \sum_{j=1}^{s} \eta^j (\varphi \xi_i) X, Z) - 2g(\varphi(\nabla_X \xi_i - \sum_{j=1}^{s} \eta^j (\xi_i) X, Z)$$

$$= 2g((\nabla_X \varphi)\xi_i, Z) + 2g(\varphi X, Z)$$

bulunur. Buradan

$$2g((\nabla_X \varphi)\xi_i, Z) = -g(\varphi(L\xi_i \varphi)Z, \varphi X) - 2g(\varphi X, \varphi Z) - 2g(\varphi X, Z)$$

$$= -g((L\xi_i \varphi)Z, X) - 2g(X, Z) + 2\sum_{j=1}^{s} \eta^j (X) \eta^j (Z) - 2g(\varphi X, Z)$$

elde edilir. Şimdi $\forall Z \in \chi(M)$ için Eş. 4.12 kullanılırsa

$$2g\big((\nabla_X\varphi)\xi_i, Z\big) = -g\big((L\xi_i\varphi)X, Z\big) - 2g(X,Z) + 2\sum_{j=1}^{s}\eta^j(X)\eta^j(Z) - 2g(\varphi X, Z)$$

olur. O zaman

$$-\varphi(\nabla_X\xi_i) = -h_iX + \varphi^2X - \varphi X$$

dir. Burada her iki tarafın φ dönüşümü altında görüntüsü alınırsa

$$-\varphi^2(\nabla_X\xi_i) = -\varphi(h_iX) + \varphi^3(X) - \varphi^2(X)$$

$$\nabla_X\xi_i - \sum_{j=1}^{s}\eta^j(\nabla_X\xi_i)\xi_j = -\varphi(h_iX) - \varphi(X) - \varphi^2(X)$$

elde edilir. Diğer taraftan Eş. 3.16 ve Eş. 4.1 kullanılırsa

$$\varphi(\nabla_X\xi_i) = \varphi(\nabla^*_X\xi_i + \sum_{j=1}^{s}\eta^j(\xi_i)X)$$

$$= \varphi\nabla^*_X\xi_i + \varphi X$$

bulunur. Ayrıca

$$\nabla_{\varphi X}\xi_i = \nabla^*_X\xi_i + \sum_{j=1}^{s}\eta^j(\xi_i)\varphi X$$

$$= \nabla^*_{\varphi X}\xi_i + \varphi X$$

olup, buradan

$$h_iX = \frac{1}{2}\{\varphi(\nabla_X\xi_i) - \nabla_{\varphi X}\xi_i\}$$

elde edilir.

4.2 Eğrilik Tensörü

4.2.1 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y)Z = R^*(X,Y)Z + s\{g(\varphi Z,X)Y - g(\varphi Z,Y)X\}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{s}\{\eta^j(Y)\eta^i(Z)X - \eta^j(X)\eta^i(Z)Y\} \qquad (4.15)$$

dir. Burada R^*, Levi-Civita koneksiyon ∇^* ın eğrilik tensör alanıdır.

İspat:

Eş. 2.2 ve Eş. 4.1 kullanılırsa

$$\nabla_X\nabla_Y Z = \nabla_X\left(\nabla_Y^* Z + \sum_{i=1}^{s}\eta^i(Z)Y\right)$$

$$= \nabla_X\nabla_Y^* Z + \sum_{i=1}^{s}\nabla_X\left(\eta^i(Z)Y\right)$$

$$= \nabla_X^*\nabla_Y^* Z + \sum_{i=1}^{s}\eta^i(\nabla_Y^* Z)X - \sum_{i,j=1}^{s}\eta^j(Z)\eta^i(X)Y - \sum_{i=1}^{s}g(Z,X)Y$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(Z)\nabla_X^* Y + \sum_{i,j=1}^{s}\eta^j(Z)\eta^i(X)Y + \sum_{i=1}^{s}g(\varphi Z,X)Y + \sum_{i=1}^{s}g(Z,X)Y$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(Z)\nabla_X^* Y + \sum_{i,j=1}^{s}\eta^j(Y)\eta^i(Z)X$$

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \nabla^*_X \nabla^*_Y Z + \sum_{i=1}^{s} \eta^i (\nabla^*_Y Z) X + \sum_{i=1}^{s} \eta^i (\nabla^*_X Z) Y + \sum_{i=1}^{s} g(\varphi Z, X) Y$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \eta^i (Z) \nabla^*_X Y$$

dir. Benzer olarak X ve Y ifadelerinin yerleri değiştirilirse $\nabla_Y \nabla_X Z$ elde edilir.

dir. Ayrıca

$$\nabla_{[X,Y]} Z = \nabla^*_{[X,Y]} Z + \sum_{i=1}^{s} \eta^i (Z)([X,Y])$$

$$= \nabla^*_{[X,Y]} Z + \sum_{i=1}^{s} \eta^i (Z)(\nabla^*_X Y - \nabla^*_Y X)$$

olup, bulunan sonuçlar Eş. 2.2 de yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$R(X,Y)Z = \nabla^*_X \nabla^*_Y Z + \sum_{i=1}^{s} \eta^i (\nabla^*_Y Z) X + \sum_{i=1}^{s} \eta^i (\nabla^*_X Z) Y + \sum_{i=1}^{s} g(\varphi Z, X) Y$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \eta^i (Z) \nabla^*_X Y + \sum_{i,j=1}^{s} \eta^j (Y) \eta^i (Z) X \; - \nabla^*_Y \nabla^*_X Z + \sum_{i=1}^{s} \eta^i (\nabla^*_X Z) Y$$

$$+ \sum_{i=1}^{s} \eta^i (\nabla^*_Y Z) X + \sum_{i=1}^{s} g(\varphi Z, Y) X + \sum_{i=1}^{s} \eta^i (Z) \nabla^*_Y X - \sum_{i,j=1}^{s} \eta^j (X) \eta^i (Z) Y$$

$$- \nabla^*_{[X,Y]} Z - \sum_{i=1}^{s} \eta^i (Z)(\nabla^*_X Y - \nabla^*_Y X)$$

$$R(X,Y)Z = R^*(X,Y)Z + s\{g(\varphi Z, X) Y - g(\varphi Z, Y) X\}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{s}\{\eta^j(Y)\eta^i(Z)X-\eta^j(X)\eta^i(Z)Y\}$$

elde edilir.

Sonuç

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$i)\ R(X,Y)\xi_i=\sum_{j=1}^{s}\{\eta^j(X)(\varphi^2Y-Y)-\eta^j(Y)(\varphi^2X-X)\} \tag{4.16}$$

$$ii)\ R(X,\xi_i)Z=-\sum_{j=1}^{s}\{g(\varphi X,\varphi Z)\xi_j+\eta^j(Z)\varphi^2X\}+sg(\varphi Z,X)\xi_i$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\eta^j(Z)X-\sum_{i,j=1}^{s}\eta^i(X)\eta^j(Z)\xi_i \tag{4.17}$$

$$iii)\ R(X,\xi_j)\xi_i=-\varphi^2X+X-\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(X)\xi_j \tag{4.18}$$

$$iv)\ R(\xi_j,X)\xi_i=\varphi^2X-X+\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(X)\xi_j \tag{4.19}$$

$$v)\ R(\xi_k,\xi_j)\xi_i-\xi_k-\xi_j\ ,\qquad k\neq j \tag{4.20}$$

dir.

İspat:

$i)$ Eş. 4.15 de $Z=\xi_i$ yazılır ve Eş. 3.33 kullanılırsa

$$R(X,Y)\xi_i = \sum_{j=1}^{s}\{\eta^j(X)(\varphi^2 Y) - \eta^j(Y)(\varphi^2 X)\} + \sum_{i,j=1}^{s}\{\eta^i(Y)X - \eta^j(X)Y\}$$

bulunur. Bu son denklem düzenlenirse

$$R(X,Y)\xi_i = \sum_{j=1}^{s}\{\eta^j(X)(\varphi^2 Y - Y) - \eta^j(Y)(\varphi^2 X - X)\}$$

elde edilir.

$ii)$ Eş. 4.15 de $Y = \xi_i$ yazılır ve Eş. 3.28 kullanılırsa

$$R(X,\xi_i)Z = -\sum_{j=1}^{s}\{g(\varphi X,\varphi Z)\xi_j + \eta^j(Z)\varphi^2 X\} + s(g(\varphi Z,X)\xi_i) + \sum_{i,j=1}^{s}\eta^i(Z)X$$

$$-\sum_{i,j=1}^{s}\eta^i(X)\eta^j(Z)\xi_i$$

elde edilir.

$iii)$ Eş. 4.15 de $Y = \xi_j$ ve $Z = \xi_i$ yazılır ve Eş. 3.32 kullanılırsa

$$R(X,\xi_j)\xi_i = \sum_{\alpha=1}^{s}\{\eta^\alpha(X)(\varphi^2\xi_j) - \eta^\alpha(\xi_j)(\varphi^2 X)\}$$

$$+\sum_{\beta,\alpha=1}^{s}\{\eta^\alpha(\xi_j)\eta^\beta(\xi_i)X - \eta^\alpha(X)\eta^\beta(\xi_i)\xi_j\}$$

olur. Bu son denklemi düzenlersek

$$R(X,\xi_j)\xi_i = -\varphi^2 X + X - \sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(X)\xi_j$$

elde edilir.

$iv)$ Eş. 4.15 de $X = \xi_j$, $Y = X$ ve $Z = \xi_i$ yazılır ve Eş. 3.35 kullanılırsa

$$R(\xi_j, X)\xi_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \{\eta^\alpha(\xi_j)(\varphi^2 X) - \eta^\alpha(X)(\varphi^2 \xi_j)\}$$

$$+ \sum_{\beta,\alpha=1}^{s} \{\eta^\alpha(X)\eta^\beta(\xi_i)\xi_j - \eta^\alpha(\xi_j)\eta^\beta(\xi_i)X\}$$

olur. Bu son denklemi düzenlersek

$$R(\xi_j, X)\xi_i = \varphi^2 X - X + \sum_{\alpha=1}^{s} \eta^\alpha(X)\xi_j$$

elde edilir.

$v)$ Eş. 4.15 de $X = \xi_k, Y = \xi_j$ ve $Z = \xi_i$ yazılırsa

$$R(\xi_k, \xi_j)\xi_i = R^*(\xi_k, \xi_j)\xi_i + s\{g(\varphi\xi_i, \xi_k)\xi_j - g(\varphi\xi_i, \xi_j)\xi_k\}$$

$$+ \sum_{\beta,\alpha=1}^{s} \{\eta^\alpha(\xi_j)\eta^\beta(\xi_i)\xi_k - \eta^\alpha(\xi_k)\eta^\beta(\xi_i)\xi_j\}$$

elde edilir. Bu son denklemde Eş. 3.36 kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$R(\xi_k, \xi_j)\xi_i = \xi_k - \xi_j \qquad k \neq j$$

elde edilir.

4.2.2 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_Z R)(X,Y,\xi_i) = R(X,Y)\varphi Z - R(X,Y)Z$$

$$+ 2\{g(X,\varphi Z)Y - g(X,Z)Y - g(Y,\varphi Z)X - g(Y,Z)X\}$$

dir.

İspat:

Eş. 4.16 kullanılırsa

$$(\nabla_Z R)(X,Y,\xi_i) = \nabla_Z R(X,Y)\xi_i - R(\nabla_Z X,Y)\xi_i - R(X,\nabla_Z Y)\xi_i - R(X,Y)\nabla_Z \xi_i$$

$$-\nabla_Z\left(\sum_{j=1}^{s}\eta^j(X)(\varphi^2 Y - Y) - \eta^j(Y)(\varphi^2 X - X)\right)$$

$$-\sum_{j=1}^{s}\{\eta^j(\nabla_Z X)(\varphi^2 Y - Y) - \eta^j(Y)(\varphi^2\nabla_Z X - \nabla_Z X)\}$$

$$-\sum_{j=1}^{s}\{\eta^j(X)(\varphi^2\nabla_Z Y - \nabla_Z Y) - \eta^j(\nabla_Z Y)(\varphi^2 X - X)\}$$

$$-R(X,Y)(-\varphi Z + Z)$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\{-2g(X,\nabla_Z\xi_j)Y + 2g(Y,\nabla_Z\xi_j)X\} + R(X,Y)\varphi Z - R(X,Y)Z$$

bulunur. Bu son eşitlikte Eş. 4.7 kullanılırsa

$$(\nabla_Z R)(X,Y,\xi_i) = 2g(X,\varphi Z)Y - 2g(X,Z)Y - 2g(Y,\varphi Z)X$$

$$+2g(Y,Z)X + R(X,Y)\varphi Z - R(X,Y)Z$$

elde edilir.

4.2.3 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$$R(X,Y,Z,W)=R^*(X,Y,Z,W)+s\{g(\varphi Z,X)g(Y,W)-g(\varphi Z,Y)g(X,W)\}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{s}\{\eta^j(Y)\eta^i(Z)g(X,W)-\eta^j(X)\,\eta^i(Z)g(Y,W)\} \tag{4.21}$$

dir.

İspat:

Eş. 4.15 den

$$g(R(X,Y)Z,W)=g(R^*(X,Y)Z,W)+s\{g(\varphi Z,X)g(Y,W)-g(\varphi Z,Y)g(X,W\}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{s}\{\eta^j(Y)\eta^i(Z)g(X,W)-\eta^j(X)\,\eta^i(Z)g(Y,W)\}$$

bulunur. Bulunan denklem düzenlenirse Eş. 4.21 elde edilir.

4.2.4 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$$R(X,Y,W,Z)=R^*(X,Y,W,Z)+s\{g(\varphi W,X)g(Y,Z)-g(\varphi W,Y)g(X,Z)\}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{s}\{\eta^j(Y)\eta^i(W)g(X,Z)-\eta^j(X)\eta^i(W)g(Y,Z)\} \tag{4.22}$$

dir.

İspat:

Eş. 4.15 den

$$g(R(X,Y)Z,W) = g(R^*(X,Y)Z,W) + s\{g(\varphi Z,X)g(Y,W) - g(\varphi Z,Y)g(X,W\}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{s}\{\eta^j(Y)\eta^i(Z)g(X,W) - \eta^j(X)\,\eta^i(Z)g(Y,W)\}$$

bulunur. Bulunan denklemde Z ile W nin yerleri değiştirilirse Eş. 4.22 elde edilir.

4.2.5 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} R(X,Y,Z,W) + R(X,Y,W,Z) = {} & sg(\varphi Z,X)g(Y,W) - sg(\varphi Z,Y)g(X,W) \\ & +sg(\varphi W,X)g(Y,Z) - sg(\varphi W,Y)g(X,Z) \\ & +\sum_{i,j=1}^{s}\{\eta^j(Y)\eta^i(Z)g(X,W) - \eta^j(X)\eta^i(Z)g(Y,W)\} \\ & +\sum_{i,j=1}^{s}\{\eta^j(Y)\eta^i(W)g(X,Z) - \eta^j(X)\eta^i(W)g(Y,Z)\} \end{aligned} \tag{4.23}$$

dir.

İspat:

Eş. 4.21 ve Eş. 4.22 taraf tarafa toplanırsa

$$R(X,Y,Z,W) + R(X,Y,W,Z) = R^*(X,Y,Z,W) + R^*(X,Y,W,Z)$$

$$+sg(\varphi Z,X)g(Y,W)-sg(\varphi Z,Y)g(X,W)\}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{s}\{\eta^{j}(Y)\eta^{i}(Z)g(X,W)-\eta^{j}(X)\,\eta^{i}(Z)g(Y,W)\}$$

$$+\{s\{g(\varphi W,X)g(Y,Z)-g(\varphi W,Y)g(X,Z)\}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{s}\{\eta^{j}(Y)\eta^{i}(W)g(X,Z)-\eta^{j}(X)\eta^{i}(W)g(Y,Z)\}\}$$

bulunur. Bu son denklemde Eş. 2.4 kullanılıp denklem düzenlenirse Eş. 4.23 elde edilir.

