F-YAPI MANİFOLDUN TAM LİFTİ

Serdar SOYLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2012
ANKARA

Serdar SOYLU tarafından hazırlanan “F-YAPI MANİFOLDUN TAM LİFTİ” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Mustafa ÖZKAN ………………………….
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN ………………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Yrd. Doç. Dr. Mustafa ÖZKAN ………………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. Yusuf YAYLI ………………………….
Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.

Tarih: 19/02/2012

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU ………………………….
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Serdar SOYLU

F-YAPI MANİFOLDUN TAM LİFTİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Serdar SOYLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2012

ÖZET

Bu çalışmada, bir C^{∞} diferensiyellenebilir M manifoldu üzerinde tanımlanan K dereceli F-yapının TM tanjant demete tam lifti ve bu yapının TM tanjant demette integrallenebilirlik şartları incelenmiştir.

Bilim Kodu	**: 204.1.049**
Anahtar Kelimeler	**: F-yapı, F-manifold, tam lift**
Sayfa Adedi	**: 49**
Tez Yöneticisi	**: Yrd.Doç.Dr. Mustafa ÖZKAN**

COMPLETE LIFT OF F-STURCUTRE MANIFOLD

(M.Sc. Thesis)

Serdar SOYLU

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

February 2011

ABSTRACT

In this thesis, we have studied complete lift of an F-structure of degree K on a differantiable manifold M of class C^{∞} to tangent bundle TM and investigated integrability conditions of this structure in tangent bundle.

Science Code : 204.1.049
Key Words : F-Structure, F-Manifold, Complete lift
Page Number : 49
Adviser : Assistant Professor Mustafa Özkan

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren Hocam Yrd. Doç Dr. Mustafa Özkan’a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
M, N	C^{∞} Manifoldlar
$\Im(M)$	M üzerinde tanımlı tensör alanlarının cebiri
$\chi(M)$	M üzerinde tanımlı vektör alanlarının kümesi
$\Im_1^0(M)$	M üzerinde tanımlı 1-formların kümesi
$\Im_s^r(M)$	M üzerinde tanımlı (r,s) tipinden tensör alanlarının kümesi
TM	M nin tanjant manifoldu
π_M	Kanonik projeksiyon
∇	M üzerinde konneksiyon
N_F	F nin Nijenhuis torsiyon tensörü
(TM, π_M, M, R^m)	Tanjant vektör demeti

1. GİRİŞ

Verilen bir M C^∞ - manifoldunun tanjant manifoldunun tanımlanması demet kavramına ışık tutmuştur. S. Kobayashi ve K. Yano, M üzerinde verilen bir diferensiyellenebilir elemanın (C^∞ fonksiyonlar, vektör alanları, 1-formlar, tensörler vs.) TM tanjant demete vertical (dikey), complete (tam) ve horizontal (yatay) liftlerini tanımlamışlardır.

1963 yılında K. Yano, bir M manifoldu üzerinde $F^3+F=0$ şartını sağlayan bir F-yapı tanımlamıştır. 1964 de S. Ishihara ve K. Yano bu F-yapının integrallenebilirlik şartlarını incelemişlerdir.

1975 de J.B. Kim, $K \geq 3$ dereceli F-yapı manifoldun tanımını yapmıştır. 1980 yılında L.S.K. Das "Complete Lift of F-Structure Manifold" adlı makalesinde J.B. Kim'in tanımladığı $K \geq 3$ dereceli F-yapı manifoldun complete lifti ve integrallenebilirlik şartlarını incelemiştir.

Bu çalışma ise yukarıdaki makalenin bir irdelemesidir.

Çalışmanın ikinci bölümünde gerekli olan tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise L.S.K. Das'ın yukarıda bahsedilen çalışmanın diferensiyel geometriye yaptığı katkılar açılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezin ilerleyen bölümlerinde kullanacağımız bazı tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

2.1.1.Tanım

Boş olmayan bir küme M , M nin boş olmayan bir alt kümsi U ve

$\varphi:U\rightarrow IR^n$

bir dönüşüm olsun. Eğer

i) φ birebir

ii) $\varphi(U)$, IR^n de açık bir alt küme

ise, (U, φ) ikilisine, M_n için bir n-boyutlu harita denir [Brickell ve Clark,1970].

- Bir $p \in M$ için $p\in U$ ise, bu haritaya p de veya p civarında bir harita, U kümesine koordinat komşuluğu ve φ dönüşümüne de haritanın koordinat dönüşümü denir.

- IR^n de $u^i:IR^n\rightarrow IR$, $(a^1,\ldots,a^i)\in IR^n$ için $u^i(a^1,\ldots,a^i)=a^i$ $\{1\leq i\leq n\}$, şeklinde tanımlı izdüşüm (doğal koordinat) fonksiyonları göz önüne alınsın.

  Bu durumda $p\in U$ için φ nin koordinat bileşenleri,

  $(u^i o\varphi)(p)=\varphi^i(p)=x^i(p)$

  olmak üzere;

$\varphi(p) = (x^i(p),\ldots,x^m(p))$

olup, böylece $\varphi=(x^i,\ldots,x^n)=(x^i)$ $\{1\leq i\leq n\}$, ile ifade edilebilir ve $\{x^i,\ldots,x^n\}$ sistemine de (U,φ) haritasına ait lokal koordinat sistemi denir [Brickell ve Clark,1970].

2.1.2.Tanım

M_n kümesi üzerinde tanımlı haritaların bir sınıfı $\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ olsun.

i)

$$M=\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha$$

ii) $U_\alpha \cap U_\beta\neq\emptyset$ olacak biçimdeki her bir (α,β) indis çifti için,

$$\varphi_\alpha o\varphi_\beta^{-1}: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k-sınıfından bir diffeomorfizm

ise, $\mathcal{A}$ sınıfına M üzerinde bir C^k-atlas denir. Burada $k\in\mathbb{N}$ nin ∞ olma hali n de geçerlidir [Brickell ve Clark, 1970].

2.1.3.Tanım

M kümesi üzerinde $\mathcal{A}$ ve $\bar{\mathcal{A}}$, C^k-atlasları verilsin. Eğer $\mathcal{A}\cup\bar{\mathcal{A}}$, M üzerinde yine bir C^k-atlas ise, $\mathcal{A}$ ve $\bar{\mathcal{A}}$ atlaslarına denk atlaslar denir [Brickell ve Clark,1970].

2.1.4.Tanım

M kümesi üzerinde bir C^k-atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ olsun. M üzerinde tanımlı her bir $(U_\alpha \varphi_\alpha)$ haritasıyla C^k-bağlı olan herhangi bir (U,ψ) haritası da $\mathcal{A}$ atlasında içeriliyorsa $\mathcal{A}$ atlasına bir C^k-tam atlas (veya C^k-maksimal, C^k-diferensiyellenebilir yapı) denir [Brickell ve Clark,1970].

2.1.5.Tanım

M kümesi üzerinde tanımlı bir C^k-diferensiyellenbilir yapı $\mathcal{A}$ ile gösterilirse $(M, \mathcal{A})$ ikilisine C^k-sınıfından diferensiyellenbilir manifold veya kısaca C^k-manifold denir [Brickell ve Clark,1970].

Bundan sonra çalışmanın tümünde manifoldun C^∞ sınıfından olduğu kabul edilecektir.

- M üzerinde tanımlı denk C^k-atlasların her bir denklik sınıfı M üzerinde bir C^k-tam atlas oluşturmaktadır. Bu nedenle $(M, \mathcal{A})$ C^k-manifoldunun C^K-diferensiyellenebilir yapısını belirtirken $\mathcal{A}$ atlasına, yalnızca, bir C^k-atlası olarak almak da yeterlidir.

Bir C^∞-yapıda bulunan haritaların boyutu, C^∞-manifoldunun boyutu olarak tanımlanır. Kısalık için $(M, \mathcal{A})$ ikilisi yine M ile ifade edilebilir.

- Bir C^∞-manifold $(M, \mathcal{A})$ ve $\mathcal{A} = \{(U_\alpha \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ olmak üzere;

$$\tau_M = \{S \subset M : \ \forall\alpha \in I, S \cap U_\alpha \neq \emptyset \text{ için}, \varphi_\alpha(S \cap U_\alpha), IR^n \text{de açıktır}\}$$

sınıfı göz önüne alınırsa τ_M nin M kümesi üzerinde bir topolojik yapı oluşturduğu kolayca gösterilebilir. Böylece τ_M topolojisi ile birlikte M bir topolojik uzay olur.

2.1.6.Tanım

Bir C^∞-manifold $(M, \mathcal{A})$ olsun. M kümesi üzerinde, M nin diferensiyellenbilir yapısından oluşturulan τ_M topolojisine, M üzerinde diferensiyellenebilir yapıdan indirgenmiş topoloji (veya M nin manifold topolojisi) denir [Brickell ve Clark,1970].

2.1.1.Sonuç

i) Herhangi bir $W \subset U_\alpha$ için,
   W, M de açıktır$\Leftrightarrow$ $\varphi(W)$, IR^m de açıktır.
ii) U_α lar M de açıktırlar
iii) $\beta=\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ sınıfı τ_M nin bir bazını oluşturur.

