KESİRLİ TÜREVLERİN HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARA UYGULAMALARI

Burçin ÜNAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2011
ANKARA

Burçin ÜNAL tarafından hazırlanan KESİRLİ TÜREVLERİN HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARA UYGULAMALARI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Abdullah ALTIN
Matematik A.B.D, Ankara Üniversitesi ....

Doç. Dr. Adil MISIR
Matematik A.B.D, Gazi Üniversitesi ....

Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN
Matematik A.B.D, Gazi Üniversitesi ....

Tarih: 20/ 06/ 2011

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU ....
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

B. Ünal

Burçin ÜNAL

KESİRLİ TÜREVLERİN HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARA UYGULAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Burçin ÜNAL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Haziran 2011

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, önbilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar, lemmalar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, kesirli analiz ile ilgili bazı bilgiler verildikten sonra, Riemann-Liouville ve Weyl kesirli integralleri, fonksiyonlar için kesirli Leibniz kuralı incelenmiştir. Dördüncü bölüm kesirli analiz ile ilgili çeşitli uygulamalardan oluşmaktadır. Beşinci bölümde, Riemann-Liouville operatörü yardımıyla tanımlanan g-Jacobi fonksiyonları verilmiş ve bu fonksiyonların bazı özellikleri incelenerek klasik Jacobi polinomları ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca Gauss hipergeometrik fonksiyonlarının kesirli genişlemeleri verilmiş ve F-Gauss fonksiyonları olarak bilinen bu fonksiyonların sağladığı diferensiyel denklem ve onun çeşitli özellikleri araştırılmıştır. Altıncı bölümde, yine Riemann-Liouville operatörü yardımıyla tanımlanan Laguerre fonksiyonları verilmiş ve bu fonksiyonların bazı özellikleri incelenerek Laguerre polinomları ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca Kummer diferensiyel denkleminin kesirli analoğunun bir çözümü olarak Kummer fonksiyonlarının kesirli bir genellemesi incelenmiştir.

Bilim Kodu	**: 204.1.025**
Anahtar Kelimeler	**: Riemann-Liouville operatörü, hipergeometrik fonksiyon, Rodrigues formülü, Kummer fonksiyonu**
Sayfa Adedi	**: 79**
Tez Yöneticisi	**: Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN**

APPLICATIONS OF FRACTIONAL DERIVATIVES TO HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

(M.Sc.Thesis)

Burçin ÜNAL

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

June 2011

ABSTRACT

This thesis consists of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, preliminaries, some definitions, lemmas and theorems used in the other chapters are given. In the third chapter, after giving some information concerning the fractional calculus, Riemann-Liouville and Weyl fractional integrals, the fractional Leibniz rule for functions are investigated. The fourth chapter consists of various applications regarding the fractional calculus. In the fifth chapter, g-Jacobi functions defined with the help of the Riemann-Liouville operator are given and some of their properties are studied and compared with the corresponding properties of the classical Jacobi polynomials. Furthermore, fractional expansions of the Gauss hypergeometric functions are given and the differential equation satisfied by these functions known as F-Gauss functions and its various properties are analyzed. In the sixth chapter, Laguerre functions defined by the Riemann-Liouville operator are presented and some of their properties are investigated and compared with the corresponding properties of the Laguerre polynomials. Besides, a fractional generalization of the Kummer function is studied as a solution of a fractional analogue of the Kummer differential equation.

Science Code : 204.1.025
Key Words :Riemann-Liouville operator, hypergeometric function, Rodrigues formula, Kummer function
Page Number: 79
Adviser : Assoc. Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında bilimsel katkıları ile bana yardımcı olan, eğitimim süresince yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen tez danışmanım ve hocam Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN' a en içten teşekkür ve saygılarımı sunarım. Ayrıca tez süresince manevi desteklerinden dolayı arkadaşlarım Bahriye Karaca, Aslıhan Çoşkun' a, bana maddi ve manevi her türlü desteği veren aileme en içten teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$F(\alpha,\beta;\gamma;x)$	Hipergeometrik fonksiyon
$(\alpha)_r$	Pochhammer sembolü
$L_n(x)$	Laguerre polinomu
$L_n^{\alpha}(x)$	Genelleştirilmiş Laguerre polinomu
$F_D^{(r)}$	Lauricella hipergeometrik fonksiyonu
$\Phi_2^{(r)}$	Konfluent hipergeometrik fonksiyonu
$F(a;c;x)$	Kummer fonksiyonu
${}_aD_z^{\nu}$	Riemann-Liouville kesirli türevi
${}_aI_x^{\nu}$	Riemann-Liouville kesirli integrali
${}_xW_{\infty}^{\alpha}$	Weyl kesirli integrali
$P_{\alpha}(x)$	Legendre fonksiyonları
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Jacobi polinomları

1. GİRİŞ

Türev için kullanılan $\frac{d^n y}{dx^n}$ gösterimi ilk olarak Leibniz tarafından verilmiştir. Bir fonksiyonun birinci, ikinci, üçüncü, vb. türevlerinin nasıl alındığı bilinmektedir. Fakat $3/2$ inci türevi nasıl alınır? Aynı şekilde bir fonksiyon iki yada üç defa integre edilebilir. Ama $1/2$ defa integre edilebilir mi? Leibniz 1695' de L' Hospital' a sorduğu "Tam sayı dereceden türevler, kesirli dereceden türevlere genişletilebilir mi?" sorusu kesirli diferensiyelin doğum tarihi olarak gösterilebilir. Leibniz' in kesirli türevler üzerine ortaya attığı bu soru, 300 yıldan daha fazla bir zamandır üzerinde çalışılan bir konu olmuştur. Elde edilen sonuç bugün için Riemann-Liouville tarafından verilen kesirli basamaktan türev tanımı ile de aynıdır. Bu konuda ilk uygulamanın yazılması 1823' de Niels Henrik Abel' e aittir. Abel bir çalışmasında karşısına çıkan bir integral denklem çözümünde kesirli basamaktan türevleri uygulamıştır. Abel' in bu güzel çözümü, Liouville' nin dikkatini çekmiş ve ilk olarak Liouville tarafından kesirli basamaktan türev için mantıklı bir tanım verilmesini sağlamıştır.

Liouville bu konuyu 1832' de yayınlanan üç geniş eserinde ve 1855' e kadar da diğer bir çok eserlerinde incelemiştir.

Liouville, başlangıç noktası tam basamaktan türevler için iyi bilinen

$$D_x^n e^{ax} = a^n e^{ax} \quad , \quad n \in IN$$

sonucu ile başlamış ve bu ifadeyi doğal bir yolla keyfi basamaktan türevler için,

$$D_x^\nu e^{ax} = a^\nu e^{ax} \quad , \quad \nu \in \mathbb{C}$$

olarak genişletmiştir. Daha sonra bir $f(x)$ fonksiyonunu

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{a_m x}$$

şeklinde seriye açmış ve $f(x)$ in keyfi basamaktan türevinin

$$D^{\nu} f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m a_m^{\nu} e^{a_m x}$$

olduğunu kabul etmiştir. Bu formül Liouville' nin ilk tanımı olarak bilinir. Bu formülde ν, serinin yakınsak olabileceği değerlere kısıtlandığı için, formülün dezavantajlarının varlığı aşikardır.

Liouville' nin ikinci metodu $a > 0$ olmak üzere, x^{-a} biçimindeki fonksiyonlara uygulanmıştır. Liouville,

$$\mathrm{I} = \int_{0}^{\infty} u^{a-1} e^{-xu} du$$

integralini göz önüne almış bu integrale $xu = t$ dönüşümü uygulayarak $x^{-a} = \dfrac{1}{\Gamma(a)} \mathrm{I}(a)$ sonucunu elde etmiştir. Böylece bu ifadenin her iki yanına D^{ν} operatörünü uygulayarak

$$D_x^{\nu} x^{-a} = \frac{(-1)^{\nu} \Gamma(a+\nu)}{\Gamma(a)} x^{-a-\nu}$$

sonucunu elde etmiştir. Liouville bu tanımları potansiyel teoride bazı problemlere uygulamakta başarılı olmuştur.

Liouville' nin tanımını bir çok matematikçi zaman zaman yeniden ele alarak daha genel biçimler elde etmişlerdir. Bunlardan bazıları Emil Post, George Peacock, William Center, Harold Thayer Davis ve Riemann' dır.

Riemann 1847' de öğrenci iken yazdığı bir makalede kesirli basamaktan diferensiyellenme ile ilgili genel bir tanım vermiştir. Şüphesiz onun tanımı yine Liouville' nin verdiği tanımların bir sonucu olup, daha sonra bu tanımlar düzenlenerek çeşitli tenkitlerin süzgecinden geçtikten sonra bugün iyi bilinen Riemann-Liouville integral tanımını ortaya koymuştur.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım2.1 (Gamma fonksiyonu)

$z > 0$ için

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} du \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon Gamma fonksiyonu olarak adlandırılır. Bu integral $z > 0$ için yakınsaktır

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{2.2}$$

dir. Gerçekten Eş .2.1' den

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \left[-e^{-t} t^z \right]_{t=0}^\infty + z\int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

olur. Buradan $\Gamma(1) = 1$ dir. z sıfır ya da pozitif tamsayı ise

$$\Gamma(z+1) = z!$$

dir. Bu sonuç, faktöriyel tanımının Γ fonksiyonunun bir özel hali olduğunu gösterir. Halbuki bilinmektedir ki $\Gamma(z)$ fonksiyonu $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ için tanımlı ve sürekli bir fonksiyondur. O halde sıfır ve negatif tamsayıların dışındaki tüm reel sayılar için faktöriyel tanımı geçerlidir ve

$$z! = \Gamma(z+1) \qquad , \quad z \neq -1, -2, \ldots$$

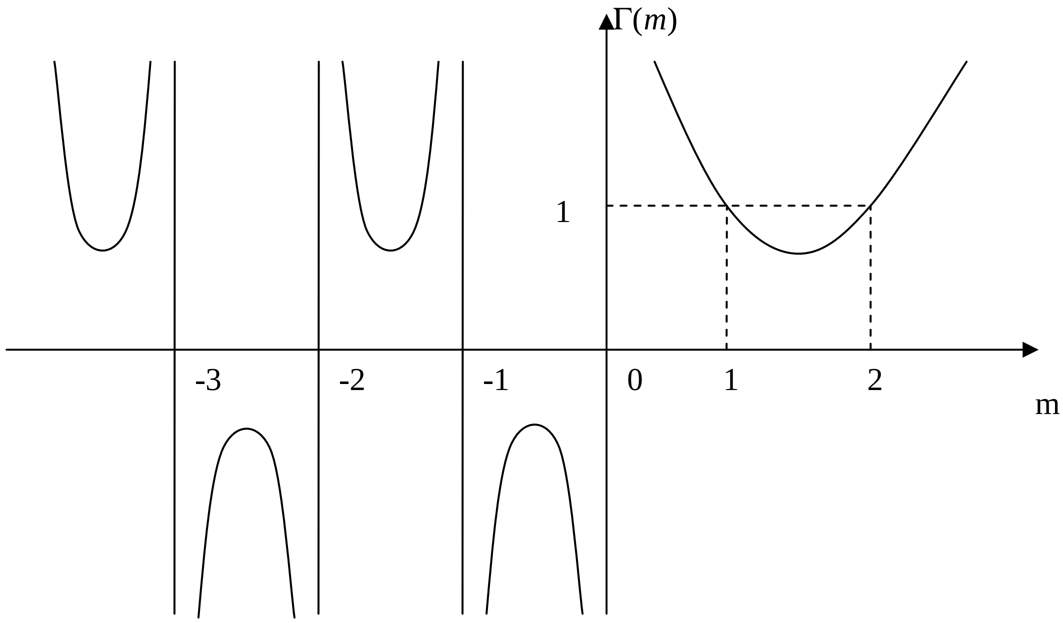
dir. Yine Eş. 2.1 tanımından

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

olduğu görülebilir. Ayrıca $0<z<1$ için,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{2.3}$$

dir.



Şekil 2. 1. Gamma fonksiyonu eğrisi

Tanım 2.2 (Beta fonksiyonu)

Çoğu adımda Gamma fonksiyonunun değerlerinin belirli kombinasyonları yerine Beta fonksiyonu olarak adlandırılan bir fonksiyon kullanılabilir.

Beta fonksiyonu

$$\beta(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \qquad , \quad x>0, \quad y>0 \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=\beta(y,x) \tag{2.5}$$

dir.

Tanım 2.3 (Gauss hipergeometrik fonksiyonu)

α,β ve γ lar reel ya da kompleks sabitler olmak üzere Gauss hipergeometrik fonksiyonu

$$F(\alpha,\beta;\gamma;x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_r(\beta)_r}{(\gamma)_r}\frac{x^r}{r!} \ , \quad |x|<1 \tag{2.6}$$

ifadesi olarak tanımlanır. Burada $(\alpha)_r=\alpha(\alpha+1)...(\alpha+r-1)$ Pochhammer sembolüdür ve $(\alpha)_0=1$ dir.

Eş. 2.6' nın genelleştirilmiş ifadesi

$${}_pF_q(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_p;\beta_1,\beta_2,...,\beta_q;x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_r(\alpha_2)_r...(\alpha_p)_r}{(\beta_1)_r(\beta_2)_r...(\beta_q)_r}\frac{x^r}{r!} \quad , \quad |x|<1$$

dir.

Tanım 2.4

Gauss diferensiyel denklemi (hipergeometrik denklem),

$$x(1-x)y''+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)x\right]y'-\alpha\beta y=0$$

şeklindedir.

Gauss hipergeometrik fonksiyonunun bir integral gösterimi

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-uz)^{-b}\,du$$

$$\left(\operatorname{Re} c>\operatorname{Re} a>0,\quad |z|<1\right) \tag{2.7}$$

dir. Beta fonksiyonunun

$$\mathrm{B}(u,v)=\int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$$

tanımından ve bilinen

$$(\alpha)_r=\frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}$$

Pochhammer sembolünden

$$\frac{(a)_r}{(c)_r}=\frac{\dfrac{\Gamma(a+r)}{\Gamma(a)}}{\dfrac{\Gamma(c+r)}{\Gamma(c)}}=\frac{\Gamma(a+r)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c+r)}$$

olup her iki yan $\Gamma(c-a)$ ile çarpılıp bölünürse

$$\frac{(a)_r}{(c)_r}=\frac{\dfrac{\Gamma(a+r)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c+r)}}{\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}{\Gamma(c)}}$$

$$=\frac{\mathrm{B}(a+r,c-a)}{\mathrm{B}(a,c-a)}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{B}(a,c-a)}\int_0^1 u^{a+r-1}(1-u)^{c-a-1}\,du$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 u^{a+r-1}(1-u)^{c-a-1}\,du$$

elde edilir. Böylece hipergeometrik fonksiyonun tanımından

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\frac{(b)_r}{r!}z^r\int_0^1 u^{a+r-1}(1-u)^{c-a-1}\,du\right\}$$

olup, bu ifadede toplam ile integral işleminin sırası değiştirilirse

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}\left\{\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(b)_r}{r!}(uz)^r\right\}du$$

bulunur. $(1-zu)^{-b}$ nin binom açılımı kullanılırsa,

$$F(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-uz)^{-b}\,du$$

elde edilir.

Teorem 2.1

$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re}(a+b)$, $\quad c \notin \mathbb{Z}_0^- = \{0\} \cup \mathbb{Z}^-$ için

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

dir. Bu formül Gauss formülü olarak bilinir.

İspat

Eş. 2.7' de, $z = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} F(a,b;c;1) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}(1-u)^{-b}\,du \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-b-1}\,du \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \mathrm{B}(c-a-b,a) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(a)}{\Gamma(c-b)} \\ &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)} \end{aligned} \tag{2.8}$$

elde edilir.

