SASAKIAN MANİFOLDLARIN HİPERYÜZEYLERİ

İlhami EROL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2011
ANKARA

İlhami EROL tarafından hazırlanan "SASAKIAN MANİFOLDLARIN HİPERYÜZEYLERİ" adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Aysel TURGUT VANLI ………………………….

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Baki KARLIĞA ………………………….

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Yusuf YAYLI ………………………….

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Doç. Dr. Aysel TURGUT VANLI ………………………….

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Tarih: 27/01/2011

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU ……………………………….

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İlhami EROL

SASAKIAN MANİFOLDLARIN HİPERYÜZEYLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

İlhami EROL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2011

ÖZET

Bu tezde bir diferensiyellenebilir manifold üzerinde (f, U, V, u, v, λ) yapısı tanıtıldı ve bu yapılara bazı örnekler verildi. Ayrıca hemen hemen değme manifolların hiperyüzeyleri ve Sasakian manifoldların hiperyüzeyleri ile ilgili bazı teoremler ispatlandı.

Bilim Kodu : **204.1.049**

Anahtar Kelimeler: **(f, U, V, u, v, λ) yapıları, Sasakian manifoldlar, hemen hemen değme manifoldlar, hemen hemen değme manifoldların hiperyüzeyleri, Sasakian manifoldların hiperyüzeyleri.**

Sayfa Adedi : **122**

Tez Yöneticisi : **Doç. Dr. Aysel TURGUT VANLI**

HYPERSURFACES OF SASAKIAN MANIFOLDS

(M.Sc. Thesis)

İlhami EROL

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

February 2011

ABSTRACT

In this thesis, (f, U, V, u, v, λ)-structure is introduced on a differentiable manifold M, and some examples are given. In addition, some theorems are given on hypersurfaces of almost contact manifolds and on Sasakians manifolds.

Science Code : 204.1.049

Key Words : (f, U, V, u, v, λ)-structure, Sasakians manifolds, almost contact manifolds, hypersurfaces of almost contact manifolds, hypersurfaces of Sasakians manifolds.

Page Numbers :122

Adviser : Asso. Prof. Aysel TURGUT VANLI

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarımın yönetimini kabul ederek bana bu tezi hazırlama olanağı sağlayan, çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ve sosyal hayatta eşsiz fikirleriyle yetişmeme katkıda bulunan danışman hocam sayın Doç. Dr. Aysel TURGUT VANLI' ya teşekkürlerimi ve saygılarımı bir borç bilirim.

Bu zahmetli ve yorucu çalışmalarda beni hiç yalnız bırakmayan sevgili eşim Ayşe EROL' a, çok kıymetli aileme ve dostlarım olan meslektaşlarıma en derin duygularla teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
$\mathbf{g}$	M manifoldu üzerindeki metrik
$\bar{\mathbf{g}}$	$\bar{M}$ hiperyüzeyi üzerine indirgenmiş metrik
$\boldsymbol{\Gamma(TM)}$	M manifoldu üzerindeki vektör alanlarının uzayı
$\boldsymbol{T_pM}$	$p \in M$ noktasındaki tanjant uzay
$\boldsymbol{TM}$	M manifoldun tanjant demeti
$\boldsymbol{f}$	f –yapı
$\boldsymbol{\eta}$	1-form
$\boldsymbol{R}$	M manifoldu üzerindeki Riemann eğrilik tensörü
$\boldsymbol{\nabla}$	M manifoldu üzerindeki koneksiyon
$\bar{\boldsymbol{\nabla}}$	$\bar{M}$ hiperyüzeyi üzerine indirgenmiş koneksiyon
$[,]$	Lie braket operatörü
$\boldsymbol{K}$	Kesitsel eğrilik
$\boldsymbol{L}$	Lie türevi
$\boldsymbol{h}$	M manifoldunun ikinci temel formu
$\boldsymbol{\xi}$	Karakteristik vektör alanı

1. GİRİŞ

Değme manifoldlarda önemli bir yeri olan Sasakian manifoldların tanımı 1960'lı yıllarda Japon matematikçi olan S.Sasaki tarafından verilmiştir. Yine aynı yıllarda yaşayan M.Gray, K. Ogiue ve W.M. Bootby gibi matematikçilerin de bu konudaki çalışmaları öne çıkmaktadır. Tek boyutlu manifoldlardan olan Sasakian manifoldlar, değme manifoldlara ait konuların bir devamı ve uygulama alanıdır. Sasakian manifoldlara, normal değme metrik manifoldlarda denir. Hemen hemen değme metrik yapıların bir genelleştirilmesi olan metrik çatılı yapılar ilk kez Yano (1963) tarafından ortaya atılmıştır. Ayrıca D.E. Blair'ın kitap ve makalelerinde de bu çalışmalara yer verilmiştir.

Bu tezin birinci bölümü diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar, teoremler ve sonuçlar içermektedir. İkinci bölümde ise (f, U, V, u, v, λ) yapı tanımı, bu yapı hakkında temel kavramlar, kurallar verildi ve söz konusu olan yapılar ile ilgili iki örnek detaylı olarak incelendi. Bu örneklerden birinde (2n+2)-boyutlu hemen hemen bir Hermitian manifoldunun (kompleks hiperyüzeyi) 2n-boyutlu alt manifoldunun (f, g, u, v, λ) yapısına sahip olduğu gösterildi. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde ise hemen hemen değme manifoldların hiperyüzeyleri ve Sasakian manifoldların hiperyüzeyleri ile ilgili bazı teoremler ispatlandı. Sasakian manifoldların hiperyüzeyleri Keahlerian manifoldların ve Hermitian manifoldların üzerinde incelendi ve Levi-Civita koneksiyonu hakkında bazı teoremler verildi. Bununla birlikte sabit ϕ -holomorfik kesitsel eğrilikli Sasakian manifoldların hiperyüzeyleri hakkında bazı teoremler ispatlanarak, bu teoremlerden çıkan sonuçlar ifade ve ispat edildi.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Temel Kavramlar

2.1.1. Tanım:

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının uzayı $\Gamma(TM)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonlarının uzayı $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere;

$$g: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^\infty(M,\mathbb{R})$$

şeklinde tanımlı bilineer, simetrik ve pozitif tanımlı g ye bir Riemann metriği ve (M,g) ye de bir *Riemann manifoldu* denir [Kobayashi, 1996].

2.1.2. Tanım:

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının uzayı $\Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\nabla: \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

$$(X,Y) \longrightarrow \nabla(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \nabla_X Y$$

dönüşümü $\forall f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, $\forall\ X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

i) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Y + g\nabla_X Z$
iii)$\nabla_X fY = f\nabla_X Y + \mathrm{X}(f)Y$

özelliklerini sağlarsa , ∇ ya M üzerinde bir *afin koneksiyon* ve ∇_X de X e göre *kovaryant türev operatörü* denir [Hacısalihoğlu, 1983].

2.1.3. Tanım:

(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan bir afin koneksiyon olsun. O zaman $\forall\ X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ olmak üzere, ∇ dönüşümü;

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X\ ,Y]$ (sıfır torsiyon özelliği)

ii) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Koneksiyonun metrikle bağdaşması özelliği)

şartlarını sağlıyorsa , ∇ ya M üzerinde *sıfır torsiyonlu Riemann koneksiyonu* veya *Levi-Civita koneksiyonu* adı verilir.

2.1.4. Tanım:

U bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$[,] : U \times U \longrightarrow U$$
$$(X,Y) \longrightarrow [X,Y]$$

dönüşümünde

i) 2-lineer
ii) Anti-simetrik ($\forall\, X, Y \in U$ için $[X,Y] = -[Y,X]$)
iii) $\forall\, X, Y, Z \in U$ için

$$\big[X,[Y,Z]\big] + \big[Y,[Z,X]\big] + \big[Z,[X,Y]\big] = 0$$

şartlarını sağlıyorsa $[,]$ dönüşümüne, U üstünde bir *Lie operatörü (Lie parantez operatörü)* denir [Hacısalihoğlu, 1983] .

2.1.5. Tanım:

(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. $X \in \Gamma(TM)$ için L_X, keyfi (s,r) tipinde tensör alanını yine (s,r) tipinde tensör alanına götüren ve aşağıdaki koşulları sağlayan bir operatör olup X vektör alanına göre *Lie türev operatörü* olarak adlandırılır

[Yano ve Kon, 1984].

i) $L_X(f) = X(f)\,, \forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$
ii) $L_X Y = [X,Y]\,, \forall\, Y \in \Gamma(TM)$
iii) $L_X\, g(Y,Z) = X\big(g(Y,Z)\big) - g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y)\,, \forall\, Y, Z \in \Gamma(M)$

2.1.6. Tanım:

(M, g) bir Riemann manifoldu ve L_X , X vektör alanına göre Lie türev operatörü olsun. Eğer $X \in \Gamma(TM)$ için

$$L_X g = 0$$

ise X'e *Killing vektör alanı* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.1.7. Tanım:

(M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu olsun.

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

ile tanımlanan R dönüşümüne M üzerinde bir (1,3)-tipinden tensör alanıdır ve M nin *Riemann eğrilik tensörü* olarak adlandırılır [Spivak, 1979].

2.1.1. Teorem:

M bir Riemann manifoldu ve R , M nin Riemann eğrilik tensörü olsun.
$\forall\, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

i) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(Y, X)Z, W)$
ii) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$
iii) $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$

dır [O'Neill, 1983].

2.1.8. Tanım:

(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bir $p \in M$ noktasındaki $T_P M$ tanjant uzayının X_p , Y_p tanjant vektörleri tarafından gerilen 2-boyutlu bir uzayı Π olmak üzere

$$K(\Pi) = \frac{g\left(R\left(X_{p,}, Y_p\right) X_{p,}, Y_p\right)}{g\left(X_{p,}, X_{p,}\right) g\left(Y_p, Y_p\right) - g\left(X_{p,}, Y_p\right)^2}$$

şeklinde tanımlanan $K(\Pi)$ reel sayısına Π nin *kesit eğriliği* denir.
[Yano ve Kon, 1984].

2.1.9. Tanım:

n-boyutlu bir Riemann manifoldu M olsun. M in $T_x(M)$ teğet uzayındaki 2-boyutlu her P düzleminin kesitsel eğriliği $K(P)$ sabit ise M ye *sabit eğrilikli bir uzaydır* denir. Sabit eğrilikli bir Riemann manifoldu bir *uzay formu* olarak adlandırılır [Verstraelen and Vrancken, 1988].

2.1.2. Teorem:

(M, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir Riemann koneksiyonu olsun.

$\forall\, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için Riemann koneksiyonu

$$2g(\nabla_X Y, Z) = X[g(Y,Z)] + Y[g(Z,X)] - Z[g(X,Y)] - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y])$$

Kozsul formülü ile tek türlü belirtilir [Yano ve Kon, 1984].

2.1.10. Tanım:

$\bar{M}$ ve M birer diferensiyellenebilir manifold ve

$$\psi : \bar{M} \longrightarrow M$$

diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer rank ψ = boy $\bar{M}$ ise ψ dönüşümüne bir *immersiyon (daldırma)* denir [Hacısalihoğlu, 1983].

2.1.11. Tanım:

$\bar{M}$ ve M birer diferensiyellenebilir manifold ve $\bar{M} \subset M$olsun. Eğer

$$J : \bar{M} \longrightarrow M$$

doğal injeksiyonu bir immersiyon ise $\bar{M}$ ye M nin bir *altmanifoldu* denir. [Brickell ve Clark ,1970].

2.1.12. Tanım:

(M, g) Riemann manifoldunun bir altmanifoldu $\bar{M}$ olsun. Herhangi bir $p \in \bar{M}$ noktası için

$TM^{\perp} = \{V \in T_pM : g(X_p, V) = 0, \forall X_p \in T_p\overline{M}\}$

cümlesi tanımlansın. $p \in \overline{M}$ noktasında $\forall X_p \in T_p\overline{M}$ için $g(X_p, V) = 0$ koşulunu sağlayan V vektörüne M nin *normal vektörü* , V nin birim vektör olması halinde de $\overline{M}$ nin *birim normal vektörü* denir. $\overline{M}$ nin her noktasındaki tüm normal vektörlerini içeren $T\overline{M}^{\perp}$ uzayına da $\overline{M}$ nin *normal demeti* adı verilir [Yano ve Kon, 1984].

2.1.13. Tanım:

(M, g) Riemann manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu $\overline{M}$ ve M üzerinde bir Riemann koneksiyonu ∇ olsun. $\forall\, X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y + h(X, Y) \qquad (2.1.1)$$

biçiminde tanımlanan bağıntıya *Gauss formülü* adı verilir. Burada $\overline{\nabla}_X Y$ ve $h(X, Y)$ sırasıyla $\nabla_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir. Eş.2.1.1 de tanımlanan $\overline{\nabla}$ ye $\overline{M}$ üzerine indirgenmiş Riemann koneksiyonu ve h ya da M nin *ikinci temel formu* denir. Eğer $h = 0$ ise M ye *total geodezik* denir [Chen, 1973].

2.1.14. Tanım:

M , n-boyutlu ve N , $(n-1)$-boyutlu birer diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$f : N \longrightarrow M$$

fonksiyonu bir immersiyon ise $f(N) = \overline{M}$ manifolduna M nin bir hiperyüzeyi denir [Hacısalihoğlu, 1984, Brickell ve Clark, 1970] .

2.1.15. Tanım:

n- boyutlu bir Riemann manifoldu (M, g) nin $(n-1)$-boyutlu bir altmanifoldu $\overline{M}$ olsun. Bu durumda $\overline{M}$, M nin bir hiperyüzeyidir.

2.1.16. Tanım:

n -boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold M olsun. M nin tanjant demetini TM olmak üzere

$$f^3 + f = 0 \qquad (2.1.2)$$

koşulunu sağlayan (1,1) tipindeki diferensiyellenebilir f tensör alanına $f - yap$ı denir [Goldber� ve Yano, 1970].

2.2. Hemen Hemen Değme Manifoldlar

2.2.1. Tanım:

(2n+1) boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold M ve φ, ξ, η sırası ile M üzerinde (1,1), (1,0), (0,1) tipinden tensör alanları olsun. φ, ξ, η için

$$\eta(\xi) = 1 \quad , \quad \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi \tag{2.2.1}$$

koşullarını sağlayan (φ, ξ, η) ya *hemen hemen bir değme yapı*, (M, φ, ξ, η) dörtlüsüne de *hemen hemen değme manifoldu* denir. Buradaki ξ vektör alanına *karakteristik vektör alanı* denir [Yano ve Kon, 1984].

Burada;

$$\varphi : \Gamma(TM) \xrightarrow[anti-simetrik]{lineer} \Gamma(TM)$$

tanımlı $(1,1) -$ tipinden bir tensör alanı;

$$\eta : \Gamma(TM) \xrightarrow[dif.bilir]{lineer} C^{\infty}(M.R)$$

tanımlı $(1,0) -$ tipinden bir tensör alanı yani bir 1-form;

$$\xi : M \xrightarrow[örten]{1.1} \Gamma(TM)$$

tanımlı $(0,1) -$tipinden bir tensör alanı yani bir vektör alanıdır.

2.2.2. Tanım:

(2n+1) boyutlu bir manifold M olsun.

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

koşulu sağlanacak şekilde M üzerinde bir η 1-form varsa M ye bir değme yapıya sahiptir denir. Bu değme yapı ile birlikte M ye de *değme manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.2.1. Örnek:

$\mathbb{R}^3$ de standart koordinatlar (x, y, z) olmak üzere η yı

$$\eta = \frac{1}{2}\,(dz - ydx)$$

ξ vektör alanı,

$$\xi = 2(\frac{\partial}{\partial z}) \in \Gamma\,(T\mathbb{R}^3)$$

φ lineer dönüşümü,

$$\varphi : \Gamma\,(TM) \longrightarrow \Gamma\,(TM)$$

olsun. φ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere,

$$\eta(\xi) = \frac{1}{2}\,(dz - ydx)(2(\frac{\partial}{\partial z}))$$

$$= dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \; ydx(\frac{\partial}{\partial z})$$

$dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = 1\;, dx\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = 0$ olduklarından

$$\eta(\xi) = 1$$

dır. Ayrıca

$X = x_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + x_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \; x_3\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \; \in \Gamma(T\mathbb{R}^3)$ ve

$X = (x_1, x_2, x_3) \in \Gamma(\mathbb{R}^3)$ olmak üzere

$$\eta(X) = \frac{1}{2}\,(dz - ydx)(x_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + x_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \; x_3\left(\frac{\partial}{\partial z}\right))$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ (dz(x_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + x_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \ x_3\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)) - ydx(x_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + x_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \ x_3\left(\frac{\partial}{\partial z}\right))\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} (dz)x_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + (dz)x_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + (dz)\,x_3\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) - \\ (ydx)x_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + (ydx)x_2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + (ydx)x_3\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}(x_3 - yx_1)$$

dır. ξ vektör alanına karşılık gelen matris $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ve $X \in \Gamma(T\mathbb{R}^3)$ matris formu

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\varphi^2\,X = \varphi\big(\varphi(X)\big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -y & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= -I_3(X) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 - yx_1 \end{bmatrix}$$

$$= -X + (x_3 - yx_1)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -X + \frac{1}{2}(x_3 - yx_1)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= -X + \eta(X)\xi$$

dır. Böylece ($\mathbb{R}^3$ $, \varphi, \xi , \eta$) dörtlüsü hemen hemen değme manifold olur.

2.2.1. Teorem:

$(M , \varphi, \xi , \eta$) dörtlüsü hemen hemen değme manifoldu olmak üzere;

$X, \xi \in \Gamma(TM)$, $X \neq \xi$ ve

$\varphi : \Gamma\,(TM) \xrightarrow{lineer} \Gamma\,(TM)$

için

1) $\varphi\,(\xi\,) = 0$ (2.2.2)

2) $\eta \circ \varphi = 0$ (2.2.3)

3) $rank\ \varphi = 2n$ (2.2.4)

dır [Yano ve Kon, 1984].

İspat:

1) $\forall\, X \in \Gamma(TM)$ için Eş.2.2.1 de X yerine ξ alınırsa

$\varphi^2\, \xi = -\xi + \eta(\xi)\xi$

dır. Eş.2.2.1 eşitliğinden

$\varphi^2\, \xi = -\xi + \underbrace{\eta(\xi)}_{=1}\xi$

$\varphi^2\, \xi = -\xi + \xi$

$\varphi^2\, \xi = 0$

olur. Öncelikle $\varphi\,(\xi\,) = 0$ eşitliğini *Olmayana Ergi Yöntemi* ile ispatlanacaktır.

Kabul edelim ki $\varphi\,(\xi\,) \neq 0$ olsun. Bu durumda $\varphi^3(\xi) = \varphi(\varphi^2\, \xi) = 0$ dır.

Böylece

$\varphi^2(\varphi\xi) = -\varphi\xi + \eta((\varphi\xi))\xi$

elde edilir. Burada $\varphi^3(\xi) = 0$ olduğundan

$$\varphi\xi = \eta((\varphi\xi))\xi \tag{2.2.5}$$

olur. Buradan $\eta((\varphi\xi)) = 0$ ve $\eta((\varphi\xi)) \neq 0$ olmak üzere iki farklı durum ortaya çıkar.

$\eta\big((\varphi\xi)\big) = 0$ olduğunda $\varphi(\xi) = 0$ olur. Bu ise $\varphi(\xi) \neq 0$ kabulümüz ile çelişir. Buradan kabulümüz yanlış olup $\varphi(\xi) = 0$ olmak zorundadır.

$\eta((\varphi\xi)) \neq 0$ olduğunda Eş.2.2.5 eşitliğinin φ altında görüntüsü alınırsa

$\varphi^2\xi = \eta((\varphi\xi))(\varphi\xi)$

dır. Burada $\varphi^2\xi = 0$ ve $\eta((\varphi\xi)) \neq 0$ olduğundan $\varphi(\xi) = 0$ olur. Bu ise

$\varphi(\xi) \neq 0$ kabulümüz ile çelişir. Buradan kabulümüz yanlış olup $\varphi(\xi) = 0$ olmak zorundadır.

Sonuç olarak her iki durumda da $\varphi(\xi) = 0$ dır.

2) $\forall X \in \Gamma(TM)$ için $\varphi^3(X) = \varphi^2(\varphi X)$ için

$$\begin{aligned}\varphi^3(X) &= \varphi^2(\varphi X)\\ &= -\varphi X + \eta(\varphi X)\xi \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

dır. Eğer $\varphi^3(X) = \varphi(\varphi^2 X)$ olarak alınrsa

$$\begin{aligned}\varphi^3(X) &= \varphi(\varphi^2 X)\\ &= \varphi(-X + \eta(X)\xi)\end{aligned}$$

φ, lineer olduğundan

$\varphi^3(X) = -\varphi(X) + \eta(X)\varphi(\xi)$

dır. $\varphi\ (\xi\ ) = 0$ olduğundan

$$\varphi^3(X) = -\varphi(X) \qquad (2.2.7)$$

elde edilir. Böylece Eş.2.2.6 ve Eş.2.2.7 den

$$-\varphi X + \eta(\varphi X)\xi = -\varphi(X)$$

olur. Buradan da

$$\eta(\varphi(X))\xi = 0$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $\xi \neq 0$ olduğundan

$$\eta(\varphi(X)) = 0$$

olmalıdır. Bu eşitlik $\forall\ X \in \Gamma(M)$ için sağlandığından

$$\eta \circ \varphi = 0$$

olur.

3) $\varphi : \Gamma\ (TM) \xrightarrow{lineer} \Gamma\ (TM)$ dönüşümünün çekirdeği $çek\ \varphi$ olmak üzere

$$çek\ \varphi = \{X \in \Gamma(TM) \mid \varphi\ (X\ ) = 0\}$$

dır. $\forall\ X \in çek\ \varphi$ için

$$\varphi(X) = 0$$

dır. Eşitliğin φ altında görüntüsü alınırsa

$$\varphi(\varphi(X)) = \varphi(0)$$

$$\varphi^2(X) = 0$$

dır. Eş.2.2.1 den

$$-X + \eta(X)\xi = 0$$

$$X = \eta(X)\xi$$

olur. Böylece $\forall X \in çek\ \varphi$ için $X \in Sp\ \{\xi\}$ olur ki buradan

$$çek\ \varphi \subset Sp\ \{\xi\} \tag{2.2.8}$$

dır. $\forall X \in Sp\ \{\xi\}$ için

$$X = \lambda\xi$$

olur. Buradan,

$$\varphi(X) = \lambda\ \varphi(\xi)$$

eşitliğinde $\varphi(\xi) = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\varphi(X) = 0$$

bulunur. Böylece $\forall X \in Sp\ \{\xi\}$ için $X \in çek\ \varphi$ olur ki buradan

$$Sp\ \{\xi\} \subset çek\ \varphi \tag{2.2.9}$$

dır. Eş.2.1.8 ve Eş.2.1.9 dan $çek\ \varphi = Sp\ \{\xi\}$ dır.

Sonuç olarak

$$rank\ \varphi + sıfırlık\ \varphi = boy\ \ \chi(M) = 2n + 1$$

olur ve $sıfırlık\ \varphi = boy\ (çek\ \varphi) = 1$ olduğundan

$$rank\ \varphi\text{=2n}$$

dır.

2.2.2. Teorem:

$(2n + 1)$ boyutlu hemen hemen değme manifold M ve $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için;

$$g\big(X, \phi(Y)\big) = d\eta(X, Y)$$

olacak şekilde bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme yapısı vardır
[Yano ve Kon, 1984].

İspat:

η değme formu için $\forall\ X \in \Gamma(TM)$ noktasında $d\eta\big(\xi, T_X(M)\big) = 0$ olacak şekilde bir ξ vektörü vardır. ϕ anti-simetrik (1,1) tipinden bir tensör alanıdır.

$\eta(X) = Y(X, \xi)$ olacak şekilde her zaman bir g Riemann metriği vardır. Diğer yandan $d\eta$ öyle bir simplektif formdur ki; ξ'nin ortagonal tümleyeni $D = (Sp\{\xi\})^{\perp}$ üzerinde

$$g'\big(X, \phi(Y)\big) = d\eta(X, Y)$$

ve

$$\phi^2 = I$$

olacak şekilde bir g' metriği ve U endomorfizmi vardır.

$$\phi(\xi) = 0$$

koşulunu sağlayan U'yi genişleterek ve ξ'nin doğrultusunda g ile uyumlu g' metriği yapısına sahip olamaz. Bu ise;

$$g'\big(X, \phi(Y)\big) = d\eta(X, Y)$$

demektir.

2.2.3. Tanım:

Bir diferensiyellenebilir manifold M olsun. M nin vektör alanları uzayı $\Gamma(TM)$ üzerinde tanımlı bir

$$J : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(TM)$$

lineer dönüşümü;

$$J^2 = -I$$

şartını sağlayan bir endomorfizm ise J ye M üzerinde bir *hemen hemen kompleks yapı* denir. Hemen hemen kompleks yapı ile donatılmış M manifoldunada *hemen hemen kompleks manifold* denir. Her hemen hemen kompleks manifold çift boyutludur [Yano ve Kon, 1984].

