GENİŞLETİLMİŞ LİNEER DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Emre ÇİMEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2012

ANKARA

Emre ÇİMEN tarafından hazırlanan “GENİŞLETİLMİŞ LİNEER DOĞURUCU FONKSİYONLAR” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Nuri ÖZALP
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi ……………………….

Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi ………………………..

Doç. Dr. Fatma AYAZ
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi ....

Tarih:

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU ……………………………….

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Emre ÇİMEN

GENİŞLETİLMİŞ LİNEER DOĞURUCU FONKSİYONLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Emre ÇİMEN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 2012

ÖZET

Bu çalışmada, bazı ortogonal polinomlar için genişletilmiş lineer doğurucu fonksiyonlar incelenmiştir. Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde önbilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar, lemmalar ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde bazı ortogonal polinomların lineer doğurucu fonksiyonlarına değinilmiştir. Üçüncü bölümde, ikinci bölümde verilen ortogonal polinomlar için genişletilmiş lineer doğurucu fonksiyonlar verilmiştir. Son bölüm ise genişletilmiş Jacobi polinomlarının Rodrigues formülü, diferensiyel denklemi, ortogonalliği, normu ve bu polinomlar için genişletilmiş lineer bir doğurucu fonksiyonu içermektedir.

Bilim Kodu : **204.1.138**
Anahtar Kelimeler : **Hipergometrik fonksiyon, doğurucu fonksiyon, Ortogonallik, Rodrigues formülü, Pochhammer sembolü.**
Sayfa adedi : **48**
Tez Yöneticisi : **Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN**

EXTENDED LINEAR GENERATING FUNCTIONS
(M.Sc. Thesis)

Emre ÇİMEN

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
February 2012

ABSTRACT

In this study, extended linear generating functions for some orthogonal polynomials are investigated. Thesis consists of four sections. In the first section, preliminary information, some definitions which will be used in the other sections, lemmas and theorems are given. In the second section, linear generating functions of some orthogonal polynomials are mentioned. In the third chapter, extended linear generating functions for orthogonal polynomials given in the second chapter are presented. And, in the last chapter the Rodrigues formula, differential equation, orthogonality, norm and extended linear generating function of extended Jacobi polynomials are dealt with.

Science Code : 204.1.138
Key Words : Hypergeometric function, generating function, orthogonality, Rodrigues formula, Pochhammer symbol.
Page Number : 48
Adviser : Assoc. Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca her adımda bilgi ve hoşgörüsünden yararlandığım, tez çalışmamın her safhasında emeği olan, ilgi ve yardımlarını benden esirgemeyen, tecrübesi ile beni yönlendiren ve kendisinden pek çok şey öğrendiğim danışmanım Sayın Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN'a, ayrıca varlıklarıyla beni onurlandıran aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET……………………………………………………………………………...iv

ABSTRACT…………………………………………………………………………..v

TEŞEKKÜR…………………………………………………………………………vi

İÇİNDEKİLER……………………………………………………………………...vii

SİMGELER VE KISALTMALAR……...............…………………..……………...ix

1. GİRİŞ……………………………………………………………………………....1

2. TEMEL KAVRAMLAR……………………………….……………………….2

2.1. Hipergeometrik Fonksiyonlar ve Pochammer Sembolü…...……..................2

2.2. Doğurucu Fonksiyon……………………………...…………………….5

2.3. Bilineer Doğurucu Fonksiyon…………………………...………………...5

2.4. Bilateral Doğurucu Fonksiyon………………...…………………………..5

2.5. Temel Bazı Lemmalar…………………...………………………………..6

3. BAZI POLİNOMLARIN DOĞURUCU FONKSİYONLARI…………………...10

3.1. Doğurucu Fonksiyon Bulmak İçin Bir Teknik...…………………………...10

3.2. Jacobi Polinomlarının Doğurucu Fonksiyonları……………...……………10

3.2.1. Jacobi polinomları………...…………………………...…………...10

3.2.2. Jacobi polinomlarının doğurucu fonksiyonları…………...…………..11

3.3. Jacobi Polinomlarına Bağlı Polinomlar İçin Doğurucu Fonksiyonlar…...…16

4. GENİŞLETİLMİŞ LİNEER DOĞURUCU FONKSİYON……………………...22

4.1. Jacobi Polinomları İçin Genişletilmiş Lineer Doğurucu Fonksiyon……......22

4.2. Bilineer Doğurucu Fonksiyon……………...………………………………25

Sayfa

4.3. Bilateral Doğurucu Fonksiyon…………………………...……………29

4.4. Gegenbauer Polinomları İçin Genişletilmiş Lineer Doğurucu Fonksiyon…31

4.5. Laguerre Polinomları İçin Genişletilmiş Lineer Doğurucu Fonksiyon……32

5. GENİŞLETİLMİŞ JACOBİ POLİNOMLARI………………...………………34

5.1. Jacobi ile Genişletilmiş Jacobi Polinomları Arasındaki İlişki…..…..……34

5.2. Genişletilmiş Jacobi Polinomları İçin Bir Doğurucu Fonksiyon…..…..…35

5.3. Genişletilmiş Jacobi Polinomları İçin Rodrigues Polinomu…..…………...37

5.4. Genişletilmiş Jacobi Polinomlarının Diferensiyel Denklemi……………....39

5.5. Genişletilmiş Jacobi Polinomlarının Ortogonalliği………..…………….40

5.6. Genişletilmiş Jacobi Polinomlarının Normu………...…………………...42

5.7. Genişletilmiş Jacobi Polinomları İçin Genişletilmiş Lineer Bir Doğurucu Fonksiyon……………………………………………………..…………45

KAYNAKLAR………...……………………………………..………………...47

ÖZGEÇMİŞ………………..………………………………..……………………48

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$F(\alpha,\beta;\gamma;x)$	Hipergeometrik fonksiyon
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Jacobi polinomu
$F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)$	Genişletilmiş Jacobi polinomu
$C_n^{\lambda}(x)$	Gegenbauer polinomu
$L_n^{(\alpha)}(x)$	Laguerre polinomu
$T_n(x)$	Birinci çeşit Tchebycheff polinomu
$U_n(x)$	İkinci çeşit Tchebycheff polinomu
$F_C^{(n)}$	Lauricella fonksiyonu
$(\alpha)_r$	Pochhammer sembolü
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu

1. GİRİŞ

Doğurucu fonksiyonlar uygulamalı matematikte oldukça önemli bir yer tutmaktadır. Doğurucu fonksiyonların bulunmasında, seri açılımı metodu, Weisner metodu, Truesdell metodu gibi metodlar 1945 ile 1970 yılları arasında geliştirilen metodlardır. Yine bu yıllarda Rainville polinomların farklı doğurucu fonksiyonlarını bulabilmek için bazı toplama teknikleri geliştirmiştir. Bunlar genelde tek değişkenli polinomlar için verilen lineer doğurucu fonksiyonlardır. 1970 lerden sonra Srivastava önceki çalışmaları daha da genelleyerek, polinomların genişletilmiş lineer doğurucu fonksiyonlarını elde etmiştir. Son yıllarda da yapılan tüm bu çalışmalar, bazı çok değişkenli polinomlara da uygulanmıştır.

Bu çalışmada, kullanılacak temel kavram ve teoremler verildikten sonra klasik ortogonal polinomlardan olan Jacobi polinomu ve bu polinomlarla ilişkili bazı ortogonal polinomlar için doğurucu fonksiyon bağıntıları verilmiştir. Daha sonra bu polinomların genişletilmiş lineer doğurucu fonksiyonlarını bulmak için bir yöntem tanıtılmış ve uygulanmıştır. Son kısımda ise Jacobi polinomlarının daha geneli olan genişletilmiş Jacobi polinomlarının doğurucu fonksiyonu, Rodrigues formülü, diferensiyel denklemi, ortogonalliği, normu ve genişletilmiş lineer bir doğurucu fonksiyonu verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Hipergeometrik Fonksiyonlar ve Pochhammer Sembolü

α, β, γ reel ya da kompleks sabitler olmak üzere

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots \tag{2.1}$$

olarak ifade edilen seri

$1+x+x^2+\ldots$

geometrik serisinin bir genelleştirilmesi olduğundan hipergeometrik seri adını alır ve

$${}_2F_1(a,b;c;z)=F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n\, n!}z^n \tag{2.2}$$

şeklinde yazılır. Burada $(\alpha)_n$ Pochhammer sembolü olup, α reel ya da kompleks bir sayı, n sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\begin{aligned}(\alpha)_n &= \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1), && n\geq 1\\ (\alpha)_0 &= 1, && \alpha\neq 0\end{aligned} \tag{2.3}$$

olarak tanımlanır.

$y=F(a,b;c;z)$ hipergeometrik fonksiyonunun sağladığı ikinci basamaktan diferensiyel denklem

$$z(1-z)y''+[c-(a+b+1)z]y'-aby=0$$

şeklinde olup, Gauss denklemi olarak adlandırılır.

Hipergeometrik fonksiyonlar

$$
{}_2F_1(a,b;c;z) = {}_2F_1\left[\begin{matrix} a, \quad b; & \\ & z \\ c; & \end{matrix}\right]
$$

şeklinde de gösterilir. Bu fonksiyonların genel hali

$$
{}_pF_q = \left(a_1, a_2, \ldots, a_p; c_1, c_2, \ldots, c_q; z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \ldots (a_p)_n}{(c_1)_n (c_2)_n \ldots (c_q)_n \, n!} z^n
$$

şeklindedir.

İki değişkenli Konfluent hipergeometrik fonksiyonlar,

$$
\Phi_1(\alpha, \beta; \gamma; x; y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_m}{(\gamma)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \tag{2.4}
$$

$|x| < \infty$, $|y| < \infty$;

$$
\Phi_2(\beta, \beta'; \gamma; x; y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_m (\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{y^n}{n!} \tag{2.5}
$$

$|x| < \infty$, $|y| < \infty$;

olarak tanımlanırlar.

İki değişkenli Appell fonksiyonları da,

$$F_1\left[a,b,b^{'};c;x,y\right]=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b^{'})_n}{(c)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}{}_2F_1\left(a+m,b^{'};c+m;y\right)\frac{x^m}{m!} \tag{2.6}$$

$$F_2\left[a,b,b^{'};c;c^{'};x,y\right]=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_m(b^{'})_n}{(c)_m\left(c^{'}\right)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}{}_2F_1\left(a+m,b^{'};c^{'};y\right)\frac{x^m}{m!} \tag{2.7}$$

$$F_3\left[a,a^{'},b,b^{'};c;x,y\right]=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_m\left(a^{'}\right)_n(b)_m(b^{'})_n}{(c)_{m+n}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}{}_2F_1\left(a^{'},b^{'};c+m;y\right)\frac{x^m}{m!} \tag{2.8}$$

$$F_4\left[a,b;c;c^{'};x,y\right]=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}(b)_{m+n}}{(c)_m\left(c^{'}\right)_n}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m}{}_2F_1\left(a+m,b+m;c^{'};y\right)\frac{x^m}{m!} \tag{2.9}$$

2.2. Doğurucu Fonksiyon

İki değişkenli bir $F(x,t)$ fonksiyonu t nin kuvvetleri cinsinden

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) t^n$$

şeklinde bir seriye açılabiliyorsa $F(x,t)$ fonksiyonuna $\{f_n(x)\}$ fonksiyonlar cümlesinin doğurucu fonksiyonu denir. Bu bağıntıda c_n ler x ve t den bağımsız n nin bir fonksiyonu olup değişik parametreler içerebilir.