4.2.6 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$$R(X,Y,Z,W)-R(Z,W,X,Y)=2sg(\varphi Z,X)g(Y,W)$$

$$-sg(\varphi Z,Y)g(X,W)-sg(\varphi W,X)g(Y,Z)$$

$$+\sum_{i,j=1}^{s}\{\eta^{j}(Y)\eta^{i}(Z)g(X,W)-\eta^{j}(X)\eta^{i}(W)g(Y,Z)\}$$

dir.

İspat:

Eş. 4.21 ve Eş. 4.22 taraf tarafa çıkartılırsa

$$R(X,Y,Z,W)-R(X,Y,W,Z)=R^{*}(X,Y,Z,W)-R^{*}(X,Y,W,Z)$$

$$+s\{g(\varphi Z,X)g(Y,W)-g(\varphi Z,Y)g(X,W)\}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{s}\{\eta^j(Y)\eta^i(Z)g(X,W)-\eta^j(X)\,\eta^i(Z)g(Y,W)\}$$

$$-\{s\{g(\varphi W,X)g(Y,Z)-g(\varphi W,Y)g(X,Z)\}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{s}\{\eta^j(Y)\eta^i(W)g(X,Z)-\eta^j(X)\eta^i(W)g(Y,Z)\}\}$$

bulunur. Bu son denklemde Eş. 2.5 kullanılıp denklem düzenlenirse ifade elde edilir.

4.2.7 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$$R(\xi_\alpha,Y,\xi_\beta,W)=-g(\varphi Y,\varphi W)-g(Y,W)+\sum_{j=1}^{s}\eta^j(Y)\eta^\alpha(W) \qquad (4.24)$$

dir.

İspat:

Eş. 4.21 de $X=\xi_\alpha$ ve $Z=\xi_\beta$ alınırsa

$$R(\xi_\alpha,Y,\xi_\beta,W)=R^*(\xi_\alpha,Y,\xi_\beta,W)+sg(\varphi\xi_\beta,\xi_\alpha)g(Y,W)-sg(\varphi\xi_\beta,Y)g(\xi_\alpha,W)$$

$$+\sum_{i,j=1}^{s}\{\eta^j(Y)\eta^i(\xi_\beta)g(\xi_\alpha,W)-\eta^j(\xi_\alpha)\eta^i(\xi_\beta)g(Y,W)\}$$

bulunur. Bu son eşitlikte Eş. 3.29 kullanılırsa Eş. 4.24 elde edilir.

4.2.1 Önerme

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$$K(X,Y)=R(X,Y,Y,X)=R^*(X,Y,Y,X)+sg(\varphi Y,X)g(Y,X)-sg(\varphi Y,Y)g(X,X)$$

$$+\sum_{i,j=1}^{s}\{\eta^j(Y)\eta^i(Y)g(X,X)-\eta^j(X)\eta^i(Y)g(Y,X)\} \tag{4.25}$$

dir.

İspat: Eş. 4.15 de $Z=Y$ alınıp X ile çarpılırsa

$$g(R(X,Y)Y,X)=g(R^*(X,Y)Y,X)+s\{g(\varphi Y,X)g(Y,X)-g(\varphi Y,Y)g(X,X\}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{s}\{\eta^j(Y)\eta^i(Y)g(X,X)-\eta^j(X)\,\eta^i(Y)g(Y,X)\}$$

bulunur. Bu son denklem düzenlenirse Eş. 4.25 elde edilir.

Sonuç

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$$K(\xi_i,X)=g(\varphi X,\varphi X)+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^\alpha(X)\eta^\beta(X)-\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(X)\eta^i(X) \tag{4.26}$$

dir.

İspat:

Eş. 4.25 de $X=\xi_i$ ve $Y=X$ alınırsa

$$K(\xi_i,X) = R(\xi_i,X,X,\xi_i) = R^*(\xi_i,X,X,\xi_i) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \eta^\alpha(X)\eta^\beta(X) - \sum_{\alpha=1}^{s} \eta^\alpha(X)\eta^i(X)$$

bulunur. Bu son eşitlikte Eş. 3.30 kullanılırsa Eş. 4.26 elde edilir.

4.3 Ricci Eğrilik Tensörü

4.3.1 Tanım

(2n+s) boyutlu yarı-simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ ve $\chi(M)$ nin ortonormal bir bazı $\{E_1,\dots,E_{2n},\xi_1,\dots,\xi_s\}$ olsun. Yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu M manifoldunun Ricci eğrilik tensörü

$$S(X,Y) - \sum_{k=1}^{2n} g(R(E_k,X)Y,E_k) + \sum_{\gamma=1}^{s} g\left(R\left(\xi_\gamma,X\right)Y,\xi_\gamma\right) \tag{4.27}$$

olarak tanımlanır.

4.3.1 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$S(X,Y) = S^*(X,Y) + (2n+s-1)\left[\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \eta^\alpha(X)\eta^\beta(Y) - s.g(X,\varphi Y)\right] \tag{4.28}$$

dir.

İspat:

Eş. 4.27 de Eş. 4.17 kullanılırsa

$$R(E_k,X,Y,E_k) = R^*(E_k,X,Y,E_k) + s\{g(\varphi Y,E_k)g(X,E_k) - g(\varphi Y,X)g(E_k,E_k)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \eta^{\alpha}(X)\eta^{\beta}(Y)g(E_k,E_k)$$

olup her iki taraftan toplam alınırsa,

$$\sum_{\kappa=1}^{2n} R(E_k,X,Y,E_k) = \sum_{\kappa=1}^{2n} R^{*}(E_k,X,Y,E_k) + sg(\varphi Y,X) - 2nsg(\varphi Y,X)$$

$$+2n\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \eta^{\alpha}(X)\eta^{\beta}(Y) \tag{4.29}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$R(\xi_\gamma,X,Y,\xi_\gamma) = R^{*}(\xi_\gamma,X,Y,\xi_\gamma) - sg(\varphi Y,X) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \eta^{\alpha}(X)\eta^{\beta}(Y)$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{s} \eta^{\alpha}(Y)\eta^{\gamma}(X)$$

olup her iki taraftan toplam alınırsa,

$$\sum_{\gamma=1}^{s} R(\xi_\gamma,X,Y,\xi_\gamma) = \sum_{\gamma=1}^{s} R^{*}(\xi_\gamma,X,Y,\xi_\gamma) - s^2 g(\varphi Y,X) + s\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \eta^{\alpha}(X)\eta^{\beta}(Y)$$

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \eta^{\alpha}(X)\eta^{\beta}(Y) \tag{4.30}$$

olup Eş. 4.29 ve Eş. 4.30 ifadeleri taraf tarafa toplanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa Eş. 4.28 elde edilir.

4.3.1 Sonuç

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$S(X,\xi_i)=(4n+s-1)\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^{\alpha}(X) \tag{4.31}$$

$$S(\varphi X,\xi_i)=0\,,\qquad S(\xi_j,\xi_i)=4n+s-1 \tag{4.32}$$

dir.

İspat:

Eş. 4.27 de $Y=\xi_i$ alınır ve Eş. 3.37 kullanılırsa

$$S(X,\xi_i)=S^*(X,\xi_i)+s.(2n+s-1)g(X,\varphi\xi_i)$$

$$+(2n+s-1)\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^{\alpha}(X)\eta^{\beta}(\xi_i)$$

$$=2n\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^{\alpha}(X)+(2n+s-1)\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^{\alpha}(X)$$

$$S(X,\xi_i)=(4n+s-1)\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^{\alpha}(X)$$

bulunur. Burada Eş. 4.32 için Eş. 4.31 de X yerine φX yazılırsa

$$S(\varphi X,\xi_i)=0$$

bulunur. Benzer şekilde Eş. 4.31 de $X=\xi_j$ yazılırsa

$$S(\xi_j,\xi_i) = 4n + s - 1$$

elde edilir.

4.3.3 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$S(X,Y) - S(Y,X) = -2s(2n+s-1)g(X,\varphi Y) \qquad (4.33)$$

dir.

İspat:

Eş. 4.28 de X ile Y vektör alanlarının yerleri değiştirilirse

$$S(Y,X) = S^*(Y,X) + (2n+s-1)[\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \eta^\alpha(Y)\eta^\beta(X) - sg(Y,\varphi X)]$$

bulunur. Eş. 4.28 ile bu ifadenin farkı alınırsa

$$S(X,Y) - S(Y,X) = S^*(X,Y) - S^*(Y,X) + s.(2n+s-1)g(X,\varphi Y)$$

$$-s.(2n+s-1)g(Y,\varphi X)$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapılıp denklem düzenlenirse

$$S(X,Y) - S(Y,X) = -2s(2n+s-1)g(X,\varphi Y)$$

bulunur.

Sonuç

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$S(X,\xi_i) = S(\xi_i, X) \tag{4.34}$$

dir.

İspat: Eş. 4.33 de $Y = \xi_i$ yazılırsa Eş. 4.34 elde edilir.

4.3.4 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$S(X,Y) = S(\varphi X,\varphi Y) + (4n+s-1)\sum_{i=1}^{s}\eta^i(X)\eta^i(Y) \tag{4.35}$$

dir.

İspat:

$X_0, Y_0 \in Im\varphi,\ \eta^i(X)\xi_i,\ \eta^i(Y)\xi_i \in çek\varphi, D$ ve $D^{\perp}$ dağılımının vektör alanlarının uzayı sırasıyla $\Gamma(D)$ ve $\Gamma(D^{\perp})$ olmak üzere $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{s}\eta^i(X)\xi_i, \qquad Y = Y_0 + \sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)\xi_i$$

olacak şekilde $X_0, Y_0 \in \Gamma(D)$ ve $\eta^i(X)\xi_i, \eta^i(X)\xi_i \in \Gamma(D^{\perp})$ şeklinde yazılır.

$$S(X,Y) = S(X_0 + \sum_{i=1}^{s}\eta^i(X)\xi_i, Y_0 + \sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)\xi_i)$$

$$= S(X_0,Y_0) + \sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)((4n+s-1)\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^{\alpha}(X_0)$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(X)((4n+s-1)\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(Y_0)+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(X)\eta^i(Y)S(\xi_i,\xi_i)$$

olur. $\eta^i(X_0)=0$, $\eta^i(Y_0)=0$ olup buradan

$$S(X,Y)=S(X_0,Y_0)+(4n+s-1)\sum_{i=1}^{s}\eta^i(X)\eta^i(Y)$$

bulunur. $\varphi X,\varphi Y\in\chi(M)$ olduğundan $S(X_0,Y_0)=S(\varphi X,\varphi Y)$ yazabiliriz. Buradan

$$S(X,Y)=S(\varphi X,\varphi Y)+(4n+s-1)\sum_{i=1}^{s}\eta^i(X)\eta^i(Y)$$

elde edilir.

4.3.5 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\left(\quad \right)$$

dir.

İspat:

Eş. 4.7 ve Eş. 4.34 kullanılırsa

$$=(4n+s-1)-S(-\varphi X+X,\xi_i)-S(\xi_i,-\varphi X+X)$$

$$=(4n+s-1)+S(\varphi X,\xi_i)-S(X,\xi_i)+S(\xi_i,\varphi X)-S(\xi_i,X)$$

$$= (4n + s - 1)\left(1 - 2\sum_{j=1}^{s} \eta^j\,(X)\right)$$

elde edilir.

5. BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

5.1.1 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. M üzerinde $R.R\neq 0$ dir. Yani manifold yarı simetrik değildir.

İspat:

Farzedelim ki $\forall X,Y,X_1,X_2,X_3,X_4\in\chi(M)$ için $R(X,Y).R=0$ olsun. O halde

$$(R.R)(X_1,X_2,X_3,X_4;X,Y)=-R(R(X,Y)X_1,X_2,X_3,X_4)-R(X_1,R(X,Y)X_2,X_3,X_4)$$
$$-R(X_1,X_2,R(X,Y)X_3,X_4)-R(X_1,X_2,X_3,R(X,Y)X_4)=0$$

olur. Burada $X=\Gamma(D)$ ve $Y=\xi_i,\ X_1=X,\ X_2=X_3=\varphi X,\ X_4=\xi_j$ özel vektör alanı alınırsa,

$$R\big(R(X,\xi_i)X,\varphi X,\varphi X,\xi_j\big)+R\big(X,R(X,\xi_i)\varphi X,\varphi X,\xi_j\big)$$
$$+R\big(X,\varphi X,R(X,\xi_i)\varphi X,\xi_j\big)+R\big(X,\varphi X,\varphi X,R(X,\xi_i)\xi_j\big)=0 \tag{5.1}$$

elde edilir. Burada Eş. 4.17 ve Eş. 4.18 kullanılırsa, Eş. 5.1 in birinci ifadesi

$$R(X,\xi_i)X=-\sum_{\alpha=1}^{s}\{g(\varphi X,\varphi X)\xi_\alpha+\eta^\alpha(X)\varphi^2X\}+sg(\varphi X,X)\xi_i+\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(X)X$$
$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^\alpha(X)\eta^\beta(X)\xi_i$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{s} \xi_\alpha$$

olup

$$R\big(R(X,\xi_i)X, \varphi X, \varphi X, \xi_j\big) = -\sum_{\alpha=1}^{s} R\big(\xi_\alpha, \varphi X, \varphi X, \xi_j\big)$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{s}\{\sum_{\beta=1}^{s}\{g\,(\varphi^2 X, \varphi^2 X)g\,(\xi_\beta, \xi_j) + \eta^\beta\,(\varphi X)\,g\big(\varphi^2 X, \xi_j\big)\}$$

$$+sg(\varphi^2 X, \varphi X)g(\xi_\alpha, \xi_j) + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^\beta\,(\varphi X)g(\varphi X, \xi_j) - \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \eta^\alpha\,(\varphi X)\eta^\beta\,(\varphi X)g\,(\xi_\alpha, \xi_j)\}$$

$$= -s$$

bulunur. Eş. 5.1 in ikinci ifadesi

$$R(X,\xi_i)\varphi X = sg\big(X,\varphi^2 X\big)\xi_i \; = -s\xi_i$$

olup

$$R\big(X, -s\xi_i, \varphi X, \xi_j\big) = -sR\big(X, \xi_i, \varphi X, \xi_j\big) = -s\big(sg\,(X, \varphi^2 X)g(\xi_i, \xi_j\big) = s^2\delta_{ij}$$

bulunur. Eş. 5.1 in üçüncü ifadesi

$$R(X,\xi_i)\varphi X == -s\xi_i$$

olup

$$R\big(X, \varphi X, -s\xi_i, \xi_j\big) = -sR\big(X, \varphi X, \xi_i, \xi_j\big) = 0$$

bulunur. Son olarak Eş. 5.1 in dördüncü ifadesi

$$R(X,\xi_i)\xi_j = -\varphi^2 X + X - \sum_{\alpha=1}^{s} \eta^\alpha(X)\xi_j = 2X$$

olup

$$R(X,\varphi X,\varphi X,2X) = 2R(X,\varphi X,\varphi X,X)$$

bulunur. Bu ifadeler Eş. 5.1 de yerlerine yazılırsa $2R(X,\varphi X,\varphi X,X) = s - s^2\delta_{ij}$ elde edilir. Bu Eş. 5.1 ile çelişir. O halde $R.R \neq 0$ olup ispat tamamlanır.

5.1.2 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. M üzerinde $R.S \neq 0$ dir. Yani manifold Ricci yarı simetrik değildir.