$(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M ve M üzerinde hemen hemen değme yapısı $(\varphi\,,\xi\,,\eta\,)$ olsun. Reel bir doğruyu $\mathbb{R}$ ile gösterirsek $M\times\mathbb{R}$ bir manifoldtur.

$$\Gamma(T\mathbb{R})=\left\{f\frac{d}{dt}:\ f\in C^{\infty}(M,\mathbb{R})\right\}$$

$$\Gamma(T(M\times\mathbb{R}))=\left\{\left(X,f\frac{d}{dt}\right):X\in\Gamma(TM)\ \ ,f\frac{d}{dt}\in\Gamma(T\mathbb{R})\right\}$$

olmak üzere X , M ye teğet bir vektör alanı, t de $\mathbb{R}$ nin koordinatı ve $f\frac{d}{dt}$, $\mathbb{R}$ de bir vektör alanıdır. $M\times\mathbb{R}$ nin tanjant uzayındaki bir J lineer dönüşümü;

$J:\ \Gamma(T(M\times\mathbb{R})\,)\longrightarrow\Gamma(T(M\times\mathbb{R})\,)$

$$\left(X,f\frac{d}{dt}\right)\longrightarrow J\left(X,f\frac{d}{dt}\right)=((\varphi X)-f\xi,\eta(X)\frac{d}{dt}) \tag{2.2.10}$$

şeklinde tanımlıdır.

2.2.3. Teorem:

Eş.2.2.10 ile tanımlı J dönüşümü

i) Lineer bir dönüşümdür.
ii) $J^2=-I$

dır [Yano ve Kon, 1984].

İspat:

$i.\forall\ a,b\in\mathbb{R}$ ve $\forall\left(X,f\frac{d}{dt}\right),\left(Y,g\frac{d}{dt}\right)\in\Gamma(T(M\times\mathbb{R}))$ için

$$J\left(a\left(X,f\frac{d}{dt}\right)+b\left(Y,g\frac{d}{dt}\right)\right)=J\left(aX+bY,(af+bg)\frac{d}{dt}\right)$$

$$=(\varphi(aX+bY)-(af+bg)\xi,\eta(aX+bY)\frac{d}{dt})$$

dır. φ ve η lineer olduğundan

$$J\left(a\left(X,f\frac{d}{dt}\right)+b\left(Y,g\frac{d}{dt}\right)\right)$$

$$=(a\varphi(X)+b\varphi(Y)-af\xi-bg\xi,a\eta(X)\frac{d}{dt}+b\eta(Y)\frac{d}{dt})$$

$$=\left(a\varphi(X)-af\xi,a\eta(X)\frac{d}{dt}\right)+(b\varphi(Y)-bg\xi,b\eta(Y)\frac{d}{dt})$$

$$=a\left(\varphi(X)-f\xi,\eta(X)\frac{d}{dt}\right)+b(\varphi(Y)-g\xi,\eta(Y)\frac{d}{dt})$$

$$=aJ\left(X,f\frac{d}{dt}\right)+bJ\left(Y,g\frac{d}{dt}\right)$$

olur. Buradan J lineer bir dönüşümdür.

$ii.\forall\left(X,f\frac{d}{dt}\right)\in\Gamma(T(M\times\mathbb{R})\,)$ için

$$J^2\left(X,f\frac{d}{dt}\right)=J\left(J\left(X,f\frac{d}{dt}\right)\right)$$

$$=J\left(\varphi(X)-f\xi,\eta(X)\frac{d}{dt}\right)$$

$$=(\varphi(\varphi(X)-f(\xi)-\eta(X)\xi),\eta\big(\varphi(X)-f(\xi)\big)\frac{d}{dt})$$

dır. η lineer olduğundan

$$J^2\left(X,f\frac{d}{dt}\right)=(\varphi^2(X)-f\varphi(\xi)-\eta(X)\xi,(\eta\circ\varphi)(X)\frac{d}{dt}-f\eta(\xi)\frac{d}{dt})$$

olur. Tanım.2.2.1 ve Teorem 2.2.1 den

$$J^2\left(X,f\frac{d}{dt}\right)=(\varphi^2(X)-\eta(X)\xi,-f\frac{d}{dt})$$

$$=(-X+\eta(X)\xi-\eta(X)\xi,-f\frac{d}{dt})$$

$$=(-X,-f\frac{d}{dt})$$

$$=-I\left(X,f\frac{d}{dt}\right)$$

dır. $\forall \left(X, f\frac{d}{dt}\right) \in \Gamma(T(M \times \mathbb{R}))$ için

$$J^2\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = -I\left(X, f\frac{d}{dt}\right)$$

olduğundan

$$J^2 = -I$$

olur.

2.2.1. Sonuç:

Eş.2.2.10 ile tanımlanan J lineer dönüşümü $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır [Yano ve Kon, 1984].

2.2.4. Tanım:

M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere M üzerinde (1,1)-tipinden bir tensör alanı F olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için;

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y] + [FX,FY] - F[FX,Y] - F[X,FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F nin *Nijenhuis Torsiyon Tensörü* denir.

$F = J$ hemen hemen kompleks yapı olması halinde ise,

$$N_J(X,Y) = J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]$$

$$= -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]$$

dır [Yano ve Kon, 1984].

2.2.2. Sonuç:

N_F Nijenhuis Torsiyon tensörü bilineer ve anti-simetrik tensördür [Yano ve Kon, 1984].

2.2.4. Teorem:

(M,J) bir hemen hemen kompleks manifold olsun. M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ∇ olmak üzere M nin Nijenhuis Torsiyon tensörü

$$N_J(X,Y) = (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X - J(\nabla_X J)Y + J(\nabla_Y J)X$$

dir.

İspat:

$(\widetilde{M}^{2n+1},\phi,\xi,\eta,\tilde{g}\,)$ diferensiyellenebilir manifoldu için J nin Nijenhus tensörü

$$\begin{aligned} N(X,Y) &= [JX,JY] - [JX,Y] - [X,JY] - [X,Y] \\ &= (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X - J(\nabla_X J)Y + J(\nabla_Y J)X \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

dır. Eşitliği ispatlamak için;

$$\begin{aligned} [JX,JY] &= \nabla_{JX}JY - \nabla_{JY}JX \\ &= (\nabla_{JX}J)Y + J(\nabla_{JY}Y) - (\nabla_{JX}J)X - J(\nabla_{JX}X) \end{aligned}$$

$$J[JX,Y] = J(\nabla_{JX}Y) + J(\nabla_Y JX)$$

$$J[X,JY] = J(\nabla_X JY) - J(\nabla_{JY}X)$$

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

eşitlikleri Eş.2.2.11 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} N(X,Y) = (\nabla_{JX}J)Y + J(\nabla_{JX}Y) - (\nabla_{JY}J)X - (\nabla_{JY}X) - J(\nabla_{JX}Y) + J(\nabla_Y JX) \\ - J(\nabla_X JY) + J(\nabla_{JY}JX) - \nabla_X Y + \nabla_Y X \end{aligned}$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} N(X,Y) &= (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X + J(\nabla_Y JX) - J(\nabla_X JY) - \nabla_X Y + \nabla_Y X \\ &= (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X + J(J\nabla_Y X + (\nabla_Y J)X) - J(J\nabla_X Y + (\nabla_X J)Y) - \nabla_X Y \\ &\quad +\nabla_Y X \end{aligned}$$

$$= \left(\nabla_{JX}J\right)Y - \left(\nabla_{JY}J\right)X + J^2\nabla_Y X + J(\nabla_Y J)X - J^2\nabla_X Y - J(\nabla_X J)Y - \nabla_X Y$$

$$+\nabla_Y X$$

olur. $J^2 = -I$ olduğundan

$$N(X,Y) = \left(\nabla_{JX}J\right)Y - \left(\nabla_{JY}J\right)X - \nabla_Y X + J(\nabla_Y J)X + \nabla_X Y - J(\nabla_X J)Y - \nabla_X Y + \nabla_Y X$$

dır. Buradan

$$N(X,Y) = \left(\nabla_{JX}J\right)Y - \left(\nabla_{JY}J\right)X - J(\nabla_X J)Y + J(\nabla_Y J)X$$

olur.

2.2.5. Tanım:

(M,J) hemen hemen kompleks manifoldu verilsin. $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir [Yano ve Kon, 1984].

2.2.6. Tanım:

$M \times \mathbb{R}$ üzerinde J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı normaldir denir [Yano ve Kon, 1984].

2.2.7. Tanım:

M bir hemen hemen kompleks manifold ve M üzerinde hemen hemen kompleks yapı J olsun. $\forall\, X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g\big(J(X), J(Y)\big) = g(X,Y)$$

eşitliği sağlanacak şekilde M üzerinde bir g Riemann metriği varsa g ye *Hermit metrik* denir. M manifolduna da *hemen hemen Hermityan manifold* denir

[Yano ve Kon, 1984].

2.2.8. Tanım:

(M^{2n}, J) bir hemen hemen Hermitian manifold olsun. Eğer $[J,J] = 0$ ve $d\Phi = 0$ ise M^{2n} e *Kaehlerian manifold* denir.

2.3. Hemen Hemen Değme Metrik Manifold

2.3.1. Tanım:

(2n+1) boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold M olsun. M üzerinde hemen hemen değme yapısı (φ, ξ, η) olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g\big(\varphi(X), \varphi(Y)\big) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.3.1}$$

koşulunu sağlayan M üzerinde bir g Riemann metriği varsa (φ, ξ, η, g) yapısına *hemen hemen değme metrik yapı* , $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ beşlisine de *hemen hemen değme metrik manifold* denir.

Eş.2.3.1 de $Y = \xi$ alınırsa

$$g\big(\varphi(X), \varphi(\xi)\big) = g(X, \xi) - \eta(X)\eta(\xi)$$

olur. Burada $\eta(\xi) = 1$ ve $\varphi(\xi) = 0$ olduğundan

$$\eta(X) = g(X, \xi) \tag{2.3.2}$$

olur .

2.3.1. Teorem:

(φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısı ile birlikte (2n+1)-boyutlu diferensiyellenebilir manifoldu M verilsin. $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g\big(\varphi(X), \varphi(Y)\big) = g(X, Y) - \eta(Y)\eta(X)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği daima vardır [Blair, 1976].

2.3.1. Sonuç:

$(2n + 1)$ boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ olsun.

$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\varphi(X), Y) = -g(X, \varphi(Y)) \tag{2.3.3}$$

dır. Yani φ , g ye göre anti-simetrik tensör alanıdır.

İspat:

$\forall\, X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g\big(\varphi(X), \varphi(Y)\big) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

eşitliğinde X yerine $\varphi(X)$ alınırsa

$$g\big(\varphi^2(X), \varphi(Y)\big) = g(\varphi(X), Y) - \eta\big(\varphi(X)\big)\eta(Y)$$

olur. $\eta\big(\varphi(X)\big) = 0$ olduğundan

$$g\big(-X + \eta(X)\xi, \varphi(Y)\big) = g(\varphi(X), Y)$$

dır. g lineer olduğundan

$$-g\big(X, \varphi(Y)) + \eta(X) g(\xi, \varphi(Y)\big) = g(\varphi(X), Y)$$

olup $\eta\ o\ \varphi = 0$ olduğundan

$$-g\big(X, \varphi(Y)\big) = g(\varphi(X), Y)$$

olur. Bu ise φ nin anti-simetrik bir tensör alanı olması demektir.

2.3.2. Sonuç:

g metriğine karşılık gelen matris A ise $\forall\, X, Y \in \Gamma(M)$ için

$$g(X, Y) = X^{\intercal} \mathrm{A}\, Y \tag{2.3.4}$$

olmak üzere

$$\varphi : \Gamma(TM) \xrightarrow{lineer} \Gamma(TM)$$

$$X \longrightarrow \varphi(X) = BX$$

$$Y \longrightarrow \varphi(Y) = BY$$

için

$$B^{\intercal}\mathrm{A} = -\mathrm{A}B \tag{2.3.5}$$

dır.

İspat:

φ anti-simetrik olduğundan

$$g(BX, Y) = -g(X, BY)$$

dır. Eş.2.3.4 den

$$(BX)^{\intercal}\mathrm{A}\, Y = -X^{\intercal}\mathrm{A}\,(BY)$$

olup, eşitliği soldan $(X^{\intercal})^{-1}$ ve sağdan Y^{-1} ile çarpılırsa

$$B^{\intercal}\mathrm{A} = -\mathrm{A}B$$

olur. Özel olarak A = I olursa

$$B^{\intercal} = -B$$

olur. Buradan da φ ye karşılık gelen matris anti-simetriktir.

2.3.2. Tanım:

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. $\forall\, X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\Phi(X, Y) = g\big(X, \varphi(Y)\big) \tag{2.3.6}$$

şeklinde tanımlı Φ tensörüne hemen hemen değme metrik manifoldun *İkinci Temel Formu* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.3.1. Örnek:

Örnek.2.1.1 deki $(R^3, \varphi, \xi, \eta)$ hemen hemen değme manifoldun da bir g metriğini

$$g = \frac{1}{4}((1 + y^2)\, dx^2 + dy^2 + dz^2 - 2y\, dxdz)$$

olarak tanımlansın. R^3 de g metriğinin matris yazılımı

$$g = a_{11}\, dx^2 + a_{22}dy^2 + a_{33}dz^2 + 2a_{12}dxdy + 2a_{13}dxdz + 2a_{23}dydz$$

dır. Ayrıca g ye karşılık gelen matris simetrik olduğundan g metriğinin matris yazılımı

$$g = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde olup $(R^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ beşlisi bir hemen hemen değme metrik manifold olur.

$$\varphi(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ yx_2 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}.\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ yy_2 \end{bmatrix}$$

$$\eta(X) = \frac{1}{2}(x_3 - yx_1)$$

$$\eta(Y) = \frac{1}{2}(y_3 - yy_1)$$

$$g\big(\varphi(X), \varphi(Y)\big) = (\varphi X)^T\, g(\varphi Y)$$

olduğundan

$$g\big(\varphi(X), \varphi(Y)\big) = [\, x_2 \quad -x_1 \quad yx_2].\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ yy_2 \end{bmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{4}.[\, x_2 \quad -x_1 \quad 0].\begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ yy_2 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan

$$g\big(\varphi(X), \varphi(Y)\big) = \frac{1}{4}(\, x_2\, y_2 + x_1 y_1)$$

$$\eta(Y)\eta(X)=\frac{1}{2}\,(x_3-\,yx_1).\frac{1}{2}\,(y_3-\,yy_1)$$

$$=\tfrac{1}{4}(\,x_3y_3-\,yx_3y_1-\,yx_1y_3+\,y^2x_1\,y_1$$

dır. Böylece

$$g(X,Y)=\frac{1}{4}((1+y^2)x_1y_1-\,yx_1y_3+\,x_2\,y_2-\,yx_3y_1+x_3y_3)$$

$$=\tfrac{1}{4}(x_1y_1+\,x_2\,y_2)+\tfrac{1}{4}(x_3y_3+y^2x_1y_1-\,yx_1y_3-\,yx_3y_1)$$

$$=g\big(\varphi(X),\varphi(Y)\big)+\eta(Y)\eta(X)$$

dır.

Şimdi $\eta(X)=g(X,\xi)$ olduğu gösterilecektir.

$$g(X,\xi)=[x_1\quad x_2\quad x_3].\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1+y^2 & 0 & -y\\ 0 & 1 & 0\\ -y & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$=\tfrac{1}{4}[x_1\quad x_2\quad x_3]\begin{bmatrix}-2y\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$=\tfrac{1}{2}(x_3-yx_1)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\eta(X)=\frac{1}{2}(x_3-yx_1)$$

olduğundan

$$\eta(X)=g(X,\xi)$$

olup $(\mathbb{R}^3,\varphi,\xi,\eta,g)$ beşlisi bir hemen hemen değme metrik manifold olur. $\mathbb{R}^3$ ün ikinci temel formu $\forall X,Y\in\ \Gamma(T\mathbb{R}^3)$ için

$$\Phi(X,Y)=g\big(X,\varphi(Y)\big)$$

$$= \frac{1}{4} X^{\intercal} \begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ yy_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} X^{\intercal} \begin{bmatrix} (1+y^2)y_2 - y^2 y_2 \\ -y_1 \\ -yy_2 + \quad yy_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \left(x_1 y_2 - x_2 y_1\right)$$

bulunur.

2.3.3. Tanım:

(2n+1)-boyutlu hemen hemen değme metrik manifold $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ olsun. Eğer $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$d\eta(X,Y) = g\big(X, \varphi(Y)\big) \tag{2.3.7}$$

oluyorsa (φ, ξ, η, g) dörtlüsüne *değme metrik yapı* ve $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ ye de *değme metrik manifold* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.3.3. Sonuç:

$\Phi = d\eta$ eşitliğini sağlayan (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı aynı zamanda değme metrik yapıdır [Yano ve Kon, 1984].

2.3.4. Sonuç:

Her değme metrik manifoldu aynı zamanda değme manifoldtur [Yano ve Kon, 1984].

2.3.2. Teorem:

M üzerinde (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı için

$$\Phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \frac{1}{2} [g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X)] \tag{2.3.8}$$

dır.

İspat:

η 1-form olduğundan $\forall\, X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$2d\eta(X,Y) = X\big(\eta(Y)\big) - Y\big(\eta(X)\big) - \eta([X,Y]) \qquad (2.3.9)$$

dır.

(φ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapı olduğundan

$$\eta(X) = g(X,\xi)$$
$$\eta(Y) = g(Y,\xi)$$

ve

$$\eta([X,Y]) = g([X,Y],\xi)$$

ifadeleri Eş.2.3.9 da yerine yazılırsa

$$2d\eta(X,Y) = X(g(Y,\xi)) - Y(g(X,\xi)) - g([X,Y],\xi) \qquad (2.3.10)$$

elde edilir. Buradan

$$X\big(g(Y,\xi)\big) = g(\nabla_X Y,\xi) - g(Y,\nabla_X \xi)$$
$$Y\big(g(X,\xi)\big) = g(\nabla_Y X,\xi) - g(X,\nabla_Y \xi)$$

eşitlikleri Eş.2.3.10 da yerine yazılırsa

$$2d\eta(X,Y) = g(Y,\nabla_X \xi) - g(X,\nabla_Y \xi)$$

bulunur ve

$$d\eta(X,Y) = \Phi(X,Y)$$

olduğundan

$$\Phi(X,Y) = \frac{1}{2}[g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X)]$$

olur.

2.3.3. Teorem:

$(2n+1)$-boyutlu diferensiyellenebilir Riemann manifoldu M, (φ,ξ,η,g) değme metrik yapısı verilsin. $\forall\, X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$d\eta(X,\xi)=0 \tag{2.3.11}$$

ve

$$d\eta(\varphi(X),Y)+d\eta\big(X,\varphi(Y)\big)=0 \tag{2.3.12}$$

dır [Yano ve Kon, 1984].

İspat:

$\forall\, X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$d\eta(X,Y)=g\big(X,\varphi(Y)\big)$$

eşitliğinde Y yerine ξ alınırsa

$$d\eta(X,\xi)=g\left(X,\underbrace{\varphi(\xi)}_{0}\right)$$

$$d\eta(X,\xi)=0$$

olur.

$$d\eta(\varphi(X),Y)=g(\varphi(X),\varphi(Y))$$

$$d\eta\big(X,\varphi(Y)\big)=g(X,\varphi^2(Y))$$

dır. φ anti-simetrik olduğundan

$$d\eta\big(X,\varphi(Y)\big)=-g(\varphi(X),\varphi(Y))$$

dır. Buradan

$$d\eta(\varphi(X),Y)+d\eta\big(X,\varphi(Y)\big)=0$$

dır.

2.4.Sasakian Manifoldlar

2.4.1. Tanım:

$(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme manifoldu M olsun. Eğer M nin değme yapısı (φ, ξ, η, g) normal ise M bir *Sasakian yapıya* ya da *normal değme metrik yapıya* sahiptir denir. Sasakian yapıya sahip $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ beşlisine ise *Sasakian manifold (veya normal değme metrik manifold)* denir [Yano ve Kon, 1984].

2.4.1. Teorem:

(2n+1) boyutlu bir M Riemann manifoldu üzerinde bir (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı bir Sasakian yapıdır. $\Leftrightarrow$ $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X \tag{2.4.1}$$

dır [Yano and Kon 1984].

2.4.1. Sonuç:

M bir Sasakian manifold ve M nin eğrilik tensörü R olmak üzere

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y \tag{2.4.2}$$

dır [Yano and Kon 1984].

İspat:

M bir Sasakian manifold olsun. Bu takdirde $\forall\, X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\forall\, \xi \in \Gamma(TM)$ vektör alanları için R eğrilik tensörü

$$R(X, Y)\xi = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{(X,Y)}\xi$$

$$= \nabla_X(\nabla_Y \xi) - \nabla_Y(\nabla_X \xi) - \nabla_{(X,Y)}\xi$$

dır. $\nabla_X \xi = -\varphi(X)$ den

$$R(X, Y)\xi = \nabla_X\big(-\varphi(Y)\big) - \nabla_Y\big(-\varphi(X)\big) - (-\varphi([X, Y]))$$

$$= -\nabla_X\big(\varphi(Y)\big) + \nabla_Y\big(\varphi(X)\big) + \varphi([X,Y])$$

dır. Eş.2.4.2 den

$$R(X,Y)\xi = -(\nabla_X\varphi)Y - \varphi(\nabla_X Y) + (\nabla_Y\varphi)X + \varphi(\nabla_Y X) + \varphi([X,Y])$$

$$= -(\nabla_X\varphi)Y + (\nabla_Y\varphi)X - \varphi(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y])$$

$$= -(\nabla_X\varphi)Y + (\nabla_Y\varphi)X$$

elde edilir. Ayrıca Eş.2.4.1 eşitliğinden

$$R(X,Y)\xi = g(X,Y)\xi + \eta(Y)X + g(Y,X)\xi - \eta(X)Y$$

$$= \eta(Y)X - \eta(X)Y \qquad (2.4.3)$$

olur.

2.4.2. Teorem:

Bir birim ξ Killing vektör alanına sahip olan (2n+1)-boyutlu bir Riemann manifoldu M ve M nin eğrilik tensörünü R olsun. Bu durumda M bir Sasakian manifoldtur. $\Leftrightarrow$ $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X,\xi)Y = -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X \qquad (2.4.4)$$

dır [Yano and Kon 1984].

İspat:

$\Longrightarrow$:

M bir Sasakian manifold olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için ve $\forall\xi \in \Gamma(TM)$ Killing vektör alanı için R eğrilik tensörü

$$R(X,\xi)Y = \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_{\nabla_X Y}\xi$$

$$= \nabla_X(\nabla_Y\xi) - \nabla_{\nabla_X Y}\xi$$

dır. $\nabla_X\xi = -\varphi(X)$ den

$$R(X,\xi)Y = \nabla_X\big(-\varphi(Y)\big) - \big(-\varphi(\nabla_X Y)\big)$$

$$= -\nabla_X\big(\varphi(Y)\big) + \varphi(\nabla_X Y)$$

dır. Eş.2.4.2 den

$$R(X,\xi)Y = -\nabla_X\varphi(Y) - \varphi(\nabla_X Y) + \varphi(\nabla_X Y) +$$

$$= -\nabla_X\varphi(Y)$$

elde edilir. Ayrıca Eş.2.4.1 den

$$R(X,\xi)Y = -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X$$

olur.

$\Longleftarrow$:

M üzerinde bir ξ Killing vektör alanı seçilirse Eş.2.4.4 sağlandığından Teorem 2.4.1 gereğince M bir Sasakian manifoldtur.

2.4.2. Sonuç:

M bir Sasakian manifold olsun. ξ Killing vektör alanı olmak üzere $\forall\, X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X,\xi)Y = -(\nabla_X\varphi)Y \tag{2.4.5}$$

dır [Yano and Kon 1984].

2.4.3. Sonuç:

M bir Sasakian manifold olsun. ξ Killing vektör alanına ortagonal olan X birim vektörleri için

$$R(X,\xi)X = \xi$$

dır [Yano and Kon 1984].

2.4.3. Teorem:

(2n+1)-boyutlu bir Riemann manifoldu M ve M üzerinde bir Killing vektör alanı ξ verilsin. M nin eğirilik tensörünü R ile gösterelim. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$

$$R(X,\xi)Y = -g(\xi,Y)X - g(\xi,X)Y$$

oluyorsa M bir Sasakian manifoldtur.