2.1.7.Tanım

M ve N n-boyutlu iki C^∞-manifold, $p \in M$ ve $F:M \to N$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer,

$$\hat{F}=\psi \circ F \circ \varphi^{-1}:\varphi(U) \to \psi(v)$$

dönüşümü $\varphi(p)$ noktasında C^k-diferensiyellenbilir olacak şekilde p noktasının U ve F(p) noktasının da $F(U) \subset V$ şeklinde bir V koordinat komşuluğu varsa, F dönüşümünde $p \in M$ noktasında C^k-diferensiyellenbilir (veya C^k-dönüşümüdür) denir. Buradaki $\hat{F}$ dönüşümü (U,φ) ve(V,ψ) haritalanna göre F nin koordinat temsili (veya lokal koordinatlardaki ifadesi) olarak isimlendirilir [Brickell ve Clark,1970].

Bundan sonra dönüşümler aksi belirtilmedikçe C^∞-diferensiyellenebilir alınacaktır.

- $F:M \to N$ dönüşümü verildiğinde F nin tanım kümesinin M nin ve görüntü kümesinin N nin tamamı olması gerekmez. Bu durumu belirtmek için F nin tanım kümesi domF ve değer kümesi de rangeF ile gösterilir.

- M de bir açık altküme $W \subset domF$ olmak üzere; eğer F, W nin her noktasında bir C^∞-dönüşüm ise F, W üzerinde C^∞-dönüşümdür denir [Brickell ve Clark,1970].

- Eğer $F:M \to N$, domF üzerinde bir C^∞-dönüşüm ise $F \in C^\infty(M,N)$ ve özel olarak $N=IR$ ise, o zaman $F \in C^\infty(M)$ yazılır. Bir $p \in M$ için, p nin [dar] bir komşuluğunda C^∞-diferensiyellenebilir olan reel değerli dönüşümlerin kümesi $C^\infty(p)$ ile gösterilir.

2.1.8.Tanım

Aynı boyutlu iki C^∞-manifold M, N ve $F:M \to N$ birebir örten bir dönüşüm olsun. Eğer:

i) $F \in C^k(M,N)$

ii) $F^{-1} \in C^k(M,N)$

ise F dönüşümüne bir C^k-difeomorfizm ve bu durumda M ile N manifoldlarına da C^k-difeomorfiktirler denir [Brickell ve Clark,1970].

Bir C^k-difeomorfizm, kendisi ve tersi C^k-diferensiyellenbilir olan bir homeomorfizmdir.

2.1.9.Tanım

Bir C^∞-manifold M, $p \in M$ olsun. $\forall$ $f,g \in C^\infty(p)$ ve $a,b \in IR$ için,

$v_p : C^\infty(p) \to IR$

$f \quad \to v_p(f)$

dönüşümü,

i) Lineerlik

$$v_p(af+bg)=av_p(f)+bv_p(g)$$

ii) Leibniz kuralı

$$v_p(f,g)=v_p(f)f(p)+f(p)v_p(g)$$

özelliklerini sağlıyorsa, v_p ye p noktasında M nin bir tanjant vektörü denir ve M nin bu şekilde tanjant vektörlerinin kümesi $T_p(M)$ ile gösterilir. $T_p(M)$ bir reel vektör uzayı olup bu uzaya M nin p noktasındaki tanjant uzayı denir [Brickell ve Clark,1970].

- p noktasında bir harita $(U,\varphi=(x^i))$ $\{1 \le i \le m\}$ ise $T_p(M)$ nin bir bazı,

  $$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p : 1 \le i \le m\right\}$$

  kümesidir. Bu baza $T_p(M)$ nin doğal (veya koordinat) bazı denir.

2.1.10.Tanım

m ve n boyutlu iki C^∞-manifold sırasıyla M, N ve F:M→N C^∞-dönüşüm olsun. F nin bir p∈M noktasındaki türev dönüşümü, $\forall v_p \in T_p(M)$ ve $\forall h \in C^\infty(N)$ için;

$(dF_p(v_p))(h)=v_p(hoF)$
şeklinde tanımlı bir
$dF_p: T_p(M) \to T_{F(p)}(N)$
dönüşümüdür [Okubo,1987].

- dF_p lineer olup, M ve N nin doğal bazlarına göre dF_p dönüşümüne karşılık gelen $\left[\frac{\partial f^i}{\partial x^i}|_p\right]$ matrisi, F nin p deki Jakobien matrisi olarak isimlendilir ve $J_F(p)$ ile gösterilir. Burada p∈U, $(U,\varphi=(x^i))$,$\{1 \le i \le m\}$ M ye ve $(V,\psi=(y^j))$, $\{1 \le j \le m\}$ N ye ait haritalar olup, $y^j oF = g^j$ dönüşümleri $F(p)=(g^1(p),...,g^n(p))$ şeklinde g nin koordinat bileşenleridir. Ayrıca,
  $(\mathrm{rank}F)_p = \mathrm{rank}(dF_p) = \mathrm{rank}J_F(p)=(\mathrm{rank}\hat{F})_{\varphi(p)}$

olarak tanımlanır.

- $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ olmak üzere, eğer U, M nin açık altkümesi ise, $\bigcup_{p\in U} T_pM$ ayrık birleşimi $TM|_u$ ile gösterilsin. p∈U için $T_pU \cong T_pM$ olduğundan, $TM|_U \cong TM$ dir.

2.1.11.Tanım

Bir C^∞-manifold M, M nin açık alt kümesi U ve $X:U\to TM|_U$ bir dönüşüm olsun.

$\pi_M : TM|_U \to U$, $\pi_M(v) = p$; (eğer $v\in T_pM$ ise)

kanonik projeksiyon olmak üzere;
$\pi_M o X = I_U$ (özdeşlik dönüşümü)
ise X e U üzerinde bir vektör alanı denir [Brickell ve Clark,1970].

- Genellikle vektör alanları tanım kümeleri belirtilmeden X:M→TM şeklinde de ifade edilir. Bu durumda X in tanım kümesi M de bir açık altküme olduğu anlaşılacaktır ve M üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ ile gösterilecektir.

- $X\in\chi(M)$, domX=U olmak üzere, $\forall f \in C^\infty(U)$ ve $\forall p\in U$ için:

$$X(f)(p)=X_P(f)$$

şeklinde tanımlansın. Eğer X(f), U üzerinde C^∞-diferensiyellenebiliyorsa, X vektör alanına U üzerinde C^∞-diferensiyellenebilir denir. Bu durumda

$$\begin{aligned} X: C^\infty(U) &\to C^\infty(U) \\ f &\to X(U) \end{aligned}$$

operatörü olarak tanımlanabilir. Bundan sonra vektör alanından söz edildiğinde C^{∞}-diferensiyellenebilir olduğu kabul edilecektir.

2.1.12.Tanım

Bir C^{∞}-manifold M olsun. T_pM tanjant uzayının cebirsel duali T_p^*M ye, M nin p noktasındaki kotanjant uzayı ve bu uzayın her bir elemanına da p noktasında bir kotanjant vektör (veya kovektör) denir [Okubo,1987].

- T_p^*M uzayı bir reel vektör uzayı olup, p noktasında verilen bir $(U,\varphi=(x^i))$ $\{1 \leq i \leq n\}$haritasına göre doğal bazı

  $\{dx^i|_p : 1\leq i\leq n\}$

  kümesidir. $dx^i\big|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\right) = \delta_j^i$ olduğu, dual baz olmasından açıktır.

2.1.13.Tanım

M nin her bir noktasına bir kotanjant vektör karşılık getiren

$\omega: M\rightarrow \bigcup_{p\in M} T_p^*(M)= T^*M \quad ; \omega(p)\in T_p^*(M)$

dönüşümüne M üzerinde 1-form (veya kovektör alanı) denir [Okubo,1987].

- M manifoldu üzerinde tanımlı 1-formların kümesi $\chi^*(M)$ ile gösterilecektir.

2.1.14.Tanım

Bir reel vektör uzayı V ve V vin dual uzayı V^* olsun.

$$T: \underbrace{V^{*}x\ldots xV^{*}}_{\text{r-tane}}\ x\ \underbrace{Vx\ldots xV}_{\text{s-tane}} \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde birebir (r+s)-lineer dönüşüme v üzerinde r. dereceden kontravaryant ve s. dereceden kovaryant (veya kısaca (r,s)-tipinden) bir tensör denir [Okubo,1987].

- Bir vektör uzayı üzerinde tanımlı (r,s) tipinden tensörlerin kümesi $T_s^r(V)$ ile gösterilir. $T_s^r(V)$, IR üzerinde bir vektör uzayı olup, $\text{boy}V = n$ ise $\text{boy}T_s^r(V)=n^{r+s}$ dir.

- V vektör uzayı yerine M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı T_pM alınırsa, M nin p noktasında bir tensör uzayı $T_s^r\big(T_p(M)\big)$ elde edilir ve bu uzayın her bir elemanına p noktasında bir (r,s)-tensör denir.