İspat:

Farzedelim ki $\forall X,Y,U,V \in \chi(M)$ için $R(X,Y).S = 0$ olsun. O halde

$$R(X,Y).S = -S(R(X,Y)U,V) - S(U,R(X,Y)V)$$

olup $S(R(X,Y)U,V) + S(U,R(X,Y)V) = 0$ eşitliği yazılır. Bu eşitlikte

$X = \xi_i$ ve $U = \xi_j$ alınırsa

$S(R(\xi_i,Y)\xi_j,V) + S(\xi_j,R(\xi_i,Y)V) = 0$ olur. Burada Eş. 5.2 kullanılırsa

$$S(R(\xi_i,Y)\xi_j,V) - S\left(\varphi^2 Y - Y + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^\beta(Y)\xi_i, V\right) \tag{5.2}$$

$$= S(\varphi^2 Y, V) - S(Y, V) + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^{\beta}(Y) S(\xi_i, V)$$

$$= -2S(Y, V) + 2(4n + s - 1) \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \eta^{\alpha}(Y) \eta^{\beta}(V)$$

elde edilir. Diğer taraftan Eş. 5.3 kullanılırsa

$$S(\xi_j, R(\xi_i, Y)V) = (4n + s - 1) \sum_{\gamma=1}^{s} \eta^{\gamma}(R(\xi_i, Y), V) \tag{5.3}$$

bulunur. Burada

$$R(\xi_i, Y)V = \sum_{\alpha=1}^{s} g(\varphi Y, \varphi V)\xi_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{s} \eta^{\alpha}(V)\varphi^2(Y) - sg(\varphi V, Y)\xi_i - \sum_{\alpha=1}^{s} \eta^{\alpha}(V) Y$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(V)\xi_i$$

elde edilir. Buradan

$$\eta^{\gamma}(R(\xi_i, Y)V) = g(\varphi Y, \varphi V) + \sum_{\alpha=1}^{s} \eta^{\alpha}(V)\eta^{\gamma}(\varphi^2 Y) - sg(\varphi V, Y)\eta^{\gamma}(\xi_i)$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(V)\eta^{\gamma}(\xi_i) - \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \eta^{\alpha}(V)\eta^{\beta}(Y)$$

elde edilir. Son eşitlik

$$\sum_{\gamma=1}^{s} \eta^{\gamma}(R(\xi_i, Y)V) = sg(\varphi Y, \varphi V) - s^2 g(\varphi V, Y)$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(V)-\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^{\alpha}(V)\eta^{\beta}(Y)$$

olup bu ifadeler Eş. 5.3 de yerine yazılırsa

$$S(\xi_j,R(\xi_i,Y)V)=(4n+s-1)(sg(\varphi Y,\varphi V)-sg(\varphi V,Y)+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(V)$$

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^{\alpha}(V)\eta^{\beta}(Y)$$

bulunur. Burada Eş. 5.2 ve Eş. 5.3 taraf tarafa toplanırsa

$$2S(Y,V)=(4n+s-1)(sg(Y,V)-s^2g(\varphi V,Y)-s\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^{\alpha}(Y)\eta^{\alpha}(V)$$

$$+2s\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^{\alpha}(Y)\eta^{\beta}(V))$$

olur. Buradan $S(Y,V)-S(V,Y)=-s^2(4n+s-1)g(Y,\varphi V)$ elde edilir. Bu ifade Eş. 4.33 ile çelişir. O halde $R.S\neq 0$ olup ispat tamamlanır.

5.1.3 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. M üzerinde $P.S\neq 0$ dir. Yani manifold Ricci Projektif yarı simetrik değildir.

İspat:

Farzedelim ki $\forall X,Y,U,V\in\chi(M)$ için $P(X,Y).S=0$ olsun. Bu durumda

$$(P(X,Y).S)(U,V)=P(X,Y).S(U,V)-S(P(X,Y)U,V)-S(U,P(X,Y)V)=0$$

$S(P(X,Y)U,V)+S(U,P(X,Y)V)=0$ olur.

$$P(X,Y)Z=R(X,Y)Z-\frac{1}{2n+s-1}\{S(Y,Z)X-S(X,Z)Y\}$$

olup 2n+s-1= m alınırsa $Z=U$ özel vektör alanı için

$$S\left(R(X,Y)U-\frac{1}{m}\{S(Y,U)X-S(X,U)Y\},V\right)$$

$$+S\left(U,R(X,Y)V-\frac{1}{m}\{S(Y,V)X-S(X,V)Y\}\right)=0$$

$$S(R(X,Y)U,V)-\frac{1}{m}\{S(Y,U)S(X,V)-S(X,U)S(Y,V)\}$$

$$+S(U,R(X,Y)V)-\frac{1}{m}\{S(Y,V)S(U,X)-S(X,V)S(U,Y)\}=0$$

bulunur. Bu eşitlikte $X=\xi_i$ ve $U=\xi_j$ alınırsa

$$S\big(R(\xi_i,Y)\xi_j,V\big)+S\big(\xi_j,R(\xi_i,Y)V\big)=0$$

olur. Burada Eş. 4.19 kullanılırsa

$$S\big(R(\xi_i,Y)\xi_j,V\big)-S\left(\varphi^2Y-Y+\sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(Y)\xi_i,V\right) \tag{5.4}$$

$$=S(\varphi^2Y,V)-S(Y,V)+\sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(Y)S(\xi_i,V)$$

$$+(4n+s-1)\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^\beta(Y)\eta^\alpha(V)$$

$$S\big(R(\xi_i,Y)\xi_j,V\big) = -2S(Y,V) + 2(4n+s-1)\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^\alpha(Y)\eta^\beta(V)$$

elde edilir. Diğer taraftan Eş. 4.17 kullanılırsa

$$S\big(\xi_j,R(\xi_i,Y)V\big) = (4n+s-1)\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^\gamma(R(\xi_i,Y)V) \tag{5.5}$$

bulunur. Bu eşitlikte

$$R(\xi_i,Y)V = \sum_{\alpha=1}^{s} g(\varphi Y,\varphi V)\xi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(V)\varphi^2(Y) - sg(\varphi V,Y) - \sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(V)Y$$

olup buradan

$$\eta^\gamma R(\xi_i,Y)V = g(\varphi Y,\varphi V) + \sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^\gamma(\varphi^2 Y) - sg(\varphi V,Y)\eta^\gamma(\xi_i)$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^\beta(Y)\eta^\alpha(V)\eta^\gamma(\xi_i) - \sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^\beta(Y)$$

olur. Her iki taraftan toplam alınırsa

$$\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^\gamma(R(\xi_i,Y)V) = sg(\varphi Y,\varphi V) - s^2 g(\varphi V,Y) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^\beta(Y)\eta^\alpha(V)$$

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^\beta(Y)$$

bulunur. Bu değer Eş. 5.5 de yerine yazılırsa

$$S(\xi_i,R(\xi_i,Y)V) = (4n+s-1)(sg(\varphi Y,\varphi V) - s^2 g(\varphi V,Y) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^\beta(Y)\eta^\alpha(V)$$

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^{\alpha}(V)\eta^{\beta}(Y)$$

bulunur. Son olarak Eş. 5.4 ve Eş. 5.5 taraf tarafa toplanırsa

$$2S(Y,V)=(4n+s-1)(sg(Y,V)-s^2g(\varphi V,Y)-s\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^{\alpha}(Y)\,\eta^{\alpha}(V)$$

$$+2s\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^{\alpha}(Y)\eta^{\beta}(V))$$

bulunur. Buradan $S(Y,V)-S(V,Y)=-s^2(4n+s-1)g(Y,\varphi V)$ elde edilir. Bu ifade Eş. 4.33 ile çelişir. O halde $P.S\neq 0$ olup ispat tamamlanır.

5.1.4 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik olmayan koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun.*M* üzerinde $R.P\neq 0$ dir. Yani manifold Projektif yarı simetrik değildir.

İspat:

$\forall X,Y,Z,U,V\in\chi(M)$ için $R(X,Y).P=0$ olsun.

$$(R(X,Y).P)(U,V)Z=R(X,Y)P(U,V)Z-P(R(X,Y),V)Z$$

$$-P(U,R(X,Y)V)Z-P(U,V)R(X,Y)Z=0$$

$$P(X,Y)Z=R(X,Y)Z-\frac{1}{2n+s-1}\{S(Y,Z)X-S(X,Z)Y\}$$

olup $2n+s-1=m$ alınırsa

$$R(X,Y).P(U,V)Z-P(R(X,Y)U,V)Z-P(U,R(X,Y)V)Z-P(U,V)R(X,Y)Z$$

$$= R(X,Y)R(U,V)Z - \frac{1}{m}\{S(V,Z)R(X,Y)U - S(U,Z)R(X,Y)V\}$$

$$-R(R(X,Y)U,V)Z + \frac{1}{m}\{S(V,Z)R(X,Y)U - S(R(X,Y)U,Z)V\}$$

$$-R(U,R(X,Y)V)Z + \frac{1}{m}\{S(R(X,Y)V,Z)U - S(U,Z)R(X,Y)V\}$$

$$-R(U,V)R(X,Y)Z + \frac{1}{m}\{S(V,R(X,Y)Z)U - S(U,R(X,Y)Z),V\}$$

$$= R(X,Y)R(U,V)Z - R(R(X,Y)U,V)Z - \frac{1}{m}S(R(X,Y)U,Z)V - R(U,R(X,Y)V)Z$$

$$+ \frac{1}{m}S(R(X,Y)V,Z)U - R(U,V)R(X,Y)Z + \frac{1}{m}S(V,R(X,Y)Z)U$$

$$-\frac{1}{m}S(U,R(X,Y)Z)V = 0$$

olur gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$R(X,Y)R(U,V)Z - R(R(X,Y)U,V)Z - R(U,R(X,Y)V)Z - R(U,V)R(X,Y)Z$$

$$+ \frac{1}{m}\{S(R(X,Y)V,Z)U + S(V,R(X,Y)Z)U - S(R(X,Y)U,Z)V - S(U,R(X,Y)Z)V\}$$

$$= 0$$

elde edilir. $X = \xi_i$ ve $U = \xi_j$ alınırsa

$$R(\xi_i,Y)R(\xi_j,V)Z - R(R(\xi_i,Y)\xi_i,V)Z - R(\xi_j,R(\xi_i,Y)V)Z - R(\xi_j,V)R(\xi_i,Y)Z$$

$$+ \frac{1}{m}\{S(R(\xi_i,Y)V,Z)\xi_j + S(V,R(\xi_i,Y)Z)\xi_j$$

$$-S\big(R(\xi_i,Y)\xi_j,Z\big)V - S\big(\xi_j,R(\xi_i,Y)Z\big)V\}$$

$$= 0$$

olur. Buradan

$$g\{R(\xi_i,Y)R\big(\xi_j,V\big)Z - R\big(R(\xi_i,Y)\xi_j,V\big)Z - R\big(\xi_j,R(\xi_i,Y)V\big)Z - R\big(\xi_j,V\big)R(\xi_i,Y)Z$$

$$+\frac{1}{m}(S(R(\xi_i,Y)V,Z)\xi_j + S(V,R(\xi_i,Y)Z)\xi_j - S\big(R(\xi_i,Y)\xi_j,Z\big)V$$

$$-S((\xi_j,R(\xi_i,Y)Z)V,\xi_h) = 0$$

$$g\big(R(\xi_i,Y)R\big(\xi_j,V\big)Z,\xi_h\big) - g\big(R\big(R(\xi_i,Y)\xi_j,V\big)Z,\xi_h\big) - g\big(R\big(\xi_j,R(\xi_i,Y)V\big)Z,\xi_h\big)$$

$$-g\big(R\big(\xi_j,V\big)R(\xi_i,Y)Z,\xi_h\big) + \frac{1}{m}\{S(R(\xi_i,Y)V,Z)g\big(\xi_j,\xi_h\big)$$

$$+S(V,R(\xi_i,Y)Z)g\big(\xi_j,\xi_h\big)$$

$$S\big(R(\xi_i,Y)\xi_j,Z\big)g(V,\xi_h) \quad S\big(\xi_j,R(\xi_i,Y)Z\big)g(V,\xi_h)\} = 0 \tag{5.6}$$

bulunur. Burada $Z = \xi_k$ alınır Eş. 4.17 ve Eş. 4.19 kullanılırsa, Eş. 5.6 nın ilk ifadesi

$$g\big(R(\xi_i,Y).R\big(\xi_j,V\big)\xi_k,\xi_h\big) = g\big(R\big(\xi_j,V\big).R(\xi_i,Y)\xi_k,\xi_h\big)$$

olur. Eş. 5.6 nın ikinci ifadesi

$$g\big(R\big(R(\xi_i,Y)\xi_j,V\big)\xi_k,\xi_h\big) = g\left(R\left(\varphi^2 Y - Y + \sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(Y)\xi_i,V\right)\xi_k,\xi_h\right)$$

$$= g\left(R(\varphi^2 Y,V)\xi_k, R(Y,V)\xi_k + \sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(Y)R(\xi_i,V)\xi_k,\xi_h\right)$$

$$= g(R(\varphi^2 Y, V)\xi_k, \xi_h) - g(R(Y, V)\xi_k, \xi_h)$$

$$+\sum_{\beta=1}^{s} \eta^{\beta}(Y) g(R(\xi_i, V)\xi_k, \xi_h)$$

$$= 2\sum_{l=1}^{s} \eta^{l}(V) g(\varphi^2 Y, \xi_h) - \sum_{l=1}^{s} \eta^{l}(Y)\eta^{h}(V)$$

$$+\sum_{l=1}^{s} \eta^{l}(V)\eta^{h}(Y) - \sum_{\beta,h=1}^{s} \eta^{\beta}(Y)\eta^{h}(V) + \sum_{\beta,\gamma=1}^{s} \eta^{\beta}(Y)\eta^{\gamma}(V)$$

$$= 0$$

bulunur. Eş. 5.6 nın üçüncü ifadesi

$$g\big(R\big(\xi_j, R(\xi_i, Y)V\big)Z, \xi_h\big) = g\left((R\left(\xi_j, \sum_{l=1}^{s}\{g(\varphi Y, \varphi V)\xi_l + \eta^{l}(V)(\varphi^2 Y)\}\right)\right.$$

$$-g(\varphi V, Y)\xi_i - \sum_{l=1}^{s} \eta^{l}(V)Y + \sum_{l,\gamma=1}^{s} \eta^{\gamma}(Y)\eta^{l}(V)\xi_i)\xi_k, \xi_h)$$

$$= \sum_{l=1}^{s} g(\varphi Y, \varphi V) g\big(R(\xi_j, \xi_l)\xi_k, \xi_h\big)$$

$$+\eta^{h}(V) g\big(R\big(\xi_j, \varphi^2 Y\big)\xi_k, \xi_h\big)$$

$$-g(\varphi V, Y) g\big(R\big(\xi_j, \xi_i\big)\xi_k, \xi_h\big) - \sum_{l=1}^{s} \eta^{l}(V) g\big(R\big(\xi_j, Y\big)\xi_k, \xi_h\big)$$

$$+\sum_{l,\gamma=1}^{s} \eta^{\gamma}(Y)\eta^{l}(V) g\big(R\big(\xi_j, \xi_i\big)\xi_k, \xi_h\big)$$

$$= 0$$

elde edilir. Eş. 5.6 nın dördüncü ifadesi

$$S(R(\xi_i, Y)V, Z)g(\xi_j, \xi_h) = S(\sum_{l=1}^{s}\{g(\varphi Y, \varphi V)\xi_l + \eta^l(V)\varphi^2 Y\} - g(\varphi V, Y)\xi_i$$

$$-\sum_{l=1}^{s}\eta^l(V)Y + \sum_{l,\gamma=1}^{s}\eta^\gamma(Y)\eta^l(V)\xi_i, \xi_k)$$

$$= Sg(\varphi Y, \varphi V)S(\xi_l, \xi_k) + \sum_{l=1}^{s}\eta^l(V)S(\varphi^2 Y, \xi_k)$$

$$-Sg(\varphi V, Y)S(\xi_i, \xi_k)$$

$$-\sum_{l=1}^{s}\eta^l(V)S(Y, \xi_k) + \sum_{l,\gamma=1}^{s}\eta^\gamma(Y)\eta^l(V)S(\xi_i, \xi_k)$$

$$= g(Y, V)(4n + s - 1) - \sum_{l=1}^{s}\eta^l(V)\eta^l(Y)(4n + s - 1)$$

$$(4n + s \quad 1)\sum_{l,\alpha=1}^{s}\eta^l(V)\eta^\alpha(Y) \quad (4n + s \quad 1)g(\varphi V, Y)$$

$$= (4n + s - 1)\left(sg(Y, V) - sg(\varphi V, Y) - \sum_{l=1}^{s}\eta^l(V)\eta^l(Y)\right)$$

bulunur. Eş. 5.6 nın beşinci ifadesi

$$S(V, R(\xi_i, Y)\xi_k)g(\xi_j, \xi_h) = S\left(V, \varphi^2 Y - Y + \sum_{\beta-1}^{s}\eta^\beta(Y)\xi_i\right)$$