İspat:

M bir Sasakian manifold olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(M)$ Killing vektör alanı için R eğrilik tensörü

$$R(X,\xi)Y = \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_{\nabla_X Y}\xi$$

$$= \nabla_X(\nabla_Y \xi) - \nabla_{\nabla_X Y}\xi$$

dır. $\nabla_X \xi = -\varphi(X)$ den

$$R(X,\xi)Y = \nabla_X\big(-\varphi(Y)\big) - \big(-\varphi(\nabla_X Y)\big)$$

$$= -\nabla_X\big(\varphi(Y)\big) + \varphi(\nabla_X Y)$$

dır. Eş.2.4.1 den

$$R(X,\xi)Y = -\nabla_X(\varphi)Y - \varphi(\nabla_X Y) + \varphi(\nabla_X Y)$$

$$= -\nabla_X(\varphi)Y$$

elde edilir. Eş.2.4.3 ve $g(\xi,X) = \eta(X)$ den

$$g((\nabla_X \varphi)Y, Z = g(-R(X,\xi)Y, Z)$$

$$= g(R(\xi,X)Y, Z)$$

$$= g(R(Y,Z)\xi, X)$$

$$= g(\eta(Z)Y - \eta(Y)Z, X)$$

$$= \eta(Z)g(Y,X) - g(Z, \eta(Y)X)$$

$$= g(g(Y,X)\xi,Z) - g(\eta(Y)X,Z)$$

$$= g(g(Y,X)\xi - (\eta(Y)X,Z)$$

elde edilir. Bu ifade $\forall Z \in \Gamma(TM)$ için sağlandığından ve g metriği non-dejenere olduğundan

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X,Y)\xi - \eta(Y)X$$

olur. Eş.2.4.1 den M Sasakian manifoldtur.

2.4.4. Sonuç:

(2n+1)-boyutlu bir Sasakian manifold (M,φ,ξ,η,g) olsun $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X,Y)\varphi Z = \varphi(R(X,Y)Z) + g(\varphi(X),Z)Y - g(Y,Z)\varphi(X) + g(X,Z)\varphi(Y) - g(\varphi(Y),Z)X \quad (2.4.6)$$

dır [Yano and Kon 1984].

2.4.5. Sonuç:

(2n+1)-boyutlu bir Sasakian manifold (M,φ,ξ,η,g) olsun. $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X,Y)Z = -\varphi(R(X,Y)\varphi(Z)) + g(Y,Z)X - g(X,Z)Y - g(\varphi(Y,Z)\varphi(X) + g(\varphi(X),Z)\varphi(Y) \quad (2.4.7)$$

dır [Yano and Kon 1984].

İspat:

Eş.2.4.6 ya φ dönüşümü uygulanırsa

$$\varphi\big(R(X,Y)\varphi(Z)\big) = \varphi^2 R(X,Y)Z + g(\varphi(X),Z)\varphi Y - g(Y,Z)\varphi^2(X) + g(X,Z)\varphi^2(Y) - g(\varphi(Y),Z)\varphi(X)$$

olur. Böylece Eş.2.2.1 den

$$\varphi\big(R(X,Y)\varphi(Z)\big) = -R(X,Y)Z + g(\varphi(X),Z)\varphi Y + g(Y,Z)X$$
$$-g(X,Z)Y - g(\varphi(Y),Z)\varphi(X)$$

olur. Buradan

$$R(X,Y)Z = -\varphi(R(X,Y)\varphi(Z)) + g(\varphi(X),Z)\varphi(Y) + g(Y,Z)X - g(X,Z)Y$$
$$- g(\varphi(Y),Z)\varphi(X)$$

dır.

2.4.2. Tanım:

Sasakian yapısı (φ,ξ,η,g) olan (2n+1)-boyutlu bir Sasakian manifold M olsun. ξ Killing vektör alanına ortogonal olan bir X birim vektörü için $\{X,\varphi(X)\}$ ortonormal olacak şekilde bulunabiliyor ise $\{X,\varphi(X)\}$ düzlemi ile M nin ara kesitine M de bir *φ-kesit* adı verilir. Bu durumda

$$K\big(X,\varphi(X)\big) = g\Big(R\big(X,\varphi(X)\big)\varphi(X),X\Big) \qquad (2.4.8)$$

kesit eğriliğine M nin bir *φ-kesit eğriliği* adı verilir [Yano and Kon 1984].

2.4.3. Tanım:

Sasakian yapısı (φ,ξ,η,g) olan (2n+1)-boyutlu bir Sasakian manifold M olsun. M sabit φ-kesit eğriliğine sahip ve bu eğrilik c ise *Sasakian uzay formu* olarak adlandırılır ve $M(c)$ ile gösterilir [Verstraelen and Vrancken 1988].

2.4.4. Teorem:

$M(c)$ Sasakian uzay formunun R eğrilik tensörü için $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$olmak üzere

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{4}(c+3)[g\big((Y,Z)X - g(X,Z)Y\big] - \frac{1}{4}(c-1)[\eta(X)\eta(Z)Y$$
$$- \eta(Y)\eta(Z)X + g(X,Z)\eta(Y)\xi - g(Y,Z)\eta(X)\xi + g(\varphi(Y),Z)\varphi(X)$$
$$- g(\varphi(X),Z)\varphi(Y) + 2g(\varphi(X),Z)\varphi(Z)]$$

dır [Yano and Kon 1984].

2.4.4. Tanım:

$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için P *kesit eğriliği*

$$P(X,Y;Z,W) = g(\varphi(R(X,Y)Z),W) - g(R(X,Y)\varphi(Z),W)$$

$$= g(Y,Z)g(\varphi(X),W) - g(\varphi(X)Z)g(Y,W) + g(\varphi(Y),Z)g(X,W)$$

$$-g(X,Z)g(\varphi(Y),W) \qquad (2.4.9)$$

ile tanımlanır [Yano and Kon 1984].

2.4.5. Teorem:

P kesit eğriliği için

$$P(X,Y;Z,W) = -P(Z,W;X,Y)$$

dır.

İspat:

Eş.2.4.9 dan

$$P(X,Y;Z,W) = g(W,X)g(\varphi(Z),Y) - g(\varphi(Z),Xg(W,Y) + g(\varphi(W),X)g(Z,Y)$$
$$- g(Z,X)g(\varphi(W),Y)$$

$$= g(W,X)g(Z,\varphi(Y)) + g\big(Z,\varphi(X)\big)g(W,Y) -$$

$$g\big(W,\varphi(X)\big)g(Z,Y) + g(Z,X)g(W,\varphi(Y))$$

$$= -P(Z,W;X,Y)$$

dır.

3. $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\lambda})$ YAPI

3.1. $(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{\lambda})$ Yapı

3.1.1. Tanım:

m - boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold M ve M üzerinde f; (1,1) tipinden bir tensör alanı , U ile V vektör alanları, u ile v 1-formlar ve λ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olmak üzere her X vektör alanı için

$$f^2X = -X + u(X)U + v(X)V \tag{3.1.1}$$

$$u(fX) = \lambda v(X), \qquad fU = -\lambda V \tag{3.1.2}$$

$$v(fX) = -\lambda u(X), \qquad fV = \lambda U \tag{3.1.3}$$

$$u(U) = v(V) = 1 - \lambda^2, \qquad u(V) = v(U) = 0 \tag{3.1.4}$$

özellikleri sağlanıyorsa M manifoldu (f, U, V, u, v, λ) *yapısına sahiptir* denir.

3.3.1. Teorem:

(f, U, V, u, v, λ) yapısına sahip bir diferensiyellenebilir manifoldun boyutu çifttir.

İspat:

$\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $p \in M$ olmak üzere $\lambda^2(p) \neq 1$ olsun. Bu durumda Eş.3.1.4 den

$$U_p \neq 0 \qquad , \qquad V_p \neq 0$$

dır. Ayrıca $U_p ve\ V_p$ vektörleri lineer bağımsızdır. Gerçekten a ve b iki reel sayı olmak üzere;

$$aU_p + bV_p = 0$$

ifadesinin $u_p$ve v_p 1- formları altında görüntüsü alınır ve Eş.3.1.4 kullanılırsa

$$u_p\big(aU_p + bV_p\big) = au_p\big(U_p\big) + b\,\underbrace{u_p\big(V_p\big)}_{0} = au_p(U) = a(1 - \lambda^2(p)) = 0$$

ve

$$v_p(aU_p + bV_p) = a\underbrace{v_p(U)}_{0} + bv_p(V) = bv_p(V) = b(1-\lambda^2) = 0$$

olur. $\lambda^2(p) \neq 1$ olduğundan $a = b = 0$ olduğu açıktır. Buradan U_p ve V_p vektörleri lineer bağımsızdır. $T_P(M)$ yi geren m tane lineer bağımsız vektör

$$X_{1_p} = U_p \text{ ve } X_{2_p} = V_p,\ X_{3_p} \dots, X_{m_p}$$

olarak alınırsa Eş.3.1.4 den

$$u_p\left(X_{\alpha_p}\right) = 0,\ v_p\left(X_{\alpha_p}\right) = 0 \qquad (\alpha = 3, \dots m)$$

dır. Bu ifadeler Eş.3.1.1 de yerine yazılırsa

$$f^2X_{\alpha_p} = -X_{\alpha_p} + \underbrace{u\left(X_{\alpha_p}\right)}_{0}U_p + \underbrace{v\left(X_{\alpha_p}\right)}_{0}V_p$$

$$f^2X_{\alpha_p} = -X_{\alpha_p} \quad (\alpha = 3, \dots, m)$$

olur.

$$V_P = Sp\left\{X_{3_p}, X_{4_p}, \dots, X_{m_p}\right\}$$

olmak üzere

$$V_P \subset T_P(M)$$

olup f, V_P üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır. O halde V_P nin boyutu çifttir.

boy $(T_P(M)) =$ boy $(V_P) + 2$

olduğundan $T_P(M)$ nin boyutu çifttir.

Şimdi $p \in M$ noktasında $\lambda^2(p) = 1$ olsun. Bu durumda Eş.3.1.4 den

$$u_p(U_p) = 0 \quad u_p(V_p) = 0$$

$$v_p(U_p) = 0 \quad v_p(V_p) = 0$$

dır. Ayrıca Eş.3.1.2 ve Eş.3.1.3 den;

$u_p \neq 0$ ise $v_p \neq 0$

veya

$u_p = 0$ ise $v_p = 0$

dır.

$u_p \neq 0$, $v_p \neq 0$ alınırsa u_p ve v_p lineer bağımsızdır. Gerçekten a, b iki reel sayı olmak üzere

$au_p + bv_p = 0$

olsun. Eş.3.1.2 ve Eş.3.1.3 den

$$\left((au_p + bv_p) \circ f\right)(X_p) = 0$$

$$a(u_p \circ f)(X_p) + b(v_p \circ f)(X_p) = 0$$

$$au_p\left(f(X_p)\right) + bv_p\left(f(X_p)\right) = 0$$

$$a\lambda(p)v_p(X_p) + b(-\lambda(p)u_p)(X_p) = 0$$

$$\lambda(p)(av_p(X_p) - bu_p(X_p)) = 0$$

$$\lambda(p)(av_p - bu_p)(X_p) = 0 \qquad , \forall X_p \in T_P(M)$$

dır. Buradan

$\lambda(p)(av_p - bu_p) = 0$

olur. Burada $\lambda(p) \neq 0$ olduğundan

$av_p - bu_p = 0$

dır. $au_p + bv_p = 0$ ile , $av_p - bu_p = 0$ ifadeleri göz önüne alınırsa

$abu_p + b^2 v_p = 0$

$a^2 v_p - abu_p = 0$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$(a^2 + b^2)v_p = 0$

olup $v_p \neq 0$ olduğundan

$a^2 + b^2 = 0$

bulunur. Buradan

$a = b = 0$

olur. O halde u_p ve v_p lineer bağımsızdır. p noktasında n tane lineer bağımsız kovektör olan $w_{1_p} = u_p,\ w_{2_p} = v_p,\ w_{3_p},\ \dots,\ w_{m_p}$ ler $T_P{}^*(M)$ kotanjant uzayının bir bazıdır. Bu bazın dual bazı

$(X_{1_p},\ X_{2_p},\ X_{3_p}, \dots, X_{(m-1)_p}, X_{m_p})$

dır.

$\lambda^2(p) = 1$ olup

$u_p(V_p) = v_p(U_p) = 0$

dır. Burada U_p ve V_p lineer bağımsız olduğundan

$X_{(m-1)_p} = U_p \quad , \quad X_{m_p} = V_p$

olarak seçilebilir. Eş.3.1.4 den

$u_p\left(X_{\alpha_p}\right) = 0,\ \ v_p\ \left(X_{\alpha_p}\right) = 0 \quad \alpha = 3, \dots m$

dır. Eş.3.1.1den

$f^2\, X_{\alpha_p} = -\, X_{\alpha_p}$

olur. f , $V_P = Sp\left\{X_{3_p}, X_{4_p}, \ldots\ X_{(m-1)_p}, X_{m_p}\right\}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olup V_P nin boyutu çifttir. Bu durum $T_P(M)$ nin boyutunun çift olduğunu ispatlar.

Eğer U_p ve V_p lineer bağımlı ise seçilen a ve b sayıları için

$$aU_p + bV_p = 0$$

dır . O halde

$$a^2 + b^2 \neq 0$$

dır. $aU_p + bV_p = 0$ eşitliği Eş.3.1.2 ve Eş.3.1.3 den

$$f(p)\ (aU_p + bV_p) = 0$$

$$af(p)U_p + bf(p)V_p = 0$$

olur. Eş.3.1.2 ve Eş.3.1.3 den

$$a\big(-\lambda(p)V_p\big) + b\lambda(p)U_p = 0$$

$$\lambda(p)(-aV_p + bU_p) = 0$$

dır. $\lambda(p) \neq 0$ olduğundan

$$-aV_p + bU_p = 0$$

olur.

a ve b reel sayıları sıfırdan farklı olduklarından

$$U_p = V_p = 0$$

dır. Eş. 3.1.1 ifadesinde $U_p = V_p = 0$ için

$$f^2X_{\alpha_p} = -X_{\alpha_p} + u_p\left(X_{\alpha_p}\right)\underbrace{U_p}_{0} + v_p\left(X_{\alpha_p}\right)\underbrace{V_p}_{0} \qquad \alpha = 3, \ldots\ m$$

$f^2 X_{\alpha_p} = -X_{\alpha_p}$

elde edilir.

$T_P(M)$ deki herhangi X_{α_p} vektörü için

$f^2 X_{\alpha_p} = -X_{\alpha_p}$

olduğundan $T_P(M)$ nin boyutu çifttir.

Ayrıca $u = 0$, $v = 0$ olması durumunda

$$f^2 X_{\alpha_p} = -X_{\alpha_p} + u_p\left(X_{\alpha_p}\right)U_p + v_p\left(X_{\alpha_p}\right)V_p$$

$$= -X_{\alpha_p}$$

olur. Buradan $T_P(M)$ nin boyutu çifttir. Bu ise ispatı tamamlar.

3.3.2. Tanım:

(f, U, V, u, v, λ) yapısına sahip bir diferensiyellenebilir manifold M olsun. $(M \times \mathbb{R}^2)$ manifoldu üzerinde

$$(J) = \begin{bmatrix} [f]_{m\times m} & [U]_{m\times 1} & [V]_{m\times 1} \\ [-u]_{1\times m} & [0]_{1\times m} & [-\lambda]_{1\times 1} \\ [-v]_{1\times m} & [\lambda]_{1\times 1} & [0]_{m\times 1} \end{bmatrix}_{(m+2)\times(m+2)} \tag{3.1.5}$$

şeklinde tanımlı (1,1)- tipinden J tensör alanı tanımlanır ve ayrıca Eş.3.3.1, Eş.3.1.2 ve Eş.3.1.4 kullanılırsa

$J^2 = -I$

dır. Gerçekten

$$J^2 = \begin{pmatrix} [f]_{m\times m} & [U]_{m\times 1} & [V]_{m\times 1} \\ [-u]_{1\times m} & [0]_{1\times m} & [-\lambda]_{1\times 1} \\ [-v]_{1\times m} & [\lambda]_{1\times 1} & [0]_{m\times 1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [f]_{m\times m} & [U]_{m\times 1} & [V]_{m\times 1} \\ [-u]_{1\times m} & [0]_{1\times m} & [-\lambda]_{1\times 1} \\ [-v]_{1\times m} & [\lambda]_{1\times 1} & [0]_{m\times 1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & & f_{1m} & U_1 & V_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2m} & U_2 & V_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & & f_{3m} & U_3 & V_3 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ f_{m1} & f_{m2} & f_{m3} & & f_{mm} & U_m & V_m \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & \cdots & -u_m & 0 & -\lambda \\ -v_1 & -v_2 & -v_3 & & -v_m & \lambda & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & & f_{1m} & U_1 & V_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & \cdots & f_{2m} & U_2 & V_2 \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & & f_{3m} & U_3 & V_3 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ f_{m1} & f_{m2} & f_{m3} & & f_{mm} & U_m & V_m \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & \cdots & -u_m & 0 & -\lambda \\ -v_1 & -v_2 & -v_3 & & -v_m & \lambda & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} {f_{11}}^2-u_1(U_1)-v_1(V_1) & 0 & \cdots & 0 & f_{11}+\lambda V_1 & f_{11}V_1-\lambda U_1 \\ 0 & {f_{22}}^2-u_2(U_2)-v_2(V_2) & & & f_{22}+\lambda V_2 & f_{22}V_2-\lambda U_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {f_{mm}}^2-u_m(U_m)-v_m(V_m) & f_{mm}+\lambda V_m & f_{mm}V_m-\lambda U_m \\ -u_1 f_{11}+\lambda v_1 & -u_2 f_{22}+\lambda v_2 & & -u_m f_{mm}+\lambda v_m & -u_1(U_1)-\lambda^2 & -u_1(U_1) \\ -v_1 f_{11}-\lambda u_1 & -v_2 f_{22}-\lambda u_2 & & -v_m f_{mm}-\lambda u_m & -v_1(U_1) & -v_1(V_1)+\lambda^2 \end{bmatrix}$$

olur. Eş.3.1.1, Eş.3.1.2, Eş 3.1.3 ve Eş.3.1.4 den

$$J^2=\begin{bmatrix} [-I]_{m\times m} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{(m+2)\times(m+2)}$$

$$J^2=-I \tag{3.1.6}$$

olur .

Buradan J, (1,1)-tipinden tensör alanı $M\times\mathbb{R}^2$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır.

O halde $(M\times\mathbb{R}^2,\ J\ )$ bir hemen hemen kompleks manifoldtur. Hemen hemen kompleks yapı J nin Nijenhuis tensörü

$$N(X,Y)=J^2[X,Y]+[J(X),J(Y)]-J[J(X),Y]-J[X,J(Y)]$$

$$=-[X,Y]+[J(X),J(Y)]-J[J(X),Y]-J[X,J(Y)] \tag{3.1.7}$$

dır .

$\forall\ X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$S(X,Y)=N(X,Y)+du\,(X,Y)U+dv\,(X,Y)V \tag{3.1.8}$$

şeklinde tanımlı (1,2) tipinden tensör alanına *torsiyon tensör alanı* denir.

3.3.3. Tanım:

M diferensiyellenebilir manifoldu (f, U, V, u, v, λ) yapıya sahip olsun.

$\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$S(X, Y) = 0 \tag{3.1.9}$$

ise (f, U, V, u, v, λ) yapısı *normaldir* denir.

3.3.4. Tanım:

$(M \times \mathbb{R}, J)$ hemen hemen değme manifoldu verilsin. $N_J = 0$ ise J hemen hemen kompleks yapıya *integrallenebilir* denir.

3.3.5. Tanım:

Eğer $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (f, U, V, u, v, λ) yapısına *normaldir* denir.

3.3.6. Tanım:

M diferensiyellenebilir manifoldu (f, U, V, u, v, λ) yapısına sahip olsun

$$g(U, X) = u(X) \tag{3.1.10}$$

$$g(V, X) = v(X) \tag{3.1.11}$$

ve

$$g(fX, fY) = g(X, Y) - u(X)u(Y) - v(X)\,v(Y) \tag{3.1.12}$$

şartları sağlanacak şekilde M üzerinde bir g Riemann metriği varsa (f, U, V, u, v, λ) yapısına bir (f, U, V, u, v, λ) *metrik yapı* denir. Bazen bu yapı (f, g, u, v, λ) ile gösterilir.

3.3.7. Tanım:

Ω , M üzerinde $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\Omega(X, Y) = g(fX, Y) \tag{3.1.13}$$

şeklinde tanımlı (0,2)- tipinden bir tensör alanına M nin *temel iki formu* denir.

3.3.2. Teorem:

M nin temel iki formu anti-simetriktir. Yani $\forall\, X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\Omega(X,Y) = -\Omega(Y,X) \tag{3.1.14}$$

dır.

İspat:

Temel 2-formun tanımından

$$\Omega(X,Y) = g(fX,Y)$$

dır. Eş.3.1.12 den

$$g(X,Y) = g(fX,fY) + u(X)u(Y) + v(X)\,v(Y)$$

dır. Bu eşitlikte X yerine fX alınırsa

$$g(fX,Y) = g(f^2X,fY) + u(fX)u(Y) + v(fX)\,v(Y)$$

olur. Buradan Eş.3.1.1 kullanılırsa

$$\Omega(X,Y) = g(-X + u(X)U + v(X)V, fY) + u(fX)u(Y) + v(fX)\,v(Y)$$

dır. Buradan

$$\Omega(X,Y) = g(-X,fY) + u(X)g(U,fY) + v(X)g(V,fY) + u(fX)u(Y)$$
$$+ v(fX)\,v(Y)$$

olur. Eş.3.1.10 ve Eş 3.1.11 den

$$\Omega(X,Y) = g(-X,fY) + u(X)u(fY) + v(X)v(fY) + u(fX)u(Y) + v(fX)\,v(Y)$$

dır. Eş.3.1.13, Eş.3.1.2 ve Eş.3.1.3 den

$$\Omega(X,Y) = -\Omega(Y,X) + \lambda v(Y)u(X) - \lambda u(Y)v(X) + \lambda v(X)u(Y) - \lambda u(X)v(Y)$$

bulunur. Buradan

$\Omega(X,Y) = -\Omega(Y,X)$

dır.

3.2. $(\boldsymbol{f},\boldsymbol{U},\boldsymbol{V},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{\lambda})$ Yapısına Örnekler

(f,U,V,u,v,λ) yapısına verilecek olan ilk örnekte bir hemen hemen değme metrik manifoldun bir hiperyüzeyi üzerinde bir (f,g,u,v,λ) metrik yapısına sahip olduğu gösterilecektir. İkinci örnekte ise (2n+2) boyutlu hemen hemen bir Hermityan manifoldun (kompleks hiperyüzeyin) 2n-boyutlu altmanifoldunun bir (f,g,u,v,λ) – yapısına sahip olduğu gösterilecektir.

3.2.1. Örnek:

$\bar{M}$, (2n+1) boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold ve $\bar{M}$ üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapı $(\phi\ ,\xi\ ,\eta\ ,g)$ olsun. $\bar{M}$ deki herhangi bir vektör alanı X için

$$\phi^2(X) = -X + \eta(X)\,\xi \quad , \qquad \phi\xi = 0 \tag{3.2.1}$$

$$\eta(\phi X) = 0 \quad , \qquad \eta(\xi) = 1 \tag{3.2.2}$$

$$\eta(X) = g(\xi,X) \tag{3.2.3}$$

$$g(\phi X,\phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{3.2.4}$$

dir. $\bar{M}$ de 2n boyutlu bir hiperyüzey M olsun. g metriği M hiperyüzeyine indirgenebilir. M hiperyüzeyinin normali C olmak üzere. M nin tanjant uzayındaki X vektör alanları için

$$\phi X = fX + u(X)\,C \tag{3.2.5}$$

dır. Burada fX , ϕX in teğetsel parçası $u(X)\,C$ de ϕX in normal parçasıdır. Bu eşitlikteki

$u(X) = g(\,\phi X, C)$

dır. ξ karakteristik vektör alanıda

$$\xi = V + \lambda C \tag{3.2.6}$$

olarak yazılır. Burada

$$\lambda = g(\xi, C) = \eta(C) \tag{3.2.7}$$

dır. M nin normali C nin ϕ altındaki görüntüsünün negatifine U dersek yani;

$$\phi C = -U \tag{3.2.8}$$

dır. Ayrıca

$$v(X) = \eta(X) \tag{3.2.9}$$

alınsın. Burada ki f (1,1) tipinden bir tensör alanı , u ve v 1-formlar , U ve V vektör alanı ve λ bir fonksiyondur. M hiperyüzeyinin (f, U, V, u, v, λ) yapısına sahip olduğu gösterilecektir. Bunun için aşağıdaki eşitlikler ispatlanacaktır. Yani

$$f^2X = -X + u(X)U + v(X)V$$

$$u \circ f = \lambda v \quad , \quad fU = -\lambda V$$

$$v \circ f = -\lambda u \quad , \quad fV = \lambda U$$

$$u(U) = 1 - \lambda^2 \quad , \quad u(V) = 0$$

$$v(U) = 0 \quad , \quad v(V) = 1 - \lambda^2$$

eşitlikleri ispatlanarak yapının (f, U, V, u, v, λ) olduğu gösterilecektir.

