

**DEĞİŞKEN YAPILI KONTROL GİRİŞİNDEKİ ÇATIRTI
PROBLEMİNİN GİDERİLMESİ İÇİN YENİ YÖNTEMLERİN
GELİŞTİRİLMESİ**

Burak Eren BİRİNCİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MAKİNE MÜHENDİSLİĞİ**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OCAK 2013
ANKARA**

Burak Eren BİRİNCİ tarafından hazırlanan “DEĞİŞKEN YAPILI KONTROL GİRİŞİNDEKİ ÇATIRTI PROBLEMİNİN GİDERİLMESİ İÇİN YENİ YÖNTEMLERİN GELİŞTİRİLMESİ” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Metin U. SALAMCI
Tez Danışmanı, Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Makine Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Nizami AKTÜRK
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç. Dr. Metin U. SALAMCI
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü, G.Ü.

Doç. Dr. Ömer KELEŞ
Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, G.Ü.

Dr. Bülent ÖZKAN
TÜBİTAK SAGE

Tarih: 02 /01 /2013

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Burak Eren BİRİNCİ

**DEĞİŞKEN YAPILI KONTROL GİRİŞİNDEKİ ÇATIRTI PROBLEMİNİN
GİDERİLMESİ İÇİN YENİ YÖNTEMLERİN GELİŞTİRİLMESİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Burak Eren BİRİNCİ

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ocak 2013

ÖZET

Bu çalışmada, doğrusal ve doğrusal olmayan sistemler için değişken yapıli kontrol yöntemleri uygulaması sonucu oluşan çatırtı problemini gidermek için yeni yöntemler önerilmektedir. Bu kapsamda ilk olarak kararlı manifold üzerinde ikinci mertebeden kayan kipli kontrol yöntemi ele alınmaktadır. Yöntem, sistem için uygun boyutlu bir kararlı manifold oluşturulmasına ve bunun sistem için doğal bir kayma yüzeyi olarak kullanılmasına dayanır. Sistemi kararlı manifolda yönlendirmek üzere ikinci mertebeden kayan kipli kontrol kullanılmaktadır. İkinci olarak kayan sektör kontrol yöntemi ele alınmaktadır. Kayma sektörü kayma yüzeyini içersine alan kararlı bir bölgedir. Yöntem, sistemin kayma yüzeyi yerine bu bölgeye yönlendirilerek kontrol edilmesine dayanır. Tez çalışmasında, parametre belirsizliği içeren doğrusal olmayan sistemler için durum değişkenlerine bağlı sektör ve doğrusal olmayan sektör tasarımı yöntemleri önerilmektedir. Son olarak ardışık yakınsama metodunu temel alan bir kayan sektör kontrol yöntemi önerilmektedir. Yöntem, doğrusal olmayan sistemin ardışık, zamanla değişen doğrusal sistemler olarak ele alınmasına dayanmaktadır.

Bu sayede doğrusal olmayan sistemler için kayan sektör kontrol problemi, zamanla değişen doğrusal sistemler için kayan sektör kontrol problemine dönüştürülmektedir. Zamanla değişen doğrusal sistem modelleri kullanılarak kayma sektörü ve kayan sektör kontrolcü tasarımları yapılmakta ve yöntemin yakınsama şartları verilmektedir. Önerilen yöntemler matematiksel modellere, esnek bağlantıya sahip robot manipülatör ve ters sarkaç modellerine uygulanmaktadır. Elde edilen sonuçlar kayan kipli kontrol yöntemi ile karşılaştırılarak yöntemlerin çatırtıyı azaltmadaki başarısı incelenmektedir.

Bilim Kodu : 914.1.084
Anahtar Kelimeler : Kayan Kip, Kayan Sektör, İkinci Mertebeden Kayan Kip, Kararlı Manifold, Doğrusal Olmayan Kontrol, Yaklaşım Yöntemleri, Ardışık Yakınsama
Sayfa Adedi : 166
Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Metin U. SALAMCI

**NEW METHODS FOR ELIMINATING THE CHATTERING PROBLEM
IN VARIABLE STRUCTURE CONTROL INPUT**

(M.Sc.Thesis)

Burak Eren BIRINCI

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

January 2013

ABSTRACT

In this study, variable structure control methods are considered for linear and nonlinear systems and control methods are proposed in order to avoid chattering problem in variable structure control. In this context, firstly, second order sliding mode control on stable manifold method is proposed. The method is based on designing a stable manifold of a proper dimension and using the stable manifold as a sliding surface. Then the system is controlled by second order sliding mode control algorithms. Secondly, sliding sector method is considered. Sliding sector is a stable region which includes the sliding surface. In this method, the system is controlled by forcing the trajectories inside the sliding sector. In this thesis study, design approaches of variable structure control systems with nonlinear time varying sliding sector and state dependent sliding sector are proposed for nonlinear system with matched uncertainty. Lastly, sliding sector control method based on successive approximation method is proposed. The method is based on linear time varying approximations of the nonlinear system. With the help of approximations, sliding sector control problem for nonlinear systems is transformed to sliding sector control problem for linear time varying systems.

By using the linear time varying system models, sliding sector and sliding sector controller are designed and the convergence conditions of the method are given. The proposed methods are applied to some mathematical models, including robot manipulator model with elastic joints and invert pendulum model. Then simulation results are compared with sliding mode control method. The successes of suggested methods are analyzed in terms of decreased chattering phenomenon.

Science Code : 914.1.084

Key Words : Sliding Mode, Sliding Sector, Second Order Sliding Mode, Stable Manifold, Nonlinear Control, Approximation Methods, Successive Approximation

Page Number : 166

Adviser : Assoc. Prof. Dr. Metin U. SALAMCI

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım boyunca, maddi manevi desteğini benden esirgemeyip değerli yardım ve katkılarıyla bana yol gösteren, Hocam Metin U. SALAMCI'ya, sonsuz teőekkürlerimi sunarım. Yapmıő olduğum çalışmanın aőamalarında bilgi ve destekleri ile yanımda duran Nurdan BİLGİN'e ve Engin Hasan ÇOPUR'a çok değerli yardımlarından dolayı teőekkürlerimi sunarım. Çalıőmalarım boyunca manevi desteği ve güler yüzü ile yanımda olup beni yüreklendiren őenay ÇITAK'a gönülden teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu günlere gelmemi sağlayan, eğitim hayatım boyunca beni teővik ve terbiye eden aileme, destekleri ve gösterdikleri sabır için teőekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	xi
SİMGELER	xvii
1. GİRİŞ.....	1
2. KARARLI MANİFOLD ÜZERİNDE İKİNCİ MERTEBEDEN KAYAN KİPLİ KONTROL	6
2.1. Kararlı Manifold Teoremi.....	8
2.2. Yüksek Mertebeden Kayan Kipli Kontrol	21
2.3. İkinci Mertebeden Kayan Kipli Kontrol.....	22
2.3.1. Burulma algoritması.....	26
2.3.2. Süper burulma algoritması.....	27
2.4. Yöntemin Matematiksel Modele Uygulanması	30
2.5. Bölüm Özeti.....	40
3. KAYAN SEKTÖR KONTROL	41
3.1. Doğrusal Sistemler İçin Kayan Sektör Kontrol.....	43
3.1.1. Basitleştirilmiş PR-kayma sektörü tasarımı.....	46
3.1.2. Kontrolcü tasarımı.....	49
3.2. Belirsizlik İçeren Doğrusal Sistemler İçin Kayan Sektör Kontrol.....	57
3.2.1. Gürbüz P_rR_r -kayma sektörü tasarımı	57
3.2.2. Kontrolcü tasarımı.....	60

Sayfa

3.3. Doğrusal Olmayan Zamanla Değişen Kayan Sektör Kontrol.....	67
3.3.1. Sektör tasarımı	68
3.3.2. Kontrolcü tasarımı.....	72
3.4. Doğrusal Olmayan Sistemler İçin Durum Değişkenlerine Bağlı Doğrusal Sektör Kullanarak Kayan Sektör Kontrol.....	77
3.4.1. Gürbüzlük	82
3.5. Esnek Bağlantılı Robot Manipülatör Uygulaması	90
3.5.1. Kayan kipli kontrol metodu ile çözüm.....	91
3.5.2. Zamanla değişen doğrusal olmayan sektör metodu ile çözüm	96
3.5.3. Durum değişkenlerine bağlı doğrusal sektör metodu ile çözüm	104
3.6. Bölüm Özeti.....	113
4. DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERE ZAMANLA DEĞİŞEN DOĞRUSAL SEKTÖRLERLE YAKINSAYARAK KAYAN SEKTÖR KONTROL	114
4.1. Doğrusal Olmayan Sistemlere Doğrusal Yakınsama	115
4.2. Zamanla Değişen Doğrusal Sistemler İçin Kayan Sektör Kontrol...124	
4.3. Esnek Bağlantılı Robot Manipülatör Uygulaması	132
4.4. Ters Sarkaç Uygulaması	144
4.5. Bölüm Özeti.....	153
5. SONUÇ	154
KAYNAKLAR	167
EKLER.....	161
EK-1 Kararlı Manifold Teoreminin İspatı	162
ÖZGEÇMİŞ.....	166

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Kararlı manifold S ve kararsız manifold U	9
Şekil 2.2. Örnek 2.2 için kararlı manifold.....	17
Şekil 2.3. Örnek 2.3 için kararlı manifold.....	21
Şekil 2.4. Burulma algoritması faz düzlemi yörüngeleri.....	26
Şekil 2.5. Süper burulma algoritması faz düzlemi yörüngeleri	28
Şekil 2.6. Sistem durum değişkenleri (Kayan kipli kontrol).....	31
Şekil 2.7. Kontrol çabası (Kayan kipli kontrol)	32
Şekil 2.8. Kayma yüzeyinin zamanla değişimi (Kayan kipli kontrol)	32
Şekil 2.9. Sistem durum değişkenleri (Burulma algoritması).....	33
Şekil 2.10. Kayma yüzeyinin (y_1) zamanla değişimi (Burulma algoritması) ..	34
Şekil 2.11. Kayma yüzeyi türevinin (y_2) zamanla değişimi (Burulma algoritması)	34
Şekil 2.12. Kayma yüzeyi (y_1) ve kayma yüzeyi türevinin (y_2) faz düzlemin de değişimi (Burulma algoritması)	35
Şekil 2.13. Kontrol çabası (Burulma algoritması)	35
Şekil 2.14. Kontrol çabası (Burulma algoritması için 0-1.5 saniye arası yakınlştırılmış)	36
Şekil 2.15. Sistem durum değişkenleri (Süper burulma algoritması).....	36
Şekil 2.16. Kayma yüzeyinin (y_1) zamanla değişimi (Süper burulma algoritması)	37
Şekil 2.17. Kayma yüzeyi türevinin (y_2) zamanla değişimi (Süper burulma algoritması)	37
Şekil 2.18. Kayma yüzeyi (y_1) ve kayma yüzeyi türevinin (y_2) faz düzleminde değişimi (Süper burulma algoritması)	38

Şekil	Sayfa
Şekil 2.19. Kontrol çabası (Süper burulma algoritması)	38
Şekil 2.20. Kontrol çabası (Süper burulma algoritması için 0-1.6 saniye arası yakınlaştırılmış)	39
Şekil 3.1. Histerisiz+ölü bölge fonksiyonu $\sigma(s(x), \delta(x))$	51
Şekil 3.2. Ters sarkaç modeli	53
Şekil 3.3. Sarkaç açısal konumu(x_1) ve açısal hızı (x_2)	54
Şekil 3.4. Araba konumu (x_3) ve hızı (x_4)	55
Şekil 3.5. Kontrol çabası	55
Şekil 3.6. P-norm değerinin zamana göre değişimi.....	56
Şekil 3.7. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının davranışı	56
Şekil 3.8. Sarkaç açısal konumu(x_1) ve açısal hızı (x_2)	64
Şekil 3.9. Araba konumu (x_3) ve hızı (x_4)	65
Şekil 3.10. Kontrol çabası	65
Şekil 3.11. P-norm değerinin zamana göre değişimi.....	66
Şekil 3.12. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının davranışı	66
Şekil 3.13. Sistem durum değişkenleri	75
Şekil 3.14. Kontrol çabası	76
Şekil 3.15. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının davranışı	76
Şekil 3.16. Faz düzleminde sistem davranışı.....	77
Şekil 3.17. Sistem durum değişkenleri	88
Şekil 3.18. Kontrol çabası	88

Şekil	Sayfa
Şekil 3.19. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi.....	89
Şekil 3.20. Faz düzleminde sistem davranışı.....	89
Şekil 3.21. Esnek bağlantılı robot manipülatör.....	90
Şekil 3.22. Kolun açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$).....	92
Şekil 3.23. Motor mili açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$)	93
Şekil 3.24. Kontrol girişi ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$).....	93
Şekil 3.25. Sistemin kayma yüzeyi fonksiyonunun değişimi ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$)	94
Şekil 3.26. Kolun açısal konumu ve hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$).....	94
Şekil 3.27. Motor mili açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)	95
Şekil 3.28. Kontrol girişi ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$).....	95
Şekil 3.29. Sistemin kayma yüzeyi fonksiyonunun değişimi ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)	96
Şekil 3.30. Kolun açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$).....	97
Şekil 3.31. Motor mili açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$)	98
Şekil 3.32. Kontrol girişi ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$).....	98
Şekil 3.33. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$)	99
Şekil 3.34. Kolun açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$).....	99
Şekil 3.35. Motor mili açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)	100
Şekil 3.36. Kontrol girişi ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$).....	100

Şekil	Sayfa
Şekil 3.37. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)	101
Şekil 3.38. Kolun açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$, $d = 6\sin(4t)$)	101
Şekil 3.39. Motor mili açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$, $d = 6\sin(4t)$)	102
Şekil 3.40. Kontrol girişi ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$, $d = 6\sin(4t)$)	102
Şekil 3.41. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$, $d = 6\sin(4t)$)	103
Şekil 3.42. Kolun açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$).....	105
Şekil 3.43. Motor mili açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$)	106
Şekil 3.44. Kontrol girişi ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$).....	106
Şekil 3.45. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$)	107
Şekil 3.46. Kolun açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$).....	107
Şekil 3.47. Motor mili açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)	108
Şekil 3.48. Kontrol girişi ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$).....	108
Şekil 3.49. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)	109
Şekil 3.50. Kolun açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$, $d = 6\sin(4t)$)	109
Şekil 3.51. Motor mili açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$, $d = 6\sin(4t)$)	110
Şekil 3.52. Kontrol girişi ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$, $d = 6\sin(4t)$)	110

Şekil	Sayfa
Şekil 3.53. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$, $d = 6\sin(4t)$)	111
Şekil 4.1. Esnek bağlantılı robot manipülatör	132
Şekil 4.2. Birinci yakınsama için kolun açısal konumu ve açısal hızı	134
Şekil 4.3. Birinci yakınsama için motor milinin açısal konumu ve açısal hızı	134
Şekil 4.4. Birinci yakınsama için sistemin kayan sektör ve kayma yüzey fonksiyonlarının değişimi	135
Şekil 4.5. Birinci yakınsama için yaklaşık sistemin kontrol girişi	135
Şekil 4.6. Birinci yakınsama için gerçek sistemini kontrol girişi	136
Şekil 4.7. İkinci yakınsama için kolun açısal konumu ve açısal hızı	137
Şekil 4.8. İkinci yakınsama için motor milinin açısal konumu ve açısal hızı	137
Şekil 4.9. İkinci yakınsama için sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi	138
Şekil 4.10. İkinci yakınsama için yaklaşık sistemin kontrol girişi	138
Şekil 4.11. İkinci yakınsama için gerçek sistemini kontrol girişi	139
Şekil 4.12. Beşinci yakınsama için kolun açısal konumu ve açısal hızı	139
Şekil 4.13. Beşinci yakınsama için motor milinin açısal konumu ve açısal hızı	140
Şekil 4.14. Beşinci yakınsama için sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi	140
Şekil 4.15. Beşinci yakınsama için yaklaşık sistemin kontrol girişi	141
Şekil 4.16. Beşinci yakınsama için gerçek sistemini kontrol girişi	141
Şekil 4.17. Kayma yüzeyi fonksiyonunun yaklaşık çözümler boyunca değişimi	142

Şekil	Sayfa
Şekil 4.18. Kayma sektörü fonksiyonunun yaklaşık çözümler boyunca değişimi.....	143
Şekil 4.19. Ters sarkaç sistemi	144
Şekil 4.20. Birinci yakınsama için arabanın konumu ve hızı	146
Şekil 4.21. Birinci yakınsama için sarkacın konumu ve açısız hızı	146
Şekil 4.22. Birinci yakınsama için sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi.....	147
Şekil 4.23. Birinci yakınsama için yaklaşık sistemin kontrol girişi.....	147
Şekil 4.24. Birinci yakınsama için gerçek sistemin kontrol girişi.....	148
Şekil 4.25. Onuncu yakınsama için arabanın konumu ve hızı.....	149
Şekil 4.26. Onuncu yakınsama için sarkacın konumu ve açısız hızı	149
Şekil 4.27. Onuncu yakınsama için sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi	150
Şekil 4.28. Onuncu yakınsama için yaklaşık sistemin kontrol girişi.....	150
Şekil 4.29. Onuncu yakınsama için gerçek sistemin kontrol girişi	151
Şekil 4.30. Kayma yüzeyi fonksiyonunun yaklaşık çözümler boyunca değişimi.....	151
Şekil 4.31. Kayma sektörü fonksiyonunun yaklaşık çözümler boyunca değişimi.....	152

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur. Bu çalışmada kısaltma kullanılmamıştır.

Simgeler	Açıklama
x	Durum değişkenleri vektörü
u	Kontrol girişi vektörü
$u_{eş}$	Eşdeğer kontrol girişi
A	Sistem matrisi
b	Kontrol vektörü
T	Koordinat dönüşüm matrisi
$I_{n \times n}$	Birim matris
$DF(x)$	$F(x)$ 'in Jacobian matrisi
σ	Kayma yüzeyi
y_1	Kayma yüzeyi
y_2	Kayma yüzeyinin türevi
S	Kararlı manifold (Bölüm 2)
U	Kararsız manifold (Bölüm 2)
V_m	Kontrolcü katsayısı, pozitif sabit bir sayı
V_M	Kontrolcü katsayısı, pozitif sabit bir sayı
$s(x)$	Kayma yüzeyi fonksiyonu
S	Kayma yüzeyi eğim vektörü
$L(x)$	Lyapunov fonksiyonu
$\delta(x)$	Kayma sektörü fonksiyonu
δ_i	İç sektör
δ_o	Dış sektör
Δ	Sektör parametresi, pozitif tanımlı simetrik matris
Q	Sektör parametresi, pozitif tanımlı simetrik matris

Simgeler	Açıklama
R	Sektör parametresi, pozitif yarı tanımlı simetrik matris
P	Sektör parametresi, pozitif tanımlı simetrik matris
$\sigma(s(x), \delta(x))$	Histerisiz + ölü bölge fonksiyonu
K	Kontrolcü katsayısı, pozitif sabit bir sayı
k	Kontrolcü katsayısı, pozitif sabit bir sayı
$d(x, t)$	Belirsizlik fonksiyonu
$p(t)$	Zamana bağlı belirsizlik parametresi

1. GİRİŞ

Kontrol sistemlerinin gelişimi, on dokuzuncu yüzyılda dinamik ve kararlılık teorilerinin geliştirilmesine kadar dayanmaktadır. Bir mühendislik disiplini olarak ortaya çıkışı ise 1950'lerde, ikinci dünya savaşından sonra Nyquist, Bode ve Wiener gibi bilim adamlarının da aralarında olduğu araştırmacılar tarafından frekans cevap metodlarının geliştirilmesi ile olmuştur [9].

Model tabanlı otomatik kontrol yöntemleri analiz ve tasarım bakımından iki ana başlık altında toplanabilir.

- I. Klasik kontrol yöntemleri
- II. Modern kontrol yöntemleri

Klasik kontrol teorisi, sistem girişi ve çıkışı arasındaki ilişkiyi esas alır ve genellikle doğrusal sistemlerin kontrolü için kullanılır. Kontrol edilecek sistem tek giriş ve tek çıkışlı ise en fazla tercih edilen yaklaşımdır. Sistem, Laplace veya Fourier dönüşümleri yardımı ile frekans tanım bölgesinde ifade edilerek, kontrolcü tasarımları yapılmaktadır.

Modern kontrol yöntemlerinde ise adi diferansiyel denklemler ele alınır. Hem doğrusal hem de doğrusal olmayan sistemler için kontrolcü tasarımında kolaylıklar sağlar. Sistemin iç dinamikleri hesaba katılarak zaman tanım bölgesinde çalışılır. Sistemde birden fazla girdi ve çıktı söz konusu olduğunda modern kontrol yaklaşımı belirgin tasarım üstünlükleri sunar. Modern kontrol yaklaşımında amaç, sistemin durum uzayı formunda ifade edilmiş dinamik denklemlerini kullanarak, ele alınan sistem değişkenini istenilen değere getirecek kontrolcü kazançlarının belirlenmesidir.

Değişken yapılı kontrol, modern kontrol yöntemlerinden biridir ve kontrolcü yapısının kontrol işlemi sırasında değiştirilmesine dayanır. Değişken yapılı kontrol teorisi 1960'lı yılların başında Emelyonov ve Barbashin tarafından Rusya'da geliştirilmiştir. Geliştirilen çalışmaların Rusya dışına açılması ise 1976 yılında Itkis'in çalışmalarının İngilizce olarak yayınlanması ile olmuştur [9].

Kayan kipli kontrol yönteminde amaç durum uzayında uygun şekilde tanımlanan kararlı bir kayma yüzeyi aracılığıyla, durum değişkenlerini tanımlanan bir denge konumuna taşımaktır. Kayan kipli kontrolde sistemin durum değişkenleri buldukları ilk konumdan, önce kayma manifoldunun üzerine, buradan da belirlenen denge noktasına taşınırlar. Sistemin bu davranışında ilk aşama "ulaşma aşaması", ikinci aşama ise "anahtarlama aşamasıdır". Sistem kayma yüzeyine ulaştınca sistem dinamikleri yüzeyin dinamik davranışı ile birlikte hareket eder. Ulaşma aşamasından sonra kontrolcünün amacı sistemi kayma yüzeyi üzerinde tutmaktır. Bu nedenle ikinci aşamada kontrolcü tanımlanan bir işaret fonksiyonu ile kayma manifoldu boyunca anahtarlama yapar. Kayan kipli kontrol yöntemi, meydana gelebilecek parametre değişiklikleri ve bozucu girişlerine karşı kontrol sisteminin kararlılığını belirlenen hassasiyet sınırları içerisinde sağlayabilmektedir. Sağladığı avantajlar nedeniyle kayan kipli kontrol yöntemi ile ilgili oldukça fazla çalışma bulunmaktadır [9-10, 40].

Kayan kipli kontrol yönteminde, parametre belirsizlikleri ve bozucu etkenlere karşı sağladığı avantajların yanında kontrol süresince, özellikle anahtarlama aşamasında, sistemin kararlılığını sağlamak için sürekli yön değiştiren bir sinyal üretmesi sebebi ile "çatırtı" denilen istenmeyen bir durum ortaya çıkmaktadır. Çatırtı, kontrol edilen sistemde yorulmalara sebep olmakta ve sistem ömrü kısalmaktadır.

Çatırtının azaltılması ya da giderilmesi için çatırtıya sebep olan işaret fonksiyonu yerine farklı fonksiyonlar kullanılması, manifoldun eğiminin sistemin konumuna göre değiştirilmesi gibi çeşitli çalışmalar yapılmış ve farklı önerilerde bulunulmuştur [9, 43-44]. Çalışmaların bazılarında sistem, tasarlanan kayma yüzeyi yerine kayma yüzeyi etrafında tanımlanmış bir sınır katmanı içerisine yönlendirilmektedir. Böylelikle kontrol sinyali katman içerisinde anahtarlama yapmadan (veya daha düşük frekansla anahtarlama yaparak) sistemin kayma yüzeyi etrafında kalması sağlanır. Ancak, sınır katman içerisinde kararlılığın hala sistemin iç dinamiklerine bağlı olması nedeni ile bozucu ve belirsizlik gibi durumlarda kararlılığın sağlanmasında zorluklar yaşanmaktadır [16, 33]. Belirtilen öneriler genel olarak çatırtıyı azaltmakla birlikte sistemin gürbüzlüğü de azaltmaktadır.

Bu tez çalışması kapsamında kayan kipli kontrol metodunun bir dezavantajı olan çatırtı oluşumunu azaltacak ya da giderecek kontrolcü tasarımları ve kayma yüzeyinin hesaplanması için alternatif yöntemler önerilmektedir.

Kayan kipli kontrolde kayma manifoldunun hesaplanması doğrusal sistemler için sistematik bir hal almıştır. Genel olarak, koordinat dönüşümleri yardımı ile sistem alt sistemlere ayrılır ve bu alt sistemler yardımı ile kayma yüzeyi ve kontrolcü tasarımı yapılır. Ancak benzer koordinat dönüşümleri doğrusal olmayan sistemlerde her zaman kolaylıkla yapılamamaktadır. Bu tez çalışmasında alternatif yöntem olarak kararlı manifold teoremi ele alınmaktadır. Yöntem sayesinde sistemin kendi dinamik davranışı kullanılarak kayma manifoldu tasarlanmaktadır. Konu ile ilgili Perko [31], Cheng ve arkadaşları [6], Banks ve arkadaşları [1-2] ve Salamcı [34-35] çeşitli çalışmalar yapmışlardır.

Kontrol sinyalindeki çatırtıyı engellemek amacıyla kullanılan yaklaşımlardan biri yüksek mertebeden kayan kipli kontrol yöntemidir. Bu yöntemde kayma manifoldunun yüksek mertebeden türevinden faydalanılarak kontrolcü tasarlanır. Daha sonra kontrolcünün integrali alınarak sisteme uygulanır ve böylece kontrol sinyali daha düzgün bir biçime ulaşır [3-4,18-22]. Ancak kullanılacak kayma manifoldunun mertebesi arttıkça kontrolcü tasarımında ihtiyaç duyulan bilgi de artmaktadır. Bu yüzden ikinci mertebede kayan kipli kontrolcüler daha çok tercih edilmektedir. Çok sayıda ikinci mertebeden kayan kipli kontrolcü algoritması mevcuttur. Bunlardan bazıları “Burulma Algoritması” (Twisting Algorithm) [18], “Süper Burulma Algoritması” (Super Twisting Algorithm) [18, 20], “Sürüklenme Algoritması” (Drift Algorithm) [18], “Alt Optimum Algoritma” (Sub-Optimal Algorithm) [3]. Kullanım kolaylıkları sağlaması sebebi ile bu tez çalışmasında ikinci mertebeden kayan kipli kontrolcü yöntemi ele alınmıştır.

Kontrol sinyalinde meydana gelen çatırtı problemine karşı ele alınan bir başka yaklaşım ise kayan sektör yöntemidir [11-13, 25-30]. Bu yöntemde kayan kipli kontrol metodundan farklı olarak kayma yüzeyi yerine kararlı bir kayma sektörü kullanılır. Öncelikle bir kayma manifoldu tasarlanır. Daha sonra bu kayma manifoldunu kapsayan kararlı bir sektör tanımlanır. Sistem tasarlanacak değişken yapıli kontrolcü ile bu sektör içerisine yönlendirilerek kararlı hale getirilir. Tasarlanan sektör sistemin dinamik davranışına uygundur. Kayan sektör metodu kontrol sinyalinde meydana gelen çatırtı problemini azaltması ile birlikte sistemin kararlılığı ve gürbüzlüğünü de korumaktadır. Kayan sektör kontrol konusu ile ilgili olarak literatürde Furuta ve Pan'ın çalışmaları başta olmak üzere çeşitli çalışmalar mevcuttur. Korondi ve arkadaşları çalışmalarında, koordinat dönüşümleri yardımı ile kayma sektörleri tasarlamaktadırlar. Ancak doğrusal olmayan sistemin mertebesi arttıkça dönüşüm yapmak ve kararlı bir sektör tanımlamak gittikçe zorlaşmaktadır [17].

Furuta ve Pan çalışmalarında, doğrusal sistemler için cebirsel Riccati denkleminin çözümünden faydalanarak kayma yüzeyi ve kayma sektörü tasarımı yapmaktadırlar [13]. Suzuki ve arkadaşları doğrusal olmayan sistemler için durum değişkenlerine bağlı kayma sektörü tasarımını önermişlerdir [39]. Pan ve arkadaşları ise çalışmalarında diferansiyel Riccati denkleminin çözümü yardımıyla zamanla değişen, doğrusal olmayan sektör tasarımını ele almışlardır [25]. Kayan sektör kontrol yöntemi halen gelişmekte olan bir yöntem olduğu için yapılan çalışmaların sayısı kayan kipli kontrol çalışmalarına göre daha azdır.

