# KOMPLEKS BASKAKOV OPERATÖRLERİ İLE ANALİTİK FONKSİYONLARA YAKLAŞIM

**Nesibe MANAV**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TEMMUZ 2013**
**ANKARA**

Nesibe MANAV tarafından hazırlanan “KOMPLEKS BASKAKOV OPERATÖRLER İLE ANALİTİK FONKSİYONLARA YAKLAŞIM” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Nurhayat İSPİR …….…………………….
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Yılmaz ALTUN …….…………………….
Matematik Anabilim Dalı, A.Ç.Ü.

Prof. Dr. Nurhayat İSPİR …….…………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç. Dr. H. Gül İNCE İLARSLAN …….…………………….
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Tez Savunma Tarihi:15/07/2013

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU …….…………………….
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Nesibe MANAV

**KOMPLEKS BASKAKOV OPERATÖRLERİ İLE ANALİTİK FONKSİYONLARA YAKLAŞIM**

**(Yüksek Lisans Tezi)**

**Nesibe MANAV**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Temmuz 2013**

## ÖZET

**Bu tezde**

$$W_n(f;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}[0,\frac{1}{n},...,\frac{k}{n};f]z^k$$

**ve**

$$Z_n(f;z)=(1+z)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{z}{1+z}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$$

**olarak tanımlı kompleks Baskakov operatörleri ile ilgileniyoruz. Bu operatörler her $z\in\mathbb{C}$ için çakışmadığından $f$ ve $z\in\mathbb{C}$ üzerinde farklı hipotezler altında ayrı ayrı çalışıldı. İlk olarak $W_n(f)(z)$ kompleks operatörleri ile yaklaşım özellikleri ve yaklaşımın tam mertebesi verildi. Daha sonra benzer sonuçlar $f$ üzerindeki farklı koşullar altında ve farklı bölgelerde $Z_n(f)(z)$ kompleks operatörü için elde edildi.**

| | |
|---|---|
| **Bilim Kodu** | **: 204.1.095** |
| **Anahtar Kelimeler** | **: Baskakov operatörleri, kompleks Baskakov operatörleri, Voronovskaja-tip yaklaşım formülü, eşanlı yaklaşım.** |
| **Sayfa Adedi** | **: 71** |
| **Tez Yöneticisi** | **: Prof. Dr. Nurhayat İSPİR** |

**APPROXIMATION TO ANALYTIC FUNCTIONS BY COMPLEX BASKAKOV OPERATORS**

**(M.Sc. Thesis)**

**Nesibe MANAV**

**GAZİ UNIVERSITY**

**GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES**

**July 2013**

## ABSTRACT

**In this thesis, we deal with the complex Baskakov operators defined by**

$$W_n(f;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}[0,\frac{1}{n},...,\frac{k}{n};f]z^k$$

**and**

$$Z_n(f;z)=(1+z)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{z}{1+z}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$$

**Since these operators do not coincide for all $z\in\mathbb{C}$ they have been studied separately, under different hypothesis on $f$ and $z\in\mathbb{C}$. First the properties of approximation and exact order in approximation by the complex operators $W_n(f)(z)$ are given. Later similar results fort he complex operator $Z_n(f)(z)$ under different conditions on $f$ and in different domains, are obtained.**

**Science Code** : **204.1.095**
**Key Words** : **Baskakov operators, complex Baskakov operators, Voronovskaja-type formula, simultaneus approximation.**
**Page Number** : **71**
**Adviser** : **Prof. Dr. Nurhayat İSPİR**

**TEŞEKKÜR**

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, bilgi ve birikimlerinden yararlanma fırsatı veren değerli hocam Prof. Dr. Nurhayat İSPİR'e, yüksek lisans eğitimim boyunca beni destekleyen TÜBİTAK'a ve bu süreçte hep yanımda olan, maddi ve manevi desteğini eksik etmeyen sevgili aileme çok teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

**Sayfa**

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| **Simge** | **Açıklama** |
|---|---|
| $L_n(f;x) := L_n(f)(x)$ | $x \in \mathbb{R}$, $L_n$ lineer operatörünün $f$ sürekli fonksiyonuna uygulanması |
| $L_n(f;z) := L_n(f)(z)$ | $z \in \mathbb{C}$, $L_n$ lineer operatörünün $f$ analitik fonksiyonuna uygulanması |
| $C[a,b]$ | $[a,b]$ deki sürekli fonksiyonların uzayı |
| $B[0,\infty)$ | $[0,\infty)$ da tanımlı sınırlı fonksiyonlar uzayı |
| $C[0,\infty)$ | $[0,\infty)$ da tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı |
| $\lVert\cdot\rVert_{C[a,b]}$ | $C[a,b]$ uzayında $\lVert f\rVert_{C[a,b]} = \max\limits_{a \le x \le b} \lvert f(x)\rvert$ ile tanımlı olan norm |
| $\omega(f;\delta)$ | $f$ fonksiyonunun süreklilik modülü |
| $[x_0, x_1, ..., x_n; f]$ | $f$ fonksiyonunun n-yinci bölünmüş farkı |
| $\partial B$ | B kümesinin sınırı |
| $D_R$ | $\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < R, R > 1\}$ kümesi |
| $\overline{D}_R$ | $\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert \le R, R > 1\}$ kümesi |
| $\Omega$ | $\mathbb{C}$ nin $D_R \cup [0,\infty)$ alt kümesi |

# 1.GİRİŞ

Yaklaşım teorisinin amacı, belli özelliklere sahip fonksiyon uzayının elemanlarının bu uzayın bir alt uzayından olan iyi özelliklere sahip fonksiyonlar cinsinden bir gösterimini elde etmektir. Burada iyi özelliklere sahip fonksiyonlar genelde iyi bilinen, polinomlar veya rasyonel fonksiyonlar olarak alınmaktadır.

1885 yılında Weierstrass $[a,b]$ aralığında sürekli her $f$ fonksiyonuna bir polinomla yaklaşılabileceğini ifade etmiştir [1]. 1912 yılında Bernstein'ın, Weierstrass'ın yaklaşım teoreminin ispatı için verdiği, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ olmak üzere $f\in C[0,1]$ için $n.$ dereceden;

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x)f\left(\frac{k}{n}\right),\ P_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\ x\in[0,1]$$

şeklindeki Bernstein polinomları kuşkusuz yaklaşım teorisinin önemli cebirsel polinomlarından biridir [2-6]. Bernstein polinomlarının pozitif reel eksene birçok önemli genellemelerinden biri 1957 yılında V. A. Baskakov tarafından $x\in[0,\infty)$ olmak üzere, $f\in C[0,\infty)$ için,

$$Z_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{x}{1+x}\right)^k$$

şeklinde tanımlanan Baskakov operatörleridir [7].

Reel değişkenli $B_n(f;x)$ Bernstein polinomlarının yakınsaklık özelliklerini $[0,1]$ reel aralığından kompleks düzlemin daha geniş bölgelerine genelleştirilmesi ve analitik fonksiyonlara ilişkin Bernstein polinomlarının yakınsaklık durumu Wright [6], Kantorovich [8], Bernstein [2], Lorentz [9] ve Tonne [5] tarafından incelenmiştir. [9] da kompleks Bernstein polinomlarının analitik fonksiyonlara yakınsaklığı kompleks düzlemin farklı bölgelerinde incelenmiş fakat yakınsaklık oranına ilişkin herhangi bir sonuç verilmemiştir. Gal [10] da kompleks Bernstein tip operatörlerin yakınsaklık ve tam yakınsama oranına ilişkin sayısal tahminler vermiştir. $W_n$ ve $Z_n$ operatörlerinin kompleks düzlemin farklı bölgelerinde analitik olan fonksiyonlara ilişkin kompleks biçimleri Gal tarafından [10] da aşağıdaki şekilde

$$Z_n\left(f;z\right)=\left(1+z\right)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{z}{1+z}\right)^{k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ve

$$W_n(f;z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n(n+1)...(n+j-1)}{n^j}[0,\frac{1}{n},...,\frac{j}{n};f]z^j$$

olarak tanımlanmıştır. Bu tezde [10] izlenerek $W_n$ ve $Z_n$ kompleks operatörlerinin yaklaşım özellikleri detaylı olarak incelenecektir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölüm lineer pozitif operatörler, bölünmüş farklar gibi temel tanımların verildiği, diğer bölümlerin temelini oluşturan yaklaşım teorisinin önemli teoremleri ile kompleks analizde yardımcı teoremlerin ifade edildiği bölümdür.

Üçüncü bölüm reel değişkenli genel ve klasik Baskakov operatörlerinin tanımlandığı ve bunların düzgün yakınsaklığı, bölünmüş farklarla ifadesinin ve Voronovskaja-tip yaklaşım oranının verildiği bölümdür.

Dördüncü ve beşinci bölümde Gal'in [10] ve Lorentz'in [9] eserlerinin incelenerek kompleks Baskakov operatörlerinin ele alındığı bölümüdür. Dördüncü bölümde öncelikle $W_n$ kompleks Baskakov operatörünün varlığı ve analitikliği için yeter koşullar verilmiş sonra bu operatörlerin $f\left(z\right)$ analitik fonksiyonlarına kompleks bölgelerde düzgün yakınsaklığı Vitali teoremi yardımıyla gösterilmiş ve sonrasında tam yakınsama oranı araştırılmıştır. Beşinci bölümde $Z_n$ operatörleri için kompleks düzlemin farklı bölgelerinde operatörün varlığı ve analitikliği için yeter koşullar verildikten sonra analitik fonksiyonlara yakınsama oranları bulunmuş ve bu sayede tam yakınsama oranı ile eşanlı yakınsama oranları verilmiştir. Böylece reel Baskakov operatörlerinin yakınsaklık özellikleri $[0,\infty)$ aralığından kompleks düzlemin belirli bölgelerine kompleks Baskakov operatörleri yardımı ile genelleştirilmiştir.

# 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde lineer pozitif operatör tanımı, bölünmüş farkların tanımı ve temel özellikleri, yaklaşım teorisinin önemli teoremleri, kompleks analizin bazı temel tanım ve teoremleri verilecektir.

## 2.1. Lineer Pozitif Operatörler

2.1.1. Tanım [1,11]:

$X$ ve $Y$ normlu iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer $X$ den alınmış herhangi $f$ fonksiyonuna $Y$ de bir $g$ fonksiyonu karşılık getiren bir $L$ kuralı varsa bu $L$ kuralına $X$ den $Y$ ye bir operatör denir.

$f \in X$ , $g \in Y$ ve $x$, $g$ nin tanım kümesine ait olmak üzere

$$L(f;x) = L(f)(x) = g(x)$$

ya da daha açık biçimde; $t$, $f$ nin $x$, $g$ nin tanım kümesine ait olmak üzere

$$L(f(t);x) = g(x)$$

şeklinde gösterilir.

2.1.2. Tanım [1,11]:

$L : X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer $L$ operatörü her $f_1, f_2 \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2; x) = \alpha L(f_1; x) + \beta L(f_2; x)$$

koşulunu sağlıyor ise, $L$ operatörüne lineer operatör denir.

2.1.3. Tanım [1,12]:

$L : X \to Y$ bir operatör ve $f \in X$ olsun. Eğer $f \geq 0$ iken $L(f) \geq 0$ gerçekleniyorsa $L$ operatörüne pozitif operatör denir. Lineerlik ve pozitiflik koşullarını sağlayan $L$ operatörüne, lineer pozitif operatör denir.

2.1.4. Lemma [1,11,12]:

$L: X \to Y$ bir lineer pozitif operatör olsun. $f, g \in X$ olmak üzere $f \leq g$ ise $L(f;x) \leq L(g;x)$ dir. Buna $L$ lineer operatörünün monotonluk özelliği denir.

2.1.5. Lemma [4]:

$L: X \to Y$ bir lineer pozitif operatör olsun. Bu durumda

$$|L(f;x)| \leq L(|f|;x)$$

dir.

2.1.6. Tanım [11,13]:

$[a,b]$ kapalı ve sonlu aralığında tanımlı, sürekli fonksiyonlar uzayı $C[a,b]$ ile gösterilir. $C[a,b]$,

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

normu ile bir lineer normlu uzaydır.

## 2.2. Bölünmüş Farklar

2.2.1. Tanım [1,11]:

$f$ nin $p$-yinci fark operatörü

$$\Delta_{n^{-1}}^{p} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{m=0}^{p} (-1)^{p-m} \binom{p}{m} f\left(\frac{k+m}{n}\right)$$

olarak tanımlanır. Bu ifadeye aynı zamanda $f$ nin $\frac{1}{n}$ basamaklı $p$-yinci fark operatörü denir.

Buna göre $p=1$ için 1. fark operatörü;

$$\Delta_{n^{-1}} f\left(\frac{k}{n}\right)=f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)$$

olur ve $p=2,3,...$ için

$$\Delta_{n^{-1}}^{2} f\left(\frac{k}{n}\right)=f\left(\frac{k+2}{n}\right)-2f\left(\frac{k+1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\Delta_{n^{-1}}^{3} f\left(\frac{k}{n}\right)=f\left(\frac{k+3}{n}\right)-3f\left(\frac{k+2}{n}\right)+3f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde devam edilerek yazılabilir.

$f$ nin $[a,b]$ aralığında bölünmüş farkları aşağıdaki gibi tanımlanır:

2.2.2. Tanım [1]:

$f$ sonlu, kapalı $[a,b]$ aralığında tanımlanmış bir fonksiyon ve $x_0,x_1,x_2,...$ ler de $x_0<x_1<x_2<...$ özelliğini sağlayacak şekilde bu aralığın keyfi noktaları olsun. $f$ fonksiyonunun keyfi bir $x_k$ ; $k=0,1,2,...$ noktasındaki değerini $[x_k;f]$ ile gösterelim. Yani $f(x_k)=[x_k;f]$ olsun. Buna $f$ fonksiyonunun bölünmüş farkı denir.

$$[x_0,x_1;f]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

ifadesine $f$ fonksiyonunun birinci bölünmüş farkı;

$$[x_0,x_1,x_2;f]=\frac{[x_0,x_1;f]-[x_1,x_2;f]}{x_0-x_2}$$

ifadesine $f$ fonksiyonunun ikinci bölünmüş farkı, bu şekilde devam edilirse;

$$[x_0,...,x_n;f]=\frac{[x_0,...,x_{n-1};f]-[x_1,...,x_n;f]}{x_0-x_n}$$

ifadesine $f$ fonksiyonunun n-yinci bölünmüş farkı denir.

2.2.3. Lemma :

$e_p(\xi)=\xi^p$ sonlu, kapalı $[a,b]$ aralığında tanımlanmış bir fonksiyon ve $0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...$ bu aralığın keyfi noktaları olsun. Bölünmüş farklar için

$$\left[0,\frac{1}{n},...,\frac{j}{n};e_{p+1}\right]=\frac{j}{n}\left[0,\frac{1}{n},...,\frac{j}{n};e_p\right]+\left[0,\frac{1}{n},...,\frac{j-1}{n};e_p\right] \tag{2.1}$$

özelliği sağlanır [10].

Bu ifade iyi bilinen aşağıdaki ilişkide

$$[x_0,x_1,...,x_m;f.g]=\sum_{i=0}^{m}[x_0,x_1,...,x_i;f].[x_i,x_{i+1},...,x_m;g]$$

$m=j$, $f=e_p$, $g=e_1$ ve $x_i=\frac{i}{n}$ uygulamakla elde edilen bir sonuçtur[14].

Ayrıca $f$ fonksiyonu $n$-inci mertebeden türevlenebilir ise,

$$[x_0,...,x_n;f]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \tag{2.2}$$

eşitliği sağlanır. Burada $\xi$ noktası $x_0,x_1,...,x_n$ noktaları ile aynı aralıktadır [1].

### 2.3. Yaklaşım Teorinin Önemli Teoremleri

2.3.1. Teorem ( Weierstrass ) [11,15,16]:

$f$, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve $\varepsilon>0$ yeterince küçük bir sayı olmak üzere öyle bir $P(x)$ cebirsel polinomu bulunabilir ki her $x\in[a,b]$ için $|P(x)-f(x)|<\varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

2.3.2. Teorem ( Korovkin ) [1,11,12]:

Her $n\in\mathbb{N}$ için ve $[a,b]\subseteq[c,d]$ olmak üzere $L_n:C[a,b]\to C[c,d]$ şeklinde tanımlı $(L_n)$ lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Her bir $i=0,1,2$ için $f_i(t)=t^i$

olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(f_i\right)-f_i\right\|_{C[a,b]}=0;\ i=0,1,2$$

koşulları gerçekleniyorsa, bu durumda her $f\in C\left[a,b\right]$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(f\right)-f\right\|_{C[a,b]}=0$$

dır.

## 2.4. Kompleks Analizde Yardımcı Teoremler

2.4.1. Teorem (Vitali ) [10,15,16]:

$\Omega$, $\mathbb{C}$ de bir bölge ve $F\subset\Omega$, $\Omega$ da en az bir yığılma noktasına sahip bir küme olsun. $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\Omega$ da analitik olan fonksiyonların dizisini göstersin. $\left(f_n\right)$ fonksiyonlar dizisi $\Omega$ da sınırlı ve her $z\in F$ için $\left(f_n\left(z\right)\right)$ yakınsak ise bu durumda $\left(f_n\right)$, $\Omega$ nın her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsaktır.

Bu çalışmada $\Omega=D_R\cup\left[0,\infty\right)=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z\right|<R,R>1\right\}\cup\left[0,\infty\right)$ ve bunun kompakt alt kümeleri de $\overline{D_r}=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z\right|\le r,1\le r<R\right\}$ olarak kullanılacaktır. $F$ ise $D_R$ de bir doğru parçası olarak alınacaktır.

2.4.2. Teorem ( Bernstein Eşitsizliği ) [9]:

$P_n\left(z\right)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ n. dereceden kompleks katsayılı polinomlar olmak üzere $\left|z\right|<r$ diskinde $\left\|P_n\right\|_r=\max\left\{\left|P_n\left(z\right)\right|:\left|z\right|\le r\right\}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) Her $\left|z\right|\le 1$ için $\left|P_n'\left(z\right)\right|\le n\left\|P_n\right\|_1$

ii) $r>0$ ise her $\left|z\right|\le r$ için $\left|P_n'\left(z\right)\right|\le \dfrac{n}{r}\left\|P_n\right\|_r$ .

2.4.3. Teorem ( Maksimum Modül ) [15,16]:

$B$ sınırlı bir bölge olsun. $f$, $B$ de analitik ve $\overline{B}$ da sürekli ise $|f|$, $\partial B$ deki bir noktada maksimum değer alır.

2.4.4. Teorem (Cauchy Türev Formülü) [10,15,16]:

$r>0$ olmak üzere $f:\overline{D}_r \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $D_r$ de analitik ve $\overline{D}_r$ da sürekli olsun. $\Gamma$, $|z|<r$ nin sınırı olmak üzere her $p\in\{0,1,2,...\}$ için

$$f^{(p)}(z)=\frac{p!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(u)}{(u-z)^{p+1}}du$$

dir.