İlk önce

$$f^2X = -X + u(X)U + v(X)V$$

eşitliğinin ispatı için Eş.3.2.5 den

$$fX = \phi X - u(X)\, C$$

dır.

$$f^2X = f\,(fX)$$

$$= f(\phi X - u(X)C\ )$$

Y= $\phi X - u(X)\ C$ olarak alınırsa

$$f^2 X = f(Y)$$

$$= \ \phi \mathrm{Y} - u(\mathrm{Y})\ C$$

dır. Eşitlikte Y yerine yazılırsa

$$f^2 X = \phi(\phi X - u(X)\ C\ \ ) - u(\phi X - u(X)C\ \ )C$$

$$= \phi^2 X - u(X)\ \phi C - \ u(\phi X)C + u(X)u(C)C$$

olur. Eş.3.2.1, Eş.3.2.8, Eş.3.2.5 yerine yazılırsa

$$f^2 X = -X + \eta(X)\xi + u(X)U - u(fX + u(X)C)C + u(X)u(C)C$$

$$= -X + \eta(X)\xi + u(X)U - u(fX)\ C - u(X)u(C)C + u(X)u(C)C$$

dır. Eş.3.2.6 dan

$$f^2 X = -X + u(X)U + \eta(X)(V + \lambda C) - u(fX)C$$

$$= -X + u(X)U + \eta(X)V + \eta(X)(\lambda C) - u(fX)C$$

dır. Eş.3.2.9 dan

$$f^2 X = -X + u(X)U + v(X)V + \eta(X)(\lambda C) - \lambda v(X)C$$

$$= -X + u(X)U + v(X)V + v(X)(\lambda C) - \lambda v(X)C$$

$$= -X + u(X)U + v(X)V$$

olur.

Şimdi

$$u \circ f = \lambda v$$

eşitliğinin ispatı için

$(u \circ f)(X) = u(fX)$

ve Eş.3.2.5 den

$u(fX) \ = u(\phi X - u(X)C \ )$

dır. Bununla birlikte

$$u(X) = g(\phi X, C) \qquad (3.2.10)$$

eşitliğinden

$u(fX) = g(\phi(fX), C)$

dır. $fX = \phi X - u(X)C$ olduğundan

$u(\phi X - u(X)C \ ) = g(\phi(\phi X - u(X)C), C \ )$

dır. Eş.3.2.1 ve Eş.3.2.8 den

$$\begin{aligned} u(fX) \ &= g(-X + \eta(X)\xi + g(\phi X, C)U, C) \\ &= \ g(-X, C) + \eta(X)g(\xi, C) + g(\phi X, C)g(U, C) \end{aligned}$$

dır. Eş. 3.2.7 ve Eş.3.2.5 den

$u(fX) = -g(X, C) + \lambda v(X) + \{g(fX, C) + u(X)g(C, C)\}\, g(U, C)$

bulunur. X teğet ve C normal uzayda olduğundan $g(X, C) = 0$ ayrıca U teğet ve C normal uzayda olduğundan $g(U, C) = 0$ dır.

$$u(fX) = -\underbrace{g(X, C)}_{0} + \lambda v(X) + \{g(fX, C) + u(X)g(C, C)\}\ \underbrace{g(U, C)}_{0}$$

olur. Buradan

$u(fX) \ = \lambda v(X)$

dır.

Diğer eşitlik olan

$v \circ f = -\lambda u$

eşitliğinin ispatı için

$(v \circ f)(X) = v(fX)$

dır. Eş.3.2.5 ve Eş.3.2.9 kullanılırsa

$$v(fX) = \eta(\phi X - u(X)\ C)$$

$$= \underbrace{\eta(\phi X)}_{0} - u(X)\ \underbrace{\eta\ (C\ )}_{\lambda}$$

$$= -\lambda u(X)$$

elde edilir.

Şimdi

$fU = -\lambda V$

eşitliğinin ispatı için Eş.3.2.5 den

$fU = \phi U - u(U)C$

dır. Eş.3.1.4 den

$$fU\ = \phi U - (1 - \lambda^2)C$$

$$= \phi U - C + \lambda^2 C$$

dır. Bu eşitlikte

$$\phi U = C - \ \eta\ (C\ )\xi \qquad (3.2.11)$$

eşitliği yerine yazılırsa

$$fU = C - \ \eta\ (C\ )\xi - C + \lambda^2 C$$

$$= -\lambda\xi + \lambda^2 C$$

$$= \lambda(\xi - \lambda C)$$

dır. Eş.3.2.6 dan

$$fU \;\; = -\lambda V$$

dır.

Diğer eşitlik olan

$$fV = \lambda U$$

eşitliğinin ispatı için Eş.3.2.6 dan

$$fV = f(\xi - \lambda C)$$

dır. Eş. 3.2.5 den

$$fV = \; \phi(\xi - \lambda C) - u(\xi - \lambda C)C$$

dır. Eş.3.2.6 dan

$$fV = \; \phi\xi - \lambda\phi C - u(V)C$$

dır .Eş. 3.2.1, Eş.3.2.8 ve Eş.3.1.4 den

$$fV = \underbrace{\phi\xi}_{0} - \lambda\,\underbrace{\phi C}_{-U} - \underbrace{u(V)}_{0}\,C$$

$$= 0 - \lambda(-U) - 0C$$

$$= \lambda U$$

dır.

u , 1-form olmak üzere

$$u(V) = 0$$

eşitliğinin ispatı için Eş.3.2.6 dan

$$u(V) = \; u(\xi - \lambda C)$$

$$= \; u(\xi) - u(\lambda C)$$

dır. Eş.3.2.10 dan

$u(V) = g(\phi\xi, C) - u(\lambda C)$

dır. Eş.3.2.1 den

$$u(V) = \underbrace{g(\phi\xi, C)}_{0} - u(\lambda C)$$

$$= -u(\lambda C)$$

$$= -\lambda u(C)$$

$$= -\lambda g(\phi C, C)$$

olur. Eş.3.2.7 eşitliğinden

$$u(V) = -\lambda g(-U, C)$$

$$= \lambda g(U, C)$$

dır. U teğet C normal uzayda olduğundan $g(U, C) = 0$ dır. Buradan ise

$$u(V) = 0$$

dır.

Şimdi

$$v(U) = 0$$

eşitliğinin ispatı için Eş.3.2.9 dan

$$v(U) = \eta(U)$$

$$= g(\xi, U)$$

dır. $U = -\phi C$ olduğundan

$$v(U) = g(\xi, -\phi C)$$

$$= -g(\xi, \phi C)$$

$$= -\eta\ (\phi C\ )$$

$$= 0$$

dır.

Diğer bir eşitlik olan

$u(U) = 1 - \lambda^2$

eşitliğinin ispatı için

$u(X) = g(\phi X, C)$

dır. $U = -\ \phi C$ olduğundan

$u(U) = g(\phi U, C)$

$$= g(\phi^2 C, C)$$

dır. Eş. 3.2.1 dan

$u(U)\ = g(C -\ \eta\ (C\ )\xi, C)$

$$= g(C, C) -\ \eta\ (C\ )g(\xi, C)$$

$$= g(C, C) - \lambda.\lambda$$

$$= 1 - \lambda^2$$

dır.

Şimdi

$v(V) = 1 - \lambda^2$

eşitliğinin ispatı için Eş.3.2.6 dan

$v(V) = v(\xi - \lambda C)$

$$= v(\xi) - \lambda v(C)$$

dır. Eş.3.2.9 dan

$v(V) = \eta\,(\xi\,) - \lambda\,\eta(C)$

dır. Eş.3.2.2 ve Eş.3.2.7 den

$$\begin{aligned} v(V) &= 1 - \lambda.\lambda \\ &= 1 - \lambda^2 \end{aligned}$$

dır .

Tüm bu eşitlikler sağlandığından dolayı yapı (f, U, V, u, v, λ) yapısındadır. Bu eşitliklerle beraber

$g(U, X) = u(X)$

$g(V, X) = v(X)$

$g(fX, Y) = -g(X, fY)$

$g(fX, fY) = g(X, Y) - u(X)u(Y) - v(X)\,v(Y)$

eşitliklerinin de sağlandığı ispatlanarak M manifoldunun (f, g, u, v, λ) yapısında olduğunu gösterilecektir.

$g(U, X) = u(X)$

eşitliğinin ispatı için Eş.3.2.4 den

$g(U, X) = g(\phi U, \phi X) + \eta(U)\eta(X)$

dır. Eş.3.2.5 ve Eş.3.2.11 den

$$\begin{aligned} g(U, X) &= g(C - \eta(C)\xi\,, fX + u(X)C) + \underbrace{\eta(U)}_{0}\,\eta(X) \\ &= g(C, fX) + u(X)g(C, C) - g(\eta(C)\xi\,, fX) + g(\eta(C)\xi, u(X)C) \end{aligned}$$

dır. Eş.3.2.5 den

$g(U, X) = g(C, fX) + u(X) - g(\eta(C)\xi\,, \phi X - u(X)\,C\,) + g(\eta(C)\xi, u(X)C)$

$$= g(C,\ fX) + u(X) - g(\eta(C)\xi\ ,\phi X) - g(\eta(C)\xi, u(X)C\ ) + g(\eta(C)\xi, u(X)C)$$

dır. Buradan

$$g(U,X) = g(C,fX) + u(X) - g(\eta(C)\xi\ ,\phi X)$$

$$= \underbrace{g(C,fX)}_{0} + u(X) - \eta(C)g(\xi\ ,\phi X)$$

$$= +u(X) - \lambda\ \underbrace{\eta(\phi X)}_{0}$$

olduğundan

$$g(U,X) = u(X)$$

dır.

Diğer bir eşitlik olan

$$g(V,X) = v(X)$$

eşitliğinin ispatı için Eş.3.2.6 dan

$$g(V,X) = g(\xi - \lambda C, X)$$

$$= g(\xi,X) - \lambda g(C,X)$$

dır. Eş.3.2.7 ve $g(C,X) = 0$ olduğundan

$$g(V,X) = v(X)$$

bulunur.

Şimdi

$$g(fX,Y) = -g(X,fY)$$

eşitliğinin ispatı için

$$g(fX,Y) = g(\phi X - u(X)C\ ,\mathrm{Y})$$

$$= g(\phi X,Y) - u(X)\ g(C\ ,\mathrm{Y})$$

dır. $g(C\ ,\mathrm{Y}) = 0$ olduğundan

$$g(fX,Y) = g(\phi X,Y)$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} g(fX,Y) &= -g(X,\phi Y) \\ &= -g(X\ ,\ fY + u(Y)C) \\ &= -g(X\ ,\ fY) - u(Y)g(X,C) \end{aligned}$$

dır. $g(X,C) = 0$ olduğundan

$$g(fX,Y) = -g(X\ ,\ fY)$$

dır.

Şimdi metrik ile ilgili

$$g(fX,fY) = g(X,Y) - \ u(X)u(Y) - \ v(X)\,v(Y)$$

eşitliğinin ispatı için

$$\begin{aligned} g(fX,fY) &= g(\phi X - u(X)C\ ,\phi Y - u(Y)C\ ) \\ &= g(\phi X,\phi Y) - u(Y)g(\phi X,C) - u(X)g(C,\phi Y) + \ u(X)\,u(Y)\ g(C,C) \end{aligned}$$

dır. Eş.3.2.4 den

$$g(fX,fY) = g(X,Y) - \eta(X)\,\eta(Y) - u(Y)u(X) - u(X)u(Y) + u(X)\,u(Y)$$

dır. Eş.3.2.9 dan

$$g(fX,fY) = g(X,Y) - \ v(X)\,v(Y) - \ u(X)u(Y)$$

olur.

Bu eşitliklerle birlikte (f,U,V,u,v,λ) yapısına sahip olan M, g metriğine göre (f,g,u,v,λ) yapısına sahiptir.

3.2.2. Örnek:

$(2n+2)$-boyutlu bir hemen hemen Hermityan manifold $(\overline{M}, J, g)$ olsun. M , $\overline{M}$ nin normal boyutu 2 olan bir altmanifoldu olsun. Yani M nin normalleri C ve D olsun. Bu durumda $\chi(M)^{\perp}$ in bir ortonormal bazı $\{C\ , D\ \}$ dir. Bu durumda

$$JX = \underbrace{fX}_{teğet\ kısmı} + \underbrace{u(X)C + v(X)D}_{normal\ kısmı} \tag{3.2.12}$$

$$JC = -\underbrace{U}_{teğet\ kısmı} + \underbrace{\lambda D}_{normal\ kısmı} \tag{3.2.13}$$

$$JD = -\underbrace{V}_{teğet\ kısmı} - \underbrace{\lambda C}_{normal\ kısmı} \tag{3.2.14}$$

dır. Şimdi M altmanifoldunun bir (f, g, u, v, λ) yapısına sahip olduğu gösterilecektir. Yani

$$f^2X = -X + u(X)U + v(X)V$$

$$u \circ f = \lambda v, \qquad fU = -\lambda V$$

$$v \circ f = -\lambda u, \qquad fV = \lambda U$$

$$u(U) = 1 - \lambda^2, \qquad u(V) = 0$$

$$v(U) = 0, \qquad v(V) = 1 - \lambda^2$$

ve

$$g(U, X) = u(X)$$

$$g(V, X) = v(X)$$

$$g(fX, fY) = g(X, Y) - u(X)u(Y) - v(X)\,v(Y)$$

eşitliklerinin sağlandığı gösterilecektir. Bunun için ilk eşitlik olan

$$f^2X = -X + u(X)U + v(X)V$$

eşitliği ispatlanacaktır. Eş.3.2.1 den

$fX = JX - u(X)C - v(X)D$

dır. Bu eşitliğin f altındaki görüntüsü alınırsa

$f^2X = f(fX) = f(JX - u(X)C - v(X)D)$

dır. Eşitlikte $A = JX - u(X)C - v(X)D$ olarak alınırsa

$f(A) = JA - u(A)C - v(A)D$

olur. Buradan A yerine yazılırsa

$$f^2X = J(JX - u(X)C - v(X)D) - u(JX - u(X)C - v(X)D)C$$

$$-v(JX - u(X)C - v(X)D\ )D$$

$$= J^{\,2}X - u(X)JC - v(X)JD - \{u(JX) - u(X)u(C) - v(X)u(D)\}C$$

$$-\{v(JX) - u(X)v(C) - v(X)v(D\ )\}D$$

dır. Bu eşitliklerdeki

$$u(JX) = u(fX + u(X)C + v(X)D)$$

$$= u(fX) + u(X)u(C) + v(X)u(D)$$

ve

$$v(JX) = v(fX + u(X)C + v(X)D)$$

$$= v(fX) + u(X)v(C) + v(X)v(D)$$

dır. Bu eşitlikler yerine yazılırsa

$$f^2X = -X - u(X)\,.(-U + \lambda D) - v(X).(-V - \lambda C)$$

$$-\{u(fX) + u(X)u(C) + v(X)u(D) - u(X)u(C) - v(X)u(D)\}C$$

$$-\{v(fX) + u(X)v(C) + v(X)v(D) - u(X)v(C) - v(X)v(D\ )\}D$$

olur. Eş.3.1.2 ve Eş.3.1.3 den

$$f^2X = -X + u(X)U + v(X)V - u(X)\lambda D + v(X)\lambda C - \underbrace{u(fX)}_{v(X)\lambda C} C - \underbrace{v(fX)}_{-u(X)\lambda D} D$$

dır. Buradan

$$f^2X = -X + u(X)U + v(X)V$$

dır .

Şimdi

$$u(fX) = \lambda v(X)$$

eşitliğinin ispatı için

$$u(fX) = g(U, fX)$$

dır. Eş.3.1.9 dan

$$u(fX) = g(fU, f^2X) + u(U)u(fX) + \underbrace{v(U)v(fX)}_{0}$$

dır. Eş.3.1.1, Eş.3.1.2, Eş.3.1.4 den

$$\begin{aligned} u(fX) &= g(-\lambda V, -X + u(X)U + v(X)V) + (1-\lambda^2)(\lambda v(X)) \\ &= \lambda g(V,X) - \lambda u(X) g(V,U) - \lambda v(X) g(V,V) + (1-\lambda^2)(\lambda v(X)) \\ &= \lambda v(X) - \lambda u(X) \underbrace{v(U)}_{0} - \lambda v(X) v(V) + (1-\lambda^2)(\lambda v(X)) \\ &= \lambda v(X) - \lambda u(X) 0 - \lambda v(X)(1-\lambda^2) + (1-\lambda^2)\big(\lambda v(X)\big) \\ &= \lambda v(X) \end{aligned}$$

dır.

Diğer bir eşitlik olan

$$v(fX) = -\lambda u(X)$$

eşitliğinin ispatı için

$v(fX) = g(V, fX)$

dır. Eş.3.1.9 dan

$$v(fX) = g(fV, f^2X) + v(V)v(fX) + \underbrace{u(V)u(fX)}_{0}$$

dır. Eş.3.1.1, Eş.3.1.2 ve Eş.3.1.4 den

$$v(fX) = g(\lambda U, -X + u(X)U + v(X)V) + (1 - \lambda^2)(-\lambda u(X))$$

$$= -\lambda g(U, X) + \lambda u(X)g(U, U) + \lambda v(X)g(U, V) - (1 - \lambda^2)(\lambda u(X))$$

dır. Eş.3.1.7 ve Eş.3.1.8 den

$$v(fX) = -\lambda u(X) + (1 - \lambda^2)\lambda u(X) + \lambda\, v(X)0 - (1 - \lambda^2)\big(\lambda u(X)\big)$$

dır. Buradan

$$v(fX) = -\lambda u(X)$$

dır.

Diğer bir eşitlik olan

$$fU = -\lambda V$$

eşitliğinin ispatı için Eş.3.1.1 den

$$fX = JX - u(X)C - v(X)D$$

dır. Bu eşitlikte X yerine U alınırsa

$$fU = JU - u(U)C - \underbrace{v(U)}_{0} D$$

dır. Eş.3.2.13 den

$$JC = -U + \lambda D$$

dır. Bu eşitliğin J altında görüntüsü alınırsa

$J^2C = -JU + \lambda JD$

dır. $J^2 = -I$ ve Eş.3.2.14 den

$-C = -JU + \lambda(-V - \lambda C)$

$$JU = C - \lambda V - \lambda^2 C \qquad (3.2.15)$$

dır.

$fU = JU - u(U)C$

eşitliği Eş.3.2.15 de yerine yazılırsa

$fU = C - \lambda V - \lambda^2 C - u(U)C$

olur. Buradan

$fU = C - \lambda V - \lambda^2 C - u(U)C$

dır. Eş.3.1.4 den

$fU = C - \lambda V - \lambda^2 C - (1 - \lambda^2)\, C$

$\quad = C - \lambda V - \lambda^2 C - C \ - \lambda^2 C$

dır. Bu eşitlikten

$fU = -\lambda V$

olur.

Diğer bir eşitlik olan

$fV = \lambda U$

eşitliğinin ispatı için Eş.3.2.1 den

$fX = JX - u(X)C - v(X)D$

eşitliğinde X yerine V alınırsa

$$fV = JV - \underbrace{u(V)}_{0} C - v(V)D$$

olur. Eş.3.2.14 den

$$JD = -V - \lambda C$$

eşitliğinin J altında görüntüsü alınırsa

$$J^{\,2}D = -JV - \lambda JC$$

dır . $J^{\,2} = -I$ ve Eş.3.2.13 den

$$-D = -JV - \lambda(-U + \lambda D$$

dır. Buradan

$$JV = D + \lambda U - \lambda^2 D \qquad (3.2.16)$$

dır.

$$fV = JV - v(V)D$$

eşitliği Eş.3.2.16 yerine yazılırsa

$$fV = D + \lambda U - \lambda^2 D - v(V)D$$

olur. Eş.3.1.4 den

$$\begin{aligned} fV &= D + \lambda U - \lambda^2 D - (1 - \lambda^2)D \\ &= D + \lambda U - \lambda^2 D - D + \lambda^2 D \\ &= \lambda U \end{aligned}$$

dır.

Diğer bir eşitlik olan

$$u(U) = 1 - \lambda^2$$

eşitliği için

$JX = fX + u(X)C + v(X)D$

eşitliğinde X yerine U alınırsa ve Eş.3.1.4 den

$JU = fU + u(U)C + \underbrace{v(U)}_{0}D$

olur. Eş.3.2.12 ve Eş.3.1.2 den

$C - \lambda V - \lambda^2 C = -\lambda V + u(U)C$

dır. Bu eşitlikten

$(1 - \lambda^2)C = u(U)C$

olur. Buradan ise

$u(U) = 1 - \lambda^2$

dır .

Diğer bir eşitlik olan

$v(V) = 1 - \lambda^2$

eşitliğinin ispatı için Eş.3.2.12 de X yerine V alınırsa ve Eş.3.1.4 den

$JV = fV + \underbrace{u(V)}_{0}C + v(V)D$

dır. Eş.3.2.13ve Eş.3.1.3 den

$D + \lambda U - \lambda^2 D = \lambda U + v(V)D$

dır. Bu eşitlikten

$(1 - \lambda^2)D = v(V)D$

dır. Buradan ise

$v(V) = 1 - \lambda^2$

dır .

Diğer bir eşitlik olan

$u(V) = 0$

eşitliğinin ispatı için Eş.3.2.12 de X yerine V alınırsa

$JV = fV + u(V)C + v(V)D$

dır. Eş.3.2.16 ve Eş.3.1.3 den

$D + \lambda U - \lambda^2 D = \lambda U + u(V)C + (1 - \lambda^2)D$

$D + \lambda U - \lambda^2 D = \lambda U + u(V)C + D - \lambda^2 D$

$u(V)C = 0$

buradan da

$u(V) = 0$

dır .

Son olarak

$v(U) = 0$

eşitliğinin ispatı için Eş.3.2.12 de X yerine U alınırsa ve Eş.3.1.4 den

$JU = fU + u(U)C + v(U)D$

dır. Eş.3.2.15 ve Eş.3.1.2 den

$C - \lambda V - \lambda^2 C = -\lambda V + (1 - \lambda^2)C + v(U)D$

$C - \lambda V - \lambda^2 C = -\lambda V + C - \lambda^2 C + v(U)$

eşitliğinden

$v(U)D = 0$

dır .

Şimdi metrikle ilgili olan ilk eşitlik

$$g(U,X) = u(X)$$

eşitliğinin ispatı için Eş.3.1.9 ve Eş.3.1.4 den

$$g(U,X) = g(fU,fX) + u(U)u(X) + \underbrace{v(U)}_{0}\,v(X)$$

dır. Eş 3.1.4 den

$$g(U,X) = g(fU,fX) + (1-\lambda^2)u(X)$$

dır. Eş.3.1.2 den

$$g(U,X) = g(-\lambda V,fX) + (1-\lambda^2)u(X)$$

$$= -\lambda\, g(V,fX) + (1-\lambda^2)u(X)$$

dır. Eş.3.1.8 den

$$g(U,X) = -\lambda\left(v(fX)\right) + (1-\lambda^2)u(X)$$

$$= -\lambda\,(-\lambda u(X)) + (1-\lambda^2)u(X)$$

$$= \lambda^2 u(X) + u(X) - \lambda^2 u(X)$$

eşitliğinden

$$g(U,X) = u(X)$$

dır.

Diğer eşitlik olan

$$g(V,X) = v(X)$$

eşitliğinin ispatı için Eş.3.1.9 ve Eş.3.1.4 den

$$g(V,X) = g(fV,fX) + \underbrace{u(V)}_{0}\,u(X) + v(V)v(X)$$

dır. Eş. 3.1.3 den

$$g(V,X) = g(\lambda U, fX) + v(V)v(X)$$

$$= \lambda g(U, fX) + (1-\lambda^2)v(X)$$

dır . Eş.3.1.7 den

$$g(V,X) = \lambda u(fX) + (1-\lambda^2)v(X)$$

$$= \lambda(\lambda v(X)) + (1-\lambda^2)v(X)$$

$$= \lambda^2 v(X) + v(X) - \lambda^2 v(X)$$

$$= v(X)$$

eşitliğinden

$$g(V,X) = v(X)$$

dır .