Kayan kipli kontrolde olduğu gibi kayan sektör kontrolde de doğrusal olmayan sistemler için tasarım zorlukları bulunmaktadır. Bu tez çalışmasında doğrusal olmayan sistemler için durum değişkenlerine bağlı kayan sektör tasarımı ve doğrusal olmayan, zamanla değişen kayan sektör tasarımı ele alınmıştır. Bunun yanında doğrusal olmayan sistemler için bir tasarım yöntemi de doğrusal olmayan sisteme doğrusal zamanla değişen sistemler kullanarak yakınsamaktır. Doğrusal zamanla değişen sistem yaklaşımı ile çeşitli çalışmalar mevcuttur [1-2, 7, 34-37]. Tez çalışmasında doğrusal olmayan sistemler için bu yöntem kullanılarak kayan sektör tasarımı da ele alınmaktadır.

Tez çalışmasının 2. bölümünde kararlı manifold teoremi ile kayma yüzeyi tasarımı ayrıntılı olarak ele alınarak ikinci mertebeden kayan kipli kontrolcü önerilmiştir. Çalışmanın 3. bölümünde doğrusal ve doğrusal olmayan sistemler için farklı sektör tasarımları anlatılarak, kullanılabilir kayan sektör kontrolcüler ele alınmaktadır. 4. bölümde doğrusal olmayan sistemlere doğrusal zamanla değişen sistemler kullanarak yakınsama konusu ele alınmış, ardışık yakınsamalar kullanılarak kayan sektör kontrolcü tasarımı önerilmektedir. Önerilen yöntemlerin uygulanması ve benzetimlere ilgili bölümler içerisinde yer verilmiştir. Sonuç ve tartışmalar ise 5. bölümde sunulmaktadır.

2. KARARLI MANİFOLD ÜZERİNDE İKİNCİ MERTEBEDEN KAYAN KIPLI KONTROL

Doğrusal sistemler için kayan kipli kontrol tasarımında genel olarak sistem, koordinat dönüşümü ile kontrol girişinin olduğu ve kontrol girişinin olmadığı iki alt sisteme bölünmektedir. Kontrol girişinin olmadığı alt sistem yardımı ile sistemin kararlılığının sağlandığı bir kayma yüzeyi tasarlanmakta ve sistem bu yüzey üzerine yönlendirilerek yüzey üzerinde kararlı davranışı sağlanmaktadır. Ancak doğrusal olmayan sistemler için bu koordinat dönüşümünü yapmak her zaman doğrusal sistemlerdeki kadar kolay değildir. Bu bölümde kayan kipli kontrol yönteminde sıkça kullanılan klasik kayma yüzeyi tasarımı yerine kararlı manifold teoreminden faydalanılarak kayma yüzeyi tasarımı yapılmaktadır. Bu yöntem sayesinde sistemin orijin etrafındaki kendi dinamik davranışı kullanılarak kayma manifoldu tasarlanmaktadır.

Bu yöntemde, belli formdaki doğrusal olmayan sistemler için doğrusallaştırılmış sistemin orijininde meydana gelen kararlı manifoldun kayma yüzeyi olarak kullanılması hedeflenmektedir. Böylelikle bir koordinat dönüşümü uygulamadan kayma yüzeyi tasarlanabilmesi hedeflenmektedir. Daha önce bu yöntemle ilgili benzer çalışmalar yapılmıştır. Salamcı doktora tezinde kararlı manifold yöntemi ile doğrusal olmayan bir füze sistemi için kayma yüzeyi tasarlamış ve kayan kipli kontrol yöntemini uygulamıştır [35]. Benzer şekilde Doğan ve ark. yaptıkları çalışmada esnek bağlantıya sahip robot manipülatör için kararlı manifold yöntemi ile kayma yüzeyi tasarlamış ve kayan kipli kontrol yöntemini uygulamıştır [8]. Banks ve arkadaşları kararlı manifold teoremi yardımı ile tasarladıkları kayma yüzeylerini doğrusal olmayan sistemlerin kontrolünde kullanmışlardır [1-2].

Bu tez çalışmasında ise kayan kipli kontrol metodundan farklı olarak tek girişli doğrusal olmayan sistemler için yüksek mertebeden kayan kipli kontrol metodu kullanılmaktadır. İkinci mertebeden kayan kipli kontrolcü diğer yüksek mertebeden kayan kipli kontrol metotlarına göre daha kullanışlı olduğu için tercih edilmektedir. Yöntemde; kontrolcü kayma yüzeyi ile kontrolcü arasındaki bağıl dereceye bağılı olarak modellenmektedir. Bu sayede kayma yüzeyi ile kontrolcü arasındaki bağıl derecesi bir çıkan sistemlerde çatırtı problemi giderilebilmektedir. Ayrıca bağıl derecesi iki olan sistemlerde ikinci mertebeden kayan kipli kontrol sayesinde, kayan kipli kontrol yaklaşımı kullanılarak kararlı hale getirilebilmektedir.

Yüksek mertebeden kayan kipli kontrol alanında başta Arie Levant olmak üzere çeşitli araştırmacılar tarafında çalışmalar yapılmıştır. Levant yaptığı çalışmalarda yüksek mertebeden kayan kipli kontrol metotlarının temellerine değinmiş, çeşitli ikinci mertebeden kayan kipli kontrolcü algoritmaları geliştirmiş [18-19], yüksek mertebeden kayan kipli kontrol metotlarını kinematik araç modeline uygulamıştır [21]. Shtessel ve arkadaşları yaptıkları çalışmada bir füze oto pilotu için ikinci mertebeden kayan kipli kontrolcü kullanmışlardır [38]. Vecchio doktora tezinde bir araba ve motosiklet için sapma açısı kontrolünde ikinci mertebeden kayan kipli kontrolcü tasarımı yapmıştır [41].

Daha önce yapılan çalışmalardan farklı olarak bu bölümde kararlı manifold teoremi ve ikinci mertebeden kayan kipli kontrolcü tasarımı bir araya getirilmektedir. İlk olarak kayma yüzeyi hesaplanırken kullanılacak olan kararlı manifold teoremi anlatılmakta, teoremle ilgili gerekli ispat ve tanımlamalar yapılarak, gerekli görülen yerlerde anlatım örneklerle desteklenmektedir. Daha sonra yüksek mertebeden kayan kipli kontrol yöntemi açıklanmaktadır. İkinci mertebeden kayan kipli kontrolcü algoritmalarından burulma (twisting) ve süper burulma (super twisting) kontrolcüler anlatılarak, yöntemler ile ilgili örnek bir çalışma yapılmaktadır.

2.1. Kararlı Manifold Teoremi

Tez çalışmasındaki bütünlüğü sağlamak amacıyla kısaca kararlı manifolddan bahsedilerek ilgili bir örnek ele alınmaktadır. Daha sonra tanım ve teoremler ayrıntılı olarak anlatılacaktır. Kararlı manifold teoremi ve doğrusal olmayan sistemler için kararlı manifoldun belirlenmesine ilişkin yöntem hakkında ayrıntılı bilgi Perko'nun "Diferansiyel Denklemler ve Dinamik Sistemler" adlı kitabından elde edilebilir [31].

Aşağıdaki gibi bir doğrusal olmayan sistem ele alınsın.

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

Sistem x_0 denge noktasında kararlı manifold S ve kararsız manifold U 'ya sahiptir. Sistemin x_0 denge noktasında doğrusallaştırılmasıyla aşağıdaki gibi doğrusal sistem elde edilir.

$$\dot{x} = Ax \quad (2.2)$$

Eş. 2.2 ile verilen doğrusallaştırılmış sistemin kararlı alt uzayı E^S ve kararsız alt uzayı E^U için S ve U , x_0 denge noktasında teğettir. Ayrıca S ve U , E^S ve E^U gibi aynı boyutlardadırlar.

Doğrusal olmayan sistemin yörünge akışı ϕ_t olsun. S ve U , ϕ_t altında sırasıyla pozitif ve negatif değişmezlerdir ve aşağıdaki şartları sağlarlar.

➤ $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(c) = x_0$ her $c \in S$ için

➤ $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(c) = x_0$ her $c \in U$ için

Burada x_0 denge noktası orijinde olmalıdır. Eğer sistemin denge noktalarından biri orijinde değil ise denge noktası orijine ötelenmelidir.

2.1. Örnek [31]

Aşağıdaki gibi bir sistem ele alınsın.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= x_3 + x_1^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Sistemin denge noktası orijindedir. Diferansiyel denklemler çözümlerse;

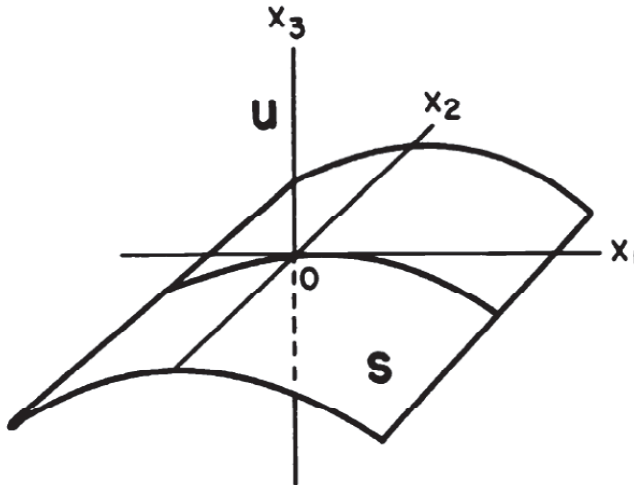
$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{-t} \\ x_2(t) &= c_2 e^{-t} + c_1^2 (e^{-t} - e^{-2t}) \\ x_3(t) &= c_3 e^{-t} + \frac{c_1^2}{3} (e^{-t} - e^{-2t}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Burada $c = x(0)$. Eğer $c_3 + c_1^2/3 = 0$ ise $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(c) = 0$. Böylece;

$$S = \{c \in R^3 \mid c_3 = -c_1^2/3\} \quad (2.5)$$

Aynı şekilde eğer $c_1 = c_2 = 0$ ise $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(c) = 0$. Böylece;

$$U = \{c \in R^3 \mid c_1 = c_2 = 0\} \quad (2.6)$$



Şekil 2.1. Kararlı manifold S ve kararsız manifold U [31]

Kararlı manifold S yüzeyi, E^S 'e teğettir. Yani orijin noktasında x_1 - x_2 düzlemine teğet geçer. Kararsız manifold ise $U = E^U$ olur. Kararlı alt uzay E^S ve kararsız alt uzay E^U , sırası ile x_1 - x_2 düzlemi ve x_3 eksenidir.

Kararlı manifoldu hesaplarırken sisteme ait diferansiyel denklemleri çözmek her zaman verilen örnekteki kadar kolay olmamaktadır. Böyle durumlarda kararlı manifold teoremi kullanılabilir.

Kararlı manifold teoreminin tanımından önce teoremin daha iyi anlaşılabilmesi için katmanlı uzay(topolojik manifold), türevlenebilir katmanlı uzay (türevlenebilir manifold), topolojik eş yapı (homeomorfizma) ve sistemin akışı gibi matematiksel tanımlar aşağıda verilmektedir.

2.1. Tanım

X bir metrik uzay ve A ve B , X 'in alt kümeleri olsun. Topolojik eş yapı dönüşümü A 'dan B 'ye sürekli, birebir, örten topolojik bir haritadır ($h: A \rightarrow B$) ve tersi de sürekli ($h^{-1}: A \rightarrow B$). Eğer A 'dan B 'ye bir topolojik eş yapı dönüşümü varsa, A ve B topolojik eş olarak adlandırılır [31].

Yani A ve B topolojik uzaylar olmak üzere, A 'dan B 'ye sürekli, birebir, örten ve tersi de sürekli bir gönderime topolojik eş yapı denir.

2.2. Tanım

M bir katmanlı uzay(topolojik manifold) olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan M katmanlı uzayına n boyutlu katmanlı uzay denir [5].

- M bir Hausdorff uzayıdır.
- Yerel topolojik eş yapıdadır.

2.3. Tanım

n boyutlu bir katmanlı uzay, üzerindeki türevlenebilir yapıyla birlikte n boyutlu türevlenebilir katmanlı uzay(türevlenebilir manifold) olarak adlandırılır [5].

2.4. Tanım

Eş. 2.2'deki gibi bir doğrusal sistem ele alınsın. Bu doğrusal sistemin x_0 gibi bir başlangıç değerine göre çözümü $x(t) = e^{At}x_0$ şeklinde olacaktır. $e^{At}: R^n \rightarrow R^n$ olan haritalar seti, Eş. 2.2'nin yörüngeleri boyunca x_0 noktalarının hareketi olarak tanımlanabilir. Bu harita setine ise doğrusal sistemin akışı denir [31].

2.5. Tanım

E , R^n in açık bir alt kümesi ve $f \in C^1(E)$ olsun. $x_0 \in E$ için $\phi(t, x_0)$, Eş. 2.1'deki başlangıç değer probleminin çözümü olsun. Bu durumda ϕ_t haritalar seti, diferansiyel eşitliğin akışı olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi ifade edilir [31].

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

2.1. Teorem (Kararlı Manifold Teoremi) [31]

E , R^n in orijini içeren açık alt kümesi, $f(x) \in C^1(E)$ ve ϕ_t doğrusal olmayan sistemin akışı olsun. $f(0) = 0$ ve buna ait Jacobian matrisi $\partial f(0)/\partial x'$ in k tane negatif reel kısma ve $n - k$ tane pozitif reel kısma sahip özdeğerleri olduğunu kabul edilsin. O zaman Eş. 2.1 ile verilen sistemin k boyutlu türevlenebilir manifoldu S , kararlı alt uzay E^{S^1} e sıfır noktasında teğettir. Bu manifold üzerinde $t \geq 0$, $\phi_t(S) \subset S$ ve her $x_0 \in S$ için;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0 \tag{2.7}$$

Aynı şekilde $(n - k)$ boyutlu türevlenebilir manifold U , kararsız alt uzay E^U 'ya sıfır noktasında teğettir. Bu manifold üzerinde $t \leq 0$, $\phi_t(U) \subset U$ ve her $x_0 \in U$ için;

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = 0 \quad (2.8)$$

Eğer $f \in C^1(E)$ ve $f(0) = 0$ ise Eş. 2.1 ile belirtilen sistem doğrusallaştırılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\dot{x} = Ax + F(x) \quad (2.9)$$

Burada $A = Df(0)$, $F(x) = f(x) - Ax$, $F \in C^1(E)$, $F(0) = 0$ ve $DF(0) = 0$ dir ve $DF(0)$, $F(x)$ ' in $x_0 = 0$ noktası için Jacobian matrisidir. Bu dönüşüm her $\varepsilon > 0$ için Lipschitz koşulunu sağlamalıdır.

$$\delta > 0, |x| \leq \delta, |y| \leq \delta$$

$$|F(x) - F(y)| \leq \varepsilon|x - y| \quad (2.10)$$

A matrisi özdeğerleri diyagonal dizili bir matris olsun. Bu durumda A matrisini özdeğerleri negatif gerçekte kısma sahip $(k \times k)$ boyutlu P matrisi ve özdeğerleri pozitif gerçekte kısma sahip $(n - k) \times (n - k)$ boyutlu Q matrisi olarak iki gruba ayrılabilir.

$$A = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Eş. 2.9'teki sistem için aşağıdaki integral denklemi ele alınsın.

$$w(t, a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(w(s, a))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(w(s, a))ds \quad (2.12)$$

Burada $U(t) = \begin{bmatrix} e^{Pt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{Qt} \end{bmatrix}$ dir.

Kanonik formdaki sistem için $G(x) = F(x)$ olur.

Eğer $w(t, a)$ Eş. 2.12'in sürekli çözümü ise aynı zamanda Eş. (2.5) diferansiyel denkleminin de çözümüdür. Eş. 2.12 integral denklemi ise ardışık yaklaşım yöntemi ile çözülebilir.

$$w^{(0)}(t, a) = 0$$

$$w^{(k+1)}(t, a) =$$

$$U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(w^{(k)}(s, a))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(w^{(k)}(s, a))ds \quad (2.13)$$

Kararlı manifold teoremi özetlenirse Eş. 2.1'deki gibi doğrusal olmayan bir sistemin kararlı manifoldunu hesaplariken aşağıdaki sıralama takip edilebilir.

1. Sistem denge noktası etrafında doğrusallaştırılmalıdır. Eğer sistemin denge noktası orijinde değil ise denge noktası orijine doğru ötelenmelidir. Daha sonra sistemin doğrusal olmayan terimi aşağıdaki şekilde tanımlanmalıdır.

$$F(x) = f(x) - Ax \quad (2.14)$$

2. Sistemin özdeğerleri hesaplandıktan sonra diyagonal olacak şekilde iki alt gruba ayrılmalıdır. Eğer gerekli ise sistemin özdeğerlerini diyagonal forma getirecek aşağıdaki gibi bir koordinat dönüşümü uygulanabilir.

$$z = T^{-1}x$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Burada P matrisi özdeğerleri negatif gerçekte kısma sahip $k \times k$ boyutlu ve Q matrisi özdeğerleri pozitif gerçekte kısma sahip $(n - k) \times (n - k)$ boyutlu matrislerdir. Yapılan koordinat dönüşümü sistemin doğrusal olmayan kısmına da uygulanmalıdır.

$$G(z) = T^{-1}F(Tz) \quad (2.16)$$

3. U ve V matrisleri aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$U(t) = \begin{bmatrix} e^{Pt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{Qt} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

4. Aşağıdaki integral denklemi Eş. 3.13 ile belirtildiği gibi ardışık yaklaşım metodu kullanılarak çözülür.

$$w^{(0)}(t, a) = 0$$

$$w^{(k+1)}(t, a) =$$

$$U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(w^{(k)}(s, a))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(w^{(k)}(s, a))ds$$

5. Çözüm sonucunda pozitif gerçekte kısma sahip özdeğere karşılık gelen çözüm sistemin kararlı manifoldunu verir.

6. Eğer sistemde daha önceden koordinat dönüşümü yapılmış ise sistem $x = Tz$ koordinat dönüşümü ile orijinal koordinatlarına dönüştürülür.

2.2. Örnek [35]

Aşağıdaki doğrusal olmayan sistem için kararlı manifold hesaplınsın.

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 \quad (2.18)$$

$$\dot{x}_3 = 4x_3 + x_1^2 + x_2^3$$

Sistemin denge noktası orijindedir. Sistem doğrusallaştırılarak $\dot{x} = Ax + F(x)$ matris formunda yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \\ x_1^2 + x_2^3 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, F(x) = G(x) = \begin{bmatrix} x_2^2 \\ 0 \\ x_1^2 + x_2^3 \end{bmatrix}$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eş. 2.13 genel olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$w^{(k+1)}(t, a) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-s)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} G(w^k(s, a)) ds \\ - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4(t-s)} \end{bmatrix} G(w^k(s, a)) ds$$

Ardışık yaklaşım metodu ile çözümü yapılırsa;

$$w^{(0)}(t, a) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w^{(1)}(t, a) = \begin{bmatrix} a_1 e^{-t} \\ a_2 e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w^{(2)}(t, a) = \begin{bmatrix} a_1 e^{-t} \\ a_2 e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} a_2^2 e^{-(t-s)} e^{-4s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-4(t-s)} (a_1^2 e^{-2s} + a_2^3 e^{-6s}) \end{bmatrix} ds \\ = \begin{bmatrix} a_1 e^{-t} + \frac{1}{3} a_2^2 e^{-t} - \frac{1}{3} a_2^2 e^{-4t} \\ a_2 e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
w^{(3)}(t, a) &= \begin{bmatrix} a_1 e^{-t} \\ a_2 e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} a_2^2 e^{-(t-s)} e^{-4s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds \\
&\quad - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-4(t-s)} \left\{ \left(a_1 e^{-s} + \frac{1}{3} a_2^2 a^{-s} - \frac{1}{3} a_2^2 e^{-4s} \right)^2 + a_2^3 e^{-6s} \right\} \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} w_1^{(3)}(t, a) \\ w_2^{(3)}(t, a) \\ w_3^{(3)}(t, a) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$w_1^{(3)}(t, a) = a_1 e^{-t} + \frac{1}{3} a_2^2 e^{-t} - \frac{1}{3} a_2^2 e^{-4t}$$

$$w_2^{(3)}(t, a) = a_2 e^{-2t}$$

$$\begin{aligned}
w_3^{(3)}(t, a) &= -\frac{1}{6} a_1 e^{-2t} - \frac{1}{54} a_2^4 e^{-2t} - \frac{1}{9} a_1 a_2^2 e^{-2t} - \frac{1}{108} a_2^4 e^{-8t} - \frac{1}{10} a_2^3 e^{-6t} \\
&\quad + \frac{2}{27} a_1 a_2^2 e^{-5t} + \frac{2}{81} a_2^4 e^{-5t}
\end{aligned}$$

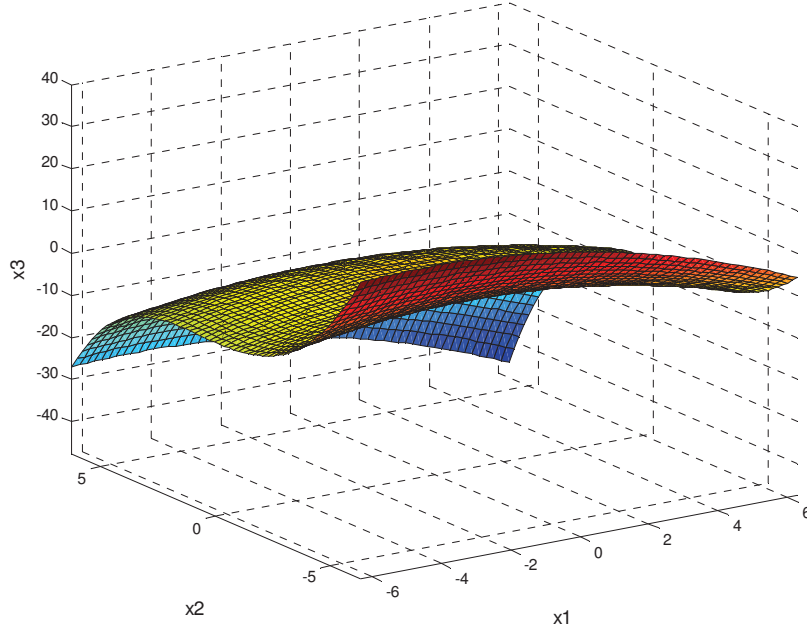
Çözümüne devam edilirse bir sonraki yakınsamada çözümde $w^{(4)}(t, a) = w^{(3)}(t, a)$ olacağı görülür. Bu durumda yaklaşık olarak $\psi_3(a_1, a_2) = w^{(3)}(0, a_1, a_2, 0)$ olur.

$$\psi_3(a_1, a_2) = -\frac{1}{6} a_1 - \frac{1}{54} a_2^4 - \frac{1}{9} a_1 a_2^2 - \frac{1}{108} a_2^4 - \frac{1}{10} a_2^3 + \frac{2}{27} a_1 a_2^2 + \frac{2}{81} a_2^4$$

Kararlı manifold (Şekil 2.2) yazılırsa;

$$S: x_3 = -\frac{1}{6} x_1^2 - \frac{1}{54} x_2^4 - \frac{1}{9} x_1 x_2^2 - \frac{1}{108} x_2^4 - \frac{1}{10} x_2^3 + \frac{2}{27} x_1 x_2^2 + \frac{2}{81} x_2^4 \quad (2.20)$$

$$\sigma = x_3 + \frac{1}{6} x_1^2 + \frac{1}{27} x_1 x_2^2 + \frac{1}{10} x_2^3 + \frac{1}{324} x_2^4 \quad (2.21)$$



Şekil 2.2. Örnek 2.2 için kararlı manifold

Sistemin kararlı manifoldunun hesaplanabilmesi için k tane negatif gerçekte kısıma sahip özdeğeri ve $n - k$ tane pozitif gerçekte kısıma sahip özdeğeri olmalıdır. $n - k \geq 1$ olmak zorundadır. Eğer sistem bu şartı sağlamıyor ise kök yerleştirme metodu kullanılarak yapılacak bir durum geri besleme kontrol ile sistemin kökleri değiştirilebilir. Böylece sistemde uygun boyutlu kararlı bir manifold oluşturulabilir.

2.1. Lemma [35]

Tek girişli doğrusal olmayan bir sistem ele alınsın.

$$\dot{x} = f(x) + bu \quad (2.22)$$

Doğrusallaştırılmış sistem aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\dot{x} = Ax + F(x) + bu \quad (2.23)$$

Eğer (A,b) ikilisi kararlı kılınabilir ise, durum geri besleme kontrolcü ile doğrusal olmayan sistem Eş. 2.22 için $(n - 1)$ boyutlu kararlı manifold oluşturulabilir.

İspat [35]

Eş. 2.22 için kontrol terimi $u = u_1 + u_2$ şeklinde iki parçaya ayrılabilir.

$$\dot{x} = f(x) + bu_1 + bu_2 \quad (2.24)$$

Sistem doğrusallaştırılırsa;

$$\dot{x} = Ax + F(x) + bu_1 + bu_2 \quad (2.25)$$

(A, b) ikilisinin kararlı kılınabilir olması koşulu ile $u_1 = -K^T x$ gibi bir durum geri besleme kontrolcü olsun. Bu durumda

$$\dot{x} = (A - bK^T)x + F(x) + bu_2 = \tilde{A}x + F(x) + bu_2 \quad (2.26)$$

olur.

$\dot{x} = \tilde{A}x + F(x) + bu_2$ sisteminde $\dot{x} = \tilde{A}x + F(x)$ için Teorem 2.1'e göre $(n - 1)$ boyutlu kararlı manifold hesaplanabilir. ■

2.3. Örnek

Aşağıdaki tek girişli doğrusal olmayan sistem düşünölsün.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= x_2 + x_1^3 + x_2^2 + u \end{aligned} \quad (2.27)$$

Sistemin denge noktası orijindedir. Sistem doğrusallaştırılarak $\dot{x} = Ax + F(x)$ matris formunda yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^3 + x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.28)$$

Kararlı manifoldun hesaplanabilmesi için sistemin denge noktasında eğer noktası oluşmalıdır. Yani sistemin en az bir kökü pozitif olmalıdır. Sistem Lemma 2.1'e göre düzenlenirse;

$$\dot{x} = Ax + F(x) + bu_1 + bu_2$$

Burada $u_1 = -K^T x$ gibi bir durum geri besleme kontrolcü, u_2 ise sistemi kararlı hale getirirken kullanılacak olan herhangi bir kontrolcüdür ve kararlı manifold hesabına bir etkisi yoktur.

$$\dot{x} = (A - bK^T)x + F(x) + bu_2 = \tilde{A}x + F(x) + bu_2$$

Sistemin köklerini -2, 1 yapacak şekilde bir durum geri besleme kontrolcü için kazanç matrisi hesaplanırsa $K^T = [4 \ 0]$ çıkar ve sistem aşağıdaki hali alır.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^3 + x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \quad (2.29)$$

Sistemin köklerini diyagonal hale getirmek için $z = T^{-1}x$ dönüşümü yapılırsa;

$$T^{-1}\tilde{A}T = A_z; \quad T^{-1}b = b_z$$

Burada $\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, $A_z = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $b = b_z$ ise

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Sistemin doğrusal olmayan $F(x)$ vektörü içinde koordinat dönüşümü yapılırsa;

$$G(z) = T^{-1}F(Tz) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \left\{ z_1^3 + \left(\frac{4}{3}z_1 - \frac{1}{3}z_2 \right)^2 \right\} \end{bmatrix}$$

Sistem yeni koordinat sisteminde yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \left\{ z_1^3 + \left(\frac{4}{3} z_1 - \frac{1}{3} z_2 \right)^2 \right\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_2$$

Kararlı manifold hesaplanırsa;

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, G(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \left\{ z_1^3 + \left(\frac{4}{3} z_1 - \frac{1}{3} z_2 \right)^2 \right\} \end{bmatrix}$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Eş. 2.13 genel olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$w^{(k+1)}(t, a) =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2(t-s)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} G(w^k(s, a)) ds - \int_t^\infty \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{(t-s)} \end{bmatrix} G(w^k(s, a)) ds$$

Ardışık yaklaşım metodu ile integral denkleminin çözümü yapılırsa;

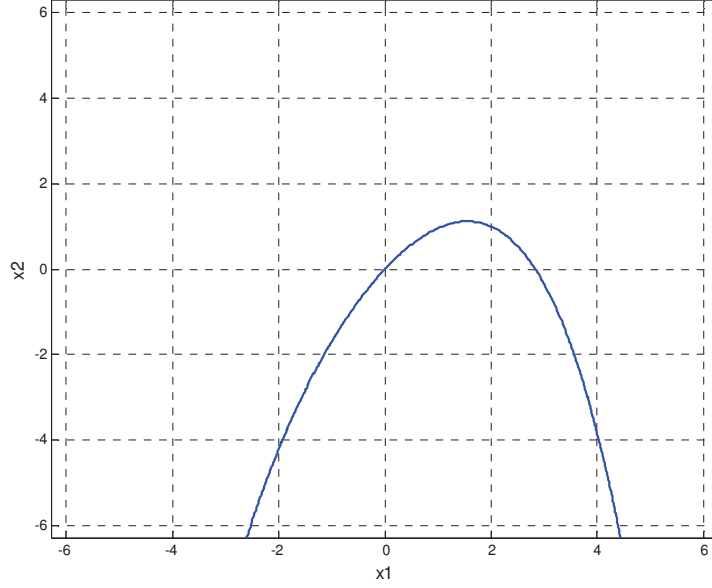
$$S: z_2 = \frac{16}{15} z_1^2 + \frac{1}{45} z_1^3 + \frac{8}{225} z_1^4 \quad (2.30)$$

Sistem $x = Tz$ koordinat dönüşümü ile orijinal koordinat eksenine çevrilir.