2.3. Bilineer Doğurucu Fonksiyon

Eğer $G(x,y,t)$ üç değişkenli fonksiyonu t nin kuvvetlerine göre

$$G(x,y,t)=\sum_{n=0}^{\infty} h_n f_n(x) f_n(y) t^n$$

formunda bir seriye açılabiliyorsa $G(x,y,t)$ fonksiyonuna bilineer doğurucu fonksiyon denir. Burada h_n ler n ye bağlı olup x , y ve t den bağımsızdır.

2.4. Bilateral Doğurucu Fonksiyon

Eğer $H(x,y,t)$ üç değişkenli fonksiyonu t nin kuvvetlerine göre

$$H(x,y,t)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n f_n(x) g_n(y) t^n$$

formunda bir seriye açılabiliyorsa $H(x,y,t)$ fonksiyonuna bilateral doğurucu fonksiyon denir. Burada d_n ler n ye bağlı olup x , y ve t den bağımsızdır.

2.5. Temel Bazı Lemmalar

Lemma 1.

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{k=0}^{\infty} A(n,k)=\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{k=0}^{n} A(n-k,k)$$

$$b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{k=0}^{n} A(n,k)=\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{k=0}^{\infty} A(n+k,k)$$

Lemma 2.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{k_1,\ldots,k_r=0}^{m_1k_1+\ldots+m_rk_r\leq n} \phi(k_1,\ldots,k_r;n)=\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{k_1,\ldots,k_r=0}^{\infty} \phi(k_1,\ldots,k_r;n+m_1k_1+\ldots+m_rk_r)$$

dir.

Lemma 3.

n ve k doğal sayı, c reel ya da kompleks bir sayı olmak üzere;

$$\frac{(c)_{n+k}}{(c)_n}=(c+n)_k$$

dir.

Lemma 4.

n ve k doğal sayı olmak üzere;

$$\frac{n!}{(n-k)!}=\frac{(-n)_k}{(-1)^k}$$

dır.

Lemma 5.

n ve k doğal sayılar olmak üzere;

$$\frac{(n+2k)!}{(2k)!} = (2k+1)_n$$

dır.

Lemma 6.

n doğal sayı, c reel ya da kompleks bir sayı olmak üzere

$$\binom{-c}{n} = \frac{(-1)^n (c)_n}{n!}$$

dir.

Lemma 7.

n ve k doğal sayılar olmak üzere,

$$\frac{(n+k)!}{(n-k)!} = (n+1)_k (-1)^k (-n)_k$$

dır.

Teorem 2.1

$|z| < 1$ ve $\left|\frac{-z}{1-z}\right| < 1$ olmak üzere

$${}_2F_1(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}\, {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{-z}{1-z}\right)$$

dir.

İspat:

İspatlanacak eşitliğin sağ tarafı, hipergeometrik fonksiyonun tanımı gereğince,

$$(1-z)^{-a}\, {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{-z}{1-z}\right) = (1-z)^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (c-b)_k}{(c)_k\, k!} \frac{(-1)^k z^k}{(1-z)^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a)_k (c-b)_k}{k!(c)_k} (z)^k (1-z)^{-k-a}$$

şeklinde yazılır. $(1-z)^{-k-a}$ ifadesi binom açılımı şeklinde açılır ve Lemma 6 uygulanırsa

$$(1-z)^{-k-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k-a}{n} z^n (-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+k)_n (-1)^n}{n!} z^n (-1)^n$$

olup, buna göre

$$(1-z)^{-a}\, {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{-z}{1-z}\right) = \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a)_k (c-b)_k}{k!(c)_k} \frac{z^k (a+k)_n z^n}{n!}$$

bulunur. Burada Lemma 3 uygulanarak

$$(1-z)^{-a}\, {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{-z}{1-z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (a)_{n+k}}{k!\, n!\, (c)_k} z^{k+n} (c-b)_k$$

elde edilir. Son eşitlikte önce Lemma 1.a sonra da Lemma 4 kullanılırsa,

$$(1-z)^{-a}\, {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{-z}{1-z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (a)_n}{k!(n-k)!(c)_k} z^n (c-b)_k$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k (c-b)_k}{k!(c)_k} \right) \frac{(a)_n}{n!} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(-n, c-b; c; 1)(a)_n}{n!} z^n$$

bulunur.

$$F(-n, \alpha; \beta; 1) = \frac{(\beta - \alpha)_n}{(\beta)_n}$$

olarak bilinen Vandermonde formülünden,

$$(1-z)^{-a} {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{-z}{1-z} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n (a)_n}{(c)_n \, n!} z^n$$

$$= {}_2F_1(a, b; c; z)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

3. BAZI ORTOGONAL POLİNOMLARIN DOĞURUCU FONKSİYONLARI

3.1. Doğurucu fonksiyon bulmak için bir teknik

$f_n(x)=\sum_{k=o}^{n}\phi(k,n;x)$ şeklinde tanımlanan $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ fonksiyonunun λ_n , x ve t den bağımsız sabit bir katsayı olmak üzere,

$$F(x,t)=\sum_{n=o}^{\infty}\lambda_n f_n(x)t^n \tag{3.1}$$

şeklindeki doğurucu fonksiyonunu bulmak için, $f_n(x)=\sum_{k=o}^{n}\phi(k,n;x)$ ifadesi Eş. 3.1 de yerine yazılarak

$$F(x,t)=\sum_{n=o}^{\infty}\lambda_n\left\{\sum_{k=o}^{n}\phi(k,n;x)\right\}t^n$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra eşitliğin sağ tarafında Lemma 1.b uygulanırsa

$$F(x,t)=\sum_{k=o}^{\infty}\left\{\sum_{n=o}^{\infty}\lambda_{n+k}\phi(k,n+k\,;x)t^n\right\}t^k$$

bulunur. Bu teknik bazı polinomların doğurucu fonksiyonlarını bulmak için kolaylık sağlayacaktır.

3.2. Jacobi Polinomlarının Doğurucu Fonksiyonları

3.2.1. Jacobi polinomları

n sıfır ya da doğal bir sayı olmak üzere n -yinci dereceden Jacobi polinomları,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(-n,\ \alpha+\beta+n+1\ ;\ \alpha+1;\ \frac{1-x}{2}\ \right) \tag{3.2}$$

şeklinde ifade edilebilmektedir. Teorem 1.1 in Eş. 3.2 ye uygulanmasıyla,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n {}_2F_1\left(-n,\ -\beta-n\ ;\alpha+1;\ \frac{x-1}{x+1}\right) \tag{3.3}$$

bulunur. $k > n$ için $(-n)_k = 0$ olması nedeniyle Eş. 3.2 ifadesi, sonlu bir seri formunda,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+\alpha)_n (-n)_k (-1)^k (1+\alpha+\beta+n)_k}{k!\ n!\ (1+\alpha)_k}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k$$

şeklinde yazılabilir. Burada, Lemma 3 ve Lemma 4 uygulanırsa,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+\alpha)_n (1+\alpha+\beta)_{n+k}}{k!\ (n-k)!\ (1+\alpha)_k (1+\alpha+\beta)_n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k$$

olur. Aynı şekilde, Eş. 3.3 de sonlu bir seri formunda yazılırsa,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+\alpha)_n (-n)_k\ (-\beta-n)_k}{k!\ n!\ (1+\alpha)_k}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k \left(\frac{x+1}{2}\right)^n$$

olur. Lemma 3 ve Lemma 4 den,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+\alpha)_n\ (1+\beta)_k}{k!\ (n-k)!\ (1+\alpha)_k\ (1+\beta)_{n-k}}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-k}$$

olarak yazılır.

3.2.2. Jacobi polinomlarının doğurucu fonksiyonları

Kısım 3.1 de verilen tekniğin bir uygulaması olarak Jacobi polinomları için verilen

$$S \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{(\mu)_n} P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)\, t^n \tag{3.4}$$

toplamı göz önüne alınsın.

Burada α, β, λ ve μ, n den bağımsız parametrelerdir. $P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)$ Jacobi polinomu Eş. 3.3 yardımıyla,

$$P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x) = \binom{\alpha}{n}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n {}_2F_1\left(-n,\ -\beta,\ ;\ \alpha-n+1;\ \frac{x-1}{x+1}\ \right)$$

$$= (-1)^n\left(\frac{x+1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\alpha)_{n-k}(-\beta)_k}{(n-k)!k!}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k$$

şeklinde olup, Eş. 3.4 de yerine yazılırsa,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda)_n(-\alpha)_{n-k}(-\beta)_k}{(\mu)_n(n-k)!k!}\left\{-\frac{1}{2}(x+1)t\right\}^n\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k$$

$$= \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_{n+k}(-\alpha)_n(-\beta)_k}{(\mu)_{n+k}} \frac{\left\{-\frac{1}{2}(x+1)t\right\}^n}{n!} \frac{\left\{-\frac{1}{2}(x-1)t\right\}^k}{k!}$$

olur. Burada Lemma 1.b den yararlanılmıştır. Bu son ifade, Eş. 2.6 dan F_1 iki değişkenli Appell hipergeometrik fonksiyonu cinsinden yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n}{(\mu)_n} P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)t^n = F_1\left[\lambda, -\alpha, -\beta\ ; \mu; -\frac{1}{2}(x+1)t, -\frac{1}{2}(x-1)t\ \right] \tag{3.5}$$

doğurucu fonksiyonu elde edilir. Burada,

$$|t| < \frac{2}{\max\{|x-1|, |x+1|\}}$$

dır. $\lambda = \mu$ için, Eş. 3.5 doğurucu fonksiyon bağıntısı, Jacobi polinomları için iyi bilinen,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)t^n = \left[1+\frac{1}{2}(x+1)t\right]^\alpha \left[1+\frac{1}{2}(x-1)t\right]^\beta$$

şeklindeki doğurucu fonksiyon bağıntısını verir. Eş. 3.5 in başka bir özel durumu da $\mu = -\alpha-\beta$ için verilebilir. Bunun için,

$$F_1\left(a,b,b';b+b';x,y\right)=(1-y)^{-a}\,{}_2F_1\left(a,b;b+b';\frac{x-y}{1-y}\right)$$

şeklindeki hipergeometrik indirgeme formülü kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{(-\alpha-\beta)_n}P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)\,t^n$$
$$=\left\{1+\frac{1}{2}(x-1)t\right\}^{-\lambda}{}_2F_1\left[\lambda,-\alpha,-\alpha-\beta\ ;-\frac{t}{1+\frac{1}{2}(x-1)t}\right] \tag{3.6}$$

veya buna denk olan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{(-\alpha-\beta)_n}P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)\,t^n$$
$$=\left\{1+\frac{1}{2}(x+1)t\right\}^{-\lambda}{}_2F_1\left[\lambda,-\beta,-\alpha-\beta\ ;\frac{t}{1+\frac{1}{2}(x+1)t}\right] \tag{3.7}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir.