Şimdi metrikle ilgili olan

$$g(fX, fY) = g(X,Y) - u(X)u(Y) - v(X)\,v(Y)$$

eşitliğinin ispatı için Eş.3.2.12 den

$$g(fX, fY) = g(\,JX - u(X)C - v(X)D\,, JY - u(Y)C - v(Y)D$$

$$= g(\,JX, JY) + g(JX, -u(Y)C) + g(JX, -v(Y)D) + g(-u(X)C, JY)$$

$$+ g(-u(X)C, -u(Y)C) + g(-u(X)C, -v(Y)D) + g(-v(X)D\,, JY)$$

$$+ \; g(-v(X)D, -u(Y)C) + g(-v(X)D, -v(Y)D)$$

$$= g(\,JX, JY) - u(Y)g(JX, C) - v(Y)g(JX, D) - u(X)g(C, JY)$$

$$+u(X)\;\; u(Y)g(C,C) + u(X)v(Y)g(C,D) - v(X)g(D\,, JY)$$

$$+v(X)u(Y)g(D,C) + v(X)v(Y)g(D,D)$$

olur. Bu eşitlikte ki;

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

dır. Ayrıca

$$-u(Y)g(JX, C) = -u(Y)\{g(fX + u(X)C + v(X)D, C)\}$$
$$= -u(Y)\{g(fX, C) + u(X)g(C, C) + v(X)g(D, C)\}$$
$$= -u(Y)0 - u(Y)u(X)g(C, C) - u(Y)v(X)g(D, C)$$
$$= -u(Y)u(X)g(C, C) - u(Y)v(X)g(D, C)$$

dır. Ayrıca

$$-v(Y)g(JX, D) = -v(Y)\{g(fX + u(X)C + v(X)D, D)\}$$
$$= -v(Y)\{g(fX, D) + u(X)g(C, D) + v(X)g(D, D)\}$$
$$= -v(Y)0 - v(Y)u(X)g(C, D) - v(Y)v(X)g(D, D)$$
$$= -v(Y)u(X)g(C, D) - v(Y)v(X)g(D, D)$$

dır. Ayrıca

$$-u(X)g(C, JY) = -u(X)\{g(C, fY + u(Y)C + v(Y)D)\}$$
$$= -u(X)g(C, fY) - u(X)u(Y)g(C, C) - u(X)v(Y)g(C, D)$$
$$= -u(X)0 - u(X)u(Y)g(C, C) - u(X)v(Y)g(C, D)$$
$$= -u(X)u(Y)g(C, C) - u(X)v(Y)g(C, D)$$

dır. Ayrıca

$$-v(X)g(D, JY) = -v(X)g(D, fY + u(Y)C + v(Y)D)$$
$$= -v(X)\{g(D, fY) + u(Y)g(D, C) + v(Y)g(D, D)\}$$
$$= -v(X)0 - v(X)u(Y)g(D, C) - v(X)v(Y)g(D, D)$$
$$= -v(X)u(Y)g(D, C) - v(X)v(Y)g(D, D)$$

dır. Bu eşitlikler

$$g(fX,fY) = g(JX,JY) - u(Y)g(JX,C) - v(Y)g(JX,D) - u(X)g(C,JY)$$

$$+u(X)\ u(Y)g(C,C) + u(X)v(Y)g(C,D) - v(X)g(D\ ,JY)$$

$$+\ v(X)u(Y)g(D,C) + v(X)v(Y)g(D,D)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$g(fX,fY) = g(X,Y) - u(Y)u(X)g(C,C) - u(Y)v(X)g(D,C)$$

$$-\ v(Y)u(X)g(C,D) - v(Y)v(X)g(D,D)$$

$$-u(X)u(Y)g(C,C) - u(X)v(Y)g(C,D)$$

$$+u(X)\ u(Y)g(C,C) + u(X)v(Y)g(C,D)$$

$$-\ v(X)u(Y)g(D,C) - v(X)v(Y)g(D,D)$$

$$+\ v(X)u(Y)g(D,C) + v(X)v(Y)g(D,D)$$

olur. Bu eşitlikte gerekli işlemler yapılırsa

$$g(fX,fY) = g(X,Y) - \ u(X)u(Y) - \ v(X)\,v(Y)$$

olur.

Bu eşitliklerden M altmanifoldu bir (f,g,u,v,λ) yapısına sahiptir.

4. HEMEN HEMEN DEĞME MANİFOLDLARIN HİPERYÜZEYLERİ

4.1. Hemen Hemen Değme Manifoldların Hiperyüzeyleri

M^{2n+1} manifoldu üzerinde hemen hemen değme metrik yapısı (φ, ξ, η, g) olsun. M^{2n+1} 'e gömülmüş diferensiyellenebilir bir hiperyüzey M^{2n} olsun. M^{2n} nin tanjant demeti TM^{2n} ve M^{2n+1} in tanjant demetinin M^{2n} e kısıtlanması $T_R M^{2n+1}$ ile gösterilsin. M^{2n}, M^{2n+1} de bir hiperyüzey olduğundan

$$\begin{aligned} i \;:\; & M^{2n} \longrightarrow M^{2n+1} \\ & p \longrightarrow i(p) \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

dönüşümü vardır. Bu inclusion dönüşümünün diferensiyeli

$$B = di = TM^{2n} \xrightarrow{lineer} T_R M^{2n+1}$$

dır. C , M^{2n} de tanımlı M^{2n} e teğet olmayan bir vektör alanı yani $C \notin \Gamma(TM^{2n})$ fakat $C \in \Gamma(T_R M^{2n+1})$ olsun. Bu durumda

$$B^{-1} : T_R M^{2n+1} \longrightarrow TM^{2n}$$

olup

$$B^{-1}B = I_{TM^{2n}} \tag{4.1.2}$$

$$BB^{-1} = I_{T_R M^{2n+1}} - C \otimes C^* \tag{4.1.3}$$

$$C^*(B) = B^{-1}(C) = 0 \tag{4.1.4}$$

$$C^*(C) = 1 \tag{4.1.5}$$

olacak şekilde M^{2n} üzerinde bir C^* 1-formu vardır. M^{2n} hiperyüzeyine indirgenmiş metrik

$$\begin{aligned} G \;:\; & \Gamma(T_R M^{2n+1}) \times \Gamma(T_R M^{2n+1}) \rightarrow \mathcal{F}(TM^{2n}) \\ & (BX \quad , \quad BY) \longrightarrow G(X,Y) = g(BX, BY) \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

olarak tanımlıdır. Burada $X, Y \in \Gamma(TM^{2n})$ dır.

4.1.1. Teorem:

M^{2n+1} hemen hemen değme metrik manifoldunda bir hiperyüzey M^{2n} olsun. Bu durumda M^{2n} üzerinde

$$f^3 + f = 0 \tag{4.1.7}$$

olacak şekilde rankı $2n$ yada $2n-2$ olan (1,1)-tipinden bir f tensör alanı vardır.

İspat:

$$\begin{tikzcd} TM^{2n} \arrow[r, "B"] \arrow[rrr, bend right, "B^{-1}\,\varphi|_{M^{2n}}\,B"'] & T_R M^{2n} \arrow[r, "\varphi|_{M^{2n}}"] & T_R M^{2n+1} \arrow[r, "B^{-1}"] & TM^{2n} \end{tikzcd} \tag{4.1.8}$$

bileşke dönüşümüne f diyelim. Bu durumda f, M^{2n} üzerinde (1,1) tipinden bir tensör alanıdır. M^{2n} de herhangi bir X vektör alanı için

$$(f^3 + f)(X) = f^3(X) + f(X)$$

dır. Eş.4.1.8 den

$$f^3(X) + f(X) = B^{-1}\varphi B B^{-1}\varphi B B^{-1}\varphi B(X) + B^{-1}\varphi B(X)$$

dır. Eş.4.1.3 den

$$f^3(X) + f(X) = B^{-1}\varphi(I - C \otimes C^*)\varphi(I - C \otimes C^*)(\varphi B(X)) + B^{-1}\varphi B(X)$$

$$= B^{-1}\varphi(I - C \otimes C^*)(\varphi^2(BX) - C^*(\varphi BX)\varphi C) + B^{-1}\varphi B(X)$$

dır. $\varphi^2 = -I + \xi \otimes \eta$ eşitliğinden;

$$f^3(X) + f(X) = B^{-1}\varphi(I - C \otimes C^*)(-BX + \eta(BX)\xi) - C^*(\varphi BX)\varphi C)$$

$$+B^{-1}\varphi B(X)$$

$$= B^{-1}\varphi(-BX + \eta(BX)\xi - C^*(\varphi BX)\varphi C)$$

$$-C^*\{-BX+\eta(BX)\xi-\ C^*(\varphi BX)\varphi C\}+B^{-1}\varphi B(X)$$

$$=-B^{-1}\varphi(BX)+\eta(BX)B^{-1}\varphi\xi-C^*(\varphi BX)B^{-1}\varphi^2C$$

$$-C^*(-BX+\ \eta(BX)\xi-C^*(\varphi BX)\varphi C)B^{-1}\varphi C+B^{-1}\varphi B(X)$$

olur.

C^* 1-formunun duali C olduğundan C^* duali φC vektör alanları değildir. O halde

$$C^*(\varphi C)=0 \tag{4.1.9}$$

dır. Buradan

$$(f^3+f)(X)=-C^*(\varphi BX)\eta(C)B^{-1}\xi-\ \eta(BX)C^*(\xi)B^{-1}\varphi C$$

olur. C, hiperyüzeye teğet olmayan bir vektör alanı olduğundan C,ξ olmak zorundadır. Eğer $\xi\neq C$ ise bu durumda ξ hiperyüzeye teğet olması gerekir.

Kabul edelim ki $\xi=C$ olsun.

$$B^{-1}\xi=0$$

ve

$$\varphi C=0$$

dır. Bu ise

$$f^3+f=0$$

olduğunu kanıtlar.

Şimdi f nin rankının 2n olduğu gösterilecektir. Kabul edelim ki $f(X)=0$ olsun. Bu durumda

$$B^{-1}\varphi(BX)=0$$

$$BB^{-1}\varphi(BX)=B(0)$$

$$(I-C\otimes C^*)\big(\varphi(BX)\big)=0$$

$\varphi(BX) - C \otimes C^*\big(\varphi(BX)\big) = 0$

$\varphi(BX) - C^*\big(\varphi BX(C)\big) = 0$

$\varphi(BX) - \varphi BXC^*(C) = 0$

dır. Eş.4.1.5 den

$\varphi(BX) - \varphi BX = 0$

olur. Buradan $f(X) = 0$ olup $X = 0$ dır.

$f(X) = B^{-1}\varphi(BX)$ ve B nın C doğrultusunda hiç bir vektör alanı olmadığından f nin rankı 2n dır.

Eğer $C \neq \xi$ ise ξ , M^{2n} hiperyüzeyine teğet olmak zorundadır. Bu durumda

$$\eta(C) = g(\xi, C) = C^*(\xi) = 0 \qquad (4.1.10)$$

dır.

$\xi|_{M^{2n}} = BX_1$ olacak şekilde $X_1 \in \Gamma(M)$ vardır. Bu durumda

$$\varphi(\xi|_{M^{2n}}) = \varphi(BX_1) = 0 \qquad (4.1.11)$$

olur. Eş.4.1.8 den

$f(X_1) = B^{-1} \underbrace{\varphi B(X_1)}_{0}$

olduğundan

$f(X_1) = 0$

dır.

Aynı zamanda ; φC , M^{2n} nin teğetinde olduğundan $BX_2 = \varphi C$ olacak şekilde M^{2n} de bir X_2 vektör alanı vardır. Bu durumda Eş.4.1.10 dan

$f(X_2) = B^{-1}\varphi B(X_2)$

$$= B^{-1}\varphi(\varphi C)$$

$$= B^{-1}\varphi^2(C)$$

$$= B^{-1}(C - \eta(C)\xi)$$

$$= 0$$

dır. X_1 ve X_2 vektör alanlarına dik olacak şekilde M^{2n} de bir X_3 vektör alanı vardır. $\varphi BX_4 = BX_3$ olacak şekilde X_4 vektör alanı vardır. Buradan da $fX_4 = X_3$ dır. Bu ise f nin rankının $2n-2$ olduğunu kanıtlar. Buradan teoremin ispatı tamamlanır.

Bir f yapının maksimal rankı çift ise yapı hemen hemen kompleks manifoldtur, eğer tekse yapı bir hemen hemen değme yapıdır.

M, n boyutlu diferensiyellenebilir C^∞ sınıfından bir manifold ve $f^3 + f = 0$ şartını sağlayan M üzerinde (1,1) tipinden bir tensör alanı f olsun. $-f^2$ ile belirli dağılım $\mathcal{L}$ ile ; $f^2 + I$ ile belirli tümleyen dağılım $\mathcal{M}$ ile gösterilsin. $l = -f^2$ ve $m = f^2 + I$ operatörleri için

$$l + m = -f^2 + f^2 + I = I \tag{4.1.12}$$

dır.

$$l^2 = (-f^2)^2 = f^4 = f^3 f = (-f)f = -f^2 = l \tag{4.1.13}$$

ve

$$m^2 = (f^2 + I)^2 = f^4 + 2f^2 + I = -f^2 + 2f^2 + I = f^2 + I = m \tag{4.1.14}$$

dır. Ayrıca

$$fl = lf = fl = lf = f(-f^2) = -f^3 = f \tag{4.1.15}$$

ve

$$fm = mf = fm = f(f^2 + I) = f^3 + f = 0 \tag{4.1.16}$$

dır.

Eğer f nin rankı n ise $l = 0$ ve $m = 0$ olur. Buradan

$f^2 + I = 0$

olur ki, bu durumda f-yapının rankı n olur ve n çiftse yapı hemen hemen kompleks yapıdır.

Eğer f nin rankı $r = (n-1)$ ise $\mathcal{L}$ nin boyutu $(n-1)$ ve $\mathcal{M}$ nin boyutu 1 dir. Buradan

$f^2 + I = m \qquad\qquad mf = 0$

$fm = 0 \qquad\qquad m^2 = m$

olur ki f yapının rankı $(n-1)$ dır. Eğer $(n-1)$ tekse yapı bir hemen hemen değme yapıdır.

4.1.1. Sonuç:

$(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta)$ bir hemen hemen değme manifold ve M^{2n} de M^{2n+1} in bir hiperyüzeyi olsun. $\varphi|_{M^{2n}} = B^{-1}\varphi B$, M^{2n} üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olması için gerek ve yeter şart ξ nin M^{2n} e hiç bir yerde teğet olmamasıdır. Yani ξ , M^{2n} in normalidir.

İspat:

$\Rightarrow$:

İspat yönteminde Olmayan Ergi Yöntemi kullanılacaktır. Yani ξ, M^{2n} e her yerde teğet olsun. Bu durumda Teorem 4.1.1 den $\varphi|_{M^{2n}} = B^{-1}\varphi B$ ifadesi rankı $(2n-2)$ olan bir f-yapıdır. Bu durumda M^{2n} bir hemen hemen kompleks manifold değildir. Bu ise bir *çelişkidir* ve bu durum kabulün yanlış olduğunu gösterir. O halde ξ, M^{2n} e hiç bir yerde teğet değildir. Yani ξ , M^{2n} in normalidir.

$\Leftarrow$:

M^{2n+1} bir hemen hemen değme manifod ve M^{2n}, M^{2n+1} in bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda Teorem 4.1.1 den $\varphi|_{M^{2n}} = B^{-1}\varphi B$ olmak üzere

$$\varphi|_{M^{2n}}{}^{3} + \varphi|_{M^{2n}} = 0$$

olacak şekilde bir f yapı vardır. f yapının rankı için

$$\begin{tikzcd} & 2n(\xi = C) \\ rank\ \varphi|_{M^{2n}} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 2n-2(\xi \neq C) \end{tikzcd}$$

dır. Şimdi

$$\varphi|_{M^{2n}}{}^{2} = -I \qquad (4.1.17)$$

olduğu gösterilecektir. Bunun için $\varphi = B^{-1}\varphi B$ olmak üzere

$$\varphi^2 = B^{-1}\varphi \underbrace{BB^{-1}}_{I} \varphi B$$

$$= B^{-1}\varphi\varphi B$$

$$= B^{-1}\varphi^2 B$$

$$= B^{-1}(-I + \eta \otimes \xi)B$$

$$= B^{-1}(-B + \eta B(\xi))$$

dır.

Eğer ξ normal ise yani $\xi = C$ ise Teorem 4.1.1 den rankı $2n$ olan bir f yapı vardır ve $B(\xi) = 0$ dır. O zaman

$$\varphi^2 = B^{-1}(-B + \eta B(\xi)) = -B^{-1}B = -I$$

dır. Diğer taraftan rank $\varphi|_{M^{2n}} = 2n$ olduğunda $\xi \neq C$ olamaz. Buradan ispat tamamlanır.

4.1.2. Teorem:

$(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta)$ bir hemen hemen değme manifoldu olsun. M^{2n+1} üzerinde her yerde özdeş sıfır olmayan ξ' vektör alanı için

$$\mu\xi' = \xi \tag{4.1.18}$$

olacak şekilde (1,1) tipinden bir tensör alanı vardır.

İspat:

M^{2n+1} in koordinat komşuluğu ile tanımlanan açık bir örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. Her bir U_α koordinat komşuluğu üzerinde vektör alanlarının ortonormal bir bazı $\{X_1, X_2, \dots, X_{2n-2}, \xi', \varphi\xi', \xi\}$ ve bu bazların duali $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{2n-2}, \eta', \eta'', \eta'''\}$ olsun.

U_α koordinat komşuluğu üzerinde

$$\mu_j^i = \sum_{A=1}^{2n-2} X_{(A)}^i \, \eta_{(A)j} + \xi^i \eta'_i + \xi'^i \eta'''_j + (\varphi\xi')^i (\eta'')_j \tag{4.1.19}$$

şeklinde μ 1-formu tanımlansın. Bu durumda

$$\mu_j^i \xi'^j = \xi^i \qquad , \qquad i,j = 1,2,\dots,2n+1$$

olur. Eş.4.1.19 dan

$$\mu_j^i \xi'^j = \sum_{A=1}^{2n-2} X_{(A)}^i \underbrace{\eta_{(A)j}\xi'^j}_{0\ (dualinde)} + \xi^i \underbrace{\eta'_i \xi'^j}_{1} + \xi'^i \underbrace{\eta'''_j \xi'^j}_{0\ (dualinde)} + (\varphi\xi')^i \underbrace{(\eta'')_j \xi'^j}_{0\ (dualinde)}$$

dır ve bu eşitlikten

$$\mu_j^i \xi'^j = \xi^i$$

bulunur.

U_β koordinat komşuluğu üzerinde vektör alanlarının bir ortanormal bazı $\{\bar{X}_{(A)}, \xi', \varphi\xi', \xi\}$ olmak üzere $U_\alpha \cap U_\beta \neq 0$ olduğundan

$$\bar{X}_{(A)}{}^i = \sum_{\beta=1}^{2n-2} C_{AB} \, X_{(B)}^i \tag{4.1.20}$$

olup (C_{AB}) non-singülerdir. Eş.4.1.19 ve Eş.4.1.20 den

$$\sum_{A=1}^{2n-2} \bar{X}_{(A)}{}^{i}\, \bar{\eta}_{(A)j} = \sum_{A=1}^{2n-2} (\sum_{B,C=1}^{2n-2} C_{AB}\, C_{AB}{}^{-1})\, X_{(B)}^{i} \eta_{(C)j}$$

$$= \sum_{A=1}^{2n-2} X_{(A)}^{i} \eta_{(A)j}$$

olur. Buradan ise $\mu|_{U_\alpha}$ ve $\mu|_{U_\beta}$, U_α ve U_β koordinat komşuluğunda aynı olduğundan $\mu|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ da $U_\alpha \cap U_\beta$ üzerinde aynıdır.

4.1.3. Teorem:

$(M^{2n+1}, \varphi, \xi\ , \eta)$ bir hemen hemen değme manifold olsun. η', 1-formu ve (1,1) tipinden tensör alanı φ' olmak üzere

$$\varphi' X = \mu^{-1} \varphi \mu X$$

ve

$$\eta'(X) = \eta(\mu X)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(M^{2n+1}, \varphi', \xi', \eta')$ de bir hemen hemen değme manifoldtur. Burada tanımlanan η ,Teorem 4.1.1 de tanımlanan tensör alanıdır.

İspat:

M^{2n+1} de $\varphi\ , \xi\ , \eta$ için

$$\eta(\xi) = 1 \quad , \quad \varphi\xi = 0 \ , \ \eta \circ \varphi = 0 \quad , \quad \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$$

eşitliklerini φ', ξ', η' içinde sağlandığı ispatlanacaktır.

İlk önce

$$\eta'(\xi') = 1$$

eşitliğinin ispatı için Eş.4.1.18 den

$\eta'(\xi') = \eta(\mu\xi') = \eta(\xi) = 1$

dır.

Şimdi

$\varphi'\xi' = 0$

eşitliğinin ispatı için φ' nın tanımı ve Eş.4.1.18 den

$$\varphi'\xi' = \mu^{-1}\varphi\mu\xi' = \mu^{-1}\underbrace{\varphi\xi}_{0} = 0$$

dır.

Diğer eşitlik

$\eta'(\varphi' X) = 0$

ispatı için

$\eta'(\varphi' X) = \eta(\mu\mu^{-1}\varphi\mu X) = \eta(\varphi\mu X) = 0$

dır.

Son olarak

$\varphi'^2 X = -X + \eta'(X)\xi'$

eşitliğinin ispatı için

$$\begin{aligned}\varphi'^2 X &= \mu^{-1}\varphi\mu\mu^{-1}\varphi\mu\, X \\ &= \mu^{-1}\varphi\,\underbrace{\mu\mu^{-1}}_{I}\,\varphi\mu\, X \\ &= \mu^{-1}\varphi^2\mu\, X \\ &= \mu^{-1}(-\mu\, X + \eta(\mu\, X)\xi) \\ &= -\, X + \eta'(\, X)\xi'\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu eşitliklerden (φ', ξ', η') yapısı bir hemen hemen değme yapı olup $(M^{2n+1}, \varphi', \xi', \eta')$ bir hemen hemen değme manifoldtur.

4.1.4. Teorem:

M^{2n+1} bir hemen hemen değme manifoldun bir hiperyüzey M^{2n} olsun. M^{2n+1} de M^{2n} hiperyüzeyinin normal vektör alanı ξ' olmak üzere ;

$$JX = B^{-1}\varphi' BX$$

şeklinde tanımlanan J yapısı M^{2n} üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır.

İspat:

Her vektör alanı için

$$J^2X = -X$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilecektir.

$$J^2X = J(JX) = J(B^{-1}\varphi' BX)$$

eşitliğinde $Y = B^{-1}\varphi' BX$ alınırsa

$$\begin{aligned} J^2X &= JY \\ &= B^{-1}\varphi' BY \end{aligned}$$

dır. Eşitlikte Y vektör alanının eşiti yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} J^2X &= B^{-1}\varphi' \underbrace{BB^{-1}}_{I} \varphi' BX \\ &= B^{-1}\varphi'^2 BX \end{aligned}$$

olur. $\varphi'^2 X = -X + \eta'(X)\xi'$ eşitliğinde X yerine BX alınıp eşitlikte yerine yazılırsa

$$J^2X = B^{-1}(-BX + \eta'(BX)\xi')$$

$$= B^{-1}(-BX + \underbrace{\eta'(BX)}_{0}\xi')$$

$$= -\underbrace{B^{-1}B}_{I}X$$

$$= -X$$

olur. Buradan J , M^{2n} üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır.

4.1.5. Teorem:

M^{2n+1} manifoldu üzerinde iki farklı hemen hemen değme yapı (φ, ξ, η) ve (φ', ξ', η') olsun. Bu durumda

$$f = \frac{(\varphi - \varphi')}{\sqrt{2}} \tag{4.1.21}$$

şeklinde tanımlı f tensör alanı M^{2n+1} üzerinde bir f yapıdır.

İspat:

Teorem 4.1.2 in ispatında olduğu gibi $\mu\xi = \xi'$ ve $\mu(\varphi\xi') = \varphi\xi'$ olacak şekilde μ tensör alanı seçilsin. Bu durumda

$$\eta(\varphi'\xi) = \eta(\mu^{-1}\varphi\mu\xi)$$

$$= \eta(\mu^{-1}\varphi\xi')$$

olur. $\mu(\varphi\xi') = \varphi\xi'$ olduğundan $\mu^{-1}\mu\varphi\xi' = \mu^{-1}\varphi\xi'$ bulunur. O zaman

$$\eta(\varphi'\xi) = \eta(\varphi\xi')$$

$$= \eta \circ \varphi(\xi')$$

$$= 0$$

dır. Ayrıca

$$\eta(\varphi\xi') = (\eta \circ \varphi)\xi'$$

$$= 0$$

olur. Ayrıca ξ ve ξ' lineer bağımsız olduğundan $\eta(\xi')$=0 dır.