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = 4x_1 - 3x_2$$

$$S: \sigma(x, t) = 3x_2 - 4x_1 + \frac{16}{15} x_1^2 + \frac{1}{45} x_1^3 + \frac{8}{225} x_1^4 \quad (2.31)$$

Bu durumda sistemin kararlı manifoldu Şekil 2.3'te gösterildiği gibi olur.



Şekil 2.3. Örnek 2.3 için kararlı manifold

2.2.Yüksek Mertebeden Kayan Kipli Kontrol

Yüksek mertebeden kayan kipli kontrol, klasik kayan kipli kontrol yaklaşımının kayma yüzeyinin zamana göre yüksek mertebeden türevi üzerinde genelleştirilmiş halidir. Bu kontrol yaklaşımında orijinal kayan kipli kontrol yaklaşımın sağladığı avantajlar korunurken aynı zamanda oluşan çattırtı etkisini ortadan kaldırılabilir. Ayrıca çattırtıdan kaçınırken meydana gelebilecek hassasiyet kaybının da önüne geçilebilir [41].

Kayma derecesi, kayma yüzeyi $\sigma(x) = 0$ üzerindeki hareket kısıtları ile ilişkili dinamiklerin düzgünlük derecesini belirler. Tez bütünlüğünü korumak amacıyla yüksek mertebeden kayan kipli kontrol ile ilgili bazı tanımlamalar ve kabuller aşağıda verilmektedir.

2.6. Tanım

Sınırlı manifold $\sigma = 0$ 'ın tam olarak üzerinde olan her harekete ideal kayma denir [18].

2.7.Tanım

Sınırlı manifold $\sigma = 0$ 'ın yakın komşuluğunda meydana gelen her harekete gerçek kayma denir [18].

2.8.Tanım

Kayma derecesi r , toplam sürekli türev sayısı olarak tanımlanabilir. r 'inci dereceden kayma seti, kayma yüzeyi ile aşağıdaki eşitlik yardımı ile ilişkilendirilebilir [20].

$$\sigma = \dot{\sigma} = \ddot{\sigma} = \dots = \sigma^{(r-1)} = 0 \quad (2.32)$$

Yukarıdaki şartı sağlayan hareket, $\sigma(t, x) = 0$ 'a göre r 'inci mertebeden kayan kip olarak adlandırılır [20].

Yüksek mertebeden kayan kipli kontrol uygulamalarında temel sorun bilgi talebinin artmasıdır. Yani r 'inci mertebeden kayan kipli kontrolcü için kayma yüzeyinin $(r - 1)$ 'inci mertebeye kadar zamana göre türevlerine ihtiyaç vardır. Ancak bazı ikinci mertebeden kayan kipli kontrol algoritmaları bu ihtiyacı azaltan nitelikte oldukları için uygulamalarda bu tip ikinci mertebeden kayan kipli kontrolcüler tercih edilmektedir.

2.3. İkinci Mertebeden Kayan Kipli Kontrol

İkinci mertebeden kayan kipli kontrol, yüksek mertebeden kayan kipli kontrolcüler arasında daha basit ve anlaşılabilir olması sebebiyle en çok kullanılanıdır. Özellikle burulma kontrolcü ve süper burulma kontrolcü gibi algoritmalar tercih edilmektedir.

İkinci mertebeden kayan kipli kontrolde, klasik kayan kipli kontrolden farklı olarak kontrol çabası, kayma yüzeyinin ikinci türevi $\ddot{\sigma}$ 'in işareti ve büyüklüğü ile doğrudan ilişkilidir.

Aşağıdaki gibi tek girişli dinamik bir sistem düşünölsün.

$$\dot{x} = a(x, t) + b(x, t)u, \quad \sigma = \sigma(t, x) \quad (2.33)$$

Verilen σ_0, G_1, G_2 ve Φ pozitif sabitleri için aşağıdaki kabuller yapılsın [18].

- (1) Eş. 2.33'te belirtilen sistem için $|u| \leq \xi$ kabul edilsin. Burada $\xi > 1$ olan bir sabittir. $x \in X$ olsun. Burada X düzgün, sonlu boyutlu bir manifold olarak kabul edilir. Eşitlik 2.18'nin çözümünde bütün t zamanları için $u(t)$ süreklidir ve $|u| \leq \xi$ eşitliğini sağlar.
- (2) Herhangi bir sürekli u fonksiyonu için u_1 'in var olduğu ve her t_1 zamanında $|u| > u_1$ şartını sağladığı kabul edilsin. Bu durumda her $t > t_1$ için $\sigma(t)u(t) > 0$ olur.
- (3) Eğer $|\sigma(t, x)| < \sigma_0$ ise, σ_0, G_1, G_2 ve u_0 pozitif sabitleri vardır. Burada $u_0 < 1$ olur. Her u için $0 < G_1 \leq \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial u} \leq G_2$ şartı sağlanır ve $|u| > u_0$ eşitsizliği $\dot{\sigma}(t)u(t) > 0$ şartını sağlar. Burada $\{t, x, u: |\sigma(t, x)| < \sigma_0\}$ seti, doğrusallık bölgesi olarak adlandırılır.
- (4) Doğrusallık bölgesinde her $x \in X$ ve u için pozitif sabit Φ vardır ve aşağıdaki eşitsizliği sağlar. Burada $x \in X$ ve u birinci kabulde açıklanmıştır.

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \dot{\sigma}(t, x, u) + \frac{\partial}{\partial x} \dot{\sigma}(t, x, u)(a(x, t) + b(x, t)u) \right| \leq \Phi \quad (2.34)$$

Burada $x \in \mathcal{R}^n$ durum değişkeni ve $u \in \mathcal{R}^1$ kontrol girişidir. $a(x, t) \in \mathcal{R}^n$ ve $b(x, t) \in \mathcal{R}^n$ ise durum uzayı matrisleridir. $\sigma(t, x)$ ise kayma yüzeyini ifade etmektedir.

Bağıl dereceye göre sistem iki farklı durumda incelenebilir [15].

- Durum 1: bağıl derece $r = 1$, yani $\frac{\partial}{\partial u} \dot{\sigma} \neq 0$
- Durum 2: bağıl derece $r = 2$, yani $\frac{\partial}{\partial u} \dot{\sigma} = 0$, $\frac{\partial}{\partial u} \ddot{\sigma} \neq 0$

Durum 1: Bağıl derece $r = 1$ ise kayma yüzeyini zamana göre birinci türevinde kontrol terimi sıfırdan farklıdır. Yani eğer $\dot{\sigma}$ 'in kontrol girişine göre türevi alınırsa $\frac{\partial}{\partial u} \dot{\sigma} \neq 0$ olur. Bu yüzden kayma yüzeyinin zamana göre ikinci türevinde kontrol girişinin türevi $\dot{u}(t)$ vardır.

Bu durumda kontrol problemi birinci mertebeden kayan kipli kontrol metodu kullanılarak da rahatlıkla çözülebilir ancak kontrol girişindeki çatırtıdan kaçınmak için ikinci mertebeden kayan kipli kontrol kullanılabilir. Bu durumda $u(t)$ bir birinci mertebeden dinamik sistemin çıkışı ve kontrolünün zamana göre türevi $\dot{u}(t)$ ise yardımcı kontrol olarak kabul edilir [18].

Yardımcı kontrol $\dot{u}(t)$ süreksizdir ve kayma yüzeyinin değerini sıfıra doğru yönlendirirken ikinci mertebeden kayan kipli kontrol kayma yüzeyinin değerini sıfırda tutar. Böylece sistemin kontrol girişi $u(t)$ sürekli olur ve $u(t)$ 'de oluşacak olan çatırtı engellenir [18, 41].

Kayma yüzeyinin zamana göre birinci ve ikinci türevleri yazılırsa;

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial}{\partial t} \sigma(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} \sigma(t, x)[a(t, x) + b(t, x)u(t)] \quad (2.35)$$

$$\ddot{\sigma} = \varphi_1(t, x, u) + \gamma_1(t, x)\dot{u}(t) \quad (2.36)$$

Burada

$$\varphi_1(t, x, u) = \frac{\partial}{\partial t} \dot{\sigma}(t, x, u) + \frac{\partial}{\partial x} \dot{\sigma}(t, x, u)[a(t, x) + b(t, x)u(t)] \quad (2.37)$$

$$\gamma_1(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \sigma(t, x)b(t, x) \quad (2.38)$$

Durum 2: Bağlı derece $r = 2$ ise kayma yüzeyinin zamana göre birinci türevinde kontrol terimi sıfırdır. Kayma yüzeyinin zamana göre ikinci türevinde sıfırdan farklı bir $u(t)$ kontrol terimi vardır. Bu durumda kontrol direkt olarak $\dot{\sigma}$ 'ı etkilemez ama $\ddot{\sigma}$ 'ı etkiler [41].

Kayma yüzeyinin zamana göre birinci ve ikinci türevleri yazılırsa;

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial}{\partial t} \sigma(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} \sigma(t, x) a(t, x) \quad (2.39)$$

$$\ddot{\sigma} = \varphi_2(t, x, u) + \gamma_2(t, x) u(t) \quad (2.40)$$

Burada

$$\varphi_2(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \dot{\sigma}(t, x, u) + \frac{\partial}{\partial x} \dot{\sigma}(t, x, u) a(t, x) \quad (2.41)$$

$$\gamma_2(t, x) = \frac{\partial}{\partial x} \dot{\sigma}(t, x, u) b(t, x) \quad (2.42)$$

Burada $\gamma_2(t, x) \neq 0$ olmalıdır.

Bu durumda kontrol sinyali $u(t)$ süreksizdir.

Her iki durum için de kararlı hale getirilecek sistemin yapısı aynıdır. Bu yüzden iki durum içinde aşağıdaki gibi bir stabilizasyon problemi ele alınabilir.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \sigma(t, x) \\ \dot{y}_1(t) &= y_2(t) \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\dot{y}_2(t) = \varphi_n + \gamma(t, x) v(t)$$

Durum 1;

$$\varphi_n = \varphi_1(t, x, u) \quad (2.44)$$

$$v(t) = \dot{u}(t) \quad (2.45)$$

Durum 2;

$$\varphi_n = \varphi_2(t, x) \quad (2.46)$$

$$v(t) = u(t) \quad (2.47)$$

Burada φ_n ve $\gamma(t, x)$ aşağıdaki gibi pozitif sabit sayılar ile sınırlandırılabilir.

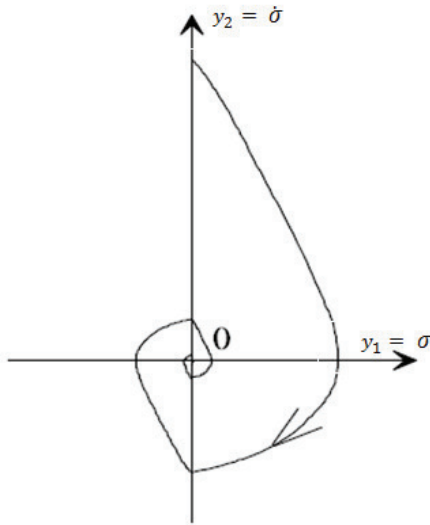
$$|\varphi_n| \leq \Phi \quad (2.48)$$

$$0 < G_1 \leq \gamma(t, x) \leq G_2 \quad (2.49)$$

İkinci mertebeden kayan kipli kontrol yaklaşımında kullanılan “Burulma Algoritması” ve “Süper Burulma Algoritması” aşağıdaki bölümlerde özetlenmektedir.

2.3.1. Burulma algoritması

Burulma algoritmasına göre tasarlanan kontrolcü, ikinci mertebeden kayan kipli kontrolcü algoritmalarında en çok kullanılanıdır. Bu kontrolcüde sistem $\sigma\dot{\sigma}$ durum uzayında orijin etrafında helezonlar çizer (Şekil 2.4). Yörüngeler sonlu zamanda orijine yakınsarken sonsuz sayıda döngü gerçekleştirirler.



Şekil 2.4. Burulma algoritması faz düzlemi yörüngeleri [18]

2.2. Teorem [18]

(1), (2), (3) ve (4) numaralı kabuller altında aşağıdaki Eş. 2.50 ile belirtilen burulma kontrolcü ikinci mertebeden kayan kipli kontrol algoritmasıdır.

$$\dot{u} = \begin{cases} -u & ; & |u| > 1 \\ -V_m \operatorname{sgn}(y_1); & y_1 y_2 \leq 0, & |u| \leq 1 \\ -V_M \operatorname{sgn}(y_1); & y_1 y_2 > 0, & |u| \leq 1 \end{cases} \quad (2.50)$$

Kayma yüzeyinin sonlu zamanda yakınsaması için kontrol algoritmasındaki parametreler aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

$$V_M > V_m \quad (2.51)$$

$$V_m > 4 \frac{G_2}{\sigma(0)} \quad (2.52)$$

$$V_m > \frac{\Phi}{G_1} \quad (2.53)$$

$$G_1 V_M - \Phi > G_2 V_m + \Phi \quad (2.54)$$

İspat

Teoremin ispatı [18]'de verilmektedir. ■

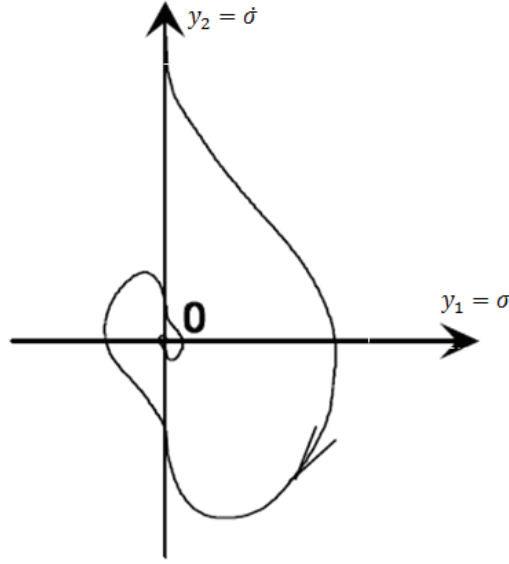
Benzer bir şekilde bağıl derecesi 2 olan sistemler içinde aşağıdaki kontrol kuralı kullanılabilir [41].

$$u = \begin{cases} -V_m \operatorname{sgn}(y_1); & y_1 y_2 \leq 0 \\ -V_M \operatorname{sgn}(y_1); & y_1 y_2 > 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

2.3.2. Süper burulma algoritması

Bu algoritma bağıl derecesi bir olan sistemler için çatırtıyı önlemek amacı ile geliştirilmiştir. Bu kontrolcüde de burulma algoritmasında olduğu gibi yörüngeler orijin etrafında helezonlar çizerek yakınsar. Ancak sürekli olan kontrol terimi iki parçaya bölünmüştür. Bunlardan biri zamana göre türevli süreksiz bir fonksiyon ile tanımlanırken, diğeri kayma yüzeyinin sürekli bir fonksiyonudur.

Süper burulma algoritmasına göre tasarlanan kontrolcüde kayma yüzeyi ve kayma yüzeyinin türevinin oluşturduğu yörüngelerin $\sigma\dot{\sigma}$ durum uzayında davranışı burulma kontrolcüdeki yörünge davranışına benzerlik gösterir.



Şekil 2.5. Süper burulma algoritması faz düzlemi yörüngeleri [18]

2.3. Teorem [18]

(1), (2), (3) ve (4) numaralı kabuller altında aşağıdaki Eş. 2.56 ile belirtilen süper burulma kontrolcü (super twisting controller) ikinci mertebeden kayan kipli kontrol algoritmasıdır.

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \quad (2.56)$$

$$\dot{u}_1(t) = \begin{cases} -u & ; \quad |u| > 1 \\ -a \operatorname{sgn}(y_1) & ; \quad |u| \leq 1 \end{cases} \quad (2.57)$$

$$u_2(t) = \begin{cases} -\lambda |\sigma_0|^\rho \operatorname{sgn}(y_1) & ; \quad |y_1| > \sigma_0 \\ -\lambda |y_1|^\rho \operatorname{sgn}(y_1) & ; \quad |y_1| \leq \sigma_0 \end{cases} \quad (2.58)$$

Kontrol algoritmasındaki parametreler aşağıdaki şartları sağlamalıdır.

$$\alpha > \frac{\Phi}{G_1} \quad (2.59)$$

$$\lambda^2 \leq \frac{4\Phi G_2(\alpha+\Phi)}{G_1^2 G_1(\alpha-\Phi)} \quad (2.60)$$

$$0 < \rho \leq 0,5 \quad (2.61)$$

İspat

Teoremin ispatı [18] ve [20]'de verilmektedir. ■

Eş. 2.33'deki gibi kontrol edilmiş sistem doğrusal olarak u 'ya bağlı olduğunda, kontrolün sınırlandırılması gerekmez ve $\sigma_0 \rightarrow \infty$ olur. Bu durumda kontrol kuralı aşağıdaki gibi basitleştirilebilir [20].

$$u = -\lambda|y_1|^\rho \text{sgn}(y_1) + u_1 \quad (2.62)$$

$$\dot{u}_1 = -\alpha \text{sgn}(y_1) \quad (2.63)$$

2.4. Yöntemin Matematiksel Modele Uygulanması

Aşağıdaki gibi bir matematiksel model ele alınsın.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 2u \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u \\ \dot{x}_3 &= 3x_3 + x_1^3 - x_2^2 + 3u\end{aligned}\tag{2.64}$$

Sistemin denge noktası orijindedir.

Sistem $\dot{x} = Ax + F(x) + bu$ matris formunda yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1^3 - x_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} u\tag{2.65}$$

Kayma yüzeyi Teorem 2.1'de ele alınan kararlı manifold yöntemi ile hesaplanırsa;

$$\sigma(t, x) = x_3 + \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{1}{5}x_2^2 \text{ olur.}$$

Karşılaştırılma yapılabilmesi için sistem $x_0^T = [-3 \ 4 \ 8]$ başlangıç koşulu için $t = 10$ saniye süre ile 0.001 zaman aralığı kullanılarak, kayan kipli kontrolcü, burulma kontrolcü ve süper burulma kontrolcü algoritmalarına göre ayrı ayrı incelenmektedir.

Kayan kipli kontrolcü kullanılırsa kontrol girişi aşağıdaki gibi iki kısımdan oluşur.

$$u = u_{e\mathcal{S}} + u_k\tag{2.66}$$

Kayma yüzeyinin zamana göre türevinden sistemi kayma yüzeyine yönlendirecek eşdeğer kontrolcü elde edilir.

$$\dot{\sigma}(t, x) = 3x_3 + \frac{1}{2}x_1^3 - \frac{3}{5}x_2^2 + u_{e\mathcal{S}} \left(3 + x_1^2 - \frac{2}{5}x_2 \right) \text{ olur.}$$

$\dot{\sigma}(t, x) = 0$ için;

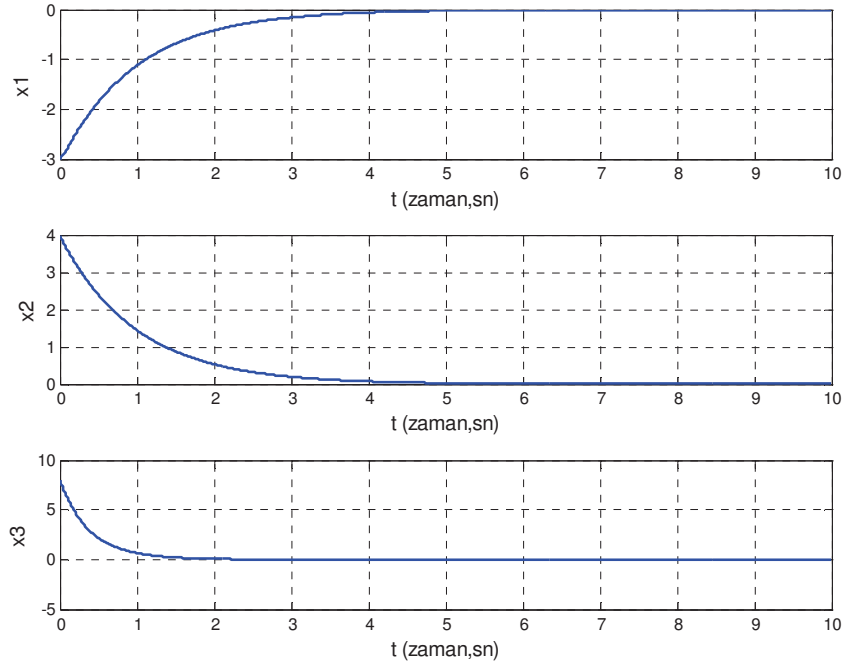
$$u_{eş} = -\frac{3x_3 + \frac{1}{2}x_1^3 - \frac{3}{5}x_2^2}{3 + x_1^2 - \frac{2}{5}x_2} \quad (2.67)$$

Kontrol girişinin ikinci kısmı ise sistemi kayma yüzeyi üzerinde tutacak şekilde aşağıdaki gibi seçilirse;

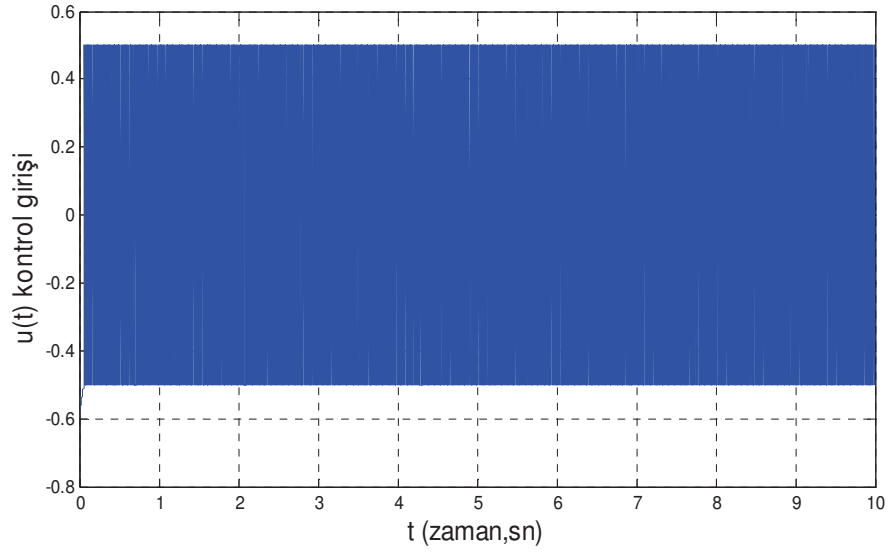
$$u_k = -k \operatorname{sgn}(\sigma) \quad (2.68)$$

$$k = 0.5. \quad (2.69)$$

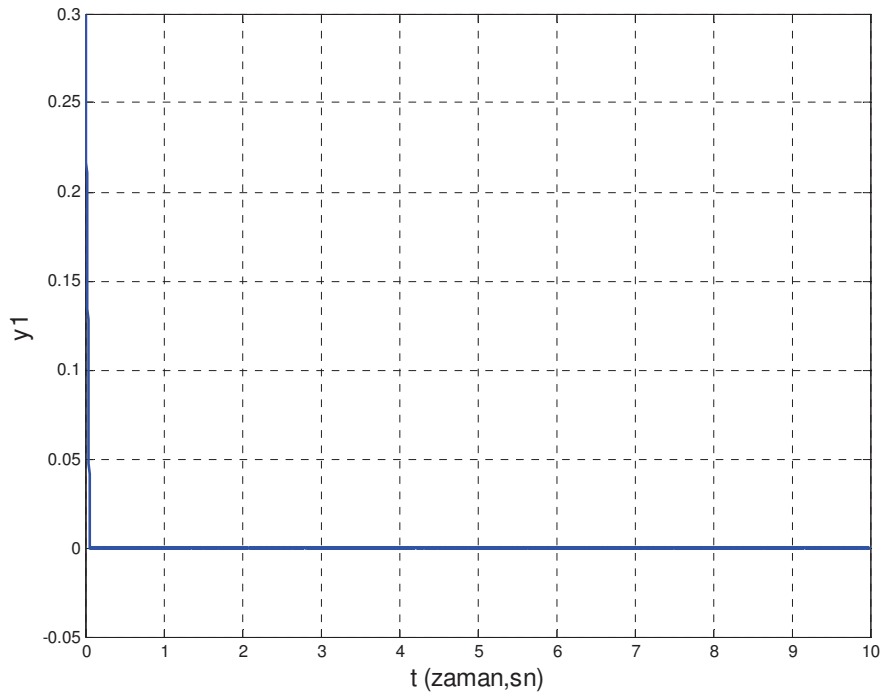
Sistemin durum değişkenleri (Şekil 2.6), kontrol çabası (Şekil 2.7) ve kayma yüzeyinin değerinin değişimi (Şekil 2.8) aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.6. Sistem durum değişkenleri (Kayan kipli kontrol)



şekil 2.7. Kontrol abası (Kayan kipli kontrol)



şekil 2.8. Kayma yüzeyinin zamanla değişimi (Kayan kipli kontrol)

Sistemin bağıl derecesi birdir. Sistem Eş. 2.43'e göre düzenlenirse;

$$y_1(t) = x_3 + \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{1}{5}x_2^2$$

$$\dot{y}_1(t) = y_2(t) = 3x_3 + \frac{1}{2}x_1^3 - \frac{3}{5}x_2^2 + u \left(3 + x_1^2 - \frac{2}{5}x_2 \right) \quad (2.70)$$

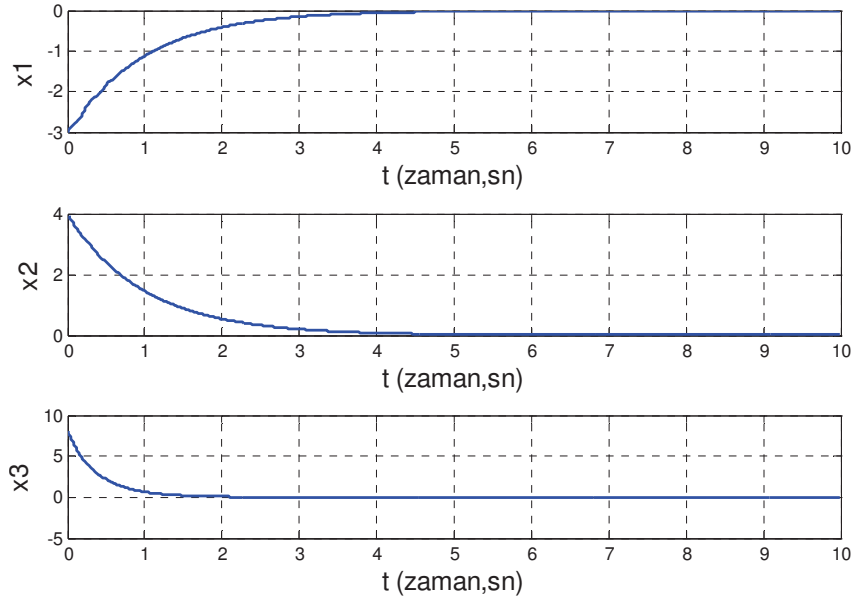
$$\dot{y}_2(t) = 9x_3 + \frac{3}{2}x_1^3 - \frac{9}{5}x_2^2 + u \left(9 + x_1^2 + 4x_1 - \frac{4}{5}x_2 - \frac{2}{5}u \right) + \dot{u} \left(3 + x_1^2 - \frac{1}{5}x_2 \right)$$

Bu durumda;

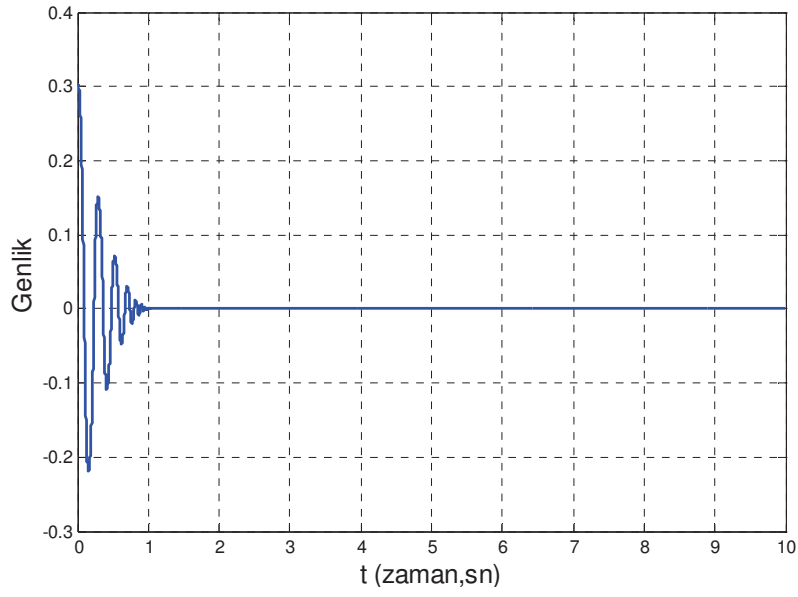
$$\varphi_n = 9x_3 + \frac{3}{2}x_1^3 - \frac{9}{5}x_2^2 + u \left(9 + x_1^2 + 4x_1 - \frac{4}{5}x_2 - \frac{2}{5}u \right) \quad (2.71)$$

$$\gamma(t, x) = 3 + x_1^2 - \frac{1}{5}x_2 \text{ olur.} \quad (2.72)$$

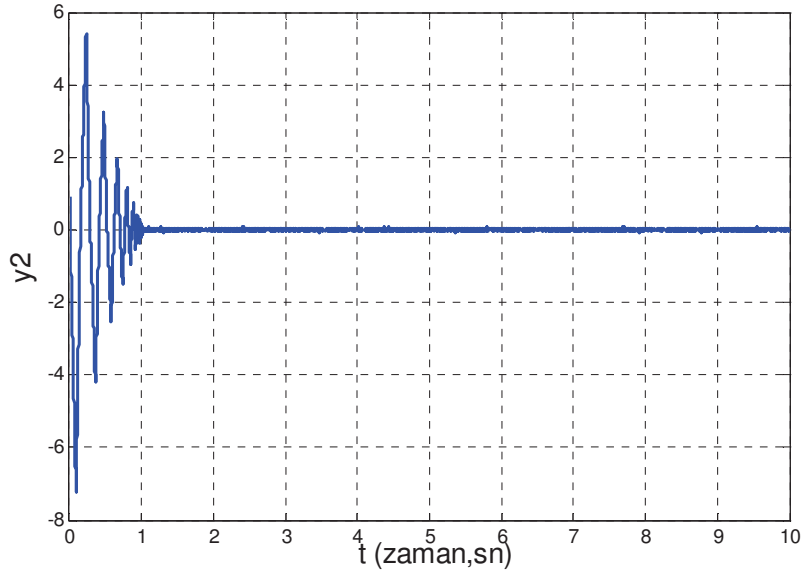
Sisteme Teorem 2.2'ye göre kontrol parametreleri $V_m = 8$ ve $V_M = 14$ seçilerek burulma kontrolcü algoritması uygulanırsa sistemin durum değişkenleri (Şekil 2.9), kayma yüzeyi ve türevinin faz düzleminde değişimi (Şekil 2.12) ve kontrol çabası (Şekil 2.13) aşağıdaki gibi olur.