Eş. 3.5 doğurucu fonksiyonunda *t* yerine t/λ yazılır ve $|\lambda|\to\infty$ için limit alınarak

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{(\mu)_n}P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)\,t^n\right]=\lim_{|\lambda|\to\infty}F_1\left[\lambda,-\alpha,-\beta\ ;\mu;-\frac{1}{2}(x+1)t,-\frac{1}{2}(x-1)t\right]$$

olup,

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\frac{(\lambda)_n}{\lambda^n}=1$$

olduğundan ve Eş. 3.5 den

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)\frac{t^n}{(\mu)_n}=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)_m(-\beta)_n}{(\mu)_{m+n}}\frac{\left(-\frac{1}{2}(x+1)t\right)^m}{m!}\frac{\left(-\frac{1}{2}(x-1)t\right)^n}{n!}$$
$$=\Phi_2\left[-\alpha,-\beta;\mu;-\frac{1}{2}(x+1)t,-\frac{1}{2}(x-1)t\right]$$

şeklinde konfluent formda yazılabilir.

Benzer şekilde Eş. 3.6 doğurucu fonksiyonunda *t* yerine t/λ yazılır ve $|\lambda| \to \infty$ şeklinde limit alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x) \frac{(t)^n}{(-\alpha-\beta)_n} \lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{(\lambda)_n}{\lambda^n}$$

$$= \lim_{|\lambda|\to\infty} \left\{1+\frac{1}{2}(x-1)\frac{t}{\lambda}\right\}^{-\lambda} \lim_{|\lambda|\to\infty} {}_2F_1\left[\lambda,-\alpha,-\alpha-\beta\ ;-\frac{t/\lambda}{1+\frac{1}{2}(x-1)\frac{t}{\lambda}}\right]$$

olup,

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \frac{(\lambda)_n}{(\mu)_n} = 1$$

ve

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \left(1+\frac{a}{b\lambda+c}\right)^{d\lambda} = e^{\frac{a}{b}d}$$

olduklarından,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x) \frac{(t)^n}{(-\alpha-\beta)_n}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)t\right) {}_1F_1(-\alpha;-\alpha-\beta;-t)$$

elde edilir. Yine benzer işlemler Eş. 3.7 için de yapılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x) \frac{(t)^n}{(-\alpha-\beta)_n}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}(x+1)t\right) {}_1F_1(-\beta;-\alpha-\beta;\ t)$$

ifadesi elde edilir.

Şimdi de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomları için farklı bir doğurucu fonksiyon bulmaya çalışalım. Bunun için

$$S_1 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n (\delta)_n}{(\alpha+1)_n (\beta+1)_n} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) t^n \tag{3.8}$$

serisi göz önüne alınsın.

Burada α, β, λ ve μ, n den bağımsız parametrelerdir. Jacobi polinomları için bilinen Eş. 3.3 bağıntısından,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \binom{\alpha+n}{n} \left(\frac{x+1}{2}\right)^n {}_2F_1\left(-n,\ -\beta-n\ ;\ \alpha+1;\ \frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$= (\alpha+1)_n (\beta+1)_n \left(\frac{x+1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{\{x-1/x+1\}^k}{(n-k)!\,k!\,(\alpha+1)_k (\beta+1)_{n-k}}$$

ifadesi Eş. 3.8 de yerine yazılırsa,

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\gamma)_n (\delta)_n}{(n-k)!\,k!\,(\alpha+1)_k (\beta+1)_{n-k}} \left\{\frac{1}{2}(x+1)t\right\}^n \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^k$$

$$= \sum_{n,k:=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{n+k} (\delta)_{n+k}}{(\alpha+1)_k (\beta+1)_n} \frac{\left\{\frac{1}{2}(x-1)t\right\}^k}{k!} \frac{\left\{\frac{1}{2}(x+1)t\right\}^n}{n!}$$

olur. Burada Lemma 1.b kullanılmıştır. Bu son ifadenin sağ tarafı Eş. 2.9 ile tanımlanan F_4 Appell hipergeometrik fonksiyonu cinsinden yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_n (\delta)_n}{(\alpha+1)_n (\beta+1)_n} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) t^n = F_4\left[\gamma, \delta; \alpha+1, \beta+1; \frac{1}{2}(x-1)t, \frac{1}{2}(x+1)t\right] \tag{3.9}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir. [(Rainville,1960)]

Brafman , (Rainville,1960), $\delta = \alpha + \beta - \gamma + 1$ almış ve burada,

$$F_4\left(a, b; c, a+b-c+1; \frac{-x}{(1-x)(1-y)}, \frac{-y}{(1-x)(1-y)}\right)$$

$$= {}_2F_1\left(a, b; c; \frac{-x}{1-x}\right) {}_2F_1\left(a, b; a+b-c+1; \frac{-y}{1-y}\right)$$

şeklindeki Bailey formülünü kullanarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_n(\alpha+\beta-\gamma+1)_n}{(\alpha+1)_n(\beta+1)_n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n =$$

$${}_2F_1\left(\gamma,\alpha+\beta-\gamma+1;\alpha+1;\frac{1-t-\rho}{2}\right){}_2F_1\left(\gamma,\alpha+\beta-\gamma+1;\beta+1;\frac{1+t-\rho}{2}\right) \tag{3.10}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısını elde etmiştir. Eş. 3.10 yardımıyla Gegenbauer ve Legendre polinomları için de doğurucu fonksiyonlar bulunabilir.

Burada $\rho=\left(1-2xt+t^2\right)^{1/2}$ dır.

Brafman, sonuçlarını daha da özelleştirerek Eş. 3.9 da $\gamma=\alpha+1$ ve $\delta=\beta+1$ alarak ve

$$F_4\left(a,b;a,b;\frac{-x}{(1-x)(1-y)},\ \frac{-y}{(1-x)(1-y)}\right)=(1-xy)^{-1}(1-x)^b(1-y)^a$$

formülünü uygulayarak yine Jacobi polinomları için

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n = 2^{\alpha+\beta}\rho^{-1}(1-t+\rho)^{-\alpha}(1+t+\rho)^{-\beta}$$

doğurucu fonksiyon bağıntısını elde etmiştir [Rainville, (1960)].

3.3. Jacobi Polinomlarına Bağlı Polinomlar İçin Doğurucu Fonksiyonlar

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jacobi polinomlarının bazı özel durumları için aşağıdaki ortogonal polinomlar oluşmaktadır.

(i) Jacobi polinomunda $\alpha=\beta=\lambda$ alınırsa $P_n^{(\lambda,\lambda)}(x)$ polinomları ultraküresel polinomlardır.

(ii) $C_n^{\lambda}(x)$ ya da $P_n^{(\lambda)}(x)$ Gegenbauer polinomları,

$$C_n^{\lambda+\frac{1}{2}}(x)=\binom{n+\lambda}{n}^{-1}\binom{n+2\lambda}{n}P_n^{(\lambda,\lambda)}(x)=P_n^{(\lambda+\frac{1}{2})}(x)$$

ya da

$$C_n^{\lambda}(x)=(-2)^n\left(x^2-1\right)^{(1/2)n}P_n^{(-\lambda-n,-\lambda-n)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)$$

olarak verilirler ve doğurucu fonksiyonları,

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{\nu}(x)t^n=\left(1-2xt+t^2\right)^{-\nu}$$

şeklindedir.

(iii) Jacobi polinomunda $\alpha=\beta=0$ alınırsa $P_n^{(0,0)}(x)$ Legendre polinomu

$$P_n(x)=P_n^{(0,0)}(x)={}_2F_1\left(-n,n+1;1;\frac{1-x}{2}\right)$$

olarak verilir ve doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=\left(1-2xt+t^2\right)^{-1/2}$$

şeklindedir.

(iv) Jacobi polinomunda $\alpha=\beta=-\dfrac{1}{2}$ alınırsa, birinci çeşit Tchebycheff polinomları

$$T_n(x)=\begin{pmatrix}n-\dfrac{1}{2}\\ n\end{pmatrix}^{-1}P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x)=\frac{n!}{\left(\dfrac{1}{2}\right)_n}P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x)={}_2F_1\left(-n,n;\ \frac{1}{2};\frac{1-x}{2}\right)$$

ve doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n=(1-xt)\left(1-2xt+t^2\right)^{-1}$$

şeklindedir.

(v) Jacobi polinomunda $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$ alınırsa, ikinci çeşit Tchebycheff polinomları

$$U_n(x)=\frac{1}{2}\binom{n+\frac{1}{2}}{n+1}^{-1}P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x)=\frac{(n+1)!}{\left(\frac{3}{2}\right)_n}P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x)=(n+1)\,{}_2F_1\left(-n,n+1;\ \frac{3}{2};\frac{1-x}{2}\right)$$

ve doğurucu fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)t^n=\left(1-2xt+t^2\right)^{-1}$$

şeklindedir.[Rainville, (1979) Erdelyi, (1962)]

Bir önceki bölümde uygulanan lineer doğurucu fonksiyon bulma yöntemleri, Jacobi polinomlarının özel bir hali olan Gegenbauer polinomları için de uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{(\mu)_n}C_n^{\alpha}(x)t^n=F_1\left[\lambda,\alpha,\alpha;\mu;\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)t,\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)t\right]\tag{3.11}$$

elde edilir. Gerçekten,

$$S_2\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{(\mu)_n}C_n^{\alpha}(x)t^n\tag{3.12}$$

toplamı göz önüne alınsın

$$C_n^{\alpha}(x)=(-2)^n\left(x^2-1\right)^{(1/2)n}P_n^{(-\alpha-n,-\alpha-n)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\tag{3.13}$$

eşitliği dikkate alınır ve

$$P_n^{(-\alpha-n,-\alpha-n)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\binom{-\alpha}{n}\left(\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+1}{2}\right)^n{}_2F_1\left(-n,\alpha;-\alpha-n+1;\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}-1}{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+1}\right)$$

$$=(-1)^n\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha)_{n-k}(-\alpha)_k}{(n-k)!\,k!}\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^k$$

ifadesi Eş. 3.13 de yerine yazılırsa

$$C_n^{\alpha}(x)=(-2)^n\left(x^2-1\right)^{(1/2)n}(-1)^n\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda)_{n-k}(-\lambda)_k}{(n-k)!k!}\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^k$$

$$C_n^{\alpha}(x)=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha)_{n-k}(-\alpha)_k}{(n-k)!k!}\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^k$$

olup bu ifade Eş. 3.12 de yerine yazılarak

$$S_2\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{(\mu)_n}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha)_{n-k}(-\alpha)_k}{(n-k)!k!}\left(\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)^k t^n$$

olur ki burada da Lemma 1.b uygulanır ve yine düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}S_2&\equiv\sum_{n.k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_{n+k}(\alpha)_n(\alpha)_k}{(\mu)_{n+k}}\frac{\left\{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)t\right\}^n}{n!}\frac{\left\{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)t\right\}^k}{k!}\\&=F_1\left[\lambda,\alpha,\alpha;\mu;\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)t,\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)t\right]\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde Eş. 3.11 de $\mu=2\alpha$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{(2\alpha)_n}C_n^{\alpha}(x)t^n=\left\{1-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)t\right\}^{-\lambda}{}_2F_1\left[\lambda,\ \alpha;2\alpha;\frac{2t\sqrt{x^2-1}}{1-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)t}\right]$$

ya da buna denk olan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{(2\alpha)_n}C_n^{\alpha}(x)t^n=\{1-xt\}^{-\lambda}{}_2F_1\left[\frac{1}{2}\lambda,\ \frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2};\alpha+\frac{1}{2};\frac{\left(x^2-1\right)t^2}{(1-xt)^2}\right]$$

doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir.