2.1.15.Tanım

Bir C^{∞}-manifold M olsun. M nin her bir noktasında (r,s)-tipinden bir tensör karşılık getiren dönüşüme M üzerinde (r,s)-tipinden bir tensör alanı denir [Okubo,1987].

O halde M üzerinde tanımlı bir tensör alanı,

$$\begin{aligned} T: M &\rightarrow \cup_{p\epsilon M} T_s^r(T_pM) \\ p &\rightarrow T(p)\epsilon T_s^r(T_pM) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür.

- M üzerinde tanımlı tensör alanlarının kümesi $\mathfrak{I}_s^r(M)$ ile gösterilir. $\mathfrak{I}_s^r(M)$, $C^{\infty}(M)$ üzerinde bir modüldür.

- Özel olarak

$\mathfrak{I}_0^0(M) = C^{\infty}(M)$

$\mathfrak{I}_0^1(M) = \chi(M)$

$\mathfrak{I}_1^0(M) = \chi^*(M)$

dir.

- Ayrıca, $\omega_1, \dots, \omega_r \in \chi^*(M)$, $X_1, \dots, X_s \in \chi(M)$ ve $p \in M$ olmak üzere;

$$\big(T(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)\big)(p) = T_p(\omega_{1p}, \dots, \omega_{rp}, X_{1p}, \dots, X_{sp})$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$T: \underbrace{\chi^*(M) \times \dots \times \chi^*(M)}_{r-\text{tane}} \times \underbrace{\chi(M) \times \dots \times \chi(M)}_{s-\text{tane}} \to C^\infty(M)$$

şeklinde $C^\infty(M)$ değerli bir (r+s)-lineer dönüşüm olur.

2.1.16.Tanım

Bir $C^\infty(M)$ manifold M olsun.

$$\begin{aligned} \nabla: \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X, Y) &\to \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall f,g \in C^\infty(M)$ ve $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için:

i) $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$

iii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

özelliklerini sağlıyorsa, ∇ dönüşümüne M üzerinde bir lineer konneksiyon denir [Brickell ve Clark,1970].

- ∇ lineer konneksiyonunun koordinat vektör alanlarındaki değeri;

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{i\,j}^{k} \frac{\partial}{\partial x^k}$$

eşitliğiyle belirlidir. Bu eşitlik ile tanımlı $\Gamma_{i\,j}^{k}$ C^{∞} dönüşümlerine ∇ lineer konneksiyonun bileşenleri veya Christoffel sembolleri denir [Brickell ve Clark,1970].

Bir ∇ lineer konneksiyonunun $X, Y \in \chi(M)$ vektör alanlarındaki değeri,

$X = \sum_{i=1}^{m} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ve $Y = \sum_{j=1}^{m} b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ olmak üzere,

$$\nabla_X Y = \sum_{h=1}^{m} \left(\sum_{i,k=1}^{m} a^i \frac{\partial b^h}{\partial x^i} + \sum_{i,k=1}^{m} a^i b^k \, \Gamma_{i\,j}^{k} \right) \frac{\partial}{\partial x^h}$$

eşitliğiyle belirlidir.

2.1.17.Tanım

Bir C^{∞}-manifold M olsun. $X, Y \in \chi(M)$, $p \in M$ olsun ve $\forall f \in C^{\infty}(p)$ için;

$$[X,Y]_p(f) = X_p\big(Y(f)\big) - Y_p(X(f))$$

şeklinde tanımlı

$$[,]: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

dönüşümüne Lie parantez operatörü denir [Brickell ve Clark,1970].

2.1.18.Tanım

Bir C^{∞}-manifold M ve M üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ olsun.

$$T:\chi(M)\times\chi(M) \rightarrow \chi(M)$$
$$(X,Y) \rightarrow T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$$

şeklinde tanımlı T dönüşümüne, ∇ lineer konneksiyonunun torsiyonu denir [Brickell ve Clark,1970].

- Eğer, $T \equiv 0$ ise ∇ konneksiyonunun torsiyonu sıfırdır veya ∇ simetriktir denir.

- T dönüşümünün koordinat vektör alanlarındaki değeri ;

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^k}\right)=\sum_{h=1}^{m}\left(\Gamma_{i\,k}^{h}-\Gamma_{k\,i}^{h}\right)\frac{\partial}{\partial x^h}$$

dır. Buna göre eğer, $T\equiv 0$ ise $\forall$ i,k=1,…,m için ;

$$\Gamma_{i\,k}^{h}=\Gamma_{k\,i}^{h}$$

olur.

2.1.19.Tanım

Bir C^{∞}-manifold M ve M üzerinde bir lineer konneksiyon ∇ olsun

$$R:\chi(M)\times\chi(M) \rightarrow \chi(M)$$
$$(X,Y,Z) \rightarrow R(X,Y)Z=\nabla_X(\nabla_Y Z)-\nabla_Y(\nabla_X Z)-\nabla_{[X,Y]}Z$$

şeklinde tanımlı R dönüşümüne ∇ nın eğrilik tensör alanı veya eğrilik formu denir [Brickell ve Clark,1970].

2.1.20. Tanım

M diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere F, (1,1) tipinde tensör alanı olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{array}{lll} N_F : \chi(M) \times \chi(M) & \rightarrow & \chi(M) \\ \quad (X, Y) & \rightarrow & N_F(X, Y) \end{array}$$

olmak üzere

$$N_F(X, Y) = [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY] + F^2([X, Y])$$

şeklinde tanımlanan (1,2) tipindeki N_F tensör alanına F nin Nijenhuis torsiyon tensörü denir [Yano ve Kon, 1984].

2.2. Diferensiyellenebilir Demet Yapıları

2.2.1.Tanım

E, M, F C^{∞}-manifoldlar, π:E→M bir C^{∞}-dönüşüm ve M nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ olmak üzere eğer,

$$(\pi o \psi_\alpha)(p,y)=p \quad ; p \in U, y \in F$$

olacak biçimde $\psi_\alpha : U_\alpha xF \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ diffeomorfizmlerinin bir $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ sınıfı varsa, [F ye göre] π, lokal çarpım özelliğine sahiptir ve A=$\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ sistemi de, π nin bir lokal ayrışmasıdır denir [Greub, Halperin ve Vanstone, 1972].

2.2.2.Tanım

Bir π:E→M C^{∞}-dönüşümü lokal çarpım özelliğine sahip olsun. Bu durumda $\xi = (E, \pi, M, F)$ dörtlüsüne bir diferensiyellenebilir lif demeti denir [Greub, Halperin ve Vanstone, 1972].

2.2.3.Tanım

$\xi = (E, \pi, M, F)$ bir C^{∞}-lif demeti olsun. O zaman $\mathcal{A}$ lokal ayrışmasına ξ lif demetinin bir lokal kooardinat gösterimi denir [Greub, Halperin ve Vanstone, 1972].

- Bir $\xi = (E, \pi, M, F)$ lif demetinde E ye ξ lif demetinin total uzayı, M ye baz (taban) uzayı, F ye lif modeli (veya standart lif) ve π ye fibreasyon veya projeksiyon adı verilir. Ayrıca, rank ξ=boyF olarak tanımlanır [Greub, Halperin ve Vanstone, 1972].

(E, π, M, F) lif demeti bazen E total uzayı ile bazen de π:E→M C^{∞}-dönüşümü ile gösterilir.

2.2.3.Tanım

π:E→M bir lif demeti olsun. $\forall p \in M$ için,

$$\pi^{-1}(p) = E_p = \{u \subset E | \pi(u) = p\}$$

kümesine p üzerinde bir lif denir [Greub, Halperin ve Vanstone, 1972].

- Tüm E_p liflerinin ayrık birleşimi E total (demet) uzayını verir [Greub, Halperin ve Vanstone, 1972].

- $\text{boy}E_p = \text{boy}E - \text{boy}M$ sayısına ξ nin lif boyutu denir [Sounders, 1982].

- $\xi = (E, \pi, M, F)$ bir lif demeti ve $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ lokal koordniat temsilcisi olsun.
  $\forall p \in U_\alpha$ için,

$\psi_{\alpha,p}: F \to E_p$

dönüşümü,

$\psi_{\alpha,p}(y) = \psi_{\alpha}(p,y)\ ;\ y \in F$

şeklinde tanımlanırsa; ψ_{α} lar diffeomorfizm olduklarından, $\psi_{\alpha,p}$ dönüşümleri de diffeomorfizmdir.