$$= S(V,\varphi^2 Y) - S(V,Y) + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^{\beta}(Y) S(V,\xi_i)$$

$$= S\left(V, -Y + \sum_{l=1}^{s} \eta^{l}(Y)\xi_l\right) - S(V,Y) + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^{\beta}(Y) S(V,\xi_i)$$

$$= -2S(V,Y) + 2(4n+s-1) \sum_{l,\gamma=1}^{s} \eta^{l}(Y)\eta^{\gamma}(V)$$

olur. Eş. 5.6 nın altıncı ifadesi

$$S\big(R(\xi_i,Y)\xi_j,\xi_k\big) g(V,\xi_h) = S\left(\varphi^2 Y - Y + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^{\beta}(Y)\xi_i, \xi_k\right)\eta^{h}(V)$$

$$= \left(S(\varphi^2 Y,\xi_k) \quad S(Y,\xi_k) \mid \sum_{\beta=1}^{s} \eta^{\beta}(Y) S(\xi_i,\xi_k)\right)\eta^{h}(V)$$

$$= \ (S(-Y,\xi_k) + \sum_{l=1}^{s} \eta^{l}(Y) S(\xi_l,\xi_k))\eta^{h}(V)$$

$$-S(Y,\xi_k)\eta^{h}(V) \ + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^{\beta}(Y) S(\xi_i,\xi_k)\, \eta^{h}(V)$$

$$= -2(4n+s-1) \sum_{\alpha=1}^{s} \eta^{\alpha}(Y)\eta^{h}(V)$$

$$+(4n+s-1) \sum_{\alpha=1}^{s} \eta^{\alpha}(Y)\eta^{h}(V)$$

$$+(4n+s-1)\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^{\alpha}(Y)\eta^{h}(V)$$

ve Eş. 5.6 nın son ifadesi

$$S\big(\xi_j, R(\xi_i, Y)\xi_k\big)g(V,\xi_h) = S\left(\xi_j, \varphi^2 Y - Y + \sum_{\beta=1}^{s}\eta^{\beta}(Y)\xi_i\right)\eta^{h}(V)$$

$$= \left(S\big(\xi_j, \varphi^2 Y\big) - S\big(\xi_j, Y\big) + \sum_{\beta=1}^{s}\eta^{\beta}(Y)S\big(\xi_j, \xi_i\big)\right)\eta^{h}(V)$$

$$= (-2S(\xi_i, Y)\eta^{h}(V) + \sum_{l=1}^{s}\eta^{l}(Y)S\big(\xi_j, \xi_l\big)\,\eta^{h}(V)$$

$$+\sum_{\beta=1}^{s}\eta^{\beta}(Y)S\big(\xi_j, \xi_i\big)\,\eta^{h}(V)$$

$$= 0$$

bulunur. Bulunan eşitlikler Eş. 5.6 de yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g\big(R(\xi_i, Y).R\big(\xi_j, V\big)\xi_k, \xi_h\big) - g\big(R\big(R(\xi_i, V)\xi_j, Y\big)\xi_k\big) - g\big(R\big(\xi_j, R(\xi_i, Y)V\big)Z, \xi_h\big)$$

$$-g\big(R\big(\xi_j, V\big).R(\xi_i, Y)Z, \xi_h\big)$$

$$+\frac{1}{2n+s-1}\{(4n+s-1)\left\{sg(Y,V) - sg(\varphi V, Y) - s\sum_{l=1}^{s}\eta^{l}(V)\eta^{l}(Y)\right\}$$

$$-2S(V,Y) + 2(4n+s-1)\sum_{l,\gamma=1}^{s}\eta^{l}(Y)\eta^{\gamma}(V)\} = 0$$

olur. Buradan

$$2S(Y,V) = (4n + s - 1)(sg(Y,V) - sg(\varphi V, Y) - s\sum_{l=1}^{s} \eta^l(V)\eta^l(Y)$$

$$-2\sum_{l,\gamma=1}^{s} \eta^l(Y)\eta^\gamma(V)$$

elde edilir. Diğer taraftan $S(Y,V) - S(V,Y) = (4n + s - 1)sg(Y,\varphi V)$ elde edilir. Bu ifade Eş. 4.33 ile çelişir. O halde $R.P \neq 0$ olup ispat tamamlanır.

6. YARI SİMETRİK METRİK KONEKSİYONLU S-MANİFOLDLAR

6.1 Yarı Simetrik Metrik Koneksiyon

6.1.1 Tanım

(2n+s) boyutlu bir S-manifold $(M, \varphi, \xi_\iota, \eta^i, g)$olsun. M üzerinde Levi-Civita koneksiyon ∇^* olmak üzere

$\overline{\nabla}: \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$

$$(X,Y) \to \overline{\nabla}_X Y = \nabla^*_X Y + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^\beta (Y)X - \sum_{\beta=1}^{s} g(X,Y)\xi_\beta \qquad (6.1)$$

dönüşümü tanımlansın.

6.1.1 Teorem

(2n+s) boyutlu bir S-manifold $(M, \varphi, \xi_\iota, \eta^i, g)$ olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla^*_X Y + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^\beta (Y)X - \sum_{\beta=1}^{s} g(X,Y)\xi_\beta$$

şeklinde tanımlı $\overline{\nabla}$, M üzerinde bir *lineer koneksiyon* dur.

İspat: $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,

$$i)\overline{\nabla}_{X+Y} Z = \nabla^*_{X+Y} Z + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^\beta (Z)(X+Y) - \sum_{\beta=1}^{s} g(X+Y,Z)\xi_\beta$$

$$= \nabla^*_X Z + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^\beta (Z)X - \sum_{\beta=1}^{s} g(X,Z)\xi_\beta + \nabla^*_Y Z + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^\beta (Z)Y$$

$$-\sum_{\beta=1}^{s} g(Y,Z)\xi_\beta$$

$$=\overline{\nabla}_X Z+\overline{\nabla}_Y Z$$

elde edilir.

$$ii)\overline{\nabla}_X(Y+Z)=\nabla_X^*(Y+Z)+\sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta\,(Y+Z)X-\sum_{\beta=1}^{s} g(X,Y+Z)\xi_\beta$$

$$=\nabla_X^*Y+\sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta\,(Y)X-\sum_{\beta=1}^{s} g(X,Y)\xi_\beta+\nabla_X^*Z+\sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta\,(Z)X$$

$$-\sum_{\beta=1}^{s} g(X,Z)\xi_\beta$$

$$=\overline{\nabla}_X Y+\overline{\nabla}_X Z$$

bulunur.

$$iii)\ \overline{\nabla}_{fX}(Y)=\nabla_{fX}^*(Y)+\sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta\,(Y)fX-\sum_{\beta=1}^{s} g\,(fX,Y)\xi_\beta$$

$$=f\left(\nabla_X^*Y+\sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta\,(Y)X-\sum_{\beta=1}^{s} g(X,Y)\xi_\beta\right)$$

$$=f\,(\overline{\nabla}_X Y)$$

elde edilir. Son olarak

$$iv)\overline{\nabla}_X(fY)=\nabla_X^*(fY)+\sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta\,(fY)X-\sum_{\beta=1}^{s} g(X,fY)\xi_\beta$$

$$= X[f]Y + f\left(\nabla^*_X Y + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^\beta(Y)X - \sum_{\beta=1}^{s} g(X,Y)\xi_\beta\right)$$

$$= X[f]Y + f(\overline{\nabla}_X Y)$$

bulunur. Buradan $\overline{\nabla}$, M üzerinde lineer koneksiyondur.

6.1.2 Teorem

(2n+s) boyutlu bir S-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ olsun. Eş. 6.1.1 de tanımlanan lineer koneksiyon $\overline{\nabla}$, M üzerinde yarı simetrik metrik koneksiyondur.

İspat: $\overline{\nabla}$ lineer koneksiyonun torsiyon tensör alanı $\overline{T}$ olmak üzere, herhangi iki vektör alanları X, Y için

$$\overline{T}(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X - [X,Y] \tag{6.2}$$

$$= \nabla^*_X Y + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^\beta(Y)X - \sum_{\beta=1}^{s} g(X,Y)\xi_\beta$$

$$\left(\nabla^*_Y X + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^\beta(X)Y \quad \sum_{\beta=1}^{s} g(Y,X)\xi_\beta\right) \quad [X,Y]$$

$$= T^*(X,Y) + \sum_{\beta=1}^{s} \{\eta^\beta(Y)X - \eta^\beta(X)Y\}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{s} \{\eta^\beta(Y)X - \eta^\beta(X)Y\}$$

elde edilir. Burada T^*, M üzerinde ∇^* Levi-Civita koneksiyonun torsiyon tensör alanıdır. Bu durumda lineer koneksiyon $\overline{\nabla}$, M üzerinde yarı simetrik bir koneksiyondur. Şimdi, $\overline{\nabla}$ lineer koneksiyonunun M üzerinde tanımlı g Riemann metrik tensörüyle bağdaşabilir olduğu gösterilecektir. Metrikle bağdaşabilir koneksiyona kısaca metrik koneksiyon ifadesi kullanılacaktır.

$\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\overline{\nabla}_X g)(Y,Z) = X[g(Y,Z)] - g(\overline{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \overline{\nabla}_X Z) \tag{6.3}$$

$$= X[g(Y,Z)] - g\left(\nabla^*_X Y + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^\beta(Y)X - \sum_{\beta=1}^{s} g(X,Y)\xi_\beta, Z\right)$$

$$-g\left(Y, \nabla^*_X Z + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^\beta(Z)X - \sum_{\beta=1}^{s} g(X,Z)\xi_\beta\right)$$

$$= 0$$

elde edilir. Bu durumda lineer koneksiyon $\overline{\nabla}$, M üzerinde bir metrik koneksiyondur. O halde Eş. 6.2 ve Eş. 6.3 den lineer koneksiyon $\overline{\nabla}$, M üzerinde bir yarı simetrik metrik koneksiyondur.

Örnek

E^{2n+s} Öklid uzayının dik koordinat sistemi $(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n, z_1, z_2, ..., z_s)$ olsun.

$$\xi_i = 2\frac{\partial}{\partial z_i} \quad , \quad i = 1, 2, ..., s$$

$$\eta^i = \frac{1}{2}\left(dz_i - \sum_{j=1}^{n} y_j dx_j \right),$$

$$\varphi X = \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} X^j \frac{\partial}{\partial y_j} + \left(\sum_{j=1}^{n} Y^j y^j \right)\left(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial}{\partial z_i} \right),$$

$$g = \sum_{i=1}^{s} \eta^i \otimes \eta^i + \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\left(dx_j \otimes dx_j + dy_j \otimes dy_j \right)$$

olup burada Eş. 4.4, Eş. 4.5 ve Eş. 4.6 yi kullanarak Eş. 6.1 de tanımlanan yeni koneksiyonu bileşenlerine göre ifade edelim.

$$\bar{\nabla}_{e_i} e_j = \nabla^*_{e_i} e_j + \sum_{\alpha=1}^{s} \eta^\alpha (e_j) e_i - \sum_{\alpha=1}^{s} g(e_i, e_j)\xi_\alpha$$

$$\sum_{k=1}^{s} \bar{\Gamma}_{ij}^k e_k = \sum_{k=1}^{s} \Gamma_{ij}^{*k} e_k + \sum_{\alpha=1}^{s} \eta^\alpha (e_j) e_i - \sum_{\alpha=1}^{s} g_{ij} \xi_\alpha$$

$$= \sum_{k=1}^{s} \Gamma_{ij}^{*k} e_k + \sum_{\alpha=1}^{s} \eta^\alpha (e_j) e_i - \sum_{\alpha=1}^{s} g_{ij} 2 e_\alpha$$

$$\eta^\alpha (e_j) = \begin{cases} -\frac{1}{2} y_j, & j = 1, \dots, n \\ 0, & j = n+1, \dots, 2n \\ \frac{1}{2}\delta_{\alpha j}, & j = 2n+1, \dots, s \end{cases}$$

olup buradan

$$\bar{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^{*k} - \frac{1}{2} y_j \delta_{ik} - 2 \sum_{i=2n+1}^{2n+s} g_{ij} \delta_{\alpha k} \,; \;\; \bar{\Gamma}_{i\alpha}^k = \Gamma_{i\alpha}^{*k} - 2 \sum_{i=2n+1}^{2n+s} g_{ij} \delta_{\alpha k}$$

ve

$$\bar{\Gamma}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{*k} + \frac{1}{2}y_j\delta_{ik} - 2\sum_{i=2n+1}^{2n+s} g_{ij}\delta_{\alpha k}$$

$$\Gamma_{ij}^{h} = \frac{s}{2}\delta_{ih}y^{j},\ \Gamma_{ij}^{h} = -\frac{s}{2}\left(\delta_{ih}y^{j} + \delta_{jh}y^{i}\right),\ \Gamma_{ia}^{h\cdot} = \frac{1}{2}\delta_{ih}, \Gamma_{ij}^{a'} = \frac{1}{2}\left(sy^{i}y^{j} - \delta_{ij}\right)$$

$$\Gamma_{ib}^{a'\cdot} = -\frac{1}{2}y^{i}, \Gamma_{ia}^{h\cdot} = -\frac{1}{2}\delta_{ih}$$

olup geriye kalan bileşenleri sıfırdır.

Sonuç

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{\nabla}_X \xi_\alpha = -\varphi X + X - \sum_{\beta=1}^{s} \eta^\alpha(X)\xi_\beta \tag{6.4}$$

ve

$$(\bar{\nabla}_X \eta^\alpha)Y = -g(Y, \varphi X) + g(X, Y) - \sum_{\beta=1}^{s} \eta^\beta(Y)\eta^\alpha(X) \tag{6.5}$$

dir.

İspat:

Eş. 6.1 de $Y = \xi_\alpha$ alınır ve Eş. 3.16 kullanılırsa

$$\bar{\nabla}_X \xi_\alpha = \nabla_X^* \xi_\alpha + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^\beta(\xi_\alpha) X - \sum_{\beta=1}^{s} g(X, \xi_\alpha)\xi_\beta$$

$$= -\varphi X + X - \sum_{\beta=1}^{s} \eta^\alpha(X)\xi_\beta$$

bulunur. Diğer taraftan Eş. 6.1 ve Eş. 3.16 kullanılırsa

$$(\overline{\nabla}_X\eta^\alpha)Y = X[\eta^\alpha(Y)] - \eta^\alpha(\overline{\nabla}_X Y)$$

$$= Xg(Y,\xi_\alpha) - \eta^\alpha(\overline{\nabla}_X Y)$$

$$= g(\nabla^*_X Y,\xi_\alpha) + g(Y,\nabla^*_X\xi_\alpha) - \eta^\alpha(\overline{\nabla}_X Y)$$

$$= g(\nabla^*_X Y,\xi_\alpha) - g(Y,\varphi X) - \eta^\alpha(\nabla^*_X Y) - \sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(Y)\eta^\alpha(X)$$

$$+\sum_{\beta=1}^{s} g(X,Y)\,\eta^\alpha(\xi_\beta)$$

$$- -g(Y,\varphi X) + g(X,Y) - \sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(Y)\eta^\alpha(X)$$

elde edilir.

6.1.3 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y\subset\chi(M)$ için

$$(\overline{\nabla}_X\varphi)Y = \sum_{\beta=1}^{s}\{(g(\varphi X,\varphi Y) - g(X,\varphi Y))\xi_\beta + \eta^\beta(Y)(\varphi^2X - \varphi X)\} \tag{6.6}$$

dir.

İspat:

Eş. 6.1 ve Eş. 3.19 kullanılırsa

$$(\overline{\nabla}_X\varphi)Y = \overline{\nabla}_X\varphi Y - \varphi\overline{\nabla}_X Y$$

$$= \nabla^*_X\varphi Y + \sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(\varphi Y)X - \sum_{\beta=1}^{s} g(X,\varphi Y)\xi_\beta$$

$$-\varphi\left(\nabla^*_X Y + \sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(Y)X - \sum_{\beta=1}^{s} g(X,Y)\xi_\beta\right)$$

$$= (\nabla^{*}_{X}\varphi)Y - \sum_{\beta=1}^{s} \eta^{\beta}(Y)\varphi X - \sum_{\beta=1}^{s} g(X,\varphi Y)\xi_{\beta}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{s} \{(g(\varphi X,\varphi Y) - g(X,\varphi Y))\xi_{\beta} + \eta^{\beta}(Y)(\varphi^{2}X - \varphi X)\}$$

elde edilir.