2.4.5. Teorem [10]:

$R>1$ için $D_R \subset \mathbb{C}$ açık kümesini alalım. Eğer $D_R$ üzerinde analitik fonksiyonların $(f_n)$ dizisi $f$ fonksiyonuna yakınsak ve $D_R$ nin her bir kompakt alt kümesinde düzgün yakınsak ise her $p$ doğal sayısı için $\left(f_n^{(p)}\right)$, $p$. türev dizisi, $D_R$ nin kompakt alt kümelerinde $f^{(p)}$ ye düzgün yakınsaktır.

2.4.6. Teorem (Özdeşlik) [10]:

$D$, $\mathbb{C}$ de bir bölge ve $f,g$ $D$ de birer analitik fonksiyon olsun. Eğer bu iki fonksiyon yığılma noktası $z_0\in D$ olan bir nokta kümesinde eşitse (yani $f=g$ ise), bu durumda bu iki fonksiyon $D$ kümesinin tamamında eşittir.

2.4.7. Teorem (Taylor ) [15,16]:

$f$, $D$ bölgesinde analitik bir fonksiyon, $z_0 \in D$ ve $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ kümesi $D$ bölgesinde kapsanan bir bölge olsun. O halde, her $z \in D_R$ noktası için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(z - z_0)^n$$

serisi $D_R$ kümesinde $f$ fonksiyonuna yakınsar. Bu serinin yakınsaklık yarıçapı $\leq R$ olur. Buna göre,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(z - z_0)^n, |z - z_0| < R$$

yazılır.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç çıkarılabilir.

2.4.8. Sonuç [15,16]:

$D$, $\mathbb{C}$ düzleminde bir bölge ve $f$ fonksiyonu $D$ bölgesinde $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $f$ fonksiyonunun $D$ bölgesinde analitik olması için gerek ve yeter koşul her bir $z_0 \in D$ noktası için sabit bir $R$ sayısı alındığında $D(z_0, R)$ dairesinde $f$ fonksiyonunun yakınsak bir kuvvet serisi ile temsil edilebildiği, $D$ bölgesi tarafından kapsanan bir $D(z_0, R) = \{z : |z - z_0| < R\}$ açık dairesinin bulunmasıdır.

2.4.9. Teorem [15,16]:

(i) $D$, $\mathbb{C}$ düzleminde bir bölge ve $(f_n)$, $D$ bölgesinde tanımlı analitik fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $(f_n)$, $D$ bölgesinde kapsanan kapalı her dairede $f$ fonksiyonuna düzgün olarak yakınsıyorsa $f$ analitik bir fonksiyondur. Bundan başka, $f'_n$ fonksiyonları $f'$ fonksiyonuna $D$ kümesinde noktasal yakınsak ve $D$ kümesindeki her kapalı dairede düzgün yakınsaktır.

(ii) Eğer $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $g_n$ ler $D$ kümesinde analitik fonksiyon ve

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$$

fonksiyonu $D$ bölgesindeki her kapalı dairede düzgün olarak yakınsıyorsa, $g$ fonksiyonu $D$ bölgesinin tümünde analitiktir ve

$$g'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(z)$$

fonksiyonu $D$ kümesinde noktasal yakınsaktır. Aynı zamanda $g'(z)$ fonksiyonu $D$ kümesinde kapsanan kapalı her dairede düzgün yakınsak olur.

# 3.BASKAKOV OPERATÖRLERİ

Bu bölümde öncelikle reel değişkenli genel Baskakov operatörü, bunun özel bir durumu olan klasik Baskakov operatörünün tanımları verilerek klasik Baskakov operatörünün bölünmüş farklar yardımıyla yazılışı elde edilecektir.

## 3.1. Genel Baskakov Operatörleri

3.1.1. Tanım [12]:

$x \in [0,\infty)$ , $f \in C[0,\infty)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k \frac{\phi_n^{(k)}(x)}{k!} \tag{3.1}$$

olarak tanımlı operatöre genel Baskakov operatörü denir. Burada $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisinin elemanları $x \in [0,\infty)$ olmak üzere aşağıdaki özellikleri sağlayan fonksiyonlardır:

1. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\phi_n$, $[0,\infty)$ da analitiktir.
2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\phi_n(0) = 1$ dir.
3. $(-1)^k \phi_n^{(k)}(x) \geq 0$ $(k = 0,1,\ldots : \mathrm{n} = 1,2,\ldots)$ özelliği sağlanır.
4. $\varphi_n^{(k)}(x) = -n\varphi_{m(n)}^{(k-1)}(x)(1+\alpha_{k,n}(x))$ $\quad n,k = 1,2,\ldots$ olacak biçimde bir $m(n) \in \mathbb{Z}^+$ vardır, burada $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{k,n}(x) = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_{k,n}(x)}{n} = 1,\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\phi_n^{(k)}(0)}{n^k} = (-1)^k$ dir.

## 3.2. Klasik Baskakov Operatörü

Bir önceki bölümde (3.1) denkleminde $\phi_n$ operatörünü $\phi_n(x) = (1+x)^{-n}$ alırsak, $f \in C[0,\infty)$ olmak üzere;

$$Z_n\left(f;x\right)=(1+x)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{x}{1+x}\right)^{k} \tag{3.2}$$

klasik Baskakov operatörü elde edilir [12].

Ayrıca $\phi_n\left(x\right)=\left(1-x\right)^n$ özel durumu

$$B_n\left(f;x\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\left(1-x\right)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Bernstein operatörünü, $\phi_n\left(x\right)=e^{-nx}$ özel durumu da

$$S_n\left(f;x\right)=e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(nx\right)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

şeklinde Szasz operatörünü verir.

(3.2) ile gösterilen klasik Baskakov operatörü Teorem 2.3.2 den $A\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere $\left[0,A\right]$ aralığında sürekli ve tüm pozitif yarı eksende sınırlı olan $f$ fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsar. Yani $f\in C\left[0,A\right]$ ise $Z_n\left(f;x\right)$ operatörleri $f\left(x\right)$, $x\in\left[0,A\right]$ fonksiyonuna düzgün olarak yakınsar.

### 3.3. Baskakov Operatörlerinin Bölünmüş Farklarla İfadesi

$x\geq 0$ reel sayısı $f\in C[0,\infty)$ için Baskakov operatörünün orijinal formülü (3.2) ifadesiyle verilmiştir. Bu operatörün bölünmüş farklarla ifadesini elde etmeye çalışalım. $f\in C[0,\infty)$ için $Z_n\left(f\right)$ Baskakov operatörünü tanımlayan seri düzgün yakınsak olduğundan bu seri terim terim türevlenebilirdir. O halde $x$ değişkenine göre türevlerine bakalım.

Birinci türev;

$$\frac{d}{dx}Z_n(f;x)=\frac{d}{dx}\left\{(1+x)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{d}{dx}\left\{\frac{x^k}{(1+x)^{n+k}}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)\left[kx^{k-1}(1+x)^{-(n+k)}-(n+k)x^k(1+x)^{-(n+k+1)}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)kx^{k-1}(1+x)^{-(n+k)}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)(n+k)x^k(1+x)^{-(n+k+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k+1}f\left(\frac{k+1}{n}\right)(k+1)x^k(1+x)^{-(n+k+1)}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)(n+k)x^k(1+x)^{-(n+k+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{(n-1)!(k+1)!}f\left(\frac{k+1}{n}\right)(k+1)x^k(1+x)^{-(n+k+1)}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}f\left(\frac{k}{n}\right)(n+k)x^k(1+x)^{-(n+k+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{(n-1)!k!}f\left(\frac{k+1}{n}\right)x^k(1+x)^{-(n+k+1)}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{(n-1)!k!}f\left(\frac{k}{n}\right)(n+k)x^k(1+x)^{-(n+k+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{(n-1)!k!}x^k(1+x)^{-(n+k+1)}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{(n-1)!k!}\Delta^1_{n^{-1}}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1+x)^{-(n+k+1)}$$

şeklindedir. Burada $\Delta^1_{n^{-1}}f\left(\frac{k}{n}\right)$, $f(x)$ fonksiyonunun $x=\frac{k}{n}$ de birinci bölünmüş farkıdır. İkinci türeve bakalım;

$$\frac{d}{dx}Z_n'(f;x)=\frac{d}{dx}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}(n+k)x^k(1+x)^{-(n+k+1)}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}(n+k)\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\frac{d}{dx}\left\{x^k(1+x)^{-(n+k+1)}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{(n-1)!k!}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\left\{kx^{k-1}(1+x)^{-(n+k+1)}\right.$$

$$-(n+k+1)x^{k}(1+x)^{-(n+k+2)}\Big\}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+k)!}{(n-1)!k!}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]kx^{k-1}(1+x)^{-(n+k+1)}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{(n-1)!k!}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right](n+k+1)x^{k}(1+x)^{-(n+k+2)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{(n-1)!k!}\left[f\left(\frac{k+2}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]x^{k}(1+x)^{-(n+k+2)}$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{(n-1)!k!}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]x^{k}(1+x)^{-(n+k+2)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{(n-1)!k!}\left[f\left(\frac{k+2}{n}\right)-2f\left(\frac{k+1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)\right]x^{k}(1+x)^{-(n+k+2)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+1)!}{(n-1)!k!}\Delta_{n^{-1}}^{2}f\left(\frac{k}{n}\right)x^{k}(1+x)^{-(n+k+2)}$$

şeklindedir. Burada $\Delta_{n^{-1}}^{2}f\left(\frac{k}{n}\right)$, $f(x)$ fonksiyonunun $x=\frac{k}{n}$ de ikinci bölünmüş farkıdır. Benzer düşünce ile devam edersek bölünmüş farkların $p$. basamaktan ifadesi $\Delta x=n^{-1}=h$ olarak alındığında aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\Delta_{h}^{p}f(x)=\Delta\left(\Delta_{h}^{p-1}f(x)\right)$$

$$=f(x+ph)-\binom{k}{1}f\left(x+(p-1)h\right)+...+(-1)^{p}f(x)$$

Sadelik için $h=n^{-1}$ iken $\Delta_{h}^{p}f(x)$ ifadesinin yerine $\Delta^{p}f(x)$ ifadesi kullanılabilir. Bu gösterimle $p=0,1,2,...$ için;

$$Z_{n}^{(p)}(f;x)=\frac{d^{p}}{dx^{p}}Z_{n}(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+p-1)!}{(n-1)!k!}x^{k}(1+x)^{-(n+k+p)}\Delta^{p}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

elde edilir. Bu ifadede toplam açılıp terimler yazılırsa;

$$Z_{n}^{(p)}(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k+p-1)!}{(n-1)!k!}x^{k}(1+x)^{-(n+k+p)}\Delta^{p}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\frac{(n+p-1)!}{(n-1)!}(1+x)^{-(n+p)}\Delta^{p}f(0)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(n+k+p-1)!}{(n-1)!k!}x^{k}\left(1+x\right)^{-(n+k+p)}\Delta^{p}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

olur ve $x=0$ alınırsa;

$$Z_n(f;0)=Z_n^{(p)}(f;0)=\frac{(n+p-1)!}{(n-1)!}\Delta^{p}f\left(0\right)$$

bulunur. Buradan $p=0,1,2,...$ üzerinden toplam alınırsa

$$Z_n(f;x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{Z_n^{(p)}(f)(0)}{p!}x^{p}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}x^{p}\Delta^{p}f\left(0\right) \tag{3.3}$$

ifadesi elde edilir. $f$ fonksiyonu $f\left(x\right)=P\left(x\right)$ şeklinde *m.* dereceden bir polinom olarak alınırsa açıktır ki $p>m$ olduğunda $\Delta^{p}P\left(x\right)=0$ olur. Dahası, [9] dan Lorentz'in Bernstein polinomları için yaptıklarını Baskakov operatörlerine uygulamakla *m.* dereceden bir polinomun $Z_n$ Baskakov operatörü altındaki görüntüsünün de *m.* dereceden bir polinom olduğu görülebilir. Örneğin; $P\left(x\right)=x^{2}$ iken $Z_n\left(P;x\right)=x^{2}+n^{-1}x\left(1+x\right)$ dir. Yine [12] den (3.3) deki $x^{p}$ nin $\frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}\Delta^{p}f\left(0\right)$ katsayıları $a_{np}$ ile gösterilmek üzere; $\Delta x=n^{-1}$ için,

$$\begin{aligned} a_{np} &= \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}\Delta^{p}f\left(0\right) \\ &= \frac{1}{p!}\left(1+\frac{p-1}{n}\right)\left(1+\frac{p-2}{n}\right)...\left(1+\frac{p-n}{n}\right)\frac{\Delta^{p}f\left(0\right)}{\Delta x^{p}} \end{aligned}$$

olup $n\to\infty$ iken bu katsayılar $f^{p}\left(0\right)/p!$ ifadesine yakınsar. Buradan

$$Z_n(f;x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{Z_n^{(p)}(f)(0)}{p!}x^{p}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(n+p-1)!}{(n-1)!p!}x^{p}\Delta^{p}f\left(0\right)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{f^{(p)}\left(0\right)}{p!}x^{p}$$

olarak yazılabilir. Böylece Baskakov operatörünün kuvvet serilerine açılabilen bir fonksiyona yakınsak olduğu görülür. Buradan bölünmüş farkları yardımıyla $Z_n(f;x)$ operatörü;

$$Z_n\left(f;x\right)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{Z_n^{(p)}\left(f;0\right)}{p!}x^{p}$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(n+p-1)}{(n-1)!\,p!}x^p\Delta^p f(0)$$
$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(n+p-1)}{(n-1)!\,p!}\frac{n^p}{n^p}x^p\Delta^p f(0)$$
$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(n+p-1)}{(n-1)!}x^p\frac{1}{n^p}\frac{n^p\Delta^p f(0)}{p!}$$
$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(n+p-1)}{(n-1)!\,n^p}\left[0,\frac{1}{n},\ldots\frac{p}{n};f\right]x^p$$
$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(n+p-1)\ldots(n+p-(p-1))(n+p-p)}{n^p}\left[0,\frac{1}{n},\ldots\frac{p}{n};f\right]x^p$$
$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{n^p}\left[0,\frac{1}{n},\ldots\frac{p}{n};f\right]x^p$$

şeklinde yazılır. Bu gösterimi (3.2) ile verilen Baskakov operatöründen ayırt etmek için

$$W_n(f;x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{n^p}\left[0,\frac{1}{n},\ldots,\frac{p}{n};f\right]x^p,\ x\geq 0 \tag{3.4}$$

gösterimi kullanılacaktır.

(3.2) ve (3.4) operatörleri $x\geq 0$ için çakışır.

Önce $Z_n$ operatörünün $x\geq 0$ için iyi tanımlı olduğunu gösterelim:

Her $x, y\geq 0$ için $Z_n(f;x)=Z_n(f;\mathrm{y})$ olarak alınırsa operatörün (3.2) deki tanımından

$$(1+x)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right)=(1+y)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{y}{1+y}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$$

olur. Her $k=0,1,2,\ldots$ için $\binom{n+k-1}{k}$ ve $f\left(\frac{k}{n}\right)$ değerleri $Z_n(f;x)$ ve $Z_n(f;\mathrm{y})$ için aynıdır. $(1+x)^{-n}, (1+y)^{-n}$ değerleri k ya bağlı değildir ve $k=0$ için

$(1+x)^{-n} f\left(0\right) = (1+y)^{-n} f\left(0\right)$

$\Rightarrow (1+x)^{-n} = (1+y)^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$k=1$ için

$$(1+x)^{-n} \sum_{k=0}^{1} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{k} f\left(\frac{k}{n}\right) = (1+y)^{-n} \sum_{k=0}^{1} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$(1+x)^{-n} f\left(0\right) + (1+x)^{-n} n \left(\frac{x}{1+x}\right) f\left(\frac{1}{n}\right) = (1+y)^{-n} f\left(0\right) + (1+y)^{-n} n \left(\frac{y}{1+y}\right) f\left(\frac{1}{n}\right)$$

olup burada $k=0$ için elde edilen her $n \in \mathbb{N}$ için $(1+x)^{-n} = (1+y)^{-n}$ eşitliği kullanılırsa ve $k = 0,1,2,...$ için böyle devam edilirse $\left(\frac{x}{1+x}\right)^{k}$, $\left(\frac{y}{1+y}\right)^{k}$ değerlerinin eşitliği söz konusudur. Buradan $k = 0,1,2,...$ değerleri için $x = y$ olur ki bu da $Z_n(f;x)$ in iyi tanımlı olması anlamına gelir. $x \geq 0$ için iyi tanımlılıktan $Z_n(f;x) = W_n(f;x)$ olur. Fakat $x$ in negatif değerleri için $W_n(f;x)$ ve $Z_n(f;x)$ eşit değerlere sahip değildir. Bu durumu bir örnekle gösterelim. Basitlik için $W_n(f;x)$ gösterimi yerine $W_n\left(f\right)\left(x\right)$ gösterimini kullanalım.

*Örnek 1:*

$x = -\frac{1}{2}$ ve $f$, her $t \in \left[0,\infty\right)$ için $f(\mathrm{t}) = 1$ sabit fonksiyonu olsun. $W_n\left(f\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$ ve $Z_n\left(f\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$ ifadeleri farklıdır.

$$W_n\left(f\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n\left(n+1\right)...\left(n+k-1\right)}{n^k} \left[0, \frac{1}{n}, ..., \frac{k}{n}; 1\right] \left(-\frac{1}{2}\right)^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n\left(n+1\right)...\left(n+k-1\right)}{n^k} \left\{ \frac{1}{\left(0-\frac{1}{n}\right)...\left(0-\frac{k}{n}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{1}{n}-0\right)...\left(\frac{1}{n}-\frac{k}{n}\right)} + \right.$$

$$\ldots+\frac{1}{\left(\frac{k}{n}-0\right)\ldots\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)}\Bigg\}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{n^{k}}\left\{\frac{n^{k}}{(0-1)\ldots(0-k)}+\frac{n^{k}}{(1-0)\ldots(1-k)}+\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{n^{k}}{(k-0)\ldots(k-(k-1))}\right\}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}n(n+1)\ldots(n+k-1)\left\{\frac{1}{(0-1)\ldots(0-k)}+\frac{1}{(1-0)\ldots(1-k)}+\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{1}{(k-0)\ldots(k-(k-1))}\right\}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{2^{k}}\left\{\frac{1}{k!}+\frac{-1}{(k-1)!}+\frac{(-1)^{2}}{(k-2)!2!}+\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{1!(k-1)!}+\frac{(-1)^{k}}{0!k!}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{2^{k}}\frac{k!}{k!}\left\{\frac{1}{k!}+\frac{-1}{(k-1)!}+\frac{(-1)^{2}}{(k-2)!2!}+\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{1!(k-1)!}+\frac{(-1)^{k}}{0!k!}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}\frac{1}{2^{k}}\left\{1+(-1)^{1}\binom{k}{1}+(-1)^{2}\binom{k}{2}+\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k-1}+(-1)^{k}\binom{k}{k}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}\frac{1}{2^{k}}\left(1+(-1)\right)^{k}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{n+k-1}{n-1}\frac{1}{2^{k}}\left(1+(-1)\right)^{k}$$

$$=1$$

Her $t \in [0,\infty)$ olduğunda $f(\mathrm{t})=1$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için

$$Z_n(1)\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)^{k}.1$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}(-1)^{k}$$

bulunur. Buradaki seri ıraksaktır.