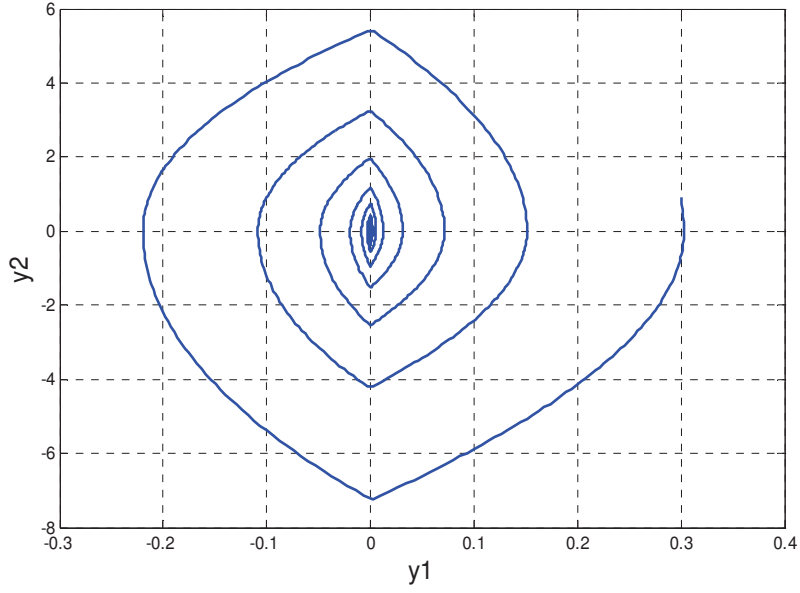
Şekil 2.9. Sistem durum değişkenleri (Burulma algoritması)



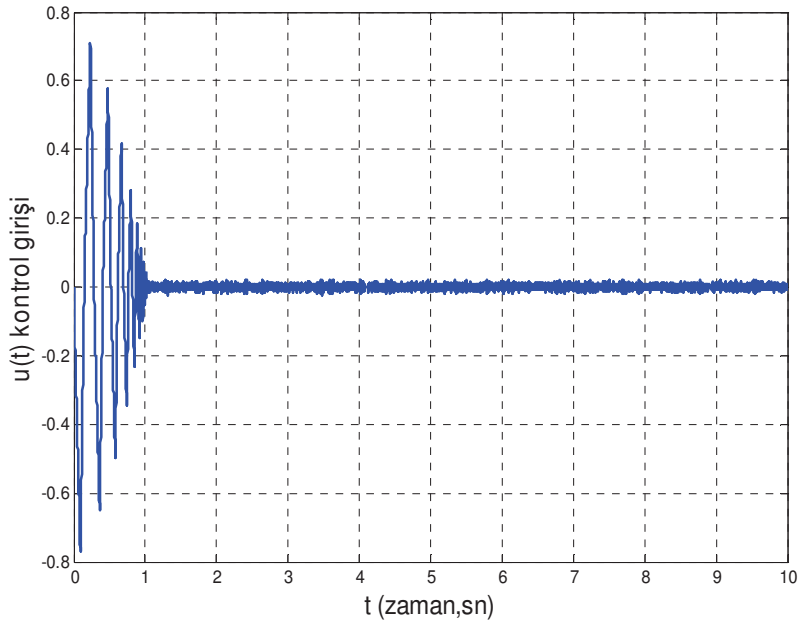
Şekil 2.10. Kayma yüzeyinin (y_1) zamanla değişimi (Burulma algoritması)



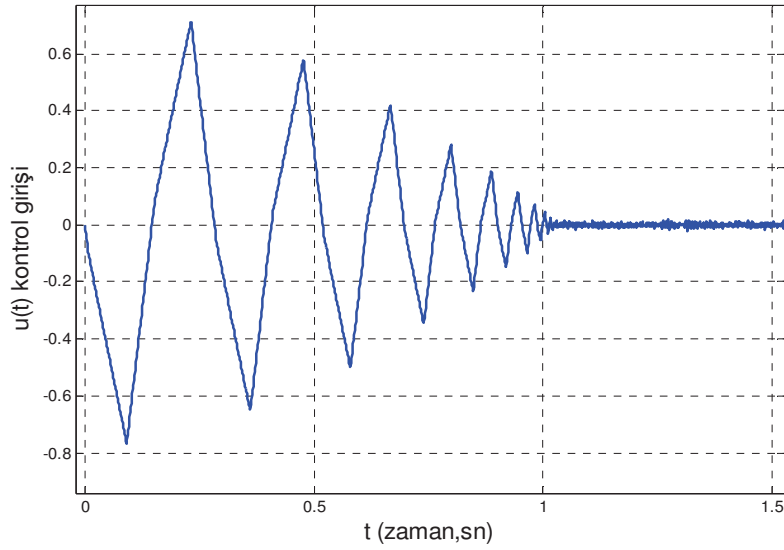
Şekil 2.11. Kayma yüzeyi türevinin (y_2) zamanla değişimi (Burulma algoritması)



Şekil 2.12. Kayma yüzeyi (y_1) ve türevinin (y_2) faz düzleminde değişimi (Burulma algoritması)

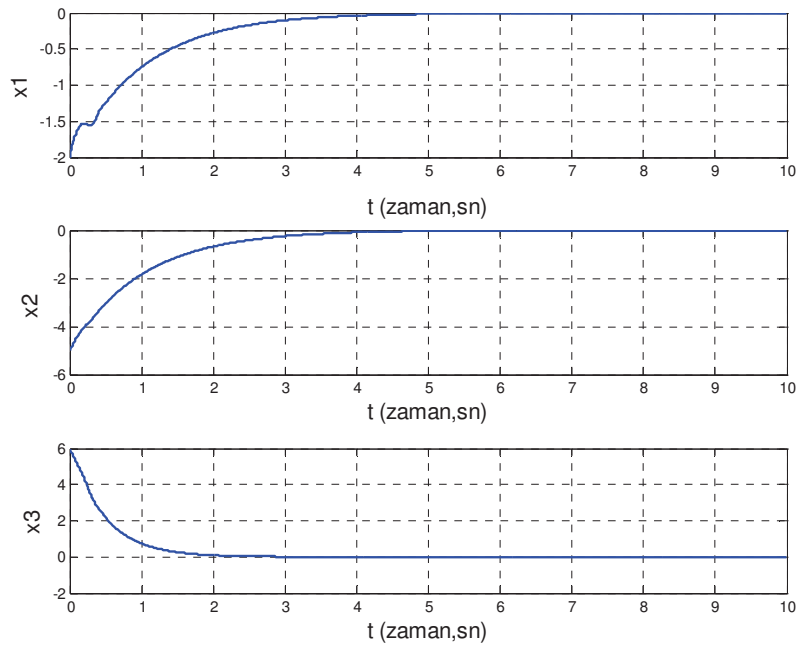


Şekil 2.13. Kontrol çabası (Burulma algoritması)

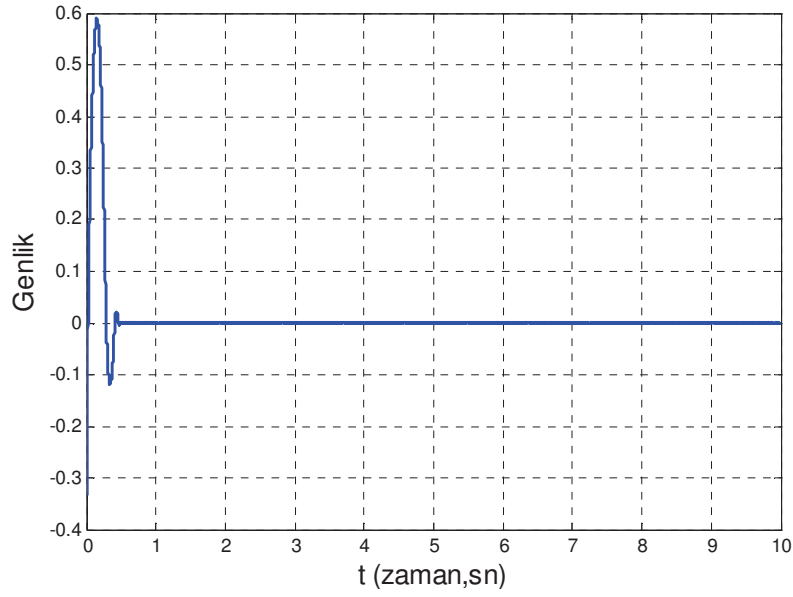


Şekil 2.14. Kontrol çabası (Burulma algoritması için 0-1.5 saniye arası yakınlaştırılmış)

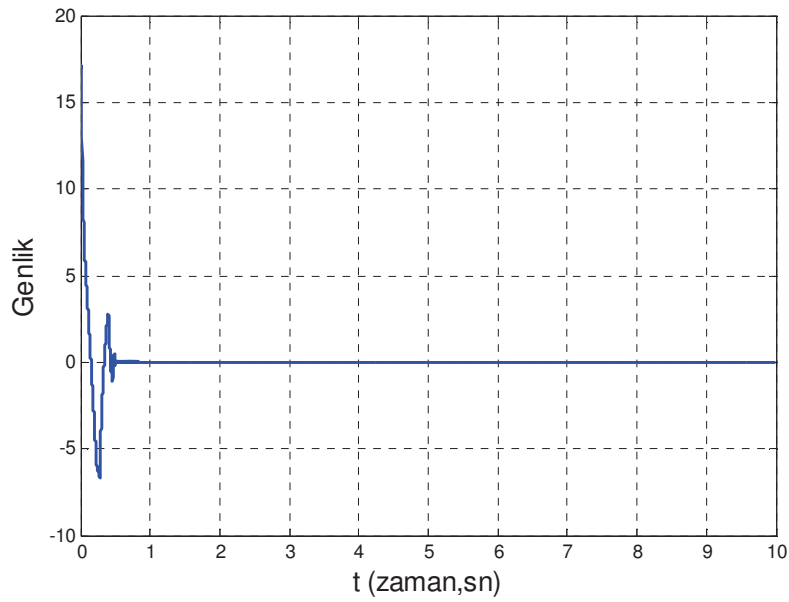
Sisteme Teorem 2.3'e göre kontrol parametreleri $\lambda = 1$, $\alpha = 10$ ve $\rho = 0.5$ seçilerek süper burulma kontrolcü algoritması uygulanırsa sistemin durum değişkenleri (Şekil 2.15), kayma yüzeyi ve türevinin faz düzleminde değişimi (Şekil 2.18) ve kontrol çabası (Şekil 2.19) aşağıdaki gibi olur.



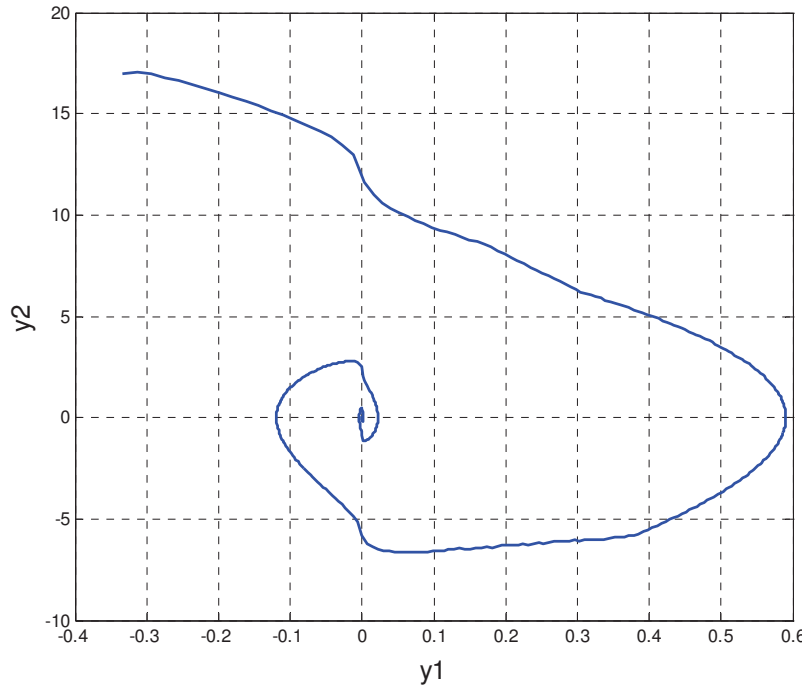
Şekil 2.15. Sistem durum değişkenleri (Süper burulma algoritması)



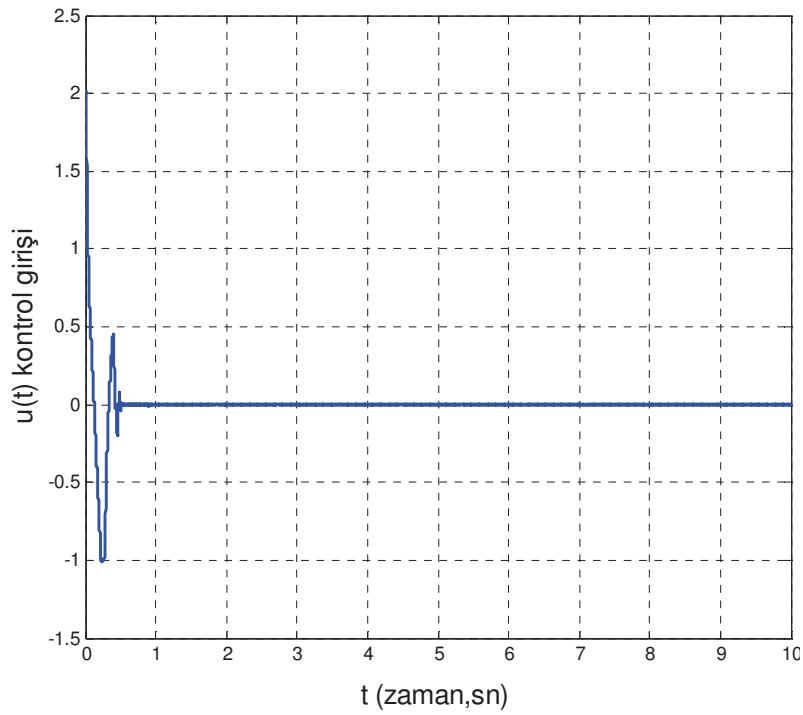
Şekil 2.16. Kayma yüzeyinin (y_1) zamanla değişimi (Süper burulma algoritması)



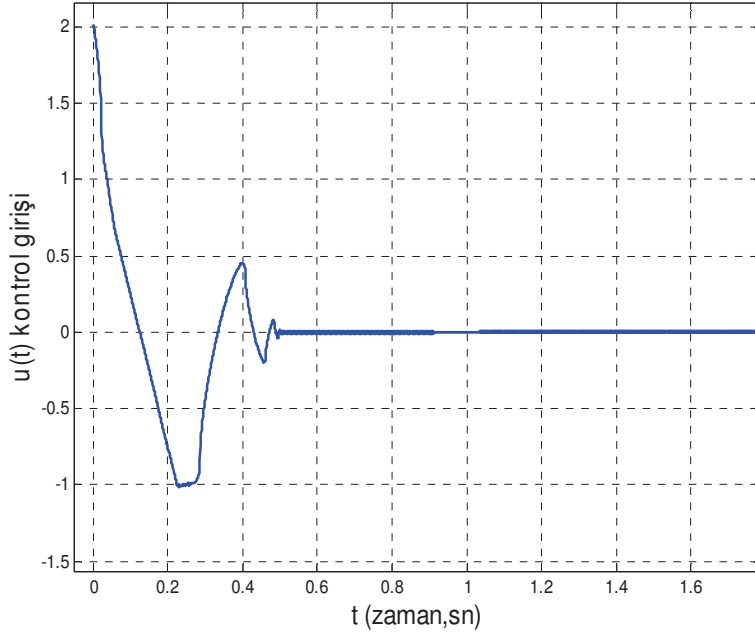
Şekil 2.17. Kayma yüzeyi türevinin (y_2) zamanla değişimi (Süper burulma algoritması)



Şekil 2.18. Kayma yüzeyi (y_1) ve türevinin (y_2) faz düzleminde değişimi (Süper burulma algoritması)



Şekil 2.19. Kontrol çabası (Süper burulma algoritması)



Şekil 2.20. Kontrol çabası (Süper burulma algoritması için 0-1.6 saniye arası yakınlaştırılmış)

Benzetim sonuçları incelendiğinde sırası ile kayan kipli kontrol (Şekil 2.6), ikinci mertebeden kayan kipli kontrol algoritmalarından burulma kontrol (Şekil 2.9) ve süper burulma kontrol (Şekil 2.15) algoritmalarına göre sistemin dinamik davranışı görülmektedir. Üç yaklaşımda da dört saniye sonra sistemin bütün durum değişkenleri denge noktasında kararlı hale gelmiştir.

Kayan kipli kontrolcü için kontrol çabası (Şekil 2.7) ve kayma yüzeyinin zamanla değişimi (Şekil 2.8) incelenirse sistem saniyenin onda biri kadar bir sürede ulaşma aşamasını tamamlayarak kayma yüzeyine gelmektedir. Bu andan sonra kontrolcü sistemi kararlı halde tutabilmek için anahtarlama yaparak sabit genlikte yüksek frekanslı çatırtıya sebep olmuştur.

Burulma kontrol ve süper burulma kontrolde ise sistem kayma yüzeyine daha yumuşak hareketlerle ulaşmakta, bu esnada ise kayma yüzeyi ile kayma yüzeyinin türevi faz düzleminde burulma hareketi gerçekleştirilerek sıfıra yaklaşmaktadır. Bu davranış burulma kontrol için Şekil 2.12, süper burulma kontrol için Şekil 2.18'de görülmektedir.

Burulma kontrol (Şekil 2.13) ve süper burulma kontrol (Şekil 2.19) için kontrol çabaları incelendiğinde kayan kipli kontrolde oluşan çatırtının burulma kontrolde oldukça azaldığı, süper burulma kontrolde ise yok olduğu görülmektedir. Ancak kontrol çabasında genlikler artmaktadır.

Süper burulma kontrolde kontrol sinyalinin bir saniye sonra sıfır olduğu ancak sistemin durum değişkenlerinin dört saniyede kararlı hale geldiği görülmektedir. Gözlemlenen bu davranış kayma yüzeyi olarak kararlı manifold seçilmesinden kaynaklanmaktadır. Kararlı manifold sistemin kendi dinamik yapısına göre tasarlandığı için sistem kayma yüzeyi üzerinde kararlı bir davranış gösterme eğilimindedir.

Sonuç olarak açıkça görüldüğü gibi sistemin cevabının aynı kalmasına rağmen kontrol çabası ve kayan kipli kontrolde oluşan çatırtı burulma kontrolcü ve süper burulma kontrolcü ile birlikte gittikçe azalmaktadır.

2.5. Bölüm Özeti

Bu bölümde değişken yapıli kontrolde kayma yüzeyi tasarımı için alternatif bir yöntem olarak kararlı manifold teoremi önerilmiştir. Çatırtıyı azaltmada kullanılacak değişken yapıli kontrolcü olarak ise ikinci mertebeden kayan kipli kontrol ele alınmıştır. Kararlı manifoldun kayma yüzeyi olarak kullanılması ve ikinci mertebeden kayan kipli kontrol konuları hakkında yapılmış çeşitli çalışmalar mevcuttur. Ancak daha önceki çalışmalardan farklı olarak doğrusal olmayan sistemlerin kararlı hale getirilmesi için ilk kez kararlı manifold üzerinde ikinci mertebeden kayan kipli kontrol yöntemi önerilmiştir. Bölüm içerisinde yöntemin uygulanması ile ilgili örnekler verilmiştir.

3. KAYAN SEKTÖR KONTROL

Değişken yapılı kontrol yönteminde sistem önceden tanımlanmış bir kayma manifoldu üzerinde kontrol edilmektedir. Bu sayede sistem, ulaşma aşamasında kayma manifolduna geldikten sonra anahtarlama aşamasında belli türdeki belirsizlikler ve bozucu dış etkenlerden bağımsız bir şekilde kontrol edilebilir. Kayan kipli kontrol bu özelliği ile kararlılık ve gürbüzlük açısından oldukça avantajlı olsa da anahtarlama aşamasında meydana gelen yüksek frekanslı çattırtıdan dolayı, kontrol edilen sistemde yorulma ve sistem ömründe kısalma gibi istemeyen sonuçlar meydana gelmektedir. Çattırtının azaltılması için birçok çalışma yapılmıştır. Ancak çattırtı azaltılırken sistemin kararlılığı ve gürbüzlüğü de azalmaktadır.

Tek girişli sistemlerde sistemin kararlılığından ödün vermeden çattırtıyı azaltmak ya da yok etmek için kayan sektör kontrol metodu geliştirilmiştir. Kayan sektör kontrol yönteminde kullanılan birkaç farklı değişken yapılı kontrolcü olmasına rağmen temelde hepsi sistemi kendi dinamikleri yardımı ile türetilen kararlı bir kayma sektörü içerisine yönlendirerek bu sektör içerisinde kontrol eder. Halen geliştirilmekte olan bir yöntem olduğu için yapılan çalışmaların sayısı kayan kipli kontrol metoduna oranla daha azdır. Ancak başta Furuta ve Pan'ın çalışmaları olmak üzere literatürde çeşitli çalışmalar mevcuttur [11-13, 25-30, 39].

Furuta ve Pan çalışmalarında doğrusal sistemler için kayan sektör metodunu tasarlamış, cebirsel Ricatti denklemi kullanarak sürekli zaman ve ayrık zaman değişken yapılı kontrolcüler geliştirmişlerdir [11, 13].

Yöntemin ilk deneysel uygulama dairesel hareketler yaparak çalışan bir ters sarkaç sistemidir ve literatüre "Furuta sarkacı" olarak geçmiştir. Pan ve arkadaşları bir çalışmalarında kayan kipli kontrol ile kayan sektör kontrol metotlarını karşılaştırarak kayan sektör yöntemini Furuta sarkacının kontrolünde kullanmışlardır [13].

Suzuki ve arkadaşları çalışmalarında durum değişkenlerine bağlı kayan sektör tasarımı yaparak Furuta sarkacını kontrol etmiş ve deneysel sonuçlar ile benzetim sonuçlarını karşılaştırmışlardır. Ancak çalışmalarında kullandıkları kontrolcüde değişken yüzey eğimlerini hesaba katmamışlardır [39].

Pan ve arkadaşları ise doğrusal olmayan sistemler için diferansiyel Riccati denkleminde faydalanarak zamanla değişen doğrusal olmayan sektör tasarımı yapmışlardır. Geliştirdikleri sektörü kullanarak sistemdeki parametre belirsizliklerinin de üstesinden gelecek kayan sektör kontrol algoritması türetmişlerdir [25].

Bu bölümde öncelikle doğrusal sistemler için kayan sektör kontrol anlatılmıştır, daha sonra doğrusal olmayan sistemler için doğrusal olmayan, zamanla değişen kayan sektör konusuna değinilmiştir. Son olarak, doğrusal olmayan sistemler için değişken yüzey eğimleri de hesaba katılarak durum değişkenlerine bağlı doğrusal sektör tasarımı ile kayan sektör kontrol yöntemi türetilmiş ve belirsizlik içeren sistemler için de geliştirilmiştir. Durum değişkenlerine bağlı kayan sektör tasarımı konusunda Özcan'ında çalışmaları mevcuttur. Özcan çalışmasında yüzey eğimlerindeki değişimi de göz önünde bulunduran durum değişkenlerine bağlı kayan sektör kontrolcü tasarlamıştır [24]. Ancak teoremlerde ve ispatlarda eksiklikler bulunmaktadır. Eksikliklerin kapatılabilmesi amacıyla gerekli teoremler yazılıp ispatları yapılarak bu bölümde tekrar ele alınmaktadır.

Bölüm içinde anlatımlar örnekler ile desteklenmiştir. Bölüm sonunda ise önerilen yöntemler fiziksel bir örnek üzerine uygulanarak kayan kipli kontrol metodu ile karşılaştırılmaktadır.

3.1. Doğrusal Sistemler İçin Kayan Sektör Kontrol

Doğrusal, zamanla değişmeyen, tek girişli sürekli bir sistemi ele alınsın.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad (3.1)$$

Burada $x(t) \in \mathcal{R}^n$ ve $u(t) \in \mathcal{R}^1$ olup sırası ile durum ve giriş vektörleridirler. A ve b ise uygun boyutlarda sabit matrislerdir ve (A, b) çifti kontrol edilebilirdir.

3.1. Tanım [13]

Sistemin P-norm'u aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$\|x\|_P = (x^T P x)^{1/2}, \quad x \in \mathcal{R}^n \quad (3.2)$$

Burada $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ olup pozitif tanımlı simetrik bir matristir.

P-norm'un karesi Lyapunov fonksiyonu olarak kabul edilirse;

$$L(t) = \|x\|_P^2 = x^T P x > 0, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n, \quad x \neq 0 \quad (3.3)$$

Eğer Eş. 3.1'de verilen otonom sistem kuadratik kararlı ise pozitif tanımlı simetrik bir P matrisi ve pozitif yarı tanımlı simetrik bir R matrisi vardır.

$$R = C^T C$$

$$\dot{L}(t) = x^T (A^T P + P A) x \leq -x^T R x, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n \quad (3.4)$$

Burada $P \in \mathcal{R}^{n \times n}, R \in \mathcal{R}^{n \times n}, C \in \mathcal{R}^{l \times n}, l \geq 1$ olup (C, A) ikilisi gözlenebilirdir. Bu durumda sistemi durum uzayında iki parçaya ayırmak mümkündür. Sistemin bir parçası $x \in \mathcal{R}^n$ nin bazı elemanları için $\dot{L}(t) > -x^T R x$ şartını sağlar, diğer parçası ise $x \in \mathcal{R}^n$ nin diğer elemanları için $\dot{L}(t) \leq -x^T R x$ şartını sağlar. $\dot{L}(t) \leq -x^T R x$ şartını sağlayan elemanlar, P-norm değerinin sıfır kontrol girişi ile azaldığı özel bir alt grup oluştururlar. Bu alt grup PR-kayma sektörü olarak tanımlanır.

3.2. Tanım [13]

\mathcal{R}^n nin alt kümesi olan PR-kayma sektörü tanımlanırsa;

$$\mathcal{S} = \{x | x^T (A^T P + PA)x \leq -x^T R x, x \in \mathcal{R}^n\} \quad (3.5)$$

Burada $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ pozitif tanımlı simetrik bir matris, $R \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ise pozitif yarı tanımlı simetrik bir matristir. $R = C^T C, C \in \mathcal{R}^{l \times n}, l \geq 1$ olup (C, A) ikilisi gözlenebilirdir.