6.1.2 Sonuç

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$(\overline{\nabla}_X\varphi)\xi_\alpha = -\varphi\overline{\nabla}_X\xi_\alpha = \varphi^2X - \varphi X \qquad (6.7)$$

ve

$$\overline{\nabla}_{\xi_\alpha}\varphi Y = \varphi\overline{\nabla}_{\xi_\alpha}Y \qquad (6.8)$$

dir.

İspat:

Eş. 6.6 da $Y = \xi_\alpha$ alınırsa

$$(\overline{\nabla}_X\varphi)\xi_\alpha = \varphi^2X - \varphi X$$

bulunur. Diğer taraftan

$$(\overline{\nabla}_X\varphi)\xi_\alpha = \overline{\nabla}_X\varphi\xi_\alpha - \varphi\overline{\nabla}_X\xi_\alpha$$

$$= -\varphi\overline{\nabla}_X\xi_\alpha = \varphi^2X - \varphi X$$

elde edilir. Diğer taraftan Eş. 6.6 da $X = \xi_\alpha$ ve alınırsa

$$(\overline{\nabla}_{\xi_\alpha}\varphi)Y = 0$$

bulunur. Buradan

$$\overline{\nabla}_{\xi_\alpha}\varphi Y = \varphi\overline{\nabla}_{\xi_\alpha}Y$$

elde edilir.

Şimdi, metrik f-manifoldların genel bir hali olan ve S-manifoldla normallik şartı dışında aynı şartları taşıyan ve Eş. 6.1 de tanımlanan lineer $\overline{\nabla}$ koneksiyonunu üzerinde bulunduran hemen hemen S-manifoldlara bakalım. Hemen hemen S-manifold da, $\alpha \in \{1, \dots, s\}$ için

$$h_\alpha : \chi(M) \to \chi(M), \qquad h_\alpha(X) - \frac{1}{2}\left(L_{\xi_\alpha}\varphi\right)(X) \tag{6.9}$$

şeklinde tanımlanır.

6.1.1 Lemma

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir hemen hemen S-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ olsun. Bu taktirde $\forall\alpha \in \{1, \dots, s\}$ için h_α simetrik tensör alanıdır.

İspat:

Eş. 6.9 daki ifade Y vektör alanı ile iç çarpımı alınırsa

$$g(h_\alpha(X), Y) = \frac{1}{2}g\left(\left(L_{\xi_\alpha}\varphi\right)X, Y\right)$$

$$= \frac{1}{2}\{g\left(\overset{*}{\nabla}_{\xi_\alpha}\varphi X - \varphi\overset{*}{\nabla}_{\xi_\alpha}X, Y\right)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{g\left(\overset{*}{\nabla}_{\xi_\alpha}\varphi X, Y\right) - g\left(\varphi\overset{*}{\nabla}_{\xi_\alpha}X, Y\right)\}$$

bulunur. Burada Eş. 6.1 ve Eş. 6.8 kullanılırsa

$$g(h_\alpha(X), Y) = \frac{1}{2}\{g\left(\overline{\nabla}_{\xi_\alpha}\varphi X, Y\right) - g\left(\varphi\overline{\nabla}_{\xi_\alpha}X, Y\right)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{g(\varphi X,\overline{\nabla}_{\xi_\alpha}Y)+g(\overline{\nabla}_{\xi_\alpha}X,\varphi Y)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\eta^\alpha(\overline{\nabla}_{\varphi X}Y)+\eta^\alpha(\overline{\nabla}_X\varphi Y)\}$$

$$=\frac{1}{2}g\left((L_{\xi_\alpha}\varphi)Y,X\right)$$

$$=g(h_\alpha(Y),X)$$

elde edilir. Buradan h_α simetrik tensör alanıdır.

6.1.4 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir hemen hemen S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X\in\chi(M)$ için

$$\overline{\nabla}_X\xi_\alpha-\sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(\overline{\nabla}_X\xi_\alpha)\xi_\beta=-\varphi h_\alpha X-\varphi(X)-\varphi^2(X) \tag{6.10}$$

ve

$$h_\alpha X=\frac{1}{2}\{\varphi(\overline{\nabla}_X\xi_\alpha)-\overline{\nabla}_{\varphi X}\xi_\alpha\} \tag{6.11}$$

dir.

İspat:

3.3.1 Önerme ve Eş. 6.1 kullanılırsa

$$2g((\nabla^*_X\varphi)\xi_\alpha,Z)=2g(\nabla^*_X\varphi\xi_\alpha-\varphi\nabla^*_X\xi_\alpha,Z)$$

$$-2g\left(\overline{\nabla}_X\varphi\xi_\alpha-\sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(\varphi\xi_\alpha)X+\sum_{\beta=1}^{s}g(X,\varphi\xi_\alpha)\xi_\beta,Z\right)$$

$$=-2g(\varphi(\overline{\nabla}_X\xi_\alpha),Z)+2g(\varphi X,Z)$$

$$=2g(\overline{\nabla}_X\varphi)\xi_\alpha,Z)+2g(\varphi X,Z)$$

bulunur. Buradan

$$2g\big((\overline{\nabla}_X\varphi)\xi_\alpha, Z\big) = -g\big(\varphi\big(L_{\xi_\alpha}\varphi\big)Z, \varphi X\big) - 2g(\varphi X, \varphi Z) - 2g(\varphi X, Z)$$

$$= -g\left(\big(L_{\xi_\alpha}\varphi\big)Z, X\right) - 2g(X, Z) + 2\sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(X)\eta^\beta(Z) - 2g(\varphi X, Z)$$

dir. h_α simetrik olduğundan

$$2g\big((\overline{\nabla}_X\varphi)\xi_\alpha, Z\big) = -g\left(\big(L_{\xi_\alpha}\varphi\big)X, Z\right) - 2g(X, Z)$$

$$+2\sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(X)\eta^\beta(Z) - 2g(\varphi X, Z)$$

olur. Şimdi $\forall Z \in \chi(M)$ için g non-degenere olduğundan

$$2\big(\overline{\nabla}_X\varphi\xi_\alpha - \varphi(\overline{\nabla}_X\xi_\alpha)\big) = -2h_\alpha X - 2X + 2\sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(X)\xi_\beta - \varphi X$$

$$-\varphi(\overline{\nabla}_X\xi_\alpha) = -h_\alpha X + \varphi^2 X - \varphi X$$

dir. Her iki tarafın φ dönüşümü altında görüntüsü alınırsa

$$-\varphi^2\,(\overline{\nabla}_X\xi_\alpha) = -\varphi(h_\alpha X) + \varphi^3(X) - \varphi^2(X)$$

$$\overline{\nabla}_X\xi_\alpha - \sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(\overline{\nabla}_X\xi_\alpha)\xi_\beta = -\varphi(h_\alpha X) - \varphi(X) - \varphi^2(X)$$

elde edilir. Diğer taraftan Eş. 3.16 ve Eş. 6.1 kullanılırsa

$$\varphi(\overline{\nabla}_X\xi_\alpha) = \varphi\left(\nabla^*_X\xi_\alpha + \sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(\xi_\alpha)X \quad \sum_{\beta=1}^{s} g(X, \xi_\alpha)\xi_\beta\right)$$

$$= \varphi \nabla^*_X \xi_\alpha + \varphi X$$

bulunur. Ayrıca

$$\overline{\nabla}_{\varphi X} \xi_\alpha = \nabla^*_{\varphi X} \xi_\alpha + \sum_{\beta=1}^{s} \eta^\beta(\xi_\alpha) \varphi X - \sum_{\beta=1}^{s} g(\varphi X, \xi_\alpha) \xi_\beta$$

$$= \nabla^*_{\varphi X} \xi_\alpha + \varphi X$$

olup, buradan

$$h_\alpha X = \frac{1}{2}\{\varphi(\overline{\nabla}_X \xi_\alpha) - \overline{\nabla}_{\varphi X} \xi_\alpha\}$$

elde edilir.

6.2 Eğrilik Tensörü

6.2.1 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\bar{R}(X,Y)Z = R^*(X,Y)Z + s\{g(\varphi Z,X)Y - g(\varphi Z,Y)X + g(Y,Z)\varphi X\}$$

$$+ s\{g(X,Z)Y - g(Y,Z)X - g(X,Z)\varphi Y\}$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \{\eta^\beta(Z)\eta^\alpha(Y)X - \eta^\beta(Z)\eta^\alpha(X)Y\}$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \{g(Y,Z)\eta^\beta(X)\xi_\alpha - g(X,Z)\eta^\beta(Y)\xi_\alpha\} \qquad (6.12)$$

dir. Burada R^*, Levi-Civita koneksiyon ∇^* ın eğrilik tensör alanıdır.

İspat:

Eş. 2.2 ve Eş. 6.1 kullanılırsa

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z = \overline{\nabla}_X\left(\nabla^*_Y Z + \sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(Z)Y - \sum_{\beta=1}^{s} g(Y,Z)\xi_\beta\right)$$

$$= \overline{\nabla}_X\nabla^*_Y Z + \sum_{\beta=1}^{s}\overline{\nabla}_X\big(\eta^\beta(Z)Y\big) - \sum_{\beta=1}^{s}\overline{\nabla}_X\big(g(Y,Z)\xi_\beta\big)$$

$$= \nabla^*_X\nabla^*_Y Z + \sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(\nabla^*_Y Z)X - \sum_{\beta=1}^{s} g(X,\nabla^*_Y Z)\,\xi_\beta$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{s}\nabla^*_X\big(\eta^\beta(Z)Y\big) + \sum_{\beta=1}^{s}\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha\big(\eta^\beta(Z)Y\big)X - \sum_{\beta=1}^{s}\sum_{\alpha=1}^{s} g\big(X,\eta^\beta(Z)Y\big)\xi_\alpha$$

$$-\sum_{\beta=1}^{s}\nabla^*_X\big(g(Y,Z)\xi_\beta\big) - \sum_{\beta=1}^{s}\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha\big(g(Y,Z)\xi_\beta\big)X$$

$$+\sum_{\beta=1}^{s}\sum_{\alpha=1}^{s} g\big(X, g(Y,Z)\xi_\beta\big)\xi_\alpha$$

$$\overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z = \nabla^*_X\nabla^*_Y Z + \sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(\nabla^*_Y Z)X - \sum_{\beta=1}^{s} g(X,\nabla^*_Y Z)\,\xi_\beta$$

$$+\sum_{\beta=1}^{s}\Big(g\big(\nabla^*_X\xi_\beta, Z\big)Y + g\big(\xi_\beta,\nabla^*_X Z\big)Y + \eta^\beta(Z)\nabla^*_X Y\Big)$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\left(\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(Y)X-\eta^{\beta}(Z)g(X,Y)\xi_{\alpha}\right)$$

$$-\sum_{\beta=1}^{s}\left(g(\nabla^{*}_{X}Y,Z)\xi_{\beta}+g(Y,\nabla^{*}_{X}Z)\xi_{\beta}+g(Y,Z)\nabla^{*}_{X}\xi_{\beta}\right)$$

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\left(g(Y,Z)\eta^{\alpha}(\xi_{\beta})X-g(Y,Z)\eta^{\beta}(X)\xi_{\alpha}\right)$$

dir. Benzer olarak X ve Y ifadelerinin yerleri değiştirilirse $\bar{\nabla}_{Y}\bar{\nabla}_{X}Z$ ifadesi elde edilir.

Ayrıca,

$$\bar{\nabla}_{[X,Y]}Z=\nabla^{*}_{[X,Y]}Z+\sum_{\beta=1}^{s}\eta^{\beta}(Z)([X,Y])-\sum_{\beta=1}^{s}g([X,Y],Z)\xi_{\beta}$$

$$=\nabla^{*}_{[X,Y]}Z+\sum_{\beta=1}^{s}\eta^{\beta}(Z)(\nabla^{*}_{X}Y-\nabla^{*}_{Y}X)-\sum_{\beta=1}^{s}g(\nabla^{*}_{X}Y-\nabla^{*}_{Y}X,Z)\xi_{\beta}$$

olup, bulunan sonuçlar Eş. 2.2 de yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\bar{R}(X,Y)Z=R^{*}(X,Y)Z+s\{g(\varphi Z,X)Y-g(\varphi Z,Y)X+g(Y,Z)\varphi X\}$$

$$+s\{g(X,Z)Y-g(Y,Z)X-g(X,Z)\varphi Y\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(Y)X-\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(X)Y\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(Y,Z)\eta^{\beta}(X)\xi_{\alpha}-g(X,Z)\eta^{\beta}(Y)\xi_{\alpha}\}$$

elde edilir.

Sonuç

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$i)\ \bar{R}(X,Y)\xi_i=-\sum_{\beta=1}^{s}\eta^i(Y)\bar{\nabla}_X\xi_\beta+\sum_{\beta=1}^{s}\eta^i(X)\bar{\nabla}_Y\xi_\beta$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{s}\{\eta^\alpha(X)(\varphi^2Y-Y)-\eta^\alpha(Y)(\varphi^2X-X)\}\qquad(6.13)$$

$$ii)\ \bar{R}(X,\xi_i)Z=\sum_{\alpha=1}^{s}\{-g(\varphi X,\varphi Z)\xi_\alpha-\eta^\alpha(Z)\varphi^2X+\eta^\alpha(Z)X-g(X,Z)\xi_\alpha\}$$

$$+s\{g(X,\varphi Z)\xi_i+\eta^i(Z)\varphi X+g(X,Z)\xi_i-\eta^i(Z)X\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^i(Z)\eta^\beta(X)\xi_\alpha-\eta^\beta(Z)\eta^\alpha(X)\xi_i\}\qquad(6.14)$$

$$iii)\ \bar{R}(X,\xi_j)\xi_i=-\varphi^2X+X+s\eta^i(X)\xi_j-\sum_{\alpha=1}^{s}\{\eta^\alpha(X)\xi_j+\eta^i(X)\xi_\alpha\}\qquad(6.15)$$

$$iv)\ \bar{R}(\xi_j,X)\xi_i=\varphi^2X-X-s\eta^i(X)\xi_j+\sum_{\alpha=1}^{s}\{\eta^\alpha(X)\xi_j+\eta^i(X)\xi_\alpha\}\qquad(6.16)$$

$$v)\ \bar{R}(\xi_k,\xi_j)\xi_i=\xi_k-\xi_j\,,\qquad k\neq j\qquad(6.17)$$

dir.

İspat:

$i)$ Eş. 6.12 de $Z = \xi_i$ yazılır ve Eş. 3.33 kullanılırsa

$$\bar{R}(X,Y)\xi_i = \sum_{\alpha=1}^{s}\{\eta^\alpha(X)(\varphi^2 Y) - \eta^\alpha(Y)(\varphi^2 X)\}$$

$$+\sum_{\beta=1}^{s}\eta^i(Y)\left\{\varphi X - X + \sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\beta(X)\xi_\alpha\right\}$$

$$+\sum_{\beta=1}^{s}\eta^i(X)\left\{-\varphi Y + Y - \sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\beta(Y)\xi_\alpha\right\}$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{s}\{\eta^\alpha(Y)X - \eta^\alpha(X)Y\}$$

bulunur. Burada Eş. 3.33 kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\bar{R}(X,Y)\xi_i = -\sum_{\beta=1}^{s}\eta^i(Y)\bar{\nabla}_X\xi_\beta + \sum_{\beta=1}^{s}\eta^i(X)\bar{\nabla}_Y\xi_\beta$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{s}\{\eta^\alpha(X)(\varphi^2 Y - Y) - \eta^\alpha(Y)(\varphi^2 X - X)\}$$

elde edilir.

$ii)$ Eş. 6.12 de $Y = \xi_i$ yazılır ve Eş. 3.34 kullanılırsa

$$\bar{R}(X,\xi_i)Z = \sum_{\alpha=1}^{s}\{-g(\varphi X,\varphi Z)\xi_\alpha - \eta^\alpha(Z)\varphi^2 X + \eta^\alpha(Z)X - g(X,Z)\xi_\alpha\}$$

$$+s\{g(X,\varphi Z)\xi_i + \eta^i(Z)\varphi X + g(X,Z)\xi_i - \eta^i(Z)X\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{i}(Z)\eta^{\beta}(X)\xi_{\alpha}-\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(X)\xi_{i}\}$$

elde edilir.