Şimdi

$$(f^3 + f)(\xi) = (f^3 + f)(\xi') = 0$$

eşitlikleri hesaplanacaktır. Hipotezden

$$f\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \; (\underbrace{\varphi(\xi)}_{0} - \varphi'(\xi))$$

$$= -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\, \varphi'(\xi) \qquad (4.1.22)$$

olur. Diğer taraftan

$$f(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2}} \; (\varphi(\xi') - \underbrace{\varphi'(\xi')}_{0})$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\, \varphi(\xi') \qquad (4.1.23)$$

dır. O zaman

$$(f^3 + f)(\xi) = f^3(\xi) + f(\xi)$$

$$= f^2\big(f(\xi)\big) + f(\xi)$$

$$= f^2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \; \varphi'\xi\right) + (-\frac{1}{\sqrt{2}} \; \varphi'\xi)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}(f^2(\varphi'\xi) + \; \varphi'\xi)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} \; (f(f(\varphi'\xi)) + \; \varphi'\xi)$$

olur. Şimdi bu eşitlikteki $f(\varphi'\xi)$ yi hesaplanacaktır.

$$f(\varphi'\xi) = \frac{(\varphi - \varphi')}{\sqrt{2}}(\varphi'\xi)$$

$$= \frac{\left(\varphi\,\varphi'\xi - \varphi'^2\xi\right)}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\varphi\,\varphi'\xi - (-\xi + \eta(\varphi'\xi)\xi')}{\sqrt{2}}$$

eşitliğinde $\eta(\varphi'\xi) = 0$ olduğundan

$$f(\varphi'\xi) = \frac{(\varphi\,\varphi'\xi + \xi)}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\;(\varphi\,\varphi'\xi + \xi)$$

olur. Buradan

$$(f^3 + f)(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,f(\varphi\,\varphi'\xi + \xi) + \;\varphi'\xi\right)$$

olur. Burada

$X = \frac{1}{\sqrt{2}}\;(\varphi\,\varphi'\xi + \xi)$ olmak üzere

$$f(X) = \frac{(\varphi - \varphi')}{\sqrt{2}}(X)$$

$$= \frac{\varphi(X) - \varphi'(X)}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\{\varphi(\varphi\,\varphi'\xi + \xi) - \varphi'(\varphi\,\varphi'\xi + \xi)\}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\varphi^2\,\varphi'\xi + \varphi\xi - \varphi'\varphi\,\varphi'\xi - \;\varphi'\xi}{2}$$

$$= \frac{-\varphi'\xi - \varphi'\varphi\,\varphi'\xi - \varphi'\xi}{2}$$

olur. Bu eşitlik

$$(f^3 + f)(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\, f(\varphi\,\varphi'\xi + \xi) + \ \varphi'\xi\right)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$(f^3 + f)(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{(-\varphi'\xi - \varphi'\varphi\,\varphi'\xi - \varphi'\xi)}{2} + \ \varphi'\xi\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{\varphi'\varphi\,\varphi'\xi}{2}$$

olur. Burada Teorem 4.1.3 kullanılırsa

$$\varphi'\varphi\,\varphi'\xi = \varphi'\varphi\mu^{-1}\,\varphi'\mu\xi$$

$$= \varphi'\varphi\mu^{-1}\,\varphi'\xi'$$

olur. $\mu(\varphi\xi') = \varphi\xi'$ olduğundan

$$\varphi'\varphi\,\varphi'\xi = \varphi'\varphi\mu^{-1}\mu(\varphi\xi')$$

$$= \varphi'\varphi\,\underbrace{\mu^{-1}\mu}_{I}\,(\varphi\xi')$$

$$= \varphi'\varphi^2\xi'$$

$$= -\varphi'\xi'$$

$$= 0$$

dır. Buradan

$$(f^3 + f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{\varphi'\varphi\,\varphi'\xi}{2}$$

olduğundan

$$(f^3 + f)(\xi) = 0$$

olur.

Benzer şekilde $(f^3+f)(\xi')=0$ olduğu gösterilecektir.

$$(f^3+f)(\xi')=f^3(\xi')+f(\xi')$$

$$=f^2\big(f(\xi')\big)+f(\xi')$$

dır. Eş.4.1.22 den

$$(f^3+f)(\xi')=f^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \varphi\xi'\right)+(\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi\xi')$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \{f^2(\varphi\xi')+\varphi\xi'\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \{f(f(\varphi\xi'))+\varphi\xi'\}$$

olur. Bu eşitlilikteki $f(\varphi\xi')$ hesaplanırsa

$$f(\varphi\xi')=\frac{(\varphi-\varphi')}{\sqrt{2}}(\varphi\xi')$$

$$=\frac{(\varphi^2\xi'-\ \varphi'\varphi\xi')}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(-\xi'+\eta'(\varphi\xi)\xi'-\ \varphi'\varphi\xi')}{\sqrt{2}}$$

eşitliği $\varphi\xi=0$ olduğundan

$$f(\varphi\xi')\ =\frac{(-\varphi'\varphi\xi'-\xi')}{\sqrt{2}}$$

$$=-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\ \ (\varphi'\varphi\xi'+\xi')$$

olur.

$$(f^3+f)(\xi')=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(f(f(\varphi\xi'))+\varphi\xi'\right)$$

eşitliğinde $f(\varphi\xi')=\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\varphi'\varphi\xi'+\xi')$ eşitliği yerine yazılırsa

$$(f^3+f)(\xi')=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\ f(\varphi'\varphi\xi'+\xi')+\varphi\xi'\right)$$

olur. Eşitlikteki $f(\varphi'\varphi\xi'+\xi')$ yi hesaplamak için

$X=\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\varphi'\varphi\xi'+\xi')$ olmak üzere

$$f(X)=\frac{(\varphi-\varphi')}{\sqrt{2}}(X)$$

$$=\frac{\varphi(X)-\varphi'(X)}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\{\varphi(\varphi'\varphi\xi'+\xi')-\varphi'(\varphi'\varphi\xi'+\xi')\}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\varphi\,\varphi'\varphi\xi'+\varphi\xi'-\varphi'^2\varphi\xi'-\varphi'\xi'}{2}$$

$$=\frac{2\varphi\xi'+\varphi\,\varphi'\varphi\xi'}{2}$$

olur. Bu eşitlik

$$(f^3+f)(\xi')=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\ (\varphi'\varphi\xi'+\xi')+\varphi\xi'\right)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$(f^3+f)(\xi')=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{(-2\varphi\xi'-\varphi\,\varphi'\varphi\xi')}{2}+\varphi\xi'\right\}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{\varphi\ \varphi'\varphi\xi'}{2}$$

olur. Buradan ise

$$\varphi\ \varphi'\varphi\xi' = \varphi\mu^{-1}\varphi\mu\varphi\xi'$$

$$= \varphi\mu^{-1}\varphi\mu(\varphi\xi')$$

dır. $\mu(\varphi\xi') = \varphi\xi'$ olduğundan

$$\varphi\ \varphi'\varphi\xi' = \varphi\mu^{-1}\varphi^2\xi'$$

$$= \varphi\mu^{-1}(-\xi' + \eta'(\xi')\xi')$$

dır. $\eta'(\xi') = 1$ olduğundan

$$\varphi\ \varphi'\varphi\xi' = \varphi\mu^{-1}(-\xi' + \xi')$$

$$= 0$$

olur. Buradan

$$(f^3 + f)(\xi') = -2^{-\frac{1}{2}}\ \frac{\varphi\ \varphi'\varphi\xi'}{2}$$

olduğundan

$$(f^3 + f)(\xi') = 0$$

olur.

Şimdi

$$f\varphi\xi' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\xi' - \ \varphi'\varphi\xi')$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\xi' - \mu^{-1}\varphi\mu\varphi\xi')$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\xi' + \xi)$$

dır. Buradan da $\mu\varphi\xi' = \varphi\xi'$ ve $\mu\xi = \xi'$ eşitlikleri kanıtlanır.

$$f^2\xi = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \varphi'(\xi))$$

$$= \frac{-(\varphi - \varphi')}{2}\ (\ \varphi'\xi)$$

$$= -\frac{(\varphi\ \varphi'\xi + \xi)}{2}$$

$$= -\frac{(\varphi^2\xi' + \xi)}{2}$$

$$= -\frac{(-\xi' + \xi)}{2}$$

ve

$$f^2\xi' = f(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \varphi(\xi'))$$

$$= \frac{(\varphi - \varphi')}{2}\ (\varphi\xi')$$

$$= \frac{(\varphi^2\xi' - \ \varphi'\varphi\xi')}{2}$$

$$= -\frac{(\xi' + \ \varphi'\varphi\xi')}{2}$$

$$= -\frac{(\xi' - \xi)}{2}$$

dır. Buradan ise

$$(f^3 + f)\ (\varphi\xi') = 0$$

dır.

ξ , ξ' ve $\varphi\xi'$ vektör alanları ile lineer bağımsız olan vektör alanı X olmak üzere

$$\varphi'X = \mu^{-1}\varphi\mu X = \varphi X$$

olup buradan

$$fX = 0$$

dır. Gerçekten

$$fX = \frac{(\varphi - \varphi')}{\sqrt{2}}(X) = \frac{\varphi(X) - \varphi'(X)}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\varphi(X) - \varphi(X)}{\sqrt{2}}$$

$$= 0$$

dır. Bu durumda $(f^3 + f)(X) = f^2\big(f(X) + f(X)\big) = 0$ bulunur. O halde f , M^{2n+1} manifoldu üzerinde bir f-yapıdır.

Ayrıca;

$$\varphi'\xi = \mu^{-1}\varphi\mu\xi = \mu^{-1}\varphi\xi'$$

dır.

$$f : TM^{2n+1} \longrightarrow Sp\{\varphi\xi', \xi - \xi'\}$$

olmak üzere buradan f-yapının rankı 2 dir.

4.1.1. Tanım:

$(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifoldu olsun. M^{2n+1} de yeni bir g' metriği

$$g'(X,Y) = g(\mu X, \mu Y)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada μ bir tensör alanıdır.

4.1.6. Teorem:

$(\varphi', \xi', \eta', g')$ yapısı, M^{2n+1} manifoldu üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapıdır.

İspat:

(φ', ξ', η') yapısı M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme yapıdır. Burada g' metriği için ilk olarak

$$
\begin{aligned}
g'(\xi', X) &= g(\mu\xi', \mu X) \\
&= g(\eta^2\xi, \mu X) \\
&= \eta(\mu X) \\
&= \eta'(X)
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur. Ayrıca

$$g'(\varphi'X, \varphi'Y) = g(\mu\varphi'X, \mu\varphi'Y)$$

eşitliğinde

$$\varphi'X = \mu^{-1}\varphi\mu X = \mu^{-1}\mu X = \varphi X$$

eşitliği yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
g'(\varphi'X, \varphi'Y) &= g(\varphi\mu X, \varphi\mu Y) \\
&= g(\mu X, \mu Y) - \eta(\mu X)\eta(\mu Y) \\
&= g'(X, Y) - \eta'(X)\eta'(Y)
\end{aligned}
$$

olur. O halde $(\varphi', \xi', \eta', g')$ yapısı M^{2n+1} manifoldu üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapıdır.

Şimdi M^{2n} nin bir hemen hemen Hermitian manifold olduğu ispatlanacaktır.

4.1.7. Teorem:

$(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold ve M^{2n+1} in bir hiperyüzeyi M^{2n} olsun. Eğer ξ , M^{2n} e ortogonal ise M^{2n} bir hemen hemen Hermitian manifoldtur.

İspat:

Sonuç.4.1.1 den $(M^{2n}, J = B^{-1}\varphi B\ )$ bir hemen hemen kompleks manifoldtur.

M^{2n} deki indirgenmiş metrik G olmak üzere

$G(X,Y) = g(BX,BY)$

dır. Buradan

$$G(JX,JY) = g(BJX,BJY)$$
$$= g(BB^{-1}\varphi BX\ ,BB^{-1}\varphi BY\ )$$
$$= g(\varphi BX,\varphi BY)$$

dır. Eş.2.4.9 dan

$g(\varphi BX,\varphi BY) = g(BX,BY) - \eta(BX)\eta(BY)$

bulunur. Buradan

$$G(JX,JY) = g(BX,BY) - \eta(BX)\eta(BY)$$
$$= G(X,Y)$$

olur. Buradan G nin M^{2n} üzerinde bir Hermitian metriktir. O halde M^{2n} bir hemen hemen Hermitian manifoldtur.

4.1.8. Teorem:

$(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold ve M^{2n+1} in bir hiperyüzeyi M^{2n} olsun. ξ , M^{2n} hiperyüzeyine teğet olmak üzere M^{2n+1} de sıfırdan farklı ve ξ ye dik bir ξ' vektör alanı var ise M^{2n} bir hemen hemen Hermitian manifoldtur.

İspat:

Teorem.4.1.4 den M^{2n} üzerinde $J = B^{-1}\varphi' B$ bir hemen hemen kompleks yapıdır. Burada

$\varphi' = \mu^{-1}\varphi\mu$

dır. Teorem 4.1.7 den M^{2n} bir hemen hemen kompleks yapıdır. Eş.4.1.8 deki g' metriğini M^{2n} deki bir G metriğiyle tanımlanırsa

$$G(X,Y) = g'(BX\,,BY)$$

olur. Buradan ise

$$G(JX,JY) = g'(BJX\,,BJY)$$

$$= g'(\varphi' BX\,,\varphi' BY)$$

$$= g'(BX,BY) - \eta'(BX)\eta'(BY)$$

$$= G(X,Y) - \eta(\mu BX)\,\eta(\mu BY) \qquad (4.1.24)$$

dır.

$g(Z,\xi) = 0$ olacak şekilde $BX = Z + \alpha\xi$ seçilsin. Buradan

$$\eta(\mu BX) = g(\mu BX, \xi)$$

dır. Eşitlikteki

$$\mu BX = \mu(Z + \alpha\xi)$$

$$= \mu Z + \alpha\mu\xi$$

$$= Z + \alpha\xi'$$

olur. Buradan

$$\eta(\mu BX) = g(Z + \alpha\xi', \xi)$$

$$= g(Z,\xi) + g(\alpha\xi', \xi)$$

$$= 0$$

dır. Eş.4.1.24 de eşitlik yerine yazılırsa

$$G(JX,JY) = G(X,Y) - \eta(\mu BX)\,\eta(\mu BY)$$

$$= G(X,Y)$$

olur. Buradan G bir hemen hemen Hermitian manifoldtur.

(φ,ξ,η,g) ve (φ',ξ',η',g') hemen hemen değme metrik manifoldlarının temel 2-formları sırasıyla ϕ ve ϕ' olmak üzere,

$$\phi'(X,Y)=\phi(\mu X,\mu Y)$$

dır. Buradan

$$\mu[X,Y]\neq[\mu X,\mu Y]$$

dır. Buradan ise

$$d\phi'(X,Y,Z)\neq d\phi(\mu X,\mu Y,\mu Z)$$

dır. Benzer şekilde normallik koşulu

$$[\varphi,\varphi](X,Y)+d\eta(X,Y)=0$$

dır ve μ altında invaryant değildir. Bu ise Sonuç.4.1.1 den açıktır.

5. SASAKIAN MANİFOLDLARIN HİPERYÜZEYLERİ

5.1. Hemen Hemen Değme Riemann Manifoldların Hiperyüzeyleri

Bir hemen hemen değme Riemann manifold $(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ ve M^{2n} de $\widetilde{M}^{2n+1}$ de bir hiperyüzey olsun. ξ yi M^{2n} nin teğetinde olmadığını kabul edelim. Buradan, $\forall X \epsilon\, \Gamma(TM)$ için

$$\phi X = \underbrace{JX}_{\substack{teğet\\ kısım}} + \underbrace{\alpha(X)\,\xi}_{\substack{normal\\ kısım}} \tag{5.1.1}$$

olarak ifade edilir. Burada

$$J: \Gamma(TM^{2n}) \xrightarrow[(1,1)tipinde]{} \Gamma(TM^{2n})$$

$$X \longrightarrow JX$$

ve

$$\alpha: \Gamma^{\perp}(TM^{2n}) \xrightarrow[(0,1)tipinde]{} \Gamma^{\perp}(TM^{2n})$$

$$X \longrightarrow \alpha(X)$$

dır.

Eğer $\alpha \neq 0$ ise M^{2n} invaryant olmayan bir hiperyüzeydir.
Eğer $\alpha = 0$ ise M^{2n} bir invaryant hiperyüzeydir.

Eş.5.1.1 in ϕ altındaki görüntüsü alınırsa;

$$\phi(\phi X) = \phi(JX + \alpha(X)\,\xi)$$

$$\phi^2 X = \phi(JX) + \alpha(\phi X)\xi$$

$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi$ olduğundan

$$-X + \eta(X)\xi = J^2 X + \alpha(JX)\,\xi$$

dır. Eşitlikteki teğet ve normal kısımlar birbirine eşitlenirse

$J^2X = -X$ den $J^2 = -I$ (5.1.2)

ve

$\eta(X)\xi = \alpha(JX)\,\xi$ den $\eta(X) = \alpha(JX)$ (5.1.3)

dır. Burada $\eta|_M = C\alpha$ ile gösterilirse

$C_\alpha(X) = \alpha(JX)$ (5.1.4)

olur. Burada $J^2 = -I$ olduğundan J tensör alanı M^{2n} üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır. Bu durumda (M^{2n}, J) bir hemen hemen kompleks manifoldtur. $\widetilde{M}^{2n+1}$ üzerindeki $\tilde{g}$ Riemann metriği ile bağdaşabilir Levi-Civita koneksiyonu $\widetilde{\nabla}$ olmak üzere $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için ;

$\widetilde{\nabla}_X \mathrm{Y} = \nabla_X \mathrm{Y} + \mathrm{h}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\xi$ (5.1.5)

$\widetilde{\nabla}_X \xi = -HX + \omega(X)\xi$ (5.1.6)

dır. Buradaki ∇_X Y ve $-HX$; M^{2n} de $\widetilde{\nabla}_X$ Y ve $\widetilde{\nabla}_X\, \xi$ nin teğet kısmıdır. Burada ∇ , M^{2n} hiperyüzeyi üzerine indirgenmiş koneksiyon, h , M^{2n} in ikinci temel formu, H (1,1)-tipinden bir tensör alanı ve ω da 1-formdur.

M^{2n} hiperyüzeyi üzerine $\widetilde{M}^{2n+1}$ deki $\tilde{g}$ Riemann metriğinin kısıtlanmışı

$\tilde{g}|_M = g$ (5.1.7)

ile gösterilsin.

5.1.1. Teorem:

$(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ hemen hemen değme manifoldunun hiperyüzeyi M^{2n} olsun. Bu durumda

$(\nabla_X\, g)(Y, Z) = h(X, Y)C_\alpha(Z) + h(X, Z)C_\alpha(Y)$ (5.1.8)

dır.

İspat:

$\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksiyon olduğundan $\forall\, X, Y\, , Z \in \Gamma\big(T\widetilde{M}^{2n+1}\big)$ için $\widetilde{\nabla}\tilde{g} = 0$ dır. Yani;

$$(\widetilde{\nabla}_X \tilde{g})(Y, Z) = X\tilde{g}(Y, Z) - \tilde{g}\big(\widetilde{\nabla}_X Y, \mathrm{Z}\big) - \tilde{g}(Y, \widetilde{\nabla}_X \mathrm{Z}) = 0$$

dır. Eş.5.1.6 dan

$$X\tilde{g}(Y, Z) - g(\nabla_{\mathrm{x}}\mathrm{Y} + \mathrm{h}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\xi, \mathrm{Z}) - \tilde{g}(Y, \nabla_{\mathrm{x}} Z + h(X, Z)\xi) = 0$$

olur. Buradan

$$Xg(Y, Z) - g(\nabla_{\mathrm{x}}\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) - \mathrm{h}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\tilde{g}(\xi, \mathrm{Z}) - g(Y, \nabla_{\mathrm{x}} Z) - h(X, Z)\tilde{g}(\xi, \mathrm{Y}) = 0$$

dır. Eş.5.1.4 den

$$(\nabla_{\mathrm{x}}\, g)(Y, Z) - h(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\eta(Z) - h(\mathrm{X}, Z)\eta(\mathrm{Y}) = 0$$

olur. Buradan

$$(\nabla_{\mathrm{x}}\, g)(Y, Z) = h(X, Y)\eta(Z) + h(X, Z)\eta(Y)$$

bulunur. Eş.5.1.4 den

$$(\nabla_{\mathrm{x}}\, g)(Y, Z) = h(X, Y)C_\alpha(Z) + h(X, Z)C_\alpha(Y)$$

elde edilir.

5.1.2. Teorem:

$(\widetilde{M}^{2n+1}\, , \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ hemen hemen değme manifoldun hiperyüzeyi M^{2n} olsun. M^{2n} hiperyüzeyi üzerine indirgenmiş koneksiyon ∇ , g ye göre Levi-Civita koneksiyon olması için gerekli ve yeterli koşulun M^{2n} hiperyüzeyinin total geodezik olmasıdır.

İspat:

∇, g ‘nin Levi-Civita konneksiyonu ise $\forall\, X, Y, Z \in M^{2n}$ vektör alanları için;

$$h(X, Y)C_\alpha(Z) + h(X, Z)C_\alpha(Y) = 0$$

olmalıdır. Buradan $h = 0$ dır ve M^{2n} hiperyüzeyi total geodeziktir.

5.2. Sasakian Manifoldların Hiperyüzeyleri

5.2.1.Teorem:

$\left(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g}\right)$ diferensiyellenebilir manifoldu bir Sasakian manifold olsun.
$\forall\, U, V \in \Gamma\left(T\widetilde{M}^{2n+1}\right)$ için

$$\widetilde{\nabla}_U \xi = \phi U \tag{5.2.1}$$

ve

$$d\eta(U, V) = g(\phi U, V) \tag{5.2.2}$$

dır.

İspat:

Eşitliklerin ispatı için Eş.2.4.1den

$$\left(\widetilde{\nabla}_U \phi\right) V = \eta(V) U - g(U, V)\xi \tag{5.2.3}$$

dır.

$\widetilde{\nabla}_U \xi = \phi U$ eşitliğinin ispatı için Eş.5.2.3 de V yerine ξ alınırsa

$$\left(\widetilde{\nabla}_U \phi\right)\xi = \eta(\xi) U - g(U, \xi)\xi$$

dır. $\left(\widetilde{\nabla}_U \phi\right)\xi = \widetilde{\nabla}_U \phi\xi - \phi\widetilde{\nabla}_U \xi$ olduğundan

$$\widetilde{\nabla}_U \phi\xi - \phi\widetilde{\nabla}_U \xi = U - \eta(U)\xi$$

olur. $\phi\xi = 0$ olduğundan

$$-\phi\widetilde{\nabla}_U \xi = U - \eta(U)\xi$$

dır. Bu eşitliğin ϕ altındaki görüntüsü alınırsa

$$-\phi^2\widetilde{\nabla}_U \xi = \phi U - \eta(U)\phi\xi$$

elde edilir. ϕ^2 nin tanımından ve $\phi\xi = 0$ olduğundan

$$-(-\widetilde{\nabla}_U\xi + \eta(\widetilde{\nabla}_U\xi)\xi) = \phi U$$

$$\widetilde{\nabla}_U\xi - \eta(\widetilde{\nabla}_U\xi)\xi = \phi U$$

eşitliği bulunur. Eşitlikte eğer $\eta(\widetilde{\nabla}_U\xi)\xi = 0$ ise eşitlik ispatlanır.

$$\eta(\widetilde{\nabla}_U\xi)\xi = g(\widetilde{\nabla}_U\xi, \xi)\xi$$

dır.

$$g(\xi, \xi) = sabit$$

dır. X e göre kovaryant türev alınırsa

$$X[g(\xi, \xi)] = g(\widetilde{\nabla}_X\xi, \xi) + g(\xi, \widetilde{\nabla}_X\xi)$$

olur ve g lineer olduğundan

$$0 = g(\widetilde{\nabla}_X\xi, \xi) + g(\widetilde{\nabla}_X\xi, \xi)$$

$$0 = 2g(\widetilde{\nabla}_X\xi, \xi)$$

ve

$$g(\widetilde{\nabla}_X\xi, \xi) = 0$$

bulunur. Buradan

$$\eta(\widetilde{\nabla}_U\xi)\xi = \underbrace{g(\widetilde{\nabla}_U\xi, \xi)}_{0}\xi$$

$$\eta(\widetilde{\nabla}_U\xi)\xi = 0$$

dır ve

$$\widetilde{\nabla}_U\xi - \underbrace{\eta(\widetilde{\nabla}_U\xi)}_{0}\xi = \phi U$$

olduğundan

$$\widetilde{\nabla}_U \xi = \phi U$$

olur ve

$$d\eta(U,V) = g(\phi U, V)$$

eşitliği Teorem.2.2.2 den açıktır.

5.2.2. Teorem:

$(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ Sasakian manifoldunun bir hiperyüzeyi M^{2n} olsun. Bu durumda $\forall\, X, Y \in \Gamma(TM^{2n})$ için

$$\widetilde{\nabla}_X \phi Y = \{C_\alpha(Y)X + J\nabla_X Y\} + \{\alpha(\nabla_X Y) - g(X,Y)\}\xi \tag{5.2.4}$$

dır.

İspat:

Eşitliğin ispatı için ilk olarak, $\forall\, X, Y \in \Gamma(TM^{2n})$ için

$$\left(\widetilde{\nabla}_X \phi\right)Y = \widetilde{\nabla}_X \phi Y - \phi(\widetilde{\nabla}_X Y)$$

eşitliğinden

$$\widetilde{\nabla}_X \phi Y = \left(\widetilde{\nabla}_X \phi\right)Y + \phi(\widetilde{\nabla}_X Y)$$

dır. Eş.5.1.5 ve Eş.5.2.1 den

$$\widetilde{\nabla}_X \phi Y = \eta(Y)X - g(X,Y)\xi + \phi(\nabla_X Y + h(X,Y)\xi)$$

$$= \eta(Y)X - g(X,Y)\xi + \phi(\nabla_X Y) + h(X,Y)\underbrace{\phi\xi}_{0}$$

dır. Eş.5.1.6 ve Eş.5.1.4 den

$$\widetilde{\nabla}_X \phi Y = C_\alpha(Y)X - g(X,Y)\xi + J(\nabla_X Y) + \alpha(\nabla_X Y)\xi$$

$$= \{C_\alpha(Y)X + J(\nabla_X Y)\} + \{\alpha(\nabla_X Y) - g(X,Y)\}\xi$$

dır.