Tanım 2.5

$F_D^{(r)}$, r kompleks değişkenli dördüncü çeşit Lauricella hipergeometrik fonksiyonu,

$$F_D^{(r)}\left[a,b_1,...,b_r;c;z_1,...,z_r\right]:=\sum_{m_1,...,m_r=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+...+m_r}(b_1)_{m_1}...(b_r)_{m_r}}{(c)_{m_1+...+m_r}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{z_r^{m_r}}{m_r!}$$

$$,\ \max\left\{|z_1|,...,|z_r|\right\}<1$$

olarak tanımlanır [1].

Tanım 2.6

$\Phi_2^{(r)}$, r kompleks değişkenli konfluent hipergeometrik fonksiyon olup,

$$\Phi_2^{(r)}\left[b_1,...,b_r;c;z_1,...,z_r\right]=\sum_{m_1,...,m_r=0}^{\infty}\frac{(b_1)_{m_1}...(b_r)_{m_r}}{(c)_{m_1+...+m_r}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdots\frac{z_r^{m_r}}{m_r!}$$

şeklinde tanımlanır [1].

Tanım 2.7

$$xy''+\left[c-x\right]y'-ay=0 \tag{2.9}$$

denklemi Kummer diferensiyel denklemi olarak bilinir. Bu denklemin bir çözümü olan Kummer fonksiyonu

$${}_1F_1(a;c;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k}\frac{x^k}{k!} \tag{2.10}$$

şeklinde ifade edilir [1].

Tanım 2.8 (Çok değişkenli Lagrange polinomları)

$g_n^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r)$ çok değişkenli Lagrange polinomları,

$$\prod_{i=1}^{r}\left\{\left(1-x_i t\right)^{-\alpha_i}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}\left(x_1,\ldots,x_r\right)t^n \quad ; \tag{2.11}$$

$$\left(|t|<\min\left\{|x_1|^{-1},\ldots,|x_r|^{-1}\right\}\right)$$

doğurucu fonksiyon bağıntısıyla tanımlanırlar [11]. 1998 yılında bu polinomların $r=3$ halini Khan ve Shukla daha sonraki yıllarda da r değişkenli Lagrange polinomlarını bir çok matematikçi çalışmıştır [20]. Burada Eş. 2.11' den hareketle

$$g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}\left(x_1,\ldots,x_r\right)=\sum_{k_1+\ldots+k_r=n}\binom{\alpha_1+k_1-1}{k_1}\cdots\binom{\alpha_1+k_r-1}{k_r}x_1^{k_1}\ldots x_r^{k_r}$$

yazılabilir. İkinci yandaki binom katsayıları yerine Pochhammer sembolü cinsinden ifadeleri kullanılarak da

$$g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}\left(x_1,\ldots,x_r\right)=\sum_{k_1+\ldots+k_r=n}\left(\alpha_1\right)_{k_1}\ldots\left(\alpha_r\right)_{k_r}\frac{x_1^{k_1}}{k_1!}\cdots\frac{x_r^{k_r}}{k_r!}$$

elde edilir.

3. KESİRLİ ANALİZ

$y = f(x)$ fonksiyonu için,

$$Dy = \lim_{u \to x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \quad , \quad D = \frac{d}{dx}$$

olduğu açıktır. D türev operatörü yardımıyla $y = f(x)$ fonksiyonunun ardışık türevlerinin

$$y^{(n)} = D^n y = \lim_{u \to x} \frac{f^{(n-1)}(u) - f^{(n-1)}(x)}{u - x} \quad , \quad \left(n \in IN \right)$$

olduğu bilinmektedir. Bir $F(D)$ operatörü yardımıyla D nin kullanım alanını genişletmek mümkündür.

$$F(Dy) = F(y') = \varphi(x, y)$$

ifadesi veya daha genel anlamda

$$F\left(x, y, Dy, D^2 y, \ldots, D^n y\right) = \varphi(x, y)$$

denklemi bir adi diferensiyel denklem tanımlar. Buna karşılık,

$$F(D)y = \phi(x, y) \tag{3.1}$$

ifadesi her zaman yukarıdaki anlamda bir adi diferensiyel denklem tanımlamaz.

Örneğin,

$$F(Dy) = \sqrt{Dy} = \sqrt{y'} = x \qquad , \quad (x \geq 0)$$

adi diferensiyel denklemin genel çözümü

$$y = \frac{x^3}{3} + c \qquad , \quad (x \geq 0)$$

dir. Buna karşılık,

$$F(D)y = \sqrt{D}y = x$$

denkleminin genel çözümü veya sağladığı herhangi bir fonksiyonu bulmak için her şeyden önce $\sqrt{D}$ ye açık bir anlam vermek gerekecektir.

Eş. 3.1 ile verilen denklemde $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasında analitik olduğunu kabul edelim. O halde $f(x)$, x_0 noktasında

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(x - x_0\right)^m$$

Taylor serisine sahiptir. Özel olarak $x_0 = 0$ almak genelliği bozmaz. Çünkü x_0 noktası her zaman başlangıca kaydırılabilir. Böylece,

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \, x^m$$

serisi $x=0$ noktası komşuluğunda belirli bir yakınsaklık aralığına sahiptir. Bu aralıkta serinin terimleri üzerinde çeşitli diferensiyel ve integral işlemleri yapılabilir. Buradan görülmektedir ki, problem,

$$F(D)y = F(D)f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \, F(D)x^m$$

yani kısaca

$$F(D)x^m$$

ifadesine bir anlam verilebilmesine dönüşmektedir.

a) $F(D)$, D nin bir polinomu veya D nin bir analitik fonksiyonu ise $F(D)x^m$ in elde edilmesi kolaydır. Örneğin,

i) $F(D)=D^3$ için $D^3(x^m)=m(m-1)(m-2)\,x^{m-3}$

ii) $F(D)=\cos(D)$ için

$$(\cos D)(x^2) = \left(1-\frac{D^2}{2!}+\frac{D^4}{4!}-\ldots\right)(x^2) = x^2-1$$

olur.

b) $F(D)=D^{\alpha}$, $(0<\alpha<1)$ olsun. Açıktır ki $F(D)$ fonksiyonu D nin tam kuvvetleri cinsinden bir Taylor serisine açılamaz. O halde,

$$D^{\alpha}(x^m) \quad , \qquad (0<\alpha<1)$$

için bir açıklamaya ihtiyaç vardır. Yani kesirli basamaktan türevler için bir ifade elde etmek gerekmektedir.

Adi türev tanımından bilinmektedir ki,

$$
\begin{aligned}
D(x^m) &= mx^{m-1} \\
D^2(x^m) &= m(m-1)\,x^{m-2} \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \\
D^n(x^m) &= m(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n} \\
&= \frac{m!}{(m-n)!}\,x^{m-n} \\
&= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}\,x^{m-n}
\end{aligned}
$$

dır [15]. Yani kısaca

$$D^n(x^m) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}\,x^{m-n} \tag{3.2}$$

dir. Eş. 3.2, m ve n nin tamsayı olmadığı durumlarda da sağlanır. O halde $0<\alpha<1$ için

$$D^\alpha(x^m) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)}\,x^{m-\alpha}$$

yazılabilir [8,19]. Kesirli analiz için bilinen bazı özellikler aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
\text{i) } D^n(kx^m) &= k\,\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)\ldots 3.2.1}{(m-n)\ldots 3.2.1}\,x^{m-n} \\
&= k\,\frac{m!}{(m-n)!}\,x^{m-n}
\end{aligned}
$$

$$= k \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

$$= k\, D^n (x^m)$$

dir.

ii) $D^n (x^{-m}) = \dfrac{\Gamma(-m+1)}{\Gamma(-m-n+1)} x^{-m-n}$

olup, Eş. 2.2' den

$$D^n (x^{-m}) = \frac{(-1)^n\, m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)\,\Gamma(-m-n+1)}{\Gamma(-m-n+1)} x^{-m-n}$$

$$= (-1)^n\, (m)_n\, x^{-m-n}$$

$$= (-1)^n \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)} x^{-m-n}$$

dir.

iii) $m = 0$, $n > 0$ ve $\Gamma(0) = \infty$ olduğundan

$$D^n (sabit) = 0$$

dir.

Tanım3.1.

f fonksiyonu her sonlu (a, x) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m \in IN$, $m-1 \leq \alpha < m$ olmak üzere $x > a$ için reel bir f fonksiyonunun α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$ {}_aD_x^{\alpha} f(x) = \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x f(t)\left(x-t\right)^{m-\alpha-1} dt \right) \tag{3.3} $$

$$ = \frac{d^m}{dx^m}\left({}_aD_x^{-(m-\alpha)} f\left(x\right) \right) $$

şeklinde tanımlanır. Burada $m-\alpha > 0$ dır [5,6].

Teorem3.1

$f(t)$ ve $g(t)$ için ${}_aD_x^{\mu} f(t)$ ve ${}_aD_x^{\mu} g(t)$ var olsun. O zaman Riemann-Liouville türevlerinin temel özellikleri aşağıdaki gibidir:

(i) $\lim\limits_{\mu \to m} {}_aD_x^{\mu} f(t) = f^{(m)}(t)$;

(ii) ${}_aD_x^{\mu}\left[\lambda f(t) + \gamma g(t)\right] = \lambda\, {}_aD_x^{\mu} f(t) + \gamma\, {}_aD_x^{\mu} g(t)$, $(\lambda, \gamma \in \mathbb{C})$

(iii) ${}_aD_x^{\mu}\left[{}_aD_x^{\nu} f(t) \right] \neq {}_aD_x^{\mu+\nu} f(t)$

(iv) ${}_aD_x^{\mu}\, {}_aD_x^{\nu} \neq {}_aD_x^{\nu}\, {}_aD_x^{\mu}$

dır [4,5,6].

Lemma3.1 (Kuvvet fonksiyonun kesirli türevi). Eğer $\mu \geq 0$, $t > 0$ ve $\alpha > -1$ ise

$$ {}_0D_t^{\mu} t^{\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-\mu+1)} t^{\alpha-\mu} \tag{3.4} $$

dır [5,6].

İspat

$m-1 \le \mu < m$, $m \in IN$ olduğunda, Eş. 3.3' den

$$ {}_0D_t^{\mu} t^{\alpha} = \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{1}{\Gamma(m-\mu)}\int_0^t (t-\tau)^{m-\mu-1}\tau^{\alpha} d\tau\right) $$

dır. $\tau = t\lambda$ değişken değiştirmesi yapılırsa

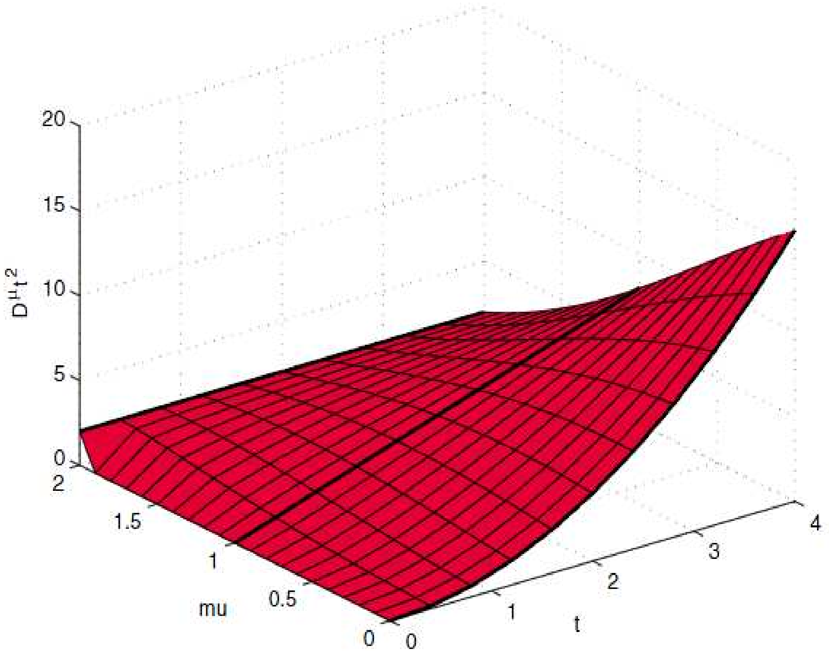
$$ {}_0D_t^{\mu} t^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(m-\mu)}\frac{d^m}{dt^m}\left[t^{m+\alpha-\mu}\underbrace{\int_0^1 \lambda^{\alpha}(1-\lambda)^{m-\mu-1} d\lambda}_{\beta(\alpha+1,m-\mu)}\right] $$

elde edilir. Burada Beta fonksiyonunun özelliğinden yararlanılarak ve *m* kez tamsayı basamaktan türev kullanılarak

$$ \begin{aligned} {}_0D_t^{\mu} t^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(m-\mu)}{\Gamma(m-\mu)\Gamma(m+\alpha-\mu+1)}\frac{d^m}{dt^m}t^{m+\alpha-\mu} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m+\alpha-\mu+1)}\frac{\Gamma(m+\alpha-\mu+1)}{\Gamma(\alpha-\mu+1)}t^{\alpha-\mu} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m+\alpha-\mu+1)}(\alpha-\mu+1)_m\, t^{\alpha-\mu} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(m+\alpha-\mu+1)}(\alpha-\mu+1)(\alpha-\mu+2)\ldots(\alpha-\mu+m-1)(\alpha-\mu+m)t^{\alpha-\mu} \end{aligned} $$

elde edilir. Eş. 3.4 formülü μ nün negatif değerleri için de elde edilir [5,6,17]. Bu durumda ${}_0D_t^{\mu}$, ${}_0I_t^{-\mu}$ olarak düşünülebilir.

$[0,4]$ aralığında, $0 \le \mu \le 2$ için $f(t) = t^2$ nin kesirli türevinin 3- boyutlu grafiği Şekil3.1 den görülebilir.



Şekil3.1. $\left[0,4\right]$ aralığında $0 \le \mu \le 2$ için $f(t)=t^2$ nin kesirli türevi

3.1. Riemann-Liouville ve Weyl Kesirli İntegralleri

f fonksiyonu, $\left(a,\infty\right)$ üzerinde integrallenebilir olsun. $n.$ mertebeden

$$_a\mathrm{I}_x^n f(x)=\int_a^x\int_a^{t_1}\int_a^{t_2}\dots\int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n dt_{n-1}\dots dt_2 dt_1 \quad , \qquad n\in IN \tag{3.5}$$

integrali ele alınsın. Bu integralde integrasyon sırası ve buna bağlı sınırlar değiştirilsin. Bunun için;

$a<t_1<x$ $\qquad t_2<t_1<x$

$a<t_2<t_1$ $\qquad t_3<t_2<x$

,...., $\qquad$,.....,

$a<t_{n-1}<t_{n-2}$ $\qquad t_n<t_{n-1}<x$

$a<t_n<t_{n-1}$ $\qquad a<t_n<x$

sınır değişimleri altında Eş. 3.5 ifadesi

$$\mathrm{I}_x^n f(x)=\int_a^x f(t_n)\left(\int_{t_n}^x\left(\int_{t_{n-1}}^x\cdots\int_{t_3}^x\left(\int_{t_2}^x dt_1\right)dt_2\cdots\right)dt_{n-1}\right)dt_n \tag{3.6}$$

şeklinde yazılır. Eş. 3.6 ifadesinin sağ tarafı terim terime hesaplanırsa

$$\mathrm{I}_x^n f(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f(t_n)\left(x-t_n\right)^{n-1}dt_n$$

eşitliği elde edilir. Burada $(n-1)!=\Gamma(n)$ kullanılırsa

$$\mathrm{I}_x^n f(x)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x f(t_n)\left(x-t_n\right)^{n-1}dt_n \tag{3.7}$$

yazılır [5]. Burada $-\infty\le a<x<\infty$ ve $n\in IN$ dir. Gamma fonksiyonu tamsayılar dışında da tanımlı olduğundan, n nin tamsayı olmaması durumunda Eş. 3.7 eşitliğinin sağ tarafı için şu tanım verilebilir.