Eş. 3.1'de tanımlanan sistemin P-normu, PR-kayma sektörü içerisinde sıfır kontrol girişi ile azalır. Eş. 3.3'de tanımlanan Lyapunov fonksiyonu ise $\dot{L}(t) \leq -x^T R x \leq 0, \forall x \in \mathcal{S}$ şartını sağlar.

Bu şekilde tanımlanan PR-kayma sektörü hiçbir zaman boş küme değildir. Çünkü en azından sıfır durumu yukarıda eşitsizliği sağlar ve sıfır durumu PR-kayma sektörü içinde yer alır.

3.1. Teorem [13]

Eş. 3.1 gibi tanımlanan herhangi bir sistemin sıfır kontrol girişine sahip olduğu kabul edilsin. Bu sistemin, Tanım 3.2'deki gibi tanımlanan herhangi bir pozitif tanımlı simetrik matris P ve pozitif yarı tanımlı simetrik matris R için Eş. 3.4'teki gibi tanımlanan bir PR-kayma sektörü vardır ve bu sektör aşağıdaki formda yeniden yazılabilir.

$$\mathcal{S} = \{x | s^2(x) \leq \delta^2(x), x \in \mathcal{R}^n\} \quad (3.6)$$

Burada;

$$s^2(x) = x^T P_1 x \geq 0, \quad (3.7)$$

$$\delta^2(x) = x^T P_2 x \geq 0, \quad (3.8)$$

P_1 ve P_2 pozitif yarı tanımlı simetrik matrislerdir.

İspat [13]

$\Omega = A^T P + PA + R$ olsun.

Daha sonra Eş. 3.5'te tanımlanan PR-kayma sektörü aşağıdaki eşitlik yardımı ile hesaplınsın.

$$x^T \Omega x \leq 0 \quad (3.9)$$

Ω matrisi için gerçek ortogonal bir $U \in \mathcal{R}^{n \times n}$ matrisi vardır.

$$U^T \Omega U = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n) \quad (3.10)$$

Burada $r_i (i = 1, 2, \dots, n)$, Ω matrisinin özdeğerleridir. Ω matrisi simetrik matrisi olduğu için bütün kökler gerçektir.

$$\bar{P}_1 = \text{diag} \left(\frac{|r_1| + r_1}{2}, \frac{|r_2| + r_2}{2}, \dots, \frac{|r_n| + r_n}{2} \right),$$

$$\bar{P}_2 = \text{diag} \left(\frac{|r_1| - r_1}{2}, \frac{|r_2| - r_2}{2}, \dots, \frac{|r_n| - r_n}{2} \right) \text{ olarak kabul edilsin.}$$

Yani \bar{P}_1 ve \bar{P}_2 sırası ile Ω matrisinin pozitif ve negatif özdeğerlerinden oluşturulmuştur. Bu durumda aşağıdaki koşul geçerlidir.

$$U^T \Omega U = \bar{P}_1 - \bar{P}_2 \quad (3.11)$$

Burada $\bar{P}_i \geq 0 (i = 1, 2)$. $P_i = U \bar{P}_i U^T$, ($P_i \geq 0, i = 1, 2$) ise $\Omega = P_1 - P_2$ olur.

Böylece Eş. 3.5'te tanımlanan PR-kayma sektörü, Eş. 3.6'daki gibi yeniden yazılabilir. Bu durum Eş. 3.1'deki gibi tanımlanan herhangi bir sistem için sıfır kontrol girişi ile birlikte PR-kayma sektörü olduğu anlamına gelir. ■

$n_i = \text{rank}(P_i)$, ($i = 1, 2$) ve $n_3 = n - n_1 - n_2$. n_1, n_2, n_3 sırasıyla Ω matrisinin pozitif, negatif ve sıfır özdeğerleri olsun.

Buna göre bazı özel PR-kayma sektörlerinin olduğu söylenebilir [13].

- Eğer $n_1 = 0$ ise PR-kayma sektörü(\mathcal{S}), \mathcal{R}^n 'e eşittir.
- Eğer $n_1 = n_2 = 1$ ise PR-kayma sektörü(\mathcal{S}), $s(x)$ ve $\delta(x)$ şeklinde tanımlanan iki doğrusal fonksiyon ile hesaplanır.

$$s(x) = Sx = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n]x, \quad (3.12)$$

$$\delta(x) = Dx = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n]x, \quad (3.13)$$

S ve D sırası ile $S^T S = P_1$ ve $D^T D = P_1$ denklemlerini sağlar. PR-kayma sektörü basitleştirilmiş şekliyle aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\mathcal{S} = \{x \mid |s(x)| \leq |\delta(x)|, \ x \in \mathcal{R}^n\} \quad (3.14)$$

- Eğer $n_2 = 0$ ve $(n - n_1) > 0$ ise $x^T P_1 x = 0$ hesaplanması ile PR-kayma sektörü, PR-kayma yüzeyine indirgenir ve PR-kayma yüzeyinin boyutu $(n - n_1)$ 'e eşittir.
- Eğer $n_1 = n$ ise PR-kayma sektörü, $x = 0$ olan sıfır durumuna indirgenir.

$n_1 = 1$ ve $n_2 \neq 1$ için oluşturulan kayma sektörüne basitleştirilmiş PR-kayma sektörü denir. Özel PR-kayma sektörleri ile ilgili açıklamalar [13]'de ayrıntılı olarak verilmektedir.

3.1.1. Basitleştirilmiş PR-kayma sektörü tasarımı

Doğrusal sistemler için pratik kayan sektör uygulamalarında kullanılan sektör basitleştirilmiş PR-kayma sektörüdür. Bu sektörün kullanılması tasarımı basitleştirerek kayma yüzeyinin ve kayma sektörünün doğrusallığını sağlar.

3.3. Tanım [13]

Basitleştirilmiş PR-kayma sektörü \mathcal{R}^n 'nin alt kümesi olarak aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$\mathcal{S} = \{x \mid |s(x)| \leq \delta(x), x \in \mathcal{R}^n\} \quad (3.15)$$

Burada $s(x)$ doğrusal fonksiyon ve $\delta(x)$ ise $\delta^2(x)$ karesel fonksiyonunun kareköküdür ve sırası ile aşağıdaki şekilde hesaplanırlar.

$$s(x) = Sx, S \in \mathcal{R}^{1 \times n} \quad (3.16)$$

$$\delta(x) = \sqrt{x^T \Delta x}, \Delta \in \mathcal{R}^{n \times n} \text{ ve } \Delta > 0 \quad (3.17)$$

Basitleştirilmiş PR-kayma sektörünün içinde P-normu sıfır kontrol girişi ile birlikte azalır ve Lyapunov fonksiyonu $L(t)$ 'nin türevi aşağıdaki şartı sağlar.

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) &= \frac{d}{dt} (x^T(t)Px(t)) = s^2(x) - \delta^2(x) - x^T(t)Rx(t) \\ &\leq -x^T(t)Rx(t), \quad \forall x(t) \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Burada P ve R matrisleri Tanım 3.2'de verilmiştir.

PR-kayma sektörü tasarımında aşağıdaki cebirsel Riccati denklemin çözümü önerilmiştir. Böylece sektör parametreleri daha düzgün seçilerek daha etkili bir sektör tasarımı yapılabilecektir.

$$A^T P + PA - Pbb^T P = -Q \quad (3.19)$$

Burada $Q \in \mathcal{R}^{n \times n}$ pozitif tanımlı simetrik bir matristir.

Eş. 3.1'de tanımlanan sistemdeki matrislerden oluşan (A, b) ikilisinin kontrol edilebilir olduğu ve Eş. 3.19 Riccati denkleminin $P \in \mathcal{R}^{n \times n}$ pozitif tanımlı simetrik bir çözümü olduğu kabul edilsin. Eğer P-normu tanımlamak için çözümden elde edilen P matrisi seçilirse;

$$\dot{L}(t) = x^T(t)(A^T P + PA)x(t) = x^T(t)Pbb^T Px(t) - x^T(t)Qx(t) \quad (3.20)$$

Burada $L(t)$, Eş. 3.3'de tanımlanan Lyapunov fonksiyonudur.

3.2. Teorem [13]

Eş. 3.1'deki gibi tanımlanan herhangi bir kontrol edilebilir sistemde, eğer Riccati denklemini pozitif tanımlı simetrik çözümü P , P -normu tanımlamak için kullanılır ve Tanım 3.2'deki pozitif yarı tanımlı simetrik R matrisi seçilirse $\Delta = Q - R$ ve $\Delta \neq 0$ olur. Burada $Q \in \mathcal{R}^{n \times n}$ Riccati denklemindeki pozitif tanımlı simetrik matristir. Eş. 3.6'da tanımlanan PR-kayma sektörü aşağıdaki basitleştirilmiş PR-kayma sektörü olarak yazılabilir.

$$\mathcal{S} = \{x \mid |s(x)| \leq \delta(x), x \in \mathcal{R}^n\} \quad (3.21)$$

Burada;

$$\begin{aligned} s(x) &= Sx(t), \quad S = b^T P \\ \delta(x) &= \sqrt{x^T(t) \Delta x(t)}, \quad \Delta = Q - R \end{aligned} \quad (3.22)$$

İspat [13]

Kontrol girişi $u(t)$ girişi sifıra eşit olduğu zaman Eş. 3.20'ye göre aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) &= x^T(t) P b b^T P x(t) - x^T(t) \Delta x(t) - x^T(t) R x(t) \\ &= s^2(x) - \delta^2(x) - x^T(t) R x(t) \leq -x^T(t) R x(t), \quad \forall x(t) \in \mathcal{S} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Bu nedenle Eş. 3.21 basitleştirilmiş PR-kayma sektörünü tanımlar. ■

PR-kayma sektörü parametreleri olan Q, P, R ve Δ matrisleri seçilirken aşağıdaki sıralama takip edilebilir.

- 1) $n \times n$ boyutlu pozitif tanımlı simetrik Q matrisi seçilir.
- 2) Pozitif tanımlı simetrik matris P , Riccati denklemini çözümlenerek elde edilir.
- 3) Pozitif r sabiti $0 < r < 1$ şartını sağlayacak şekilde seçilir.
- 4) $R = (1 - r)Q$ ve $\Delta = Q - R$ eşitliklerinden R ve Δ hesaplanır.

Parametreler bu şekilde seçildikten sonra Eş. 3.22'den kayma yüzeyi ve basitleştirilmiş PR-kayma sektörü kolaylıkla hesaplanabilir.

Ayrıca Riccati denklemleri kullanılarak tasarlanan PR-kayma sektörü aşağıdaki şartı sağlar [13].

$$Sb = b^T P b > 0 \quad (3.24)$$

3.1.2. Kontrolcü tasarımı

$s^2(x) \leq \delta^2(x)$ olduğu zaman, örneğin PR-kayma sektörünün içinde, Eş. 3.1'deki sistemin P-normu herhangi bir kontrol etkisi olmadan düşer. Bu yüzden değişken yapıli kontrolü PR-kayma sektör ile birlikte tasarlamak uygundur. Böylece sistem PR-kayma sektörünün dışından içine doğru değişken yapıli kontrol kuralı yardımı ile hareket eder ve sektörün içinde iken P-norm azalışını sağlamak için kontrol girişine gerek kalmaz. Genellikle kullanılan kontrol yöntemlerinin aksine PR-kayma sektörüne dayalı değişken yapıli kontrol girişi, sadece sistem PR-kayma sektörünün dışında ise uygulanır. Buna "tembel kontrol" (lazy control) adı verilir. Çünkü değişken yapıli kontrol girişi sistem sektör içerisindeyken sıfırdır [13].

PR-kayma sektörünün sınırlarında meydana gelen çatırtıdan kaçınmak için \mathcal{S}_i iç sektör ve \mathcal{S}_o dış sektör PR-kayma sektörünün alt grupları olarak tanımlanır [13].

$$\mathcal{S}_i = \{x \mid |s(x)| \leq \alpha \delta(x), x \in \mathcal{R}^n\} \quad (3.25)$$

$$\mathcal{S}_o = \{x \mid \alpha \delta(x) < |s(x)| \leq \delta(x), x \in \mathcal{R}^n\} \quad (3.26)$$

Burada α , $0 < \alpha < 1$ eşitsizliğini sağlayan pozitif sabit bir sayıdır ve $\mathcal{S} = \mathcal{S}_i \cup \mathcal{S}_o$ olduğu açıkça gözükmektedir.

PR-kayma sektörü ile değişken yapıli kontrolcü tasarımında, sistem sektör dışından iç sektörün içine doğru hareket ettirilir. Sistem iç sektörün içinde hareket ettiği sürece kontrol girişi sıfırdır ve sistem sektörünün dışına çıkana kadar kontrol girişi uygulanmaz. Yani sisteme histerisiz hareketi yaptırılarak sektörün sınırlarında meydana gelecek çatırtıdan kaçınılırken, sistemin kararlılığı da arttırılmış olur. Ayrıca sistemin kendi dinamik davranışından faydalanıldığı için enerji kazancı sağlar.

3.3. Teorem [13]

Pozitif sabitler r ($0 < r < 1$) ve α ($0 < \alpha < 1$) için $\Delta = rQ$ ve $R = (1 - r)Q$ eşitlikleri kullanılarak sırası ile Eş. 3.22, Eş. 3.25 ve Eş. 3.26 ile belirtilen PR-kayma sektörü, iç sektör ve dış sektör hesaplınsın. Tanımlanan bu PR-kayma sektörü için aşağıdaki gibi bir değişken yapıli kontrolcü tanımlanabilir.

$$u(t) = -\sigma(s(x), \delta(x))(Sb)^{-1}(SAx + Ks(x)) \quad (3.27)$$

Yeterince büyük bir K değeri için sistem PR-kayma sektörünün dışından iç sektöre doğru hareket edecektir ve P-norm değeri her durum için azalacaktır. K' nın değeri aşağıdaki eşitsizlik kullanılarak seçilir.

$$K > \max\left\{\frac{Sb}{2}, K_0\right\} \quad (3.28)$$

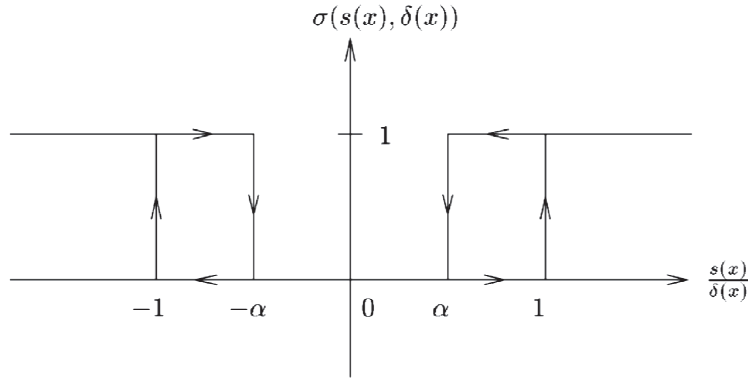
Burada K_0 değeri pozitif sabit bir sayıdır ve aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$2K_0\alpha^2rQ + S^TSA + A^T S^T S > 0 \quad (3.29)$$

$\sigma(s(x), \delta(x))$, $s(x)$ ve $\delta(x)$ 'e bağlı bir histerisiz ve ölü bölgeyi ifade eden fonksiyondur. $\sigma(s(x), \delta(x))$ parçalı fonksiyon olarak ifade edilirse;

$$\sigma(s(x), \delta(x)) = \begin{cases} 0 & x \in \mathcal{S}_i \\ \text{değişmez} & x \in \mathcal{S}_o \\ 1 & x \notin \mathcal{S} \end{cases} \quad (3.30)$$

Sb ise $b^T P b$ 'ye eşittir ve Eş. 3.24'e göre tekil değildir.



Şekil 3.1. Histerisiz+örlü bölge fonksiyonu $\sigma(s(x), \delta(x))$ [13]

İspat [13]

P-normun karesi Lyapunov fonksiyonu olarak düşünölsün.

$$L(t) = \|x\|_p^2 = x^T P x > 0, \forall x \in \mathcal{R}^n, x \neq 0 \quad (3.31)$$

Başlangıç koşulunun PR-kayma sektörünün dışında olduğu kabul edilsin. Bu durumda değişken yapılı kontrol aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$u(t) = -(Sb)^{-1}(SAx + Ks(x)) \quad (3.32)$$

Yukarıdaki kontrol uygulandığında doğrusal fonksiyon $s(x)$ 'in türevi aşağıdaki şartı sağlar.

$$\dot{s}(x) = S\dot{x}(t) = SAx(t) + Sbu(t) = -Ks(x) \quad (3.33)$$

Buna göre;

$$\frac{d}{dt} s^2(x) = 2s(x)\dot{s}(x) = -2Ks^2(x) < 0, \forall x \notin \mathcal{S}_i \text{ ve } \sigma(s(x), \delta(x)) = 1. \quad (3.34)$$

Buna göre lineer fonksiyon $s(x)$ 'in mutlak değeri azalacaktır. Eğer, yeterince büyük bir K için $\delta(x)$ 'in azalma oranı, $s(x)$ 'in mutlak değerinin azalma oranından daha yavaş ise sistem iç sektörün içine doğru hareket eder ve sonlu bir zaman içinde sektör içinde kalır.

Sistem PR-kayma sektörünün dışından iç sektörün içine doğru değişken yapılı kontrol kuralı ile hareket ederken P-norm değeri azalır. PR-kayma sektörünün Eş. 3.21'deki tanımına göre $\Delta = rQ$ ve $R = (1 - r)Q$ ile $|s(x)| > \alpha\delta(x)$ için Lyapunov fonksiyonunun türevi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
\dot{L}(t) &= x^T(t)(A^T P + PA)x(t) + 2x^T(t)Pbu(t) \\
&= s^2(x) - \delta^2(x) - x^T(t)Rx(t) + 2s(x)u(t) \\
&= -(2(Sb)^{-1}K - 1)s^2(x) - 2s(x)(Sb)^{-1}SAx(t) - \delta^2(x) - x^T(t)Rx(t) \\
&\leq -(2(SB)^{-1}K - 1)\alpha^2\delta^2(x) - 2x^T(t)S^T(Sb)^{-1}SAx(t) - \delta^2(x) - x^T(t)Rx(t) \\
&< -2(Sb)^{-1}K\alpha^2\delta^2(x) - 2x^T(t)S^T(Sb)^{-1}SAx(t) - x^T(t)Rx(t) \\
&= -(Sb)^{-1}x^T(t)(2K\alpha^2rQ + S^TSA + A^T S^T S)x(t) - x^T(t)Rx(t) \\
&< -x^T(t)Rx(t), \quad \forall x \notin \mathcal{S}_i \text{ ve } \sigma(s(x), \delta(x)) = 1.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Burada $Sb = b^T P b > 0$.

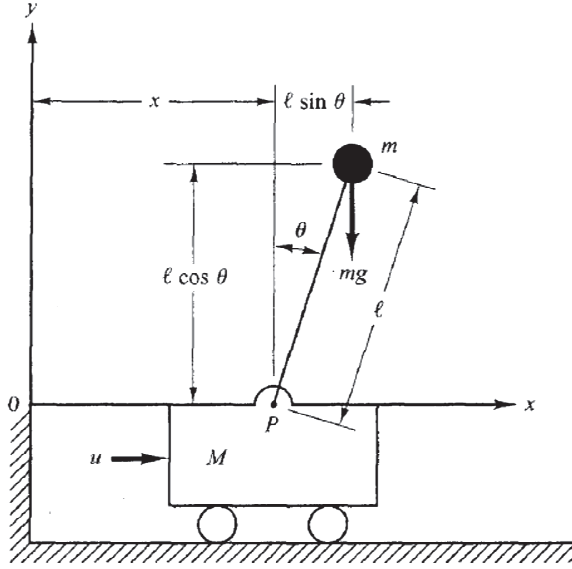
Sistem iç sektörün içerisine hareket ettikten sonra PR-kayma sektöründen dışarı çıkana kadar kontrol girişi $u(t)$ sıfırdır. Bu durumda $|s(x)| \leq \delta(x)$ olur ve Lyapunov fonksiyonunun türevi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
\dot{L}(t) &= s^2(x) - \delta^2(x) - x^T(t)Rx(t) \\
&\leq -x^T(t)Rx(t), \quad \forall x(t) \in \mathcal{S} \text{ ve } \sigma(s(x), \delta(x)) = 0.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Sistem PR-kayma sektörünün dışına doğru hareket ederse Eş. 3.32'de belirtilen kontrol girişi sistemi iç sektörün içine geri hareket ettirir. Bu sırada P-norm değeri düşmeye devam eder. Böylece sistem PR-kayma sektörünün dışından iç sektörün içine doğru hareket ettirilirken, Lyapunov fonksiyonu durum uzayında azalmaya devam eder. Bu da sistemin kuadratik kararlı olmasını sağlar. ■

3.1. Örnek

Bölüm 3.1'de özetlenen kayan sektör kontrolcü tasarımı, aşağıda doğrusallaştırılmış ters sarkaç modeline uygulanmaktadır.



Şekil 3.2. Ters sarkaç modeli [23].

Sistemin dinamik denklemler aşağıdaki gibidir [23].

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - u \quad (3.37)$$

$$M\ddot{x} = u - mg\theta \quad (3.38)$$

Burada M arabanın kütlesi, m sarkacın kütlesi, g yerçekimi ivmesi, l sarkaç kolunun uzunluğu, θ sarkacın açısı, x ise aracın yer değiştirmesidir ve gerekli parametrelerin sayısal değerleri aşağıda verilmiştir.

$$M = 2 \text{ kg}, m = 0.1 \text{ kg}, l = 0.5 \text{ m}$$

Sistem durum uzayında tanımlanırsa;

$$x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = x, x_4 = \dot{x}$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \text{ olur.}$$

$$\text{Burada } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (M + m)g/Ml & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -mg/M & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/Ml \\ 0 \\ 1/M \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

PR-kayma sektörü parametreleri $Q = 100 \times I_{4 \times 4}$, $r = 0.8$, $\alpha = 0.5$ seçilmiştir.

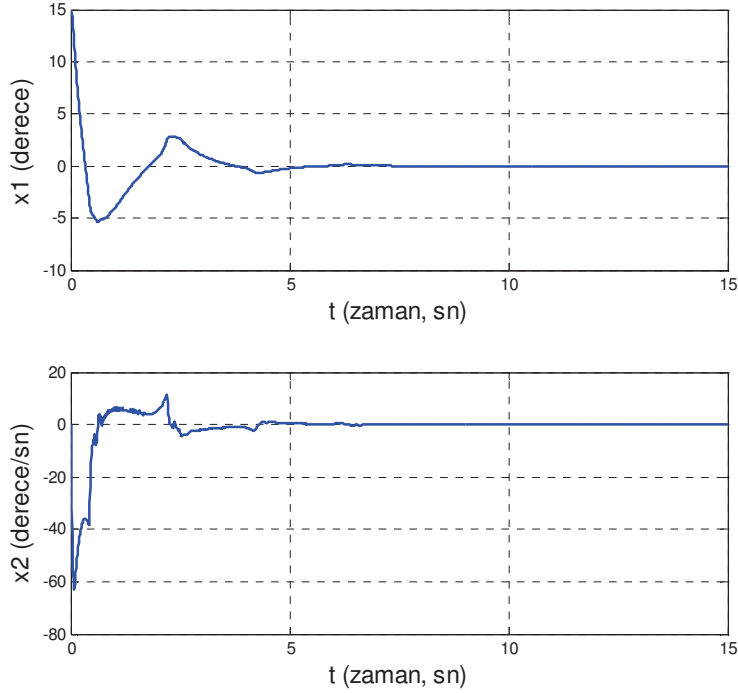
Eş 3.11 cebirsel Riccati denkleminin çözümünden

$$A^T P + PA - P b b^T P = -Q$$

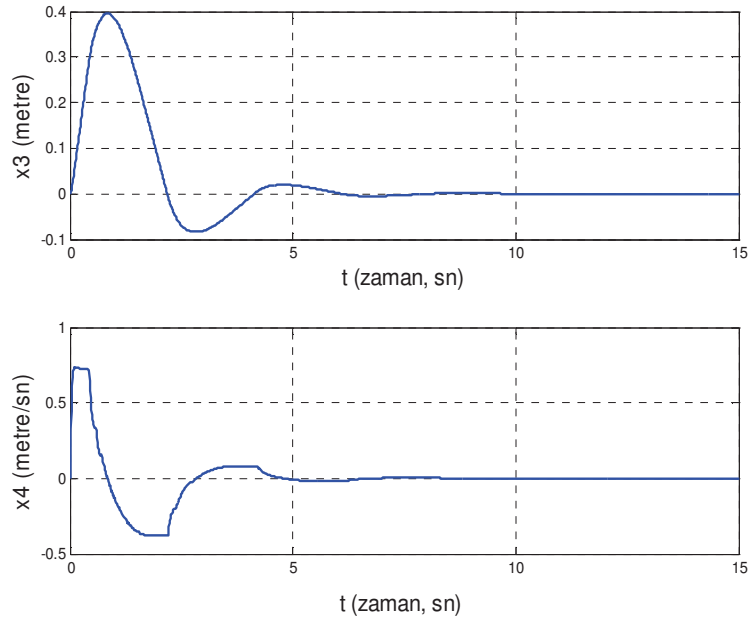
$$P = 10^3 \times \begin{bmatrix} 1.6481 & 0.3108 & 0.2686 & 0.3978 \\ 0.3108 & 0.0678 & 0.0565 & 0.0819 \\ 0.2686 & 0.0565 & 0.1691 & 0.0930 \\ 0.3978 & 0.0819 & 0.0930 & 0.1300 \end{bmatrix} \text{ olarak hesaplanır.}$$

Eş. 3.21, Eş. 3.25 ve Eş 3.26 kullanılarak PR-kayma sektörü tasarımı yapılır. Kontrol kazanç katsayısı ise Eş. 3.28'den $K = 21$ seçilir.

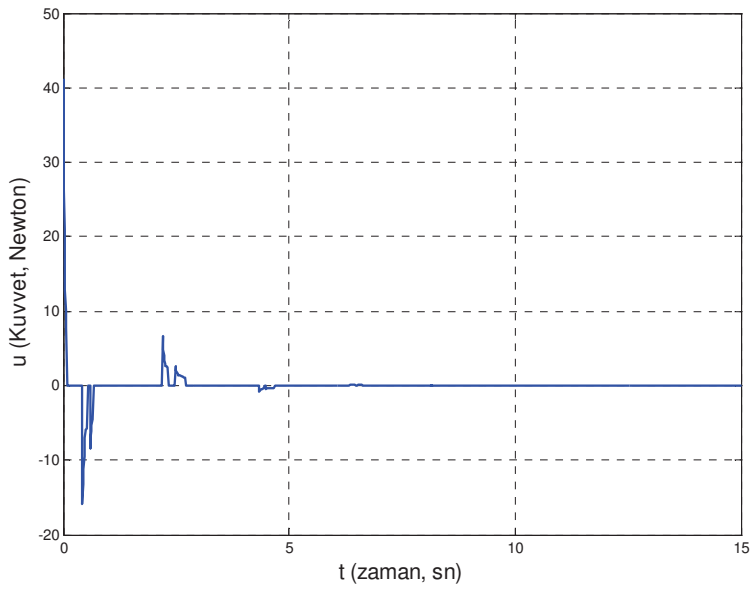
Sarkaç kolu başlangıçta düşey eksen ile arasındaki açı 15 derece olacak şekilde serbest bırakılsın. Sistem 0.01 saniye zaman aralığı ile $t = 15$ saniye süre boyunca Eş. 3.27'de belirtilen değişken yapılı kontrolcü kullanılarak $x_0 = \left[\frac{15 \times \pi}{180}; 0; 0; 0 \right]$ başlangıç değeri için kontrol edilirse;



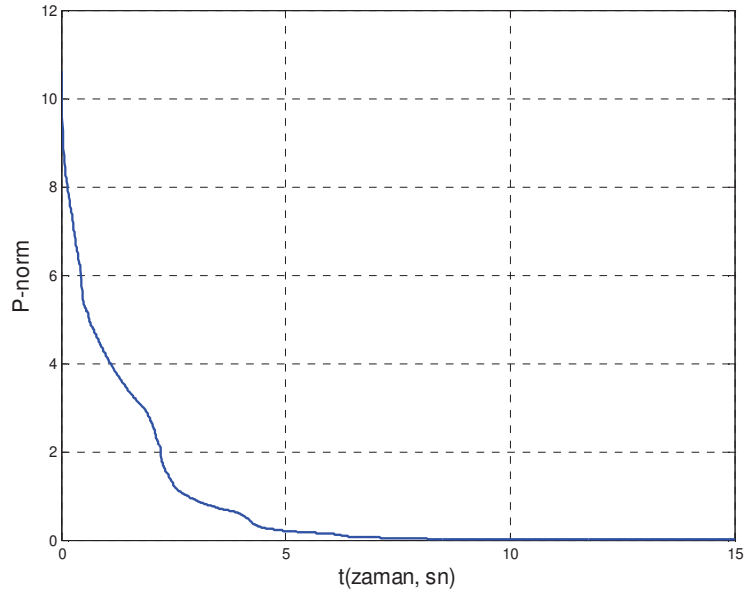
Şekil 3.3. Sarkaç açısal konumu(x_1) ve açısal hızı(x_2)



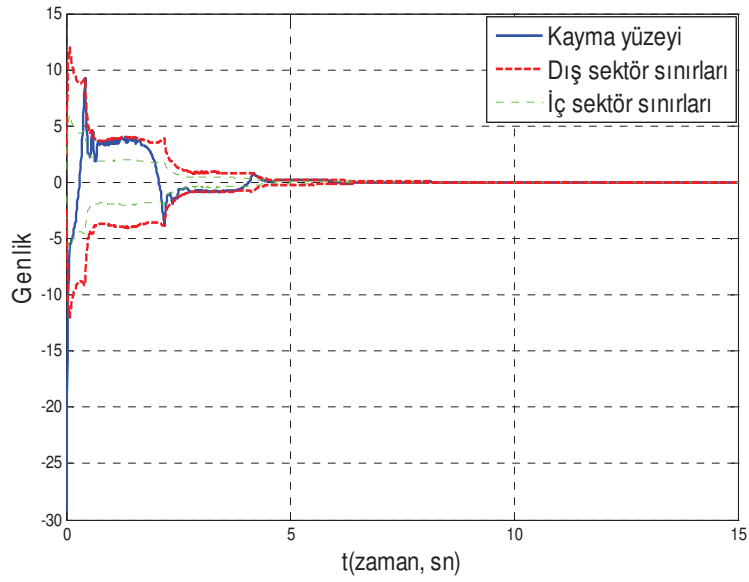
Şekil 3.4. Araba konumu(x_3) ve hızı(x_4)



Şekil 3.5. Kontrol çabası



Şekil 3.6. P-norm değerinin zamana göre değişimi



Şekil 3.7. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının davranışı

3.2. Belirsizlik İçeren Doğrusal Sistemler İçin Kayan Sektör Kontrol

3.2.1. Gürbüz P_rR_r -kayma sektörü tasarımı

Eş. 3.1 ile tanımlanan doğrusal sisteme “uyumluluk şartını” (matching condition) sağlayacak şekilde bir belirsizlik etki ederse sistem aşağıdaki gibi ifade edilebilir [13].

$$\dot{x} = (A + bf)x + gbu \quad (3.40)$$

Burada $f \in \mathcal{R}^{1 \times n}$, $g \in \mathcal{R}^1$ olarak tanımlıdır.