$iii)$ Eş. 6.12 de $Y=\xi_j$ ve $Z=\xi_i$ yazılırsa

$$\bar{R}(X,\xi_j)\xi_i=R^{*}(X,\xi_j)\xi_i+s\eta^{i}(X)\xi_j+X-\sum_{\alpha=1}^{s}\{\eta^{\alpha}(X)\xi_j+\eta^{i}(X)\xi_{\alpha}\}$$

bulunur. Burada Eş. 3.32 kullanılırsa

$$\bar{R}(X,\xi_j)\xi_i=-\varphi^2X+X+s\eta^{i}(X)\xi_j-\sum_{\alpha=1}^{s}\{\eta^{\alpha}(X)\xi_j+\eta^{i}(X)\xi_{\alpha}\}$$

elde edilir.

$iv)$ Eş. 6.12 de $X=\xi_j$, $Y=X$ ve $Z=\xi_i$ yazılırsa

$$\bar{R}(\xi_j,X)\xi_i=R^{*}(\xi_j,X)\xi_i-s\eta^{i}(X)\xi_j-X+\sum_{\alpha=1}^{s}\{\eta^{\alpha}(X)\xi_j+\eta^{i}(X)\xi_{\alpha}\}$$

elde edilir. Burada Eş. 3.35 kullanılırsa

$$\bar{R}(\xi_j,X)\xi_i=\varphi^2X-X-s\eta^{i}(X)\xi_j+\sum_{\alpha=1}^{s}\{\eta^{\alpha}(X)\xi_j+\eta^{i}(X)\xi_{\alpha}\}$$

elde edilir.

$v)$ Eş. 6.12 de $X=\xi_k, Y=\xi_j$ ve $Z=\xi_i$ yazılır ve Eş. 3.26 kullanılırsa

$$\bar{R}(\xi_k,\xi_j)\xi_i=\xi_k-\xi_j \qquad k\neq j$$

elde edilir.

6.2.2 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$\bar{R}(X,Y,Z,W) = R^*(X,Y,Z,W) + s\{g(\varphi Z,X)g(Y,W) - g(\varphi Z,Y)g(X,W)\}$$

$$+s\{g(Y,Z)g(\varphi X,W) + g(X,Z)g(Y,W)\}$$

$$-s\{ g(Y,Z)g(X,W) + g(X,Z)g(\varphi Y,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(Y)g(X,W) - \eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(X)g(Y,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(Y,Z)\eta^{\beta}(X)\eta^{\alpha}(W) - g(X,Z)\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(W)\} \qquad (6.18)$$

dir.

İspat:

Eş. 6.12 den

$$g(\bar{R}(X,Y)Z,W) = g(R^*(X,Y)Z,W) + s\{g(\varphi Z,X)g(Y,W) - g(\varphi Z,Y)g(X,W)\}$$

$$+s\{g(Y,Z)g(\varphi X,W) + g(X,Z)g(Y,W)\}$$

$$-s\{ g(Y,Z)g(X,W) + g(X,Z)g(\varphi Y,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(Y)g(X,W) - \eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(X)g(Y,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(Y,Z)\eta^{\beta}(X)\eta^{\alpha}(W)-g(X,Z)\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(W)\}$$

bulunur. Bulunan denklem düzenlenirse Eş. 6.18 elde edilir.

6.2.3 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y,W,Z)&=R^{*}(X,Y,W,Z)+s\{g(\varphi W,X)g(Y,Z)-g(\varphi W,Y)g(X,Z)\}\\&+s\{g(Y,W)g(\varphi X,Z)+g(X,W)g(Y,Z)\}\\&-s\{g(Y,W)g(X,Z)+g(X,W)g(\varphi Y,Z)\}\\&+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{\beta}(W)\eta^{\alpha}(Y)g(X,Z)-\eta^{\beta}(W)\eta^{\alpha}(X)g(Y,Z)\}\\&+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(Y,W)\eta^{\beta}(X)\eta^{\alpha}(Z)-g(X,W)\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(Z)\}\end{aligned}\tag{6.19}$$

dir.

İspat:

Eş. 6.12 den

$$\begin{aligned}g(\bar{R}(X,Y)Z,W)&=g(R^{*}(X,Y)Z,W)+s\{g(\varphi Z,X)g(Y,W)-g(\varphi Z,Y)g(X,W)\}\\&+s\{g(Y,Z)g(\varphi X,W)+g(X,Z)g(Y,W)\}\\&-s\{g(Y,Z)g(X,W)+g(X,Z)g(\varphi Y,W)\}\end{aligned}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(Y)g(X,W)-\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(X)g(Y,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(Y,Z)\eta^{\beta}(X)\eta^{\alpha}(W)-g(X,Z)\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(W)\}$$

bulunur. Bulunan denklemde Z ile W nın yerleri değiştirilirse Eş.6.19 elde edilir.

6.2.4 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned}\bar{R}(Z,W,X,Y) = R^{*}(Z,W,X,Y) &+ s\{g(\varphi X,Z)g(W,Y)-g(\varphi X,W)g(Z,Y)\}\\ &+s\{g(W,X)g(\varphi Z,Y)+g(Z,X)g(W,Y)\}\\ &-s\{g(W,X)g(Z,Y)+g(Z,X)g(\varphi W,Y)\}\\ &+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{\beta}(X)\eta^{\alpha}(W)g(Z,Y)-\eta^{\beta}(X)\eta^{\alpha}(Z)g(W,Y)\}\\ &+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(W,X)\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(Y)-g(Z,X)\eta^{\beta}(W)\eta^{\alpha}(Y)\}\end{aligned} \tag{6.20}$$

elde edilir.

İspat:

Eş. 6.12 den

$$g(\bar{R}(X,Y)Z,W)=g(R^{*}(X,Y)Z,W)+s\{g(\varphi Z,X)g(Y,W)-g(\varphi Z,Y)g(X,W)\}$$

$$+s\{g(Y,Z)g(\varphi X,W)+g(X,Z)g(Y,W)\}$$

$$-s\{g(Y,Z)g(X,W)+g(X,Z)g(\varphi Y,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(Y)g(X,W)-\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(X)g(Y,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(Y,Z)\eta^{\beta}(X)\eta^{\alpha}(W)-g(X,Z)\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(W)\}$$

bulunur. Bulunan denklemde $Z=X$ ve $Y=W$ alınırsa Eş. 6.20 elde edilir.

6.2.5 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$$\bar{R}(Y,X,Z,W)=R^{*}(Y,X,Z,W)+s\{g(\varphi Z,Y)g(X,W)-g(\varphi Z,X)g(Y,W)\}$$

$$+s\{g(X,Z)g(\varphi Y,W)+g(Y,Z)g(X,W)\}$$

$$-s\{g(X,Z)g(Y,W)+g(Y,Z)g(\varphi X,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(X)g(Y,W)-\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(Y)g(X,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(X,Z)\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(W)-g(Y,Z)\eta^{\beta}(X)\eta^{\alpha}(W)\} \tag{6.21}$$

dir.

İspat:

Eş. 6.12 den

$$g(\bar{R}(X,Y)Z,W) = g(R^*(X,Y)Z,W) + s\{g(\varphi Z,X)g(Y,W) - g(\varphi Z,Y)g(X,W)\}$$

$$+s\{g(Y,Z)g(\varphi X,W) + g(X,Z)g(Y,W)\}$$

$$-s\{\, g(Y,Z)g(X,W) + g(X,Z)g(\varphi Y,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(Y)g(X,W) - \eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(X)g(Y,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(Y,Z)\eta^{\beta}(X)\eta^{\alpha}(W) - g(X,Z)\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(W)\}$$

bulunur. Bulunan denklemde X ile Y nin yerleri değiştirilirse Eş. 6.21 elde edilir.

6.2.6 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

$$(i)\ \bar{R}(X,Y,Z,W) = -\bar{R}(Y,X,Z,W) \tag{6.22}$$

$$(ii)\ \bar{R}(X,Y,Z,W) = -\bar{R}(X,Y,W,Z) \tag{6.23}$$

dir.

İspat:

(i) Eş. 6.18 ve Eş. 6.21 taraf tarafa toplanırsa

$$\bar{R}(X,Y,Z,W) + \bar{R}(Y,X,Z,W) = R^*(X,Y,Z,W) + R^*(Y,X,Z,W)$$

$$+s\{g(\varphi Z,X)g(Y,W)-g(\varphi Z,Y)g(X,W)\}$$

$$+s\{g(Y,Z)g(\varphi X,W)+g(X,Z)g(Y,W)\}$$

$$-s\{g(Y,Z)g(X,W)+g(X,Z)g(\varphi Y,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(Y)g(X,W)-\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(X)g(Y,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(Y,Z)\eta^{\beta}(X)\eta^{\alpha}(W)-g(X,Z)\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(W)\}$$

$$+(s\{g(\varphi Z,Y)g(X,W)-g(\varphi Z,X)g(Y,W)\}$$

$$+s\{g(X,Z)g(\varphi Y,W)+g(Y,Z)g(X,W)\}$$

$$-s\{g(X,Z)g(Y,W)+g(Y,Z)g(\varphi X,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(X)g(Y,W)-\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(Y)g(X,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(X,Z)\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(W)-g(Y,Z)\eta^{\beta}(X)\eta^{\alpha}(W)\})$$

bulunur. Bu son denklemde Eş. 2.3 kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa $\bar{R}(X,Y,Z,W)=-\bar{R}(Y,X,Z,W)$ elde edilir.

(ii) Eş. 6.18 ve Eş. 6.19 taraf tarafa toplanırsa

$$\bar{R}(X,Y,Z,W)+\bar{R}(X,Y,W,Z)=R^{*}(X,Y,Z,W)+R^{*}(X,Y,W,Z)$$

$$+s\{g(\varphi Z,X)g(Y,W)-g(\varphi Z,Y)g(X,W)\}$$

$$+s\{g(Y,Z)g(\varphi X,W)+g(X,Z)g(Y,W)\}$$

$$-s\{\,g(Y,Z)g(X,W)+g(X,Z)g(\varphi Y,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(Y)g(X,W)-\eta^{\beta}(Z)\eta^{\alpha}(X)g(Y,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(Y,Z)\eta^{\beta}(X)\eta^{\alpha}(W)-g(X,Z)\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(W)\}$$

$$+(s\{g(\varphi W,X)g(Y,Z)-g(\varphi W,Y)g(X,Z)\}$$

$$+s\{g(Y,W)g(\varphi X,Z)+g(X,W)g(Y,Z)\}$$

$$-s\{\,g(Y,W)g(X,Z)+g(X,W)g(\varphi Y,Z)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{\beta}(W)\eta^{\alpha}(Y)g(X,Z)-\eta^{\beta}(W)\eta^{\alpha}(X)g(Y,Z)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(Y,W)\eta^{\beta}(X)\eta^{\alpha}(Z)-g(X,W)\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(Z)\}\,)$$

bulunur. Bu son denklemde Eş. 2.4 kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$\bar{R}(X,Y,Z,W)=-\bar{R}(X,Y,W,Z)$ elde edilir.

6.2.7 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$$\bar{R}(X,Y,Z,W)-\bar{R}(Z,W,X,Y)=2s\{g(\varphi Z,X)g(Y,W)-g(\varphi Z,Y)g(X,W)\}$$

$$+2s\{g(Y,Z)g(\varphi X,W)+g(Z,X)g(\varphi W,Y)\}$$

dir.

İspat:

Eş. 6.18 ve Eş. 6.20 taraf tarafa çıkartılırsa

$$\bar{R}(X,Y,Z,W)-\bar{R}(Z,W,X,Y)=R^*(X,Y,Z,W)-R^*(Z,W,X,Y)$$

$$+s\{g(\varphi Z,X)g(Y,W)-g(\varphi Z,Y)g(X,W)\}$$

$$+s\{g(Y,Z)g(\varphi X,W)+g(X,Z)g(Y,W)\}$$

$$-s\{g(Y,Z)g(X,W)+g(X,Z)g(\varphi Y,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^\beta(Z)\eta^\alpha(Y)g(X,W)-\eta^\beta(Z)\eta^\alpha(X)g(Y,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(Y,Z)\eta^\beta(X)\eta^\alpha(W)-g(X,Z)\eta^\beta(Y)\eta^\alpha(W)\}$$

$$-\{s\{g(\varphi X,Z)g(W,Y)-g(\varphi X,W)g(Z,Y)\}$$

$$+s\{g(W,X)g(\varphi Z,Y)+g(Z,X)g(W,Y)\}$$

$$-s\{g(W,X)g(Z,Y)+g(Z,X)g(\varphi W,Y)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^\beta(X)\eta^\alpha(W)g(Z,Y)-\eta^\beta(X)\eta^\alpha(Z)g(W,Y)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(W,X)\eta^\beta(Z)\eta^\alpha(Y)-g(Z,X)\eta^\beta(W)\eta^\alpha(Y)\}$$

bulunur. Bu son denklemde Eş. 2.5 kullanılıp denklem düzenlenirse

$$\bar{R}(X,Y,Z,W)-\bar{R}(Z,W,X,Y)=2s\{g(\varphi Z,X)g(Y,W)-g(\varphi Z,Y)g(X,W)\}$$

$$+2s\{g(Y,Z)g(\varphi X,W)+g(Z,X)g(\varphi W,Y)\}$$

elde edilir.

6.2.8 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$$\bar{R}(\xi_i,Y,\xi_j,W)=-g(\varphi Y,\varphi W)-g(Y,W)+s\eta^i(Y)\eta^i(W)$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^\alpha(Y)\eta^i(W)-\eta^j(Y)\eta^\alpha(W)\} \tag{6.24}$$

dir.

İspat:

Eş. 6.18 de $X=\xi_i$ ve $Z=\xi_j$ alınırsa

$$\bar{R}(\xi_i,Y,\xi_j,W)=R^*(\xi_i,Y,\xi_j,W)+s\{g(\varphi\xi_j,\xi_i)g(Y,W)-g(\varphi\xi_j,Y)g(\xi_i,W)\}$$

$$+s\{g(Y,\xi_j)g(\varphi\xi_i,W)+g(\xi_i,\xi_j)g(Y,W)\}$$

$$-s\{g(Y,\xi_j)g(\xi_i,W)+g(\xi_i,\xi_j)g(\varphi Y,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^\beta(\xi_j)\eta^\alpha(Y)g(\xi_i,W)-\eta^\beta(\xi_j)\eta^\alpha(\xi_i)g(Y,W)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(Y,\xi_j)\eta^{\beta}(\xi_i)\eta^{\alpha}(W)-g(\xi_i,\xi_j)\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(W)\}$$

bulunur. Bu son eşitlikte Eş. 3.29 kullanılırsa Eş. 6.24 elde edilir.

6.2.1 Önerme

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$$\bar{K}(X,Y)=\bar{R}(X,Y,Y,X)=R^{*}(X,Y,Y,X)+sg(X,\varphi Y)g(Y,X)$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(Y)g(X,X)+\eta^{\beta}(X)\eta^{\alpha}(X)g(Y,Y)\}$$

$$-2\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}g(X,Y)\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(X) \tag{6.25}$$

dir.

İspat:

Eş. 6.12 de $Z=Y$ alınır ve buradan

$$g(\bar{R}(X,Y)Y,X)=g(R^{*}(X,Y)Y,X)+s\{g(\varphi Y,X)g(Y,X)-g(\varphi Y,Y)g(X,X)\}$$

$$+s\{g(Y,Y)g(\varphi X,X)+g(X,Y)g(Y,X)\}$$

$$-s\{g(Y,Y)g(X,X)+g(X,Y)g(\varphi Y,X)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(Y)g(X,X)-\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(X)g(Y,X)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(Y,Y)\eta^{\beta}(X)\eta^{\alpha}(X)-g(X,Y)\eta^{\beta}(Y)\eta^{\alpha}(X)\}$$

bulunur. Bu son denklem düzenlenirse Eş. 6.25 elde edilir.