Jacobi polinomu için verilen özelliklerden yararlanılarak Laguerre polinomları için de doğurucu fonksiyonlar elde edilebilir.

Laguerre polinomları,

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(1+\alpha)_n}{n!}{}_1F_1(-n;1+\alpha;x) \tag{3.14}$$

şeklinde tanımlanan polinomlardır. Eş. 3.14 ifadesi $k>n$ için $(-n)_k = 0$ olması nedeniyle sonlu bir seri formunda

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (1+\alpha)_n \; x^k}{k!\,(n-k)!\,(1+\alpha)_k} \tag{3.15}$$

olarak yazılır. Eş. 3.15 ifadesininin her iki yanı $\dfrac{t^n}{(1+\alpha)_n}$ ile çarpılır ve $n=0$ dan ∞ a toplam alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{(1+\alpha)_n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (1+\alpha)_n \; x^k}{k!\,(n-k)!\,(1+\alpha)_k}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n t^n}{n!(1+\alpha)_n}\right)$$

$$= e^t \, {}_0F_1(-;1+\alpha;-xt)$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyon elde edilir. Diğer taraftan Eş. 3.15 ifadesinin her iki yanı $\dfrac{(c)_n t^n}{(1+\alpha)_n}$ ile çarpılır ve $n=0$ dan ∞ a toplam alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_n L_n^{(\alpha)}(x)}{(1+\alpha)_n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{(c)_n (-x)^k \, t^n}{k!\,(n-k)!\,(1+\alpha)_k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c)_{n+k} (-x)^k \, t^{n+k}}{k!\,(n)!\,(1+\alpha)_k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c+k)_n \, t^n}{n!} \frac{(c)_k (-xt)^k}{k!(1+\alpha)_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c)_k (-xt)^k}{k!(1+\alpha)_k (1-t)^{c+k}}$$

$$= \frac{1}{(1-t)^c} \, {}_1F_1\left(c;1+\alpha;\frac{-xt}{1-t}\right)$$

olarak Laguerre polinomları için farklı bir doğurucu fonksiyon elde edilir. Burada $c = \alpha + 1$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n = (1-t)^{-1-\alpha} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right) \tag{3.16}$$

şeklinde yazılır.

Laguerre polinomlarının Jacobi polinomlarıyla ilişkisi,

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{|\beta|\to\infty}\left\{P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{2x}{\beta}\right)\right\} \tag{3.17}$$

şeklindedir. Gerçekten,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \binom{\alpha+n}{n}\,{}_2F_1\left(-n,\alpha+\beta+n+1;\alpha+1;\frac{1-x}{2}\right)$$

Jacobi polinomunda x yerine $1-\dfrac{2x}{\beta}$ alınır ve $|\beta|\to\infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{|\beta|\to\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{2x}{\beta}\right) &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\lim_{|\beta|\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(\alpha+\beta+n+1)_k}{(\alpha+1)_k\,k!(n-k)!}\left(\frac{x}{\beta}\right)^k\\ &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k}{(\alpha+1)_k\,k!(n-k)!}x^k\\ &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_1F_1(-n;\alpha+1;x) = L_n^{(\alpha)}(x)\end{aligned}$$

bulunur.

Benzer şekilde ispatlanabilir ki,

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{|\beta|\to\infty}\left\{\left(\frac{x}{\beta}\right)^n P_n^{(-\beta-n,\,\beta-\alpha-n-1)}\left(1-\frac{2\beta}{x}\right)\right\}$$

ya da

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \lim_{|\beta|\to\infty}\left\{\left(-\frac{x}{\beta}\right)^n P_n^{(-\beta-n-1-n,\,-\beta-n)}\left(\frac{2\beta}{x}-1\right)\right\}$$

eşitlikleri de geçerlidir.

4. GENİŞLETİLMİŞ LİNEER DOĞURUCU FONKSİYONLAR

Genişletilmiş lineer doğurucu fonksiyonlar

$$F(m;x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{m,n}f_{m+n}(x)t^{n} \tag{4.1}$$

tipindeki doğurucu fonksiyonlardır. Burada $m\in IN_0=\{0\}\cup IN$ sabittir.

Bu bölümde ortogonal polinomların bu tür doğurucu fonksiyonları incelenecektir.

4.1. Jacobi Polinomları İçin Genişletilmiş Lineer Doğurucu Fonksiyon

$$S_3\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}\frac{(\alpha+\beta+m+1)_n}{(\gamma+1)_n}P_{m+n}^{(\alpha,\beta)}(x)t^{n} \tag{4.2}$$

serisi göz önüne alınsın.

Burada *m* negatif olmayan bir tamsayı, α,β ve γ , *n* den bağımsız parametrelerdir.

Jacobi polinomunun Eş. 3.3 tanımında *n* yerine $n+m$ yazılırsa,

$$P_{m+n}^{(\alpha,\beta)}(x)=\binom{\alpha+m+n}{m+n}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{m+n}{}_2F_1\left[-m-n,-\beta-m-n;\alpha+1;\frac{x-1}{x+1}\right]$$

olur. Burada,

$${}_2F_1(a,b;c;z)=(1-z)^{c-a-b}\,{}_2F_1(c-a,c-b;c;z) \tag{4.3}$$

şeklindeki Euler dönüşümü uygulanırsa,

$$P_{m+n}^{(\alpha,\beta)}(x)=\binom{\alpha+m+n}{m+n}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{-\alpha-\beta-m-n-1}$$

$$\times{}_2F_1\left[\alpha+m+n+1,\alpha+\beta+m+n+1;\alpha+1;\frac{x-1}{x+1}\right]$$

yazılabilir. Bu son ifade, Eş. 4.2 de yerine yazılırsa,

$$S_3 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} \frac{(\alpha+\beta+m+1)_n}{(\gamma+1)_n} \binom{\alpha+m+n}{m+n}$$
$$\times \left(\frac{x+1}{2}\right)^{-\alpha-\beta-m-1} {}_2F_1\left[\alpha+m+n+1, \alpha+\beta+m+n+1; \alpha+1; \frac{x-1}{x+1}\right]\left(\frac{2t}{x+1}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha+m+1)_n \binom{\alpha+m}{m} \frac{(\alpha+\beta+m+1)_n}{(\gamma+1)_n}$$
$$\times \left(\frac{x+1}{2}\right)^{-\alpha-\beta-m-1} {}_2F_1\left[\alpha+m+n+1, \alpha+\beta+m+n+1; \alpha+1; \frac{x-1}{x+1}\right]\left(\frac{2t}{x+1}\right)^n$$

elde edilir. Burada Eş. 2.9 bağıntısından yararlanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} \frac{(\alpha+\beta+m+1)_n}{(\gamma+1)_n} P_{m+n}^{(\alpha,\beta)}(x)\, t^n$$
$$= \binom{\alpha+m}{m}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{-\alpha-\beta-m-1} F_4\left[\alpha+m+1,\ \alpha+\beta+m+1;\ \alpha+1;\ \gamma+1;\ \frac{x-1}{x+1}, \frac{2t}{x+1}\right] \quad (4.4)$$

elde edilir ki, bu ifade Jacobi polinomları için bir genişletilmiş lineer doğurucu fonksiyon bağıntısıdır.

Eş. 4.4 de $m = 0$, $\gamma = \alpha$ alınır ve

$$F_4[\alpha+\beta+1, \alpha+1; \alpha+1, \alpha+1; x, y]$$
$$= (1-x-y)^{-\alpha-\beta-1} {}_2F_1\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1), \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2); \alpha+1; \frac{4xy}{(1-x-y)^2}\right]$$

şeklindeki hipergeometrik indirgeme formülü kullanılırsa, [Srivastava, (1982)]

Jacobi polinomları için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\beta+1)_n}{(\alpha+1)_n} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\, t^n$$
$$= (1-t)^{-\alpha-\beta-1} {}_2F_1\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1), \frac{1}{2}(\alpha+\beta+2); \alpha+1; \frac{2(x-1)t}{(1-t)^2}\right]$$

ya da buna denk olan

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+1)_n}{(\beta+1)_n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,t^n$$
$$=(1+t)^{-\alpha-\beta-1}\,{}_2F_1\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1),\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2);\alpha+1;\frac{2(x+1)t}{(1+t)^2}\right]$$

lineer doğurucu fonksiyonları elde edilir.

Jacobi polinomları için genişletilmiş lineer doğurucu fonksiyonların farklı bir sınıfını elde etmek için, Rainville (1960) tarafından verilen bir teknik kullanacağız. Bunun için öncelikle, Eş. 3.7 doğurucu fonksiyon bağıntısında, t yerine $t+u$ alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{(-\alpha-\beta)_n}P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)\,(t+u)^n$$
$$=\left\{1+\frac{1}{2}(x+1)(t+u)\right\}^{-\lambda}{}_2F_1\left[\lambda,-\beta,-\alpha-\beta\;;\frac{t+u}{1+\frac{1}{2}(x+1)(t+u)}\right]$$

bulunur.

Bu ifadenin sol tarafında binom teoremi kullanılır ve sağ tarafında da Gauss hipergeometrik fonksiyonu açık yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\frac{(\lambda)_n}{(-\alpha-\beta)_n}P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)t^{n-m}u^m$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n(-\beta)_n}{(-\alpha-\beta)_n}\frac{(t+u)^n}{n!}\left\{1+\frac{1}{2}(x+1)(t+u)\right\}^{-\lambda-n}$$

olur. Burada Lemma 1.b uygulanır ve sonra sırasıyla Lemma 1.a, Lemma 3, ve Lemma 4 kullanılırsa,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}\frac{(\lambda)_{m+n}}{(-\alpha-\beta)_{m+n}}P_{m+n}^{(\alpha-m-n,\,\beta-m-n)}(x)t^n\,u^m$$

$$=\sum_{l,m,n=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,(\lambda)_{l+m+n}(-\beta)_{n+l}}{l!m!n!(-\alpha-\beta)_{n+l}}\,u^{l+m}\left(\frac{x+1}{2}\right)^m t^n\left\{1+\frac{1}{2}(x+1)t\right\}^{-\lambda-l-m-n}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,(\lambda)_m}{m!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^m\left\{1+\frac{1}{2}(x+1)t\right\}^{-\lambda-m}$$

$$\times F_1\left[-\beta,-m,\lambda+m;-\alpha-\beta;\frac{2}{x+1},\frac{t}{1+\frac{1}{2}(x+1)t}\right]u^m$$

bulunur. Bu son eşitlikte de u^m in katsayıları eşitlenir ve α,β,λ parametreleri yerine sırasıyla $\alpha+m,\beta+m,\lambda-m$ yazılırsa,

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}\frac{(\lambda)_n}{(-\alpha-\beta-m)_n}P_{m+n}^{(\alpha-n,\,\beta-n)}(x)t^n$$

$$=\binom{\alpha+\beta+2m}{m}\left(\frac{x+1}{2}\right)^m\left\{1+\frac{1}{2}(x+1)t\right\}^{-\lambda} \tag{4.5}$$

$$\times F_1\left[-\beta-m,-m,\lambda;-\alpha-\beta-2m;\frac{2}{x+1},\frac{t}{1+\frac{1}{2}(x+1)t}\right]$$

elde edilir ki, bu son bağıntı Jacobi polinomları için farklı bir genişletilmiş lineer doğurucu fonksiyon bağıntısıdır.