Tanım 3.2

f, (a,∞) da integrallenebilir ise $\alpha>0$ için α. mertebeden, Riemann-Liouville ${}_a\mathrm{I}_x^{\alpha}\equiv {}_aD_x^{-\alpha}$ integral operatörü

$${}_aD_x^{-\alpha}f\left(x\right)={}_a\mathrm{I}_x^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x f(t_n)\left(x-t_n\right)^{\alpha-1}dt_n \qquad , \quad x>a$$

veya

$${}_xD_b^{-\alpha}f\left(x\right)={}_x\mathrm{I}_b^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b f(t_n)\left(t_n-x\right)^{\alpha-1}dt_n \qquad , \quad x<b$$

biçiminde tanımlanır [4,5,6].

Eş. 3.7' de $-n$ yerine μ yazılırsa

$$ {}_0D_z^{\mu}\left\{ f(z) \right\} = \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^z f(t)\left(z-t\right)^{-\mu-1} dt \quad , \quad \mathrm{Re}(\mu) < 0 \tag{3.8} $$

elde edilir. Eş. 3.8, $\mu < 0$ için yakınsaktır. Eş. 3.8 ile $-\mu$ katlı Riemann-Liouville kesirli integrali tanımlanır.

$m-1 < \mathrm{Re}(\mu) < m \qquad (m = 1,2,3,...)$ için,

$$ \begin{aligned} {}_0D_z^{\mu}\left\{ f(z) \right\} &= \frac{d^m}{dz^m}\, {}_0D_z^{\mu-m}\left\{ f(z) \right\} \\ &= \frac{d^m}{dz^m}\left\{ \frac{1}{\Gamma(-\mu+m)} \int_0^z f(t)\left(z-t\right)^{-\mu+m-1} dt \right\} \end{aligned} \tag{3.9} $$

şeklinde yazılabilir. Eş. 3.8' de $f(z) = z^{\lambda}$ yazılırsa,

$$ {}_0D_z^{\mu}\left\{ z^{\lambda} \right\} = \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^z t^{\lambda}\left(z-t\right)^{-\mu-1} dt $$

olup burada $t = zy$ dönüşümü yapılırsa

$$ \begin{aligned} {}_0D_z^{\mu}\left\{ z^{\lambda} \right\} &= \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^1 z^{\lambda-\mu} y^{\lambda}\left(1-y\right)^{-\mu-1} dy \\ &= \frac{z^{\lambda-\mu}}{\Gamma(-\mu)} B\left(\lambda+1,-\mu\right) \\ &= \frac{z^{\lambda-\mu}}{\Gamma(-\mu)} \frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(-\mu)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)} \end{aligned} $$

$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)} z^{\lambda-\mu} \quad ; \quad \mathrm{Re}(\lambda) > -1,\ \mathrm{Re}(\mu) < 0 \tag{3.10}$$

dır. Örneğin, Eş. 3.10' da $\mu = \frac{1}{2}$ alınırsa

$${}_0D_z^{\frac{1}{2}}\left\{z^{\lambda}\right\} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} z^{\lambda-\frac{1}{2}}$$

dir ve aynı zamanda Eş. 3.9' da $\mu = \frac{1}{2}$, $m = 1$ ve $f(z) = z^{\lambda}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
{}_0D_z^{\frac{1}{2}}\left\{z^{\lambda}\right\} &= \frac{d}{dz}\, {}_0D_z^{\frac{1}{2}-1}\left\{z^{\lambda}\right\} \\
&= \frac{d}{dz}\, {}_0D_z^{-\frac{1}{2}}\left\{z^{\lambda}\right\} \\
&= \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^z t^{\lambda}\left(z-t\right)^{\frac{1}{2}-1} dt\right\}
\end{aligned}$$

olup $t = \xi z$ dönüşümü yapıldığında

$$\begin{aligned}
{}_0D_z^{\frac{1}{2}}\left\{z^{\lambda}\right\} &= \frac{d}{dz}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \xi^{\lambda} z^{\lambda}\left(1-\xi\right)^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}} z d\xi\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dz}\left\{z^{\lambda+\frac{1}{2}}\int_0^1 \xi^{\lambda}\left(1-\xi\right)^{-\frac{1}{2}} d\xi\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{d}{dz}\left\{z^{\lambda+\frac{1}{2}} B\left(\lambda+1, \frac{1}{2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}\right)\sqrt{\pi}}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)z^{\lambda-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}z^{\lambda-\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

Şimdi $f(t)=(t-a)^{\frac{1}{2}}$ ve $\alpha=\frac{1}{2}$ olmak üzere aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli integralini göz önüne alalım. Tanım 3.2' den

$${}_aD_x^{-\frac{1}{2}}={}_aI_x^{\frac{1}{2}}f(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_a^x (t-a)^{\frac{1}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt \qquad , \quad x>a$$

olarak yazılır. Şayet burada

$$t=a+(x-a)\tau$$

şeklinde bir değişken değiştirmesi yapılırsa,

$${}_aD_x^{-\frac{1}{2}}={}_aI_x^{\frac{1}{2}}f(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_a^x (t-a)^{\frac{1}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt \qquad , \quad x>a$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 (x-a)^{\frac{1}{2}}(x-a)^{-\frac{1}{2}+1}\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\int_0^1 \tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau$$

olup, Beta fonksiyonu yardımıyla

$$
\begin{aligned}
{}_aD_x^{-\frac{1}{2}} = {}_aI_x^{\frac{1}{2}} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}(x-a)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.2

$f(t)$ ve $g(t)$ için ${}_aI_x^{\nu} f(t)$ ve ${}_aI_x^{\nu} g(t)$ var olsun. O zaman Riemann-Liouville integrallerinin özellikleri aşağıdaki gibidir:

(i) $\lim\limits_{\nu \to n} {}_aI_x^{\nu} f(t) = I_x^{n}(t)$

dir. Burada $I_x^n \ (n \in IN)$ n-katlı integral için klasik operatördür.

(ii) ${}_aI_x^{\nu}\left[\lambda f(t) + \gamma g(t)\right] = \lambda \, {}_aI_x^{\nu} f(t) + \gamma \, {}_aI_x^{\nu} g(t) \quad , \quad (\lambda, \gamma \in \mathbb{C})$.

(iii) ${}_aI_x^{\mu}\left[{}_aI_x^{\nu} f(t)\right] = {}_aI_x^{\mu+\nu} f(t)$.

(iv) ${}_aI_x^{\mu} \, {}_aI_x^{\nu} = {}_aI_x^{\nu} \, {}_aI_x^{\mu}$

dır [4,5,6].

Örnek

$$ {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha}\, {}_b\mathrm{I}_x^{\beta} f = {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha+\beta} f \qquad , \quad (\alpha,\beta) > 0 $$

dir.

Gerçekten, integrasyon sırası değiştirilerek,

$$ {}_a\mathrm{I}_x^{\alpha}\; {}_a\mathrm{I}_x^{\beta}\; f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-u)^{\alpha-1}\, dt \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^u (u-t)^{\beta-1}\, f(t)dt $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)dt \int_t^x (x-u)^{\alpha-1} (u-t)^{\beta-1}\, f(t)du $$

elde edilir. Eşitliğin sağ yanındaki ikinci integralde $y = \dfrac{u-t}{x-t}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$ \int_t^x (x-u)^{\alpha-1} (u-t)^{\beta-1}\, du = \int_t^x \frac{(x-u)^{\alpha-1} (x-t)^{\alpha-1}}{(x-t)^{\alpha-1}} \left((u-t) \left(\frac{x-t}{x-t} \right)^{\beta-1} \right) du $$

$$ = \int_0^1 \left(1 - \frac{u-t}{x-t} \right)^{\alpha-1} (x-t)^{\alpha-1} \left(\frac{u-t}{x-t} \right)^{\beta-1} (x-t)^{\beta-1} (x-t)\, dy $$

$$ = \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}\, y^{\beta-1} (x-t)^{\alpha+\beta-1}\, dy $$

$$ = (x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1}\, y^{\beta-1} dy $$

$$ = B(\alpha,\beta)(x-t)^{\alpha+\beta-1} $$

$$ = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-t)^{\alpha+\beta-1} $$

dır. Bulduğumuz bu sonucu yukarıda yerine yazarsak

$$
{}_a\mathrm{I}_x^{\alpha}\ {}_a\mathrm{I}_x^{\beta} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(t)\left(x-t\right)^{\alpha+\beta-1} dt
$$

$$
= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x f(t)\left(x-t\right)^{\alpha+\beta-1} dt
$$

$$
= {}_aI_x^{\alpha+\beta} f\left(x\right)
$$

dır.

Lemma3.2 Sabit fonksiyonun kesirli integrali

$$
{}_0I_t^{\nu}1 = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} t^{\nu}
$$

şeklindedir [5].

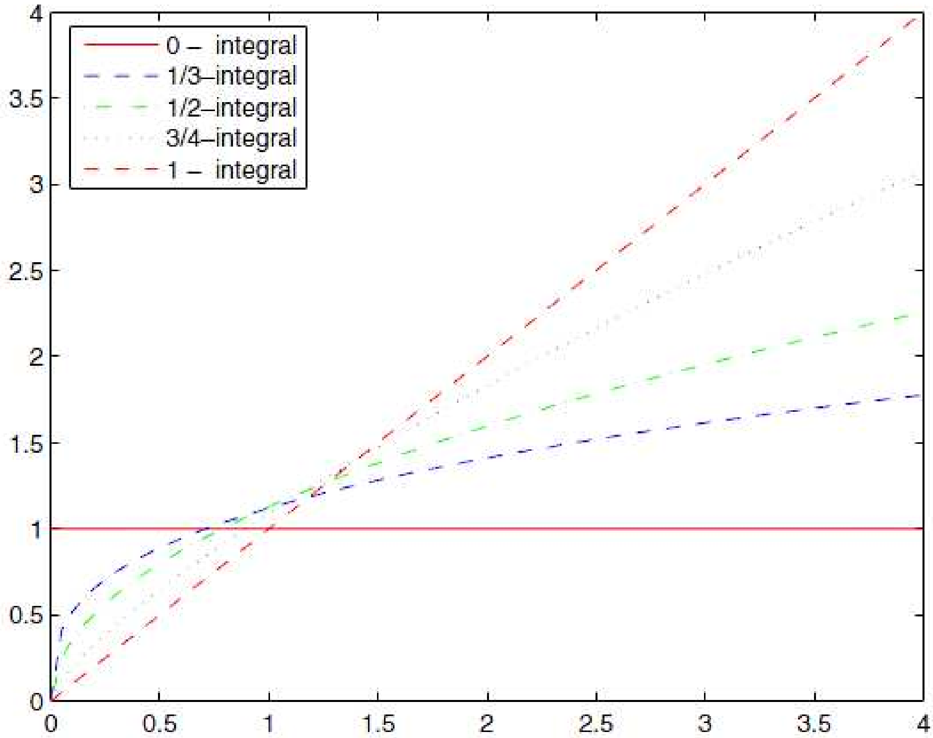
İspat

Tanım3.2' den

$$
{}_0I_t^{\nu}1 = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \left(t-\tau\right)^{\nu-1} d\tau = -\frac{1}{\nu\,\Gamma(\nu)} \left[\left(t-\tau\right)^{\nu}\right]_{\tau=0}^{\tau=t}
$$

$$
= \frac{t^{\nu}}{\nu\,\Gamma(\nu)}
$$

ve burada $\nu\,\Gamma(\nu) = \Gamma(\nu+1)$ dır.



Şekil3.2. $f\left(t\right)=1$ in kesirli grafiği

Tanım 3.3

α katlı Weyl kesirli integrali

$$
\begin{aligned}
{}_{x}W_{\infty}^{\alpha} f(x) &= {}_{x}\mathrm{I}_{\infty}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{\infty}\left(t-x\right)^{\alpha-1} f(t)dt \\
{}_{-\infty}W_{x}^{\alpha} f(x) &= {}_{-\infty}\mathrm{I}_{x}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\left(x-t\right)^{\alpha-1} f(t)dt
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

şeklinde tanımlanır [14].

Teorem3.3

$f(z)$, $|z| < p$ ' de analitik bir fonksiyon olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , \ |z| < p \tag{3.12}$$

kuvvet serisine sahip olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} {}_0D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda-1} f(z)\right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ {}_0D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda+n-1}\right\} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\mu)} z^{\lambda-\mu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (\lambda)_n}{(\lambda-\mu)_n} z^n \end{aligned}$$

dir. Burada $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, $\mathrm{Re}(\mu) < 0$ ve $|z| < p$ dir [1].

İspat

Eş. 3.8 ve Eş. 3.12' den

$$\begin{aligned} {}_0D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda-1} f(z)\right\} &= {}_0D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^z (z-t)^{-\mu-1} t^{\lambda-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt \end{aligned}$$

olup, $t = \xi z$ dönüşümü yapılırsa

$${}_0D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda-1} f(z)\right\} = \frac{z^{\lambda-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)} \int_0^1 (1-\xi)^{-\mu-1} \xi^{\lambda-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \xi^n\right) d\xi$$

elde edilir. Dikkat edilirse $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ ve $\mathrm{Re}(\mu) < 0$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \xi^n$$

serisi $|z| < p$ için düzgün yakınsaktır ve

$$\int_0^1 \left| \xi^{\lambda-1} (1-\xi)^{-\mu-1} \right| d\xi$$

integrali de yakınsaktır. Burada $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ ve $\mathrm{Re}(\mu) < 0$ dır. Bu durumda integrasyon ve toplamın yerleri değiştirilirse

$$\begin{aligned}
{}_0D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda-1} f(z)\right\} &= \frac{z^{\lambda-\mu-1}}{\Gamma(-\mu)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \int_0^1 \xi^{\lambda+n-1} (1-\xi)^{-\mu-1}\, d\xi \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, {}_0D_z^{\mu}\left\{z^{\lambda+n-1}\right\} \\
&= \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda+n-\mu)} z^{\lambda-\mu-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)(\lambda)_n}{\Gamma(\lambda-\mu)(\lambda-\mu)_n} z^{\lambda-\mu-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \\
&= \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\lambda-\mu)} z^{\lambda-\mu-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(\lambda)_n}{(\lambda-\mu)_n} z^n
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu da istenilendir.

Teorem3.4

$\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, $|az| < 1$, $|bz| < 1$, $|cz| < 1$ için,

$$ {}_aD_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta}(1-cz)^{-\gamma}\right\}=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\lambda-1}F_D^{(3)}[\lambda,\alpha,\beta;\gamma;\mu;az,bz,cz] $$

dir [1].

İspat

$$ {}_aD_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}(1-az)^{-\alpha}(1-bz)^{-\beta}(1-cz)^{-\gamma}\right\} \tag{3.13} $$

$$ \begin{aligned}
&= {}_aD_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(az)^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta)_n(bz)^n}{n!}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_p(cz)^p}{p!}\right\}\\
&= {}_aD_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_n(\gamma)_p}{m!n!p!}a^mb^nc^pz^{m+n+p}\right\}\\
&=\frac{\Gamma(\lambda+m+n+p)}{\Gamma(m+n+p+\mu)}z^{m+n+p+\mu-1}\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_n(\gamma)_p}{m!n!p!}a^mb^nc^p\\
&=\frac{\Gamma(\lambda)(\lambda)_{m+n+p}}{\Gamma(\mu)(\mu)_{m+n+p}}z^{m+n+p+\mu-1}\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_n(\gamma)_p}{m!n!p!}a^mb^nc^p\\
&=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{m+n+p}(\alpha)_m(\beta)_n(\gamma)_p}{(\mu)_{m+n+p}}\frac{(az)^m}{m!}\frac{(bz)^n}{n!}\frac{(cz)^p}{p!}\\
&=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}F_D^{(3)}[\lambda,\alpha,\beta,\gamma;\mu;az,bz,cz]
\end{aligned} $$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Örnek

$$ \sqrt{D}(x)={}_aD_x^{\frac{1}{2}}(x)=\frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{2}+1\right)}x^{1-\frac{1}{2}} $$

$$= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

dir.