O halde $W_n(f)\left(-\frac{1}{2}\right)=1$ iken $Z_n(f)\left(-\frac{1}{2}\right)$ ıraksak bir seri olduğundan bu iki operatör $x$ in negatif değerleri için eşit değerlere sahip olmaz. Ayrıca $W_n(f)(x)$ negatif $x$ değerleri için yakınsak bir seri toplamı olarak ifade edilebildiğinden bu operatörün tanım kümesine negatif sayılar eklenebilir. $Z_n(f)(x)$ in tanım kümesine göre daha geniş bir tanım kümesine sahip olur.

İlerideki bölümlerde kompleks Baskakov operatörleri için gerekli olacak olan Voronovskaja tip yaklaşım sonuçlarını (3.2) ve (3.4) operatörleri için ifade edelim.

### 3.4. $Z_n$ ve $W_n$ Baskakov Operatörleri İçin Voronovskaja-Tip Yakınsama Oranı

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $A\in\mathbb{R}$ olmak üzere, $[0,A]$ aralığında sınırlı ve $(0,A)$ aralığının herhangi bir noktasında iki kez sürekli diferansiyellenebilir ise klasik Baskakov operatörü için, $[0,\infty)$ aralığının her kompakt alt aralığında;

$$\lim_{n\to\infty} n\left[Z_n(f;x)-f(x)\right]=\frac{1}{2}x(x+1)f''(x) \tag{3.5}$$

eşitliği sağlanır [10].

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $A\in\mathbb{R}$ olmak üzere, $[0,A]$ aralığında sınırlı ve $(0,A)$ aralığının bir noktasında iki kez sürekli diferansiyellenebilir ise $[0,\infty)$ aralığının her kompakt alt aralığında (3.5) eşitliği $W_n\left(f\right)\left(x\right)$ operatörü için de yine

$$\lim_{m\to\infty} n\left[W_n(f)(x)-f(x)\right]=\frac{x(1+x)}{2}f''(x) \tag{3.6}$$

şeklinde sağlanır [10].

### 3.5. Kompleks Baskakov Operatörlerinin Tanımı

(3.2) ve (3.5) ile verilen Baskakov operatörlerinin kompleks biçimleri basitçe

$$Z_n(f)(z)=(1+z)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{z}{1+z}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3.7}$$

ve

$$W_n(f)(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n(n+1)...(n+j-1)}{n^j}[0,\frac{1}{n},...,\frac{j}{n};f]z^j \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 1 gereğince (3.7) ve (3.8) gösterimleri her $z\in\mathbb{C}$ için birbirine denk değildir. O nedenle bu operatörler farklı hipotezler altında ayrı çalışılacaktır.

# 4. $W_n$ KOMPLEKS BASKAKOV OPERATÖRLERİ

Bu bölümde [10] izlenerek (3.8) ile verilen $W_n$ kompleks Baskakov operatörünün belirli koşulları sağlayan analitik fonksiyonlara yakınsaklık oranı ve Voronovskaja-tip yaklaşım oranı bulunarak tam yaklaşım oranı elde edilecektir. Benzer yaklaşım oranları eşanlı yaklaşım oranları için de incelenecektir. Burada $f$ üzerindeki hipotezler; $f$ nin $[0,\infty)$ da her mertebeden türevinin (aynı sabitle) sınırlı olması ve bir kompakt diskte üstel büyümeye sahip olması koşullarıdır.

## 4.1. $W_n(f)$ nin Varlığı için Yeter Koşullar

$W_n$ ,operatörünün varlığı için bir yeter koşul $[0,\infty)$ da $f$ nin tüm türevlerinin aynı bir $M>0$ sabitiyle sınırlı olmasıdır [10].

Her $r>0$, $z\in\mathbb{C}$ ve $|z|\le r$ için

$$\begin{aligned}
|W_n(f)(z)| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}\left[0,\frac{1}{n},...,\frac{k}{n};f\right]z^k\right| \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}\left|\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}z^k\right| \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k k!}M\,|z|^k \\
&\le M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)...(n+k-1)r^k}{n^k k!},\left(\forall |z|\le r\right)
\end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Bu serinin genel terimi $a_k(n,r)=\dfrac{n(n+1)...(n+k-1)r^k}{n^k k!}$ olarak alınırsa

$$\frac{a_{k+1}(n,r)}{a_k(n,r)}=\frac{\dfrac{n(n+1)...(n+k)\,r^{k+1}}{n^{k+1}(k+1)!}}{\dfrac{n(n+1)...(n+k-1)\,r^k}{n^k k!}}=\frac{r(n+k)}{n(1+k)}$$

elde edilir. $k \to \infty$ iken $\frac{a_{k+1}(n,r)}{a_k(n,r)} \searrow \frac{r}{n}$ elde edilir. O halde sabit bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $r < \frac{n_0}{2}$ için öyle bir $k_0$ bulunabilir ki $k > k_0$ olduğunda $\frac{a_{k+1}(n_0,r)}{a_k(n_0,r)} < \frac{2r}{n_0}$ olduğu elde edilir. Oran testinden ve her $n > n_0$ için $\frac{a_{k+1}(n,r)}{a_k(n,r)} < \frac{a_{k+1}(n_0,r)}{a_k(n_0,r)}$ eşitsizliğinden her $n > n_0$ ve $|z| \le \frac{n_0}{2}$ için $W_n(f)(z)$nin iyi tanımlı ve analitik olduğu doğrudan elde edilir. Çünkü $|W_n(f)(z)|$ mutlak yakınsak olduğundan $W_n(f)(z)$ yakınsaktır ve $W_n(f)(z)$ yi temsil eden seri düzgün yakınsaktır ve bu seri toplamı yani $W_n(f)(z)$ yakınsaklık dairesinde iyi tanımlı ve analitiktir.

Kompleks analizde fonksiyonların analitikliğini incelerken genelde dairesel bölgeler üzerinde çalışılır. Lorentz de Bernstein polinomlarının kompleks genellemesini yaparken yine $[0,1]$ aralığını içeren bir kompleks bölge üzerinde çalışmıştır [9]. Bu nedenle dairesel bir bölge almak yerine yaklaşım fonksiyonunu $\overline{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le R, R > 1\}$ ile $[R,\infty)$ ışınının birleşimi olan $\overline{D}_R \cup [R,\infty)$ kümesinde $f : \overline{D}_R \cup [R,\infty) \to \mathbb{C}$ şeklinde tanımlamak dairesel bölge üzerinde tanımlamaktan farklıdır. $f$ fonksiyonu $D_R$ de analitik olduğu için $\overline{D}_R$ üzerinde nicel yaklaşım oranlarını hesaplarken $z \in D_R$ olmak üzere $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ gösterimi kullanılacaktır. Çünkü analitik bir fonksiyon yakınsaklık bölgesi içinde yakınsak bir seri ile temsil edilebilir. Diğer yandan reel değerli olması durumunda yani $[0,\infty)$ aralığında operatörün reel tanımı geçerli olacağından reel durumda bilinen tahminler kullanılabilir.

## 4.2. $W_n$ Kompleks Baskakov Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

Yakınsaklık oranını vermek için aşağıdaki yardımcı lemmalara ihtiyaç vardır.

4.2.1. Lemma [10]**:**

Her $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $3 \le n_0 < 2R < +\infty$ ile $R > 0$ için $f : \overline{D}_R \cup [R, +\infty) \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun her mertebeden türevleri $[0, \infty)$ aralığında aynı sabitle sınırlı ve $f$, $D_R$ de analitik yani her $z \in D_R$ için $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ olsun. $M > 0$ ve $A \in \left(\frac{1}{R}, 1\right)$ ve her $k = 0, 1, ...$ için $|c_k| \le M \dfrac{A^k}{k!}$ olduğunu kabul edelim (bu her $z \in D_R$ için $|f(z)| \le Me^{A|z|}$ olmasını gerektirir.). $1 \le r < \min\left\{\frac{n_0}{2}, \frac{1}{A}\right\}$ ve her $k = 0, 1, ...$ için $e_k(z) = z^k$ olmak üzere her $|z| \le r$ ve $n > n_0$ için

$$W_n(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k W_n(e_k)(z) \tag{4.1}$$

eşitliği sağlanır.

*İspat:*

Öncelikle $f$, $D_R$ ve $[0, \infty)$ de analitik ve analitik fonksiyon yakınsaklık çemberi içinde düzgün yakınsak olduğundan ve her $x \in [0, \infty)$ için $[0, \infty)$ un her kompakt $[0, b]$ alt aralığında serilerin düzgün yakınsak olmasından $f$, $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, $x \in [0, b]$ şeklinde yazılabilir [15,16] . Aslında, $f$ $[0, \infty)$ da sonsuz diferansiyellenebilirdir ve tüm türevleri aynı sabitle sınırlıdır. O halde $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gösterimi yazılır. O zaman $f$ nin 0 daki Maclaurin serisi $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ olur. Buradan seri her bir $[0, b]$ kompakt aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır. Her $z \in D_R$ için $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ olup $x \ge 0$ için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

olduğu açıktır. Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$f_m(z)=\begin{cases}\sum_{j=0}^{m} c_j z^j \ , |z|\le r & \text{ise;}\\ \sum_{j=0}^{m} c_j x^j \ , x\in(r,+\infty) & \text{ise;}\end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Açıktır ki $[0,\infty)$ da her $f_m$ sürekli diferansiyellenebilirdir ve onun türevleri aynı sabitle sınırlıdır.

Dahası $W_n$ nin lineerliğinden $|z|\le r$ için $f_m(z)=\sum_{j=0}^{m} c_j z^j$ olmasından;

$$\begin{aligned}W_n(f_m)(z)&=W_n\left(\sum_{k=0}^{m} c_k z^k\right)(z)\\&=W_n\left(\sum_{k=0}^{m} c_k e_k(z)\right)\\&=\sum_{k=0}^{m} c_k W_n(e_k)(z)\end{aligned}$$

yazılır. $n\in\mathbb{N}$ ve her $|z|\le r$ , $\xi\in D_r$ için Eş. 2.2 kullanılarak;

$$\begin{aligned}|W_n(e_k)(z)|&=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}[0,\frac{1}{n},...,\frac{k}{n};e_k]z^k\right|\\&=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}\frac{e_k^{(k)}(\xi)}{k!}z^k\right|\\&=\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}\frac{k!}{k!}z^k\right| \qquad (4.2)\\&\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}|z|^k\\&\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)...\left(1+\frac{k-1}{n}\right)r^k\\&\le\sum_{k=0}^{\infty} r^k k!\\&\le r^k(k+1)!\end{aligned}$$

elde edilir ve bu her $m\in\mathbb{N}$, $|z|\le r$ , $n>n_0$ ve $1\le r<\min\left\{\frac{n_0}{2},\frac{1}{A}\right\}$ için

$$\left|W_n(f_m)(z)\right| \le \sum_{k=0}^{m} |c_k| \left|W_n(e_k)(z)\right|$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \left|W_n(e_k)(z)\right|$$

$$\le M \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(rA)^k \;:= M_r(f) \tag{4.3}$$

olmasını gerektirir. Böylece $W_n(f_m)(z)$ nin her $m \in \mathbb{N}$ ve her $|z| \le r$ için yakınsak bir seri ile sınırlı olduğu gösterilmiş olur. Eğer $W_n(f_m)(z)$ nin $D_R$ nin içinde kalan bir nokta kümesinde $m \to \infty$ iken limite sahip olduğu gösterilirse Teorem 2.4.1 den $W_n(f_m)(z)$ tamamen $D_R$ içinde kalan kompakt bir küme üzerinde düzgün olarak $W_n(f)(z)$ ye yakınsar denebilir. Teorem 2.4.1 den her $n > n_0 \ge 3$ için $0 < x_0 < 1$ (n ye bağlı) olmak üzere $x \in [0, x_0]$ için

$$\lim_{m \to \infty} W_n(f_m)(x) = W_n(f)(x)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bölüm 3.3 te reel değişkenli Baskakov operatöründen türetilen iki operatör için $x \ge 0$ iken $W_n(f)(x) = Z_n(f)(x)$ olduğu gösterilmişti. O halde $x_0 \ge 0$ için $\rho_0 = \dfrac{x_0}{1+x_0} \in [0,1)$ olmak üzere $W_n(f)(x_0) = Z_n(f)(x_0)$ olduğu açıktır. $f$ üzerindeki hipotezden

$$\left|W_n(f)(x_0) - W_n(f_m)(x_0)\right| = \left|(1+x_0)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{x_0}{1+x_0}\right)^k \left[\sum_{j=m+1}^{\infty} c_j \left(\frac{k}{n}\right)^j\right]\right|$$

$$\le (1+x_0)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_0^k \sum_{j=m+1}^{\infty} |c_j| \frac{k^j}{n^j}$$

$$= (1+x_0)^{-n} \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_0^k \sum_{j=m+1}^{\infty} |c_j| \frac{k^j}{n^{j-m-1}}$$

$$\le (1+x_0)^{-n} \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_0^k \sum_{j=m+1}^{\infty} |c_j| k^j$$

$$\le M(1+x_0)^{-n} \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_0^k \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{(kA)^j}{j!}$$

$$= \frac{M(1+x_0)^{-n}}{n^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_0^k \left(e^{kA} - \sum_{j=0}^{m} \frac{(kA)^j}{j!}\right)$$

$$\leq \frac{M(1+x_0)^{-n}}{n^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_0^k \frac{e^{kA}(kA)^{m+1}}{(m+1)!}$$
$$\leq \frac{M(1+x_0)^{-n}}{n^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho_0^k e^{2kA}$$
$$= \frac{M(1+x_0)^{-n}}{n^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \left(\rho_0 e^{2A}\right)^k$$

elde edilir. $n > n_0 \geq 3$ olmak üzere $x_0 > 0$ ve $\rho_0 e^{2A} := \rho(x_0) < \frac{1}{n}$ seçilsin. $h(t) = \frac{t}{1+t}$ fonksiyonu sürekli ve $h(0) = 0$ olduğundan bu seçim $n > n_0 \geq 3$ olmak üzere $x_0 > 0$ için $\rho_0 = \frac{x_0}{1+x_0}$ olduğundan yazılabilir. Bu durumda $n > n_0 \geq 3$ için

$$(1+x_0)^n \left| W_n(f)(x_0) - W_n(f_m)(x_0) \right| \leq \frac{M}{n^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho(x_0)^k$$
$$\leq \frac{M}{n^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{1}{n^k}$$

elde edilir ve oran testinden $n > n_0 \geq 3$ için $a_k = \binom{n+k-1}{k} \frac{1}{n^k}$ olmak üzere

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\binom{n+k}{k+1}\frac{1}{n^{k+1}}}{\binom{n+k-1}{k}\frac{1}{n^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} . \frac{1}{n} = 0 < 1$$

olduğundan $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{1}{n^k}$ serisinin yakınsak olduğu görülür. Buradan $m \to \infty$ iken limit durumunda

$$\lim_{m\to\infty} W_n(f_m)(x_0) = W_n(f)(x_0)$$

olduğu elde edilir. Fakat yukarıda tanımlanan $h(t)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ da artandır, bu nedenle her $x \in [0, x_0]$ için $\frac{x}{1+x} \leq \frac{x_0}{1+x_0}$ sağlanır ve $\rho(x) \leq \rho(x_0) < \frac{1}{n}$ olduğu elde edilir. Yukarıdaki tahminde $x_0$ yerine $x$ alırsak

$$\lim_{m\to\infty} W_n(f_m)(x) = W_n(f)(x)$$

elde edilir ve bu iddiamızı kanıtlar. $W_n(f_m)(z)$ yakınsak olduğundan Eş. 4.3 ile birlikte Teorem 2.4.1 den $W_n(f_m)(z)$ , $W_n\left(f\right)\left(z\right)$ ye düzgün yakınsar.

Lemma 4.2.1 in hipotezlerini sağlayan fonksiyonlara aşağıdaki iki örneği verebiliriz:

*Örnek 2:*

(i) $f(z)=e^{-az}$, $0<a<1$, fonksiyonunu inceleyelim:

$f$ fonksiyonunun $n.$türevi $f^{(n)}(z)=\left(-1\right)^n a^n e^{-az}$ olduğundan $f^{(n)}(0)=\left(-1\right)^n a^n$ olur. $z_0=0$ noktası komşuluğunda $e^{-az}$ fonksiyonunun Taylor açılımı

$$e^{-az}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n a^n}{n!}z^n$$

olur.

$$\left|c_n\right|=\left|\frac{\left(-1\right)^n a^n}{n!}\right|=\frac{a^n}{n!}$$

$0<a<1$ olduğundan $\dfrac{a^n}{n!}<1$ dir. Yani $\left|c_n\right|$ sınırlıdır.

$$\left|\,f(z)\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n a^n}{n!}z^n\right|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\left|z\right|^n=e^{a|z|}$$

sağlanır. O halde $f(z)=e^{-az}$ fonksiyonunun türevleri her $z\in D_R$ için her yerde aynı sabitle sınırlıdır. O halde Lemma 4.2.1 in hipotezleri sağlandığından $f(z)=e^{-az}$ fonksiyonu Eş. 4.1 i sağlar.

(ii) $f(z)=\sin(az),\ 0<a<1,$ fonksiyonunu inceleyelim:

$f$ fonksiyonu tüm $\mathbb{C}$ de analitiktir. $z_0=0$ noktası komşuluğunda $\sin(az)$ fonksiyonunun Maclaurin açılımı

$$\sin(az)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^n}{(2n-1)!}z^{2n-1}$$

olduğundan

$$|c_n|=\left|\frac{(-1)^{n+1}a^n}{(2n-1)!}\right|=\frac{a^n}{(2n-1)!}$$

ve $0<a<1$ olduğundan $\dfrac{a^n}{(2n-1)!}<1$ dir. Yani $|c_n|$ sınırlıdır. Buradan

$$|f(z)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n\right|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^n}{(2n-1)!}z^{2n-1}\right|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^n}{(2n-1)!}|z|^{2n-1}$$

$$=\sin(a|z|)=\frac{e^{ia|z|}-e^{-ia|z|}}{2i}\leq\frac{e^{ia|z|}}{2i}\leq e^{ia|z|}$$

sağlanır. Böylece $f(z)=\sin(az)$ her $z\in D_R$ için üstel büyüyen ve türevleri her $z\in D_R$ için aynı sabitle sınırlı olan bir fonksiyondur. O halde Lemma 4.2.1 in hipotezleri sağlandığından $f(z)=\sin(az)$ fonksiyonu Eş. 4.1 i sağlar.