- $\mathcal{A}$ dan $U_{\alpha\beta} = U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$ olacak biçimde $(U_{\alpha}, \psi_{\alpha})$ ve $(U_{\beta}, \psi_{\beta})$ ikilileri seçilirse;
bu durumda,

$\psi_{\alpha} \circ {\psi_{\beta}}^{-1}: U_{\alpha\beta} \times F \to \pi^{-1}(U_{\alpha\beta})$

şeklinde tanımlı ψ_{α} ve ψ_{β} lar diffeomorfizm olduklarından

$\psi_{\alpha\beta} = {\psi_{\beta}}^{-1} \circ \psi_{\alpha}: U_{\alpha\beta} \times F \to U_{\alpha\beta} \times F$

dönüşümü,

$\psi_{\alpha\beta}(p, Y) = (p, {\psi_{\beta,p}}^{-1} \circ \psi_{\alpha p}(y)\ ;\ p \in U_{\alpha\beta}, y \in F)$

şeklinde tanımlı bir diffeomorfizmdir.
Böylece, $\forall p \in U_{\alpha\beta}$ için;

$\psi_{\beta\alpha,p} = {\psi_{\beta,p}}^{-1} o \psi_{\alpha,p}: F \to F$
dönüşümleride diffeomorfizmdir [Greub, Halperin ve Vanstone, 1972].

2.2.5.Tanım

E ve M C^{∞}-manifoldalar, π:E→M bir C^{∞}-dönüşüm olsun. Eğer π bir örten submersion ise (E,π,M) üçlüsüne bir lifli manifold denir [Sounders,1989].

- (E,π,M,F) bir lif demeti olması halinde (E,π,M) nin bir lifli manifold olacağı açıktır.

2.2.6.Tanım

Bir lifli manifold (E,π,M) boyM=n, boyE=n+s ve W ⊂ E açık altkümesi üzerinde bir lokal koordinat sistemi;

$y: W \to IR^{n+s}$

olsun. $pr_1: IR^{n+s} \to IR^n$ olmak üzere,

$a, b \in W$ ve $\pi(a) = \pi(b) = p \Longrightarrow pr_1\big(y(a)\big) = pr_1(y(b))$

önermesi doğru ise, y ye bir uyarlanmış (adapted) koordinat sistemi denir [Sounders, 1989].

- boyM=n, boyF=r ve boyE=n+s olmak üzere, bir (E,π,M,F) demeti ve bunun lokal ayrışmasından bir (U_α, ψ_α) ikilisi alınsın. Bu durumda E üzerinde uyarlanmış koordinat sistemi $pr_1: U_\alpha xV \to U_\alpha$ ve $pr_2: U_\alpha xV \to V$ izdüşüm fonksiyonları olmak üzere;

  $y_\alpha: \psi_\alpha(U_\alpha xV) \to IR^{n+s}$

  dönüşümü,

$y_\alpha = \left(x^i opr_1 o\psi_\alpha{}^{-1}, v^k opr_2\psi_\alpha{}^{-1}\right); 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq s$

şeklinde tanımlanabilir. Burada M de $\left(U_\alpha, (x^i)\right)_{1\leq i\leq n}$ haritası ve F manifoldunda da bir $\left(V, (v^k)\right)_{1\leq k\leq s}$ haritası seçilmiştir.

- $\forall\alpha \in I$ için,$\pi^{-1}(U_\alpha) \subset E$ açık altkümesi üzerinde bu şekilde tanımlı koordinat sistemi seçilebilir. Üstelik $y_\alpha(\psi_\alpha(U_\alpha xV)) \subset IR^{n+s}$ açıktır. Buna göre, $(\psi_\alpha(U_\alpha xV), y_\alpha)$ ikilisi E için bir harita olur. Böylece tanımlanan haritaların

  $\mathcal{A}_E = \{(\psi_\alpha(U_\alpha \times V), y_\alpha)\}_{\alpha\in I}$

  sınıfı E üzerinde bir C^∞-yapı tanımlar.

2.2.7.Tanım

$\xi = (E, \pi, M, F)$ Bir C^∞-lif demeti olsun. Eğer, aşağıdaki iki özellik sağlanıyorsa, ξ ye bir vektör demeti denir ;

i) $\forall p \in M$ için $\pi^{-1}(p) = E_p$ ve F reel değerli vektör uzaylarıdır.

ii) $\forall p \in M$, $\psi_{\alpha,p}: F \to E_p$ dönüşümleri lineer izormofizm olacak biçimde ξ nin $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ lokal koordinat gösterimi vardır [Greub, Halperin ve Vanstone, 1972].

- M, n boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere M nin tüm noktalarındaki tanjant uzaylarının ayrık bileşimi $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ ve TM üzerinde,

  $\pi_{M:} TM \to M$

  dönüşümü $\pi(v) = p, (v \in T_pM$ ise) şeklinde tanımlansın.

  M üzerinde bir harita $(U, \varphi = (x^i))_{1\leq i\leq n}$ olsun bu durumda $\overline{U} = \pi^{-1}(U)$ olmak üzere;

$$\overline{\varphi}: \overline{U} \to \varphi(U) \times IR^n$$

dönüşümü,

$$v \to \overline{\varphi}(v) = \left(x^i \circ \pi_M(v), dx^i(v)\right)_{1\leq i\leq n}$$

şeklinde tanımlanırsa, $\overline{\varphi}$ dönüşümü 1-1 ve örten olup, görüntü kümesi IR^{2m} uzayının bir açık altkümesidir. O halde $(\overline{U}, \overline{\varphi})$ ikilisi TM üzerinde 2m-boyutlu bir haritadır. M üzerinde $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ atlası verildiğinde TM üzerinde, her bir haritası yukarıdaki şekilde elde edilen bir,

$$\bar{\mathcal{A}} = \{(\overline{U}_\alpha, \overline{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha\in I}$$

atlası tanımlanabilir. $\bar{\mathcal{A}}$ sınıfı bir C^∞-atlastır ve TM üzerinde bir C^∞-yapı oluşturur. Bu yapıyla, TM 2n boyutlu bir C^∞-manifold olup, M nin tanjant manifoldu olarak adlandırılır.

Lokal olarak

$$TM = \left\{(p, z) \mid p \in M, z \in T_pM \cong IR^n)\right\}$$

gösterimi de kullanılır.

- TM üzerinde bir lokal koordinat sistemi $dx^i = y^i$ alınarak

$$\{x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n\}$$

şeklinde kısalık için $\varphi = (x^i, y^i)_{1\leq i\leq n}$ veya $y = (y^i)_{1\leq i\leq n}$ olmak üzere ; $\varphi = (x, y)$ olarak yazılacaktır. $\overline{\varphi}_\alpha$ koordinat dönüşümü de $\overline{\varphi}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$ şeklinde ifade edilecektir.

- (TM, π_M, M, IR^m) dörtlüsünün bir vektör demeti olduğu kolayca gösterilebilir. Bu demete, M nin tanjant demeti, sürekli, örten, C^{∞}-dönüşüm olan π_M ye de doğal (kanonik) projeksiyon denir [Greub, Halperin ve Vantsone, 1972].

2.2.8. Tanım

$s = (n + k)$-boyutlu M manifoldu üzerinde n-boyutlu differensiyel dağılım (distribution), TM tanjant demetinin rankı n olan bir D alt vektör demetidir [Lee, 2009].

O halde M manifoldu üzerinde n-boyutlu diferensiyellenbilir bir dağılım, $\forall x \in M$ ye karşılık n-boyutlu bir $\Delta_x \subset T_x M$ alt vektör uzayını karşılık getirir.

$$\begin{aligned} \Delta: M &\rightarrow \bigcup_{x \in M} T_x M \\ x &\rightarrow \Delta_x \subset T_x M \end{aligned}$$

Ayrıca, $\forall x \in M$ nin bir U komşuluğunda lineer bağımsız $X_1, \dots, X_n$ vektör alanı vardır ki U komşuluğundaki $\forall q \in U$ için $\{X_1(q), \dots, X_n(q)\}$ cümlesi Δ_q alt vektör uzayının bir bazıdır [Lee, 2009].

D, M manifoldu üzerinde bir dağılım ve X de $U \subset M$ açık kümesi üzerinde tanımlı bir vektör alanı olsun. Eğer $\forall p \in U$ için $X_p \in \Delta_p$ ise X vektör alanı D dağılıma aittir denir ve X in D dağlımına ait olduğunu göstermek için $X \in \Gamma(D)$ şeklinde gösterilir [Bejanju and Farran, 2006].

2.2.9.Tanım

M diferensiyellenebilir bir manifold ve L, M de M_n manifoldu üstünde iki complementary dağılım, yani, $\forall x \in M_n$ için

$$T_x M_n = L_x \oplus M_x$$

dir. Yani

$$TM = L \oplus M$$

dir.

ℓ ve m sırasıyla L ve M dağılımlarına karşılık gelen projeksiyonlar olmak üzere ℓ ve m yi (1,1) tipindebir tensör alanı olarak görebiliriz. Ayrıca,

$$\ell^2 = \ell, \; m^2 = m$$

$$\ell m = m\ell = 0 \; \text{ ve } \; \ell + m = I_{TM_n}$$

özellikleri vardır [Özdemir, 2010].

2.3.Tanjant Demetlere Lifler

Bu kesimde K. Yano ve S. Kobyashi tarafından [Yano ve Ishihara,1973] de tanımlanan M üzerinde tanımlı differensiyellenebilir elemanların TM ye dikey, tam lifleri özetlenecektir.