Sonuç

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için

$$\bar{K}(\xi_i,X)=g(\varphi X,\varphi X)+(1-s)g(X,X)+s\eta^i(X)\eta^i(X)$$

$$-2\sum_{\beta=1}^{s}\eta^i(X)\eta^{\beta}(X)+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^{\alpha}(X)\eta^{\beta}(X) \qquad (6.26)$$

dir.

İspat:

Eş. 6.23 de $X=\xi_i$ ve $Y=X$ alınırsa

$$\bar{K}(\xi_i,X)=\bar{R}(\xi_i,X,X,\xi_i)=R^*(\xi_i,X,X,\xi_i)+s\{g(\xi_i,X)g(X,\xi_i)-g(X,X)g(\xi_i,\xi_i)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{\beta}(X)\eta^{\alpha}(X)g(\xi_i,\xi_i)+\eta^{\beta}(\xi_i)\eta^{\alpha}(\xi_i)g(X,X)\}$$

$$-2\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(\xi_i,X)\eta^{\beta}(X)\eta^{\alpha}(\xi_i)\}$$

bulunur. Bu son eşitlikte Eş. 3.30 kullanılırsa Eş. 6.26 elde edilir.

6.3 Ricci Eğrilik Tensörü

6.3.1 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{S}(X,Y) = S^*(X,Y) + (2n+s-2)[\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \eta^\alpha(Y)\eta^\beta(X) - sg(X,\varphi Y) - sg(X,Y)] \quad (6.27)$$

dir.

İspat:

Eş. 6.14 kullanılırsa

$$\bar{R}(E_k, X, Y, E_k) = R^*(E_k, X, Y, E_k) + s\{g(\varphi Y, E_k)g(X, E_k) - g(X, \varphi Y)g(E_k, E_k)\}$$
$$+s\{g(X,Y)g(\varphi E_k, E_k) - g(Y, E_k)g(\varphi X, E_k)\}$$
$$+s\{g(Y, E_k)g(X, E_k) - g(X,Y)g(E_k, E_k)\}$$
$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^\alpha(X)\eta^\beta(Y)g(E_k, E_k) - \eta^\beta(Y)\eta^\alpha(E_k)g(X, E_k)\}$$
$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{g(X,Y)\eta^\beta(E_k)g(\xi_\alpha, E_k) - g(E_k, Y)\eta^\beta(X)g(\xi_\alpha, E_k)\}$$

olur. Her iki taraftan toplam alınırsa,

$$\sum_{k=1}^{2n}{}' \bar{R}(E_k, X, Y, E_k) = \sum_{k=1}^{2n}{}' R^*(E_k, X, Y, E_k) + (2s - 2ns)g(X, \varphi Y) - 2nsg(X,Y)$$

$$+s\sum_{k=1}^{2n} g(X,E_k)g(Y,E_k) \ +2n\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \eta^\beta(Y)\eta^\alpha(X) \qquad (6.28)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\bar{R}(\xi_\gamma,X,Y,\xi_\gamma) = R^*(\xi_\gamma,X,Y,\xi_\gamma) + s\{-g(X,\varphi Y)g(\xi_\gamma,\xi_\gamma) - g(\xi_\gamma,Y)g(\varphi X,\xi_\gamma)\}$$

$$+s\{g(\xi_\gamma,Y)g(X,\xi_\gamma) - g(X,Y)g(\xi_\gamma,\xi_\gamma)\}$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^\alpha(X)\eta^\beta(Y)g(\xi_\gamma,\xi_\gamma) - \eta^\beta(Y)\eta^\alpha(\xi_\gamma)g(X,\xi_\gamma)\}$$

$$-\sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(Y)\eta^\gamma(X) + \sum_{\alpha=1}^{s} g(X,Y)g(\xi_\alpha,\xi_\gamma)$$

olup her iki taraftan toplam alınırsa,

$$\sum_{\gamma=1}^{s}\bar{R}(\xi_\gamma,X,Y,\xi_\gamma) = \sum_{\gamma=1}^{s}R^*(\xi_\gamma,X,Y,\xi_\gamma) - s^2g(X,\varphi Y) - (s^2-s)g(X,Y)$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{s} g(X,\xi_\alpha)g(Y,\xi_\alpha) + (s-2)\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^\alpha(X)\eta^\beta(Y) \quad (6.29)$$

olup Eş. 6.28 ve Eş. 6.29 ifadeleri taraf tarafa toplanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa Eş. 6.27 elde edilir.

6.3.2 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{S}(X,\xi_i) = (4n+s-2)\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^{\alpha}(X) - s.(2n+s-2)\eta^{i}(X) \tag{6.30}$$

$$\bar{S}(\varphi X,\xi_i) = 0, \qquad \bar{S}(\xi_j,\xi_i) = (4n-s-1)-(s+1)^2 \tag{6.31}$$

dir.

İspat:

Eş. 6.27 de $Y = \xi_i$ alınırsa ve Eş. 3.37 kullanılırsa

$$\bar{S}(X,\xi_i) = S(X,\xi_i) + (2n+s-2)[\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^{\alpha}(X)\eta^{\beta}(\xi_i) - sg(X,\varphi\xi_i) - sg(X,\xi_i)]$$

$$= 2n\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^{\alpha}(X) + (2n+s-2)[\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^{\alpha}(X) - s\eta^{i}(X)]$$

$$\bar{S}(X,\xi_i) = (4n+s-2)\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^{\alpha}(X) - s.(2n+s-2)\eta^{i}(X)$$

elde edilir. Eş. 6.31 için Eş. 6.30 denkleminde $X = \varphi X$ alınırsa

$$\bar{S}(\varphi X,\xi_i) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde Eş. 6.30 de $X = \xi_j$ alınırsa

$$\bar{S}(\xi_j,\xi_i) = (4n+s-2)\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^{\alpha}(\xi_j) - s.(2n+s-2)\eta^{i}(\xi_j)$$

$$= (4n-s-1)-(s+1)^2$$

6.3.3 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\bar{S}(X,Y)-\bar{S}(Y,X)=-2(2n+s-2)sg(X,\varphi Y) \qquad (6.32)$$

dir.

İspat:

Eş. 6.27 de X ile Y vektör alanlarının yerleri değiştirilirse

$$\bar{S}(Y,X)=S^{*}(Y,X)+(2n+s-2)[\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^{\alpha}(Y)\eta^{\beta}(X)-sg(Y,\varphi X)-sg(Y,X)]$$

bulunur. Eş. 6.27 ile bu ifadenin farkı alınırsa

$$\bar{S}(X,Y)-\bar{S}(Y,X)=S^{*}(X,Y)-S^{*}(Y,X)-2\,(2n+s-2)sg(X,\varphi Y)$$

elde edilir. Burada gerekli işlemler yapılıp denklem düzenlenirse

$$\bar{S}(X,Y)-\bar{S}(Y,X)=-2(2n+s-2)sg(X,\varphi Y)$$

bulunur.

Sonuç

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\bar{S}(X,\xi_i)=\bar{S}(\xi_i,X) \qquad (6.33)$$

dir.

İspat:

Eş. 6.32 da $Y=\xi_i$ alınırsa Eş. 6.33 elde edilir.

6.3.4 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\bar{S}(X,Y)=\bar{S}(\varphi X,\varphi Y)+(4n-s-1)-(s+1)^2\sum_{i=1}^{s}\eta^i(X)\eta^i(Y) \tag{6.34}$$

dir.

İspat:

$X_0,Y_0\in Im\varphi$, $\eta^i(X)\xi_i$, $\eta^i(Y)\xi_i\in çek\varphi$ olmak üzere $\forall X,Y\in\chi(M)$ için D ve $D^{\perp}$ dağılımının vektör alanlarının uzayı sırasıyla $\Gamma(D)$ ve $\Gamma(D^{\perp})$ olmak üzere

$$X=X_0+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(X)\xi_i\,,\qquad Y=Y_0+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)\xi_i$$

olacak şekilde $X_0,Y_0\in\Gamma(D)$ ve $\eta^i(X)\xi_i\,,\eta^i(X)\xi_i\in\Gamma(D^{\perp})$ şeklinde yazılır. Bu denklemde Eş. 6.3.4 kullanılırsa

$$\bar{S}(X,Y)=\bar{S}(X_0+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(X)\xi_i\,,Y_0+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)\xi_i)$$

$$=\bar{S}(X_0,Y_0)+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)\,((4n+s-2)\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^{\gamma}(X_0)-s.(2n+s-2)\eta^i(X_0)\,)$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(X)((4n+s-2)\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^{\alpha}(Y_0)-s(2n+s-2)\eta^i(Y_0)$$

$$+\sum_{i=1}^{s}\eta^{i}(X)\eta^{i}(Y)\bar{S}(\xi_i,\xi_i)$$

olur. $\eta^{i}(X_0)=0\,,\eta^{i}(Y_0)=0$ olup buradan

$$\bar{S}(X,Y)=\bar{S}(X_0,Y_0)+(4n-s-1)-(s+1)^2\sum_{i=1}^{s}\eta^{i}(X)\eta^{i}(Y)$$

bulunur. $\varphi X,\varphi Y\in\chi(M)$ olduğundan $\bar{S}(X_0,Y_0)=\bar{S}(\varphi X,\varphi Y)$ yazabiliriz. Buradan

$$\bar{S}(X,Y)=\bar{S}(\varphi X,\varphi Y)+(4n-s-1)-(s+1)^2\sum_{i=1}^{s}\eta^{i}(X)\eta^{i}(Y)$$

elde edilir.

6.3.3 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. Bu taktirde $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$(\bar{\nabla}_X\bar{S})(\xi_i,\xi_i)=(4n+s-2)\left(1-2\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^{\gamma}(X)\right)+s(2n+s-2)(1-\eta^{i}(X)$$

dir.

İspat:

Eş. 6.4 ve Eş. 6.31 kullanılırsa

$$(\bar{\nabla}_X\bar{S})(\xi_i,\xi_i)-\bar{\nabla}_X\bar{S}(\xi_i,\xi_i)-\bar{S}(\bar{\nabla}_X\xi_i,\xi_i)-\bar{S}(\xi_i,\bar{\nabla}_X\xi_i)$$

$$=(4n-s-1)-(s+1)^2-\bar{S}(-\varphi X+X,\xi_i)-\bar{S}(\xi_i,-\varphi X+X)$$

$$= (4n - s - 1) - (s + 1)^2 + \bar{S}(\varphi X, \xi_i) - \bar{S}(X, \xi_i)$$

$$+\bar{S}(\xi_i, \varphi X) - \bar{S}(\xi_i, X)$$

$$= (4n - s - 1) - (s + 1)^2 - 2\bar{S}(X, \xi_i)$$

$$= (4n + s - 2)\left(1 - 2\sum_{\gamma=1}^{s} \eta^{\gamma}(X)\right) + s(2n + s - 2)(1 - \eta^{\iota}(X))$$

elde edilir.

7. BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI

7.1.1 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. M üzerinde $R.S \neq 0$ dir. Yani manifold Ricci yarı simetrik değildir.

İspat:

$\forall X,Y,U,V \in \chi(M)$ için $\bar{R}(X,Y).\bar{S}=0$ olması halinde

$$\bar{R}(X,Y).\bar{S} = -\bar{S}(\bar{R}(X,Y)U,V) - \bar{S}(U,\bar{R}(X,Y)V)$$

olup $\bar{S}(\bar{R}(X,Y)U,V) + \bar{S}(U,\bar{R}(X,Y)V) = 0$ eşitliği yazılır. Bu eşitlikte $X=\xi_i$ ve $U=\xi_j$ alınırsa

$$\bar{S}\big(\bar{R}(\xi_i,Y)\xi_j,V\big) + \bar{S}\big(\xi_j,\bar{R}(\xi_i,Y)V\big) = 0 \tag{7.1}$$

olur. Burada Eş. 6.16 kullanılırsa

$$\bar{S}\big(\bar{R}(\xi_i,Y)\xi_j,V\big) = \bar{S}\left(\varphi^2Y - Y - s\eta^j(Y)\xi_i + \sum_{\alpha=1}^{s}\{\eta^\alpha(Y)\xi_i + \eta^j(Y)\xi_\alpha\},V\right)$$

$$= \bar{S}(\varphi^2Y,V) - \bar{S}(Y,V) - s.\eta^j(Y)\bar{S}(\xi_i,V) + \sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(Y)\bar{S}(\xi_i,V)$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^j(Y)\bar{S}(\xi_\alpha,V) \tag{7.2}$$

elde edilir. Bulunan denklemde Eş. 6.30 kullanılırsa

$$\bar{S}\big(\bar{R}(\xi_i,Y)\xi_j,V\big) = -2\bar{S}(Y,V)$$

$$+\sum_{\beta=1}^{s}\eta^{\beta}(Y)\left((4n+s-1)\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^{\gamma}(V)-s(2n+s-1)\eta^{\beta}(V)\right)$$

$$-s.\eta^{j}(Y)\left((4n+s-1)\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^{\gamma}(V)-s(2n+s-1)\eta^{i}(Y)\right)$$

bulunur. Bu son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\bar{S}\left(\bar{R}(\xi_i,Y)\xi_j,V\right)=-2\bar{S}(Y,V)+2(4n+s-1)\sum_{\alpha,\gamma=1}^{s}\eta^{\alpha}(Y)\eta^{\gamma}(V)$$

$$-s(2n+s-1)\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^{\alpha}(Y)\eta^{i}(V)+\eta^{\beta}(V)\eta^{\beta}(Y)\right)$$

elde edilir. Diğer taraftan 6.31 kullanılırsa

$$\bar{S}\left(\xi_j,\bar{R}(\xi_i,Y)V\right)=(4n+s-1)\sum_{(\gamma\neq i)\gamma=1}^{s}\eta^{\gamma}(\bar{R}(\xi_i,Y)V)$$

$$-2s(2n+s-1)\eta^{i}(\bar{R}(\xi_i,Y)V) \qquad (7.3)$$

$$\eta^{\gamma}(\bar{R}(\xi_i,Y)V)=\eta^{\gamma}\Big(\sum_{(\gamma\neq i)\alpha=1}^{s}\{g(\varphi Y,\varphi V)\xi_{\alpha}+\eta^{\alpha}(V)\varphi^{2}Y-\eta^{\alpha}(V)Y+g(Y,V)\xi_{\alpha}\}$$

$$-s\left\{g(Y,\varphi V)\xi_i+\eta^{i}(V)\varphi Y+g(Y,V)\xi_i-\eta^{i}(V)Y\right\}$$

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\left\{\eta^{i}(V)\eta^{\beta}(Y)\xi_{\alpha}-\eta^{\beta}(V)\eta^{\alpha}(Y)\xi_i\right\}\Big)$$

$$= g(\varphi Y, \varphi V) - \sum_{\alpha=1}^{s} \eta^{\alpha}(V)\eta^{\gamma}(Y) + g(Y,V) + s\eta^{i}(V)\eta^{\gamma}(Y)$$

$$-\sum_{\beta=1}^{s} \eta^{\beta}(Y)\eta^{i}(V)$$

bulunur. Bulunan denklemde γ üzerinden toplam alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(4n+s-1) \sum_{(\gamma \neq i)\gamma=1}^{s} \eta^{\gamma}(\bar{R}(\xi_i, Y)V) = (4n+s-1)\big(g(\varphi Y, \varphi V) + g(Y,V)\big)$$

$$-\sum_{\alpha,\gamma=1}^{s} \eta^{\alpha}(V)\eta^{\gamma}(Y)) \qquad (*)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\eta^{i}(\bar{R}(\xi_i, Y)V) = \eta^{i}(\sum_{\alpha=1}^{s}\{g(\varphi Y, \varphi V)\xi_{\alpha} + \eta^{\alpha}(V)\varphi^{2}Y - \eta^{\alpha}(V)Y + g(Y,V)\xi_{\alpha}\}$$

$$-s\{g(Y,\varphi V)\xi_i + \eta^{i}(V)\varphi Y + g(Y,V)\xi_i - \eta^{i}(V)Y\}$$