Şimdi $(W_n(f))$ dizisinin $f$ fonksiyonuna yakınsama ve eşanlı yakınsama oranı verilecektir.

4.2.2. Teorem [10]**:**

Her $n_0\in\mathbb{N}$ ve $3\leq n_0<2R<+\infty$ ile $R>0$ için $f:[R,+\infty)\cup\overline{D}_R\to\mathbb{C}$ fonksiyonunun her mertebeden türevi $[0,\infty)$ aralığında aynı sabitle sınırlı ve $f$, $D_R$ de analitik yani her $z\in D_R$ için $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$ olsun. $M>0$, $A\in\left(\dfrac{1}{R},1\right)$ ve her $k=0,1,...$ için $|c_k|\leq M\dfrac{A^k}{k!}$ olduğunu kabul edelim (Bu her $z\in D_R$ için $|f(z)|\leq Me^{A|z|}$ olmasını gerektirir).

(i) $1 \le r < \min\left\{\frac{n_0}{2}, \frac{1}{A}\right\}$ ve her $|z| \le r$ ve $n > n_0$ için

$$|W_n(f)(z) - f(z)| \le \frac{C_{r,A,M}(f)}{n}$$

sağlanır. Burada $C_{r,A,M}(f) = 6M\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)(k+2)(rA)^k < \infty$ dur.

(ii) $W_n(f)(z)$ kompleks Baskakov operatörünün eşanlı yaklaşma durumu için $1 \le r < r_1 < \min\left\{\frac{n_0}{2}, \frac{1}{A}\right\}$ keyfi sabitler, her $|z| \le r$ için ve $n, p \in \mathbb{N}$ için $n > n_0$ iken $C_{r_1,A,M}$, (i) de verilen özellikleri sağladığında

$$\left|W_n^{(p)}(f)(z) - f^{(p)}(z)\right| \le \frac{C_{r_1,A,M}(f)\,p!\,r_1}{n(r_1 - r)^{p+1}}$$

sağlanır.

*İspat:*

*(i)* $p = 0,1,2,...$ için $e_p(z) = z^p$ olmak üzere $T_{n,p}(z) = W_n(e_p)(z) = W_n(e_p; z)$ ile gösterilirse $T_{n,p}(z) = \sum_{k=0}^{p}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}\left[0, \frac{1}{n}, ...\frac{k}{n}; e_p\right]z^k$ şeklinde derecesi en fazla $p$ olan polinomlar olarak yazılabildiğinden $T_{n,p}(z)$ polinomunun derecesi $\le p$ dir. Lemma 4.2.1 den,

$$W_n(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k W_n(e_k)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_{n,k}(z)$$

olduğu dikkate alınarak her $|z| \le r$ ve $1 \le r < \min\{\frac{n_0}{2}, \frac{1}{A}\}$ olacak şekildeki her $n > n_0$ için

$$\begin{aligned}|W_n(f)(z) - f(z)| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k W_n(e_k)(z) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(z)\right| \\ &= \left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k T_{n,k}(z) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(z)\right|\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \left| T_{n,k}(z) - e_k(z) \right| \tag{4.4}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi $\left| T_{n,k}(z) - e_k(z) \right|$ ifadesi için bir üst sınır bulalım.

Her $z \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}
T_{n,0}(z) &= W_n(e_o)(z) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k} \left[ 0, \frac{1}{n}, ..., \frac{k}{n}; e_o \right] z^k \\
&= \frac{1}{n^0} [0;1] z^0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{n,1}(z) &= W_n(e_1)(z) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k} \left[ 0, \frac{1}{n}, ..., \frac{k}{n}; e_1 \right] z^k \\
&= \left( 1 + \frac{n}{n} \left[ 0, \frac{1}{n}; 1 \right] \right) z \\
&= \left( 1 + \frac{e_1(0)}{\left( 0 - \frac{1}{n} \right)} + \frac{e_1\left(\frac{1}{n}\right)}{\left( \frac{1}{n} - 0 \right)} \right) z \\
&= \left( 1 + \frac{1}{-\frac{1}{n}} + \frac{1}{\frac{1}{n}} \right) z \\
&= (1 - n + n) z \\
&= z
\end{aligned}$$

olur, yani $T_{n,0}(z) = 1$, $T_{n,1}(z) = z$ dir.

Dahası her $z \in \mathbb{C}$ ve $n, p \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki indirgeme bağıntısı elde edilebilir:

$$T_{n,p+1}(z) = \frac{z(1+z)}{n} T'_{n,p}(z) + zT_{n,p}(z) \quad \forall n \in \mathrm{N},\ z \in \mathbb{C},\ k = 0,1,2,... \tag{4.5}$$

Bu ifadenin Eş. 2.1 e denk olduğu açıktır. Yukarıdaki indirgeme formülünden her

$z\in\mathbb{C}$, $n,p\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
T_{n,p}(z)-z^p &= \frac{z(1+z)}{n}T'_{n,p}(z)+zT_{n,p}(z)-z^p \\
&= \frac{z(1+z)}{n}T'_{n,p}(z)+zT_{n,p}(z)-z^p+\frac{z(1+z)}{n}\left(p-1\right)z^{p-2}-\frac{z(1+z)}{n}\left(p-1\right)z^{p-2} \\
&= \frac{z(1+z)}{n}\left[T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right]'+\frac{z(1+z)}{n}\left(p-1\right)z^{p-2}+zT_{n,p}(z)-z^p \\
&= \frac{z(1+z)}{n}\left[T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right]'+z\left[T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right]+\frac{z^{p-1}(1+z)(p-1)}{n}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $r>1$ iken $z\in\overline{D_r}$ için modüle geçilirse:

$$\begin{aligned}
\left|T_{n,p}(z)-z^p\right| &= \left|\frac{z(1+z)}{n}\left[T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right]'+z\left[T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right]+\frac{z^{p-1}(1+z)(p-1)}{n}\right| \\
&\le \left|\frac{z(1+z)}{n}\left[T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right]'\right|+\left|z\left[T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right]\right|+\left|\frac{z^{p-1}(1+z)(p-1)}{n}\right| \\
&\le \frac{r(1+r)}{n}\left|\left[T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right]'\right|+r\left|T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right|+\frac{r^{p-1}(1+r)r(p-1)}{n}
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer yandan $p=0,1,2,...$ için $T_{n,p}(z)=\sum_{k=0}^{p}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}\left[0,\frac{1}{n},...\frac{k}{n};e_p\right]z^k$ şeklinde derecesi $\le p$ olan bir polinom olduğundan Bernstein eşitsizliğinin yukarıdaki eşitsizlikte, $r>1$ ve $|z|\le r$ iken $\left|\left[T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right]'\right|\le\frac{(p-1)}{r}\left\|T_{n,p-1}-e_{p-1}\right\|_r$ şeklinde kullanılmasıyla,

$$\begin{aligned}
\left|T_{n,p}(z)-e_p\left(z\right)\right| &\le \frac{(p-1)(1+r)}{n}\left\|T_{n,p-1}-e_{p-1}\right\|_r+r\left|T_{n,p-1}(z)-e_{p-1}\left(z\right)\right| \\
&\quad+\frac{r^p(1+r)(p-1)}{n} \\
&\le r\left|T_{n,p-1}(z)-e_{p-1}\left(z\right)\right|+\frac{(p-1)2r}{n}\left[\left\|T_{n,p-1}\right\|_r+r^{p-1}\right] \\
&\quad+\frac{2r^p(p-1)}{n}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir. Her $p\in\mathbb{N}$ için Eş. 2.2 kullanılarak

$$T_{n,p}(z)=\sum_{k=0}^{p}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}\left[0,\frac{1}{n},...,\frac{k}{n};e_p\right]z^k$$
$$=\sum_{k=0}^{p}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}\frac{e_p^{(k)}(z)}{k!}z^k$$
$$=\sum_{k=0}^{p}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}\frac{z^k}{k!}\left[p(p-1)...(p-k+1)z^{p-k}\right]$$

elde edilir ve

$$\left\|T_{n,p}\right\|_r\le\sum_{k=0}^{p}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}.\frac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}r^{p-k}.r^k$$
$$=r^p\sum_{k=0}^{p}\frac{n(n+1)...(n+k-1)p(p-1)...(p-k+1)}{n^k k!}$$
$$=r^p\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\frac{n+1}{n}...\frac{n+k-1}{n}$$
$$\le r^p\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}k!$$
$$=r^p\sum_{k=1}^{p}p(p-1)...(p-k+1)$$
$$\le r^p p.p!$$
$$\le r^p(p+1)!$$

bulunur. (4.6) eşitsizliği her $|z|\le r$ için aşağıdaki düzenlemeyle

$$\left|T_{n,p}(z)-e_p(z)\right|\le r\left|T_{n,p-1}(z)-e_{p-1}(z)\right|+\frac{2(p-1)r}{n}\left[r^{p-1}p!+r^{p-1}\right]+\frac{2r^p(p-1)}{n}$$
$$=r\left|T_{n,p-1}(z)-e_{p-1}(z)\right|+\frac{2(p-1)}{n}\left[r^p p!+r^p+r^p\right]$$
$$\le r\left|T_{n,p-1}(z)-e_{p-1}(z)\right|+\frac{2}{n}\left[r^p(p+1)!+r^p(p-1)+r^p(p-1)\right]$$
$$\le r\left|T_{n,p-1}(z)-e_{p-1}(z)\right|+\frac{2}{n}(p+1)!\left[r^p+r^p+r^p\right]$$
$$=r\left|T_{n,p-1}(z)-e_{p-1}(z)\right|+\frac{2}{n}(p+1)!3r^p$$
$$\le r\left|T_{n,p-1}(z)-e_{p-1}(z)\right|+\frac{6r^p(p+1)!}{n}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi $p = 0,1,2,...$ için $\left|T_{n,p-1}(z) - e_{p-1}(z)\right|$ ifadesi için bir üst sınır bulalım.

$p = 2$ için;

$$\begin{aligned}\left|T_{n,2}(z) - z^2\right| &\le r\left|T_{n,1}(z) - z\right| + \frac{6.2!.r^2}{n}\\ &= r\left|z - z\right| + \frac{6.2!.r^2}{n}\\ &= \frac{6.2!.r^2}{n}\end{aligned}$$

$p = 3$ için;

$$\begin{aligned}\left|T_{n,3}(z) - z^3\right| &\le r\left|T_{n,2}(z) - z^2\right| + \frac{6.3!.r^3}{n}\\ &\le r\frac{6.2!.r^2}{n} + \frac{6.3!.r^3}{n}\\ &= \frac{r^{3.6}}{n}(2!+3!)\end{aligned}$$

olur ve bu şekilde devam edilirse $p$ ye göre matematiksel indüksiyonla her $|z| \le r$ için $\left|T_{n,p}(z) - e_p(z)\right| \le \left\|T_{n,p} - e_p\right\|_r$ olduğundan;

$$\begin{aligned}\left\|T_{n,p} - e_p\right\|_r &\le \frac{6r^p}{n}(2!+3!+...+p!) \le \frac{6r^p}{n}\left[\sum_{j=2}^{p} p!\right]\\ &= \frac{6r^p}{n}\left[\sum_{j=2}^{p}(p+1)!\right] \le \frac{6r^p(p+1)!(p-1)}{n}\end{aligned}$$

yazılır. Bunu (4.4) te yerine yazarsak

$$\begin{aligned}\left|W_n(f)(z) - f(z)\right| &\le \sum_{k=0}^{\infty}|c_k|\left|T_{n,k}(z) - e_k(z)\right|\\ &\le \sum_{k=2}^{\infty} M.\frac{A^k}{k!}\frac{6r^k(k+1)!(k-1)}{n}\\ &= \frac{6M}{n}\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)(k-1)(rA)^k\\ &= \frac{C_{r,A,M}}{n}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada her $1 \le r < \frac{1}{A}$ için $C_{r,A,M}(f) = 6M\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)(k-1)(rA)^k < \infty$

dir. Çünkü $\sum_{k=2}^{\infty} u^{k+1}$ serisi ve onun türevi $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)ku^{k-1}$ açık birim diski içeren her kompakt diskte düzgün yakınsaktır.

*(ii)* Kompleks Baskakov operatörlerinin eşanlı yaklaşımı için $1 \le r < r_1 < R$ keyfi sabitler, $n, p \in \mathbb{N}$ için; $\gamma$, $r_1 > r$ yarıçaplı 0 merkezli çemberi göstermek üzere herhangi $|z| \le r$ iken ve $v \in \gamma$ iken $|v - z| \ge r_1 - r$ olduğundan ve Teorem 2.4.4 den $C_{r_1,A,M}(f)$, (i) de verilen özellikleri sağladığında

$$
\begin{aligned}
\left|W_n^{(p)}(f)(z) - f^{(p)}(z)\right| &= \left|\frac{p!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{W_n(f)(v) - f(v)}{(v-z)^{p+1}}\,dv\right| \\
&= \frac{p!}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{W_n(f)(v) - f(v)}{(v-z)^{p+1}}\,dv\right| \\
&\le \frac{p!}{2\pi}\int_\gamma \frac{|W_n(f)(v) - f(v)|}{|v-z|^{p+1}}\,|dv| \\
&\le \frac{p!}{2\pi}\frac{\frac{C_{r_1,A,M}(f)}{n}}{(r_1 - r)^{p+1}}\int_\gamma |dv| \\
&\le \frac{p!}{2\pi}\frac{\frac{C_{r_1,A,M}(f)}{n}}{(r_1 - r)^{p+1}}\,2\pi r_1 \\
&= \frac{C_{r_1,A,M}(f)}{n}\frac{p!\,r_1}{(r_1 - r)^{p+1}}
\end{aligned}
$$

elde edilir, bu da teoremi ispatlar. Böylece eşanlı yakınsamanın üst oranının $\frac{1}{n}$ olduğu görülür.

$W_n$ Baskakov operatörleri için reel durumda Voronovskaja-tip formül (3.6) da verilmişti. Bunlar aşağıdaki gibi (3.8) kompleks Baskakov operatörlerine genişletilebilir ve nicel tahmin de verilebilir.

4.2.3. Teorem [10]**:**

$n_0, R, M, A$ sabitleri ve $f$ fonksiyonu üzerinde Teorem 4.2.2 deki hipotezler geçerli olsun ve $r$ sayısı $1 \le r < \min\left\{\frac{n_0}{2}, \frac{1}{A}\right\}$ koşulunu sağlayan bir sabiti göstersin. Bu durumda her $n > n_0$, $|z| \le r$ için

$$\left| W_n(f)(z) - f(z) - \frac{z(1+z)}{2n} f''(z) \right| \le \frac{16M}{n^2} \sum_{k=3}^{\infty} (rA)^k (k-1)(k-2)^2$$

Voronovskaja-tip sonuç geçerlidir. Burada $rA < 1$ için

$\sum_{k=3}^{\infty} (rA)^k (k-1)(k-2)^2 < \infty$.

*İspat:*

$k = 0,1,...,$ $e_k(z) = z^k$ ve $T_{n,k}(z) = W_n(e_k)(z)$ olsun. Lemma 4.2.1 den $W_n(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_{n,k}(z)$ yazabiliriz, bu ise

$$\begin{aligned}
\left| W_n(f)(z) - f(z) - \frac{z(1+z)}{2n} f''(z) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_{n,k}(z) - \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(z) - \sum_{k=2}^{\infty} c_k \frac{z^{k-1}(1+z)k(k-1)}{2n} \right| \\
&= \left| c_0 T_{n,0}(z) + c_1 T_{n,1}(z) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k T_{n,k}(z) - c_0 e_0(z) - c_1 e_1(z) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=2}^{\infty} c_k e_k(z) - \sum_{k=2}^{\infty} c_k \frac{z^{k-1}(1+z)k(k-1)}{2n} \right| \\
&= \left| 0 + c_1 z + \sum_{k=2}^{\infty} c_k T_{n,k}(z) - 0 - c_1 z - \sum_{k=2}^{\infty} c_k e_k(z) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k=2}^{\infty} c_k \frac{z^{k-1}(1+z)k(k-1)}{2n} \right| \\
&= \left| \sum_{k=2}^{\infty} c_k T_{n,k}(z) - \sum_{k=2}^{\infty} c_k e_k(z) - \sum_{k=2}^{\infty} c_k \frac{z^{k-1}(1+z)k(k-1)}{2n} \right| \\
&\le \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| \left| T_{n,k}(z) - e_k(z) - \frac{z^{k-1}(1+z)k(k-1)}{2n} \right| \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

olması demektir. $E_{k,n}(z) = T_{n,k}(z) - e_k(z) - \frac{z^{k-1}(1+z)k(k-1)}{2n}$ diyelim. Yine Teorem 4.2.2 (i) nin ispatında $T_{n,k}(z)$ tarafından sağlanan indirgeme bağıntısı dikkate alınarak her $k \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $E_{k,n}(z)$ için bir indirgeme bağıntısı yazalım.

$$E_{k,n}(z) = \frac{z(1+z)}{n} T'_{n,k-1}(z) + zT_{n,k-1}(z) - e_k(z) - \frac{z^{k-1}(1+z)k(k-1)}{2n}$$

$$\pm \frac{z(z+1)}{n}\left(e_k(z)\right)' \pm \frac{z(z+1)}{n}\left[\frac{z^{k-2}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n}\right]'$$

$$= \frac{z(1+z)}{n}\left[T_{n,k-1}(z) - z^{k-1}\right]' + z\left[T_{n,k-1}(z) - e_{k-1}(z)\right]$$

$$\pm \frac{z(z+1)}{n}\left[\frac{z^{k-2}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n}\right]' + \frac{z^{k-1}(1+z)(k-1)}{n}$$

$$- \frac{z^{k-1}(1+z)k(k-1)}{n}$$

$$= \frac{z(1+z)}{n}\left[T_{n,k-1}(z) - z^{k-1} - \frac{z^{k-2}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n}\right]'$$

$$+z\left[T_{n,k-1}(z) - e_{k-1}(z) - \frac{z^{k-2}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n}\right]$$

$$+ \frac{z(z+1)}{n}\left[\frac{z^{k-2}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n}\right]' + \frac{z^{k-1}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n}$$

$$+ \frac{z^{k-1}(1+z)}{2n}\left(2k-2-k^2+k\right)$$

$$= \frac{z(1+z)}{n} E'_{k-1,n}(z) + zE_{k,n}(z) + \frac{z^{k-2}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n^2}[(k-2)+z(k-1)]$$

bulunur. Bundan dolayı her $|z| \leq r$, $k \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \left|E_{k,n}(z)\right| &\leq \frac{r(1+r)}{n}\left|E'_{k-1,n}(z)\right| + r\left|E_{k,n}(z)\right| \\ &+ \frac{r^{k-2}(1+r)(k-1)(k-2)}{2n^2}[(k-2)+r(k-1)] \end{aligned} \tag{4.8}$$