Örnek

$\sqrt{D}y = x$ ise $\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} = x$ denklemi için bir çözüm bulalım. Kabul edelim ki bu denklem

$$y = kx^m$$

tipinde bir çözüme sahiptir. k ve m yi bulalım.

$$\sqrt{D}(kx^m) = {}_aD_x^{\frac{1}{2}}(kx^m) = k\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} x^{m-\frac{1}{2}} = x$$

olup, $m = \frac{3}{2}$ ve

$$k\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)} = 1$$

eşitliğinden faydalanarak

$$k\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=1$$

$$k=\frac{4}{3\sqrt{\pi}}$$

olup, $y=\dfrac{4}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}}$ fonksiyonu verilen denklemi sağlar.

Örnek

$b>-1$, $f(x)=x^b$ için ${}_0D_x^{\alpha} f(x)$ kesirli türevi ele alalım. $m-1\leq\alpha<m$, $m\in IN$ için

$${}_0D_x^{\alpha}x^b=\left(\frac{d}{dx}\right)^m\left\{\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^x(x-u)^{m-\alpha-1}u^b du\right\}$$

olup $u=xv$ dönüşümü yapılır ve Eş. 2.4 Beta fonksiyonu tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned}{}_0D_x^{\alpha}x^b&=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m\left\{x^{m-\alpha+b}\int_0^1(1-v)^{m-\alpha-1}v^b dv\right\}\\&=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{\Gamma(b+1)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(b+1+m-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m x^{m-\alpha+b}\\&=\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b+1+m-\alpha)}\frac{\Gamma(m-\alpha+b+1)}{\Gamma(m-\alpha+b-m+1)}x^{b-\alpha}\\&=\frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b-\alpha+1)}x^{b-\alpha}\end{aligned}\tag{3.14}$$

elde edilir. Burada $p\notin\mathbb{Z}_0^-$ için

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^m x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-m+1)} x^{p-m}$$

$$= \frac{p!}{(p-m)!} x^{p-m}$$

$$= \frac{p(p-1)...(p-m)(p-m-1)...3.2.1}{(p-m)(p-m-1)...3.2.1} x^{p-m}$$

$$= p(p-1)...(p-m+1) x^{p-m} \quad , \ (m \in IN) \tag{3.15}$$

dır. Eş.3.14' de $b=0$ ve herhangi $\alpha>0$ için

$$_0D_x^\alpha c = \frac{cx^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

elde edilir. Bu yüzden c sabitinin kesirli diferensiyeli sadece $\alpha=n$ nin pozitif değerleri için sıfırdır. $\left(\Gamma(1-n)=\infty\right)$ Diğer yandan herhangi bir $\alpha>0$ için eğer $f(x)=x^{\alpha-k}$, $k=1,2,...,1+[\alpha]$ ise $_0D_x^\alpha f(x) \equiv 0$ dır.

Örnek

$f(x)=\log x$ için $_0\mathrm{I}_x^\alpha f$ integralinde $u=x(1-v)$ dönüşümü yapılırsa

$$_0\mathrm{I}_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-u)^{\alpha-1}\log u\,du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^0 \left(x-x(1-v)\right)^{\alpha-1}\log\left(x(1-v)\right)(-x)\,dv$$

$$= \frac{(\log x)x^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 v^{\alpha-1}dv + \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 v^{\alpha-1}\log(1-v)\,dv$$

$$= \frac{(\log x)x^\alpha}{\Gamma(\alpha)\alpha}\int_0^1 \alpha v^{\alpha-1}dv + \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha)\alpha}\int_0^1 \alpha v^{\alpha-1}\log(1-v)\,dv$$

$$=\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\log x-\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\alpha}\int_0^1\log(1-v)\,d\left(1-v^{\alpha}\right)$$

$$=\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{\log x-\int_0^1\log(1-v)\,d\left(1-v^{\alpha}\right)\right\}$$

$$=\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{\log x-\left(1-v^{\alpha}\right)\log(1-v)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1-v^{\alpha}}{1-v}dv\right\}$$

dır. Burada

$$\int_0^1\frac{v^x-v^y}{1-v}dv=\psi(y+1)-\psi(x+1)\quad,\quad\left(\operatorname{Re}x>-1,\operatorname{Re}y>-1\right)$$

şeklinde ifade edilir ve ψ fonksiyonu

$$\psi(x)=\left[\Gamma(x)\right]^{-1}\left(\frac{d}{dx}\right)\Gamma(x)$$

ile tanımlanır. $\psi(x)$ için, $-\psi(1)=\gamma=0,5772157...$ dir.

Böylece

$${}_0\mathrm{I}_x^{\alpha}\log x=\frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left\{\log x-\psi(\alpha+1)+\psi(1)\right\}\tag{3.16}$$

elde edilir. Diğer taraftan $m-1\leq\operatorname{Re}\alpha<m$ için,

$${}_0D_x^{\alpha}\log x=\left(\frac{d}{dx}\right)^m{}_0\mathrm{I}_x^{m-\alpha}\log x$$

$$=\left(\frac{d}{dx}\right)^m\left\{\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^x(x-u)^{m-\alpha-1}\log u\,du\right\}$$

olup, $u=x(1-v)$ dönüşümü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
{}_0D_x^{\alpha}\log x &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left\{\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_1^0 \left(x-x(1-v)\right)^{m-\alpha-1}\log\left(x(1-v)\right)(-x)\,dv\right\} \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left\{\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_1^0 x^{m-\alpha-1}v^{m-\alpha-1}\left[\log x+\log(1-v)\right](-x)\,dv\right\} \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left\{\frac{(\log x)\,x^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^1 v^{m-\alpha-1}dv+\frac{x^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^1 v^{m-\alpha-1}\log(1-v)\,dv\right\} \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left\{\frac{(\log x)\,x^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)}\int_0^1 (m-\alpha)v^{m-\alpha-1}dv\right. \\
&\qquad\qquad \left.+\frac{x^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)(m-\alpha)}\int_0^1 (m-\alpha)v^{m-\alpha-1}\log(1-v)\,dv\right\} \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left\{\frac{x^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)}\log x-\frac{x^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)(m-\alpha)}\int_0^1 \log(1-v)\,d\left(1-v^{m-\alpha}\right)\right\} \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left\{\frac{x^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)}\left(\log x-\int_0^1 \log(1-v)\,d\left(1-v^{m-\alpha}\right)\right)\right\} \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \left\{\frac{x^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)}\left(\log x-\left(1-v^{m-\alpha}\right)\left(\log(1-v)\right)\Big|_0^1-\int_0^1 \frac{1-v^{m-\alpha}}{1-v}\,dv\right)\right\} \\
&= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \frac{x^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)}\left[\log x-\psi(m-\alpha+1)+\psi(1)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada klasik diferensiyel uygulandığında ve sonuç Eş. 3.16 ile birleştirildiğinde, $\forall\alpha\in\mathbb{C}$ için

$$
{}_0D_x^{\alpha}\log x=\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left\{\log x-\psi(1-\alpha)-\gamma\right\}
$$

bulunur. $\alpha=n\in IN$ olması durumunda, sağ yandaki ifade, $\alpha\to n$ için limit olarak ifade edilecektir. Gerçekten

$$\lim_{\alpha\to n}\frac{\psi(1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}=(-1)^{-n}\,\Gamma(n)$$

olduğundan $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^{n}\log x=-\Gamma(n)(-x)^{-n}$ elde edilir. Ancak $\alpha=-n$ için

$${}_0D_x^{-n}\log x={}_0\mathrm{I}_x^{\alpha}\log x=\frac{x^n}{n!}\left\{\log x-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right\}$$

klasik sonucu elde edilir. Burada $\psi(x+1)-\psi(x)=x^{-1}$ yinelemesinden, $\psi(n+1)-\psi(1)=\sum_{j=1}^{n} j^{-1}$ olduğu görülebilir.

Örnek

$m-1\le\alpha<m$, $m\in IN$ için

$${}_xD_\infty^{\alpha}f(x)=(-1)^m\left(\frac{d}{dx}\right)^{m}{}_xW_\infty^{m-\alpha}f(x)$$

şeklindeki Weyl tanımından, $p>0$ için $f(x)=e^{-px}$ fonksiyonu ele alınsın.

$${}_xW_\infty^{\alpha}e^{-px}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}(u-x)^{\alpha-1}e^{-pu}du$$

olup, burada $u-x=\dfrac{y}{p}$ dönüşümü uygulanırsa

$${}_xW_\infty^{\alpha}e^{-px}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\left(\frac{y}{p}\right)^{\alpha-1}e^{-p\left(\frac{y+px}{p}\right)}p^{-1}dy$$

$$= \frac{e^{-px}}{\Gamma(\alpha)\, p^{\alpha}} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

$$= \frac{e^{-px}}{\Gamma(\alpha)\, p^{\alpha}} \Gamma(\alpha)$$

$$= \frac{e^{-px}}{p^{\alpha}} \quad , \alpha > 0$$

dır. Buradan $p > 0$ ve $\alpha \to m - \alpha$ alınırsa

$${}_x D_{\infty}^{\alpha} e^{-px} = (-1)^m \left(\frac{d}{dx} \right)^m p^{-(m-\alpha)} e^{-px}$$

$$= (-1)^m (-1)^m p^{\alpha} e^{-px}$$

$$= p^{\alpha} e^{-px} \qquad , \; (m-1 \le \alpha < m)$$

elde edilir.

3.2 Fonksiyonlar İçin Kesirli Leibniz Kuralı

f ve g, z ye göre n-kez diferensiyellenebilir olsun. $D_z^n = \left(\frac{d}{dz} \right)^n$ olmak üzere

$$D_z^n \left[f(z) g(z) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} D_z^{n-k} f(z) D_z^k g(z) \quad , \quad n \in IN \tag{3.17}$$

ifadesine iki fonksiyonun çarpımının n-inci basamaktan türevi için Leibniz kuralı denir [6]. Bu kural α nın kesirli değerlerine genişletilebilir. Burada n yerine α alındığında, f ve g analitik fonksiyonları için

$${}_a D_z^{\alpha} \left[f(z) g(z) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} {}_a D_z^{\alpha-k} f(z) D_z^k g(z) \;, \; (\alpha \in \mathbb{C}) \tag{3.18}$$

yazılabilir. Burada $\alpha=-\nu$ ve $g(z)=z^n$ yazılırsa,

$$ {}_aD_z^{-\nu}\left[z^n f(z)\right]=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_a^z (z-\xi)^{\nu-1}\left[\xi^n f(\xi)\right]d\xi \quad , \quad \nu>0 $$

ve

$$ \xi^n=\left[z-(z-\xi)\right]^n=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n}{k}z^{n-k}(z-\xi)^k $$

olduğu dikkate alınırsa

$$ \begin{aligned} {}_aD_z^{-\nu}\left[z^n f(z)\right]&=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n}{k}z^{n-k}\int_a^z (z-\xi)^{\nu+k-1} f(\xi)d\xi \\ &=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{n}{k}z^{n-k}\,\Gamma(\nu+k)\,{}_aD_z^{-(\nu+k)}f(z) \\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+k)(-1)^k}{\Gamma(\nu)k!}\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-k+1)}z^{n-k}\,{}_aD_z^{-\nu-k}f(z) \\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\nu}{k}D_z^k(z^n)\,{}_aD_z^{-\nu-k}f(z) \end{aligned} $$

elde edilir. Eş. 3.18' in ilginç bir genelleştirilmesi

$$ {}_aD_z^{\alpha}\left[f(z)g(z)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\binom{\alpha}{k+\mu}\,{}_aD_z^{\alpha-k-\mu}f(z)\,{}_aD_z^{k+\mu}g(z) \tag{3.19} $$

şeklinde verilmiştir [2,3]. Burada μ keyfi reel veya kompleks bir sayıdır. Eş. 3.19, $\mu=0$ durumunda Eş. 3.18' e indirgenir.

Eğer $\operatorname{Re}\alpha<0$ ise o zaman Eş. 3.18 gerçekten kesirli integraller için Leibniz kuralına karşılık gelir. Ayrıca

$$ {}_aD_z^{\alpha}\left[f(z)g(z)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c\binom{\alpha}{ck+\mu}\,{}_aD_z^{\alpha-ck-\mu}f(z)\,{}_aD_z^{ck+\mu}g(z) \tag{3.20}$$

formundaa kesirli Leibniz kuralı da vardır. Burada bilinen $\binom{\alpha}{ck+\mu}$ tanımı için $\alpha,\mu\in\mathbb{C}$ ve $0<c\le 1$ dir. Eş. 3.20; $c=1$ için Eş. 3.19' a ve $c=1$, $\mu=0$ için Eş. 3.18' e indirgenir. Eş. 3.19' un özel bir durumu olarak $f(z)=1$ alınıp, $g(z), f(z)$ olarak yeniden adlandırılırsa, $\operatorname{Re}\alpha>-1,\ \alpha-\mu\notin\mathbb{Z}$ için

$$ {}_aD_z^{\alpha}f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\binom{\alpha}{k+\mu}\,{}_aD_z^{\alpha-k-\mu}(1)\,{}_aD_z^{k+\mu}f(z)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\binom{\alpha}{k+\mu}\left[\frac{1}{\Gamma(-\alpha+k+\mu)}\int_a^z (z-t)^{-\alpha+k+\mu-1}\,dt\right]{}_aD_z^{k+\mu}f(z)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\binom{\alpha}{k+\mu}\left[-\frac{(z-t)^{-\alpha+k+\mu}}{\Gamma(-\alpha+k+\mu)(-\alpha+k+\mu)}\bigg|_a^z\right]{}_aD_z^{k+\mu}f(z)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\binom{\alpha}{k+\mu}\frac{(z-a)^{-\alpha+k+\mu}}{\Gamma(-\alpha+k+\mu)(-\alpha+k+\mu)}\,{}_aD_z^{k+\mu}f(z)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\alpha!(z-a)^{-\alpha+k+\mu}}{(k+\mu)!(\alpha-k-\mu)!\Gamma(-\alpha+k+\mu)}\frac{{}_aD_z^{k+\mu}f(z)}{(-\alpha+k+\mu)}$$

olur. $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\dfrac{\pi}{\sin\pi z}$ eşitliği göz önünde bulundurulduğunda $z=k+\mu-\alpha$ olmak üzere,

$$\Gamma(k+\mu-\alpha)\Gamma(1+\alpha-k-\mu)=\frac{\pi}{\sin\pi(k+\mu-\alpha)}$$

ve

$$\sin\pi(k+\mu-\alpha)=\sin\left(\pi k-(\alpha-\mu)\pi\right)$$
$$=\sin\pi k\cos(\alpha-\mu)\pi-\cos\pi k\sin(\alpha-\mu)\pi$$
$$=(-1)^{k+1}\sin(\alpha-\mu)\pi$$

olduğundan

$$ {}_aD_z^{\alpha} f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+\mu+1)}\frac{(z-a)^{-\alpha+k+\mu}}{\pi}\frac{(-1)^{k+1}\sin(\alpha-\mu)\pi}{(-\alpha+k+\mu)}\,{}_aD_z^{k+\mu} f(z)$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)\sin(\alpha-\mu)\pi}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(z-a)^{-\alpha+k+\mu}(-1)^{k}}{\Gamma(k+\mu+1)(\alpha-k-\mu)}\,{}_aD_z^{k+\mu} f(z)$$

elde edilir.

$$ {}_aD_z^{\alpha}\left[f(z)g(z)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\binom{\alpha}{k+\mu}\,{}_aD_z^{\alpha-k-\mu} f(z)\,{}_aD_z^{k+\mu}g(z)$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\alpha!}{(\alpha-k-\mu)!(k+\mu)!\Gamma(-\alpha+k+\mu)}\int_a^z(z-t)^{-\alpha+k+\mu-1}f(t)dt\;{}_aD_z^{k+\mu}g(z)$$

olup

$$\Gamma(-\alpha+k+\mu)\Gamma(\alpha-k-\mu+1)=\frac{\pi}{(-1)^{k+1}\sin(\alpha-\mu)\pi}$$

olduğu bilindiğine göre

$$ {}_aD_z^{\alpha}\left[f(z)g(z)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+1)(-1)^{k+1}\sin(\alpha-\mu)\pi}{\Gamma(k+\mu+1)\pi}\int_a^z(z-t)^{-\alpha+k+\mu-1}f(t)dt\,{}_aD_z^{k+\mu}g(z)$$

dır. Burada $\alpha=0$ alınırsa $\sin(\alpha-\mu)\pi=-\sin\mu\pi$ olu

$$f(z)g(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(1)(-1)^k\sin\mu\pi}{(k+\mu)\Gamma(k+\mu)\pi}\int_a^z (z-t)^{k+\mu-1}\,f(t)dt\;{}_aD_z^{k+\mu}g(z)$$

$$=\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+\mu)\Gamma(k+\mu)}\Gamma(k+\mu)\,{}_aD_z^{-(k+\mu)}f(z)\,{}_aD_z^{k+\mu}g(z)$$

ve buradan

$$f(z)g(z)=\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\,\frac{{}_aD_z^{-(k+\mu)}f(z)\,{}_aD_z^{k+\mu}g(z)}{\mu+k}$$

bulunur.