Eş. 3.40’de ile ele alınan sistemde f vektörünün normu bilinen bir pozitif F sabiti ile sınırlı olsun ve g yine bilinen bir pozitif g_{min} sabiti ile alt sınırlı, g_{max} pozitif sabiti ile de üst sınırlı olsun [13].

Buradan,

$$\|f\| \leq F \text{ ve } 0 \leq g_{min} \leq g \leq g_{max} \quad (3.41)$$

ifadeleri elde edilir. Bozucu genliğinin geometrik ortalaması,

$$\hat{g} = \sqrt{g_{min} g_{max}} \quad (3.42)$$

şeklinde olur ve aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$\beta^{-1} \leq \hat{g}/g \leq \beta \quad (3.43)$$

$$\beta^{-1} \leq g/\hat{g} \leq \beta \quad (3.44)$$

Burada β pozitif sabiti

$$\beta = \sqrt{\frac{g_{max}}{g_{min}}} \quad (3.45)$$

şeklinde elde edilir.

3.4. Tanım [13]

Eş. 3.40 ile belirtildiği gibi belirsizlik içeren doğrusal sistemler için $P_r R_r$ -kayma sektörü aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\mathcal{S}_r = \{x | x^T(t)((A + bf)^T P_r + P_r(A + bf))x(t) \leq x^T(t)R_r x(t), x \in \mathcal{R}^n\} \quad (3.46)$$

Burada, $R_r \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ise pozitif yarı tanımlı simetrik bir matristir. $R_r = C_r^T C_r, C_r \in \mathcal{R}^{l \times n}, l \geq 1$ olup (C_r, A) ikilisi gözlenebilirdir. $P_r \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ise pozitif tanımlı simetrik matristir ve P-norm tanımında kullanılır.

$$\|x\|_{P_r} = \sqrt{x^T(t)P_r x(t)} \quad (3.47)$$

Etki eden belirsizliğe rağmen sistemin P-normu, sistem $P_r R_r$ -kayma sektörü içerisindeyken herhangi bir kontrol girişi olmadan azalır.

Sektör tasarımında kullanılan parametrelerden biri olan P_r Eş. 3.19 cebirsel Riccati denkleminin çözümünden elde edilir. Belirsizlik içeren sistemler için direkt olarak gürbüz $P_r R_r$ -kayan sektörü tasarlamak zor olabilir. Bu yüzden PR-kayan sektör ile gürbüz $P_r R_r$ -kayan sektör arasındaki ilişki göz önünde bulundurularak etki eden belirsizliğe göre bir sektör tasarımı yapmak daha doğru olacaktır.

3.4. Teorem [13]

$$\gamma^2 Q > \frac{4r}{(1-r)^2} F^2 I_n \quad (3.48)$$

Burada I_n , sistem boyutları ile aynı boyutlu $n \times n$ birim matris, F belirsizliği ifade eden f parametresinin sınırı, r sektör parametrelerini hesaplarırken kullanılan $0 < r < 1$ aralığında pozitif bir sabittir. γ ise $0 < \gamma < 1$ aralığında seçilen pozitif sabit bir sayıdır.

Eğer Eş. 3.48 ile belirtilen pozitif tanımlı simetrik bir Q matrisi var ise P_r ve R_r aşağıdaki gibi olur.

$$P_r = P \quad (3.49)$$

$$R_r = (1 - \gamma)R \quad (3.50)$$

Eş. 3.49 ve Eş. 3.50'ye göre Eş. 3.1'deki sistem için yapılmış bütün tasarımlar Eş. 3.40'da verilen belirsizlik ve bozucu içeren sistem içinde kullanılabilir. Burada P cebirsel Riccati denkleminin çözümü, R ise $R = (1 - r)Q$ şeklinde hesaplanan PR-kayma sektörü parametresidir.

İspat [13]

Sistem PR-kayma sektörünün içerisinde iken $|s(x)| \leq \delta(x)$ şartı sağlanır. Bu durumda P-normun karesinin zamana göre türevi sıfır kontrol girişi ile birlikte aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) &= \frac{d}{dt}(x^T(t)P_r x(t)) = \frac{d}{dt}(x^T(t)P x(t)) \\ &= x^T(t)(A^T P + P A)x(t) + 2x^T(t)P b f x(t) \\ &= s^2(x) - \delta^2(x) - x^T(t)R x(t) + 2s(x)f x(t) \\ &\leq -x^T(t)R x(t) + 2\delta(x)\sqrt{x^T(t)f^T f x(t)} \\ &\leq -x^T(t)R x(t) + 2\sqrt{\frac{r}{1-r}}x^T(t)R x(t)\sqrt{F^2 x^T(t)x(t)} \\ &\leq -x^T(t)R x(t) + 2\sqrt{\frac{r}{1-r}}x^T(t)R x(t)\sqrt{x^T(t)\gamma^2 \frac{(1-r)^2}{4r} Q x(t)} \\ &= x^T(t)R_r x(t) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Bu durumda P-norm ya da P_r -norm değeri sıfır kontrol girişine ile belirsizliğe rağmen azalmaya devam eder. Bu durum $P_r = P$ ve $R_r = (1 - \gamma)R$ alınarak yapılacak olan PR-kayma sektörü tasarımın gürbüz $P_r R_r$ -kayma sektörü tasarımı olduğunu gösterir. ■

Gürbüz $P_r R_r$ -kayma sektörü tasarımı için izlenecek adımlar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

- Eş 3.29'u sağlayacak pozitif tanımlı simetrik Q matrisi seçilir.
- Pozitif r sabiti $0 < r < 1$ aralığında seçilerek $R = (1 - r)Q$ hesaplanır.
- Cebirsel Riccati denkleminin çözümünde pozitif tanımlı simetrik P matrisi elde edilir.
- Pozitif γ sabiti $0 < \gamma < 1$ aralığında seçilir. $P_r = P$ ve $R_r = (1 - \gamma)R$ olarak hesaplanır.
- $s(x) = Sx(t)$, $S = b^T P_r$ eşitlikleri yardımı ile kayma yüzeyi, $\delta(x) = \sqrt{x^T(t)\Delta x(t)}$, $\Delta = Q - R_r$ eşitlikleri yardımı ile de kayan sektör hesaplanarak gürbüz $P_r R_r$ -kayma sektörü tasarımı yapılır.

3.2.2. Kontrolcü tasarımı

Teorem 3.3'te anlatılan PR-kayma sektörü için değişken yapıllı kontrolcü tasarımı temel alınarak gürbüz $P_r R_r$ -kayma sektörü için değişken yapıllı kontrolcü aşağıdaki teoremde anlatıldığı şekilde tasarlanabilir.

3.5. Teorem [13]

$$u(t) = \sigma(s(x), \delta(x))u_o(t) + (1 - \sigma(s(x), \delta(x)))u_i(t) \quad (3.52)$$

Eş. 3.40 ile belirtilen belirsizlik içeren sistem (A, b) çiftinin kontrol edilebilir olması şartı ile Eş. 3.52'de belirtilen değişken yapıllı kontrolcü kullanılarak kararlı hale getirilebilir. Burada $\sigma(s(x), \delta(x))$ Eş. 3.30 ve Şekil 3.1 ile belirtilen histerisiz fonksiyonu, $u_o(t)$ ve $u_i(t)$ ise $\sigma(s(x), \delta(x))$ 'e bağlı olarak sisteme etki edecek kontrol girişleridir.

$$u_i(t) = -\hat{g}^{-1}k_1(x)sgn(s(x)) \quad (3.53)$$

$$u_o(t) = -\hat{g}^{-1} \left((Sb)^{-1}SAx(t) + ((Sb)^{-1}K\beta|s(x)| + k_2(x))sgn(s(x)) \right) \quad (3.54)$$

Pozitif sabit K ve $k_1(x)$, $k_2(x)$ pozitif fonksiyonları aşağıdaki eşitsizlikleri sağlarlar.

$$K > \max\left\{\frac{Sb}{2}, K_0\right\} \quad (3.55)$$

$$k_1(x) > \beta F \|x(t)\| \quad (3.56)$$

$$k_2(x) > \beta F \|x(t)\| + (Sb)^{-1} \max\{\beta - 1, 1 - \beta^{-1}\} |SAx| \quad (3.57)$$

Burada β Eş. 3.45 ile tanımlanmıştır. Pozitif sabit K_0 ise aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$2K_0\alpha^2 rQ + (S^T SA + A^T S^T S) > 0 \quad (3.58)$$

İspat [13]

Eş. 3.31 ile verilen Lyapunov fonksiyonu ele alınsın.

Eğer $|s(x)| > \alpha\delta(x)$ ve $\sigma(s(x), \delta(x)) = 1$ ise yani sistem iç sektörün dışında ise kontrolcüdeki $u_o(t)$ terimi aktif olacaktır. Bu durumda $L(t)$ ve $s^2(x)$ fonksiyonlarının zamana göre türevleri aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s^2(x) &= 2s(x)\dot{s}(x) = 2s(x)(S(A + Bf)x(t) + Sbg u_o(t)) \\ &= 2s(x)(SA + Sbf)x(t) \\ &\quad - 2s(x)Sbg\hat{g}^{-1}\left((Sb)^{-1}SAx(t)\right. \\ &\quad \left.+ ((Sb)^{-1}K\beta|s(x)| + k_2(x))\text{sgn}(s(x))\right) \\ &= 2s(x)\left((1 - g\hat{g}^{-1})SA + Sbf\right)x(t) - 2Sbg\hat{g}^{-1}k_2(x)|s(x)| \\ &\quad - 2g\hat{g}^{-1}K\beta s^2(x) < -2g\hat{g}^{-1}K\beta s^2(x) \\ &< -2Ks^2(x), \quad \forall x \notin \mathcal{S}_i \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned}
\dot{L}(t) &= x^T(t)(A^T P + PA)x(t) + 2x^T(t)Pb(fx(t) + gu_o(t)) \\
&= s^2(x) - \delta^2(x) + 2s(x)(fx(t) + gu_o(t)) - x^T(t)Rx(t) \\
&= s^2(x) - \delta^2(x) + (Sb)^{-1} \frac{d}{dt} s^2(x) - 2(Sb)^{-1}s(x)SAx(t) \\
&\quad - x^T(t)Rx(t) \\
&< s^2(x) - \delta^2(x) - 2(SB)^{-1}Ks^2(x) - 2(Sb)^{-1}s(x)SAx(t) \\
&\quad - x^T(t)Rx(t) \\
&= -(2(Sb)^{-1}K - 1)s^2(x) - \delta^2(x) - 2(Sb)^{-1}s(x)SAx(t) \\
&\quad - x^T(t)Rx(t) \\
&\leq (2(Sb)^{-1}K - 1)\alpha^2\delta^2(x) - 2x^T(t)S^T(Sb)^{-1}SAx(t) - \delta^2(x) \\
&\quad - x^T(t)Rx(t) \\
&< -2(Sb)^{-1}K\alpha^2\delta^2(x) - 2x^T(t)S^T(Sb)^{-1}SAx(t) - x^T(t)Rx(t) \\
&= -(Sb)^{-1}x^T(t)(2K\alpha^2rQ + S^TSA + A^TS^TS)x(t) - x^T(t)Rx(t) \\
&< -x^T(t)Rx(t), \quad \forall x \notin S_i, \quad \sigma(s(x), \delta(x)) = 1 \quad (3.60)
\end{aligned}$$

Eğer $|s(x)| \leq \delta(x)$ ve $\sigma(s(x), \delta(x)) = 0$ ise yani sistem iç sektörün içinde ise kontrolcüdeki $u_i(t)$ terimi aktif olacaktır. Bu durumda $L(t)$ fonksiyonunun zamana göre türevi aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$\begin{aligned}
\dot{L}(t) &= x^T(t)(A^T P + PA)x(t) + 2x^T(t)Pb(fx(t) + gu_i(t)) \\
&= s^2(x) - \delta^2(x) + 2s(x)(fx(t) + gu_i(t)) - x^T(t)Rx(t) \\
&\leq 2s(x)(fx(t) + gu_i(t)) - x^T(t)Rx(t) \\
&= 2s(x) \left(fx(t) - g\hat{g}^{-1}k_1(x)sgn(s(x)) \right) - x^T(t)Rx(t) \\
&= 2s(x)g\hat{g}^{-1} \left(g^{-1}\hat{g}fx(t) - k_1(x)sgn(s(x)) \right) - x^T(t)Rx(t) \\
&< -x^T(t)Rx(t), \quad \forall x \in S, \quad \sigma(s(x), \delta(x)) = 0 \quad (3.61)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak $|s(x)|$ değeri azalır ve sistemin durum değişkenleri iç sektörün içine doğru hareket eder ve Eş. 3.40 ile belirtilen belirsizlik içeren sistem kararlı hale gelir. ■

Gürbüz $P_r R_r$ -kayan sektör kontrolcü tasarımının genel teorisinde iç sektörün içinde de kontrol girişi bulunmaktadır. Ancak eğer sektör tasarımı Teorem 3.4'te anlatıldığı gibi yapılırsa kontrol girişi iç sektörün içinde sıfır alınabilir.

$$u_i(t) = 0 \quad (3.62)$$

3.2. Örnek

Bu örnekte, Örnek 3.1'de ele alınan doğrusal ters sarkaç modeli için aynı sistem parametreleri kullanılarak $P_r R_r$ -gürbüz kayan sektör kontrolcü uygulaması yapılmaktadır.

Sistem, belirsizlik parametreleri $f = [1 \ 0 \ 2 \ -1]$ ve $g = 1$ için Eş. 3.40'a göre düzenlenirse;

$$\dot{x} = (A + bf)x + gbu \text{ olur.}$$

$$\text{Burada } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (M+m)g/Ml & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -mg/M & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } b = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/Ml \\ 0 \\ 1/M \end{bmatrix}.$$

PR-kayma sektörü parametreleri $r = 0.8$, $\alpha = 0.6$ seçilmiştir.

Eş. 3.48'e göre $\gamma = 0.7$ için $Q = 991 \times I_{4 \times 4}$ çıkar.

Eş 3.11 cebirsel Riccati denkleminin çözümünden

$$A^T P + PA - Pbb^T P = -Q$$

$$P = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1.0726 & 0.1746 & 0.2108 & 0.2963 \\ 0.1746 & 0.0353 & 0.0423 & 0.0572 \\ 0.2108 & 0.0423 & 0.1592 & 0.0783 \\ 0.2963 & 0.0572 & 0.0783 & 0.1043 \end{bmatrix} \text{ olarak hesaplanır.}$$

Eş. 3.21, Eş. 3.25 ve Eş 3.26 kullanılarak gürbüz $P_r R_r$ -kayan sektör tasarımı yapılır.

Teorem 3.4'e göre;

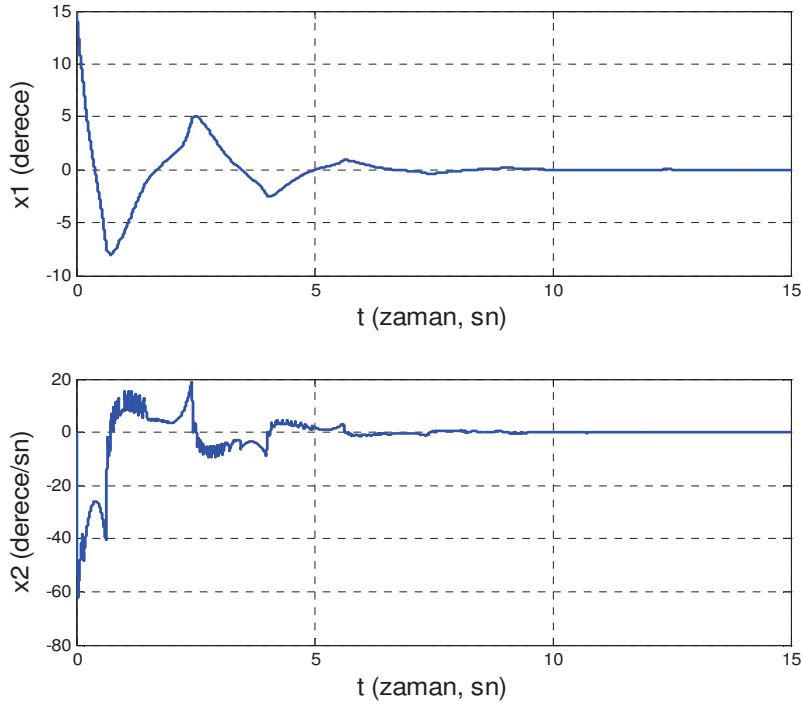
$$s(x) = Sx(t), \quad S = b^T P, \quad R = (1 - r)Q, \quad R_r = (1 - \gamma)R$$

$$\delta(x) = \sqrt{x^T(t)\Delta x(t)}, \quad \Delta = Q - R_r$$

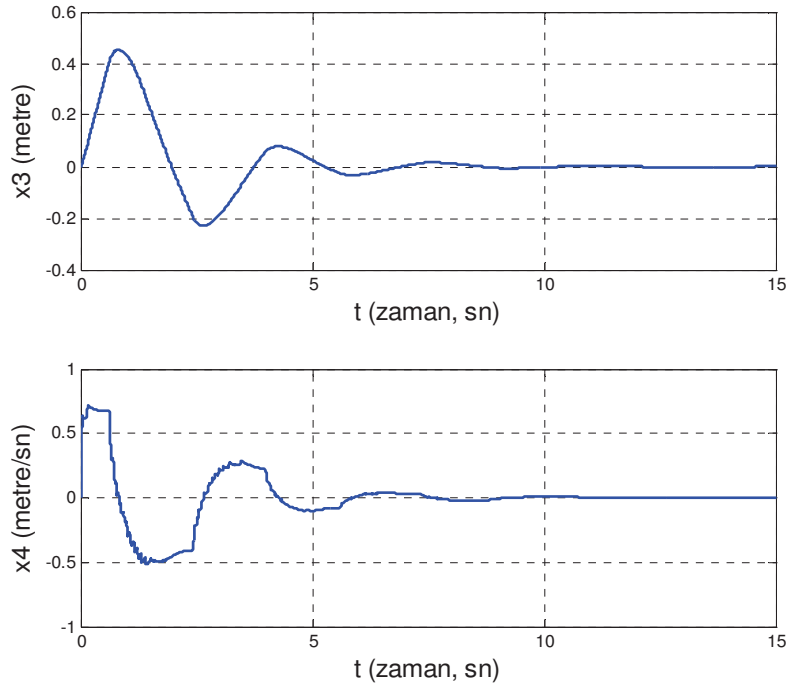
Teorem 3.5 ve Eş. 3.62'ye göre kontrolcü tasarımı yapılır.

Eş. 3.28'den $K = 25$ seçilir. $k = F\|x\| + 2$ seçilir.

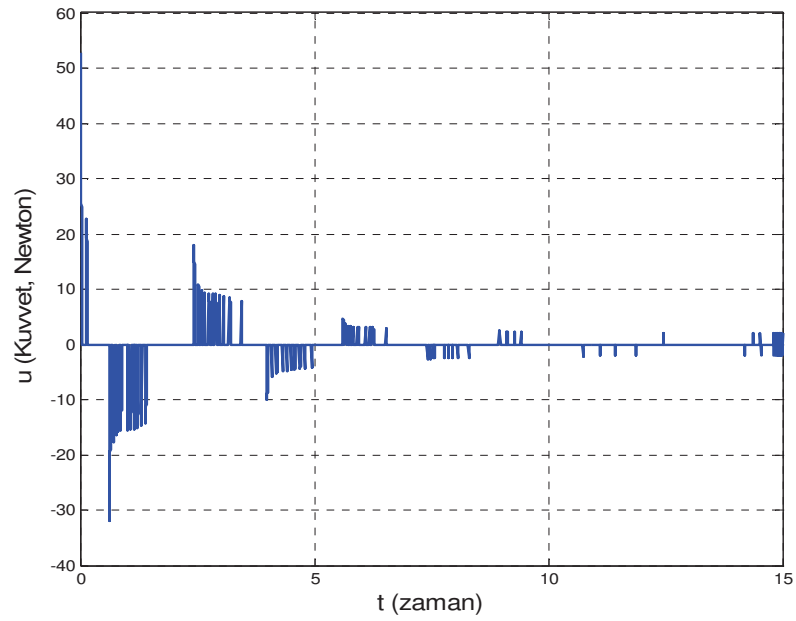
Bu durumda sarkaç kolu başlangıçta düşey eksen ile arasındaki açı 15 derece olacak şekilde serbest bırakılsın. Sistem 0.01 saniye zaman aralığı ile $t = 15$ saniye süre boyunca Eş. 3.27'de belirtilen değişken yapıli kontrolcü kullanılarak $x_0 = \left[\frac{15 \times \pi}{180}; 0; 0; 0 \right]$ başlangıç değeri için kontrol edilirse;



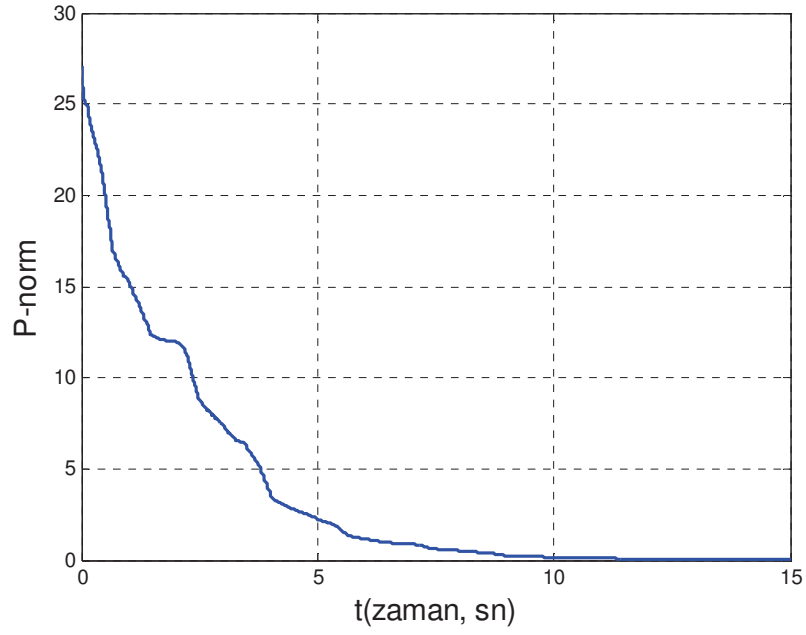
Şekil 3.8. Sarkaç açısal konumu(x_1) ve açısal hızı(x_2)



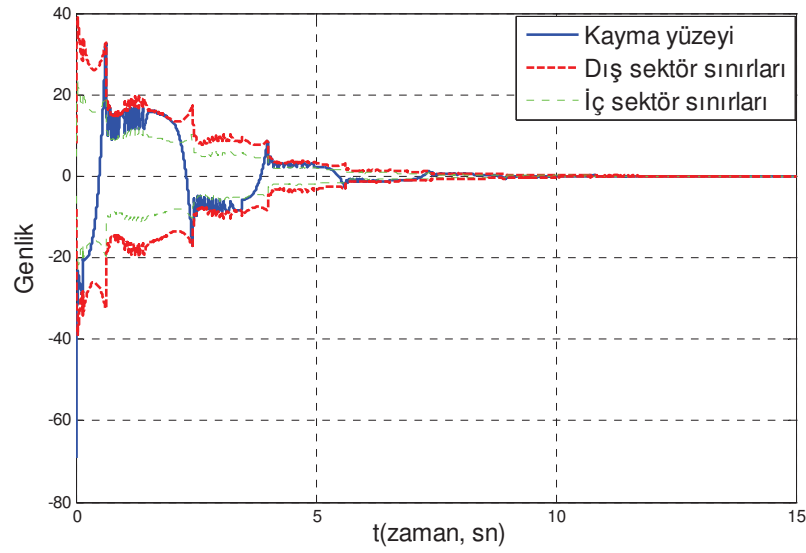
Şekil 3.9. Araba konumu(x_3) ve hızı(x_4)



Şekil 3.10. Kontrol çabası



Şekil 3.11. P-norm değerinin zamana göre değişimi



Şekil 3.12. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının davranışı

3.3. Doğrusal Olmayan Zamanla Değişen Kayan Sektör Kontrol

Bu bölümde tek girişli doğrusal olmayan zamanla değişen bir sistem ele alınmaktadır. Ayrıca bu sisteme “uyumluluk şartı” (matched conditions) sağlanacak şekilde bir belirsizlik etkisi ilave edilmiştir. Bu durumda sistem dinamik denklemi aşağıdaki gibi olur

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)(u + d(x, t)) \quad (3.63)$$

Burada $x \in \mathcal{R}^n$ ve $u \in \mathcal{R}^1$ sırası ile durum ve giriş vektörleridir. $g(x, t) \neq 0, \forall x \in \mathcal{R}^n, \forall t \in \mathcal{R}^+$ ve $k \geq 1$ için $f(x, t) \in C^k$ ve $g(x, t) \in C^k$ olur. Belirsizlik ise $d(x, t)$ ile ifade edilir [25].

Her $t \in \mathcal{R}^+$ için $f(0, t) = 0$ ve $f(x, t)$ 'nin sürekli türevi alınabilir olduğu kabul edilirse Eş. 3.63'deki doğrusal olmayan zamanla değişen sistem aşağıdaki gibi durum değişkenlerine bağlı doğrusal zamanla değişen bir sistem olarak ifade edilebilir.

$$\dot{x} = A(x, t)x + b(x, t)(u + d(x, t)) \quad (3.64)$$

Burada $A(x, t)x = f(x, t)$ ve $b(x, t) = g(x, t)$ olur.

$(A(x, t), b(x, t))$ çiftinin $t \in \mathcal{R}^+$ ve $x \in \mathcal{R}^n$ için kontrol edilebilir olduğu ve $d(x, t)$ belirsizliğinin aşağıdaki şekilde sınırlandırılarak ifade edilebildiği kabul edilmiştir [25].

$$|d(x, t)| \leq q(x, t)\|x\| + p(t), \quad \forall x \in \mathcal{R}^n, \quad \forall t \in (0, +\infty) \quad (3.65)$$

Burada $q(x, t)$ ve $p(t)$ pozitif fonksiyonlardır.

Eş. 3.64 ile belirtilen, durum değişkenlerine bağlı, zamanla değişen sistem için tasarlanacak doğrusal olmayan, zamanla değişen kayma sektörü tasarımı, basitleştirilmiş PR-kayma sektörü tasarımına benzer bir şekilde yapılmaktadır.