$E_{k-1,n}(z)$ polinomu $E_{k-1,n}(z) = T_{n,k-1}(z) - e_{k-1}(z) - \dfrac{z^{k-2}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n}$ şeklinde

olduğundan buradaki $T_{n,k-1}(z)$, $\dfrac{z^{k-2}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n}$ ifadeleri $e_{k-1}(z)$ nin polinomu olduğundan $E_{k-1,n}(z)$ in derecesi $\leq (k-1)$ dir. (4.8) deki türevli ifadeye Bernstein eşitsizliğini uygulamakla

$$\begin{aligned}
\left|E'_{k-1,n}(z)\right| &\leq \frac{k-1}{r}\left\|E_{k-1,n}\right\|_r \\
&= \frac{k-1}{r}\left\|T_{n,k-1} - e_{k-1} + \frac{r^{k-2}(1+r)(k-1)(k-2)}{2n}\right\|_r \\
&\leq \frac{k-1}{r}\left[\left\|T_{n,k-1} - e_{k-1}\right\|_r + \frac{r^{k-2}(1+r)(k-1)(k-2)}{2n}\right] \\
&\leq \frac{k-1}{r}\left[\frac{6r^{k-1}k!(k-2)}{n} + \frac{r^{k-2}(1+r)(k-1)(k-2)}{2n}\right] \\
&= \frac{12r^{k-2}k!\left(k-1\right)(k-2)}{2n} + \frac{r^{k-3}(1+r)(k-1)^2(k-2)}{2n} \\
&= \frac{r^{k-3}(k-1)(k-2)}{2n}\left[12rk! + \left(k-1\right)\left(1+r\right)\right] \\
&\leq \frac{7r^{k-2}k!(k-1)(k-2)}{n}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç (4.8) eşitsizliğinde yerine yazılırsa her $|z| \leq r$ için

$$\begin{aligned}
\left|E_{k,n}(z)\right| &\leq r\left|E_{k-1,n}(z)\right| + \frac{14rk!(k-1)(k-2)}{n^2} \\
&\quad + \frac{r^{k-2}(1+r)(k-1)(k-2)}{2n^2}[(k-2) + r(k-1)] \\
&\leq r\left|E_{k-1,n}(z)\right| + \frac{16r^k k!(k-1)(k-2)}{n^2}
\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$E_{0,n}(z) = T_{n,0}(z) - e_0(z) = 1 - 1 = 0$$

$$E_{1,n}(z) = T_{n,1}(z) - e_1(z) = z - z = 0$$

$$E_{2,n}(z) = T_{n,2}(z) - e_2(z) - \frac{z(1+z)2.1}{2n} = \frac{z}{n} + \frac{n+1}{n}z^2 - z^2 - \frac{z^2}{n} - \frac{z}{n} = 0$$

$E_{0,n}(z) = E_{1,n}(z) = E_{2,n}(z) = 0$ olduğundan $k = 3, 4, ...$ alıp son eşitsizlikte adım adım ilerleyerek

$$\left|E_{k,n}(z)\right| \leq r\left|E_{k-1,n}(z)\right| + \frac{16r^k k!(k-1)(k-2)}{n^2}$$

$k = 3$ için

$$\left|E_{3,n}(z)\right| \le r\left|E_{2,n}(z)\right| + \frac{16r^3.3!.2.1}{n^2} = \frac{16r^3}{n^2}3!.2.1$$

$k=4$ için

$$\left|E_{4,n}(z)\right| \le r\left|E_{3,n}(z)\right| + \frac{16r^4.4!.3.2}{n^2} = \frac{16r^4}{n^2}\left(4!.3.2+3!.2.1\right)$$

$k=5$ için

$$\left|E_{5,n}(z)\right| \le r\left|E_{4,n}(z)\right| + \frac{16r^5.5!.4.3}{n^2} \le \frac{16r^5}{n^2}\left(4!.3.2+3!.2.1\right) + \frac{16r^5}{n^2}5!.4.3$$

$$= \frac{16r^5}{n^2}\left(5!.4.3+4!.3.2+3!.2.1\right)$$

bulunur ve böyle devam edilerek

$$\begin{aligned}\left|E_{k,n}(z)\right| &\le \frac{16r^k}{n^2}\sum_{j=3}^{\infty} j!(j-1)(j-2)\\ &\le \frac{16r^k}{n^2}k!(k-1)(k-2)(k-2)\\ &\le \frac{16r^k}{n^2}k!(k-1)(k-2)^2\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır, bu (4.7) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\left|W_n(f)(z)-f(z)-\frac{z(1+z)}{2n}f''(z)\right| &\le \sum_{k=3}^{\infty}\left|c_k\right|\left|E_{k,n}(z)\right|\\ &\le \sum_{k=3}^{\infty}\left|c_k\right|\frac{16r^k}{n^2}k!(k-1)(k-2)^2\\ &\le \frac{16M}{n^2}\sum_{k=3}^{\infty}(rA)^k(k-1)(k-2)^2\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $rA<1$ için $\sum_{k=3}^{\infty}(rA)^k(k-1)(k-2)^2<\infty$ olduğu açıktır. Bu da teoremi ispatlar.

Aşağıdaki teoremde $W_n(f)(z)-f(z)$ için bir alt sınır bulunacak ve bu Teorem 4.2.2 ile birlikte tam yakınsama oranını elde ederken kullanılacaktır.

4.2.4. Teorem [10]**:**

$f$ fonksiyonu ve $n_0, R, M, A$ sabitleri üzerinde Teorem 4.2.2 de verilen hipotezler geçerli ve $1 \le r < \min\left\{\frac{n_0}{2}, \frac{1}{A}\right\}$ olsun. Eğer $f$ derecesi $\le 1$ olan bir polinom değilse o zaman her $n > n_0$ için alt tahmin

$$\|W_n(f) - f\|_r \ge \frac{C_r(f)}{n}$$

şeklindedir. Burada $C_r(f)$ sadece $f$ ( yani $A, M$ ye ) ve $r$ ye bağlı bir sabittir.

*İspat:*

Her $|z| \le r$ ve $n \ge n_0$ için

$$W_n(f)(z) - f(z) = \left\{W_n(f)(z) - f(z) - \frac{z(1+z)}{2n} f''(z)\right\} + \frac{z(1+z)}{2n} f''(z)$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\frac{z(1+z)}{2} f''(z) + \frac{1}{n}\left[n^2\left(W_n(f)(z) - f(z) - \frac{z(1+z)}{2n} f''(z)\right)\right]\right\}$$

alalım. Bu özdeşliğe,

$$\|F + G\|_r \ge \left|\|F\|_r - \|G\|_r\right| \ge \|F\|_r - \|G\|_r$$

özelliğini uygularsak;

$$\|W_n(f) - f\|_r = \left\|\frac{1}{n}\left\{\frac{z(1+z)}{2} f''(z) + \frac{1}{n}\left[n^2\left(W_n(f)(z) - f(z) - \frac{z(1+z)}{2n} f''(z)\right)\right]\right\}\right\|_r$$

$$\ge \frac{1}{n}\left\{\left\|\frac{e_1(1+e_1)}{2} f''\right\|_r - \frac{1}{n}\left[n^2\left\|W_n(f) - f - \frac{e_1(1+e_1)}{2n} f''\right\|_r\right]\right\}$$

elde edilir.

$D_r$ de $f$ derecesi $\le 1$ olan bir polinom değilse o zaman $|f''(z)| > 0$ olur ve $\left\|\frac{e_1(1+e_1)}{2} f''\right\|_r > 0$ sağlanır. Aslında tersi kabul edilirse; yani her $z \in \overline{D_r}$ için $\frac{z(1+z)}{2} f''(z) = 0$ olur. Bu da her $z \in \overline{D_r} \setminus \{0, -1\}$ için $f''(z) = 0$ olmasını gerektirir. $f$ analitik olduğundan Teorem 2.4.6 (Özdeşlik Teoremi) dan her $z \in D_r$

için $f''(z)=0$ olup $f'(z)=c\left(sabit\right)$ olur. Yani $f$ polinomunun derecesi $\leq 1$ dir. Bu hipotezle çelişir. O halde $\frac{z(1+z)}{2}f''(z)\neq 0$ dır. Yani $\left\|\frac{e_1(1+e_1)}{2}f''\right\|_r>0$ olur. Teorem 4.2.3 ten

$$\left\|W_n(f)-f-\frac{e_1(1+e_1)}{2n}f''\right\|_r\leq\frac{16M}{n^2}\sum_{k=3}^{\infty}(rA)^k(k-1)(k-2)^2 \quad \text{olup}$$

$$n^2\left\|W_n(f)-f-\frac{e_1(1+e_1)}{2n}f''\right\|_r\leq 16M\sum_{k=3}^{\infty}(rA)^k(k-1)(k-2)^2 \quad \text{yazılır.}$$

Burada sadece $f$ ve $r$ ye bağlı öyle bir $n_1>n_0$ sayısı bulunabilir ki her $n\geq n_1$ için

$$\left\|\frac{e_1(1+e_1)}{2}f''\right\|_r-\frac{1}{n}\left[n^2\left\|W_n(f)-f-\frac{e_1(1+e_1)}{2n}f''\right\|_r\right]\geq\frac{1}{2}\left\|\frac{e_1(1+e_1)}{2}f''\right\|_r$$

olması $\forall n\geq n_1$ için

$$\left\|W_n(f)-f\right\|_r\geq\frac{1}{n}\frac{1}{2}\left\|\frac{e_1(1+e_1)}{2}f''\right\|_r$$

olmasını gerektirir.

$n\in\{n_0+1,...,n_1\}$ için $M_{r,n}(f)=n\left\|W_n(f)-f\right\|_r>0$ olmak üzere $\left\|W_n(f)-f\right\|_r\geq\frac{M_{r,n}(f)}{n}$ bulunur. Bu ise her $n>n_0$ için $C_r(f)=\min\left\{M_{r,n_0+1}(f),...,M_{r,n_1-1}(f),\frac{1}{2}\left\|\frac{e_1(1+e_1)}{2}f''\right\|_r\right\}$ olmak üzere $\left\|W_n(f)-f\right\|_r\geq\frac{C_r(f)}{n}$ olmasıdır. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.2 (i) ve Teorem 4.2.4 ten aşağıdaki tam yakınsama oranını veren sonuç elde edilir.

4.2.5. Sonuç [10]**:**

$f$ fonksiyonu üzerindeki ve $n_0,R,M,A$ sabitleri üzerindeki hipotezler Teorem

4.2.2 nin ifadesindeki gibi olsun ve $1 \le r < \min\left\{\frac{n_0}{2}, \frac{1}{A}\right\}$ keyfi sabitleri göstersin. Eğer $f$ derecesi $\le 1$ olan polinom değilse o zaman her $n > n_0$ için

$$\|W_n(f) - f\|_r \sim \frac{1}{n}$$

sağlanır ve bu denklikteki sabitler sadece $f$ ( yani $A, M$ ye) ve $r$ ye bağlıdır.

Benzer düşünce ile eşanlı yaklaşım için de aşağıdaki tam yakınsama oranı elde edilir.

4.2.6. Teorem [10]**:**

Varsayalım ki $f$ fonksiyonu ve $n_0, R, M, A$ sabitleri üzerinde Teorem 4.2.2 deki hipotezler sağlansın ve $1 \le r < r_1 < \min\left\{\frac{n_0}{2}, \frac{1}{A}\right\}, p \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $f$ derecesi $\le \max\{1, p-1\}$ olan bir polinom değilse o zaman her $n > n_0$ için

$$\left\|W_n^{(p)}(f) - f^{(p)}\right\|_r \sim \frac{1}{n}$$

tahmini geçerlidir. Bu denklikteki sabitler sadece $f$ ( böylece $A, M$ ye ) $r, r_1$ ve $p$ ye bağlıdır.

*İspat:*

Teorem 4.2.2 (ii) de $\left\|W_n^{(p)}(f) - f^{(p)}\right\|_r$ için üst yaklaşım oranı elde edilmişti. Şimdi $\left\|W_n^{(p)}(f) - f^{(p)}\right\|_r$ için alt yaklaşım oranı bulmaya çalışalım. $\min\left\{\frac{n_0}{2}, \frac{1}{A}\right\} > r_1 > r \ge 1$ olacak şekilde 0 merkezli $r_1$ yarıçaplı daireyi $\Gamma$ ile gösterelim.

$$|v - z| \ge |v| - |z| = r_1 - r$$

eşitsizliği her $|z| \le r$ ve $v \in \Gamma$ için elde ederiz. Teorem 2.4.4 ten

$$W_n^{(p)}(f)(z) - f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{W_n(f)(\nu) - f(\nu)}{(\nu - z)^{p+1}}\,d\nu \tag{4.9}$$

olduğu elde edilir. Teorem 4.2.2 (ii) şıkkının ispatında olduğu gibi her $v \in \Gamma$ ve $n > n_0$ için

$$W_n(f)(v) - f(v) = \frac{1}{n}\left\{\frac{v(1+v)}{2} f''(v) + \frac{1}{n}\left[n^2\left(W_n(f)(v) - f(v) - \frac{v(1+v)}{2n} f''(v)\right)\right]\right\}$$

olduğu elde edilir. Bunu yukarıdaki Eş. 4.9 da yerine yazıp;

$$\begin{aligned}
W_n^{(p)}(f)(z) - f^{(p)}(z) &= \frac{1}{n}\left\{\frac{p!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{v(1+v)f''(v)}{2(\nu - z)^{p+1}}\,d\nu\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{n}\frac{p!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{n^2\left(W_n(f)(v) - f(v) - \frac{v(1+v)}{2n} f''(v)\right)}{(\nu - z)^{p+1}}\,d\nu\right\} \\
&= \frac{1}{n}\left\{\left[\frac{z(1+z)f''(z)}{2}\right]^{(p)}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{n}\frac{p!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{n^2\left(W_n(f)(v) - f(v) - \frac{v(1+v)}{2n} f''(v)\right)}{(\nu - z)^{p+1}}\,d\nu\right\}
\end{aligned}$$

ve her $n > n_0$ için $\|.\|_r$ normuna geçerek

$$\begin{aligned}
\left\|W_n^{(p)}(f) - f^{(p)}\right\|_r &\ge \frac{1}{n}\left\{\left\|\left[\frac{e_1(1+e_1)}{2} f''\right]^{(p)}\right\|_r\right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{n}\left\|\frac{p!}{2\pi}\int_\Gamma \frac{n^2\left(W_n(f)(v) - f(v) - \frac{v(1+v)}{2n} f''(v)\right)}{(\nu - z)^{p+1}}\,d\nu\right\|_r\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada Teorem 4.2.2 den her $n > n_0$ için

$$\left\|\frac{p!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{n^2\left(W_n(f)(v) - f(v) - \frac{v(1+v)}{2n} f''(v)\right)}{(\nu - z)^{p+1}}\,d\nu\right\|_r$$

$$\leq \frac{p!n^2}{2\pi}\left\| \int_\Gamma \frac{\left(W_n(f)(v)-f(v)-\frac{v(1+v)}{2n}f''(v)\right)}{(v-z)^{p+1}}dv \right\|_{r_1}$$

$$\leq \frac{p!n^2}{2\pi}\int_\Gamma \frac{\left\|\left(W_n(f)(v)-f(v)-\frac{v(1+v)}{2n}f''(v)\right)\right\|_{r_1}}{\left\|(v-z)^{p+1}\right\|_{r_1}}\left\|dv\right\|_{r_1}$$

$$\leq \frac{p!n^2}{2\pi}\frac{1}{(r_1-r)^{p+1}}\left\|W_n(f)-f-\frac{e_1(1+e_1)}{2}f''\right\|_{r_1}\int_\Gamma \left\|dv\right\|_{r_1}$$

$$\leq \frac{p!}{2\pi}\frac{2\pi r_1 n^2}{(r_1-r)^{p+1}}\left\|W_n(f)-f-\frac{e_1(1+e_1)}{2}f''\right\|_{r_1}$$

$$\leq 16M\sum_{k=3}^{\infty}(r_1A)^k(k-1)(k-2)^2\frac{p!r_1}{(r_1-r)^{p+1}}$$

bulunur. Fakat $f$ üzerindeki hipotezden $\left|f''(z)\right|>0$ olduğundan $\left\|\left[\frac{e_1(1+e_1)}{2}f''\right]^{(p)}\right\|_r>0$ olduğu görülür. Aslında bu tersini varsayarak olmayana ergi yöntemiyle de gösterilebilir. Yani $\frac{z(1+z)}{2}f''(z)$, derecesi $\leq p-1$ olan bir polinom olsun. Şimdi, eğer $p=1$ ve $p=2$ ise o zaman $f$ nin analitikliğinden $f$ polinomunun derecesi $\leq 1=\max\{1,p-1\}$ olur, bu da hipotezle çelişir. Eğer $p>2$ ise o zaman $f$ nin analitikliği $f$ polinomunun derecesinin $\leq p-1=\max\{1,p-1\}$ olmasını gerektirir ki bu yine hipotezle çelişir. Böylece

$$\left\|W_n^{(p)}(f)-f^{(p)}\right\|_r \geq \frac{1}{n}\left\{\left\|\left[\frac{e_1(1+e_1)}{2}f''\right]^{(p)}\right\|_r\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n}\left\|\frac{p!}{2\pi}\int_\Gamma \frac{n^2\left(W_n(f)(v)-f(v)-\frac{v(1+v)}{2n}f''(v)\right)}{(v-z)^{p+1}}dv\right\|_r\right\}$$

$$\geq \frac{C_r(f)}{n}-\frac{1}{n}\frac{16M}{n}\sum_{k=3}^{\infty}(r_1A)^k(k-1)(k-2)^2\frac{p!r_1}{(r_1-r)^{p+1}}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{ C_r\left( f \right) - \frac{16M}{n} \sum_{k=3}^{\infty} (r_1 A)^k (k-1)(k-2)^2 \frac{p!r_1}{(r_1 - r)^{p+1}} \right\}$$

$$= \frac{C_r^{'}\left( f \right)}{n}$$

olur. Sonuç olarak eşanlı yaklaşım için alt yaklaşım oranı bulmuş oluruz. Üst oran Teorem 4.2.2 (ii) de hesaplanmıştı. O halde eşanlı yaklaşım için

$$\left\| W_n^{(p)}(f) - f^{(p)} \right\|_r \sim \frac{1}{n}$$

olduğu görülür.

# 5. $Z_n$ KOMPLEKS BASKAKOV OPERATÖRLERİ

Bu kısımda önce (3.7) ile verilen kompleks Baskakov operatörlerinin varlığı ve analitikliği için yeter koşullar verilecek daha sonra tam yakınsama oranı elde edilecektir.