$\lambda,\mu\geq 0$ için,

$${}_aD_x^{-\nu}x^{\lambda+\mu}=\frac{\Gamma(\lambda+\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+\nu+1)}x^{\lambda+\mu+\nu} \tag{3.21}$$

dir. Ayrıca, $f(x)=x^{\mu}$ ve $g(x)=x^{\lambda}$ nin çarpımına kesirli integraller için Leibniz kuralını uygulanırsa, $x>0$ ve $\nu>0$ için,

$${}_aD_x^{-\nu}\left(x^{\lambda}x^{\mu}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\nu}{k}\left[D_x^k x^{\lambda}\right]\left[{}_aD_x^{-\nu-k}x^{\mu}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(\nu+k)}{k!\Gamma(\nu)}\left[D_x^k x^{\lambda}\right]\left[{}_aD_x^{-\nu-k}x^{\mu}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(\nu+k)}{k!\Gamma(\nu)}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-k+1)}x^{\lambda-k}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+k+1)}x^{\mu+\nu+k}$$

olur ve burada,

$$\frac{(-1)^k\,\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-k+1)}=(-1)^k\,(-1)^k\,(-\lambda)_k=\frac{\Gamma(-\lambda+k)}{\Gamma(-\lambda)}$$

olmak üzere,

$${}_aD_x^{-\nu}\left(x^\lambda x^\mu\right)=x^{\mu+\nu+k}\,\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(-\lambda)\Gamma(\nu)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-\lambda+k)\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\mu+\nu+k+1)}\frac{1}{k!}$$

olup sağ tarafı $\Gamma(\mu+\nu+1)$ ile çarpıp bölersek ve Teorem 2.1 kullanırsak

$${}_aD_x^{-\nu}\left(x^\lambda x^\mu\right)=x^{\lambda+\mu+\nu}\,\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}F\left(-\lambda,\nu;\mu+\nu+1;1\right) \tag{3.22}$$

bulunur. Bu sonuç Eş. 3.21' de yerine yazılırsa

$$\frac{\Gamma(\lambda+\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+\nu+1)}x^{\lambda+\mu+\nu}=x^{\lambda+\mu+\nu}\,\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}F\left(-\lambda,\nu;\mu+\nu+1;1\right)$$

olup buradan

$$\frac{\Gamma(\lambda+\mu+1)}{\Gamma(\lambda+\mu+\nu+1)}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}F\left(-\lambda,\nu;\mu+\nu+1;1\right)$$

elde edilir. Burada $a=-\lambda$, $b=\nu$, $c=\mu+\nu+1$ alınması Eş. 2.8' i verir

4. ÇEŞİTLİ UYGULAMALAR

Örnek

${}_aD_z^{\mu}$, z değişkenine göre $\mu -$yüncü basamaktan kesirli türevi gösteren operatör olmak üzere,

$${}_aD_z^{\mu}\left\{f(z)\right\}=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\mu)}\displaystyle\int_0^z (z-\xi)^{-\mu-1} f(\xi)\,d\xi\ , & \left(\mathrm{Re}(\mu)<0\right)\\ \dfrac{d^m}{dz^m}\,{}_aD_z^{\mu-m}\left\{f(z)\right\}\ , & \left(m-1\le \mathrm{Re}(\mu)<m;\ m\in IN\right)\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [1]. Buna göre,

$${}_aD_z^{\mu}\left\{z^{\lambda}\right\}=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}z^{\lambda-\mu} \qquad , \qquad \mathrm{Re}(\lambda>-1) \tag{4.1}$$

olup buradan,

$${}_aD_z^{\lambda-\mu}\left\{z^{\lambda-1}\prod_{j=1}^{r}\left(1-x_jz\right)^{-\alpha_j}\right\}=\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)}z^{\mu-1}F_D^{(r)}\left[\lambda,\alpha_1,\ldots,\alpha_r;\mu;x_1z,\ldots,x_rz\right] \tag{4.2}$$

yazılabilir[1]. Burada $F_D^{(r)}$, r kompleks değişkenli dördüncü çeşit Lauricella hipergeometrik fonksiyonudur.

Eş. 2.11' in her iki yanı $t^{\lambda-1}$ ile çarpılıp $D_t^{\lambda-\mu}$ kesirli türev operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}{}_aD_t^{\lambda-\mu}\left\{t^{\lambda-1}\prod_{j=1}^{r}(1-x_jt)^{-\alpha_j}\right\}&={}_aD_t^{\lambda-\mu}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}\left(x_1,\ldots,x_r\right)t^{n+\lambda-1}\right\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}\left(x_1,\ldots,x_r\right){}_aD_t^{\lambda-\mu}\left\{t^{n+\lambda-1}\right\}\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitliğin sol yanında Eş. 4.2, sağ yanında da Eş. 4.1 göz önünde bulundurulursa,

$$\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu)} t^{\mu-1} F_D^{(r)}\left[\lambda,\alpha_1,...,\alpha_r;\mu;x_1 t,...,x_r t\right]=\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r)\frac{\Gamma(n+\lambda)}{\Gamma(n+\mu)} t^{n+\mu-1}$$

olup burada da $(\lambda)_k=\dfrac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}$ özelliğinin kullanılması ile,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{(\mu)_n} g_n^{(\alpha_1,...,\alpha_r)}(x_1,...,x_r)t^n=F_D^{(r)}\left[\lambda,\alpha_1,...,\alpha_r;\mu;x_1 t,...,x_r t\right] \tag{4.3}$$

$$\left(|t|<\min\left\{|x_1|^{-1},...,|x_r|^{-1}\right\}\right)$$

elde edilir [11]. Eş. 4.3' de $\lambda=\mu$ alınırsa bu bağıntı, Eş. 2.11 doğurucu fonksiyonuna indirgenir.

Eş. 4.3' de λ ve μ parametrelerinin bir çok uygun seçimi ile çok değişkenli Lagrange polinomlarının başka doğurucu fonksiyonları da bulunabilir. Örneğin,

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\left\{(\lambda)_n\left(\frac{t}{\lambda}\right)^n\right\}=t^n \quad ; \qquad \left(n\in IN_0=IN\cup\{0\}\right)$$

ve

$$\lim_{|a|\to\infty}\left\{F_D^{(r)}\left[a,b_1,...,b_r;c;\frac{z_1}{a},...,\frac{z_r}{a}\right]\right\}$$

$$=\lim_{|a|\to\infty}\left\{\sum_{m_1,...,m_r=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_1+...+m_r}(b_1)_{m_1}...(b_r)_{m_r}}{(c)_{m_1+...+m_r}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}...\frac{z_r^{m_r}}{m_r!}\frac{1}{a^{m_1+...+m_r}}\right\}$$

$$= \sum_{m_1,\ldots,m_r=0}^{\infty} \frac{(b_1)_{m_1}\ldots(b_r)_{m_r}}{(c)_{m_1+\ldots+m_r}} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\ldots\frac{z_r^{m_r}}{m_r!}$$

$$= \Phi_2^{(r)}\left[b_1,\ldots,b_r;c;z_1,\ldots,z_r\right]$$

oldukları göz önüne alınsın. Burada $\Phi_2^{(r)}$, r kompleks değişkenli konfluent hipergeometrik fonksiyonudur. Eğer Eş. 4.3' de $t \to \frac{t}{\lambda}$ ve $|\lambda| \to \infty$ alınırsa, çok değişkenli Lagrange polinomları için başka bir lineer doğurucu fonksiyonlar sınıfı,

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)}(x_1,\ldots,x_r)\frac{t^n}{(\mu)_n} = \Phi_2^{(r)}\left[\alpha_1,\ldots,\alpha_r;\mu;x_1t,\ldots,x_rt\right]$$

olarak elde edilir [11].

Örnek

$$(1-x)^2 D^2w - 2xDw + \alpha(\alpha+1)w = 0$$

Legendre denkleminin bir çözümü $P_\alpha(x)$ Legendre fonksiyonudur. Burada x reel ve $|x|<1$ dır. $P_\alpha(x)$ hipergeometrik fonksiyon cinsinden,

$$P_\alpha(x) = F\left(\alpha+1,-\alpha,1;\frac{1}{2}(1-x)\right) \qquad , \qquad |1-x|<2 \tag{4.4}$$

olarak verilir. Eğer α negatif olmayan bir n tamsayısı ise, o zaman $P_\alpha(x)$,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D_x^n \left(x^2-1\right)^n$$

klasik Rodrigues formülü ile ifade edilen $P_n(x)$ Legendre polinomudur. Keyfi α için benzer bir ifade elde edilir. Gerçekten,

$$x^{\alpha}(1-x)^{\alpha} = x^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{\alpha}{k} x^k$$

$$= x^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)} x^{k+\alpha}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{k!} x^{k+\alpha} \quad , \quad |x|<1 \tag{4.5}$$

olup, Eş. 4.5 ifadesi terim terime diferensiyellenirse ve

$${}_0D_x^{\alpha} x^{\alpha+k} = \frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k+1)} x^k$$

ifadesi kullanılırsa,

$${}_0D_x^{\alpha}[x^{\alpha}(1-x)^{\alpha}] = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{k!}\frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(k+1)} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(k+1)}\frac{x^k}{k!}$$

olur. Eşitliğin her iki yanı $\Gamma(\alpha+1)$ ile çarpılıp bölünürse

$${}_0D_x^{\alpha}[x^{\alpha}(1-x)^{\alpha}] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+1+k)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)}\frac{x^k}{k!}$$

elde edilir. Burada $\Gamma\left(k+1\right)=k!=\left(1\right)_k=\dfrac{\Gamma\left(k+1\right)}{\Gamma\left(1\right)}$ eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
{}_0D_x^{\alpha}[x^{\alpha}\left(1-x\right)^{\alpha}] &= \Gamma\left(\alpha+1\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\alpha\right)_k\left(\alpha+1\right)_k}{\left(1\right)_k}\frac{x^k}{k!} \\
&= \Gamma\left(\alpha+1\right)F\left(\alpha+1,-\alpha,1;x\right)
\end{aligned}
$$

dır. Eş. 4.4' de bu son eşitlik göz önüne alınarak,

$$
\begin{aligned}
P_{\alpha}\left(1-2x\right) &= F\left(\alpha+1,-\alpha,1;\frac{1}{2}\left(1-\left(1-2x\right)\right)\right) \quad , \ \left|x\right|<1 \\
&= F\left(\alpha+1,-\alpha,1;x\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\,{}_0D_x^{\alpha}\left[x^{\alpha}\left(1-x\right)^{\alpha}\right]
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada $t=1-2x$ dönüşümü yapılırsa

$$
\begin{aligned}
P_{\alpha}\left(t\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\,{}_1D_t^{\alpha}\left[\left(\frac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\left(1-\left(\frac{1-t}{2}\right)\right)^{\alpha}\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+1\right)}\,{}_1D_t^{\alpha}\left[\frac{1}{2^{\alpha}}\left(1-t\right)^{\alpha}\left(1+t\right)^{\alpha}\right] \\
&= \frac{1}{2^{\alpha}\Gamma\left(\alpha+1\right)}\,{}_1D_t^{\alpha}\left(1-t^2\right)^{\alpha}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Örnek

$f(t)=t^{\lambda}$, $\lambda\geq 0$ ve $g(t)=\left(1-t\right)^{-\alpha}$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{-\nu}\left[t^{\lambda}(1-t)^{-\alpha}\right] &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\nu}{k}\left[D_t^k(1-t)^{-\alpha}\right]\left[{}_aD_t^{-\nu-k}t^{\lambda}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-\nu+1)}{\Gamma(-\nu-k+1)k!}\left[D_t^k(1-t)^{-\alpha}\right]\left[{}_aD_t^{-\nu-k}t^{\lambda}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\,\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)k!}\left[D_t^k(1-t)^{-\alpha}\right]\left[{}_aD_t^{-\nu-k}t^{\lambda}\right]
\end{aligned}
$$

dır. Burada

$$
D_t^k(1-t)^{-\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)}(1-t)^{-\alpha-k}
$$

ve

$$
{}_aD_t^{-\nu-k}t^{\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\nu+k+1)}t^{\lambda+\nu+k}
$$

olup,

$$
{}_aD_t^{-\nu}\left[t^{\lambda}(1-t)^{-\alpha}\right] = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\nu)}t^{\lambda+\nu}(1-t)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\lambda+\nu+k+1)k!}\left(\frac{t}{t-1}\right)^k \tag{4.6}
$$

dır. Eş. 4.6 , $\Gamma(\lambda+\nu+1)$ ile çarpılıp bölünürse

$$
\begin{aligned}
{}_aD_t^{-\nu}\left[t^{\lambda}(1-t)^{-\alpha}\right] &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\nu+1)}t^{\lambda+\nu}(1-t)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\nu+k)\Gamma(\lambda+\nu+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\nu)\Gamma(\lambda+\nu+k+1)k!}\left(\frac{t}{t-1}\right)^k \\
&= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\nu+1)}t^{\lambda+\nu}(1-t)^{-\alpha}F\left(\nu,\alpha,\lambda+\nu+1;\frac{t}{t-1}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

5. g-JACOBI FONKSİYONLARI ve F-GAUSS FONKSİYONLARI

5.1. g- Jacobi fonksiyonları

Klasik Jacobi polinomları

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-2)^n (n!)^{-1} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right] , n \in IN \tag{5.1}$$

şeklindeki Rodrigues formülü ile tanımlanır. Burada $\alpha > -1$, $\beta > -1$ dir [7]. Bu bölümün amacı, Eş. 5.1 Jacobi polinomlarına, Eş. 3.3 Riemann-Liouville operatörünü uygulayarak ve $n \in IN$ yerine $\nu \in \mathbb{R}$ yazarak bu poinomları genişletmektir.