2.3.1.Tanım

$f\colon M \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$f^V = f \circ \pi_M$$

eşitliğiyle tanımlı f^V fonksiyonuna f nin TM ye dikey lifti denir [Yano,K., Ishihara S,1973].

2.3.2.Teorem

$f, g\colon M \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$(gf)^V = g^V f^V$

dir.

M bir manifold, M nin üzerinde lokal koordinat fonksiyonları (x^i) $\{1 \leq i \leq m\}$ ve TM üzerinde indirgenmiş lokal koordinat fonksiyonları $(x^i, \dot{x}^i)$ $\{1 \leq i \leq m\}$ olsun. M üzerinde 1-formların modülü

$$\begin{array}{rcl} \iota: \Im_1^0(M) & \rightarrow & C^\infty(M) \\ \omega = \omega_i dx^i & \rightarrow & \iota(\omega) = (\omega_i)^V \dot{x}^i \end{array}$$

olarak tanımlasın.

2.3.3. Tanım

f: M → ℝ bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$f^C = \iota(df) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)^V \dot{x}^i$$

eşitliğiyle tanımlı f^C fonksiyonuna f nin TM ye tam lifti denir [Yano ve Ishihara,1973].

2.3.4.Teorem

$f, g \in \Im_0^0(M)$ olmak üzere

$(gf)^C = g^C f^V + g^V f^C$

dir.

2.3.5. Tanım

M üzerinde tanımlı bir vektör alanı X olmak üzere; $\forall \omega \in \mathfrak{I}_1^0(M)$ için,

$$X^V(\iota(\omega)) = (\omega(X))^V$$

eşitliğiyle tanımlı $X^V \in \mathfrak{I}_0^1(TM)$ vektör alanına X vektör alanının dikey lifti denir [Yano ve Ishihara,1973].

$X \in \mathfrak{I}_0^1(M)$ vektör alanının lokal ifadesi $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ olmak üzere X^V nin lokal ifadesi

$$X^V = (X^i)^V \frac{\partial}{\partial x^i}$$

şeklindedir.

2.3.6.Teorem

$f \in \mathfrak{I}_0^0(M)$ ve $X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M)$ olmak üzere

$$X^V f^V = 0 \quad , \quad (X+Y)^V = X^V + Y^V$$

$$(fX)^V = f^V X^V \quad , \quad [X^V, Y^V] = 0$$

dir.

2.3.7. Tanım

M üzerinde bir vektör alanı X olsun.$\forall f \in \mathfrak{I}_0^0(M)$ için,

$$X^C(f^C) = (X(f))^C$$

eşitliğiyle tanımlı $X^C \in \mathfrak{I}_0^1(TM)$ vektör alanına X vektör alanın TM ye tam lifti denir [Yano ve Ishihara,1973].

$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ise

$X^C = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + (X^i)^C \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i}$

dir.

2.3.8.Teorem

$f \in \mathfrak{I}_0^0(M)$ ve $X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M)$ olmak üzere

$(X + Y)^C = X^C + Y^C$, $X^C f^V = (Xf)^V$, $X^V f^C = (Xf)^V$

$(fX)^C = f^C X^V + f^V X^C$, $X^C f^C = (Xf)^C$

dir.

2.3.9. Teorem

$X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M)$ olmak üzere

$$[X^V, Y^C] = [X, Y]^V \quad , \quad [X^C, Y^C] = [X, Y]^C \tag{2.1}$$

dir.

2.3.10. Tanım

M üzerinde tanımlı bir 1-form ω olsun. Bu durumda

$(\omega)^V(X^C) = (\omega(X))^V, \forall X \in \mathfrak{I}_0^1(M)$

eşitliğiyle tanımlı $\omega^V \in \mathfrak{I}_1^0(TM)$ 1-formuna ω nun TM ye dikey lifti denir [Yano ve

Ishihara,1973].

ω nun lokal ifadesi $\omega = \omega_i dx^i$ ise, ω^V lokal olarak $\omega^V = (\omega_i)^V dx^i$ şeklindedir.

2.3.11. Tanım

M üzerinde tanımlı bir 1-form ω olsun. Bu durumda,

$(\omega)^C(X^C) = (\omega(X))^C, \forall X \in \Im_0^1(M)$
eşitliğiyle tanımlı $\omega^C \in \Im_1^0(TM)$ 1-formuna, ω nin TM ye tam lifti denir [Yano ve Ishihara,1973].

$\omega = \omega_i dx^i$ ise $\omega^C = (\omega_i)^C dx^i + (\omega_i)^V dx^i$ şeklindedir.

2.3.12. Teorem

$X \in \Im_0^1(M)$ ve $\omega \in \Im_1^0(TM)$ olmak üzere

$\omega^V(X^V) = 0$, $\omega^V(X^C) = (\omega(X))^V$,

$\omega^C(X^V) = (\omega(X))^V$, $\omega^C(X^C) = (\omega(X))^C$

dir.

$\Im(M)$ ve $\Im(TM)$ sırasıyla M ve TM üzerinde tensör cebirleri olsunlar. Bu durumda,

$$\begin{array}{llll} V: & \Im(M) & \rightarrow & \Im(TM) \\ & P & \rightarrow & P^V \end{array}$$

dönüşümü, $\forall P, Q \in \Im(M)$ için
i) $V(P+Q) = P^V + Q^V$
ii) $V(P \otimes Q) = P^V \otimes Q^V$

koşulları altında sabit katsayılara göre bir cebir izomorfizmidir [Yano ve Ishihara,1973].

2.3.13. Tanım

Yukarıda tanımlanan V izomorfizmi altında elde edilen P^V tensör alanına P nin TM ye dikey lifti denir [Yano ve Ishihara,1973]..

Örnek

$F \in \Im_1^1(M)$ tensör alanının lokal ifadesi $F = F_i^h \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i$ şeklindedir. Bu durumda

$$F^V = F_i^h \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dx^i$$

olup, matris gösterimi

$$F^V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ F_i^h & 0 \end{bmatrix}$$

dır [Yano ve Ishihara,1973].

M ve TM nin tensör cebirleri sırasıyla $\Im(M)$ ve $\Im(TM)$ olsunlar. Bu durumda

$$C: \Im(M) \rightarrow \Im(TM)$$

dönüşümü $\forall P, Q \in \Im(M)$ için,

i. $C(P + Q) = P^C + Q^C$
ii. $C(P \otimes Q) = P^C \otimes Q^V + P^V \otimes Q^C$

koşulları altında sabit katsayılara göre bir içine lineer izomorfizmdir.

2.3.14.Tanım

Yukarıda tanımlanan C izomorfizmi ile elde edilen P^C tensör alanına P nin TM ye tam lifti denir [Yano ve Ishihara,1973].

Örnek

$F \in \Im_1^1(M)$ tensör alanını için

$$F^C = (F_i^h)^C \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dx^i + (F_i^h)^V \frac{\partial}{\partial x^h} \otimes dx^i + (F_i^h)^V \frac{\partial}{\partial y^h} \otimes dy^i$$

olup, matris gösterimi

$$F^C = \begin{bmatrix} F_i^h & 0 \\ (F_i^h)^C & F_i^h \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

dır [Yano ve Ishihara,1973].

Örnek

I, M üzerine (1,1) tipinden özdeşlik tensör alanı olsun. Bu durumda

$$I^C = I, \qquad I^V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \delta_i^h & 0 \end{bmatrix}$$

dir [Yano ve Ishihara,1973].

2.3.15 Teorem

$X \in \Im_0^1(M)$, $F \in \Im_1^1(M)$ ve $G \in \Im_2^0(M)$ olmak üzere

$$F^V X^V = 0 \quad , \quad F^V X^C = (FX)^V$$

$$F^C X^V = (FX)^V \quad , \quad F^C X^C = (FX)^C$$

dir.

2.3.16 Teorem

$\tilde{S}, \tilde{T}$ $\mathfrak{I}_s^0(TM)$ veya $\mathfrak{I}_s^1(TM)$, s>0, elemanı olsun. $X_1, \ldots, X_s \in \mathfrak{I}_0^1(M)$ için

$$\tilde{S}\left(X_1^C, \ldots, X_s^C\right) = \tilde{T}(X_1^C, \ldots, X_s^C)$$

ise $\tilde{S} = \tilde{T}$ dir [Yano ve Ishihara,1973].

2.3.17 Teorem

$F, G \in \mathfrak{I}_1^1(M)$ olsun. Bu durumda

$$(FG)^C = F^C G^C \tag{2.3}$$

eşitliği vardır [Yano ve Ishihara,1973].

İspat

Teorem 2.3.15 den her bir $X \in \mathfrak{I}_0^1(M)$ için

$$(FG)^C X^C = ((FG)X)^C = (F(GX))^C = F^C (GX)^C = F^C (G^C X^C) = (F^C G^C) X^C$$

olur. Teorem 2.3.16 dan $(FG)^C = F^C G^C$ elde edilir.

2.3.17 Teorem

P(t) tek değişkenli bir polinom ise her $F \in \mathfrak{I}_1^1(M)$ için

$P(F^C) = (P(F))^C$

dir.