## 5.1. $Z_n(f)$ nin Varlığı ve Analitikliği İçin Yeter Koşullar

Kompleks $Z_n$ operatörünün varlığı için yeter koşullar aşağıda belirtilen şekildedir: $z \in \mathbb{C}$ sayıları için $\operatorname{Re} z > 0$, $|z| \leq r$ sağlansın ve her $x \in [0,\infty)$ iken $|f(x)| \leq M$ olsun. O halde $1+z \neq 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} |Z_n(f)(z)| &\leq M\,|1+z|^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{|z|}{|1+z|}\right)^k \\ &\leq M\,|1+z|^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho^k \end{aligned}$$

olup burada $\rho = \sqrt{\dfrac{r^2}{1+r^2}}$ olduğunda, $h(t) = \dfrac{t}{1+t}$ fonksiyonunun $t \geq 0$ için artan olduğu dikkate alınarak $z = x+iy$ ile $x \geq 0$ ve $\sqrt{x^2+y^2} \leq r$ için

$$\left(\frac{|z|}{1+|z|}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{1+2x+x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \leq \frac{r^2}{1+r^2}$$

olduğu elde edilir.

$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \rho^k := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serilerine oran testi uygulanırsa her sabit $n \in \mathbb{N}$ için öyle bir $k_0$ sayısı bulunur ki her $k \geq k_0$ için $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \rho \dfrac{k+n}{k+1} < \rho' < 1$ olduğu elde edilir. Yani $|Z_n(f)(z)|$ yi belirleyen seri mutlak yakınsaktır; böylece $Z_n(f)$ nin varlığı ve $z$ 'nin bir analitik fonksiyonu olduğu görülür.

5.1.1. Teorem [10]**:**

$f$ fonksiyonu $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$ şeklinde tanımlı ve $[0,\infty)$ da üstel büyüyen bir fonksiyon olsun. Yani her $x\in[0,\infty)$ için $|f(x)|\le Me^{Ax}$ olacak biçimde $M>0$ ve $A\ge 0$ sabitleri bulunsun. Bu durumda

*(i)* Herhangi $n\in\mathbb{N}$ için $0<\rho<1$ olacak şekilde n ye bağlı öyle bir $\rho$ vardır ki $Z_n(f)(z)$, $\overline{D}_{\frac{\rho}{2}}$ kompakt diskinde iyi tanımlı ve analitiktir.

*(ii)* $r\ge 1$ sabit bir sayı olmak üzere $n_0=\left[\dfrac{2A}{\ln\left(1+1/r^2\right)}\right]+2$ olarak belirtilsin. Her $n\ge n_0$ için $Z_n(f)(z)$, $\overline{D}_r^{+}=\{z\in C:\ |z|\le r, \operatorname{Re} z\ge 0\}$ kompakt yarı diskinde analitiktir.

*İspat:*

*(i)* Eğer $0<\rho<1$ ise o zaman $z\in\overline{D}_{\frac{\rho}{2}}$ için $1+z\ne 0$ olur. Bu nedenle $\overline{D}_{\frac{\rho}{2}}$ dairesi içinde $(1+z)^{-n}$ analitiktir. O halde geriye operatörün ifadesinde yer alan $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\dfrac{z}{1+z}\right)^k f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ toplamının yakınsak olduğunu göstermek kalır. Bu toplamın yakınsak olduğu gösterilirse bununla temsil edilen $Z_n(f)(z)$ operatörünün analitik olduğu söylenebilir.

$$|Z_n(f)(z)|=\left|(1+z)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{z}{1+z}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$
$$\le M\,|1+z|^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{|z|}{|1+z|}\right)^k e^{\frac{ak}{n}}$$

olur. $h(t)=\dfrac{t}{1-\rho+t}$ ise $h'(t)=\dfrac{1-\rho+t-t}{(1-\rho+t)^2}=\dfrac{1-\rho}{(1-\rho+t)^2}\ge 0$, $\rho<1$, $t\ge 0$ için $h(t)$

fonksiyonu artan ve $z = x+iy$ için $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \dfrac{\rho}{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\left(\frac{|z|}{|1+z|}\right)^2 &= \frac{x^2+y^2}{1+2x+\left(x^2+y^2\right)} \\ &= \frac{x^2+y^2}{1-\rho+(\rho+2x)+\left(x^2+y^2\right)} \\ &\leq \frac{x^2+y^2}{1-\rho+\left(x^2+y^2\right)} \\ &\leq \frac{\left(\rho/2\right)^2}{1-\rho+\left(\rho/2\right)^2}\end{aligned}$$

olur ve $\eta := \sqrt{\dfrac{\left(\rho/2\right)^2}{1-\rho+\left(\rho/2\right)^2}} = \dfrac{\rho}{2-\rho} < 1$ tanımından

$$\left|Z_n(f)(z)\right| \leq M\,|1+z|^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \eta^k e^{\frac{ak}{n}} := M\,|1+z|^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

olduğu elde edilir. Son seriye oran testi uygulanırsa; $a_k = \dbinom{n+k-1}{k} \eta^k e^{\frac{ak}{n}}$ için

$\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \eta e^{\frac{a}{n}} \dfrac{k+n}{k+1}$ elde edilir. $\eta = \sqrt{\dfrac{\left(\rho/2\right)^2}{1-\rho+\left(\rho/2\right)^2}}$ tanımından $\rho \to 0$ iken $\eta \to 0$

olur ve sabit bir $n$ için $\rho$ öyle küçük seçilebilir ki $\beta := \eta e^{\frac{a}{n}} n < 1$ dir. Her $k \geq 0$ için $\dfrac{k+n}{k+1} = 1 + \dfrac{n-1}{k+1} \leq n$ olduğu açıktır. O halde her $k \geq 0$ için $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \eta e^{\frac{a}{n}} \dfrac{k+n}{k+1} \leq \eta e^{\frac{a}{n}} n = \beta < 1$ olur. Bu da oran testinden $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisinin yakınsak olması anlamına gelir. Öyleyse $M\,|1+z|^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ yakınsak olur ve bu nedenle $Z_n(f)(z)$ fonksiyonunu temsil eden seri mutlak yakınsak dolayısıyla yakınsaktır. O halde $Z_n(f)(z)$ yukarıdaki gibi seçilen (n ye bağlı) yeterince küçük $\rho$ için $\overline{D}_{\frac{\rho}{2}}$ de analitiktir.

*(ii)* $\overline{D_r^+}=\{z\in \mathbb{C}:\ |z|\le r,\ \operatorname{Re} z\ge 0\}$, $r\ge 1$ olduğundan $z\in \overline{D_r^+}$ için $1+z\ne 0$ olduğu açıktır. Bu nedenle $(1+z)^{-n}$, $\overline{D_r^+}$ da analitiktir. Bunun nedeni yukarıdaki (i) şıkkındaki gibidir. Öyleyse $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{z}{1+z}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right)$ toplamının $\overline{D_r^+}$ da yakınsak olduğu gösterilirse bununla temsil edilen $Z_n(f)(z)$ operatörünün analitik olduğu söylenebilir.

Her $z\in \overline{D_r^+}$ için

$$|Z_n(f)(z)|=\left|(1+z)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{z}{1+z}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

$$\le M\,|1+z|^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{|z|}{|1+z|}\right)^k e^{\frac{ak}{n}}$$

olup burada $\eta=\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}$ olduğunda $h(t)=\frac{t}{1+t}$ fonksiyonu $t\ge 0$ için artan olduğunda $z=x+iy$ ile $x\ge 0$ ve $\sqrt{x^2+y^2}\le r$ için

$$\left(\frac{|z|}{|1+z|}\right)^2=\frac{x^2+y^2}{1+2x+\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\le\frac{x^2+y^2}{1+\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\le\frac{r^2}{1+r^2}$$

elde edilir. Her $z\in \overline{D_r^+}$ için

$$|Z_n(f)(z)|\le M\,|1+z|^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\eta^k e^{\frac{Ak}{n}}$$

$$=M\,|1+z|^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left[\eta e^{\frac{A}{n}}\right]^k$$

olduğu elde edilir. Hipotezde $n_0=\left[\frac{2A}{\ln\left(1+1/r^2\right)}\right]+2$ idi, buradan her $n>n_0$ için

$C=\dfrac{2A}{\ln\left(1+1/r^2\right)}$, $n_1=\left[C\right]+1\geq C$ olur. $n\geq n_0>n_1$ için

$$\eta e^{\frac{A}{n}}\leq \eta e^{\frac{A}{n_0}}<\eta e^{\frac{A}{n_1}}\leq \eta e^{\frac{A}{C}}=1$$

$$\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}e^{\frac{A}{n}}\leq \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}e^{\frac{A}{\frac{2A}{\ln\left(1+\frac{1}{r^2}\right)}+2}}<\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}e^{\left(\ln\left(1+\frac{1}{r^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\frac{\sqrt{1+r^2}}{r}=1$$

olduğu elde edilir. Her $n>n_0$ için $\gamma=\eta e^{\frac{A}{n_0}}<1$ olarak gösterilirse

$$\left|Z_n(f)(z)\right|\leq M\left|1+z\right|^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left[\eta e^{\frac{A}{n}}\right]^k$$

$$\leq M\left|1+z\right|^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\gamma^k:=M\left|1+z\right|^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}a_k$$

bulunur. $n>n_0$ için son seriye oran testi uygulamakla $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\gamma\dfrac{k+n}{k+1}$ elde edilir. Buradan öyle bir $k_0$ vardır ki her $k\geq k_0$ için $\dfrac{k+n}{k+1}<2-\gamma$ olur ve dolayısıyla $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}=\gamma\dfrac{k+n}{k+1}<\gamma\left(2-\gamma\right)<1$ bulunur. Bu ise $\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ serisinin yakınsak olması demektir ve buradan $Z_n(f)(z)$ nin analitikliği elde edilir.

Şimdi $Z_n(f)(z)$ nin bölünmüş farklar yardımı ile bir gösterimini verelim.

5.1.2. Sonuç [10]**:**

*(i)* Kabul edelim ki $f$ fonksiyonu Teorem 5.1.1 deki hipotezleri sağlasın. O zaman herhangi $n\in\mathbb{N}$ için $0<\rho<1$ olacak şekilde n ye bağlı yeterince küçük öyle bir $\rho$ vardır ki her $z\in\overline{D_{\frac{\rho}{2}}}$ için

$$Z_n(f)(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{n(n+1)...(n+j-1)}{n^j}[0,\frac{1}{n},...,\frac{j}{n};f]z^j$$

sağlanır.

*(ii)* $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olan bir sabit olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < \rho < 1$ olacak şekilde n ye bağlı yeterince küçük öyle bir $\rho$ vardır ki her $z \in \overline{D_{\frac{\rho}{2}}}$ için

$$Z_n(e_p)(z) = \sum_{k=0}^{p} \frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}[0, \frac{1}{n}, ..., \frac{k}{n}; e_p] z^k$$

gösterimi sağlanır.

*(iii)* $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $r \geq 1$ olan sabitler ve $n_0 = \left[ \frac{2}{\ln\left(1 + 1/r^2\right)} \right] + 2$ şeklinde olsun.

Her $n > n_0$ için ve $z \in \overline{D_r^+}$ için

$$Z_n(e_p)(z) = \sum_{k=0}^{p} \frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}[0, \frac{1}{n}, ..., \frac{k}{n}; e_p] z^k$$

sağlanır.

*İspat:*

*(i)* $n$ sabiti için $g_{k,n}(z) = (1+z)^{-n-k}$, $k = 0,1,2,...$ olarak tanımlansın. $\rho < 1$ olduğundan $g_{k,n}$ , $\overline{D_{\frac{\rho}{2}}}$ de analitiktir ve bu nedenle onun $z = 0$ da Maclaurin açılımı yazılabilir. Bunun için

$$\left((1+z)^{-n-k}\right)'_{(0)} = \left(-n-k\right)(1+z)^{-n-k}_{(0)} = \left(-1\right)\left(n+k\right)$$

$$\left((1+z)^{-n-k}\right)''_{(0)} = \left(-n-k\right)\left(-n-k-1\right)(1+z)^{-n-k-2}_{(0)} = \left(-1\right)^2\left(n+k\right)\left(n+k+1\right)$$

$$...$$

$$\left((1+z)^{-n-k}\right)^{(p)}_{(0)} = \left(-1\right)^p\left(n+k\right)\left(n+k+1\right)...\left(n+k+p-1\right)(1+z)^{-n-k-p}_{(0)}$$

$$= \left(-1\right)^p \frac{\left(n+k-1+p\right)!}{\left(n+k-1\right)!}$$

olup buradan

$$g_{k,n}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{g_{k,n}^{(p)}(0)}{p!} z^p = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(n+k-1+p)!}{(n+k-1)!\,p!} z^p$$

yazılabilir. Bu $Z_n(f)(z)$ nin ifadesinde yerine koyulursa

$$Z_n(f)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}z^k f\left(\frac{k}{n}\right)\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{(n+k-1+p)!}{(n+k-1)!\,p!}z^p$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}z^{k+p}\left[f\left(\frac{k}{n}\right)(-1)^p\frac{(n+k-1+p)!}{(n+k-1)!\,p!}\right]$$

$$:=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}z^{k+p}A_{k.p}=\sum_{j=0}^{\infty}z^jB_j$$

olur. Burada

$$B_j=\sum_{v=0}^{j}A_{v,\,j-v}$$

$$=\sum_{v=0}^{j}f\left(\frac{v}{n}\right)(-1)^{j-v}\frac{(n+j-1)!}{(n-1)!\,v!\big(j-v\big)!}$$

$$=\frac{(n+j-1)!}{(n-1)!\,n^j}\sum_{v=0}^{j}f\left(\frac{v}{n}\right)(-1)^{j-v}\frac{n^j}{v!\big(j-v\big)!}$$

$$=\frac{(n+j-1)!}{(n-1)!\,n^j}\left[0,\frac{1}{n},\ldots,\frac{j}{n};f\right]$$

olur ki bu da ilk şıkkı ispatlar.

*(ii)* $A=1$ olmak üzere her bir $e_p$ Teorem 5.2.1 in hipotezlerini sağladığından (i) şıkkından (ii) şıkkı elde edilir.

Gerçekten $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ bir sabit olmak üzere her $n\in\mathbb{N}$ için öyle bir $0<\rho<1$ vardır ki her $z\in\overline{D_{\frac{\rho}{2}}}$ için

$$Z_n(e_p)(z)=(1+z)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{z}{1+z}\right)^k e_p\left(\frac{k}{n}\right)$$

olur ve $(1+z)^{-n-k}$, $\overline{D_{\frac{\rho}{2}}}$ de analitiktir olduğundan (i) şıkkında olduğu gibi $z=0$ daki Maclaurin açılımı yazılırsa

$$Z_n(e_p)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}z^k e_p\left(\frac{k}{n}\right)\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{(n+k-1+p)!}{(n+k-1)!\,p!}z^p$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}z^{k+p}e_p\left(\frac{k}{n}\right)(-1)^p\frac{(n+k-1+p)!}{(n+k-1)!\,p!}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}z^{k+p}A_{k.p}=\sum_{j=0}^{\infty}z^jB_j$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
B_j &= \sum_{v=0}^{j} A_{v,\,j-v} \\
&= \sum_{v=0}^{j} e_p\left(\frac{v}{n}\right)(-1)^{j-v}\,\frac{(n+j-1)!}{(n-1)!\,v!\left(j-v\right)!} \\
&= \frac{(n+j-1)!}{(n-1)!\,n^j}\sum_{v=0}^{j} e_p\left(\frac{v}{n}\right)(-1)^{j-v}\,\frac{n^j}{v!\left(j-v\right)!} \\
&= \frac{(n+j-1)!}{(n-1)!\,n^j}\left[0,\frac{1}{n},\ldots,\frac{j}{n};e_p\right]
\end{aligned}$$

şeklindedir.

*(iii)* $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ve $r\geq 1$ olan bir sabitler ve $n_0=\left[\dfrac{2}{\ln\left(1+1/r^2\right)}\right]+2$ olmak üzere her $n\geq n_0$ için ve $z\in\overline{D_r^+}$ için $Z_n(e_p)(z)$ fonksiyonu Teorem 5.2.1 den analitiktir. Diğer yandan yukarıdaki (ii) şıkkından $Z_n(e_p)(z)$ fonksiyonu $\overline{D_{\frac{\rho}{2}}}$ diskinde derecesi $\leq p$ olan bir polinomdur. Yani $Z_n(e_p)(z)$ nin $\overline{D_{\frac{\rho}{2}}}$ de $\left(p+1\right)$. dereceden türevi sıfırdır. Analitik fonksiyonlar üzerindeki Teorem 2.4.6 dan açıktır ki $Z_n(e_p)(z)$ nin $\left(p+1\right)$. dereceden türevi $\overline{D_r^+}$ da sıfırdır. Yani $Z_n(e_p)(z)$ nin $\overline{D_r^+}$ da derecesi $\leq p$ dir. $Z_n(f)(z)$ nin analitik olarak $\overline{D_{\frac{\rho}{2}}}$ den $\overline{D_r^+}$ ya genişletilebilir olduğundan her $z\in\overline{D_r^+}$ için $Z_n(e_p)(z)=\sum_{k=0}^{p}\dfrac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{n^k}[0,\frac{1}{n},\ldots,\frac{k}{n};e_p]z^k$ şeklinde olmalıdır.

Şimdi $Z_n$ operatörlerinin yaklaşım özelliklerini inceleyelim.

## 5.2. $Z_n$ Kompleks Baskakov Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda $Z_n(f)(z)$ nin $f(z)$ fonksiyonuna yakınsama oranı ve Voronovskaja-tip asimptotik yaklaşım oranları sayısal tahminle verilecektir. Bu iki sonuç tam yakınsama oranını elde etmede kullanılacaktır.

5.2.1. Teorem [10]**:**

$R>1$ için $f:[R,+\infty)\cup\overline{D}_R\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $\overline{D}_R$ de analitik her $z\in D_R$ için $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$ olsun. Aynı zamanda $M>0$ ve $A\in\left(\frac{1}{R},1\right)$ sayıları bulunsun ki her $k=0,1,...$ için $|c_k|\le M\,\frac{A^k}{k!}$ sağlansın. ( Bu eşitsizlik her $z\in\overline{D}_r^{+}$ için $|f(z)|\le Me^{A|z|}$ olmasını gerektirir.) Buna ek olarak $f$, $[0,\infty)$ aralığında üstel büyüyen olsun.( Kolaylık için üstel büyümedeki üstün yine A olduğunu kabul edelim.) O zaman kompakt $\overline{D}_r^{+}$ yarı diskinde $1\le r<R$ ve $n_0=\left[\frac{2A}{\ln\left(1+1/r^2\right)}\right]+2$ için $n\ge n_0$ iken $Z_n(f)(z)$ aşağıdakileri sağlar:

*(i)* $|Z_n(f)(z)-f(z)|\le\frac{C_{r,A,M}(f)}{n}$ ve burada

$C_{r,A,M}(f)=6M\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)(k+2)\left(rA\right)^k<\infty$ .