Tanım5.1

g-Jacobi fonksiyonları,

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(t) = (-2)^{-\nu} \Gamma(\nu+1)^{-1} (1-t)^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \; {}_aD_t^\nu \left[(1-t)^{\nu+\alpha}(1+t)^{\nu+\beta}\right] , \quad \nu > 0 \tag{5.2}$$

formülü ile tanımlanır. Burada $\alpha > -1$, $\beta > -1$ ve ${}_aD_t^\nu$, Eş. 3.3 Riemann-Liouville kesirli diferensiyel operatörüdür [9].

Aşağıda klasik Jacobi polinomlarının özelliklerinin analoğu olan g-Jacobi fonksiyonlarının bazı özellikleri verilmektedir.

Teorem5.1

g-Jacobi fonksiyonları için

$$P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(t) = 2^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu+\alpha}{\nu-k} \binom{\nu+\beta}{k} (t-1)^{k} \, (t+1)^{\nu-k} \tag{5.3}$$

dır [5]. Burada

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(1+\alpha-\beta)} \tag{5.4}$$

gösterimi reel parametreli binom katsayılarıdır.

İspat

Eş. 5.2' de, Eş. 3.20 Leibniz kuralı uygulanırsa ($(1+\tau)^{\nu+\beta}$ nın $[0,t]$ de bütün türevleri sürekli olduğundan)

$$P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{(-2)^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)} (1-t)^{-\alpha} \, (1+t)^{-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu}{k} \left\{ D_t^k \left[(t+1)^{\nu+\beta} \right] \right\} \left\{ {}_0D_t^{\nu-k} \left[(1-t)^{\nu+\alpha} \right] \right\}$$

elde edilir. Burada

$$(x+y)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^{k} y^{\alpha-k} \tag{5.5}$$

genelleştirilmiş binom teoreminden yararlanarak

$$
{}_0D_t^{\nu-k}\left[(1-t)^{\nu+\alpha}\right]=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\nu+\alpha}{r}(-1)^{\nu+\alpha-r}\,{}_0D_t^{\nu-k}\left[t^{\nu+\alpha-r}\right]
$$

$$
=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\nu+\alpha}{r}(-1)^{\nu+\alpha-r}\frac{\Gamma(\nu+\alpha-r+1)}{\Gamma(\nu+k-r+1)}t^{\alpha+k-r}
$$

yazılabilir. Eş. 3.4, Eş. 5.4 ve Eş. 5.5’ den

$$
P_\nu^{(\alpha,\beta)}(t)=\frac{(-2)^{-\nu}}{\Gamma(\nu+1)}(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu-k+1)}\frac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\beta-k+1)}(t+1)^{\nu+\beta-r}\right.
$$

$$
\left.\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(\nu+\alpha-r+1)}(-1)^{\nu+\alpha-r}\frac{\Gamma(\nu+\alpha-r+1)}{\Gamma(\nu+k-r+1)}t^{\alpha+k-r}\right\}
$$

olup fonksiyonun sağ yanı $\Gamma(\alpha+k+1)$ ile çarpılıp bölünürse

$$
P_\nu^{(\alpha,\beta)}(t)=2^{-\nu}(t-1)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+\beta+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+\beta-k+1)}(t+1)^{\nu-k}\frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-k+1)\Gamma(\alpha+k+1)}
$$

$$
\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(\alpha+k-r+1)}t^{\alpha+k-r}(-1)^{r}
$$

$$
=2^{-\nu}(t-1)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\binom{\nu+\beta}{k}(t+1)^{\nu-k}\binom{\nu+\alpha}{\nu-k}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\alpha+k}{r}t^{\alpha+k-r}(-1)^{r}\right\}
$$

$$
=2^{-\nu}(t-1)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu+\beta}{k}\binom{\nu+\alpha}{\nu-k}(t+1)^{\nu-k}(t-1)^{\alpha+k}
$$

elde edilir.

Jacobi polinomları için iyi bilinen bir çok özellik genel durumda g-Jacobi fonksiyonları için de verilebilir. Örneğin Eş. 5.3 kullanılarak g-Jacobi fonksiyonlarının kullanışlı farklı bir gösterimi elde edilir. Bunun için önce aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma5.1 (Vandermonde konvolüsyon formülü) $\alpha \in IR$, $\beta \in IR$, $r \in IN$ için

$$\sum_{s=0}^{r} \binom{\alpha}{s}\binom{\beta}{r-s} = \binom{\alpha+\beta}{r} \tag{5.6}$$

dir.

İspat:

$$(1+x)^{\beta+\alpha} = (1+x)^{\beta}(1+x)^{\alpha}$$

cebirsel özdeşliği ile Eş. 5.5 binom teoremi kullanılarak parantez içindeki terimler genişletildiğinde ve x' in kuvvetlerinin katsayıları karşılaştırıldığında istenilen sonuç elde edilir. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
(1+x)^{\beta+\alpha} &= (1+x)^{\beta}(1+x)^{\alpha} \\
\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\beta+\alpha}{r}x^{r} &= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{\beta}{r}x^{r}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{\alpha}{s}x^{s} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{\beta}{r}\binom{\alpha}{s}x^{r+s} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{r}\binom{\beta}{r-s}\binom{\alpha}{s}x^{r}
\end{aligned}$$

olup buradan,

$$\binom{\beta+\alpha}{r} = \sum_{s=0}^{r}\binom{\beta}{r-s}\binom{\alpha}{s}$$

eşitliği elde edilir. Bu da istenilendir.

Teorem5.2

g- Jacobi fonksiyonları için

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(t)=\binom{\nu+\alpha}{\nu}F\left(-\nu,\nu+\alpha+\beta+1;\alpha+1;\frac{1-t}{2}\right) \tag{5.7}$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu}{k}\frac{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta+k)}{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(1+\alpha+\nu)}{\Gamma(1+\alpha+k)}\left(\frac{t-1}{2}\right)^k \tag{5.8}$$

dir [9]. Burada $F\left(a,b;c;t\right)$, Eş. 5.13 Gauss hipergeometrik fonksiyonudur.

İspat

$t+1=\left(t-1\right)+2$ şeklinde yazılarak ve Eş. 5.5 binom teoreminden yararlanarak,

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(t)=2^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu+\alpha}{\nu-k}\binom{\nu+\beta}{k}\left(t-1\right)^k\left(\left(t-1\right)+2\right)^{\nu-k}$$

$$=2^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\binom{\nu+\alpha}{\nu-k}\binom{\nu+\beta}{k}\left(t-1\right)^k\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\nu-k}{r}\left(t-1\right)^r 2^{\nu-k-r}\right\}$$

$$=2^{-\nu}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{r}\binom{\nu+\alpha}{\nu-k}\binom{\nu+\beta}{k}\left(t-1\right)^k\binom{\nu-k}{r-k}\left(t-1\right)^{r-k}2^{\nu-k-r+k}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{t-1}{2}\right)^r\sum_{k=0}^{r}\binom{\nu+\alpha}{\nu-k}\binom{\nu+\beta}{k}\binom{\nu-k}{r-k}\right\}$$

elde edilir. Eş. 5.4’ den

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}\left(t\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{t-1}{2}\right)^r\sum_{k=0}^{r}\frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu-k+1)\Gamma(\alpha+k+1)}\binom{\nu+\beta}{k}\frac{\Gamma(\nu-k+1)}{\Gamma(r-k+1)\Gamma(\nu-r+1)}\right\}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{t-1}{2}\right)^r\frac{\Gamma(1+\nu+\alpha)}{\Gamma(1+\nu-r)}\sum_{k=0}^{r}\binom{\nu+\beta}{k}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha+k)\Gamma(1+r-k)}\right\}$$

bulunur. Bulduğumuz sonuç $\Gamma(1+r+\alpha)$ ile çarpılıp bölünürse,

$$P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(t)=\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{t-1}{2}\right)^{r}\frac{\Gamma(1+\nu+\alpha)}{\Gamma(1+\nu-r)\Gamma(1+r+\alpha)}\sum_{k=0}^{r}\binom{\nu+\beta}{k}\binom{r+\alpha}{r-k}\right\}$$

elde edilir. İçerideki sonlu toplamda Vandermonde konvolüsyon formülü ve Eş. 5.4 binom katsayıları kullanılırsa

$$P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(t)=\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{t-1}{2}\right)^{r}\frac{\Gamma(1+\nu+\alpha)}{\Gamma(1+\nu-r)\Gamma(1+\alpha+r)}\binom{\nu+\beta+r+\alpha}{k}\right\}$$

olup, eşitliğin sağ yanı $\Gamma(1+\nu)$ ile çarpılıp bölünürse

$$\begin{aligned}P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(t)&=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\nu+\alpha)}{\Gamma(1+\nu-r)\Gamma(1+\alpha+r)}\frac{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta+r)}{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta)\Gamma(1+r)}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{t-1}{2}\right)^{r}\\&=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(1+\nu-r)}\frac{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta+r)}{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(1+\nu+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+r)}\left(\frac{t-1}{2}\right)^{r}\\&=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\nu}{r}\frac{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta+r)}{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(1+\alpha+\nu)}{\Gamma(1+\alpha+r)}\left(\frac{t-1}{2}\right)^{r}\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak, Eş. 5.4 , Eş. 2.2 ve Eş. 2.6' dan

$$\begin{aligned}P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(t)&=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+1)}{r!\Gamma(\nu-r+1)}\frac{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta+r)}{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta)}\\&\qquad\times\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)}\frac{\Gamma(\alpha+1+\nu)}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{1-t}{2}\right)^{r}(-1)^{r}\\&=\frac{\Gamma(\nu+\alpha+1)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\alpha+1)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-\nu+r)}{\Gamma(-\nu)}\frac{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta+r)}{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta)}\\&\qquad\times\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+r+1)}\left(\frac{1-t}{2}\right)^{r}\frac{1}{r!}\end{aligned}$$

$$=\binom{\nu+\alpha}{\nu}F\left(-\nu,1+\nu+\alpha+\beta;\alpha+1;\frac{1-t}{2}\right)$$

elde edilir.

Teorem5.3 (Diferensiyel denklem)

g-Jacobi fonksiyonları, ikinci mertebeden

$$(1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2}+\left[\beta-\alpha-\left(\alpha+\beta+2\right)t\right]\frac{dy}{dt}+\nu\left(\nu+\alpha+\beta+1\right)y=0 \tag{5.9}$$

veya

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(1-t\right)^{\alpha+1}\left(1+t\right)^{\beta+1}y'\right\}+\nu\left(\nu+\alpha+\beta+1\right)\left(1-t\right)^{\alpha}\left(1+t\right)^{\beta}y=0 \tag{5.10}$$

şeklindeki lineer homogen diferensiyel denklemini sağlar [9].

İspat

$F\left(a,b;c;x\right)$ Gauss hipergeometrik fonksiyonu,

$$x\left(1-x\right)y''+\left[c-\left(a+b+1\right)x\right]y'-aby=0$$

Gauss diferensiyel denklemini sağlar. Buna göre, $F\left(-\nu,\nu+\alpha+\beta+1;1+\alpha;x\right)$ hipergeometrik fonksiyonu da

$$x\left(1-x\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\alpha+1-\left(\alpha+\beta+2\right)x\right]\frac{dy}{dx}+\nu\left(\nu+\alpha+\beta+1\right)y=0 \tag{5.11}$$

denklemini sağlar. Gerçekten,

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\alpha+1-(\alpha+\beta+2)x\right]\frac{dy}{dx}+\nu(\nu+\alpha+\beta+1)y=0$$

denkleminden, parametreler arasında

$$\alpha+1=c$$
$$\alpha+\beta+2=a+b+1$$
$$\nu(\nu+\alpha+\beta+1)=-ab$$

bağıntısı vardır. Buradan

$$a=-\nu$$
$$b=\nu+\alpha+\beta+1$$
$$c=\alpha+1$$

olup, denkleme karşılık gelen çözüm

$$\begin{aligned} y(x) &= AF\left(a,b;c;x\right)+B\,x^{1-c}F\left(a-c+1,b-c+1;2-c;x\right) \\ &= AF\left(-\nu,\nu+\alpha+\beta+1;\alpha+1;x\right)+B\,x^{-\alpha}F\left(-\nu-\alpha-1,\nu+\beta+1;1-\alpha;x\right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece $F\left(-\nu,\nu+\alpha+\beta+1;1+\alpha;x\right)$ nin Eş. 5.11 denkleminin çözümlerinden biri olduğu görülür. Burada $x=\dfrac{1-t}{2}$ alınıp $\dbinom{\nu+\alpha}{\nu}$ ile çarpılırsa Eş. 5.7 ile verilen $P_\nu^{(\alpha,\beta)}(t)$ elde edilir. O halde Eş. 5.11' de $x=\dfrac{1-t}{2}$ dönüşümü yapıldığında, türevler

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=-2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(-2\frac{dy}{dt}\right)=-2\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=4\frac{d^2y}{dt^2}$$

olup, bunların Eş. 5.11 denkleminde yerine yazılmasıyla

$$\left(\frac{1-t}{2}\right)\left(\frac{1+t}{2}\right)4\frac{d^2y}{dt^2}+\left[\alpha+1-(\alpha+\beta+2)\left(\frac{1-t}{2}\right)\right]\left(-2\frac{dy}{dt}\right)+\nu(\nu+\alpha+\beta+1)\,y=0$$

$$\left(1-t^2\right)\frac{d^2y}{dt^2}+\left[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)t\right]\frac{dy}{dt}+\nu(\nu+\alpha+\beta+1)\,y=0$$

denklemi elde edilir ki böylece $P_\nu^{(\alpha,\beta)}(t)$, Eş. 5.9 denklemini sağlar. Bu denklem $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ ile çarpıldığında Eş. 5.10 şeklinde yazılabilir [10].

Teorem5.4

g-Jacobi fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar [9]:

(i) $\lim\limits_{\nu\to n}P_\nu^{(\alpha,\beta)}(t)=P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$;

(ii) $P_\nu^{(\alpha,\beta)}(-t)=(-1)^\nu P_\nu^{(\beta,\alpha)}(t)$;

(iii) $P_\nu^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{\nu+\alpha}{\nu}$;

(iv) $P_\nu^{(\alpha,\beta)}(-1)=(-1)^\nu\binom{\nu+\beta}{\nu}$;

(v) $\frac{d}{dt}P_\nu^{(\alpha,\beta)}(t)=\frac{1}{2}(\nu+\alpha+\beta+1)\,P_{\nu-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(t)$

İspat

(i) Eş. 5.7 formülünden,

$$\lim_{\nu\to n} P_\nu^{(\alpha,\beta)}(t) = \lim_{\nu\to n}\binom{\nu+\alpha}{\nu} F\left(-\nu,\nu+\alpha+\beta+1;1+\alpha;\frac{1-t}{2}\right)$$
$$=\binom{n+\alpha}{n} F\left(-n,n+\alpha+\beta+1;1+\alpha;\frac{1-t}{2}\right) = P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$$

dir.

(ii) Eş. 5.3 formülünden,

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(-t) = 2^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu+\alpha}{\nu-k}\binom{\nu+\beta}{k}(-t-1)^k(-t+1)^{\nu-k}$$
$$=(-1)^\nu 2^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu+\beta}{k}\binom{\nu+\alpha}{\nu-k}(t-1)^{\nu-k}(t+1)^k$$
$$=(-1)^\nu P_\nu^{(\beta,\alpha)}(t)$$

dır.