4.2. Bilineer Doğurucu Fonksiyon

Bir genişletilmiş lineer doğurucu fonksiyonu, Rainville'in kullandığı yöntemdeki gibi elde etmek için, başlangıç noktamız, uygun bir lineer doğurucu fonksiyondur. Bu bölümde ise, genişletilmiş lineer doğurucu fonksiyonlar kullanılarak,

$\left\{P_{m+n}^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_n^{(\gamma,\delta)}(y)\right\}_{n=0}^{\infty}$

ve

$$\left\{P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)\,P_n^{(\gamma-n,\delta-n)}(y)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

biçimlerini içeren bilineer doğurucu fonksiyonlar elde edilecektir.

Burada m negatif olmayan tamsayı, $\alpha,\beta,\gamma,\delta$; n den bağımsız parametrelerdir.

$$S_4 \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!(\alpha+\beta+m+1)_n}{(\gamma+1)_n(\delta+1)_n}P_{m+n}^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\gamma,\delta)}(y)\,t^n \tag{4.6}$$

serisi göz önüne alınsın.

Burada Jacobi polinomunun Eş. 3.3 den elde edilen

$$P_n^{(\gamma,\delta)}(y)=(\gamma+1)_n(\delta+1)_n\left(\frac{y+1}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{\{y-1/y+1\}^k}{(n-k)!k!(\gamma+1)_k(\delta+1)_{n-k}}$$

şeklindeki gösterimi Eş. 4.6 da yerine yazılırsa

$$S_4=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(m+n)!(\alpha+\beta+m+1)_n}{(n-k)!k!\,(\gamma+1)_k(\delta+1)_{n-k}}P_{m+n}^{(\alpha,\beta)}(x)\left\{\frac{1}{2}(y+1)t\right\}^{n-k}\left\{\frac{1}{2}(y-1)t\right\}^{k}$$

$$=\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(m+n+k)!(\alpha+\beta+m+1)_{n+k}}{n!\,k!\,(\gamma+1)_k(\delta+1)_n}P_{m+n+k}^{(\alpha,\beta)}\left\{\frac{1}{2}(y+1)t\right\}^{n}\left\{\frac{1}{2}(y-1)t\right\}^{k}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!(\alpha+\beta+m+1)_n}{n!\,(\delta+1)_n}\left\{\frac{1}{2}(y+1)t\right\}^{n}$$
$$\times\sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+m+n+1)_k}{(\gamma+1)_k}P_{m+n+k}^{(\alpha,\beta)}(x)\left\{\frac{1}{2}(y-1)t\right\}^{k}$$

elde edilir. Burada Lemma 1.b kullanılmıştır.

Eş. 4.4 genişletilmiş doğurucu fonksiyonundan yararlanılarak,

$$S_4=\left(\frac{x+1}{2}\right)^{-\alpha-\beta-m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+1)_{m+n}(\alpha+\beta+m+1)_n}{n!(\delta+1)_n}.\left\{\frac{(y+1)t}{x+1}\right\}^{n}$$
$$\times F_4\left[\alpha+m+n+1,\ \alpha+\beta+m+n+1;\alpha+1,\gamma+1;\frac{x-1}{x+1},\frac{(y-1)t}{x+1}\right] \tag{4.7}$$

bulunur.

Eş. 4.6 ve Eş. 4.7 göz önüne alındığında, Jacobi polinomları için bir bilineer doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir.

F_4 Appell fonksiyonu ve

$$F_C^{(n)}\left[a,b;c_1,...,c_n;x_1,...,x_n\right]=\sum_{m_1,...,m_n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m_1+...+m_n}(b)_{m_1+...+m_n}}{(c_1)_{m_1}...(c_n)_{m_{n1}}}\frac{x_1^{m_1}}{m_1!}...\frac{x_n^{m_n}}{m_n!}$$

Lauricella fonksiyonunun $n=3$ hali göz önünde bulundurularak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!(\alpha+\beta+m+1)_n}{(\gamma+1)_n(\delta+1)_n}P_{m+n}^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\gamma,\delta)}(y)t^n=(\alpha+1)_m\left(\frac{x+1}{2}\right)^{-\alpha-\beta-m-1} \tag{4.8}$$

$$\times F_C^{(3)}\left[\alpha+\beta+m+1,\ \alpha+m+1;\alpha+1,\gamma+1,\delta+1;\ \frac{x-1}{x+1},\frac{(y-1)t}{x+1},\frac{(y+1)t}{x+1}\right]$$

elde edilir. Burada

$$|t|^{1/2}<\frac{|x+1|^{1/2}-|x-1|^{1/2}}{|y+1|^{1/2}-|y-1|^{1/2}}$$

olup bu bağıntı Bailey' in Jacobi polinomları için elde ettiği iyi bilinen doğurucu fonksiyonun ilginç bir genellemesidir. Gerçekten, Eş. 4.8 de m=0 alınır ve düzenlenirse Bailey'in

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(\alpha+\beta+1)_n}{(\alpha+1)_n(\beta+1)_n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(y)t^n=(1+t)^{-\alpha-\beta-1}$$

$$\times F_4\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta+1),\frac{1}{2}(\alpha+\beta+2);\alpha+1,\beta+1;\frac{(1-x)(1-y)t}{(1+t)^2},\frac{(1+x)(1+y)t}{(1+t)^2}\right]$$

şeklindeki sonucuna ulaşılır.

Şimdi de

$$\left\{P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)\,P_n^{(\gamma-n,\delta-n)}(y)\right\}_{n=0}^{\infty}$$

kümesini içeren, bilineer doğurucu fonksiyonun bulunması problemine dönelim. Öncelikle,

$$S_5=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,(\lambda)_n}{(-\alpha-\beta)_n(-\gamma-\delta)_n}P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)P_n^{(\gamma-n,\delta-n)}(y)t^n \tag{4.9}$$

serisinde, Jacobi polinomları için bilinen

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\binom{\alpha+\beta+2n}{n}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n {}_2F_1\left(-n,\ -\beta-n\ ;\ -\alpha-\beta-2n;\ \frac{2}{x+1}\right)$$

bağıntısından,

$$P_n^{(\gamma-n,\delta-n)}(y)=\binom{\gamma+\delta}{n}\left(\frac{y+1}{2}\right)^n {}_2F_1\left(-n,\ -\delta\ ;-\gamma-\delta;\ \frac{2}{y+1}\right)$$

$$=(-\gamma-\delta)_n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-\delta)_k\left\{-\frac{1}{2}(y+1)\right\}^{n-k}}{(n-k)!\,k!\,(-\gamma-\delta)_k}$$

şeklindeki Jacobi polinomları Eş. 4.9 da yerine yazılırsa,

$$S_5=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(\lambda)_n\,(-\delta)_k\,\left\{-\frac{1}{2}(y+1)\right\}^{n-k}}{(n-k)!\,k!\,(-\alpha-\beta)_n(-\gamma-\delta)_k}P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)t^n$$

$$=\sum_{n,k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(\lambda)_{n+k}\,(-\delta)_k}{(-\alpha-\beta)_{n+k}(-\gamma-\delta)_k}P_{n+k}^{(\alpha-n-k,\beta-n-k)}(x)\left\{-\frac{1}{2}(y+1)\right\}^n t^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_k\,(-\delta)_k}{(-\alpha-\beta)_k(-\gamma-\delta)_k}t^k\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}\frac{(\lambda+k)_n}{(-\alpha-\beta+k)_n}P_{n+k}^{(\alpha-n-k,\beta-n-k)}(x)$$

$$\times\left\{-\frac{1}{2}(y+1)\right\}^n$$

bulunur. Burada Lemma 1.b kullanılmıştır.

Eş. 3.5 genişletilmiş lineer doğurucu fonksiyonu kullanılarak, bu son ifade

$$S_5=\left\{1-\frac{1}{4}(x+1)(y+1)t\right\}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_k(-\delta)_k}{k!(-\gamma-\delta)_k}\left\{\frac{-\frac{1}{2}(x+1)t}{1-\frac{1}{4}(x+1)(y+1)t}\right\}^n$$

$$\times F_1\left[-\beta,-k,\lambda+k;-\alpha-\beta;\frac{2}{x+1},\frac{-\frac{1}{2}(x+1)t}{1-\frac{1}{4}(x+1)(y+1)t}\right]$$

olarak yazılır. Böylece Jacobi polinomları için, F_1 Appell fonksiyonları cinsinden,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!\,(\lambda)_n}{(-\alpha-\beta)_n(-\gamma-\delta)_n}P_n^{(\alpha-n,\beta-n)}(x)P_n^{(\gamma-n,\delta-n)}(y)t^n$$

$$=\left\{1-\frac{1}{4}(x+1)(y+1)t\right\}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_k(-\delta)_k}{k!(-\gamma-\delta)_k}\left\{\frac{-\frac{1}{2}(x+1)t}{1-\frac{1}{4}(x+1)(y+1)t}\right\}^n$$

$$\times F_1\left[-\beta,-k,\lambda+k;-\alpha-\beta;\frac{2}{x+1},\frac{-\frac{1}{2}(x+1)t}{1-\frac{1}{4}(x+1)(y+1)t}\right]$$

şeklinde de farklı bir bilineer doğurucu fonksiyon elde edilir.

4.3. Bilateral Doğurucu Fonksiyon

Bilateral doğurucu fonksiyon bulmak için öncelikle aşağıdaki seri tanımlansın.

$$S_6=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}P_{m+n}^{(\lambda-n,\mu-n)}(x)\,F_1[-n,\alpha,\beta;\gamma;y,z]t^n$$

$$=\frac{1}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}(m+n)!\,P_{m+n}^{(\lambda-n,\mu-n)}(x)\,t^n\sum_{r,s=0}^{r+s\le n}\frac{(\alpha)_r(\beta)_s}{(n-r-s)!(\gamma)_{r+s}}\frac{(-y)^r}{r!}\frac{(-z)^s}{s!}t^n \tag{4.10}$$

$$= \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(m+r+s)!(\alpha)_r(\beta)_s}{m!r!s!(\gamma)_{r+s}} (-yt)^r(-zt)^s$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+r+s+n}{n} P_{m+r+s+n}^{(\lambda-r-s-n,\,\mu-r-s-n)}(x) t^n$$

Burada Lemma2 de $r = 2$, $m_1 = m_2 = 1$ alınarak kullanılmıştır.