*(ii)* Her $n>n_0$, $|z|\le r$ için Voronovskaja-tip sonuç

$$\left|Z_n(f)(z)-f(z)-\frac{z(1+z)}{2n}f''(z)\right|\le\frac{16M}{n^2}\sum_{k=3}^{\infty}(rA)^k(k-1)(k-2)^2$$

geçerlidir. Burada $rA<1$ için $\sum_{k=3}^{\infty}(rA)^k(k-1)(k-2)^2<\infty$.

*(iii)* Eğer $f$ derecesi $\le 1$ olan polinom değilse o zaman her $n>n_0$ için

$$\|Z_n(f)-f\|_r\sim\frac{1}{n}$$

tahmini vardır.

*İspat:*

*(i)* Sonuç 5.1.2 (iii) den $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $r \geq 1$ olan sabitler ve $n_0 = \left[ \frac{2}{\ln\left(1+1/r^2\right)} \right] + 2$ olarak alınırsa her $n > n_0$ ve $z \in \overline{D_r^+}$ için

$$Z_n(e_p)(z) = \sum_{k=0}^{p} \frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k} [0, \frac{1}{n}, ..., \frac{k}{n}; e_p] z^k$$

olarak yazılabileceği açıktır. (i) deki üst tahmini göstermek için Teorem 4.2.2 deki işlemleri $\overline{D_r^+} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq r, \operatorname{Re} z \geq 0 \}$ yarı diskindeki $z$ ler için tekrarlamak yeterlidir. Önce her $z \in \overline{D_r^+}$ ve $n \geq n_0$ için $Z_n(f)(z)$ nin

$$Z_n(f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k Z_n(e_k)(z) \tag{5.1}$$

şeklinde yazılabileceğini ispatlayalım. Bunun için herhangi $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$f_m(z) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{m} c_j z^j \ , z \in \overline{D_r^+} & \text{ise;} \\ f(x) \ , x \in (r, +\infty) & \text{ise;} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $f$ nin katsayıları için $M > 0$ ve $A \in \left( \frac{1}{R}, 1 \right)$ olmak üzere her $k = 0,1,...$ için $|c_k| \leq M \frac{A^k}{k!}$ demiştik. $f$ nin katsayıları üzerindeki bu hipotezden her $m \in \mathbb{N}$ için;

$$|f_m(x)| = \left| \sum_{j=0}^{m} c_j x^j \right| \leq \sum_{j=0}^{m} |c_j| x^j \leq \sum_{j=0}^{m} M \frac{A^j}{j!} x^j = M \sum_{j=0}^{m} \frac{(Ax)^j}{j!} \leq M e^{Ax}$$

olur. Bu eşitsizlik $x \in [0, r]$ ve $x \in [r, \infty)$ için geçerlidir. O halde her $x \in [0, \infty)$ için $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$|f_m(x)| \leq M e^{Ax}$

elde edilir. Teorem 5.2.1 (ii) den $Z_n(f_m)(z)$ ( $f_m$ üstel büyüyen ve sınırlı olduğundan hipotezi sağlar ) $\overline{D_r^+}$ kompakt yarı diskinde her $m \in \mathbb{N}$ ve $n \geq n_0$ için iyi tanımlı ve analitiktir. $z \in \overline{D_r^+}$ ise $f_{m,k}(z) = c_k e_k(z)$ ve $x \in (r, \infty)$ ise $f_{m,k}(x) = \dfrac{f(x)}{m+1}$ şeklinde ifade edilen $f_{m,k}$ fonksiyonu $[0,\infty)$ da üstel büyüyendir (üstel büyümenin derecesi $A$) ve $f_m(z) = \sum_{k=0}^{m} f_{m,k}(z)$ dir. $Z_n$ nin lineerliğinden

$$\begin{aligned}
Z_n(f_m)(z) &= (1+z)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{z}{1+z}\right)^k f_m\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= (1+z)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{z}{1+z}\right)^k \sum_{k=0}^{m} c_k \left(\frac{k}{n}\right)^k \\
&= (1+z)^{-n} \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{z}{1+z}\right)^k c_k \left(\frac{k}{n}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{m} c_k \left[ (1+z)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \left(\frac{z}{1+z}\right)^k e_k\left(\frac{k}{n}\right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{m} c_k Z_n(e_k)(z), \ z \in \overline{D_r^+}
\end{aligned}$$

elde ederiz, buradan herhangi sabit $n \geq n_0$ ve $z \in \overline{D_r^+}$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} Z_n(f_m)(z) &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} c_k Z_n(e_k)(z) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{z^k}{(1+z)^{n+k}} e_k\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{z^k}{(1+z)^{n+k}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= Z_n(f)(z)
\end{aligned}$$

olduğunu göstermek ispat için yeterlidir. Bunu şu şekilde gösterebiliriz;

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \|f_m - f\|_r &= \lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{j=0}^{m} c_j z^j - \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \right\|_r, \ z \in \overline{D_r^+} \\
&= \left\| \lim_{m\to\infty} \sum_{j=0}^{m} c_j z^j - \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \right\|_r \\
&= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j - \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \right\|_r \to 0
\end{aligned}$$

olur. $\|.\|_{B[0,\infty)}$, $B[0,\infty)$ daki ($B[0,\infty)$, $[0,\infty)$ daki tüm reel sınırlı fonksiyonlar uzayını göstermek üzere) düzgün normu göstermek üzere, $x \in [r,\infty)$ için $f_m(x) = f(x)$ olduğundan $B[0,\infty)$ daki $\|f_m - f\|_{B[0,\infty)}$ normu $\|f_m - f\|_r$ normundan daha küçük veya eşit kalır, yani

$$\|f_m - f\|_{B[0,\infty)} \leq \|f_m - f\|_r$$

dir. Her $z \in \overline{D}_r^+$ için

$$\begin{aligned}
\left|Z_n(f_m)(z) - Z_n(f)(z)\right| &= \left|(1+z)^{-n}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{j}\left(\frac{z}{1+z}\right)^j f_m\left(\frac{k}{n}\right)\right. \\
&\quad \left. -(1+z)^{-n}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{j}\left(\frac{z}{1+z}\right)^j f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\
&= \left|(1+z)^{-n}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{j}\left(\frac{z}{1+z}\right)^j \left(f_m\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \\
&\leq |1+z|^{-n}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{j}\left(\frac{|z|}{|1+z|}\right)^j \|f_m - f\|_{B[0,\infty)} \\
&\leq |1+z|^{-n}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{j}\left(\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\right)^j \|f_m - f\|_{B[0,\infty)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Burada son seriye oran testi uygulamakla $\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{j}\left(\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\right)^j$ serisinin yakınsak olduğu görülür. Yani

$a_j = \binom{n+j-1}{j}\left(\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\right)^j$ için $\dfrac{a_{j+1}}{a_j} = \dfrac{n+j}{j+1}\dfrac{r}{\sqrt{1+r^2}}$

olur ve buradan

$$\lim_{j\to\infty}\frac{a_{j+1}}{a_j} = \lim_{j\to\infty}\frac{n+j}{j+1}\frac{r}{\sqrt{1+r^2}} < 1$$

elde edilir, yani seri yakınsaktır. O halde $\lim\limits_{m\to\infty}\|f_m - f\|_r \to 0$ olduğundan ve $\|f_m - f\|_{B[0,\infty)} \leq \|f_m - f\|_r$ şeklinde iken $\|f_m - f\|_{B[0,\infty)} \to 0$ olur. Buradan da yukarıda gösterilen serinin yakınsaklığından ve $(1+z)^{-n}$ nin analitikliğinden

$$\left|Z_n\left(f_m\right)\left(z\right)-Z_n\left(f\right)\left(z\right)\right|\leq\left|1+z\right|^{-n}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{j}\left(\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\right)^j\left\|f_m-f\right\|_{B[0,\infty)}$$

ifadesi göz önünde bulundurulursa $\lim_{m\to\infty}Z_n\left(f_m\right)\left(z\right)=Z_n\left(f\right)\left(z\right)$ limitin mevcut olduğunu görülür. $Z_n(f_m)(z)$ sınırlı olduğundan bu durumda Vitali teoreminden $Z_n(f)(z)$ ye düzgün yakınsar.

$p=0,1,2,...$ olmak üzere $e_p(z)=z^p$ için $T_{n,p}(z)=Z_n(e_p)(z)=Z_n(e_p;z)$ ile gösterilince $T_{n,p}(z)$ polinomunun derecesinin $\leq p$ olduğu açıktır. Eş. 5.1 in ispatından

$$Z_n(f)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kZ_n(e_k)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kT_{n,k}(z)$$

olarak yazılabileceği biliniyor. Burada $c_k$ üzerindeki hipotezden, her $\left|z\right|\leq r$ ve $1\leq r<\min\{\frac{n_0}{2},\frac{1}{A}\}$ olacak şekildeki $n>n_0$ için

$$\begin{aligned}\left|Z_n(f)(z)-f(z)\right|&=\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_kZ_n\left(e_k\right)(z)-\sum_{k=0}^{\infty}c_ke_k(z)\right|\\&=\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_kT_{n,k}(z)-\sum_{k=0}^{\infty}c_ke_k(z)\right|\\&\leq\sum_{k=0}^{\infty}\left|c_k\right|\left|T_{n,k}(z)-e_k(z)\right|\end{aligned}$$

olur. O halde $\left|T_{n,k}(z)-e_k(z)\right|$ için bir üst sınır bulalım. Her $n>n_0$ ve $z\in\overline{D_r^+}$ için

$$Z_n(e_p)(z)=\sum_{k=0}^{p}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}[0,\frac{1}{n},...,\frac{k}{n};e_p]z^k$$

olarak yazılabildiğinden,

$$\begin{aligned}T_{n,0}(z)&=Z_n(e_o)(z)\\&=\sum_{k=0}^{p}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}\left[0,\frac{1}{n},...,\frac{k}{n};e_o\right]z^k\\&=\frac{1}{n^0}\left[0;1\right]z^0\\&=1\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_{n,1}(z) &= Z_n(e_1)(z) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}\left[0,\frac{1}{n},...,\frac{k}{n};e_1\right] z^k \\
&= \left(1+\frac{n}{n}\left[0,\frac{1}{n};1\right]\right) z \\
&= \left(1+\frac{e_1(0)}{\left(0-\frac{1}{n}\right)}+\frac{e_1\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}-0\right)}\right) z \\
&= \left(1+\frac{1}{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{\frac{1}{n}}\right) z \\
&= (1-n+n)\, z \\
&= z
\end{aligned}
$$

$T_{n,0}(z)=1$, $T_{n,1}(z)=z$ dir.

Dahası her $z\in\mathbb{C}$ ve $n,p\in\mathbb{N}$ için Eş. 4.4 teki indirgeme bağıntısı elde edebilir. Bu indirgeme formülünden her $z\in\mathbb{C}$, $n,p\in\mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
T_{n,p}(z)-z^p &= \frac{z(1+z)}{n}T'_{n,p}(z)+zT_{n,p}(z)-z^p \\
&= \frac{z(1+z)}{n}T'_{n,p}(z)+zT_{n,p}(z)-z^p+\frac{z(1+z)}{n}(p-1)\,z^{p-2}-\frac{z(1+z)}{n}(p-1)\,z^{p-2} \\
&= \frac{z(1+z)}{n}\left[T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right]'+\frac{z(1+z)}{n}(p-1)\,z^{p-2}+zT_{n,p}(z)-z^p \\
&= \frac{z(1+z)}{n}\left[T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right]'+z\left[T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right]+\frac{z^{p-1}(1+z)(p-1)}{n}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $\overline{D}_r=\{z\in\mathbb{C}: |z|\le r\}$ de $r>1$ iken $|z|\le r$ için modüle geçelim:

$$
\begin{aligned}
\left|T_{n,p}(z)-z^p\right| &= \left|\frac{z(1+z)}{n}\left[T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right]'+z\left[T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right]+\frac{z^{p-1}(1+z)(p-1)}{n}\right| \\
&\le \left|\frac{z(1+z)}{n}\left[T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right]'\right|+\left|z\left[T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right]\right|+\left|\frac{z^{p-1}(1+z)(p-1)}{n}\right| \\
&\le \frac{r(1+r)}{n}\left|\left[T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right]'\right|+r\left|T_{n,p-1}(z)-z^{p-1}\right|+\frac{r^{p-1}(1+r)r(p-1)}{n}
\end{aligned}
$$

Şimdi $\overline{D}_r=\{z\in\mathbb{C}: |z|\le r\}$ de Teorem 2.4.2 yi kullanalım, $r>1$ ve $|z|\le r$ iken

$r>1$ ve $|z|\le r$ iken

$$\begin{aligned}\left|T_{n,p}(z)-e_p(z)\right| &\le \frac{(p-1)(1+r)}{n}\left\|T_{n.p-1}-e_{p-1}\right\|_r + r\left|T_{n,p-1}(z)-e_{p-1}(z)\right| \\ &\quad +\frac{r^p(1+r)(p-1)}{n} \\ &\le r\left|T_{n,p-1}(z)-e_{p-1}(z)\right| + \frac{(p-1)2r}{n}\left[\left\|T_{n,p-1}\right\|_r + r^{p-1}\right] \\ &\quad +\frac{2r^p(p-1)}{n}\end{aligned} \tag{5.2}$$

olduğu elde edilir.

Her $p\in\mathbb{N}$ için Eş. 2.2 kullanılarak

$$\begin{aligned}T_{n,p}(z) &= \sum_{k=0}^{p}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}\left[0,\frac{1}{n},...,\frac{k}{n};e_p\right]z^k \\ &= \sum_{k=0}^{p}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}\frac{e_p^{(k)}(z)}{k!}z^k \\ &= \sum_{k=0}^{p}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}\frac{z^k}{k!}\left[p(p-1)...(p-k+1)z^{p-k}\right]\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\begin{aligned}\left\|T_{n,p-1}\right\|_r &\le \sum_{k=0}^{p}\frac{n(n+1)...(n+k-1)}{n^k}.\frac{p(p-1)...(p-k+1)}{k!}r^{p-k}.r^k \\ &= r^p\sum_{k=0}^{p}\frac{n(n+1)...(n+k-1)p(p-1)...(p-k+1)}{n^k k!} \\ &= r^p\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\frac{n+1}{n}...\frac{n+k-1}{n} \\ &\le r^p\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}k! \\ &= r^p\sum_{k=1}^{p}p(p-1)...(p-k+1) \\ &\le r^p p.p! \\ &\le r^p(p+1)!\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki (5.2) eşitsizliği her $|z|\le r$ için aşağıdaki düzenlemeyle

$$\left|T_{n,p}(z)-e_p(z)\right| \le r\left|T_{n,p-1}(z)-e_{p-1}(z)\right| + \frac{2(p-1)r}{n}\left[r^{p-1}p! + r^{p-1}\right] + \frac{2r^p(p-1)}{n}$$

$$= r\left|T_{n,p-1}(z)-e_{p-1}(z)\right| + \frac{2(p-1)}{n}\left[r^p p! + r^p + r^p\right]$$

$$\le r\left|T_{n,p-1}(z)-e_{p-1}(z)\right| + \frac{2}{n}\left[r^p(p+1)! + r^p(p-1) + r^p(p-1)\right]$$

$$\le r\left|T_{n,p-1}(z)-e_{p-1}(z)\right| + \frac{2}{n}(p+1)!\left[r^p + r^p + r^p\right]$$

$$= r\left|T_{n,p-1}(z)-e_{p-1}(z)\right| + \frac{2}{n}(p+1)!3r^p$$

$$\le r\left|T_{n,p-1}(z)-e_{p-1}(z)\right| + \frac{6r^p(p+1)!}{n}$$

şeklinde olur.

$p=2$ den başlayarak ve $p$ ye göre matematiksel indüksiyonla

$p=2$ için;

$$\left|T_{n,2}(z)-z^2\right| \le r\left|T_{n,1}(z)-z\right| + \frac{6.2!.r^2}{n}$$

$$= r\left|z-z\right| + \frac{6.2!.r^2}{n}$$

$$= \frac{6.2!.r^2}{n}$$

$p=3$ için;

$$\left|T_{n,3}(z)-z^3\right| \le r\left|T_{n,2}(z)-z^2\right| + \frac{6.3!.r^3}{n}$$

$$\le r\frac{6.2!.r^2}{n} + \frac{6.3!.r^3}{n}$$

$$= \frac{r^{3.6}}{n}(2!+3!)$$

$p=4$ için;

$$\left|T_{n,4}(z)-z^4\right| \le r\left|T_{n,3}(z)-z^3\right| + \frac{6.4!.r^4}{n}$$

$$\le r\frac{r^3.6}{n}(2!+3!) + \frac{6.4!.r^4}{n}$$

$$=\frac{r^4.6}{n}\left(2!+3!+4!\right)$$

ve bu şekilde devam edilerek;

$$\left\|T_{n,p}-e_p\right\|_r \leq \frac{6r^p}{n}\left(2!+3!+...+p!\right)\leq \frac{6r^p}{n}\left[\sum_{j=2}^{p} p!\right]$$
$$=\frac{6r^p}{n}\left[\sum_{j=2}^{p}(p+1)!\right]\leq \frac{6r^p(p+1)!(p-1)}{n}$$

elde edilir.

$$\left|Z_n(f)(z)-f(z)\right|\leq \sum_{k=0}^{\infty}\left|c_k\right|\left|T_{n,k}(z)-e_k(z)\right|$$
$$\leq \sum_{k=2}^{\infty} M.\frac{A^k}{k!}\frac{6r^k(k+1)!(k-1)}{n}$$
$$=\frac{6M}{n}\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)(k-1)(rA)^k$$
$$=\frac{C_{r,A,M}}{n}$$

elde edilir. Burada her $1\leq r<\dfrac{1}{A}$ için $C_{r,A,M}(f)=6M\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)(k-1)(rA)^k<\infty$ dir. Çünkü $\sum_{k=0}^{\infty}u^{k+1}$ serisi ve onun türevi $\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)ku^{k-1}$ açık birim diski içeren her kompakt diskte düzgün yakınsaktır.