(iii) Eş. 5.3 formülünden,

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(t) = 2^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu+\alpha}{\nu-k}\binom{\nu+\beta}{k}(t-1)^k(t+1)^{\nu-k}$$
$$=2^{-\nu}\binom{\nu+\alpha}{\nu}(t+1)^\nu + 2^{-\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\nu+\alpha}{\nu-k}\binom{\nu+\beta}{k}(t-1)^k(t+1)^{\nu-k}$$

olup,

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(1) = 2^{-\nu}\binom{\nu+\alpha}{\nu}2^\nu = \binom{\nu+\alpha}{\nu}$$

(iv) Burada (ii) ve (iii) den yararlanarak

$$P_\nu^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^\nu P_\nu^{(\beta,\alpha)}(1)$$
$$= (-1)^\nu \binom{\nu+\beta}{\nu}$$

dır.

(v) Eş. 5.8' den

$$\frac{d}{dt}P_\nu^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu}{k}\frac{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta+k)}{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(1+\alpha+\nu)}{\Gamma(1+\alpha+k)}\left(\frac{t-1}{2}\right)^k\right]$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu}{k}\frac{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta+k)}{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(1+\alpha+\nu)}{\Gamma(1+\alpha+k)}\frac{d}{dt}\left(\frac{t-1}{2}\right)^k$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\nu}{k}\frac{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta+k)}{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(1+\alpha+\nu)}{\Gamma(1+\alpha+k)}\frac{k}{2}\left(\frac{t-1}{2}\right)^{k-1}$$

ifadesinde $k \to k+1$ alınırsa

$$\frac{d}{dt}P_\nu^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu}{k+1}\frac{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta+k+1)}{\Gamma(1+\nu+\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(1+\alpha+\nu)}{\Gamma(1+\alpha+k+1)}\frac{k+1}{2}\left(\frac{t-1}{2}\right)^k$$

olup, eşitliğin sağ yanını $(\nu+\alpha+\beta+1)$ ile çarpıp bölersek

$$\frac{d}{dt}P_\nu^{(\alpha,\beta)}(t) = \frac{1}{\nu\,\Gamma(\nu)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\nu\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(k+2)\Gamma(\nu-k)}\frac{\Gamma(2+\nu+\alpha+\beta+k)}{\Gamma(2+\nu+\alpha+\beta)}$$
$$\times\frac{(1+\nu+\alpha+\beta)\Gamma(1+\alpha+\nu)}{\Gamma(2+\alpha+k)}\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{t-1}{2}\right)^k$$
$$= \frac{1}{2}(\nu+\alpha+\beta+1)\frac{1}{\Gamma(\nu)}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu-1}{k}\frac{\Gamma(2+\nu+\alpha+\beta+k)}{\Gamma(2+\nu+\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(1+\alpha+\nu)}{\Gamma(2+\alpha+k)}\left(\frac{t-1}{2}\right)^k$$

$$=\frac{1}{2}\left(\nu+\alpha+\beta+1\right)P_{\nu-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(t)$$

dır.

Eğer ν bir doğal sayı olursa g-Jacobi fonksiyonları, klasik Jacobi polinomlarına indirgenir ve onların özellikleri değişmeden kalır. Bu yüzden, şu şekilde sonuçlandırabiliriz ki g-Jacobi fonksiyonları, klasik Jacobi polinomlarının bir genişlemesidir.

5.2. F-Gauss fonksiyonları

$$x\left(1-x\right)y''+\left[c-\left(a+b+1\right)x\right]y'-aby=0 \tag{5.12}$$

Gauss hipergeometrik diferensiyel denkleminin bir çözümü

$$F\left(a,b;c;x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{x^k}{k!} \quad , \qquad |x|<1 \tag{5.13}$$

Gauss hipergeometrik fonksiyonudur[12,13].

Bu kısımdaki amaç Eş. 5.12 diferensiyel denklemini kesirli basamağa genişleterek Eş. 5.13' ü genellemek ve F Gauss hipergeometrik fonksiyonunun bir genellemesinin Eş. 5.12' in bir çözümü olduğunu göstermektir.

Tanım5.2

Kesirli Gauss veya F-Gauss hipergeometrik denklemi,

$$Gy=t^{\nu}\left(1-t^{\nu}\right)y^{(2\nu)}+\left[c-\left(a+b+1\right)t^{\nu}\right]y^{(\nu)}-aby=0 \tag{5.14}$$

lineer homogen kesirli diferensiyel denklemi ile tanımlanır. Burada

$$y^{(\mu)} := D_y^{\mu} \quad , \quad 0 < \mu \leq 1$$

dir [9].

Teorem5.5

$$y(t) = y_0 t^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k} \frac{g_j(\rho)}{f_{j+1}(\rho)} t^{k\nu} \quad , \quad 0 < \nu \leq 1 \tag{5.15}$$

serisi, Eş. 5.14 denkleminin bir çözümüdür. Burada

$$f_k(\rho) := \frac{\Gamma(1+\rho+k\nu)}{\Gamma(1+\rho+(k-2)\nu)} + c\frac{\Gamma(1+\rho+k\nu)}{\Gamma(1+\rho+(k-1)\nu)} \tag{5.16}$$

$$g_k(\rho) := \frac{\Gamma(1+\rho+k\nu)}{\Gamma(1+\rho+(k-2)\nu)} + (a+b+1)\frac{\Gamma(1+\rho+k\nu)}{\Gamma(1+\rho+(k-1)\nu)} + ab \tag{5.17}$$

ve $\rho > -1$ için

$$f_0(\rho) = \frac{\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(1+\rho-2\nu)} + c\frac{\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(1+\rho-\nu)} = 0 \tag{5.18}$$

denklemi sağlanır [9].

İspat

Eş. 5.14’ ün bir çözümü

$$y(t) := t^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty} y_k t^{k\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} y_k t^{\rho+k\nu} \qquad , \qquad \rho > -1 \tag{5.19}$$

formunda olsun. Burada Eş. 3.4' den yararlanarak

$$D^{\nu} y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \frac{\Gamma(1+\rho+k\nu)}{\Gamma(1+\rho+k\nu-\nu)} t^{\rho+k\nu-\nu}$$

$$D^{2\nu} y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \frac{\Gamma(1+\rho+k\nu)}{\Gamma(1+\rho+(k-1)\nu)} \frac{\Gamma(1+\rho+\nu(k-1))}{\Gamma(1+\rho+(k-2)\nu)} t^{\rho+k\nu-2\nu}$$

olup bunlar Eş. 5.14 denkleminde yerlerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} Gy(t) = {} & \sum_{k=0}^{\infty} y_k \frac{\Gamma(1+\rho+k\nu)}{\Gamma(1+\rho+(k-2)\nu)} t^{\rho+(k-1)\nu} - \sum_{k=0}^{\infty} y_k \frac{\Gamma(1+\rho+k\nu)}{\Gamma(1+\rho+(k-2)\nu)} t^{\rho+k\nu} \\ & + c\sum_{k=0}^{\infty} y_k \frac{\Gamma(1+\rho+k\nu)}{\Gamma(1+\rho+(k-1)\nu)} t^{\rho+(k-1)\nu} - (a+b+1)\sum_{k=0}^{\infty} y_k \frac{\Gamma(1+\rho+k\nu)}{\Gamma(1+\rho+(k-1)\nu)} t^{\rho+k\nu} - ab\sum_{k=0}^{\infty} y_k t^{\rho+k\nu} \end{aligned}$$

elde edilir. Toplam terimler yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} Gy(t) = {} & \sum_{k=0}^{\infty} y_k \left[\frac{\Gamma(1+\rho+k\nu)}{\Gamma(1+\rho+(k-2)\nu)} + c\frac{\Gamma(1+\rho+k\nu)}{\Gamma(1+\rho+(k-1)\nu)} \right] t^{\rho+(k-1)\nu} \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} y_k \left[\frac{\Gamma(1+\rho+k\nu)}{\Gamma(1+\rho+(k-2)\nu)} + (a+b+1)\frac{\Gamma(1+\rho+k\nu)}{\Gamma(1+\rho+(k-1)\nu)} + ab \right] t^{\rho+k\nu} \\ = {} & y_0 f_0(\rho) t^{\rho-\nu} + \sum_{k=0}^{\infty} [y_{k+1} f_{k+1} - y_k g_k] t^{\rho+k\nu} \end{aligned}$$

olur. Burada f_k ve g_k sırasıyla, Eş. 5.16 ve Eş. 5.17' deki şekildedir. $y_0 \neq 0$ olduğunda $y_0 f_0(\rho) = 0$ olması için; ρ, Eş. 5.18' i sağlayacak şekilde seçilmek zorundadır. Böylece

$$y_{k+1} = \frac{g_k}{f_{k+1}} y_k = \prod_{j=0}^{k} \frac{g_j}{f_{j+1}} y_0$$

için görülür ki,

$$Gy(t) = 0$$

dır.

Kesirli Gauss hipergeometrik fonksiyonunun ismini doğrulamak için, Eş. 5.15 ve Eş. 5.13 klasik hipergeometrik serileri arasındaki ilişkiyi görelim. $\nu = 1$ olsun. Eş. 5.18' den

$$\frac{\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(\rho-1)} + c\frac{\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(\rho)} = 0$$

sağlanır. Ayrıca Eş. 2.2' den

$$\frac{\rho\Gamma(\rho)}{(\rho-2)\Gamma(\rho-2)} + c\frac{\rho\Gamma(\rho)}{\Gamma(\rho)} = 0$$

$$\frac{\rho(\rho-1)(\rho-2)(\rho-3)!}{(\rho-2)(\rho-3)!} + c\rho = 0$$

$$\rho(\rho-1) + cp = 0$$

$$\rho(\rho-1+c) = 0$$

olup,

$\rho = 0$ veya $\rho = 1 - c$

dır. Eş. 5.15’ de $\nu = 1$, $\rho = 0$ ve $y_0 = 1$ alınırsa, Eş. 5.13 elde edilir. Böylece aşağıdaki tanım yazılabilir.

Tanım5.3

Kesirli Gauss veya F- Gauss hipergeometrik fonksiyonları

$$ {}^{\nu}F\left(a,b;c;t\right) = y(t) \tag{5.20} $$

olarak tanımlanır. Burada $y(t)$, $y_0 = 1$ için Teorem5.5’ deki gibi tanımlanır [9].

Sonuç 5.1

Eş. 2.6 Gauss hipergeometrik fonksiyonu, Eş. 5.20 F-Gauss hipergeometrik fonksiyonunun bir özel durumudur.

6. KESİRLİ BASAMAKTAN LAGUERRE FONKSİYONLARI VE KUMMER FONKSİYONLARI

6.1. Laguerre Fonksiyonları

Klasik Laguerre polinomları

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^{x} \frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+\alpha} e^{-x} \right] \tag{6.1}$$

şeklindeki Rodrigues formülü ile tanımlanır. Burada $n \in IN_0$ ve $\alpha > -1$ dir [7]. Bu kısımda, Eş. 6.1' e Riemann-Liouville operatörü uygulanarak, Laguerre fonksiyonları olarak bilinen fonksiyonlar tanıtılacaktır[7,12].

Tanım6.1

Laguerre fonksiyonu

$$L_\nu^{(\alpha)}(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} e^{t} t^{-\alpha} \, {}_aD_t^{\nu} \left[e^{-t} t^{\nu+\alpha} \right] \tag{6.2}$$

formülü ile tanımlanır. Burada $\alpha > -1$ ve $n-1 < \nu < n$ $(n \in IN)$ dir [21].

Teorem6.1

$\alpha > -1$, $n \in IN$ ve $n-1 < \nu < n$ için, Laguerre fonksiyonları

$$L_\nu^{(\alpha)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu+\alpha}{\nu-k} \frac{(-t)^k}{k!} \tag{6.3}$$

serisi ile açık olarak verilir [21]

İspat

e^{-t} , $[0,t]$ aralığında sürekli ve diferensiyellenebilir olduğundan, Eş. 3.20 Leibniz kuralının Eş. 6.2' deki kesirli türeve uygulanmasıyla,

$$
\begin{aligned}
L_{\nu}^{(\alpha)}(t) &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} e^{t} t^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu}{k} \left\{ D_t^k \left[e^{-t} \right] \right\} \left\{ {}_0D_t^{\nu-k} \left[t^{\nu+\alpha} \right] \right\} \\
&= \frac{1}{\nu!} e^{t} t^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!} (-1)^k e^{-t} \frac{(\nu+\alpha)!}{(\nu+\alpha-\nu+k)!} t^{\alpha+k}
\end{aligned}
$$

bulunur. Reel parametreli binom katsayılarının

$$
\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(1+\alpha-\beta)}
$$

şeklindeki ifadesinden [6]

$$
\begin{aligned}
L_{\nu}^{(\alpha)}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\nu+\alpha)!}{(\nu-k)!(\alpha+k)!} \frac{t^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\nu+\alpha}{\nu-k} \frac{(-t)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Eş. 6.3 kullanılarak Laguerre fonksiyonlarının kullanışlı ifadeleri elde edilebilir.

Teorem6.2

Eğer $\alpha > -1$, $n \in IN$ ve $n-1 < \nu < n$ ise Laguerre fonksiyonları

$$L_\nu^{(\alpha)}(t) = \binom{\nu+\alpha}{\nu} {}_1F_1\left(-\nu;\alpha+1;t\right) \tag{6.4}$$

olarak ifade edilebilir. Burada ${}_1F_1$, Eş. 2.10' da verilen Kummer fonksiyonudur [10].

İspat

Eş. 6.3' ü $\nu!\alpha!$ ile çarpıp bölersek

$$L_\nu^{(\alpha)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu+\alpha)!}{\nu!\alpha!} \frac{\nu!\alpha!}{(\nu-k)!(\alpha+k)!} \frac{(-t)^k}{k!}$$

$$= \binom{\nu+\alpha}{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1)(\nu-k)!\alpha!}{(\nu-k)!(\alpha+k)(\alpha+k-1)\ldots(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha!} \frac{(-t)^k}{k!}$$

$$= \binom{\nu+\alpha}{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)(-\nu+1)\ldots(-\nu+k-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k)} \frac{t^k}{k!}$$

$$= \binom{\nu+\alpha}{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k}{(\alpha+1)_k} \frac{t^k}{k!}$$

$$= \binom{\nu+\alpha}{\nu} {}_1F_1\left(-\nu;\alpha+1;t\right)$$

elde edilir.

Teorem6.1 ve Teorem6.2 birlikte, Kummer fonksiyonunun bazı özellikleri [10], Laguerre fonksiyonları için daha da ilginç özellikleri verir. Kummer fonksiyonunun diferensiyel kuralı aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$
\begin{aligned}
D\,{}_1F_1\left(a;c;z\right) &= \frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k}\frac{z^{k-1}}{\left(k-1\right)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_{k+1}}{(c)_{k+1}}\frac{z^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a(a+1)_k}{c(c+1)_k}\frac{z^k}{k!} \\
&= \frac{a}{c}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a+1)_k}{(c+1)_k}\frac{z^k}{k!} \\
&= \frac{a}{c}\,{}_1F_1\left(a+1;c+1;z\right)
\end{aligned}
$$

Eş. 6.3, Eş. 6.4 ve Kummer fonksiyonunun diferensiyel kuralı kullanılarak aşağıdaki teorem kolaylıkla ispatlanabilir.