Örnek

Her $F \in \mathfrak{I}_1^1(M)$ için

$$\begin{aligned} (F^2 + I)^C &= (F^C)^2 + I \\ (F^2 - F)^C &= (F^C)^2 - F^C \\ (F^3 + F)^C &= (F^C)^3 + F^C \end{aligned} \tag{2.4}$$

dir.

M de r boyutlu bir D dağılımı verilsin. Bu D dağılımının, $m^2=m$, m(TM)=D ve rankı r olan $m \in \mathfrak{I}_1^1(M)$ tensörü tarafından belirlenen bir dağılım olduğunu kabul edelim. Eş. 2.4 ve $m^2=m$ den $(m^C)^2 = m^C$ dir. Yani, m projeksiyon tensörünün tam lifti olan m^C TM de bir projeksiyon tensörüdür. Eş. 2.2 ve m nin rankı r olduğundan m^C nin rankı 2r dir [Yano ve Ishihara,1973].

2.3.18 Tanım

TM de m^c projeksiyon tensörü tarafından belirlenen 2r boyutlu D^c dağılımına D dağılımının tam lifti denir [Yano ve Ishihara, 1973].

3. F-YAPI MANİFOLDUN TAM LİFTİ

Bu bölüm, Lavejoy S.K. Das tarafından 1980 yılında yayımlanan "Complete Lift of F-Structure Manifold" adlı makalenin bir irdelemesidir.

3.1. F-Yapı Manifold

3.1.1.Tanım

M_n n-boyutlu C^{∞} sınıfından diferensiyellenebilir bir manifold ve F, M_n manifoldu üzerinde (1,1) tipinden, sıfırdan farklı tensör alanı olsun. Eğer

$$F^3 + F = 0$$

ve F nin M_n üzerinde rankı sabit ve r ise M_n üzerindeki bu yapıya r ranklı bir F-yapı denir. Bu durumda, M_n ye bir F-manifold denir [Yano, 1963].

3.1.2.Tanım

F, n-boyutlu M_n manifoldu üzerinde (1,1) tipinden, sıfırdan farklı tensör alanı, $1 < W < K$ ve $K > 2$ şeklinde sabit bir tamsayı olmak üzere

$$F^K + (-)^{K+1}F = 0 \quad \text{ve} \quad F^W + (-)^{W+1}F \neq 0 \tag{3.1}$$

olsun. Eğer F nin M_n üzerinde rankı sabit ve $r = \text{rank}(F)$ ise, M_n üzerinde Eş. 3.1 ile tanımlanan bir yapıya, r ranklı ve K dereceli F-yapı denir. Bu durumda M_n ye $K\ (\geq 3)$ dereceli bir F-manifold denir [Kim, 1975].

3.1.3.Teorem

M_n, $k \geq 3$ dereceli bir F-manifold ve I birim tensör olmak üzere

$\ell = (-)^K F^{K-1}$ ve $m = I + (-)^{K+1} F^{K-1}$ (3.2)

olsun. Bu durumda

$$\ell + m = I\,, \quad \ell^2 = \ell\,, \quad m^2 = m \tag{3.3}$$

dir [Kim, 1975].

İspat

Eş. 3.2 den

$$\ell + m = I$$

olduğu açıktır.

$$F^K + (-)^{K+1} F = 0 \Rightarrow F^K = -(-)^{K+1} F$$

dır. Eşitliğin her iki tarafını F^{K-2} ile çarparsak

$$\begin{aligned} F^K = -(-)^{K+1} F &\Rightarrow F^K F^{K-2} = -(-)^{K+1} F F^{K-2} \\ &\Rightarrow F^{2K-2} = (-)^K F^{K-1} \\ &\Rightarrow F^{2K-2} = \ell \end{aligned} \tag{3.4}$$

bulunur. $\ell = (-)^K F^{K-1}$ ve $F^{2K-2} = \ell$ olduğundan

$$\begin{aligned} \ell^2 &= (-)^K F^{K-1} (-)^K F^{K-1} \\ &= (-)^{2K} F^{2K-2} \\ &= F^{2K-2} \\ &= \ell \end{aligned}$$

dir. Eş. 3.4 den

$$
\begin{aligned}
m^2 &= (I + (-)^{K+1}F^{K-1})(I + (-)^{K+1}F^{K-1}) \\
&= I + (-)^{K+1}F^{K-1} + (-)^{K+1}F^{K-1} + (-)^{2(K+1)}F^{2K-2} \\
&= I + (-)^{K+1}F^{K-1} + (-)^{K+1}F^{K-1} + F^{2K-2} \\
&= I + (-)^{K+1}F^{K-1} + (-)^{K+1}F^{K-1} + (-)^{K}F^{K-1} \\
&= I + (-)^{K+1}F^{K-1} \\
&= m
\end{aligned}
$$

bulunur.

Eş. 3.2 yi sağlayan (1,1) tipinden sıfırdan farklı bir F tensör alanı verildiğinde Teorem 3.1.3 den, sırasıyla ℓ ve m projeksiyon operatörlerine karşılık gelen L ve M complementary dağılımı vardır. Eğer F nin rankı sabit ve r ise boy$L = r$ ve boy$M = n - r$ dir [Kim, 1975].

3.1.4 Teorem

M_n, K dereceli bir F-manifold olsun. $\ell = (-)^{K}F^{K-1}$ ve $m = I + (-)^{K+1}F^{K-1}$ olmak üzere

a) $F\ell = \ell F = F \quad , \quad Fm = mF = 0$ (3.5)

b) $K \geq 3$ tek tamsayı ise,

$$F^{K-1}\ell = -\ell \quad \text{ve} \quad F^{\frac{K-1}{2}}m = 0 \tag{3.6}$$

dır. Böylece $F^{\frac{K-1}{2}}$, L üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı ve M_n üzerinde bir null operatördür [Kim, 1975].

İspat

a) Eş. 3.1 den

$$\begin{aligned} F\ell &= F(-)^K F^{K-1} \\ &= (-)^K F^K \\ &= F \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \ell F &= (-)^K F^{K-1} F \\ &= (-)^K F^K \\ &= F \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde Eş. 3.1 den

$$\begin{aligned} Fm &= F[I + (-)^{K+1} F^{K-1}] \\ &= F + (-)^{K+1} F^K \\ &= F + (-)F \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} mF &= [I + (-)^{K+1} F^{K-1}]F \\ &= F + (-)^{K+1} F^K \\ &= F - F \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

b) K tek tamsayı olsun. Eş. 3.4 den

$$
\begin{aligned}
F^{K-1}\ell &= F^{K-1}(-)^{K}F^{K-1} \\
&= (-)^{K}F^{2K-2} \\
&= (-)^{K}(-)^{K}F^{K-1} \\
&= -\ell
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
F^{\frac{K-1}{2}}m &= F^{\frac{K-1}{2}}[I + (-)^{K+1}F^{K-1}] \\
&= F^{\frac{K-1}{2}} + F^{\frac{3(K-1)}{2}} \\
&= F^{\frac{K-1}{2}}(I + F^{K-1}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Bundan sonraki işlemlerde, $K \geq 3$ bir tek tamsayı olarak alınacaktır.

3.2. F-Yapının Tanjant Demete Tam Lifti

3.2.1 Teorem

$F \in \Im_1^1(M_n)$ nin F^C tam lifti TM_n de bir K dereceli F-yapıdır gerek ve yeter şart F bir K dereceli F-yapıdır. Üstelik F nin rankı r dir gerek ve yeter şart F^C nin rankı 2r dir.

İspat

Teorem 2.3.18 den

$$(F^K)^C = (F^C)^K \tag{3.8}$$

dır.

Eş. 3.1 deki eşitliğin her iki tarafının tam lifti alınırsa

$$(F^K)^C + ((-)^{K+1}F)^C = 0$$

olur. Eş. 3.8'i kullanırsak

$$(F^C)^K + (-)^{K+1}F^C = 0 \tag{3.9}$$

elde edilir.

Böylece Eş. 3.1 ve Eş. 3.9 denktir. Teoremin ikinci kısmı ise Eş. 2.2 den elde edilir.

F, r ranklı ve K derceli bir bir F-yapı olsun. Bu durumda, Eş. 3.2 ün her iki tarafının tam liftleri alınır ve Teorem 2.3.18 ve Eş. 2.4 dikkate alınırsa,

$$\ell^C = (-)^K(F^C)^{K-1} \quad \text{ve} \quad m^C = I + (-)^{K+1}(F^C)^{K-1}$$

dir. Teorem 2.3.18, Eş. 2.4 ve Eş. 3.3 den

$$\ell^C + m^C = I\,, \quad (\ell^C)^2 = \ell^C\,, \quad (m^C)^2 = m^C$$

bulunur. Dolayısıyla ℓ^C ve m^C TM_n de complementary projeksiyon tensörüdür. Bu yüzden, TM de sırasıyla ℓ^C ve m^C tarafından belirlenen, sırasıyla, iki tane L^C ve M^C complementary dağılımları vardır. Bölüm 2.3 den, L^C ve M^C dağılımları sırasıyla L ve M nin tam liftidir.