5.2.3. Teorem:

$\left(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g}\ \right)$ Sasakian manifoldunun bir hiperyüzeyi M^{2n} olsun. Bu durumda $\forall\ X, Y \in \Gamma(TM^{2n})$ için

$\widetilde{\nabla}_X \phi Y = (\nabla_X J)Y + J\nabla_X Y + \alpha(Y)JX + \{h(X, JY) + (\nabla_X \alpha)(Y) + \alpha(X)\alpha(Y)\}\xi$
(5.2.5)

dır.

İspat:

Eşitliğin ispatı için $\forall\ X, Y \in \Gamma(TM^{2n})$ için

$(\nabla_X J)Y = \nabla_X JY - J(\nabla_X Y)$,
$h(X, JY)\xi = \widetilde{\nabla}_X JY - \nabla_X JY,$

$\big((\nabla_X \alpha)Y\big)\xi = \big(\nabla_X \alpha Y - \alpha(\nabla_X Y)\big)\xi = \nabla_X(\alpha Y)\xi - \alpha(\nabla_X Y)\xi$

eşitlikleri ve ayrıca Eş.5.1.6 da X yerine U; Y yerine V alınırsa

$\big(\widetilde{\nabla}_U \phi\big)V = \eta(V)U - g(U, V)\xi$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
(\nabla_X J)Y + J\nabla_X Y + \alpha(Y)JX + h(X, JY)\xi + (\nabla_X \alpha)(Y)\xi + \alpha(\nabla_X Y)\xi + \alpha(X) + \alpha(Y)\xi \\
= \nabla_X JY - J(\nabla_X Y) + J(\nabla_X Y) + \alpha(Y)JX + \widetilde{\nabla}_X JY - \nabla_X JY + \nabla_X(\alpha Y)\xi \\
-\alpha(\nabla_X Y)\xi + \alpha(\nabla_X Y)\xi + \alpha(X)\alpha(Y)\xi \\
= \ \alpha(Y)JX + \widetilde{\nabla}_X JY + \nabla_X(\alpha Y)\xi + \alpha(X)\alpha(Y) \\
= \alpha(Y)(JX + \alpha(X)\xi) + \widetilde{\nabla}_X(\phi Y - \alpha(Y)\xi) + \nabla_X \alpha(Y)\xi \\
= \alpha(Y)\phi X + \widetilde{\nabla}_X \phi Y - \widetilde{\nabla}_X \alpha(Y)\xi + \nabla_X \alpha(Y)\xi \\
= \alpha(Y)\widetilde{\nabla}_X \xi + \widetilde{\nabla}_X \phi Y - \alpha(Y)\widetilde{\nabla}_X \xi - \widetilde{\nabla}\big(\alpha(Y)\big)\xi + \nabla_X\big(\alpha(Y)\big)\xi \\
= \widetilde{\nabla}_X \phi Y - (\widetilde{\nabla}\big(\alpha(Y)\big)\xi - \nabla_X\big(\alpha(Y)\big)\xi)
\end{aligned}$$

$$= \widetilde{\nabla}_X \phi Y - h(X, \alpha(Y)\xi)\xi$$

$$= \widetilde{\nabla}_X \phi Y - \alpha(Y) h(X, \xi)\xi$$

dır. M^{2n} üzerine indirgenmiş koneksiyon ∇ , g ye göre Levi-Civita koneksiyon olduğundan M^{2n} hiperyüzeyi total geodeziktir ve $h(X, \xi) = 0$ olur. Buradan

$$(\nabla_X J)Y + J\nabla_X Y + \alpha(Y)JX + h(X, JY)\xi + (\nabla_X \alpha)(Y)\xi + \alpha(\nabla_X Y)\xi + \alpha(X) + \alpha(Y)\xi$$

$$= \widetilde{\nabla}_X \phi Y$$

bulunur.

5.2.4. Teorem:

$\left(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g}\right)$ Sasakian manifoldunun bir hiperyüzeyi M^{2n} olsun. Bu durumda $\forall\ X, Y \in \Gamma(TM^{2n})$ için

$$(\nabla_X J)Y = \alpha(JY)X - \alpha(Y)JX \tag{5.2.6}$$

ve

$$(\nabla_X \alpha)Y = -g(X, Y) - h(X, JY) - \alpha(X)\alpha(Y) \tag{5.2.7}$$

dır.

İspat:

$\forall\ X, Y \in \Gamma(TM^{2n})$ için

$$(\nabla_X J)Y = \alpha(JY)X - \alpha(Y)JX$$

eşitliğinin ispatı için Eş.5.2.4 ve Eş.5.2.5 den

$$C_\alpha(Y)X + J\nabla_X Y + \alpha(\nabla_X Y)\xi - g(X, Y)\xi = (\nabla_X J)Y + J\nabla_X Y + \alpha(X)JX + h(X, JY)\xi$$

$$+(\nabla_X \alpha)(Y)\xi + \alpha(\nabla_X Y)\xi + \alpha(X)\alpha(Y)\}\xi$$

dır. Eşitlikte gerekli işlemler yapılırsa

$$C_\alpha(Y)X - g(X, Y)\xi = (\nabla_X J)Y + \alpha(X)JX + \{h(X, JY) + (\nabla_X \alpha)(Y) + \alpha(X)\alpha(Y)\}\xi$$

olur. $C_\alpha(Y)X = \alpha(JY)X$ olduğundan

$$\alpha(JY)X - g(X,Y)\xi = (\nabla_X J)Y + \alpha(X)JX + \{h(X,JY) + (\nabla_X\alpha)(Y) + \alpha(X)\alpha(Y)\}\xi$$

eşitliği elde edilir. Burada teğet ve normal bileşenler birbirine eşitlenirse

$$\alpha(JY)X = (\nabla_X J)Y + \alpha(Y)JX$$

ve

$$-g(X,Y) = h(X,JY) + (\nabla_X\alpha)Y + \alpha(X)\alpha(Y)$$

bulunur. Birinci eşitlikten

$$(\nabla_X J)Y = \alpha(JY)X - \alpha(Y)JX$$

bulunur. İkinci eşitlikten de

$$(\nabla_X\alpha)Y = -g(X,Y) - h(X,JY) - \alpha(X)\alpha(Y)$$

elde edilir.

5.2.5. Teorem:

$(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ Sasakian manifoldunun hiperyüzeyi M^{2n} olsun. Bu durumda $\forall\, X, Y \in \Gamma(TM^{2n})$ için $N_J(X,Y) = 0$ dır. Yani J hemen hemen kompleks yapı integrallanebilirdir.

İspat:

Eşitliğin ispatı için;

$$N(X,Y) = (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X - J(\nabla_X J)Y + J(\nabla_Y J)X$$

eşitliği kullanılacaktır. Eş.5.2.7 den

$$\begin{aligned}(\nabla_{JX}J)Y &= \alpha(JY)JX - \alpha(Y)J(JX)\\ &= \alpha(JY)JY + \alpha(Y)X\end{aligned}$$

$$(\nabla_{JY}J)X = \alpha(JX)JY - \alpha(X)J(JY)$$

$$= \alpha(JX)JY + \alpha(X)Y$$

$$J(\nabla_X J)Y = J(\alpha(JY)X) - \alpha(Y)JX$$

$$= \alpha(JY)JX + \alpha(Y)X$$

$$J(\nabla_Y J)X = J(\alpha(JX)Y) - \alpha(X)JY$$

$$= \alpha(JX)JY + \alpha(X)Y$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler yerine yazılırsa

$$N_J(X,Y) = \alpha(JY)JX + \alpha(Y)X - \alpha(JX)JY - \alpha(X)Y - \alpha(JY)JX - \alpha(Y)X$$

$$+\alpha(JX)JY + \alpha(X)Y$$

$$= 0$$

bulunur.

5.2.1. Tanım:

$\left(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g}\right)$ Sasakian manifoldunun bir hiperyüzeyi M^{2n} olsun. Bu durumda

$$\gamma = g - C_\alpha \otimes C_\alpha \tag{5.2.8}$$

M^{2n} üzerinde bir Riemann metrik tensördür.

5.2.6. Teorem:

$\left(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g}\right)$ Sasakian manifoldunun bir hiperyüzeyi M^{2n} olsun. Bu durumda (M^{2n}, J, γ) bir Hermitian manifolddur.

İspat:

$$\gamma(JX,JY) = g(JX,JY) - \alpha(J^2X)\alpha(J^2Y)$$

$$= g(X,Y) - \alpha(X)\alpha(Y)$$

$$= \gamma(X,Y)$$

olur. Buradan (M^{2n}, J, γ) bir Hermitian manifoldtur.

$\forall\, U, V \in \Gamma(T\widetilde{M}^{2n+1})$ için $\widetilde{M}^{2n+1}$ in temel 2-formu

$$\widetilde{\Phi}(U, V) = \tilde{g}(\phi U, V) \tag{5.2.9}$$

dır.

$\forall\, X, Y \in \Gamma(TM^{2n})$ için

$$\Omega(X, Y) = \gamma(JX, Y) \tag{5.2.10}$$

dır.

5.2.1. Sonuç:

$\left(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g}\right)$ Sasakian manifoldunun hiperyüzeyi M^{2n} olsun. Bu durumda $\forall\, X, Y \in \Gamma(TM^{2n})$ için

$$\Omega(X, Y) = \widetilde{\Phi}(X, Y)$$

dır.

İspat:

Eşitliğin ispatı için, Eş.5.2.9 dan

$$\widetilde{\Phi}(X, Y) = \tilde{g}(\phi X, Y)$$

ve ϕX tanımından

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Phi}(X, Y) &= \tilde{g}(JX + \alpha(X)\xi, Y) \\
&= \tilde{g}(JX, Y) + \tilde{g}(\alpha(X)\xi, Y) \\
&= \tilde{g}(JX, Y) + \alpha(X)\tilde{g}(\xi, Y) \\
&= \tilde{g}(JX, Y) + \alpha(X)\alpha(Y) \\
&= \gamma(JX, Y)
\end{aligned}$$

$$= \Omega(X, Y)$$

bulunur.

5.2.7. Teorem:

$(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ Sasakian manifoldunun hiperyüzeyi M^{2n} olsun. ξ, M^{2n} in her noktasında teğet değilse o zaman (M^{2n}, J, γ) bir Kaehlerian manifoldtur.

İspat:

$\widetilde{\Phi} = d\eta$ olduğundan $d\widetilde{\Phi} = 0$ dır. Buradan $d\Omega = 0$ olup Ω kapalı formdur. O halde (M^{2n}, J, γ) bir Kaehlerian manifoldtur.

5.2.8. Teorem:

M^{2n} hiperyüzeyi üzerinde γ Hermitian metriğine göre Levi-Civita koneksiyonu $\overline{\nabla}$ olmak üzere

$$\overline{\nabla} J = 0 \qquad (5.2.11)$$

dır.

İspat:

Eşitliğin ispatı için

$$\overline{\nabla} J = \nabla J + \frac{1}{4}\{A(X, Y) - J\, S(X, Y))\}$$

dır. Eşitlikte

$$A(X, Y) = (\nabla_X J)\, Y - (\nabla_Y J)\, X$$

ve

$$S(X, Y) = (\nabla_X J)\, Y + (\nabla_Y J)\, X$$

dır.

$$(\overline{\nabla}_X J)\, Y = \overline{\nabla}_X J Y - J \overline{\nabla}_X Y$$

$$= \nabla_X JY - J\,\nabla_X Y - \frac{1}{4}\,\{A(X,Y) + J\,S(X,JY) + JA(X,JY) + \,S(X,Y)\}$$

$$= (\nabla_X J)Y - \frac{1}{2}\,\{(\nabla_X J)Y + J(\nabla_X J)JY\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\{(\nabla_X J)Y - J(\nabla_X J)JY\}$$

dır. Bu eşitlikteki

$$J(\nabla_X J)JY = J\nabla_X J^2\,Y - J^2\nabla_X JY$$

$$= -J\nabla_X\,Y + (\nabla_X J)Y + J\nabla_X\,Y$$

$$= (\nabla_X J)Y$$

dır. Bu eşitlikten

$$(\overline{\overline{\nabla}}_X J)\,Y = 0$$

olur. Buradan $\overline{\overline{\nabla}}J = 0$ dır.

5.3. γ Kaehler Metriğin Levi-Civita Konneksiyonu

$\left(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g}\right)$ bir Sasakian manifold, $\widetilde{M}^{2n+1}$ in bir hiperyüzeyi M^{2n} ve $\widetilde{M}^{2n+1}$ den M^{2n} hiperyüzeyine indirgenmiş metrik olan g ile bağdaşabilir Levi-Civita koneksiyonu yani indirgenmiş koneksiyon ∇ olsun. Burada M^{2n} hiperyüzeyi üzerindeki Kaehlerian metriği γ ile bağdaşabilir $\overline{\overline{\nabla}}$ Levi-Civita koneksiyonu hesaplanacaktır.

A, M^{2n} üzerinde bir vektör alanı olsun. $X \in \Gamma(TM^{2n})$ için

$$\alpha(X) = \gamma(A,X) \tag{5.3.1}$$

dır. Kozsul formülünden;

$$2\gamma(\overline{\overline{\nabla}}_X Y, Z) = 2g(\nabla_X Y, Z) - (*) \tag{5.3.2}$$

dır. Burada $(*)$ eşitliği Kozsul formülünden

$$(*) = \mathrm{X}[g(Y,Z)] + \mathrm{Y}[g(X,Z)] - \mathrm{Z}[g(\mathrm{X},\mathrm{Y})] - \mathrm{X}[\gamma(Y,Z)] - \mathrm{Y}[\gamma(X,Z)] + \mathrm{Z}[\gamma(\mathrm{X},\mathrm{Y})$$

$$+g([X,Y],Z)+g([Z,X],Y)+g([\mathrm{Z},\mathrm{Y}],\mathrm{X})-\gamma([\mathrm{X},Y],Z)-\gamma([\mathrm{Z},X],Y)$$

$$-\gamma([\mathrm{Z},Y],X)$$

dır. Buradan

$$(*)=X[g(Y,Z)-\gamma(Y,Z)]+Y[g(X,Z)-\gamma(X,Z)]-Z[g(X,Y)-\gamma(X,Y)]$$

$$+g([X,Y],Z)-\gamma([\mathrm{X},Y],Z)+g([Z,X],Y)-\gamma([\mathrm{Z},X],Y)+g([\mathrm{Z},\mathrm{Y}],\mathrm{X})$$

$$-\gamma([\mathrm{Z},Y],X)$$

olur. Bu eşitlikte

$$g(X,Y)-\gamma(X,Y)=\alpha(JX)\alpha(JY)$$

eşitliği yerine yazılırsa

$$(*)=X\{\alpha(JX)\alpha(JY)\}+Y\{\alpha(JZ)\alpha(JX)\}-Z\{\alpha(JX)\alpha(JY)\}+\alpha(J[X,Y])\alpha(JZ)$$

$$+\alpha(J[Z,X])\alpha(JY)+\alpha(J[Z,Y])\alpha(JX)$$

bulunur. Buradaki ilk ifade hesaplanacaktır. Bunun için Eş.5.2.7 ve Eş.5.2.8 den

$$-g(X,Y)=(\nabla_X\alpha)Y+h(X,JY)+\alpha(X)\alpha(Y)$$

olup Y yerine JY yazılırsa

$$-g(X,JY)=(\nabla_X\alpha)(JY)+h(X,J^2Y)+\alpha(X)\alpha(JY)$$

dır. Diğer taraftan

$$(\nabla_X\alpha)JY=\nabla_X\big(\alpha(JY)\big)-\alpha(\nabla_XJY)$$

olduğundan

$$-g(X,JY)=\nabla_X\big(\alpha(JY)\big)-\alpha(\nabla_XJY)-h(X,Y)+\alpha(X)\alpha(JY)$$

olur. Eşitlikte Y yerine Z alınırsa

$$-g(X,JZ)=\nabla_X\big(\alpha(JZ)\big)-\alpha(\nabla_XJZ)-h(X,Z)+\alpha(X)\alpha(JZ)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliklerde Eş.5.2.6 kullanılırsa

$$-g(X,JY) = \nabla_X\big(\alpha(JY)\big) - \alpha(X)\alpha(JY) + \alpha(JX)\alpha(Y) - \alpha(J\nabla_X Y) - h(X,Y) + \alpha(X)\alpha(JY)$$

ve

$$-g(X,JZ) = \nabla_X\big(\alpha(JZ)\big) - \alpha(X)\alpha(JZ) + \alpha(JX)\alpha(Z) - \alpha(J\nabla_X Z) - h(X,Z) + \alpha(X)\alpha(JZ)$$

olur. Bu eşitlikler

$$X\{\alpha(JY)\alpha(JZ)\} = \nabla_X\big(\alpha(JY)\big)\alpha(JZ) + \nabla_X\big(\alpha(JZ)\big)\alpha(JY)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$X\,\{\alpha(JY)\alpha(JZ)\} = \{h(X,Y) - g(X,JY) - \alpha(JX)\alpha(Y) + \alpha(J\nabla_X Y)\}\alpha(JZ) + \{h(X,Z) - g(X,JZ) - \alpha(JX)\alpha(Z) + \alpha(J\nabla_X Z)\}\alpha(JX) \quad (5.3.3)$$

bulunur. M^{2n} de

$$\gamma(\mathrm{X},Y) = g(\mathrm{X},Y) - \alpha(JX)\alpha(JY)$$

dır. $\widetilde{M}^{2n+1}$ de

$$g(\phi X,\phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

dır. Buradan

$$\alpha(JX)\alpha(JY) = g(X,Y) - \gamma(\mathrm{X},Y)$$

olur. Ayrıca

$$g(X,JY) + \alpha(JX)\alpha(Y) = \gamma(X,JY) \quad (5.3.4)$$

dır. Bu eşitlikte Eş.5.2.11 de Y yerine JY alınırsa

$$\gamma(X,JY) = g(X,JY) - C_\alpha(X)C_\alpha(JY)$$

olur. $C_\alpha(X) = \alpha(JX)$ olduğundan

$$\gamma(X,JY) = g(X,JY) - \alpha(JX)\alpha(J^2Y)$$

$$= g(X,JY) + \alpha(JX)\alpha(Y)$$

dır. Bu eşitlik Eş.5.3.3 de yerine yazılırsa

$$X\{\alpha(JY)\alpha(JZ)\} = \{h(X,Y) - \gamma(X,JY) + \alpha(J\nabla_X Y)\}\alpha(JZ)$$

$$+\{h(X,Z) - \gamma(X,JZ) + \alpha(J\nabla_X Z)\}\alpha(JY)$$

bulunur. Aynı zamanda

$$\gamma(X,JZ) = -\gamma(JX,Z)$$

dır. Bu eşitlikler (*) da yerine yazılırsa,

$$(*) = 2\{h(X,Y)\alpha(JZ) + \alpha(J\nabla_X Y)\alpha(JZ) + \gamma(JX,Z)\alpha(JY) + \gamma(JY,Z)\alpha(JX)\}$$

olur. Bu eşitlik Eş.5.3.2 de yerinen yazılırsa

$$\gamma(\overline{\nabla}_X Y,Z) = \gamma(\nabla_X Y,Z) + \alpha(J\nabla_X Y)\alpha(JZ) - h(X,Y)\alpha(JZ) - \alpha(J\nabla_X Y)\alpha(JZ)$$
$$- \gamma(JX,Z)\alpha(JY) - \gamma(JY,Z)\alpha(JX)$$

$$= \gamma(\nabla_X Y,Z) + h(X,Y)\gamma(JA,Z) - \alpha(JY)\gamma(JX,Z) - \alpha(JX)\gamma(JY,Z)$$

bulunur. Buradan

$$\gamma(\overline{\nabla}_X Y,Z) = \gamma(\nabla_X Y + h(X,Y)JA - \alpha(JY)JX - \alpha(JX)JY, Z)$$

her $Z \in \Gamma\,(TM)$ için sağlanır. γ non-degenerete olduğundan

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)JA - \alpha(JY)JX - \alpha(JX)JY \qquad (5.3.5)$$

olur. Ayrıca Eş.5.2.7 den

$$\nabla_X JY = (\nabla_X J)Y + J\nabla_X Y$$

dır. Diğer taraftan

$$(\nabla_X J)Y = \alpha(JY)X - \alpha(Y)JX$$

olup

$$(\nabla_X J)Y = \alpha(JY)X - \alpha(Y)JX + J\nabla_X Y \tag{5.3.6}$$

olur.

5.3.1. Teorem:

$(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ bir Sasakian manifold M^{2n} de bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\overline{\nabla}_X JY = \alpha(JY)X + J\nabla_X Y + h(X, JY)JA + \alpha(JX)Y \tag{5.3.7}$$

dır.

İspat:

Eşitliğin ispatı için ilk olarak Eş.5.3.5 de Y yerine JY alınırsa

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X JY &= \nabla_X(JY) + h(X, JY)JA - \alpha(J^2Y)JX - \alpha(JX)J^2Y \\ &= \nabla_X(JY) + h(X, JY)JA + \alpha(Y)JX + \alpha(JX)Y\end{aligned}$$

olur. Eş.5.3.6 dan

$$\overline{\nabla}_X JY = \alpha(JY)X + J\nabla_X Y + h(X, JY)JA + \alpha(JX)Y$$

bulunur.

5.3.2. Teorem:

$(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ bir Sasakian manifold M^{2n} de bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\overline{\nabla}_X JY = J\nabla_X Y - h(X, Y)A + \alpha(JY)X + \alpha(JX)Y \tag{5.3.8}$$

dır.

İspat:

Eşitliğin ispatı için ilk olarak Eş.5.3.5 in J altındaki görüntüsü alınırsa

$$\begin{aligned}J(\overline{\nabla}_X Y) &= J\nabla_X Y + h(X, Y)J^2A - \alpha(JY)J^2X - \alpha(JX)J^2Y \\ &= J\nabla_X Y - h(X, Y)A + \alpha(JY)X + \alpha(JX)Y\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$(\overline{\nabla}_X J)Y = \overline{\nabla}_X JY - J(\overline{\nabla}_X Y)$

ve Eş.5.2.14 den

$J(\overline{\nabla}_X Y) = \overline{\nabla}_X JY$

olup buradan

$\overline{\nabla}_X JY = J\nabla_X Y - h(X,Y)A + \alpha(JY)X + \alpha(JX)Y$

olur.

5.3.1. Sonuç:

$\left(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g}\right)$ bir Sasakian manifold M^{2n} de bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$h(X,JY)JA = -h(X,Y)A \tag{5.3.9}$$

dır.

İspat:

Eşitliğin ispatı için Eş.5.3.7 ve Eş.5.3.8 den

$\overline{\nabla}_X JY = \alpha(JY)X + J\nabla_X Y + h(X,JY)JA + \alpha(JX)Y$

$\overline{\nabla}_X JY = J\nabla_X Y - h(X,Y)A + \alpha(JY)X + \alpha(JX)Y$

dır. Eşitliklerin sağ tarafları eşitlenirse

$h(X,JY)JA = -h(X,Y)A$

eşitliği bulunur.

5.3.3. Teorem:

$(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ bir Sasakian manifold olsun. Sasakian manifoldun invaryant olmayan bir hiperyüzeyi M^{2n} nin total geodezik olması için gerekli ve yeterli koşul

Eş.5.1.5 de tanımlanan ∇ koneksiyonunun, g indirgenmiş metrik ile bağdaşabilen yani Levi-Civita koneksiyon olmasıdır ve ξ, M^{2n} e teğet değildir.

İspat:

$\Leftarrow$:

Eş.5.3.9 dan

$h(X, JY)JA + h(X, Y)A = 0$

idi. M^{2n} invaryant olmayan hiperyüzeyi üzerinde her noktada A ve JA vektör alanları lineer bağımsız olduğundan $h(X, JY) = 0$ ve $h(X, Y) = 0$ dır. Buradan M^{2n} hiperyüzeyi total geodeziktir.

$\Rightarrow$:

$(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ Sasakian manifoldunun invaryant olmayan bir hiperyüzeyi M^{2n} total geodezik olsun. Yani $h(X, Y) = 0$ olması Gauss denkleminde yerine yazılırsa bu durumda hiperyüzeyde normal bileşen olmayacak sadece teğetsel bileşen bulunacaktır. Ayrıca

$\Gamma\left(T\widetilde{M}^{2n+1}\right) = s_P\{X_1, X_2, \dots, X_n, \phi X_1, \phi X_2, \dots, \phi X_n, \xi\}$,

$\Gamma(M^{2n}) = s_P\{X_1, X_2, \dots, X_n, \phi X_1, \phi X_2, \dots, \phi X_n\}$

olduğundan $\xi \in \Gamma^{\perp}(TM^{2n})$ dır. Buradan ξ, M^{2n} hiperyüzeyine teğet değildir.