3.3.1. Sektör tasarımı

3.5. Tanım [25]

Eş. 3.64'deki sistem için doğrusal olmayan, zamanla değişen kayma sektörü \mathcal{R}^n durum uzayında aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$\mathcal{S} = \{x | s^2(x, t) \leq \delta^2(x, t), x \in \mathcal{R}^n, t \in \mathcal{R}^+\} \quad (3.66)$$

Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$L(t) = x^T P(x, t)x > 0, \forall x \in \mathcal{R}^n, (x \neq 0). \forall t \in \mathcal{R}^+ \quad (3.67)$$

Lyapunov fonksiyonu değişken yapıli kontrol kanunu ile birlikte azalır ve Lyapunov fonksiyonunun türevi aşağıdaki şartı sağlar.

$$\frac{d}{dt} L(t) = \frac{d}{dt} (x^T P(x, t)x) \leq -x^T R(x, t)x, \forall x \in \mathcal{S}(t) \quad (3.68)$$

Burada $P(x, t) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ pozitif tanımlı simetrik bir matris, $R(x, t) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ise pozitif yarı tanımlı simetrik bir matristir. $R(x, t) = C^T(x, t)C(x, t)$, $C(x, t) \in \mathcal{R}^{l \times n}$, $l \geq 1$ olup $(C(x, t), A(x, t))$ çifti $t \in \mathcal{R}^+$ ve $x \in \mathcal{R}^n$ için gözlenebilirdir. Kayma yüzeyi $s(x, t)$ ve kayan sektör sınırı $\delta(x, t)$ fonksiyonları aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} s(x, t) &= S(x, t)x, \quad S(x, t) \in \mathcal{R}^{1 \times n} \\ \delta(x, t) &= \sqrt{x^T \Delta(x, t)x}, \quad \Delta(x, t) \in \mathcal{R}^{n \times n} > 0 \end{aligned} \quad (3.69)$$

Doğrusal olmayan, zamanla değişen kayma sektörü için 4 adet tasarım parametresi vardır. Bunlardan $P(x, t)$ ve $R(x, t)$ sistemin sektör içindeki performansını belirlerken $S(x, t)$ ve $\delta(x, t)$ sektörün şeklini belirler.

Basitleştirilmiş PR-kayma sektöründen farklı olarak, sistem hem zamana hem de durum değişkenlerine bağlı olarak değiştiği için $P(x, t)$ matrisi cebirsel Riccati denkleminin çözümü ile elde edilmez. Bunun yerine sektör parametresi olarak, optimal kontrol yönteminde de bilinen, aşağıdaki durum değişkenlerine bağlı diferansiyel Riccati denkleminin, Hamilton-Jacobi denklemi ya da Hamilton-Jacobi-Bellman denklemine göre sınır değişkenlerini minimum yapacak uygun karesel performans ölçütü ile çözümünden elde edilecek $P(x, t)$ matrisi kullanılır.

$$\dot{P}(x, t) + P(x, t)A(x, t) + A^T(x, t)P(x, t) - P(x, t)b(x, t)b^T(x, t)P(x, t) + Q(x, t) = 0 \quad (3.70)$$

Bilindiği gibi optimal kontrol yöntemlerinde diferansiyel Riccati denklemi geriye dönük integrasyon yöntemleri ile hesaplanmaktadır. Ancak bu durumda Eş. 3.64'te verilen sistem için mevcut çözüm yöntemi ile diferansiyel Riccati denkleminin geleceğe yönelik bilgi alınması söz konusu değildir. Bu yüzden sınır değeri yerine $P(x(t_0), t_0) = P^T(x(t_0), t_0) > 0$ başlangıç değeri için aşağıdaki durum değişkenlerine bağlı diferansiyel Riccati denklemi ileriye dönük integrasyon yöntemleri ile çözülebilir [25].

$$\dot{P}(x, t) = P(x, t)A(x, t) + A^T(x, t)P(x, t) - P(x, t)b(x, t)b^T(x, t)P(x, t) + Q(x, t) \quad (3.71)$$

Burada $Q(x, t) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ pozitif tanımlı simetrik bir matristir. Ayrıca Eş. 3.71'deki diferansiyel Riccati denkleminin ileriye dönük integrasyon yöntemleri ile çözümü, Eş. 3.70'deki diferansiyel Riccati denkleminin geriye dönük integrasyon yöntemleri ile çözümüne yaklaşık olarak eşit olduğu kabul edilebilir [25].

3.1. Lemma [25].

Eğer pozitif tanımlı simetrik bir $\bar{Q}(x, t)$ matrisi var ise Eş. 3.64'deki sistem, durum değişkenlerine bağlı diferansiyel Riccati denkleminin çözümüne dayalı değişken yapıli kontrol kuralı ile kararlı hale getirilebilir. Bu durumda $\bar{Q}(x, t)$ aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$-\bar{Q}(x, t) = 2\dot{P}(x, t) - Q(x, t) \quad (3.72)$$

Burada $Q(x, t)$, $x \in \mathcal{R}^n$ ve $t \in \mathcal{R}^+$ için pozitif tanımlı simetrik bir matristir. $\bar{Q}(x, t) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ise pozitif tanımlı simetrik bir matris fonksiyonudur.

$\bar{Q}(x, t) = \bar{C}^T(x, t)\bar{C}(x, t)$, $\bar{C}(x, t) \in \mathcal{R}^{\bar{l} \times n}$, $\bar{l} \geq 1$ olup $(\bar{C}(x, t), A(x, t))$ ikilisi gözlenebilirdir.

İspat [25]

Eğer Eş. 3.71'deki diferansiyel Riccati denkleminin çözümü Eş. 3.67'deki Lyapunov fonksiyonunu tanımlamak için kullanılır ve Lyapunov fonksiyonunun Eş. 3.64'deki sistemin yörüngeleri boyunca türevi alınırsa;

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) &= x^T \left(\dot{P}(x, t) + P(x, t)A(x, t) + A^T(x, t)P(x, t) \right) x \\ &\quad + 2x^T P(x, t)b(x, t)(u + d(x, t)) \\ &= x^T P(x, t)b(x, t)b^T(x, t)P(x, t)x - x^T \bar{Q}(x, t)x \\ &\quad + 2x^T P(x, t)b(x, t)(u + d(x, t)) \\ &= s^2(x, t) - x^T \bar{Q}(x, t)x + 2s(x, t)(u + d(x, t)) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Burada $s(x, t) = b^T(x, t)P(x, t)x$ olur. ■

3.6. Teorem [25]

- Eş. 3.71 ile verilen diferansiyel Riccati denkleminin çözümünden elde edilen pozitif tanımlı simetrik matris $P(x, t)$, Lyapunov fonksiyonunu tanımlamak için kullanılabilir.
- Lemma 3.1'deki şartı sağlayan pozitif yarı tanımlı bir $\bar{Q}(x, t) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ matrisi seçilsin.
- $R(x, t)$ ve $\Delta(x, t)$ matrisleri $\Delta(x, t) + R(x, t) = \bar{Q}(x, t)$ şartını sağlayacak şekilde seçilsin.

Yukarıdaki şartlar altında Eş. 3.64 ile belirtilen sistem için Eş. 3.66 ile tanımlanan doğrusal olmayan, zamanla değişen kayan sektör aşağıdaki şekilde tasarlanabilir.

$$\mathcal{S} = \{x \mid |s(x, t)| \leq \delta(x, t), x \in \mathcal{R}^n, t \in \mathcal{R}^+\} \quad (3.74)$$

Kayan sektörü tanımlamada kullanılan $s(x, t)$, $\delta(x, t)$ parametreleri ve sistem sektör içerisinde kullanılabilecek olan değişken yapıli kontrolcü aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} s(x, t) &= S(x, t)x, \quad S(x, t) = b^T(x, t)P(x, t) \\ \delta(x, t) &= \sqrt{x^T \Delta(x, t)x}, \quad \Delta(x, t) = \bar{Q}(x, t) - R(x, t) \\ u &= -k_i(x, t) \operatorname{sgn}(s(x, t)) \end{aligned} \quad (3.75)$$

Burada k_i pozitif kazanç sabitidir ve aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$k_i(x, t) \geq q(x, t)\|x\| + p(t), \quad \forall x \in \mathcal{R}^n, \forall t \in \mathcal{R}^+ \quad (3.76)$$

İspat [25]

Eş. 3.75 ile verilen değişken yapıli kontrol ve kayan sektör parametreleri Eş. 3.73'te yerlerine koyulursa Lyapunov fonksiyonun türevinin zamanla azaldığı görülür.

$$\begin{aligned}
\dot{L}(t) &= s^2(x, t) - x^T \Delta(x, t)x - x^T R(x, t)x \\
&\quad + 2s(x, t) \left(-k_i(x, t) \operatorname{sgn}(s(x, t)) + d(x, t) \right) \\
&\leq s^2(x, t) - \delta^2(x, t) - x^T R(x, t)x \\
&\leq -x^T R(x, t)x, \quad \forall x \in \mathcal{S}(t)
\end{aligned} \tag{3.77}$$

Bu durumda Lyapunov fonksiyonunun türevi azalır ve sistem kararlı hale gelir. ■

Teorem 3.6'ya göre eğer $\Delta(x, t)$ ve $R(x, t)$, r aşağıdaki gibi seçilirse [25];

$$0 < r < 1$$

$$\Delta(x, t) = r\bar{Q}(x, t), \quad R(x, t) = (1 - r)\bar{Q}(x, t) \tag{3.78}$$

$\bar{Q}(x, t)$ aşağıdaki eşitsizliği sağlamalıdır.

$$\bar{Q}(x, t) \geq \frac{4r}{(1-r)^2} q^2(x, t) I_n, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n, \forall t \in \mathcal{R}^+ \tag{3.79}$$

3.3.2. Kontrolcü tasarımı

3.7. Teorem [25]

Eş. 3.64 ile belirtilen sistem için değişken yapılı kontrolcü, Teorem 3.6 ile tasarlanan doğrusal olmayan, zamanla değişen kayma sektörü temel alınarak aşağıdaki gibi tasarlanabilir.

$$u = \begin{cases} -\beta^{-1}(x, t) \left(\alpha(x, t) + k_o(x, t) \operatorname{sgn}(s(x, t)) \right) & x \notin \mathcal{S} \\ -k_i(x, t) \operatorname{sgn}(s(x, t)) & x \in \mathcal{S} \end{cases} \tag{3.80}$$

Burada $k_o(x, t)$ ve $k_i(x, t)$ pozitif kazanç fonksiyonlarıdır.

$$k_o(x, t) \geq |\beta(x, t)| (q(x, t) \|x\| + p(t)) + \epsilon, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n, \forall t \in \mathcal{R}^+ \tag{3.81}$$

$$k_i(x, t) \geq q(x, t) \|x\| + p(t), \quad \forall x \in \mathcal{R}^n, \forall t \in \mathcal{R}^+ \tag{3.82}$$

Daha önce Eş. 3.65'te verildiği gibi $q(x, t)\|x\| + p(t)$, $d(x, t)$ belirsizliğinin sınırlarıdır. ϵ pozitif sabit bir sayıdır. $\alpha(x, t)$ ve $\beta(x, t)$ ise sayısal fonksiyonlardır ve aşağıdaki şekilde tanımlanmışlardır.

$$\alpha(x, t) = x^T P(x, t)x \frac{\partial}{\partial t} b(x, t) + \left(b^T(x, t)\dot{P}(x, t) + x^T P(x, t)x \frac{\partial b(x, t)}{\partial x} A(x, t) + b^T(x, t)P(x, t)A(x, t) \right) x \quad (3.83)$$

$$\beta(x, t) = x^T P(x, t)x \frac{\partial b(x, t)}{\partial x} b(x, t) + b^T(x, t)P(x, t)b(x, t) \quad (3.84)$$

İspat [25]

Sistemin başlangıç değerinin kayma sektörü dışında olduğu kabul edilsin. Bu durumda sisteme aşağıdaki kontrol girişi etki edecektir.

$$u = -\beta^{-1}(x, t) \left(\alpha(x, t) + k_o(x, t) \operatorname{sgn}(s(x, t)) \right) \quad (3.85)$$

Yukarıdaki kontrol girişi ile birlikte sistemin durum değişkenleri sektör içine doğru hareket ederler ve $s(x, t)$ fonksiyonunun türevi aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\begin{aligned} \dot{s}(x, t) &= \frac{d}{dt}(S(x, t)x) = \frac{d}{dt}(b^T(x, t)P(x, t)x) \\ &= \left(\dot{b}^T(x, t)P(x, t) + b^T(x, t)\dot{P}(x, t) \right) x + b^T(x, t)P(x, t)\dot{x} \\ &= \alpha(x, t) + \beta(x, t)(u + d(x, t)) \\ &= -k_o(x, t) \operatorname{sgn}(s(x, t)) + \beta(x, t)(u + d(x, t)) \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}s^2(x, t) &= 2s(x, t)\dot{s}(x, t) = -2k_o(x, t)|s(x, t)| + 2s(x, t)\beta(x, t)d(x, t) \\ &\leq -2\epsilon|s(x, t)| < 0, \quad \forall x \notin \mathcal{S}(t) \end{aligned} \quad (3.87)$$

Bu durumda sistemin durumu sektör dışından sektörün içine doğru değişir.

Sistem, sektörün sınırları içerisindeyken aşağıdaki kontrol girişi ile sistemin kararlılığı sağlanır.

$$u = -k_i(x, t) \operatorname{sgn}(s(x, t)) \quad (3.88)$$

Bu durumda daha önce Teorem 3.6'da da ispatlandığı gibi Eş. 3.67'deki Lyapunov fonksiyonu azalır ve sistem sektör içerisinde kararlı hale gelir. ■

Eğer Teorem 3.7'de $\alpha(x, t)$ ve $\beta(x, t)$ fonksiyonları hesaplanırken kullanılan $b(x, t)$ kısmi integrasyonunda x yeterince küçük ya da $b(x, t)$ sadece t 'nin bir fonksiyonu ise Eş. 3.80'de belirtilen kontrol kuralı aşağıdaki şekilde indirgenebilir [25].

$$u = \begin{cases} -k(x, t)s(x, t) & x \notin \mathcal{S} \\ -k(x, t)\delta(x, t)\operatorname{sgn}(s(x, t)) & x \in \mathcal{S} \end{cases} \quad (3.89)$$

Burada $k(x, t)$ pozitif kazanç fonksiyonudur ve aşağıdaki şartı sağlar.

$$k(x, t) > \frac{\alpha(x, t)(q(x, t)\|x\| + p(t))}{\beta(x, t)\sqrt{r x^T \bar{Q}(x, t)x}}, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n, \forall t \in \mathcal{R}^+ \quad (3.90)$$

Tezin ilerleyen bölümlerinde önerilmekte olan kontrolcülerle iyi bir karşılaştırma yapabilmek için Pan ve arkadaşlarının çalışmalarında kullandığı örnek ele alınsın.

3.3. Örnek [25]

Aşağıdaki doğrusal olmayan sisteme doğrusal olmayan, zamanla değişen kayan sektör kontrol metodunu uygulayalım.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sin^2(x_1) & 1 \\ 0 & 1 + \cos^2(x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u + d(x, t))$$

Burada $d(x, t)$ belirsizliği aşağıda verilmiştir.

$$d(x, t) = 0.7 \sin(x_1) - 0.8 \sin(x_2) + 0.5(x_1^2 + x_2^2) + 2 \sin(5t)$$

Sistem $x_0 = [5; -5]$ başlangıç koşulu için 0.001 zaman aralığı ile 10 saniye boyunca kontrol edilecektir. Eş. 3.74'te belirtilen kayan sektör ve Eş. 3.89'da belirtilen kayan sektör kontrolcü parametreleri aşağıdaki gibi seçilmiştir.

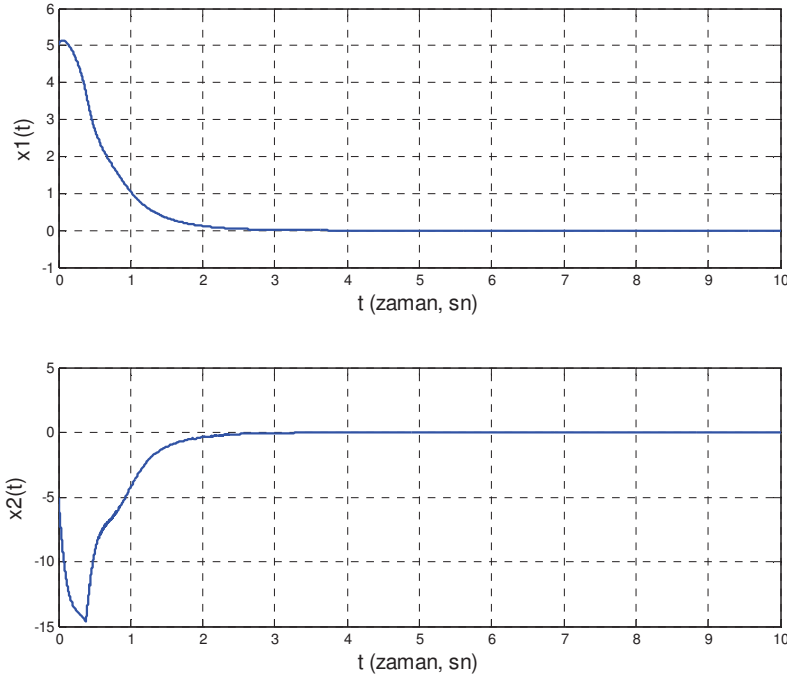
$$Q(x, t) = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix},$$

$$\bar{Q} = 0.5Q, \quad k(x, t) = 100, \quad r = 0.6$$

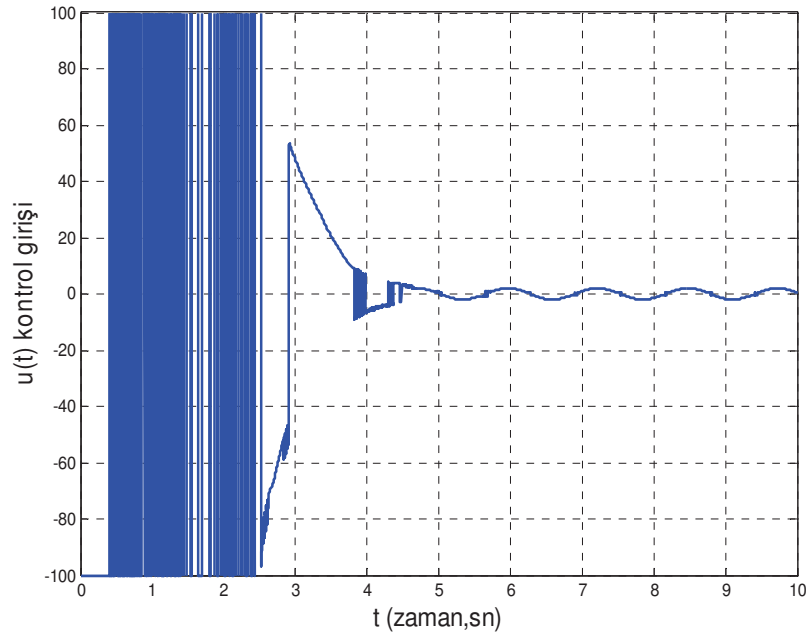
Sektör parametrelerinden biri olan $P(x, t)$ Eş. 3.85 durum değişkenlerine bağlı diferansiyel Riccati denkleminin 4. dereeden Runge-Kutta metodu ile çözümü ile elde edilecektir. Durum değişkenlerine bağlı diferansiyel Riccati denkleminin başlangıç değeri P_0 , cebirsel Riccati denkleminin başlangıç şartları için çözülmesi ile elde edilir.

$$P_0 = 10^2 \times \begin{bmatrix} 8.8844039 & 0.6641375 \\ 0.6641375 & 0.1637735 \end{bmatrix}$$

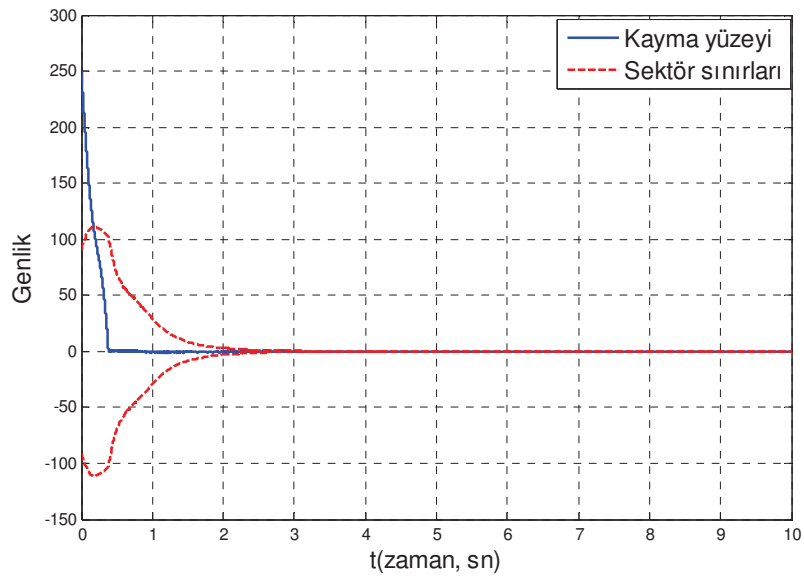
Sistemin kontrol girişi ise $|u| \leq 100$ olacak şekilde sınırlandırılmıştır.



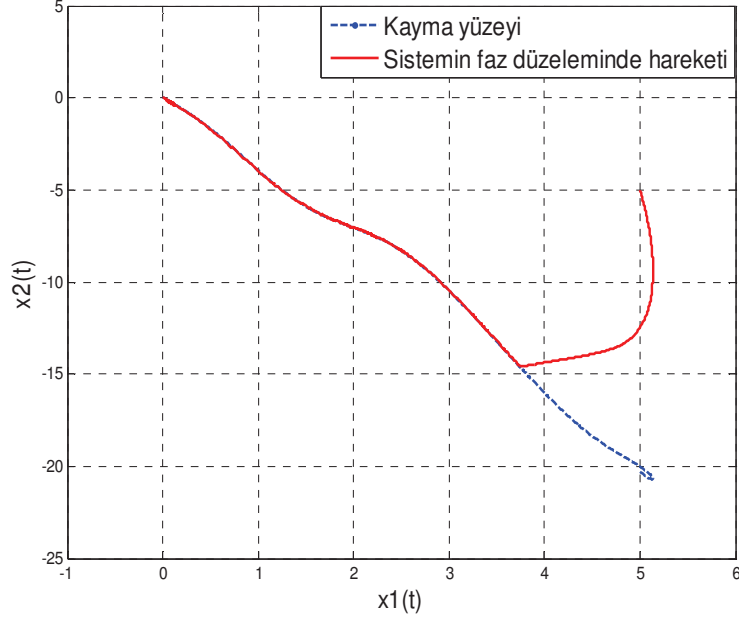
Şekil 3.13. Sistem durum değişkenleri



Şekil 3.14. Kontrol çabası



Şekil 3.15. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının davranışı



Şekil 3.16. Faz düzleminde sistem davranışı

3.4. Doğrusal Olmayan Sistemler İçin Durum Değişkenlerine Bağlı Doğrusal Sektör Kullanarak Kayan Sektör Kontrol

Doğrusal olmayan sistemler için durum değişkenlerine bağlı doğrusal sektör kullanarak kayan sektör tasarımı, kontrol edilecek sistemin her bir zaman aralığı için durum değişkenlerine bağlı olarak değerlendirilerek ardışık doğrusal sistemlerin elde edilmesi esasına dayanır. Elde edilen her bir doğrusal sistem için basitleştirilmiş PR-kayma sektörü tasarımı yapılır. Tasarlanan ardışık sektörler birleştirildiği zaman doğrusal olmayan sistem için eğimi zamanla değişen basitleştirilmiş PR-kayma sektörü elde edilir [24].

Aşağıdaki gibi doğrusal olmayan bir sistemi ele alınsın.

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)u \quad (3.91)$$

Sistemin $f(x, t) = A(x, t)x$ ve $g(x, t) = b(x, t)$ alınarak tanımlanabilir.

$$\dot{x} = A(x, t)x + b(x, t)u \quad (3.92)$$

Bu sistem için her bir zaman aralığında Teorem 3.2'de belirtilen basitleştirilmiş PR-kayma sektörü tasarımı sistemin bulunduğu zamandaki durum değişkenlerine bağlı olarak yapılır.

$$\begin{aligned} s(x, t) &= S(x, t)x, \quad S(x, t) \in \mathcal{R}^{1 \times n} \\ \delta(x, t) &= \sqrt{x^T \Delta(x, t)x}, \quad \Delta(x, t) \in \mathcal{R}^{n \times n} \geq 0 \\ S(x, t) &= b^T(x, t)P(x, t), \quad \Delta(x, t) = Q(x, t) - R(x, t) \end{aligned} \quad (3.93)$$

$P(x, t)$ matrisi aşağıdaki durum değişkenlerine bağlı cebirsel Riccati denkleminin her bir zaman aralığında çözümünden elde edilir.

$$P(x, t)A(x, t) + A^T(x, t)P(x, t) - P(x, t)b(x, t)b^T(x, t)P(x, t) = -\bar{Q}(x, t) \quad (3.94)$$

Burada $\bar{Q}(x, t)$ pozitif tanımlı bir matristir. Yukarıdaki Riccati denkleminin farklı zamanlarda durum değişkenlerine bağlı çözümünden elde edilen $P(x, t)$ matrisi kullanılarak tasarlanan zamanla değişen sektör aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\mathcal{S} = \{x | s^2(x, t) \leq \delta^2(x, t), \quad x \in \mathcal{R}^n, \quad t \in \mathcal{R}^+\} \quad (3.95)$$

Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanırsa;

$$L(t) = x^T P(x, t)x > 0, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n, \quad (x \neq 0), \quad \forall t \in \mathcal{R}^+ \quad (3.96)$$

Uygulanacak değişken yapılı kontrol ile Lyapunov fonksiyonun türevi aşağıdaki şartı sağlar.

$$\dot{L}(t) = \frac{d}{dt}(x^T P(x, t)x) \leq x^T R(x, t)x, \quad \forall x \in \mathcal{S}(t) \quad (3.97)$$

Sistem için daha önce Teorem 3.3 'de tasarlanan değişken yapılı kontrolcüye benzer bir değişken yapılı kontrol tasarlanacaktır. Ancak bu kez kayma sektörün eğimi zamanla değiştiği için kontrolcüde eğimi ifade eden terimlerin türevleri de dikkate alınmalıdır.

3.8. Teorem

Pozitif sabitler r ($0 < r < 1$) ve α ($0 < \alpha < 1$) için $\Delta = rQ$ ve $R = (1 - r)Q$ eşitlikleri kullanılarak Teorem 3.3'deki gibi tasarlanacak \mathcal{S}_i iç ve \mathcal{S}_o dış sektörleri ile tanımlanan kayma sektörü için aşağıdaki gibi bir kontrolcü tanımlansın.

$$u(t) = -\sigma(s(x, t), \delta(x, t))(S(x, t)b(x, t))^{-1} \left(S(x, t)A(x, t)x + \dot{S}(x, t)x + K(x, t)s(x, t) \right) \quad (3.98)$$

Yeterince büyük bir K değeri için sistem kayan sektörün dışından iç sektörün içine doğru hareket edecektir. Bu durumda K aşağıdaki eşitsizliğe göre seçilir.

$$K(x, t) > \max \left\{ \frac{S(x, t)b(x, t)}{2}, K_0(x, t) \right\} \quad (3.99)$$

Burada $K_0(x, t)$ pozitif bir sayıdır ve aşağıdaki eşitsizliğe göre seçilir.

$$2K_0(x, t)\alpha^2 rQ(x, t) + 2S^T(x, t)\dot{S}(x, t) + S^T(x, t)S(x, t)A(x, t) + A^T(x, t)S^T(x, t)S(x, t) > 0 \quad (3.100)$$

$\sigma(s(x, t), \delta(x, t))$ parçalı fonksiyonu ise Eş. 3.30'da belirtildiği gibi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\sigma(s(x, t), \delta(x, t)) = \begin{cases} 0 & x \in \mathcal{S}_i \\ \text{değişmez} & x \in \mathcal{S}_o \\ 1 & x \notin \mathcal{S} \end{cases}$$

İspat

Lyapunov fonksiyonunu Eş. 3.72'deki gibi tanımlansın.

$$L(t) = x^T P(x, t)x > 0, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n, (x \neq 0), \forall t \in \mathcal{R}^+$$

Sistem sektör dışında iken $\sigma(s(x, t), \delta(x, t)) = 1$ olur. Bu durumda kayma yüzeyinin türevi aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\begin{aligned}\dot{s}(x, t) &= \dot{S}(x, t)x + S(x, t)\dot{x} = \dot{S}(x, t)x + S(x, t)[A(x, t)x + b(x, t)u(t)] \\ &= -K(x, t)s(x, t)\end{aligned}\quad (3.101)$$

Kayma yüzeyinin karesinin türevi aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\frac{d}{dt}s^2(x, t) = 2s(x, t)\dot{s}(x, t) = -2K(x, t)s^2(x, t) < 0 \quad \forall x \notin \mathcal{S}_i \quad (3.102)$$

Yani yeterince büyük $K(x, t)$ değeri için sistem durum değişkenleri iç sektörün içine doğru hareket eder.