Eş. 4.5 genişletilmiş Jacobi polinomunda $\lambda = -\alpha - \beta - m$ alınır ve

$$F_1\left[a,b,b';b+b';x,y\right] = (1-y)^{-a'}\ {}_2F_1\left[a,b;b+b';\frac{x-y}{1-y}\right]$$

özelliği kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} P_{m+n}^{(\alpha-n,\beta-n)}(x) t^n$$

$$= \frac{(\alpha+\beta+m+1)_m}{m!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^m \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\alpha} \left\{1+\frac{1}{2}(x-1)t\right\}^{\alpha+\beta+m}$$
$$\times {}_2F_1\left[-\alpha-\beta-m,-\alpha-m;\,-\alpha-\beta-2m;\ \frac{2}{(x+1)\left\{1+\frac{1}{2}(x-1)t\right\}}\right]$$

elde edilir. Bu bağıntı Eş. 4.10 da yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$S_6 = \frac{(\lambda+\mu+m+1)_m}{m!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^m \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\lambda} \theta^{\lambda+\mu+m}$$
$$\times \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(-\lambda-\mu-m)_{r+s}(\alpha)_r(\beta)_s}{r!s!(\gamma)_{r+s}} \left\{\frac{(x-1)yt}{2\theta}\right\}^r \left\{\frac{(x-1)zt}{2\theta}\right\}^s$$
$$\times {}_2F_1\left[-\lambda-\mu-m+r+s,-\lambda-m;\,-\lambda-\mu-2m;\ \frac{2}{(x+1)\theta}\right]$$

olur. Böylece, genişletilmiş Jacobi polinomları ve F_1 Appell fonksiyonları için bir bilateral doğurucu fonksiyon bağıntısı,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}P_{m+n}^{(\lambda-n,\mu-n)}(x)\,F_1\left[-n,\alpha,\beta;\gamma;y,z\right]t^n$$
$$=\frac{(\lambda+\mu+m+1)_m}{m!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^m\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-\lambda}\theta^{\lambda+\mu+m}$$
$$\times F_G\left[\begin{array}{r}-\lambda-\mu-m,-\lambda-\mu-m,-\lambda-\mu-m,-\lambda-m,\alpha,\beta;\\ -\lambda-\mu-2m,\gamma,\gamma;\dfrac{2}{(x+1)\theta},\dfrac{(x-1)yt}{2\theta},\dfrac{(x-1)zt}{2\theta}\end{array}\right]$$

olarak elde edilir. Burada $\theta=1+\frac{1}{2}(x-1)t$ ve F_G Lauricella'nın üç katlı hipergeometrik fonksiyonu olup,

$$F_G(\alpha_1,\alpha_1,\alpha_1,\beta_1,\beta_2,\beta_3;\gamma_1,\gamma_2,\gamma_2;x,y,z)$$
$$=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_{m+n+p}(\beta_1)_m(\beta_2)_n(\beta_3)_p}{(\gamma_1)_m(\gamma_2)_{n+p}}\frac{x^m}{m!}\frac{y^n}{n!}\frac{z^p}{p!}$$

$$|x|<r,\quad |y|<s,\quad |z|<t\ ,\quad r+s=1=r+t$$

olarak tanımlanır.

4.4. Gegenbauer Polinomları İçin Genişletilmiş Lineer Doğurucu Fonksiyonlar

Gegenbauer polinomları için,

$$S_7\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}\frac{\left(\alpha+m+\frac{1}{2}\right)_n}{(\mu)_n}C_{m+n}^{\alpha}(x)t^n \tag{4.11}$$

şeklindeki seriyi göz önüne alalım.

Burada m negatif olmayan bir tamsayı ve α ve μ , n den bağımsız parametrelerdir.

Gegenbauer polinomlarının

$$C_n^{\alpha}(x)=\frac{(2\alpha)_n}{n!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n{}_2F_1\left(-n,\ \frac{1}{2}-\alpha-n;\ \alpha+\frac{1}{2};\ \frac{x-1}{x+1}\right)$$

ifadesinde n yerine $n+m$ yazılırsa,

$$C_{m+n}^{\alpha}(x)=\frac{(2\alpha)_{m+n}}{(m+n)!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{m+n}{}_2F_1\left(-m-n,\ \frac{1}{2}-\alpha-m-n;\ \alpha+\frac{1}{2};\ \frac{x-1}{x+1}\right)$$

olup, burada Eş. 4.3 Euler dönüşümü uygulanırsa

$$C_{m+n}^{\alpha}(x)=\frac{(2\alpha)_{m+n}}{(m+n)!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{-2\alpha-m-n}$$
$$\times{}_2F_1\left(\alpha+\frac{1}{2}+m+n,\ 2\alpha+m+n;\ \alpha+\frac{1}{2};\ \frac{x-1}{x+1}\right)$$

bulunur. Bu ifade Eş. 4.11 de yerine yazılırsa

$$S_7\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}\frac{\left(\alpha+m+\frac{1}{2}\right)_n}{(\mu)_n}\frac{(2\alpha)_{m+n}}{(m+n)!}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{-2\alpha-m-n}t^n$$
$$\times{}_2F_1\left(\alpha+\frac{1}{2}+m+n,\ 2\alpha+m+n;\ \alpha+\frac{1}{2};\ \frac{x-1}{x+1}\right)$$

elde edilir. Bu son ifade de Eş. 2.9 a göre yeniden düzenlenirse Gegenbauer polinomları için genişletilmiş bir doğurucu fonksiyon bağıntısı

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}\frac{\left(\alpha+m+\frac{1}{2}\right)_{m+n}}{(\mu)_n}C_{m+n}^{\alpha}(x)t^n$$

$$=\binom{2\alpha+m-1}{m}\left(\frac{x+1}{2}\right)^{-2\alpha-m}F_4\left(\alpha+m+\frac{1}{2},2\alpha+m;\mu,\alpha+\frac{1}{2};\frac{2t}{x+1},\frac{x-1}{x+1}\right)$$

olarak elde edilir.

4.5 Laguerre Polinomları İçin Genişletilmiş Lineer Doğurucu Fonksiyon

Laguerre polinomları için,

$$S_8=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+m)!\,L_{n+m}(x)t^n v^m}{m!\,n!} \tag{4.12}$$

şeklinde bir seri tanımlansın. Burada Lemma 1.a kullanılır ve sonra Eş. 3.16 göz önünde bulundurulursa,

$$S_8=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!t^{n-m}v^m L_n^{(\alpha)}(x)}{m!(n-m)!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(\alpha)}(x)(v+t)^n$$

$$=(1-t-v)^{-1-\alpha}\exp\left(\frac{-x(v+t)}{1-t-v}\right)$$

elde edilir. Burada

$$(1-t-v)^{-1-\alpha}=(1-t)^{-1-\alpha}\left[1-\frac{v}{1-t}\right]^{-1-\alpha}$$

$$\exp\left(\frac{-x(v+t)}{1-t-v}\right)=\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)\exp\left[\frac{\frac{-x}{1-t}\times\frac{v}{1-t}}{1-\frac{v}{1-t}}\right]$$

şeklinde yazılarak Eş. 4.12 ifadesi

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+m)!L_{m+n}^{(\alpha)}(x)t^n v^m}{m!n!}=(1-t)^{-1-\alpha}\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)\sum_{m=0}^{\infty}L_m^{(\alpha)}\left(\frac{x}{1-t}\right)\left(\frac{v}{1-t}\right)^m$$

olarak yazılabilir. Bu son eşitliğin her iki tarafında v^m nin katsayıları eşitlenirse,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+m)!\,L_{m+n}^{(\alpha)}(x)t^n}{m!n!}=(1-t)^{-1-\alpha-m}\exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)L_m^{(\alpha)}\left(\frac{x}{1-t}\right)$$

şeklinde Laguerre polinomları için, bir genişletilmiş doğurucu fonksiyon bağıntısı elde edilir.

5.GENİŞLETİLMİŞ JACOBİ POLİNOMLARI

5.1. Jacobi ile Genişletilmiş Jacobi Polinomları Arasındaki İlişki

Jacobi Polinomları

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\binom{\alpha+n}{n}\,{}_2F_1\left(-n,\ \alpha+\beta+n+1\ ;\ \alpha+1;\ \frac{1-x}{2}\right)$$

ya da

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\ {}_2F_1\left(-n,\ \alpha+\beta+n+1\ ;\ \alpha+1;\ \frac{1-x}{2}\right)$$

şeklinde verilmişti. Jacobi polinomlarının bir genişlemesi

$$F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=\left[c(a-b)\right]^n\ P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{2(x-a)}{a-b}+1\right) \tag{5.1}$$

şeklindedir. Genişletilmiş Jacobi polinomları olarak bilinen bu polinomlardan, Jacobi polinomlarına

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\left[c(a-b)\right]^n\ F_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{1}{2}\left[x(a-b)+a+b\ \right];a,b,c\right)$$

şeklinde geçilebilir. Jacobi polinomun da x yerine $\frac{2(x-a)}{a-b}+1$ yazılırsa

$$P_n^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{2(x-a)}{a-b}+1\right)=\binom{\alpha+n}{n}\,{}_2F_1\left(-n,\ \alpha+\beta+n+1\ ;\ \alpha+1;\ \frac{1-\frac{2(x-a)}{a-b}-1}{2}\right)$$

$$=\binom{\alpha+n}{n}\,{}_2F_1\left(-n,\ \alpha+\beta+n+1\ ;\ \alpha+1;\ -\frac{(x-a)}{a-b}\right)$$

olur.

Bu ifade Eş. 5.1 de yerine yazılırsa, genişletilmiş Jacobi polinomları hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden,

$$F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=\left[c(a-b)\right]^n\binom{\alpha+n}{n}\,{}_2F_1\left(-n,\ \alpha+\beta+n+1\ ;\ \alpha+1;\ \frac{x-a}{b-a}\right) \tag{5.2}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde Eş. 3.3 ifadesinden yararlanılarak

$$F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=\left[c(a-b)\right]^n\binom{\alpha+n}{n}\,{}_2F_1\left(-n,\ -\beta-n\ ;\ \alpha+1;\ \frac{x-a}{x-b}\right) \tag{5.3}$$

şeklinde de yazılabilir.

5.2. Genişletilmiş Jacobi Polinomları için bir Doğurucu Fonksiyon

Teorem 5.1. Genişletilmiş Jacobi polinomları

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+1)_n}{(1+\alpha)_n}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\,t^n\\ &\qquad=\left[1-c(a-b)t\right]^{-1-\alpha-\beta}\,{}_2F_1\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2},\ \frac{2+\alpha+\beta}{2};1+\alpha\ ;\frac{4ct(x-a)}{(1-c(a-b)t)^2}\right)\end{aligned} \tag{5.4}$$

şeklinde bir doğurucu fonksiyon bağıntısına sahiptir.