3.3. Tanjant Demette F-Yapının İntegrallenebilme Şartları

Eş. 3.1 i sağlayan $F \in \Im_1^1(M_n)$ nin N_F Nijenhuis tensörü (1,2) tipinden bir tensör alanıdır ve

$$N_F(X,Y) = [FX,FY] - F[FX,Y] - F[X,FY] + F^2[X,Y] \tag{3.10}$$

şeklindedir [Yano ve Ishihara,1973].

N^C, F tensör alanının $F^C \in \Im_1^1(TM_n)$ tam liftinin Nijenhuis tensörü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} N^C(X^C,Y^C) = {} & [F^C X^C, F^C Y^C] - F^C[F^C X^C, Y^C] - F^C[X^C, F^C Y^C] \\ & + (F^2)^C [X^C, Y^C] \end{aligned} \tag{3.11}$$

dir.

3.3.1 Teorem

$F \in \Im_1^1(M_n)$ için

$$F^C \ell^C = \ell^C F^C = F^C \quad , \quad F^C m^C = m^C F^C = 0 \tag{3.12}$$

eşitlikleri vardır.

İspat

Teorem 2.3.15, Eş. 2.3 ve Eş. 3.5 den

$$F^C \ell^C = (F\ell)^C = F^C \text{ ve } \ell^C F^C = (\ell F)^C = F^C \tag{3.13}$$

$$F^C m^C = (Fm)^C = 0 \text{ ve } m^C F^C = (mF)^C = 0 \tag{3.14}$$

bulunur.

3.3.2 Teorem

$X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için aşağıdaki eşitlikler vardır.

(i) $N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = (F^C)^2[m^C X^C, m^C Y^C]$ (3.15)

(ii) $m^C N^C(X^C, Y^C) = m^C[F^C X^C, F^C Y^C]$ (3.16)

(iii) $m^C N^C(l^C X^C, l^C Y^C) = m^C[F^C X^C, F^C Y^C]$ (3.17)

(iv) $(-)^K m^C N^C((F^C)^{K-2} X^C, (F^C)^{K-2} Y^C) = m^C[\ell^C X^C, \ell^C Y^C]$ (3.18)

İspat

i) Eş. 3.12 kullanılırsa

$$\begin{aligned} N^C(m^C X^C, m^C Y^C) &= [m^C F^C X^C, m^C F^C Y^C] - F^C[m^C F^C X^C, m^C Y^C] \\ &\quad - F^C[m^C X^C, m^C F^C Y^C] + (F^C)^2[m^C X^C, m^C Y^C] \\ &= (F^C)^2[m^C X^C, m^C Y^C] \end{aligned}$$

bulunur.

ii) Eş. 3.12 kullanılırsa

$$\begin{aligned} m^C N^C\left(X^C, Y^C\right) &= m^C\left[F^C X^C, F^C Y^C\right] - m^C F^C\left[F^C X^C, Y^C\right] - m^C F^C\left[X^C, F^C Y^C\right] \\ &\quad + m^C\left(F^2\right)^C\left[X^C, Y^C\right] \\ &= m^C\left[F^C X^C, F^C Y^C\right] - (mF)^C\left[F^C X^C, Y^C\right] - (mF)^C\left[X^C, F^C Y^C\right] \\ &\quad + (mF)^C\left[X^C, Y^C\right] \\ &= m^C\left[F^C X^C, F^C Y^C\right] \end{aligned}$$

elde edilir.

iii) Eş. 3.5, Eş. 3.11 ve Eş. 3.12 den

$$
\begin{aligned}
m^C N^C(\ell^C X^C, \ell^C Y^C) &= m^C[F^C \ell^C X^C, F^C \ell^C Y^C] - m^C F^C[F^C \ell^C X^C, \ell^C Y^C] \\
&\quad - m^C F^C[\ell^C X^C, F^C \ell^C Y^C] + m^C (F^2)^C [l^C X^C, l^C Y^C] \\
&= -m^C F^C[(F\ell)^C X^C, \ell^C Y^C] \\
&\quad - m^C F^C[\ell^C X^C, (F\ell)^C Y^C] + m^C (F^2)^C [\ell^C X^C, \ell^C Y^C] \\
&= m^C[F^C X^C, F^C Y^C]
\end{aligned}
$$

bulunur.

iv)

$$
\begin{aligned}
m^C N^C((F^C)^{K-2} X^C, (F^C)^{K-2} Y^C) &= m^C N^C((F^{K-2})^C X^C, (F^{K-2})^C Y^C) \\
&= m^C[F^{K-1}X, F^{K-1}Y]^C - m^C F^C[F^{K-1}X, F^{K-2}Y]^C \\
&\quad - m^C F^C[F^{K-2}X, F^{K-1}Y]^C \\
&\quad + m^C (F^2)^C [F^{K-2}X, F^{K-2}Y]^C \\
&= m^C[(F^{K-1})^C X^C, (F^{K-1})^C Y^C] \\
&\quad - (mF)^C[(F^{K-1})^C X^C, (F^{K-2})^C Y^C] \\
&\quad - (mF)^C[(F^{K-2})^C X^C, (F^{K-1})^C Y^C] \\
&\quad + (mF)^C[(F^{K-2})^C X^C, (F^{K-2})^C Y^C] \\
&= m^C[(F^{K-1})^C X^C, (F^{K-1})^C Y^C] \\
&= m^C[(-)^K \ell^C X^C, (-)^K \ell^C Y^C] \\
&= m^C[\ell^C X^C, \ell^C Y^C]
\end{aligned}
$$

3.3.3 Teorem

Her hangi $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için aşağıdaki eşitlikler denktir.

i) $m^C N^C(X^C, Y^C) = 0$

ii) $m^C N^C(\ell^C X^C, \ell^C Y^C) = 0$

iii) $(-)^K m^C N^C((F^{K-2})^C X^C, (F^{K-2})^C Y^C) = 0$

İspat

i)⟷ii) Eş 3.5 den

$$m^C N^C(X^C, Y^C) = m^C[F^C X^C, F^C Y^C]$$

ve Eş 3.6 dan

$$m^C N^C(\ell^C X^C, \ell^C Y^C) = m^C[F^C X^C, F^C Y^C]$$

dır. Dolayısyla

$$m^C N^C(X^C, Y^C) = 0 \Rightarrow m^C N^C(\ell^C X^C, \ell^C Y^C) = 0$$

dır.

ii) ⟷iii)

$\ell = (-)^K F^{K-1}$ ve $\ell F = F$ olduğundan, her X, Y vektör alanı için $N^C(\ell^C X^C, \ell^C Y^C) = 0$ gerek ve yeter şart $(-)^K N^C((F^{K-2})^C X^C, (F^{K-2})^C Y^C) = 0$ dır.
dır.

3.3.4 Teorem

TM_n de M dağılımının M^C tam lifti integrallenebilirdir gerek ve yeter şart M, M_n de integrallenebilirdir.

İspat

M dağılımı M_n de integrallenebilirdir gerek ve yeter şart $\ell = I - m$, m için complementary projeksiyon tensor olmak üzere her bir $X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ için

$$\ell[mX, mY] = 0 \tag{3.18}$$

dır [Ishihara ve Yano, 1964].
Eş. 3.18 in her iki tarafın tam lifti alınırsa

$$\ell^C[m^C X^C, m^C Y^C] = 0 \tag{3.19}$$

elde edilir.

$$\ell^C = (\ell - m)^C = \ell^C - m^c$$

olduğundan Eş. 3.18 ve Eş. 3.19 birbirlerine denktir.

3.3.5 Teorem

M dağılımını M_n manifoldunda integrallenebilir olsun. Bu durumda M^C dağılımı TM_n de integrallenebilirdir gerek ve yeter şart her hangi $X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ için

$$\ell^C N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = 0$$

veya denk olarak

$N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = 0$

dır.

İspat

M dağılımını M_n manifoldunda integrallenebilirdir gerek ve yeter şart her hangi $X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ için

$N(mX, mY) = 0$ veya denk olarak $\ell N(mX, my) = 0$

dır [Ishihara ve Yano, 1964].

Eş. 3.4 den

$$N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = (F^C)^2[m^C X^C, m^C Y^C]$$

dir.

Her iki tarafı ℓ^C ile çarparsak

$$\ell^C N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = \ell^C (F^C)^2[m^C X^C, m^C Y^C]$$

bulunur. Eş. 3.19 dan

$$\ell^C N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = 0 \qquad (3.20)$$

elde edilir. Üstelik Eş. 3.11 den

$$m^C N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = 0 \qquad (3.21)$$

elde edilir.

Eş. 3.20 ve Eş. 3.21 i taraf tarafa toplarsak

$$(\ell^C + m^C)N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = 0$$

bulunur.

$\ell^C + m^C = I^C = I$ olduğu için $N^C(m^C X^C, m^C Y^C) = 0$ olur.