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{i}(V)\eta^{\beta}(Y)\xi_{\alpha} - \eta^{\beta}(V)\eta^{\alpha}(Y)\xi_i\}$$

olup

$$\eta^{i}(\bar{R}(\xi_i, Y)V) = g(\varphi Y, \varphi V) - \sum_{\alpha=1}^{s} \eta^{\alpha}(V)\eta^{i}(Y) + g(Y,V) - sg(Y,\varphi V)$$

$$-sg(Y,V)+s\eta^i(V)\eta^i(Y)-\sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(Y)\eta^i(V)+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^\beta(V)\eta^\alpha(Y)$$

elde edilir. Buradan

$$2s(2n+s-1)\eta^i(\bar{R}(\xi_i,Y)V)=2s.(2n+s-1)(g(\varphi Y,\varphi V)+(1-s)g(Y,V)$$

$$+s\eta^i(V)\eta^i(Y)-2\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^i(Y)-sg(Y,\varphi V)$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^\beta(Y)) \qquad (**)$$

bulunur. (*) ve (**) denklemleri Eş. 7.3 de yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\bar{S}(\xi_j,\bar{R}(\xi_i,Y)V)=(4n+s-1)\left(g(\varphi Y,\varphi V)+g(Y,V)+\sum_{\alpha,\gamma=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^\gamma(Y)\right)$$

$$-2s.(2n+s-1)(g(\varphi Y,\varphi V)+(1-s)g(Y,V)+s\eta^i(V)\eta^i(Y)$$

$$-sg(Y,\varphi V)-2\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^i(Y)+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^\beta(Y))$$

bulunur. Son olarak Eş. 7.2 ve Eş. 7.3 ifadelerini Eş. 7.1 denkleminde yerlerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$2S(Y,V)=(4n+s-1)(g(\varphi Y,\varphi V)+g(Y,V)+\sum_{\alpha,\gamma=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^\gamma(Y))$$

$$-2s.(2n+s-1)(g(\varphi Y,\varphi V)+(1-s)g(Y,V)+s\eta^i(V)\eta^i(Y)$$

$$-sg(Y,\varphi V)\ -3\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^{\alpha}(V)\eta^{i}(Y)+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^{\alpha}(V)\eta^{\beta}(Y)+\sum_{\beta=1}^{s}\eta^{\beta}(V)\eta^{\beta}(Y))$$

elde edilir. Diğer taraftan $\bar{S}(Y,V)-\bar{S}(V,Y)=2s^{2}(2n+s-1)g(Y,\varphi V)$ bulunur. Bu ifade Eş. 6.32 ile çelişir. O halde $\bar{R}.\bar{S}\neq 0$ olup ispat tamamlanır.

7.1.2 Teorem

(2n+s) boyutlu yarı simetrik metrik koneksiyonlu bir S-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ olsun. *M* üzerinde $\bar{P}.\bar{S}\neq 0$ dir. Yani manifold Ricci projektif yarı simetrik değildir.

İspat:

$\forall X,Y,U,V\in\chi(M)$ için $\bar{P}(X,Y).\bar{S}=0$ olsun. Bu durumda

$$(\bar{P}(X,Y).\bar{S})(U,V)=\bar{P}(X,Y).\bar{S}(U,V)-\bar{S}(\bar{P}(X,Y)U,V)-\bar{S}(U,\bar{P}(X,Y)V)=0$$

$\bar{S}(\bar{P}(X,Y)U,V)+\bar{S}(U,\bar{P}(X,Y)V)=0$ olur.

$$\bar{P}(X,Y)Z=\bar{R}(X,Y)Z-\frac{1}{2n+s-1}\{\bar{S}(Y,Z)X-\bar{S}(X,Z)Y\}$$

olup 2n+s-1= m alırsak $Z=U$ özel vektör alanı için

$$\bar{S}\left(\bar{R}(X,Y)U-\frac{1}{m}\{\bar{S}(Y,U)X-\bar{S}(X,U)Y\},V\right)$$

$$+\bar{S}\left(U,\bar{R}(X,Y)V-\frac{1}{m}\{\bar{S}(Y,V)X-\bar{S}(X,V)Y\}\right)=0$$

$$\bar{S}(\bar{R}(X,Y)U,V)-\frac{1}{m}\{\bar{S}(Y,U)\bar{S}(X,V)-\bar{S}(X,U)\bar{S}(Y,V)\}$$

$$+\bar{S}(U,\bar{R}(X,Y)V)-\frac{1}{m}\{\bar{S}(Y,V)\bar{S}(U,X)-\bar{S}(X,V)\bar{S}(U,Y)\}=0$$

bulunur. Bu eşitlikte $X = \xi_i$ ve $U = \xi_j$ alınırsa

$$\bar{S}\big(\bar{R}(\xi_i,Y)\xi_j,V\big) + \bar{S}\big(\xi_j,\bar{R}(\xi_i,Y)V\big) = 0 \tag{7.4}$$

olur. Eş. 6.16 kullanılırsa

$$\bar{S}\big(\bar{R}(\xi_i,Y)\xi_j,V\big) = \bar{S}\left(\varphi^2 Y - Y - s\eta^j(Y)\xi_i + \sum_{\alpha=1}^{s}\{\eta^\alpha(Y)\xi_i + \eta^j(Y)\xi_\alpha\},V\right)$$

$$= \bar{S}(\varphi^2 Y,V) - \bar{S}(Y,V) - s.\eta^j(Y)\bar{S}(\xi_i,V) + \sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(Y)\bar{S}(\xi_i,V)$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^j(Y)\bar{S}(\xi_\alpha,V) \tag{7.5}$$

elde edilir. Bulunan denklemde Eş. 6.30 kullanılırsa

$$\bar{S}\big(\bar{R}(\xi_i,Y)\xi_j,V\big) = -2\bar{S}(Y,V)$$

$$+\sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(Y)\left((4n+s-1)\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^\gamma(V) - s(2n+s-1)\eta^\beta(V)\right)$$

$$-s.\eta^j(Y)\left((4n+s-1)\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^\gamma(V) - s(2n+s-1)\eta^i(Y)\right)$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(Y)\left((4n+s-1)\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^\gamma(V) - s(2n+s-1)\eta^i(V)\right)$$

$$+ s.\eta^j(Y)\left((4n+s-1)\sum_{\gamma=1}^{s}\eta^\gamma(V) - s(2n+s-1)\eta^\alpha(V)\right)$$

bulunur. Bu son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\bar{S}\big(\bar{R}(\xi_i,Y)\xi_j,V\big) = -2\bar{S}(Y,V) + 2(4n+s-1)\sum_{\alpha,\gamma=1}^{s}\eta^\alpha(Y)\eta^\gamma(V)$$

$$-s(2n+s-1)\left(\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(Y)\eta^i(V) + \eta^\beta(V)\eta^\beta(Y)\right)$$

elde edilir. Diğer taraftan Eş. 6.31 kullanılırsa

$$\bar{S}\big(\xi_j,\bar{R}(\xi_i,Y)V\big) = (4n+s-1)\sum_{(\gamma\neq i)\gamma=1}^{s}\eta^\gamma(\bar{R}(\xi_i,Y)V)$$

$$-2s(2n+s-1)\eta^i(\bar{R}(\xi_i,Y)V) \qquad (7.6)$$

$$\eta^\gamma(\bar{R}(\xi_i,Y)V) = \eta^\gamma\Big(\sum_{(\gamma\neq i)\alpha=1}^{s}\{g(\varphi Y,\varphi V)\xi_\alpha + \eta^\alpha(V)\varphi^2 Y - \eta^\alpha(V)Y + g(Y,V)\xi_\alpha\}$$

$$-s\{g(Y,\varphi V)\xi_i + \eta^i(V)\varphi Y + g(Y,V)\xi_i - \eta^i(V)Y\}$$

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^i(V)\eta^\beta(Y)\xi_\alpha - \eta^\beta(V)\eta^\alpha(Y)\xi_i\}$$

$$= g(\varphi Y,\varphi V) - \sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^\gamma(Y) + g(Y,V) + s\eta^i(V)\eta^i(Y)$$

$$-\sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(Y)\eta^i(V)$$

bulunur. Bulunan denklemde γ üzerinden toplam alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(4n+s-1)\sum_{(\gamma\neq i)\gamma=1}^{s}\eta^{\gamma}(\bar{R}(\xi_i,Y)V)=(4n+s-1)\big(g(\varphi Y,\varphi V)+g(Y,V)\big)$$

$$-\sum_{\alpha,\gamma=1}^{s}\eta^{\alpha}(V)\eta^{\gamma}(Y)) \qquad (*)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\eta^{i}(\bar{R}(\xi_i,Y)V)=\eta^{i}(\sum_{\alpha=1}^{s}\{g(\varphi Y,\varphi V)\xi_\alpha+\eta^{\alpha}(V)\varphi^2Y-\eta^{\alpha}(V)Y+g(Y,V)\xi_\alpha\}$$

$$-s\{g(Y,\varphi V)\xi_i+\eta^{i}(V)\varphi Y+g(Y,V)\xi_i-\eta^{i}(V)Y\}$$

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\{\eta^{i}(V)\eta^{\beta}(Y)\xi_\alpha-\eta^{\beta}(V)\eta^{\alpha}(Y)\xi_i\}$$

olup

$$\eta^{i}(\bar{R}(\xi_i,Y)V)\ =g(\varphi Y,\varphi V)-\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^{\alpha}(V)\eta^{i}(Y)+g(Y,V)-sg(Y,\varphi V)$$

$$-sg(Y,V)+s\eta^{i}(V)\eta^{i}(Y)-\sum_{\beta=1}^{s}\eta^{\beta}(Y)\eta^{i}(V)+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^{\beta}(V)\eta^{\alpha}(Y)$$

elde dilir. Buradan

$$2s(2n+s-1)\eta^{i}(\bar{R}(\xi_i,Y)V)=2s.(2n+s-1)(g(\varphi Y,\varphi V)+(1-s)g(Y,V)$$

$$+s\eta^i(V)\eta^i(Y) - 2\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^i(Y) - sg(Y,\varphi V)$$

$$+\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^\beta(Y)) \qquad (**)$$

bulunur. (*) ve (**) denklemleri Eş. 7.6 de yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\bar{S}(\zeta_j,\bar{R}(\zeta_i,Y)V) - (4n+s-1)\left(g(\varphi Y,\varphi V) + g(Y,V) - \sum_{\alpha,\gamma=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^\gamma(Y)\right)$$

$$-2s.(2n+s-1)(g(\varphi Y,\varphi V) + (1-s)g(Y,V) + s\eta^i(V)\eta^i(Y)$$

$$-sg(Y,\varphi V) - 2\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^i(Y) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^\beta(Y))$$

bulunur. Son olarak Eş. 7.5 ve Eş. 7.6 ifadelerini Eş. 7.4 denkleminde yerlerine yazıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$2\bar{S}(Y,V) = (4n+s-1)(g(\varphi Y,\varphi V) + g(Y,V) + \sum_{\alpha,\gamma=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^\gamma(Y))$$

$$-2s.(2n+s-1)(g(\varphi Y,\varphi V) + (1-s)g(Y,V) + s\eta^i(V)\eta^i(Y)$$

$$-sg(Y,\varphi V) - 3\sum_{\alpha=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^i(Y) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\eta^\alpha(V)\eta^\beta(Y) + \sum_{\beta=1}^{s}\eta^\beta(V)\eta^\beta(Y)$$

elde edilir. Diğer taraftan $\bar{S}(Y,V) - \bar{S}(V,Y) = 2s^2(2n+s-1)g(Y,\varphi V)$ bulunur.

Bu ifade Eş. 6.32 ile çelişir. O halde $\bar{P}.\bar{S} \neq 0$ olup ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

1. Ageshe, N.S. and Chafle, M.R., A semi-symmetric non-metric connection on a Riemann manifold, ***Indian J. Pure Appl. Math.*** 23-6, 399-409, (1992).

2. Aktan N. "S-Manifoldların Geometrisi Üzerine", ***Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, 32-40 (2006).

3. Bejancu A. ve Duggal K.L., "Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Application", ***Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London***, 211-223 (1996).

4. Blair D.E. "Geometry of Manifolds with Structural Group $U(n)\times\theta(s)$", ***J.Diff.Geom***. 4:155-167, (1970).

5. Blair D.E., Terlizzi L.D., Konderak J.J., "A Darboux Theorem Generalized Contact Manifolds", ***Note di Matematica***, 2: 147-152 (2006).

6. Blair D.E., "Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds", ***Progess in Math***., 203:31-115 (2001).

7. Brunetti L. ve Pastore A.M., "Curvature of a Class of Indefinite Globally Farmed f-Manifolds", ***Bull. Math. Soc. Sci. Math.Roumanie Tome*** , 3:183-204 (2008).

8. Chen B.Y., "Geometry of Submanifolds", ***Marcel Dekker NY***, 154-163 (1973).

9. Cabrerizo J.L., Fernandez L.M. ve Fernandez M., "The Curvature Tensor Fields on f-Manifolds with Complemented Frames", ***An. Şt. Univ. "Al. I. Cuza" laşi Matematica***, 36: 151-162 (1990).

10. Cabrerizo J.L., Fernandez L.M. ve Fernandez M., "A Classification of Certain Submanifolds of an S-Manifold", ***Annales Polinici, Mathematici Liv***., 2:117-123 (1991).

11. Cabrerizo J.L., Fernandez L.M. ve Fernandez M., "On normal CR-Submanifolds of S-Manifolds", ***Colloquim Mathematicum***, 64:203-214 (1993).

12. Dileo G. and Lotta A., "On The Structure and Symmetry Properties of Almost S-Manifolds", ***Geometriae Dedicata***, 191-211 (2005).

13. Duggal K.L., Ianus S. ve Pastore A..M., "Maps Interchanging f-structures and Their Harmonicity", ***Acta Appli, Maths***., 67:91-115 (2001).

14. A. Friedman and J.A. Schouten, Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragungen, ***Math. Z.*** 21:211-223 (1994).

15. Goldberg S.I. ve Yano K., “On Normal Globally Framed f-Manifolds”, ***Tohoku Math. Jour.***, 22:362-370 (1970).

16. Hacısalihoğlu H.H., “Diferensiyel Geometri”, ***İnönü Ünv. Fen Edebiyat Fak. Yayınları*** 2:75-97,(1983).

17. Hasegawa I., Okuyama Y., Abe T., “ On P-th Sasakian Manifolds’’, ***Journal of Hokkaido Universty of Education (Section II A)*** 1:202-213 (1986).

18. Ishihara S. , “Normal Structure f satisfying $f^3 + f = 0$”, ***Kodai Math. Sem. Rep.***, 18:36-47 (1966).

19. Ishihara S. ve Yano K., “On Integrability Conditions of a Structure f Satisfying $f^3 + f = 0$”, ***Quart, J, Math, Oxford (2)***, 15:217-222 (1964).

20. Kobayashi, M. and Tsuchiya, S. “invariant submanifolds of an f-manifold with complemented frames”, ***Kodai Math. Sem. Rep.,*** 24 (1972), 430-450

21. Mihai I., “CR-Submanifolds of a framed f-Manifold”, ***Stud. Cerc. Math***., 35:127-136 (1983).

22. O’Neill B., “Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity, Academic Pres”, ***New York London***, 215-257 (1983).

23. Sagbaş D. "ε_α Almost S-manifolds," ***Gazi Univ. Institute of Science and Technology***, M.Sc. Thesis 141 (2010).

24. Terlizzi L.D. ve Pastore A.M., “Some results on K-manifolds”, ***Balkan Journal of Geometry ant Its Applications***, 7:43-62 (2002).

25. Terlizzi L.D., “On The Curvature of a Generalization of Contact Metric Manifolds”, ***Acta Math, Hungar***, 3:225-239 (2006).

26. Yano K. ve Kon M., “Structure on Manifolds”, ***World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.***, 3:252-286 (1984).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: AKYOL, Mehmet Akif
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 07.06.1985 Erciş
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (507) 984 39 20
e-mail	: makyol@bingol.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi Mezuniyet**	**Tarihi**
Lisans	Kahramanmaraş Sütçü İmam Üni. /Matematik	2008
Lise	Van Kazım Karabekir Lisesi	2002

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2009	Bingöl Üniversitesi	Araş.Gör

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Futbol oynamak, Tiyatro, Kitap Okumak