İspat:

Eş. 5.2 ifadesinden

$$F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=\left[c(a-b)\right]^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k\,(1+\alpha)_n\,(1+\alpha+\beta+n)_k}{k!n!(1+\alpha)_k}\left[\frac{(x-a)}{b-a}\right]^k$$

olup, burada Lemma 3 ve Lemma 4 kullanılırsa

$$F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=\left[c(a-b)\right]^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(1+\alpha)_n\,(1+\alpha+\beta)_{n+k}}{k!\ (n-k)!\ (1+\alpha)_k(1+\alpha+\beta)_n}\left(\frac{x-a}{a-b}\right)^k$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki yanı $\dfrac{(\alpha+\beta+1)_n}{(1+\alpha)_n}t^n$ ile çarpılıp $n=0$ dan ∞ a

toplam alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+1)_n}{(1+\alpha)_n}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\,t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}[c(a-b)]^n\frac{(1+\alpha+\beta)_{n+k}}{k!\,(n-k)!\,(1+\alpha)_k}\left(\frac{x-a}{a-b}\right)^k t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[c(a-b)]^{n+k}\,(1+\alpha+\beta)_{n+2k}}{k!\,n!\,(1+\alpha)_k}\left(\frac{x-a}{a-b}\right)^k t^{n+k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta+2k)_n}{n!}[c(a-b)t]^n\right]\frac{(1+\alpha+\beta)_{2k}(x-a)^k}{k!(1+\alpha)_k}(ct)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+\alpha+\beta)_{2k}(x-a)^k}{k!(1+\alpha)_k[1-c(a-b)t]^{1+\alpha+\beta+2k}}(ct)^k$$

bulunur. Burada,

$$\frac{(c)_{2k}}{2^{2k}}=\left(\frac{c}{2}\right)_k\left(\frac{c}{2}+\frac{1}{2}\right)_k \Rightarrow (1+\alpha+\beta)_{2k}=2^{2k}\left[\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right]_k\left[\frac{2+\alpha+\beta}{2}\right]_k$$

özelliği kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+1)_n}{(1+\alpha)_n}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\,t^n$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k}\left[\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right]_k\left[\frac{2+\alpha+\beta}{2}\right]_k}{k!(1+\alpha)_k[1-c(a-b)t]^{1+\alpha+\beta+2k}}(ct)^k$$

$$=[1-c(a-b)t]^{-1-\alpha-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[\frac{1+\alpha+\beta}{2}\right]_k\left[\frac{2+\alpha+\beta}{2}\right]_k}{k!\;(1+\alpha)_k}\left[\frac{4ct(x-a)}{(1-c(a-b)t)^2}\right]^k$$

$$=[1-c(a-b)t]^{-1-\alpha-\beta}\;{}_2F_1\left(\frac{1+\alpha+\beta}{2},\frac{2+\alpha+\beta}{2};1+\alpha\,;\frac{4ct(x-a)}{(1-c(a-b)t)^2}\right)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

5.3. Genişletilmiş Jacobi Polinomları İçin Rodrigues Formülü

Teorem 5.2. Genişletilmiş Jacobi Polinomları

$$F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c) = \frac{(-c)^n}{n!}(b-x)^{-\beta}(x-a)^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^{n+\alpha}(b-x)^{n+\beta}\right]$$

şeklinde bir Rodrigues formülüne sahiptir.

İspat **:**

Eş. 5.2 de Teorem 1.1 uygulanırsa,

$$F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c) = [c(a-b)]^n \frac{(1+\alpha)_n}{n!}\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^n {}_2F_1\left(-n,-\beta-n\ ;\ 1+\alpha;\frac{x-a}{x-b}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{c^n (a-b)^n (1+\alpha)_k (-n)_k (-\beta-n)_k (x-b)^n}{n!\ (a-b)^n\ (1+\alpha)_k\ k!} \frac{(x-a)^k}{(x-b)^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{c^n (1+\alpha)_n (-n)_k (-\beta-n)_k}{n!\quad k!\,(1+\alpha)_k} (x-a)^k (x-b)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{c^n (1+\alpha)_n (-1)^k (-\beta-n)_k}{k!\ (1+\alpha)_k (n-k)!} (x-a)^k (x-b)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{c^n (1+\alpha)_n\ (1+\beta)_n}{k!\ (1+\alpha)_k (1+\beta)_{n-k} (n-k)!} (x-a)^k (x-b)^{n-k} \tag{5.5}$$

bulunur. Burada Lemma 3 ve Lemma 4 kullanılmıştır.

Negatif olmayan s ve m tamsayıları için,

$$\frac{d^s}{dx^s}x^{m+\alpha} = (m+\alpha)(m+\alpha-1)\ldots(m+\alpha-s+1)\, x^{m-s+\alpha}$$

$$= \frac{(m+\alpha)(m+\alpha-1)\ldots(m+\alpha-s+1)\,[(m+\alpha-s)\ldots(2+\alpha)(1+\alpha)]x^{m-s+\alpha}}{[(m+\alpha-s)\ldots(2+\alpha)(1+\alpha)]}$$

ya da kısaca,

$$\frac{d^s}{dx^s}x^{m+\alpha}=\frac{(1+\alpha)_m\,x^{m-s+\alpha}}{(1+\alpha)_{m-s}}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu ifadede α yerine β, *x* yerine sırasıyla *b-x* ve *x-a* , *s* yerine sırasıyla *k* ve *n-k*, *m* yerine *n* alınarak

$$\frac{d^k}{dx^k}(b-x)^{n+\beta}=\frac{(1+\beta)_n\,(b-x)^{n-k+\beta}}{(1+\beta)_{n-k}} \tag{5.6}$$

$$\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x-a)^{n+\alpha}=\frac{(1+\alpha)_n\,(x-a)^{k+\alpha}}{(1+\alpha)_k} \tag{5.7}$$

bağıntıları elde edilir. Eş. 5.5 ifadesi Eş. 5.6 ve Eş. 5.7 ye göre tekrar düzenlenerek,

$$\begin{aligned}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)&=\frac{(-c)^n\,(b-x)^{-\beta}\,(x-a)^{-\alpha}}{n!}\\&\quad\times\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{(1+\alpha)_n\,(x-a)^{k+\alpha}}{(1+\alpha)_k}\,\frac{(1+\beta)_n\,(b-x)^{n-k+\beta}}{(1+\beta)_{n-k}}\\&=\frac{(-c)^n}{n!}(b-x)^{-\beta}\,(x-a)^{-\alpha}\\&\quad\times\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x-a)^{n+\alpha}\right]\left[\frac{d^k}{dx^k}(b-x)^{n+\beta}\right]\end{aligned}$$

şeklini alır. Burada iki fonksiyonun çarpımının $n-$yinci türevi için bilinen

$$\frac{d^n}{dx^n}[u(x)v(x)]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^k v^{n-k}$$

şeklindeki Leibnitz formülü kullanılırsa,

$$F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=\frac{(-c)^n}{n!}(b-x)^{-\beta}\,(x-a)^{-\alpha}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^{n+\alpha}(b-x)^{n+\beta}\right]$$

olarak istenilen sonuç elde edilir.

5.4. Genişletilmiş Jacobi Polinomlarının Diferensiyel Denklemi

Teorem 5.3. Genişletilmiş Jacobi Polinomları

$$(x-a)(b-x)\frac{d^2}{dx^2}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)+\left[(\alpha+1)(b-x)-(\beta+1)(x-a)\right]\frac{d}{dx}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)$$
$$+\,n(\alpha+\beta+n+1)F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=0$$

şeklinde bir diferensiyel denkleme sahiptir.

İspat:

Buradaki ikinci basamaktan diferensiyel denklemde ikinci türevin katsayısı, ikinci dereceden bir ifade olup Gauss denklemiyle karşılaştırılabilir.

Eş. 5.2 eşitliğinin her iki yanının x değişkenine göre birinci ve ikinci türevleri alınırsa

$$\frac{d}{dx}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=$$
$$\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\left(\frac{1}{b-a}\right)\left[c(a-b)\right]^n\frac{d}{dx}\,{}_2F_1\left(-n,\ \alpha+\beta+n+1\ ;\ \alpha+1;\ \frac{(x-a)}{b-a}\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=$$
$$\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\left(\frac{1}{(b-a)^2}\right)\left[c(a-b)\right]^n\frac{d^2}{dx^2}\,{}_2F_1\left(-n,\ \alpha+\beta+n+1\ ;\ \alpha+1;\ \frac{(x-a)}{b-a}\right)$$

bulunurlar. Bu ifadeler ile

$$z(1-z)w''+\left[c-(a+b+1)z\right]w'-abw=0 \tag{5.8}$$

Gauss denklemi ve bu denklemin $w={}_2F_1(a,b;c;z)$ şeklindeki çözümü karşılaştırıldığında,

$$a=-n \qquad b=\alpha+\beta+n+1 \qquad c=\alpha+1 \qquad z=\frac{(x-a)}{b-a}$$

olarak alınır ve genişletilmiş Jacobi polinomunun Eş. 5.2 deki ifadesi ve türevleri Eş. 5.8 de yerlerine yazılırsa

$$\frac{(x-a)}{b-a}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)\frac{n!(b-a)^2}{(1+\alpha)_n\left[c(a-b)\right]^n}\frac{d^2}{dx^2}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)$$
$$+\left[\alpha+1-(\alpha+\beta+2)\frac{(x-a)}{b-a}\right].\frac{n!(b-a)}{(1+\alpha)_n\left[c(a-b)\right]^n}\frac{d}{dx}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)$$
$$+n(\alpha+\beta+n+1)\frac{n!}{(1+\alpha)_n\left[c(a-b)\right]^n}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=0$$

elde edilir. Bu ifade aşağıdaki şekilde tekrar düzenlenirse

$$\frac{n!}{(1+\alpha)_n\left[c(a-b)\right]^n}\left\{\begin{array}{l}(x-a)(b-x)\dfrac{d^2}{dx^2}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\\ +\left[(\alpha+1)(b-x)-(\beta+1)(x-a)\right]\dfrac{d}{dx}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\\ +n(\alpha+\beta+n+1)F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\end{array}\right\}=0$$

olup,

$\dfrac{n!}{(1+\alpha)_n\left[c(a-b)\right]^n}\neq 0$ olacağından burada parantez içi sıfıra eşit olacaktır. Yani,

$$(x-a)(b-x)\frac{d^2}{dx^2}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)+\left[(\alpha+1)(b-x)-(\beta+1)(x-a)\right]\frac{d}{dx}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)$$
$$+n(\alpha+\beta+n+1)F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=0$$

elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar.

5.5. Genişletilmiş Jacobi Polinomlarının Ortogonalliği

Teorem 5.4. Genişletilmiş Jacobi polinomları için

$$\int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\,dx=0\quad,\qquad m\neq n$$

dir. Yani bu polinomlar (a,b) aralığında $w(x;a,b,c)=(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir.

İspat:

$$(x-a)(b-x)\frac{d^2}{dx^2}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)+\left[(\alpha+1)(b-x)-(\beta+1)(x-a)\right]\frac{d}{dx}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)$$
$$+n(\alpha+\beta+n+1)F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=0$$

diferensiyel denklemi $w(x;a,b,c)=(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}$ ağırlık fonksiyonu ile çarpılırsa

$$(x-a)^{\alpha+1}(b-x)^{\beta+1}\frac{d^2}{dx^2}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)$$
$$+\left[(\alpha+1)(b-x)^{\beta+1}(x-a)^{\alpha}-(\beta+1)(x-a)^{\alpha+1}(b-x)^{\beta}\right]\frac{d}{dx}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)$$
$$+n(\alpha+\beta+n+1)(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=0$$

elde edilir. Bu denklemde,

$$a_0(x)=(x-a)^{\alpha+1}(b-x)^{\beta+1}$$

$$a_1(x)=\left[(\alpha+1)(b-x)^{\beta+1}(x-a)^{\alpha}-(\beta+1)(x-a)^{\alpha+1}(b-x)^{\beta}\right]$$

alındığında

$a_0^{'}(x)=a_1(x)$ olduğundan verilen denklem self-adjoint formdadır ve

$$\frac{d}{dx}\left[(x-a)^{\alpha+1}(b-x)^{\beta+1}\frac{d}{dx}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\right]$$
$$+n(\alpha+\beta+n+1)(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=0 \tag{5.9}$$

olarak yazılabilir. Bu denklemde *n* yerine *m* yazılarak

$$\frac{d}{dx}\left[(x-a)^{\alpha+1}(b-x)^{\beta+1}\frac{d}{dx}F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\right]$$
$$+m(\alpha+\beta+m+1)(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=0 \tag{5.10}$$

olur. Eş. 5.9 denklemi $F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)$ ile Eş. 5.10 denklemi $F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$\left[n(\alpha+\beta+n+1)-m(\alpha+\beta+m+1)\right](x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)$$

$$=\frac{d}{dx}\left\{\begin{array}{l}(x-a)^{\alpha+1}(b-x)^{\beta+1}\\ \left[F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\frac{d}{dx}F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)-F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\frac{d}{dx}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\right]\end{array}\right\}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı a dan b ye integre edilir ve eşitliğin sol tarafındaki ifade aşağıdaki gibi düzenlenirse

$$\begin{aligned} n(1+\alpha+\beta)+n^2-m(1+\alpha+\beta)-m^2 &= (n-m)(1+\alpha+\beta)+(n-m)(n+m)\\ &= (n-m)(1+\alpha+\beta+n+m)\end{aligned}$$

$$(n-m)(1+\alpha+\beta+n+m)\int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\,dx$$

$$=(x-a)^{\alpha+1}(b-x)^{\beta+1}$$

$$\times\left[F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\frac{d}{dx}F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)-F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\frac{d}{dx}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\right]\Bigg|_a^b$$

bulunur. Eşitliğin sağ yanı sıfır olduğundan ve $m \neq n$ için $(n-m)(1+\alpha+\beta+n+m)\neq 0$ olup,

$$\int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\,dx=0\ , \quad m\neq n$$

elde edilir.