3.3.6 Teorem

L dağılımı M_n de integrallenebilir ise L^C dağılımının TM_n de integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$m^C N^C(X^C, Y^C) = 0$$

veya denk olarak

$$m^C[\ell^C X^C, \ell^C Y^C] = 0$$

olmasıdır.

İspat

L dağılımı M_n manifoldunda integrallenebilirdir gerek ve yeter şart her $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için

$mN(X, Y) = 0$ veya denk olarak $m[lX, lY] = 0$

olmasıdır [Yano ve Ishihara,1973-Ishihara ve Yano, 1964].

Eş. 2.1, Teorem 2.3.15 ve Eş. 3.16 dan

$m^C N^C(X^C, Y^C) = m^C[F^C X^C, F^C Y^C] = m^C[FX, FY]^C = (m[FX, FY])^C = 0$

elde edilir. Teorem 3.3.2 den

$m^C[\ell^C X^C, \ell^C Y^C] = 0$

olduğu açıktır.

Teorem 3.3.2 göz önüne alındığında aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.3.7 Teorem

M_n, K dereceli bir F-manifold olsun. L dağılımı M_n de integrallenebilir ise L^C dağılımının TM_n de integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart Teorem 3.3.3 deki şartlardan birisinin sağlanmasıdır.

Kabul edelim ki, L dağılımı integrallenebilir ve Z, L nin integral manifolduna teğet olsun. Bu durumda

$\tilde{F}Z = FZ$

eşitliği ile tanımlı bir $\tilde{F}$ operatörü tanımlayalım. Bu durumda $\tilde{F}$, L nin her integral manifoldunun tanjant uzayıı invaryant bırakır [Yano, 1963].

Teorem 3.1.4 den, F den indirgenmiş $\tilde{F}$ yapısı L nin her bir integral manifoldu üzerinde hemen hemen kompleks bir yapıdır.

3.3.8 Tanım

Eğer L dağılımı integrallenebilir ve üstelik L nin her bir integral manifoldu üzerinde F den indirgenmiş hemen hemen complex $\tilde{F}$ yapısı da integrallenbilirse, F yapısı

parçalı (partially) integrallenebilirdir denir [Ishihara ve Yano, 1964].
L nin integral manifolduna teğet her bir Z ve W vektör alanı için

$$\widetilde{N}(Z,W)=[\tilde{F}Z,\tilde{F}W]-\tilde{F}[\tilde{F}Z,W]-\tilde{F}[Z,\tilde{F}W]+\tilde{F}^2[Z,W] \tag{3.22}$$

dir.

Böylece $\widetilde{N}(Z,W)$, L nin her bir integral manifoldunda vektör değerli bir 2-form olarak kabul edebiliriz [Ishihara ve Yano, 1964].

L nin her bir integral manifoldu üzerindeki F yapıdan indirgenmiş hemen hemen complex yapının Nijenhuis tensörüne karşılık gelen vektör değerli 2-formu, Z ve W L nin bir integral manifolduna teğet vektör alanları olmak üzere, $\widetilde{N}(Z,W)$ ile gösterelim. Böylece, Eş. 3.22 den, manifoldda her X ve Y vektör alanları için

$$N(\ell X,\ell Y)=\widetilde{N}(\ell X,\ell Y)$$

dir [Ishihara ve Yano, 1964].

Eş 3.11 ve Eş. 3.22 den

$$N^C(\ell^C X^C,\ell^C Y^C)=\widetilde{N}^C(\ell^C X^C,\ell^C Y^C) \tag{3.23}$$

elde ederiz.

3.3.9 Teorem

F-yapı, M_n de parçalı integrallenebilir ise F^C yapının TM_n de parçalı integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$N^C(\ell^C X^C,\ell^C Y^C)=0$$

veya denk olarak

$$N^C((F^{K-2})^C X^C, (F^{K-2})^C Y^C) = 0$$

olmasıdır.

İspat

F yapının M_n de parçalı integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$N(\ell X, \ell Y) = 0 \text{ veya denk olarak } N(FX, FY) = 0$$

olmasıdır [Ishihara ve Yano, 1964].

Eş. 2.1, Eş. 3.5 ve Eş. 3.11 den, $\forall X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$\begin{aligned} N^C(\ell^C X^C, \ell^C Y^C) &= [F^C \ell^C X^C, F^C \ell^C Y^C] - F^C[F^C \ell^C X^C, Y^C] - F^C[X^C, F^C \ell^C Y^C] \\ &\quad + (F^2)^C[\ell^C X^C, \ell^C Y^C] \\ &= [F\ell X, F\ell Y]^C - F^C[F\ell X, Y]^C - F^C[X, F\ell Y]^C \\ &\quad + (F^2)^C[\ell X, \ell Y]^C \\ &= ([F\ell X, F\ell Y] - F[F\ell X, Y] - F[X, F\ell Y] + F^2[\ell X, \ell Y])^C \\ &= (N(\ell X, \ell Y))^C = 0 \end{aligned}$$

ve Teorem 3.3.3 den

$$N^C(\ell^C X^C, \ell^C Y^C) = 0 \Leftrightarrow N^C((F^{K-2})^C X^C, (F^{K-2})^C Y^C) = 0$$

bulunur.

L ve M her ikisi birden integrallenebilir olduğunda L ve M ye karşılık gelen lokal koordinat sistemlerini sırasıyla $(n-r)$ ve (r) koordinat sabitleri olarak seçebiliriz. Böyle bir koordinat sistemini uyarlanmış koordinat sistemi olarak adlandırırız. ℓ ve m projection operatörleri için uyarlanmış koordinat sistemlerinin bileşenleri I_r, r inci dereceden birim matris ve I_{n-r} de n-r inci dereceden bir matris olmak üzere

$$\ell = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

formundada olduğu kabul edilebilir.

F, Eş. 3.5 i sağladığından dolayı F tensörünün bileşenleri uyarlanmış koordinat sistemindeki formu, F_r, $r \times r$ karesel matris olmak üzere

$$F = \begin{pmatrix} F_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ şeklindedir}$$

3.3.10 Tanım

F yapı integrallenebilirdir ancak ve ancak
i) F yapı parçalı integrallenebilirdir.
ii) M dağılımı integrallenebilirdir. Yani, N(mX,mY)=0
iii) F yapının bileşenleri uyarlanmış koordinat sistemindeki L nin integral manifoldu boyunca sabit kalan koordinatlardan bağımsızdır.

3.3.11 Teorem

F^C yapının TM_n de integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart F nin M_n integrallenebilir olmasıdır.

İspat

M_n de F yapının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart $N(X, Y) = 0$ olmasıdır [Ishihara ve Yano, 1964].

Eş. 2.1 ve Teorem 2.3.15 ve Eş. 3.11 den

$$N^C(X^C, Y^C) = (N(X, Y))^C$$

dir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

1. Bejancu, A., Farran, H.R., “Foliations and geometric structures”, **Mathematics and Its Aplications**, vol. 580, Springer, New York, 1-7 (2006).

2. Birickel, F., Clark, R.S., “Differentiable manifolds”, **VRN Company**, London, 14-25, 34-46, 53-63, 109-119, 152-159 (1970).

3. Greub, W., Halperin, S., Vanstone, R., “Connection, curvature and Cohomology”, vol. 1-2, **Acedemic Press**, New York, 38-41, 44-84, 87-99 (1972).

4. Ishihara, S., Yano, K., “On integrability of a structure F satisfying $F^3+F=0$”, **Quart. J. Math. Oxford** (2), 15, 217-222 (1964).

5. Kim, J.B., “Notes on f-manifold”, **Tensor, N.S.**, 29: 299-302 (1975).

6. Lee, J.M., “Manifolds and differential geometry”, **American Mathematical Society**, United States of America, 467-478 (2009).

7. Okubo, T., “Differential Geometry”, **Marcel Dekker Inc.**, New York, 19-28, 34-44 (1987).

8. Özdemir, F., Crasmareanu, M., “Geometrical objects associated to a substructure”, **Turk. J. Math.**, 34, 1-12 (2010).

9. Saunders, D.J., The geometry of jet bundle”, **Cambridge Universty Press**, Cambridge, 1-36 (1989).

10. Yano, K., “On a structure defined by a tensor field f of type (1,1) satisfying $f^3+f=0$, **Tensor, N.S.**, 14: 99-109 (1963).

11. Yano, K., Ishihara S., “Tangent and cotangent bundles”, **Marcel Dekker Inc.**, New York, 4-25, 33-38 (1973).

12. Yano, K., Kon, M., “Structures on manifolds”, Series in pure mathematics Volume 3, **Springer**, New York, 111-112, 386-390 (1983).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : SOYLU Serdar

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 22.06.1984 Balıkesir

Medeni hali : Bekar

Telefon : 0 (536) 529 99 92

e-mail : ssoylu@hotmail.com.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	2012
Lisans	Kırıkkale Üniversitesi	
	Fen Edebiyat Fakültesi/ Matematik Bölümü	2008
Lise	Yıldırım Beyazıt Anadolu Lisesi	2002

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2011-	Giresun Üniversitesi	Araştırma Görevlisi