5.4. Sabit ϕ-Holomorfik Kesitsel Eğrilikli Sasakian Manifoldların Hiperyüzeyleri

$(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ bir Sasakian manifold, M^{2n} ise $\widetilde{M}^{2n+1}$ in bir total geodezik hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $h = 0$ olup

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = h(X, Y)C\alpha(Z) + h(X, Z)C\alpha(Y)$$

$$= 0 \qquad (5.4.1)$$

olur. O halde indirgenmiş koneksiyon ∇, indirgenmiş metriğin Levi-Civita koneksiyonudur.

Eş.5.1.6 ve Eş.5.3.5 eşitlikleri $h = 0$ olduğundan

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \underbrace{h(X,Y)}_{0}\,\xi$$

ve

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \underbrace{h(X,Y)}_{0} JA - \alpha(JY)JX - \alpha(JX)JY$$

dır. Bu eşitliklerden

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y + \alpha(JY)JX + \alpha(JX)JY \tag{5.4.2}$$

olur. Ayrıca Eş.5.4.2 de X yerine Y; Y yerine Z alınırsa

$$\widetilde{\nabla}_Y Z = \overline{\nabla}_Y Z + \alpha(JZ)JY + \alpha(JY)JZ$$

bulunur.

5.4.1. Teorem:

$(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ bir Sasakian manifold ve M^{2n} de $\widetilde{M}^{2n+1}$ in bir total geodezik hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z = {} & \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z + \alpha(J\overline{\nabla}_Y Z)JX + \alpha(JX)J\overline{\nabla}_Y Z \\ & + \{\overline{\nabla}_X \alpha(JZ) + \alpha(J\overline{\nabla}_X Z)\}JY + \{\overline{\nabla}_X \alpha(JY) + \alpha(J\overline{\nabla}_X Y)\}JZ \\ & + \alpha(JZ)\{J\overline{\nabla}_X Y - \alpha(Y)JX - \alpha(JX)Y\} \\ & + \alpha(JY)\{J\overline{\nabla}_X Z - \alpha(Z)JX - \alpha(JX)Z\}\end{aligned} \tag{5.4.3}$$

dır.

İspat:

Eşitliğin ispatı için;

$$\widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y Z) = \overline{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y Z) + \alpha\big(J\widetilde{\nabla}_Y Z\big)JX + \alpha(JX)J\widetilde{\nabla}_Y Z$$

dır. Eş.5.4.2 den

$$\widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y Z) = \overline{\nabla}_X(\overline{\nabla}_Y Z + \alpha(JZ)JY + \alpha(JY)JZ)$$

$$+\alpha(J(\overline{\nabla}_Y Z + \alpha(JZ)JY + \alpha(JY)JZ)JX$$

$$+\alpha(JX)J(\overline{\nabla}_Y Z + \alpha(JZ)JY + \alpha(JY)JZ)$$

dır. Buradan

$$\widetilde{\nabla}_X(\widetilde{\nabla}_Y Z) = \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z + \overline{\nabla}_X\alpha(JZ)JY + \alpha(JZ)J\overline{\nabla}_X Y + \overline{\nabla}_X\alpha(JY)JZ + \alpha(JY)J\overline{\nabla}_X Z$$

$$+\{\alpha(J\overline{\nabla}_Y Z) + \alpha(JZ)\alpha(J^2Y) + \alpha(JY)\alpha(J^2Z)\}JX$$

$$+\alpha(JX)J(\overline{\nabla}_Y Z) + \alpha(JX)\alpha(JZ)J^2Y + \alpha(JX)\alpha(JY)J^2Z$$

$$= \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z + \alpha(J\overline{\nabla}_Y Z)JX + \alpha(JX)J\overline{\nabla}_Y Z$$

$$+\{(\overline{\nabla}_X\alpha)(JZ) + \alpha(J\overline{\nabla}_X Z)\}JY + \{(\overline{\nabla}_X\alpha)(JY) + \alpha(J\overline{\nabla}_X Y)\}JZ$$

$$+\alpha(JZ)\{-\alpha(Y)JX - \alpha(JX)Y + J\overline{\nabla}_X Y\}$$

$$+\alpha(JY)\{-\alpha(Z)JX - \alpha(JX)Z + J\overline{\nabla}_X Z\}$$

olur.

5.4.2. Teorem:

$(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ Sasakian manifoldunun eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)Z &= \bar{R}(X,Y)Z + (\overline{\nabla}_X\alpha)(JZ)JY - (\overline{\nabla}_Y\alpha)(JZ)JX \\ &+ \{(\overline{\nabla}_X\alpha)(JY) - (\overline{\nabla}_X\alpha)(JX)\}JZ \\ &+\alpha(JZ)\{-\alpha(Y)JX - \alpha(JX)Y + \alpha(X)JY + \alpha(JY)X\} \\ &-\alpha(JY)\alpha(Z)JX + \alpha(JX)\alpha(Z)JY \end{aligned} \qquad (5.4.4)$$

dır. Burada $\bar{R}$, $\overline{\nabla}$ koneksiyonuna göre M^{2n} hiperyüzeyinin eğrilik tensör alanıdır.

İspat:

$\forall\, X, Y, Z\ \in \Gamma(T\widetilde{M}^{2n+1})$ için

$\widetilde{R}(X,Y)Z = \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_Z Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z$

dır. Burada Eş.5.4.3 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)Z &= \overline{\nabla}_X\overline{\nabla}_Y Z + \alpha(J\overline{\nabla}_Y Z)JX + \alpha(JX)J\overline{\nabla}_Y Z \\
&+\{(\overline{\nabla}_X\alpha)(YZ) + \alpha(J\overline{\nabla}_X Z)\}JY + \{(\overline{\nabla}_X\alpha)(JY) + \alpha(J\overline{\nabla}_X Y)\}JZ \\
&+\alpha(JZ)\{J\overline{\nabla}_X Y - \alpha(Y)JX - \alpha(JX)Y\} \\
&+\alpha(JY)\{J\overline{\nabla}_X Z - \alpha(Z)JX - \alpha(JX)Z\} \\
&-[\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z + \alpha(J\overline{\nabla}_X Z)JY + \alpha(JY)J\overline{\nabla}_X Z + \{(\overline{\nabla}_Y\alpha)(JZ) + \alpha(J\overline{\nabla}_Y Z)\}JX + \\
&\quad \{(\overline{\nabla}_Y\alpha)(JX) + \alpha(J\overline{\nabla}_Y X)\}JZ + \alpha(JZ)\{J\overline{\nabla}_Y X - \alpha(X)JY - \alpha(JY)X\} + \\
&\quad \alpha(JX)\{J\overline{\nabla}_Y Z - \alpha(Z)JY - \alpha(JY)Z\}] \\
&-\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z
\end{aligned}$$

olur. Gerekli işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)Z = \bar{R}(X,Y)Z &+ (\overline{\nabla}_X\alpha)(JZ)JY - (\overline{\nabla}_Y\alpha)(JZ)JX \\
&+ \{(\overline{\nabla}_X\alpha)(JY) - (\overline{\nabla}_X\alpha)(JX)\}JZ + \alpha(JZ)\{-\alpha(Y)JX - \alpha(JX)Y \\
&+ \alpha(X)JY + \alpha(JY)X\} - \alpha(JY)\alpha(Z)JX + \alpha(JX)\alpha(Z)JY
\end{aligned}$$

bulunur.

5.4.3. Teorem:

$(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ manifoldu bir Sasakian manifold M^{2n} de $\widetilde{M}^{2n+1}$ in bir total geodezik hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
X\alpha(JZ) &= (\nabla_X\alpha)JZ + \alpha\big((\nabla_X J)Z\big) + \alpha(J\nabla_X Z) \\
&= -\gamma(X, JZ) + \alpha(J(\overline{\nabla}_X Z) - \alpha(JZ)\alpha(X) - \alpha(JX)\alpha(Z) \qquad (5.4.5)
\end{aligned}$$

dır.

İspat:

Eşitliğin ispatı için;

$$
\begin{aligned}
X\alpha(JZ) &= \nabla_X(\alpha(JZ))\\
&= (\nabla_X\alpha)(JZ) + \alpha(\nabla_X JZ)\\
&= (\nabla_X\alpha)(JZ) + \alpha((\nabla_X J)Z + J\nabla_X Z)\\
&= (\nabla_X\alpha)JZ + \alpha\big((\nabla_X J)Z\big) + \alpha(J\nabla_X Z)
\end{aligned}
$$

dır. Diğer taraftan;

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X\alpha)(JZ) &= -g(X,JZ) - h(X,J^2Z) - \alpha(X)\alpha(JZ)\\
&= -g(X,JZ) + h(X,Z) - \alpha(X)\alpha(JZ)\\
&= -g(X,JZ) - \alpha(X)\alpha(JZ)
\end{aligned}
$$

dır.

$$
\begin{aligned}
\alpha\big((\nabla_X J)Z\big) &= \alpha(\alpha(JZ)X - \alpha(Z)JX)\\
&= \alpha(JZ)\alpha(X) - \alpha(Z)\alpha(JX)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\alpha(J\nabla_X Z) &= \alpha\big(J\widetilde{\nabla}_X Z\big)\\
&= \alpha\big(J(\overline{\nabla}_X Z + \alpha(JZ)JX + \alpha(JX)JZ)\big)\\
&= \alpha(J\overline{\nabla}_X Z - \alpha(JZ)X - \alpha(JX)Z)\\
&= \alpha(J\overline{\nabla}_X Z) - \alpha(JZ)\alpha(X) - \alpha(JX)\alpha(Z)
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
X\alpha(JZ) = &-g(X,JZ) - \alpha(X)\alpha(JZ) + \alpha(JZ)\alpha(X) - \alpha(Z)\alpha(JX)\\
&+\alpha\big(J(\overline{\nabla}_X Z + \alpha(JZ)JX + \alpha(JX)JZ)\big)
\end{aligned}
$$

bulunur. Ayrıca Eş.5.2.8 den

$$\gamma(X,JZ) = g(X,JZ) - \alpha(JX)\alpha(J^2Z)$$

$$= g(X,JZ) + \alpha(JX)\alpha(Z)$$

olur. Buradan

$$X\alpha(JZ) = -g(X,JZ) - \alpha(Z)\alpha(JX) + +\alpha(J(\overline{\nabla}_X Z) + \alpha(\alpha(JZ)J^2X) + \alpha(\alpha(JX)J^2Z)$$

$$= -\gamma(X,JZ) + \alpha(J(\overline{\nabla}_X Z) - \alpha(JZ)\alpha(X) - \alpha(JX)\alpha(Z)$$

bulunur.

5.4.1. Sonuç:

$(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ manifoldu bir Sasakian manifold M^{2n} de $\widetilde{M}^{2n+1}$ in bir total geodezik hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$X\alpha(JZ) = (\overline{\nabla}_X \alpha)(JZ) + \alpha(J\overline{\nabla}_X Z) \tag{5.4.6}$$

dır.

İspat:

$$(\overline{\nabla}_X \alpha)(JZ) = -g(X,JZ) - \alpha(X)\alpha(JZ)$$

$$= -g(X,JZ) + \alpha(JX)\alpha(Z) - \alpha(X)\alpha(JZ) - \alpha(JX)\alpha(Z)$$

$$= -\gamma(X,JZ) - \alpha(X)\alpha(JZ) - \alpha(JX)\alpha(Z) \tag{5.4.7}$$

dır. Eş.5.4.5 de

$$X\alpha(JZ) = -\gamma(X,JZ) - \alpha(X)\alpha(JZ) - \alpha(JX)\alpha(Z) + \alpha(J(\overline{\nabla}_X Z)$$

$$= (\overline{\nabla}_X \alpha)(JZ) + (J\overline{\nabla}_X Z)$$

bulunur.

5.4.2. Sonuç:

$(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ manifoldu bir Sasakian manifold M^{2n} de $\widetilde{M}^{2n+1}$ in bir total geodezik hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$(\overline{\nabla}_X \alpha)(JY) - (\overline{\nabla}_Y \alpha)(JX) = 2\gamma(JX, Y) \tag{5.4.8}$$

dır.

İspat:

Eşitliğin ispatı için Sonuç.5.4.1 deki

$$(\overline{\nabla}_X \alpha)(JZ) = -\gamma(X, JZ) - \alpha(X)\alpha(JZ) - \alpha(JX)\alpha(Z)$$

eşitliğinde Z yerine Y alınırsa

$$(\overline{\nabla}_X \alpha)(JY) = -\gamma(X, JY) - \alpha(X)\alpha(JY) - \alpha(JX)\alpha(Y)$$

olur. Aynı eşitlikte X yerine Y, Z yerine X alınırsa

$$(\overline{\nabla}_Y \alpha)(JX) = -\gamma(Y, JX) - \alpha(Y)\alpha(JX) - \alpha(JY)\alpha(X)$$

olur. Bu eşitliklerden

$$(\overline{\nabla}_X \alpha)(JY) - (\overline{\nabla}_Y \alpha)(JX) = -\gamma(X, JY) - \alpha(X)\alpha(JY) - \alpha(JX)\alpha(Y)$$
$$-\{-\gamma(Y, JX) - \alpha(Y)\alpha(JX) - \alpha(JY)\alpha(X)\}$$

dır. Gerekli işlemler yapıldığında

$$(\overline{\nabla}_X \alpha)(JY) - (\overline{\nabla}_X \alpha)(JX) = -\gamma(X, JY) + \gamma(Y, JX)$$

olur. Ayrıca

$$-\gamma(X, JY) = -\gamma(JX, J^2 Y)$$
$$= +\gamma(JX, Y)$$

olduğundan

$$(\overline{\nabla}_X \alpha)(JY) - (\overline{\nabla}_X \alpha)(JX) = \gamma(JX, Y) + \gamma(JX, Y)$$

$$= 2\gamma(JX, Y)$$

bulunur.

5.4.4. Teorem:

$(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ manifoldu bir Sasakian manifold M^{2n} de $\widetilde{M}^{2n+1}$ in bir total geodezik hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \bar{R}(X,Y)Z + \gamma(JX,Z)JY - \gamma(JY,Z)JX + 2\gamma(JX,Y)JZ$$
$$+\alpha(JZ)\{\alpha(JY)X - \alpha(JX)Y\} \qquad (5.4.9)$$

dır.

İspat:

Eşitliğin ispatı için Eş.5.4.4 deki ifadeler hesaplanacaktır. İlk olarak Eş.5.4.7 den

$$\gamma(JX,Z)JY = (\overline{\nabla}_X\alpha)(JZ)JY + \alpha(JZ)\alpha(X)JY + \alpha(JX)\alpha(Z)JY$$
$$= \{(\overline{\nabla}_X\alpha)(JZ) + \alpha(JZ)\alpha(X) + \alpha(JX)\alpha(Z)\}JY$$

olur. Buradan

$$\gamma(JY,Z)JX = (\overline{\nabla}_Y\alpha)(JZ)JX + \alpha(JZ)\alpha(Y)JX + \alpha(JY)\alpha(Z)JX$$
$$= \{(\overline{\nabla}_Y\alpha)(JZ) + \alpha(JZ)\alpha(Y) + \alpha(JY)\alpha(Z)\}JX$$

dır. Ayrıca

$$\{(\overline{\nabla}_X\alpha)(JY) - (\overline{\nabla}_X\alpha)(JX)\}JZ = 2\gamma(JX,Y)JZ$$

dır. Burada gerekli hesaplamalar yapılırsa Eş.5.4.4 eşitliği

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \bar{R}(X,Y)Z + \gamma(JX,Z)JY - \gamma(JY,Z)JX + 2\gamma(JX,Y)JZ$$
$$+\alpha(JZ)\{\alpha(JY)X - \alpha(JX)Y\}$$

bulunur.

5.4.3. Sonuç:

$(\widetilde{M}^{2n+1},\phi,\xi,\eta,\tilde{g})$ manifoldu bir Sasakian manifold ve $\widetilde{M}^{2n+1}$ nin sabit ϕ-holomorfik kesitsel eğriliği k olmak üzere

$$\begin{aligned}4\tilde{R}(X,Y)Z = {} & (k+3)\{g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\}\\ & +(k-1)\{\alpha(JX)\alpha(JZ)Y-\alpha(JY)\alpha(JZ)X\\ & +\gamma(JY,Z)JX+\gamma(JZ,X)JY\}-2\gamma(JX,Y)JZ\\ & +(k-1)\{g(X,Z)\alpha(JY)-g(Y,Z)\alpha(JX)\\ & +\gamma(JY,Z)\alpha(X)+\gamma(JZ,X)\alpha(Y)-2\gamma(JX,Y)\alpha(Z)\}\xi\end{aligned} \tag{5.4.10}$$

dır.

İspat:

Eşitliğin ispatı için;

$\tilde{g}(\phi U,V)=\phi(U,V)$

$\Omega(X,Y)=\gamma(JX,Y)$

dır. $\widetilde{M}^{2n+1}$, Sasakian manifold olduğundan $\Omega=d\eta$ ve $\phi=0$ dır. Buradan

$\tilde{g}(\phi Y,Z)\phi X=[\gamma(JY,Z)JX+\gamma(JY,Z)\alpha(X)\xi]$

$\tilde{g}(\phi Z,X)\phi Y=[\gamma(JZ,X)JY+\gamma(JZ,X)\alpha(Y)\xi]$

$-2\tilde{g}(\phi X,Y)\phi Z=-2[\gamma(JX,Y)JZ+\gamma(JX,Y)\alpha(Z)\xi]$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned}4\tilde{R}(X,Y)Z = {} & (k+3)\{\tilde{g}(Y,Z)X-\tilde{g}(X,Z)Y\}+(k-1)\{\eta(X)\eta(Z)Y-\eta(Y)\eta(Z)X\\ & +\tilde{g}(X,Z)\eta(Y)\xi-\tilde{g}(Y,Z)\eta(X)\xi+\tilde{g}(\phi Y,Z)\phi X+\tilde{g}(\phi Z,X)\phi Y\\ & -2\tilde{g}(\phi X,Y)\phi Z\}\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$4\tilde{R}(X,Y)Z = (k+3)\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

$$+(k-1)\{\alpha(JX)\alpha(JZ)Y - \alpha(JY)\alpha(JZ)X + \gamma(JY,Z)JX + \gamma(JZ,X)JY - 2\gamma(JX,Y)JZ\}$$

$$+(k-1)\{g(X,Z)\alpha(JY) - g(Y,Z)\alpha(JX) + \gamma(JY,Z)\alpha(X) + \gamma(JZ,X)\alpha(Y) - 2\gamma(JX,Y)\alpha(Z)\}\xi$$

olur.

5.4.5. Teorem:

$(\widetilde{M}^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, \tilde{g})$ bir Sasakian manifold ve M^{2n} bir hiperyüzey olsun. M^{2n} nin sabit ϕ-holomorfik kesitsel eğriliği k olsun. Eğer ξ, hiperyüzey M^{2n} e teğet değil ve M^{2n} total goedezik ise (M^{2n}, J, γ) Kaehlerian manifoldunun sabit ϕ-holomorfik kesitsel eğriliği $k+3$'tür.

İspat:

$\widetilde{M}^{2n+1}$ nin sabit ϕ-holomorfik kesitsel eğriliği k ise Eş.5.4.6 dan

$$\tilde{g}(\phi Y, Z)\phi X = g(JY + \alpha(Y)\xi, Z)(JX + \alpha(X)\xi)$$

$$= \{g(JY,Z) + \alpha(Y)g(\xi,Z)\}(JX + \alpha(X)\xi)$$

$$= \{g(JY,Z) + \alpha(Y)\alpha(Z)\}(JX + \alpha(X)\xi)$$

$$= \gamma(JY,Z)(JX + \alpha(X)\xi)$$

olur. Eş.5.4.6 ve Eş.5.4.10 dan;

$\tilde{R}(X,Y)Z$ eşitliğinde ξ'li terim olmadığından;

$$(k-1)\{g(X,Z)\alpha(JY) - g(Y,Z)\alpha(JX) + \gamma(JY,Z)\alpha(X) + \gamma(JZ,X)\alpha(Y) - 2\gamma(JX,Y)\alpha(Z)\} = 0 \qquad (5.4.11)$$

dır ve ayrıca

$$4\tilde{R}(X,Y)Z = 4\{\gamma(JY,Z)JX - \gamma(JX,Z)JY - 2\gamma(JX,Y)JZ + \alpha(JZ)[\alpha(JX)Y - \alpha(JY)X]\}$$

$$+(k+3)\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

$$+(k-1)\{\alpha(JX)\alpha(JZ)Y - \alpha(JY)\alpha(JZ)X + \gamma(JY,Z)JX - \gamma(JX,Z)JY - 2\gamma(JX,Y)JZ\}$$

olur.

$$4\bar{R}(X,Y,Z) = (k+3)\{\gamma(JY,Z)JX - \gamma(JX,Z)JY - 2\gamma(JX,Y)JZ + \gamma(Y,Z) - \gamma(X,Z)Y\}$$

dır. $(X \wedge Y)\ Z = \gamma(Y,Z)X - \gamma(X,Z)Y$ olduğundan

$$4\bar{R}(X,Y,Z) = (k+3)\{X \wedge Y + JX \wedge JY - 2\gamma(JX,Y)J\}Z \tag{5.4.12}$$

bulunur. Buradan (M^{2n}, J, γ) nin sabit ϕ-holomorfik kesitsel eğriliği $k+3$'tür.

KAYNAKLAR

1. Blair , D.E., “Riemanian Geometry of Contact and Simplectic Manifolds”, ***Birkhauser*** , Boston, (2002).
2. Blair, D.E., “Contac Manifolds in Riemannian Geometry”, ***Lecture Notes in Mat.,*** 509, ***Springer-Verlag***, (1976).
3. Chen , B.Y. , “Geometry of Submanifolds”, ***Marcel Dekker NY***,(1973).
4. De U.C. Shaikh, A.A. Biswas, “On ϕ-Recurred Sasakian Manifolds”, ***Novi Sad J. Math.***, 33(2):43-48 (2003).
5. Goldberg, S.I. ,and K Yano, “Non-invariant hypersurfaces of almost contact manifolds” ***Tohoku Math. J.*** (1969).
6. Goldberg , S.I. ve Yano, K. , “On normal globally framed f-manifolds”, ***Tohoku Math. J***., 22: 362-370 (1970).
7. Hacısalihoğlu, H.H., “Diferensiyel Geometri”, ***İnönü Üniversitesi Yayınları***, (1983).
8. Kobayashi S. ,Nomizu K., “Foundations of Differential Geometry”, ***John Wiley and Sons Inc. ,*** New York**,** (1996)
9. Ogiue, K. , “On fiberings of almost contact manifolds”, ***Kodai Math. Sem. Rep.*** 17:53-62 (1965).
10. Sabuncuoğlu, A. “Diferensiyel Geometri” , ***Nobel Basım Evi***, (2004)
11. Sasaki, S. “On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structures”, I**,** ***Tohoku Math. J***., 12: 456-476 (1960).
12. Toshio ,T. ,”A Note On Certain Hypersurfaces of Sasakian Manıfolds”, ***Kodai Math,,*** 510-516 (1969).
13. Verstraelen, L. and Vrancken, L., Pinching Theorems for C-Totally Real Submanifolds of Sasakian Space Forms , ***Journal of Geometry*** , 33, (1988)
14. Yano K. , Kon M.,”Structure on Manifolds” , ***Series in Pure Mathemaics, 3. World Scientific Publishing Co.*** , Singapore, (1984)
15. Yano, K. And I. Mogi, “On Recol Representations of Kaehlerian Manifolds”. ***Annols of math***. 61: 170-189 (1955).
16. Yano, K., and S., Ishihara, “The f - Structure Induced On Submanifolds of Complex and Almost Complex Spaces”, ***Kodai Math. Sem. Rep***., 120-160 (1966).

17. Yıldız , A. , “Değme Metrik Manifoldlarda Bazı Eğrilik Şartları”, ***Osmangazi Üni. F.B.E. Doktora1 Tezi***, Eskişehir (2002)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: EROL, İlhami
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 27.09.1984 KIRIKKALE
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0554 306 50 65
e-mail	: ilaysemi@hotmail.com.

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Ankara Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2007
Lise	Ankara Gazi Lisesi	2002

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2004-2006	Açı Dershaneleri	Matematik Öğretmeni
2006-2007	Yeni Yaşama Dershaneleri	Matematik Öğretmeni
2008-2009	Karacan Akademi	Matematik Öğretmeni
2009-2010	Özel Yavuz Sultan Lisesi	Matematik Öğretmeni
2010- …	Sınav Dershaneleri	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Balık Tutmak, Yüzmek, Doğa Yürüyüşü, Av Sporları, Basketbol, Türkü Dinlemek, Araba Kullanmak