Teorem6.3

Her $n \in IN$ ve $n-1 < \nu < n$ için Laguerre fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar [9]:

(i) $\lim\limits_{\nu \to n} L_{\nu}^{(\alpha)}(t) = L_{n}^{(\alpha)}(t)$;

(ii) $L_{\nu}^{(\alpha)}(0) = \begin{pmatrix} \nu+\alpha \\ \nu \end{pmatrix}$;

(iii) $L_{\nu}^{(\alpha)}(t) = L_{\nu}^{(\alpha+1)}(t) - L_{\nu-1}^{(\alpha+1)}(t)$;

(iv) $\sum_{k=0}^{m} L_{\nu+k}^{(\alpha)}(t) = L_{\nu+m}^{(\alpha+1)}(t) - L_{\nu}^{(\alpha+1)}(t) + L_{\nu}^{(\alpha)}(t)$;

(v) Eğer $\alpha > 1$ ise

$$\sum_{k=0}^{m} L_{\nu+k}^{(\alpha)}(t) = L_{\nu+m}^{(\alpha+1)}(t) - L_{\nu-1}^{(\alpha+1)}(t) \quad ;$$

(vi) $\dfrac{d}{dt} L_{\nu}^{(\alpha)}(t) = -L_{\nu-1}^{(\alpha+1)}(t) = t^{-1}\left[\nu L_{\nu}^{(\alpha)}(t) - (\nu+\alpha)L_{\nu-1}^{(\alpha)}(t)\right]$

Bir önceki bölümden, Jacobi fonksiyonlarının hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifadesi [9]

$$P_{\nu}^{(\alpha,\beta)}(t) = \binom{\nu+\alpha}{\nu} F\left(-\nu; \nu+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-t}{2}\right)$$

şeklindeydi. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta\to\infty} F\left(\alpha,\beta;\gamma;\beta^{-1}t\right) &= \lim_{\beta\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k\, k!} \left(\frac{t}{\beta}\right)^k \\
&= \lim_{\beta\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} \frac{t^k}{k!} \frac{(\beta)_k}{\beta^k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} \frac{t^k}{k!} \lim_{\beta\to\infty} \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)}{\beta^k} \\
&= {}_1F_1(\alpha;\gamma;t)
\end{aligned}$$

olup, bu sonuçtan da yararlanılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem6.4

Laguerre ve Jacobi fonksiyonları arasındaki ilişki

$$L_\nu^{(\alpha)}(t)=\lim_{\beta\to\infty}P_\nu^{(\alpha,\beta)}\left(1-2\beta^{-1}t\right)$$

şeklindedir [21].

İspat:

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta\to\infty}P_\nu^{(\alpha,\beta)}\left(1-2\beta^{-1}t\right)&=\lim_{\beta\to\infty}\binom{\nu+\alpha}{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\nu)_k\,(\nu+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k\,k!}\frac{t^k}{\beta^k}\\
&=\binom{\nu+\alpha}{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\nu)_k}{(\alpha+1)_k}\frac{t^k}{k!}\lim_{\beta\to\infty}\frac{(\nu+\alpha+\beta+1)_k}{\beta^k}\\
&=\binom{\nu+\alpha}{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\nu)_k}{(\alpha+1)_k}\frac{t^k}{k!}\lim_{\beta\to\infty}\frac{(\nu+\alpha+\beta+1)\ldots(\nu+\alpha+\beta+k)}{\beta^k}\\
&=L_\nu^{(\alpha)}(t)
\end{aligned}$$

dır.

6.2. Genelleştirilmiş Kummer fonksiyonu

$$xy''+[c-x]y'-ay=0 \tag{6.5}$$

Kummer diferensiyel denkleminin bir çözümü olan Kummer fonksiyonu

$${}_1F_1(a;c;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k}\frac{x^k}{k!} \tag{6.6}$$

şeklinde ifade edilir.

Bu kısımdaki amaç Eş. 6.5 diferensiyel denklemini kesirli basamağa genişleterek Eş. 6.6’ ü genellemek ve F Kummer fonksiyonunun bir genellemesinin Eş. 6.5’ nın bir çözümü olduğunu göstermektir.

Tanım6.2

Kesirli Kummer diferensiyel denklemi,

$$t^{\mu}D^{2\mu}y(t)+\left[c-t^{\mu}\right]D^{\mu}y(t)-ay=0 \quad , \quad 0<\mu\leq 1 \tag{6.7}$$

lineer homogen kesirli diferensiyel denklemi ile tanımlanır [21]. Bu denklem çözüldüğünde Kummer fonksiyonu kesirli olarak genelleştirilebilir.

Tanım6.3

Genelleştirilmiş Kummer fonksiyonu

$${}_1^{\mu}F_1\left(a;c;t\right)=y_0\,t^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{j=0}^{k-1}\frac{g_j\left(\rho\right)}{f_{j+1}\left(\rho\right)}t^{k\mu} \quad , \quad 0<\mu\leq 1 \tag{6.8}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$f_k\left(\rho\right)\equiv\frac{\Gamma\left(1+\rho+k\mu\right)}{\Gamma\left(1+\rho+\left(k-2\right)\mu\right)}+c\frac{\Gamma\left(1+\rho+k\mu\right)}{\Gamma\left(1+\rho+\left(k-1\right)\mu\right)} \tag{6.9}$$

$$g_k\left(\rho\right)\equiv\frac{\Gamma\left(1+\rho+k\mu\right)}{\Gamma\left(1+\rho+\left(k-1\right)\mu\right)}+a \tag{6.10}$$

ve $\rho>-1$ için

$$f_0\left(\rho\right)=\frac{\Gamma\left(1+\rho\right)}{\Gamma\left(1+\rho-2\mu\right)}+c\frac{\Gamma\left(1+\rho\right)}{\Gamma\left(1+\rho-\mu\right)}=0 \tag{6.11}$$

denklemi sağlanır [21].

Teorem6.5

Genelleştirilmiş Kummer fonksiyonu ${}_1^{\mu}F_1(a;c;t)$, Eş. 6.7 denkleminin bir çözümüdür [21].

İspat

Eş. 6.7' nin bir çözümü

$$y(t)=t^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}y_k t^{k\mu}=\sum_{k=0}^{\infty}y_k t^{\rho+k\mu} \qquad , \qquad \rho>-1 \tag{6.12}$$

şeklinde olsun. Burada Eş. 3.9' dan yararlanarak

$$D^{\mu}y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}y_k\frac{\Gamma(1+\rho+k\mu)}{\Gamma(1+\rho+k\mu-\mu)}t^{\rho+k\mu-\mu}$$

$$D^{2\mu}y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}y_k\frac{\Gamma(1+\rho+k\mu)}{\Gamma(1+\rho+\mu(k-1))}\frac{\Gamma(1+\rho+\mu(k-1))}{\Gamma(1+\rho+\mu(k-2))}t^{\rho+k\mu-2\mu}$$

olup bunlar Eş. 6.7 denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}Gy(t)&=t^{\mu}D^{2\mu}y+\left[c-t^{\mu}\right]D^{\mu}y-ay\\&=\sum_{k=0}^{\infty}y_k\frac{\Gamma(1+\rho+k\mu)}{\Gamma(1+\rho+(k-2)\mu)}t^{\rho+(k-1)\mu}+c\sum_{k=0}^{\infty}y_k\frac{\Gamma(1+\rho+k\mu)}{\Gamma(1+\rho+(k-1)\mu)}t^{\rho+(k-1)\mu}\\&\quad-\sum_{k=0}^{\infty}y_k\frac{\Gamma(1+\rho+k\mu)}{\Gamma(1+\rho+(k-1)\mu)}t^{\rho+k\mu}-a\sum_{k=0}^{\infty}y_k t^{\rho+k\mu}\end{aligned}$$

dir. Toplamlardaki terimler yeniden düzenlenirse

$$Gy(t)=\sum_{k=0}^{\infty} y_k\left[\frac{\Gamma(1+\rho+k\mu)}{\Gamma\left(1+\rho+(k-2)\mu\right)}+c\frac{\Gamma(1+\rho+k\mu)}{\Gamma\left(1+\rho+(k-1)\mu\right)}\right]t^{\rho+(k-1)\mu}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty} y_k\left[\frac{\Gamma(1+\rho+k\mu)}{\Gamma\left(1+\rho+(k-1)\mu\right)}+a\right]t^{\rho+k\mu}$$

$$=y_0 f_0(\rho)t^{\rho-\mu}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[y_{k+1}f_{k+1}-y_k g_k\right]t^{\rho+k\mu}$$

elde edilir. Burada f_k ve g_k sırasıyla, Eş. 6.9 ve Eş. 6.10' deki gibidir. $y_0 \neq 0$ olduğunda $y_0 f_0(\rho)=0$ olması için; ρ, Eş. 6.11' i sağlayacak şekilde seçilmek zorundadır. Böylece

$$y_{k+1}=\frac{g_k}{f_{k+1}}y_k=\prod_{j=0}^{k}\frac{g_j}{f_{j+1}}y_0$$

için görülür ki

$$Gy(t)=0$$

dır. Genelleştirilmiş Kummer fonksiyonu ismini doğrulamak adına

$${}_1F_1(a;c;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(c)_k}\frac{x^k}{k!}$$

şeklindeki Kummer fonksiyonunun, Eş. 6.8 kesirli Kummer fonksiyonunun özel durumu olduğunu görebiliriz [9]. Gerçekten, Eş. 6.8' de, $\mu=1$ alındığında

$${}^{1}_{1}F_1(a;c;t)={}_1F_1(a;c;t)$$

dır.

Sonuç olarak, Eş. 6.8 genelleştirilmiş Kummer fonksiyonu daha önceki bölümde tanımlanan F-Gauss hipergeometrik fonksiyonu ile bağlantılıdır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}
\lim_{\beta\to\infty} {}^{\mu}F\left(\alpha,\beta;\gamma;\beta^{-1}t\right) &= \lim_{\beta\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k\,k!}\left(\frac{t}{\beta}\right)^k \\
&= \lim_{\beta\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k}\frac{t^k}{k!}\frac{(\beta)_k}{\beta^k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k}\frac{t^k}{k!}\lim_{\beta\to\infty}\frac{(\beta)(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)}{\beta^k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k}\frac{t^k}{k!} \\
&= {}_1^{\mu}F_1\left(\alpha;\gamma;t\right)
\end{aligned}$$

dir.

6.3. Genelleştirilmiş Laguerre Fonksiyonu

Bu kısımda, Eş. 6.3 Laguerre fonksiyonunu genelleştirmek için yukarıdaki benzer yollar takip edilecektir.

Tanım6.4

Kesirli Laguerre diferensiyel denklemi

$$t^{\mu}D^{2\mu}y(t)+\left[\alpha+1-t^{\mu}\right]D^{\mu}y(t)-\nu y=0 \quad , \quad 0<\mu\le 1 \tag{6.13}$$

lineer homogen kesirli denklemi ile tanımlanır [21].

Tanım6.5

Genelleştirilmiş Laguerre fonksiyonları

$$ {}^{\mu}L_{\nu}^{(\alpha)}(t) = y_0\, t^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{g_j^L(\rho)}{f_{j+1}^L(\rho)} t^{k\mu} \qquad , \qquad 0 < \mu \le 1 \qquad (6.14) $$

olarak tanımlanır [21]. Burada

$$ f_k^L(\rho) \equiv \frac{\Gamma(1+\rho+k\mu)}{\Gamma(1+\rho+(k-2)\mu)} + (\alpha+1)\frac{\Gamma(1+\rho+k\mu)}{\Gamma(1+\rho+(k-1)\mu)} $$

$$ g_k^L(\rho) \equiv \frac{\Gamma(1+\rho+k\mu)}{\Gamma(1+\rho+(k-1)\mu)} - \nu $$

ve $\rho > -1$ için

$$ f_0^L(\rho) \equiv \frac{\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(1+\rho-2\mu)} + (\alpha+1)\frac{\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(1+\rho-\mu)} = 0 $$

denklemi sağlanır.

Teorem6.6

${}^{\mu}L_{\nu}^{(\alpha)}(t)$ genelleştirilmiş Laguerre fonksiyonu Eş. 6.13 denkleminin bir çözümüdür [21].

İspat

İspat, Teorem6.5' e benzer bir şekilde yapılabilir. Teorem6.5' den ${}_1^{\mu}F_1\left(a;c;t\right)$, Eş. 6.7' nin bir çözümüdür. Eş. 6.7' de $c=\alpha+1$, $a=-\nu$ yazılırsa Eş. 6.13 elde edilir. Teorem6.6' dan

$$ {}^{\mu}L_{\nu}^{(\alpha)}(t)=\binom{\nu+\alpha}{\nu}\, {}_1^{\mu}F_1\left(-\nu;\alpha+1;t\right) $$

dır. Burada $\mu=1$ alınırsa Laguerre fonksiyonu elde edilir. Yani,

$$ {}^{1}L_{\nu}^{(\alpha)}\left(t\right)=L_{\nu}^{(\alpha)}\left(t\right) $$

dir.

KAYNAKLAR

1. Srivastava, H.M., Manocha, H.L., “A Treatise on Generating Functions”, ***Halsted Press Wiley***, New York, 284-303, (1984).

2. Osler, T.J., “Leibniz rule for fractional derivatives,generalized and an application to infinite series”, ***SIAM J. Appl. Math.***, 658-674, 18 (1970).

3. Watanabe, Y., “Notes on the generalized derivative of Riemann-Liouville and its application to Leibniz’s Formula”, ***I. and II. Tôhoku Math. J.*** 34: 8-27, 28-41, (1931).

4. Gorenflo, R., Mainardi, F., “Essentials of fractional calculus”, ***Preprint submitted to MaPhySto Center***, Preliminary Version, 23-28, (2000).

5. Miller, K., Ross, B., “An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations”, ***John W iley and Sons***, 2-124, (1993).

6. Podlubny, I., “Fractional Differential Equations”, ***Academic Press***, San Diego, 70-71, (1999).

7. Chihara, T., “An Introduction to Orthogonal Polynomials”, ***Gordon and Breach***, 78-83, (1978).

8. Podlubny, I., “Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation”, ***Fractional Calculus and Applied Analysis***, 5(4): 367-386, (2002).

9. Mirevski, S.P., Boyadjiev, L., Scherer R., “On the Riemann-Liouville fractional calculus, g-Jacobi functions and F-Gauss functions”, ***Appl. Math. Comput.*** 315-325, 187 (2007).

10. Wang, Z., Guo, D., “Special Functions”, ***World Scientific***, 35-42, (1989).

11. Chan, W.C.C., Chyan, C.J., Srivastava, H. M., “The Lagrange polynomials in several variables”, ***Integral Transform. Spec. Funct***., 12: 139-148 (2001).

12. Szego, G., , “Orthogonal Polynomials”, ***American Mathematical Society***, 63-102, (1959).

13. Whittaker, E. T., Watson, G.N., “A Course of Modern Analysis, fourth ed.”, ***Cambridge***, 283 (1935)

14. Hilfer, R., “Applications of Fractional Calculus In Physics”, ***World Scientific***, 3-52, (1999).

15. Crank, J., “The Mathematics of Diffusion”, ***2nd ed., Clarendon Pres, Oxford***, 56-65, (1979)

16. Schneider, W.R., Wyss, W., “Fractional diffusion and wave equations”, ***J.Math. Phys***. 134-144, 30 (1989).

17. Boyadjiev, L., Scherer, R., “Fractional extensions of the temperature field problem in oil strata”***, Kuwait J. Sci. Eng.,*** 31(2): 15-32 (2004).

18. Oldham, K., Spanier, J., “The fractional calculus; theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order, in”, ***Mathematics in Science and Engineering, V, Academic Pres***, 73-75, 80-92 (1974).

19. Kiryakova, V., “Generalized fractional calculus and applications”, ***Pitman Research Notes in Mathematics 301, Longman, Harlow***, 19-25, 38-45, (1994).

20. Erkuş, E., Altın, A., “A note on the Lagrange polynomials in several variables”, ***J. Math. Anal. Appl.***, 338-341, 310 (2005).

21. Mirevski, S.P., Boyadjiev, L., “Computers and Mathematics with Applications” , 1271-1277, 59 (2010).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ÜNAL, Burçin
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 05.01.1985 Kozan/ Adana
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (505) 606 88 50
e-mail	: burcinunal0106@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Gazi Üniversitesi	
	Matematik Bölümü	2008
Lise	Kozan Anadolu Lisesi	2003

Yabancı Dil

İngilizce