*(ii)* $R>1$ için $f:\overline{D_R}\cup[R,+\infty)\to\mathbb{C}$, $\overline{D_R}$ de analitik olsun. Yani her $z\in D_R$ için $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$ dır. Öyle $M>0$ ve $A\in\left(\dfrac{1}{R},1\right)$ vardır ki her $k=0,1,...,$ için $\left|c_k\right|\leq M\dfrac{A^k}{k!}$ olur. Bu da her $z\in\overline{D_r^+}$ için $\left|f(z)\right|\leq Me^{A|z|}$ olmasını gerektirir. Buna ek olarak $f$, $[0,\infty)$ aralığında üstel büyüyen olsun.( Kolaylık için üstel büyümenin derecesi A olsun.) O zaman kompakt $\overline{D_r^+}$ yarı diskinde $1\leq r<R$ olmak üzere ve $n_0=\left[\dfrac{2A}{\ln\left(1+1/r^2\right)}\right]+2$ için $n\geq n_0$ iken $Z_n(f)(z)$ her $n>n_0$, $|z|\leq r$ için aşağıdaki Voronovskaja-tip sonucu gösterelim:

$$\left|Z_n(f)(z)-f(z)-\frac{z(1+z)}{2n}f''(z)\right|\le\frac{16M}{n^2}\sum_{k=3}^{\infty}(rA)^k(k-1)(k-2)^2$$

$k=0,1,...,$ $e_k(z)=z^k$ ve $T_{n,k}(z)=Z_n(e_k)(z)$ olarak gösterelim. Teoremin (i) şıkkının ispatı ile benzer yolu izleyerek $Z_n(f)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kT_{n,k}\left(z\right)$ yazabiliriz, bu da

$$\begin{aligned}\left|Z_n(f)(z)-f(z)-\frac{z(1+z)}{2n}f''(z)\right|&=\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_kT_{n,k}(z)-\sum_{k=0}^{\infty}c_ke_k(z)-\sum_{k=2}^{\infty}c_k\frac{z^{k-1}(1+z)k(k-1)}{2n}\right|\\
&=\left|c_0T_{n,0}(z)+c_1T_{n,1}(z)+\sum_{k=2}^{\infty}c_kT_{n,k}(z)-c_0e_0(z)-c_1e_1(z)\right.\\
&\quad\left.-\sum_{k=2}^{\infty}c_ke_k(z)-\sum_{k=2}^{\infty}c_k\frac{z^{k-1}(1+z)k(k-1)}{2n}\right|\\
&=\left|0+c_1z+\sum_{k=2}^{\infty}c_kT_{n,k}(z)-0-c_1z-\sum_{k=2}^{\infty}c_ke_k(z)\right.\\
&\quad\left.-\sum_{k=2}^{\infty}c_k\frac{z^{k-1}(1+z)k(k-1)}{2n}\right|\\
&=\left|\sum_{k=2}^{\infty}c_kT_{n,k}(z)-\sum_{k=2}^{\infty}c_ke_k(z)-\sum_{k=2}^{\infty}c_k\frac{z^{k-1}(1+z)k(k-1)}{2n}\right|\\
&\le\sum_{k=2}^{\infty}|c_k|\left|T_{n,k}(z)-e_k(z)-\frac{z^{k-1}(1+z)k(k-1)}{2n}\right|\end{aligned}$$

olması demektir. $E_{k,n}(z)=T_{n,k}(z)-e_k(z)-\dfrac{z^{k-1}(1+z)k(k-1)}{2n}$ şeklinde gösterelim. Her $k\ge 2$, $n\in\mathbb{N}$ için yine $T_{n,k}(z)$ nin sağladığı indirgeme bağıntısını kullanarak

$$\begin{aligned}E_{k,n}(z)&=\frac{z(1+z)}{n}T'_{n,k-1}(z)+zT_{n,k-1}(z)-e_k(z)-\frac{z^{k-1}(1+z)k(k-1)}{2n}\\
&\quad\pm\frac{z(z+1)}{n}\left(e_k(z)\right)'\pm\frac{z(z+1)}{n}\left[\frac{z^{k-2}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n}\right]'\\
&=\frac{z(1+z)}{n}\left[T_{n,k-1}(z)-z^{k-1}\right]'+z\left[T_{n,k-1}(z)-e_{k-1}(z)\right]\\
&\quad\pm\frac{z(z+1)}{n}\left[\frac{z^{k-2}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n}\right]'+\frac{z^{k-1}(1+z)(k-1)}{n}\\
&\quad-\frac{z^{k-1}(1+z)k(k-1)}{n}\end{aligned}$$

$$= \frac{z(1+z)}{n}\left[T_{n,k-1}(z) - z^{k-1} - \frac{z^{k-2}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n}\right]'$$

$$+z\left[T_{n,k-1}(z) - e_{k-1}(z) - \frac{z^{k-2}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n}\right]$$

$$+\frac{z(z+1)}{n}\left[\frac{z^{k-2}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n}\right]' + \frac{z^{k-1}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n}$$

$$+\frac{z^{k-1}(1+z)}{2n}\left(2k-2-k^2+k\right)$$

$$= \frac{z(1+z)}{n}E'_{k-1,n}(z) + zE_{k,n}(z) + \frac{z^{k-2}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n^2}[(k-2)+z(k-1)]$$

olduğu elde edilir.

Bundan dolayı her $k \geq 2,\ n \in \mathbb{N}$ ve $|z| \leq r$ için

$$\left|E_{k,n}(z)\right| = \frac{r(1+r)}{n}\left|E'_{k-1,n}(z)\right| + r\left|E_{k,n}(z)\right| + \frac{r^{k-2}(1+r)(k-1)(k-2)}{2n^2}[(k-2)+r(k-1)]$$

$E_{k-1,n}(z)$ polinomu $E_{k-1,n}(z) = T_{n,k-1}(z) - e_{k-1}(z) - \dfrac{z^{k-2}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n}$ şeklinde olduğundan buradaki $T_{n,k-1}(z)$, $\dfrac{z^{k-2}(1+z)(k-1)(k-2)}{2n}$ ifadeleri $e_{k-1}(z)$ nin polinomu olduğundan $E_{k-1,n}(z)$ in derecesi $\leq (k-1)$ dir. Teorem 2.4.2 yi kullanarak

$$\left|E'_{k-1,n}(z)\right| \leq \frac{k-1}{r}\left\|E_{k-1,n}\right\|_r$$

$$= \frac{k-1}{r}\left\|T_{n,k-1} - e_{k-1} + \frac{r^{k-2}(1+r)(k-1)(k-2)}{2n}\right\|_r$$

$$\leq \frac{k-1}{r}\left[\left\|T_{n,k-1} - e_{k-1}\right\|_r + \frac{r^{k-2}(1+r)(k-1)(k-2)}{2n}\right]$$

$$\leq \frac{k-1}{r}\left[\frac{6r^{k-1}k!(k-2)}{n} + \frac{r^{k-2}(1+r)(k-1)(k-2)}{2n}\right]$$

$$= \frac{12r^{k-2}k!(k-1)(k-2)}{2n} + \frac{r^{k-3}(1+r)(k-1)^2(k-2)}{2n}$$

$$= \frac{r^{k-3}(k-1)(k-2)}{2n}\left[12rk! + (k-1)(1+r)\right]$$

$$\leq \frac{7r^{k-2}k!(k-1)(k-2)}{n}$$

elde edilir. Bulduğumuz ifadeyi

$$\left|E_{k,n}(z)\right| = \frac{r(1+r)}{n}\left|E'_{k-1,n}(z)\right| + r\left|E_{k,n}(z)\right| + \frac{r^{k-2}(1+r)(k-1)(k-2)}{2n^2}[(k-2)+r(k-1)]$$

eşitsizliğinde yerine koymakla her $|z| \leq r$ için

$$\left|E_{k,n}(z)\right| \leq r\left|E_{k-1,n}(z)\right| + \frac{14rk!(k-1)(k-2)}{n^2}$$
$$+\frac{r^{k-2}(1+r)(k-1)(k-2)}{2n^2}[(k-2)+r(k-1)]$$
$$\leq r\left|E_{k-1,n}(z)\right| + \frac{16r^k k!(k-1)(k-2)}{n^2}$$

elde edilir ve

$$E_{0,n}(z) = T_{n,0}(z) - e_0(z) = 1 - 1 = 0$$
$$E_{1,n}(z) = T_{n,1}(z) - e_1(z) = z - z = 0$$
$$E_{2,n}(z) = T_{n,2}(z) - e_2(z) - \frac{z(1+z)2.1}{2n} = \frac{z}{n} + \frac{n+1}{n}z^2 - z^2 - \frac{z^2}{n} - \frac{z}{n} = 0$$

$E_{0,n}(z) = E_{1,n}(z) = E_{2,n}(z) = 0$ olduğundan $k = 3, 4, \ldots$ almakla son eşitsizlikte adım adım ilerleyerek

$$\left|E_{k,n}(z)\right| \leq r\left|E_{k-1,n}(z)\right| + \frac{16r^k k!(k-1)(k-2)}{n^2}$$

$k = 3$ için

$$\left|E_{3,n}(z)\right| \leq r\left|E_{2,n}(z)\right| + \frac{16r^3.3!.2.1}{n^2} = \frac{16r^3}{n^2}3!.2.1$$

$k = 4$ için

$$\left|E_{4,n}(z)\right| \leq r\left|E_{3,n}(z)\right| + \frac{16r^4.4!.3.2}{n^2} = \frac{16r^4}{n^2}\left(4!.3.2 + 3!.2.1\right)$$

$k = 5$ için

$$\left|E_{5,n}(z)\right| \leq r\left|E_{4,n}(z)\right| + \frac{16r^5.5!.4.3}{n^2} \leq \frac{16r^5}{n^2}\left(4!.3.2 + 3!.2.1\right) + \frac{16r^5}{n^2}5!.4.3$$
$$= \frac{16r^5}{n^2}\left(5!.4.3 + 4!.3.2 + 3!.2.1\right)$$

bulunur ve böyle devam edilerek

$$\begin{aligned}\left|E_{k,n}(z)\right| &\le \frac{16r^k}{n^2}\sum_{j=3}^{\infty} j!(j-1)(j-2)\\ &\le \frac{16r^k}{n^2}k!(k-1)(k-2)(k-2)\\ &\le \frac{16r^k}{n^2}k!(k-1)(k-2)^2\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır, yani;

$$\begin{aligned}\left|Z_n(f)(z)-f(z)-\frac{z(1+z)}{2n}f''(z)\right| &\le \sum_{k=3}^{\infty}|c_k|\left|E_{k,n}(z)\right|\\ &\le \sum_{k=3}^{\infty}|c_k|\frac{16r^k}{n^2}k!(k-1)(k-2)^2\\ &\le \frac{16M}{n^2}\sum_{k=3}^{\infty}(rA)^k(k-1)(k-2)^2\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $rA<1$ için $\sum_{k=3}^{\infty}(rA)^k(k-1)(k-2)^2<\infty$ olduğu açıktır.

*(iii)* (ii) deki koşulların sağlandığını kabul edelim.

$$\|Z_n(f)-f\|_r \ge \frac{C_r(f)}{n}$$

nin geçerli olduğunu gösterelim. Her $|z|\le r$ ve $n\ge n_0$ için

$$\begin{aligned}Z_n(f)(z)-f(z) &= \left\{Z_n(f)(z)-f(z)-\frac{z(1+z)}{2n}f''(z)\right\}+\frac{z(1+z)}{2n}f''(z)\\ &= \frac{1}{n}\left\{\frac{z(1+z)}{2}f''(z)+\frac{1}{n}\left[n^2\left(Z_n(f)(z)-f(z)-\frac{z(1+z)}{2n}f''(z)\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

alabiliriz. Bu özdeşliğe,

$$\|F+G\|_r \ge \left|\|F\|_r-\|G\|_r\right| \ge \|F\|_r-\|G\|_r$$

özelliğini uygularsak;

$$\begin{aligned}\|Z_n(f)-f\|_r &= \left\|\frac{1}{n}\left\{\frac{z(1+z)}{2}f''(z)+\frac{1}{n}\left[n^2\left(Z_n(f)(z)-f(z)-\frac{z(1+z)}{2n}f''(z)\right)\right]\right\}\right\|_r\\ &\ge \frac{1}{n}\left\{\left\|\frac{e_1(1+e_1)}{2}f''\right\|_r-\frac{1}{n}\left[n^2\left\|Z_n(f)-f-\frac{e_1(1+e_1)}{2n}f''\right\|_r\right]\right\}\end{aligned}$$

elde edilir.

$D_r$ de $f$ derecesi $\leq 1$ olan bir polinom değilse $f''(z) > 0$ olur ve buradan $\left\| \frac{e_1(1+e_1)}{2} f'' \right\|_r > 0$ denebilir. Tersini kabul edelim; her $z \in \overline{D_r}$ için $\frac{z(1+z)}{2} f''(z) = 0$ olsun. Bu da her $z \in \overline{D_r} \setminus \{0,-1\}$ için $f''(z) = 0$ olmasını gerektirir. $f$ analitik olduğundan Teorem 2.4.6 (Özdeşlik Teoremi) dan her $z \in D_r$ için $f''(z) = 0$ olup $f'(z) = c\left(sabit\right)$ olur. Yani $f$ polinomunun derecesi $\leq 1$ dir. Bu da hipotezle çelişir. Yani $\left\| \frac{e_1(1+e_1)}{2} f'' \right\|_r > 0$ olmalıdır. Teorem 5.2.1 (ii) den

$$\left\| Z_n(f) - f - \frac{e_1(1+e_1)}{2n} f'' \right\|_r \leq \frac{16M}{n^2} \sum_{k=3}^{\infty} (rA)^k (k-1)(k-2)^2$$

$$n^2 \left\| Z_n(f) - f - \frac{e_1(1+e_1)}{2n} f'' \right\|_r \leq 16M \sum_{k=3}^{\infty} (rA)^k (k-1)(k-2)^2$$

elde ederiz. Burada sadece $f$ ve $r$ ye bağlı $n_1 > n_0$ vardır, yani her $n \geq n_1$ için

$$\left\| \frac{e_1(1+e_1)}{2} f'' \right\|_r - \frac{1}{n}\left[ n^2 \left\| Z_n(f) - f - \frac{e_1(1+e_1)}{2n} f'' \right\|_r \right] \geq \frac{1}{2} \left\| \frac{e_1(1+e_1)}{2} f'' \right\|_r$$

olması her $n \geq n_1$

$$\left\| Z_n(f) - f \right\|_r \geq \frac{1}{n}\frac{1}{2} \left\| \frac{e_1(1+e_1)}{2} f'' \right\|_r$$

olmasını gerektirir.

$n \in \{n_0+1, \ldots, n_1\}$ için $M_{r,n}(f) = n\left\| Z_n(f) - f \right\|_r > 0$ olmak üzere her $n > n_0$ için $\left\| Z_n(f) - f \right\|_r \geq \frac{M_{r,n}(f)}{n}$ sağlanır. Yine her $n > n_0$ için $C_r(f) = \min\left\{ M_{r,n_0+1}(f), \ldots, M_{r,n_1-1}(f), \frac{1}{2}\left\| \frac{e_1(1+e_1)}{2} f'' \right\|_r \right\}$ olmak üzere $\left\| Z_n(f) - f \right\|_r \geq \frac{C_r(f)}{n}$ eşitsizliği sağlanır.

Sonuç olarak $f$ fonksiyonu ve $n_0, R, M, A$ sabitleri Teorem 5.2.3 ün ifadesindeki hipotezleri sağlarken, $1 \le r < \min\left\{\frac{n_0}{2}, \frac{1}{A}\right\}$ keyfi bir sabit olmak üzere; eğer $f$ derecesi $\le 1$ olan polinom değilse o zaman her $n > n_0$ için

$$\left\| Z_n(f) - f \right\|_r \sim \frac{1}{n}$$

tam yakınsama oranı elde edilir.

## KAYNAKLAR


1. Hacısalihoğlu, H., Hacıyev,A. “Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı”, ***A. Ü. Fen Fakültesi Yayınları***, Ankara, (1995).

2. Bernstein, S.N., “On the domains of convergence of polinomials (in Russian)”, ***Izv. Acad. Nauk., SSSR, ser. math.,7***, 49-88, (1943).

3. Lupaş, A., “ Some Properties of Linear Positive Operators II”, ***Mathematica (Cluj),*** *9 (32)* (295-298) , (1967).

4. Szasz, O., “Generalization of S. Bernstein’s polynomials to the infinite interval”, ***J. Research Nat. Bur. Standards,*** 45:239-245 (1950).

5. Tonne, P.C., “ On the convergence of Bernstein polynomials for some unbounded analytic functions”, ***Proc. Am. Math. Soc.,*** *22*, 1-6, (1969).

6. Wright, E.M., “The Bernstein Approximation Polinomials in the Complex Plane”, ***J. London Math. Soc.*** *5*, 265-269,(1930).

7. Baskakov, V. A., “An Instance of a Sequence of Linear Positive Operators in the Space of Continuous Functions”, ( Russian) ***Dokl. Akad. Nauk SSSR, 113,*** (249-251) (1957).

8. Kantorovich, L.V., “Sur la convergence de la suite de polinômes de S. Bernstein en dehors de l’interval fundamental”, ***Bull. Acad. Sci. URSS***, 1103-1115, (1931).

9. Lorentz, G.G., “Bernstein Polinomials”, 2nd Edition, ***Chelsea Publ. Comp.,*** New York, (12-27,88-90), (1986).

10. Gal, S. G., “Approximation By Complex Bernstein and Convolution Type Operators”, ***Series on Concrete and Applicable Matematics-Vol.8***,University of Oradea, Romania, (2009).

11. Altomare, F., Campiti, M., “Korovkin-type Approximation Theory and its Applications”, de Gruyter Studies in Mathematics, 17. ***Walter de Gryter***, Berlin, New York, xii+627 (1994).

12. Korovkin, P.P., “On convergence of linear positive operators in the space of continous functions”, ***Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.)***, 90: 961-964 (1953).

13. Musayev, B., Alp, M., “Fonksiyonel Analiz”, ***Balcı Yayınları,*** Kütahya, 27-83 (2000).

14. Powell, M. J. D., “Approximation Theory and Methods”, Cambridge Uni., U.K., 46-53 (1981)

15. Dönmez, A., "Karmaşık Fonksiyonlar Kuramı", ***Beta Yayıncılık,*** İstanbul, (1999).

16. Başkan, T., "Kompleks Fonksiyonlar Teorisi",***Nobel Yayınları,*** Bursa, 65-218 (2010).

# ÖZGEÇMİŞ

**Kişisel Bilgiler**


| | |
|---|---|
| Soyadı, Adı | : MANAV, Nesibe |
| Uyruğu | : T.C. |
| Doğum tarihi ve Yeri | : 29.03.1988 Muğla |
| e-mail | : nmanav@gazi.edu.tr |


**Eğitim**

| **Derece** | **Eğitim Birimi** | **Mezuniyet tarihi** |
|---|---|---|
| Yüksek lisans | Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü | 2013 |
| Lisans | Cumhuriyet Üniversitesi/ Matematik Öğretmenliği | 2010 |
| Lise | Ortaca Lisesi | 2005 |

**Yabancı Dil**

İngilizce

**Hobiler**

Kitap okumak, Tenis, Yüzme, Dans.