5.6. Genişletilmiş Jacobi Polinomlarının Normu

Teorem 5.5. Genişletilmiş Jacobi polinomlarının normu,

$$\left\|F_n^{(\alpha,\beta)}\right\|=\left[\frac{(c)^{2n}(-1)^n(1+\alpha+\beta)_{2n}(b-a)^{\alpha+\beta+2n+1}\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!(\alpha+\beta+1)_n\,\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)}\right]^{1/2}$$

şeklindedir.

İspat:

Genişletilmiş Jacobi polinomları için Kısım 5.3 de verilen Rodrigues formülünden

$$(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=\frac{(-c)^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^{n+\alpha}(b-x)^{n+\beta}\right]$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanı $F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)$ ile çarpılıp, $[a,b]$ aralığında integre edilirse,

$$\int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\,dx$$
$$=\frac{(-c)^n}{n!}\int_a^b\left\{\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-a)^{n+\alpha}(b-x)^{n+\beta}\right]\right\}F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\,dx$$

olup, eşitliğin sağ yanındaki integralin değerini bulmak için *n* kez kısmi integrasyon metodu uygulanırsa,

$$\begin{aligned}&\int_a^b (x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\,dx\\&=\frac{(-c)^n}{n!}\int_a^b (x-a)^{n+\alpha}(b-x)^{n+\beta}\left[\frac{d^n}{dx^n}F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\right]dx\end{aligned}\tag{5.11}$$

bulunur. $F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)$, *m*-yinci dereceden bir polinom olduğundan $n>m$ için $\frac{d^n}{dx^n}F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=0$ dır. Böylece Eş. 5.11 deki integral $n>m$ için sıfıra gider. Birinci yandaki integral ve dolayısıyla ikinci yandaki integral *n* ve *m* indislerine göre simetrik olduğundan $n<m$ için de aynı durum söz konusudur. Buradan da $F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)$ polinomlarının ortogonalliği görülür. Diğer taraftan,

$$F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=[c(a-b)]^n\frac{(1+\alpha)_n}{n!}\,{}_2F_1\left(-n,\alpha+\beta+n+1;1+\alpha;\frac{(x-a)}{b-a}\right)$$

şeklinde ifade edilen genişletilmiş Jacobi polinomlarının *n*-yinci türevini bulmak için, hipergeometrik fonksiyonun *n*-yinci türevi için bilinen

$$\frac{d^n}{dx^n}\,{}_2F_1(a,b;c;u)=\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\,{}_2F_1(a+n,b+n;c+n;u).u^{(n)}$$

özelliğinden yararlanalım. Bu özellik dikkate alındığında

$$\frac{d^n}{dx^n}F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)=\frac{c^n\left(a-b\right)^n\left(\dfrac{1}{b-a}\right)^n(-1)^n n!\left(1+\alpha+\beta+n\right)_n}{n!\left(1+\alpha\right)_n}$$

$$\times{}_2F_1\left(0,\,1+\alpha+\beta+2n\,;1+\alpha+n;\frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$=c^n\left(1+\alpha+\beta\right)_{2n}$$

elde edilir. Beta fonksiyonu olarak bilinen $B(p,q)$ fonksiyonunun

$$\int_a^b\left(x-a\right)^{p-1}\left(b-x\right)^{q-1}dx=\left(b-a\right)^{p+q-1}B\left(p,q\right)$$

şeklindeki tanımının da dikkate alınmasıyla

$$\int_a^b(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\,dx$$

$$=\frac{(c)^{2n}\left(\alpha+\beta+1\right)_{2n}\left(b-a\right)^{\alpha+\beta+2n+1}B(1+\alpha+n\,,1+\beta+n)\left(-1\right)^n}{n!\left(\alpha+\beta+1\right)_n}$$

bulunur.

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

bağıntısının kullanılmasıyla da

$$\int_a^b(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}F_m^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)F_n^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\,dx$$

$$=\frac{(c)^{2n}\left(\alpha+\beta+1\right)_{2n}\left(b-a\right)^{\alpha+\beta+2n+1}\Gamma\left(\alpha+n+1\right)\Gamma\left(\beta+n+1\right)}{n!\left(\alpha+\beta+1\right)_n\quad\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)}$$

yazılabilir. Böylece genişletilmiş Jacobi polinomlarının normu,

$$\left\|F_n^{(\alpha,\beta)}\right\|=\left[\frac{\left(c\right)^{2n}\left(-1\right)^n\left(1+\alpha+\beta\right)_{2n}\left(b-a\right)^{\alpha+\beta+2n+1}\Gamma\left(\alpha+n+1\right)\Gamma\left(\beta+n+1\right)}{n!\left(\alpha+\beta+1\right)_n\Gamma\left(2n+\alpha+\beta+2\right)}\right]^{1/2}$$

olarak elde edilir.

5.7. Genişletilmiş Jacobi Polinomlar İçin Genişletilmiş Bir Lineer Doğurucu Fonksiyon

$$S_9 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n}{n} \frac{(\alpha+\beta+m+1)_n}{(\gamma+1)_n} F_{m+n}^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\, t^n \tag{5.12}$$

Burada m negatif olmayan bir tamsayı, α,β ve γ, n den bağımsız parametrelerdir. Genişletilmiş Jacobi polinomunun Eş. 5.3 tanımında n yerine $n+m$ yazılırsa,

$$F_{n+m}^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c) = [c(x-a)]^{n+m} \binom{\alpha+n+m}{n+m} {}_2F_1\left(-n-m,-\beta-n-m;\alpha+1;\frac{x-a}{x-b}\right)$$

olur. Burada Eş. 4.3 Euler dönüşümü uygulanır ve sonra Lemma 3 kullanılırsa,

$$\begin{aligned} F_{n+m}^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c) &= [c(x-a)]^{n+m} \binom{\alpha+n+m}{n+m} \\ &\times \left(\frac{a-b}{x-b}\right)^{2m+2n+\alpha+\beta+1} {}_2F_1\left(\alpha+n+m+1,\ \alpha+\beta+n+m+1;\alpha+1;\frac{x-a}{x-b}\right) \end{aligned} \tag{5.13}$$

bulunur. Bu son ifade Eş. 5.12 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} S_9 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} & \binom{m+n}{n} \binom{\alpha+n+m}{n+m} \frac{(\alpha+\beta+m+1)_n}{(\gamma+1)_n} [c(x-a)]^{n+m} \\ & \times \left(\frac{a-b}{x-b}\right)^{2m+2n+\alpha+\beta+1} {}_2F_1\left(\alpha+n+m+1,\ \alpha+\beta+n+m+1;\alpha+1;\frac{x-a}{x-b}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \binom{\alpha+m}{m} [c(x-a)]^m \left(\frac{a-b}{x-b}\right)^{2m+\alpha+\beta+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+m+1)_n (\alpha+\beta+m+1)_n}{(\gamma+1)_n} \\ &\times {}_2F_1\left(\alpha+n+m+1,\ \alpha+\beta+n+m+1;\alpha+1;\frac{x-a}{x-b}\right) \left(\frac{ct(a-b)^2}{x-b}\right)^n \end{aligned}$$

elde edilir ki bu eşitlik, Eş. 2.9 bağıntısına göre düzenlenerek

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}\frac{(\alpha+\beta+m+1)_n}{(\gamma+1)_n}F_{m+n}^{(\alpha,\beta)}(x;a,b,c)\,t^n$$

$$=\binom{\alpha+m}{m}[c(x-a)]^m\left(\frac{a-b}{x-b}\right)^{2m+\alpha+\beta+1}$$
$$\times F_4\left(\alpha+m+1,\alpha+\beta+m+1,\alpha+1,\gamma+1;\frac{x-a}{x-b},\frac{ct(a-b)^2}{x-b}\right)$$

şeklinde genişletilmiş Jacobi polinomları için genişletilmiş bir lineer doğurucu fonksiyon elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Altın, A., Aktaş, R. and Erkuş-Duman, E., "On a multivariable extension for the extended Jacobi polynomials", ***J. Math. Anal. Appl.***, 353: 121-133 (2009).

2. Andrews, G.E., Askey, R. and Roy R., "Special Functions" , ***Cambridge University Press***, New York, (1999).

3. Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F. and Tricomi, F.G., "Higher Transcendental Functions, III", ***McGraw-Hill Book Company***, New York, Toronto and London, (1955).

4. Erkuş-Duman, E., Altın, A. and Aktaş, R. "Miscellaneous properties of some multivariable polynomials", ***Math. Comput. Modelling***, 54: 1875-1885 (2011).

5. Fujiwara, I., "A unified presentation of classical orthogonal polynomials", ***Math. Japon.***, 11: 133-148 (1966).

6. González, B., Matera, J. and Srivastava, H.M., "Some q-generating functions and associated families of generalized hypergeometric polynomials", ***Math. Comput. Modelling***, 34: 133-175 (2001)

7. Pittaluga, G., Sacripante, L. and Srivastava, H.M., "Some families of generating functions for the Jacobi and related orthogonal polynomials", ***J. Math. Anal. Appl.***, 238: 385-417 (1999).

8. Rainville, E.D., "Special Functions", ***The Macmillan Company***, New York, (1960).

9. Srivastava, H.M. and Manocha, H.L. "A Treatise on Generating Functions", ***Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons***, New York, (1984).

10. Szegö, G., "Orthogonal Polynomials, 23, " ***Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.***, (1975).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ÇİMEN, Emre
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 20.09.1986
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0505 606 88 60
Faks	: 0312 507 20 79
e-mail	: emreecimen@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Bölümü	2008
Lise	Altındağ İnönü Lisesi	2003

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2008-2010	MEB	Öğretmen
2010-	Ankara Büyükşehir Belediyesi	Matematikçi

Yabancı Dil

İngilizce