Sistemin yörüngeleri boyunca Lyapunov fonksiyonunun türevi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\dot{L}(t) &= \frac{d}{dx}(x^T P(x, t)x) = \dot{x}^T P(x, t)x + x^T \dot{P}(x, t)x + x^T P(x, t)\dot{x} \\ &= x^T \{A^T(x, t)P(x, t) + P(x, t)A(x, t) + \dot{P}(x, t)\}x + 2x^T P(x, t)b(x, t)u(t)\end{aligned}$$

Bu durumda;

$$\bar{Q}(x, t) = Q(x, t) + \dot{P}(x, t) \quad (3.103)$$

şeklinde tanımlansın.

Burada $\bar{Q}(x, t)$ her $x \in \mathcal{R}^n$ ve $t \in \mathcal{R}^+$ için pozitif tanımlıdır. Bu durumda Eş. 3.94 değerlendirilirse;

$$\begin{aligned}-Q(x, t) - \dot{P}(x, t) &= \\ P(x, t)A(x, t) + A^T(x, t)P(x, t) - P(x, t)b(x, t)b^T(x, t)P(x, t)\end{aligned}$$

Eş. 3.98'de tanımlanan kontrol terimi ile birlikte Lyapunov fonksiyonunun türevi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}\dot{L}(t) &= x^T \{-Q(x, t) + P(x, t)b(x, t)b^T(x, t)P(x, t)\}x \\ &\quad - 2x^T P(x, t)b(x, t)(S(x, t)b(x, t))^{-1}(S(x, t)A(x, t)x + \dot{S}(x, t)x + K(x, t)s(x, t))\end{aligned}$$

$$s(x, t) = b^T(x, t)P(x, t)x \text{ ve } s^T(x, t) = x^T P(x, t)b(x, t) \text{ ise}$$

$$\begin{aligned}\dot{L}(t) &= s^2(x, t) - x^T Q(x, t)x \\ &\quad + 2s(x, t)[-(S(x, t)b(x, t))^{-1}(S(x, t)A(x, t)x + \dot{S}(x, t)x + K(x, t)s(x, t))]\end{aligned}$$

$$\Delta(x, t) = Q(x, t) - R(x, t) > 0 \text{ ise}$$

$$\begin{aligned}\dot{L}(t) &= s^2(x, t) - x^T \Delta(x, t)x - x^T R(x, t)x \\ &\quad - 2s(x, t) \left[(S(x, t)b(x, t))^{-1} (S(x, t)A(x, t)x + \dot{S}(x, t)x \right. \\ &\quad \left. + K(x, t)s(x, t)) \right] \\ &= - \left[2(S(x, t)b(x, t))^{-1} K(x, t) - 1 \right] s^2(x, t) \\ &\quad - 2s(x, t)(S(x, t)b(x, t))^{-1} [S(x, t)A(x, t) + \dot{S}(x, t)]x - \delta^2(x, t) \\ &\quad - x^T R(x, t)x \\ &\leq - \left[2(S(x, t)b(x, t))^{-1} K(x, t) \right. \\ &\quad \left. - 1 \right] \alpha^2 \delta^2(x, t) - 2x^T S^T(x, t)(S(x, t)b(x, t))^{-1} [S(x, t)A(x, t) \\ &\quad + \dot{S}(x, t)]x - \delta^2(x, t) - x^T R(x, t)x \\ &< -2(S(x, t)b(x, t))^{-1} K(x, t) \alpha^2 \delta^2(x, t) \\ &\quad - 2x^T S^T(x, t)(S(x, t)b(x, t))^{-1} [S(x, t)A(x, t) + \dot{S}(x, t)]x \\ &\quad - x^T R(x, t)x \\ &= -(S(x, t)b(x, t))^{-1} x^T [2K(x, t) \alpha^2 r Q(x, t) \\ &\quad + S^T(x, t)S(x, t)A(x, t) + 2S^T(x, t)\dot{S}(x, t) \\ &\quad + A^T(x, t)S^T(x, t)S(x, t)] - x^T R(x, t)x \\ &< -x^T R(x, t)x, \quad \forall x \notin S_i\end{aligned} \tag{3.104}$$

Burada $S(x, t)b(x, t) > 0$ dir.

Sistem, sektör dışarısında iken yani $\sigma(s(x, t), \delta(x, t)) = 1$ iken yukarıdaki şart uygun $K(x, t)$ değerinin Eş. 3.99 ve Eş. 3.100'e göre seçilmesi ile sağlanır.

Sistem iç sektörün içine girdikten sonra $\sigma(s(x, t), \delta(x, t)) = 0$ olur ve Lyapunov fonksiyonunun türevi aşağıdaki eşitlikte gösterildiği gibi azalmaya devam eder.

$$\dot{L}(t) = s^2(x, t) - \delta^2(x, t) - x^T R(x, t)x \leq x^T R(x, t)x, \quad \forall x \in \mathcal{S}_i \quad (3.105)$$

Böylece sistem kararlı hale gelir. ■

3.4.1. Gürbüzlük

Belirsizlik içermeyen sistemlerdeki gibi belirsizlik içeren sistemde her bir zaman aralığında dondurarak o andaki durum değişkenleri için gürbüz $P_r R_r$ -kayma sektörü tasarımı yapılabilir. Elde edilen eğimleri zamanla değişen, ardışık doğrusal gürbüz $P_r R_r$ -kayma sektörleri birleştirilerek doğrusal olmayan sistem için gürbüz $P_r R_r$ -kayma sektörü elde edilir [24].

Aşağıdaki gibi doğrusal olmayan bir sistem ele alınsın.

$$\dot{x} = (A(x, t) + b(x, t)f(x, t))x + g(x, t)b(x, t)u \quad (3.106)$$

Burada $f(x, t) \in \mathcal{R}^{1 \times n}$ ve $g(x, t) \in \mathcal{R}^1$ olup sistem üzerindeki belirsizliği ifade ederler.

$$\|f(x, t)\| \leq F(x, t)$$

$$0 \leq g_{min}(x, t) \leq g(x, t) \leq g_{max}(x, t) \quad (3.107)$$

Bozucunun genliğinin geometrik ortalaması,

$$\hat{g}(x, t) = \sqrt{g_{min}(x, t)g_{max}(x, t)} \quad (3.108)$$

olur ve aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$\beta^{-1}(x, t) \leq \hat{g}(x, t)/g(x, t) \leq \beta(x, t) \quad (3.109)$$

$$\beta^{-1}(x, t) \leq g(x, t)/\hat{g}(x, t) \leq \beta(x, t) \quad (3.110)$$

β pozitif katsayısı aşağıdaki gibi seçilir.

$$\beta(x, t) = \sqrt{\frac{g_{max}(x, t)}{g_{min}(x, t)}} \quad (3.111)$$

Teorem 3.4'te belirtilen pozitif tanımlı simetrik $Q(x, t)$ matrisi durum değişkenlerine bağlı olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\gamma^2 Q(x, t) > \frac{4r}{(1-r)^2} F^2(x, t) I_n \quad (3.112)$$

Burada γ , I_n ve r Teorem 3.4'de açıklanmıştır.

Teorem 3.4'e göre $P_r(x, t) = P(x, t)$ ve $R_r(x, t) = (1 - \gamma)R(x, t)$ alınarak gürbüz $P_r R_r$ -kayma sektörü tasarlanırsa;

$$S_r = \{x | s^2(x, t) \leq \delta^2(x, t), x \in \mathcal{R}^n, t \in \mathcal{R}^+\} \quad (3.113)$$

$$s(x, t) = S(x, t)x, \quad S(x, t) \in \mathcal{R}^{1 \times n}$$

$$S(x, t) = b^T(x, t)P_r(x, t)$$

$$\delta(x, t) = \sqrt{x^T \Delta(x, t)x}, \quad \Delta(x, t) \in \mathcal{R}^{n \times n} \geq 0 \quad (3.114)$$

$$\Delta(x, t) = Q(x, t) - R_r(x, t)$$

$$R_r(x, t) = (1 - r)Q(x, t) \text{ dir.}$$

$P(x, t)$ ise Eş. 3.94 durum değişkenlerine bağlı cebirsel Riccati denkleminin çözümünden elde edilir.

$\bar{Q}(x, t)$, Eş. 3.103 ile tanımlanmıştır.

Bu durumda Eş. 3.96'daki Lyapunov fonksiyonu sağlanır.

$$L(t) = x^T P_r(x, t)x > 0, \quad P_r(x, t) = P(x, t), \quad \forall x \in \mathcal{R}^n, (x \neq 0), \forall t \in \mathcal{R}^+ \quad (3.115)$$

3.9. Teorem

Gürbüz P, R_r -kayma sektörü için aşağıdaki gibi bir kontrolcü tanımlansın.

$$u(t) = -\sigma(s(x, t), \delta(x, t))\hat{g}^{-1}(x, t)(S(x, t)b(x, t))^{-1} \left(S(x, t)A(x, t)x + \dot{S}(x, t)x + (K(x, t)\beta(x, t)|s(x, t)| + k(x, t))\text{sgn}(s(x, t)) \right) \quad (3.116)$$

$\sigma(s(x, t), \delta(x, t))$ parçalı fonksiyonu ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\sigma(s(x, t), \delta(x, t)) = \begin{cases} 0 & x \in \mathcal{S}_i \\ \text{değişmez} & x \in \mathcal{S}_o \\ 1 & x \notin \mathcal{S} \end{cases} \quad (3.117)$$

Yeterince büyük bir $K(x, t)$ değeri için sistem kayan sektörün dışından iç sektörün içine doğru hareket edecektir. Bu durumda $K(x, t)$ Eş. 3.99 ve Eş. 3.100 kullanılarak seçilir.

$k(x, t)$ ise belirsizliğe bağlı olarak aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

$$k(x, t) > \beta(x, t)F(x, t)\|x(t)\| \quad (3.118)$$

İspat

Lyapunov fonksiyonu Eş. 3.115'teki gibi tanımlansın.

$$L(t) = x^T P_r(x, t)x > 0, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n, \quad (x \neq 0), \quad \forall t \in \mathcal{R}^+$$

Eğer $\sigma(s(x), \delta(x)) = 1$ ise Eş. 3.116'da tanımlanan kontrol terimi ile birlikte Lyapunov fonksiyonun türevi ve kayma yüzeyinin karesinin türevi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}s^2(x, t) &= 2s(x, t)\dot{s}(x, t) \\
&= 2s(x, t) \left(\dot{S}(x, t)x(t) + S(x, t)(A(x, t) + b(x, t)f(x, t))x(t) \right. \\
&\quad \left. + S(x, t)b(x, t)g(x, t)u(t) \right) \\
&= 2s(x, t)\dot{S}(x, t)x(t) + 2s(x, t)(S(x, t)A(x, t) + S(x, t)b(x, t)f(x, t))x(t) \\
&\quad - 2s(x, t)S(x, t)b(x, t)g(x, t)\hat{g}^{-1}(x, t)(S(x, t)b(x, t))^{-1} \left(S(x, t)A(x, t)x(t) \right. \\
&\quad \left. + \dot{S}(x, t)x(t) + (K(x, t)\beta(x, t)|s(x, t)| + k(x, t))\text{sgn}(s(x, t)) \right) \\
&= 2s(x, t) \left((1 - g(x, t)\hat{g}^{-1}(x, t)) \left(\dot{S}(x, t) + S(x, t)A(x, t) \right) \right. \\
&\quad \left. + S(x, t)b(x, t)f(x, t) \right) x(t) - 2S(x, t)b(x, t)g(x, t)\hat{g}^{-1}(x, t)k(x, t)|s(x, t)| \\
&\quad - 2g(x, t)\hat{g}^{-1}(x, t)K(x, t)\beta(x, t)s^2(x, t) \\
&< -2g(x, t)\hat{g}^{-1}(x, t)K(x, t)\beta(x, t)s^2(x, t) \\
&< -2K(x, t)s^2(x, t), \quad \forall x \notin \mathcal{S}_i
\end{aligned} \tag{3.119}$$

Yani sistem durum değişkenleri iç sektörün içine doğru hareket eder.

Sistemin yörüngeleri boyunca Lyapunov fonksiyonun türevi alınırsa;

$$\begin{aligned}
\dot{L}(t) &= x^T(t) \left(A^T(x, t)P_r(x, t) + P_r(x, t)A(x, t) + \dot{P}_r(x, t) \right) x(t) \\
&\quad + 2x^T(t)P_r(x, t)B(x, t)(f(x, t)x(t) + g(x, t)u(t))
\end{aligned} \tag{3.120}$$

Eş. 3.103'ten $\bar{Q}(x, t) = Q(x, t) + \dot{P}_r(x, t)$ olur.

Burada $\bar{Q}(x, t)$ her $x \in \mathcal{R}^n$ ve $t \in \mathcal{R}^+$ için pozitif tanımlıdır. Bu durumda Eş. 3.94 değerlendirilirse;

$$\begin{aligned}
-Q(x, t) - \dot{P}_r(x, t) &= \\
P_r(x, t)A(x, t) + A^T(x, t)P_r(x, t) - P_r(x, t)B(x, t)b^T(x, t)P_r(x, t)
\end{aligned}$$

Burada $P_r(x, t) = P(x, t)$ dir.

$$\begin{aligned}
\dot{L}(t) &= s^2(x, t) - \delta^2(x, t) + 2s(x, t)(f(x, t)x(t) + g(x, t)u(t)) \\
&\quad - x^T(t)R(x, t)x(t) \\
&= s^2(x, t) - \delta^2(x, t) + (S(x, t)b(x, t))^{-1} \frac{d}{dt} s^2(x, t) \\
&\quad - 2(S(x, t)b(x, t))^{-1} s(x, t) (\dot{S}(x, t) + S(x, t)A(x, t)) x(t) \\
&\quad - x^T(t)R(x, t)x(t) \\
&< s^2(x, t) - \delta^2(x, t) - 2(S(x, t)b(x, t))^{-1} K(x, t) s^2(x, t) \\
&\quad - 2(S(x, t)b(x, t))^{-1} s(x, t) (\dot{S}(x, t) + S(x, t)A(x, t)) x(t) \\
&\quad - x^T(t)R(x, t)x(t) \\
&= - \left(2(S(x, t)b(x, t))^{-1} K(x, t) - 1 \right) s^2(x, t) - \delta^2(x, t) \\
&\quad - 2(S(x, t)b(x, t))^{-1} s(x, t) (\dot{S}(x, t) + S(x, t)A(x, t)) x(t) \\
&\quad - x^T(t)R(x, t)x(t) \\
&\leq \left(2(S(x, t)b(x, t))^{-1} K(x, t) - 1 \right) \alpha^2 \delta^2(x, t) \\
&\quad - 2x^T(t)S^T(x, t)(S(x, t)b(x, t))^{-1} \dot{S}(x, t)x(t) \\
&\quad - 2x^T(t)S^T(x, t)(S(x, t)b(x, t))^{-1} S(x, t)A(x, t)x(t) - \delta^2(x, t) \\
&\quad - x^T(t)R(x, t)x(t) \\
&< -2(S(x, t)b(x, t))^{-1} K(x, t) \alpha^2 \delta^2(x, t) \\
&\quad - 2x^T(t)S^T(x, t)(S(x, t)b(x, t))^{-1} \dot{S}(x, t)x(t) \\
&\quad - 2x^T(t)S^T(x, t)(S(x, t)b(x, t))^{-1} S(x, t)A(x, t)x(t) \\
&\quad - x^T(t)R(x, t)x(t) \\
&= -(S(x, t)b(x, t))^{-1} x^T(t) \left(2K(x, t) \alpha^2 r Q(x, t) + 2S^T(x, t) \dot{S}(x, t) \right. \\
&\quad \left. + S^T(x, t)S(x, t)A(x, t) + A^T(x, t)S^T(x, t)S(x, t) \right) x(t) \\
&\quad - x^T(t)R(x, t)x(t) \\
&< -x^T(t)R(x, t)x(t), \quad \forall x \notin \mathcal{S}_i \tag{3.121}
\end{aligned}$$

Sistem sektör dışarısında iken yani $\sigma(s(x, t), \delta(x, t)) = 1$ iken yukarıdaki şart, uygun $K(x, t)$ değerinin Eş. 3.99 ve Eş. 3.100'e göre seçilmesi ile sağlanır.

Sistem iç sektörün içine girdikten sonra $\sigma(s(x, t), \delta(x, t)) = 0$ olur ve Lyapunov fonksiyonunun türevi Teorem 3.8'in ispatında gösterildiği gibi azalmaya devam eder. ■

3.4. Örnek

Örnek 3.3'te kullanılan doğrusal olmayan sistem ele alınsın.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sin^2(x_1) & 1 \\ 0 & 1 + \cos^2(x_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u + d(x, t))$$

Burada $d(x, t)$ belirsizliği aşağıda verilmiştir.

$$d(x, t) = 0.7\sin(x_1) - 0.8\sin(x_2) + 0.5(x_1^2 + x_2^2) + 2\sin(5t)$$

Sistem $x_0 = [5; -5]$ başlangıç koşulu için 0.001 zaman aralığı ile 10 saniye boyunca kontrol edilecektir. Kayan sektör kontrolcü parametreleri aşağıdaki gibi seçilmiştir.

$$Q(x, t) = \begin{bmatrix} 10000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}, r = 0.5, \gamma = 0.8, \alpha = 0.2$$

Belirsizlik aşağıdaki gibi tanımlanırsa;

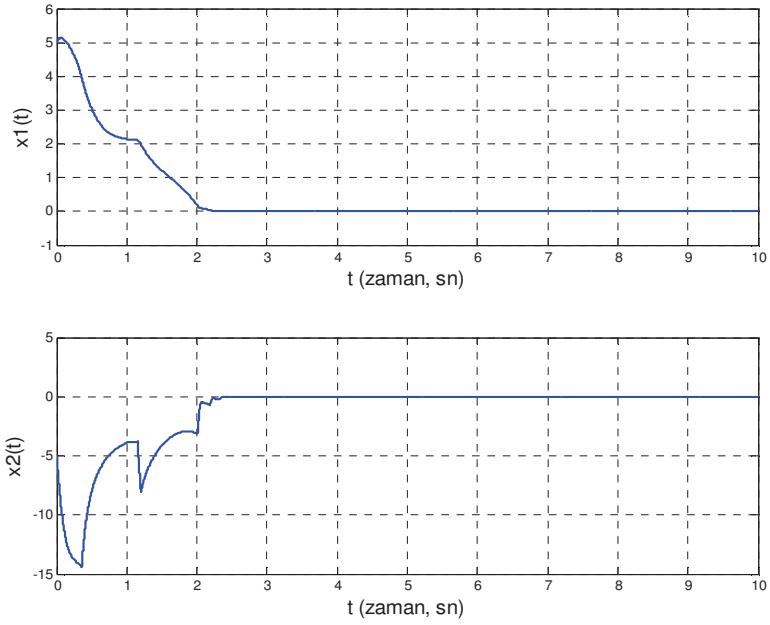
$$\begin{aligned} g(x, t) &= 1, f(x, t) = [f_1 \quad f_2] \\ f_1 &= \frac{0.7\sin(x_1)}{x_1} + 0.5x_1 \text{ ve } f_2 = -\frac{0.8\sin(x_2)}{x_2} + 0.5x_2 \end{aligned} \quad (3.122)$$

Sektör parametrelerinden biri olan $P(x, t)$ Eş. 3.94 durum değişkenlerine bağlı cebirsel Riccati denkleminin 5. dereden Runge-Kutta metodu ile çözümü ile elde edilecektir.

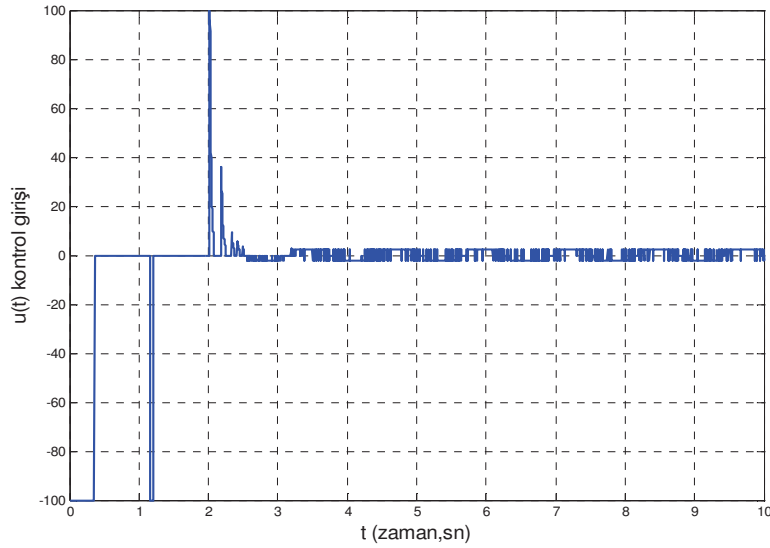
$$F(x, t) = \|f(x, t)\| + 1$$

$k(x, t) = \beta(F(x, t)\|x\| + 2) + 0.1$, burada $\beta = 1$ dir. $K(x, t) = 50$ seçilir.

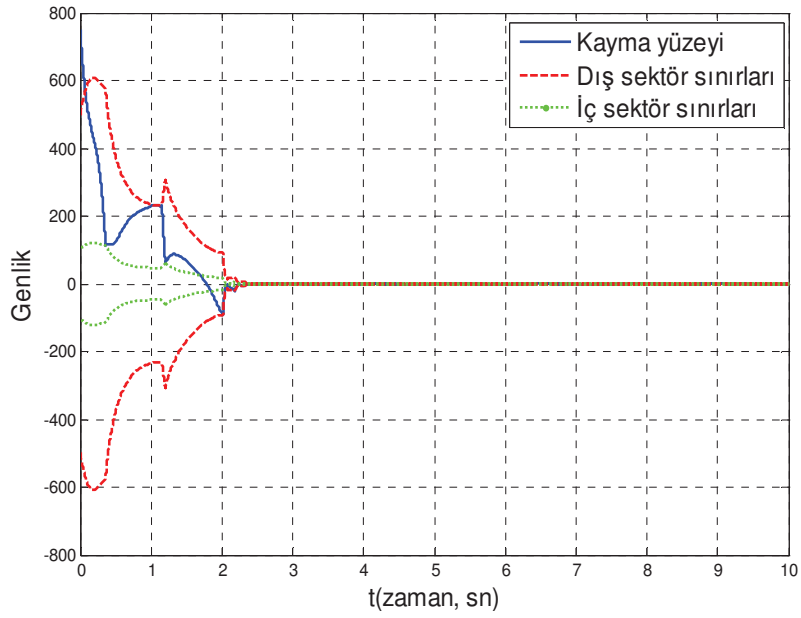
Teorem 3.9'a göre kontrolcü tasarımı yapılır ve sistemin kontrol girişi $|u| \leq 100$ olacak şekilde sınırlandırılırsa;



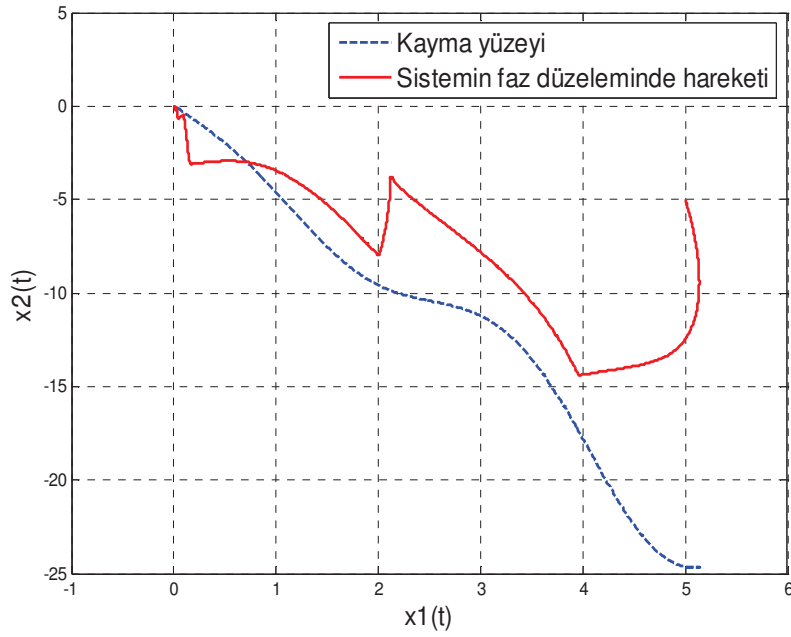
Şekil 3.17. Sistem durum değişkenleri



Şekil 3.18. Kontrol çabası



Şekil 3.19. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi

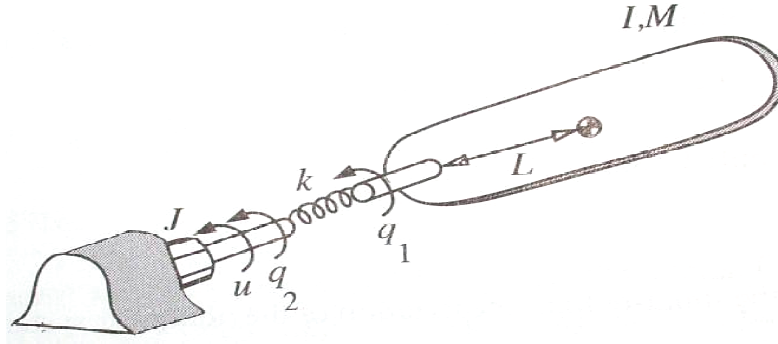


Şekil 3.20. Faz düzleminde sistem davranışı

3.5. Esnek Bağlantılı Robot Manipülatör Uygulaması

Bu çalışmada, bölüm 3'de ele alınan kayan sektör kontrol yöntemleri esnek bağlantıya sahip robot manipülatöre uygulanmaktadır. Böylece ele alınan kayan sektör kontrol yöntemlerinin doğrusal olmayan fiziksel bir sistem üzerinde karşılaştırılması, birbirlerine ve kayan kipli kontrol yöntemine göre avantaj ve dezavantajlarının incelenmesi amaçlanmıştır. Kayan sektör kontrol yönteminin etkinliğinin gözlenebilmesi için sistem öncelikle kayan kipli kontrol metodu ile daha sonra kayan sektör kontrol metotları ile kontrol edilmiştir.

Esnek bağlantıya sahip robot manipülatör sistemi doğrusal olmayan kontrol yöntemleri ile ilgili kitaplarda ve yayınlarda sıkça kullanılan bir sistemdir. Dolayısıyla sistemin hareket denklemleri ilgili kaynaklardan alınmıştır.



Şekil 3.21. Esnek bağlantılı robot manipülatör [33]

Şekil 3.21 ile gösterilen robot manipülatöre ait dinamik denklemler aşağıdaki gibidir [33].

$$I\ddot{q}_1 + MgL\sin(q_1) + k(q_1 - q_2) = 0 \quad (3.123)$$

$$J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u \quad (3.124)$$

Sistem matris formunda yazılırsa;

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u$$

$$x^T = [q_1 \quad \dot{q}_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_2]$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{MgL \sin(x_1)}{I} - \frac{k}{I} x_1 & 0 & \frac{k}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J} & 0 & -\frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J \end{bmatrix} u \quad (3.125)$$

Burada kolun toplam kütlesi M , yerçekimi ivmesi g , ağırlık merkezinin uzunluğu L , kolun atalet momenti I , yay sabiti k , motor rotorunun atalet momenti J , kontrol girişi u (motor torku), kolun açısai konumu q_1 , motor milinin açısai konumu q_2 ile ifade edilmektedir.

Sistem parametreleri ise aşağıdaki gibidir.

$$M = 5 \text{ kg}, g = 9.81 \text{ m/s}^2, L = 0.5 \text{ m}, I = 2.5 \text{ kgm}^2$$

$$k = 100 \text{ N/m}, J = 1.5 \text{ kgm}^2$$

3.5.1. Kayan kipli kontrol metodu ile çözüm

Kayma yüzeyi kayan sektör metodunda anlatıldığı şekilde hesaplanarak sisteme bu kayma yüzeyi üzerinde kayan kipli kontrol uygulanmaktadır. Sistem sırası ile $x_0^T = [40 \quad 0 \quad 35 \quad 0]$ ve $x_0^T = [70 \quad 0 \quad 60 \quad 0]$ başlangıç değerleri için kontrol edilerek benzetim sonuçları verilmektedir.

Kayan kipli kontrolde kontrol girişi aşağıdaki gibi iki kısımdan oluşur.

$$u = u_{es} + u_k \quad (3.126)$$

Kayma yüzeyinin zaman göre türevinden sistemi kayma yüzeyine yönlendirecek eşdeğer kontrolcü elde edilir.

$$s(x, t) = S(x, t)x$$

$S = b^T P$. Burada P cebirsel Riccati denkleminin çözümüdür.

$$\dot{s}(x, t) = \dot{S}(x, t)x + S(x, t)\dot{x} = \dot{S}(x, t)x + S(x, t)(A(x, t)x + b(x, t)u_{es}) = 0$$

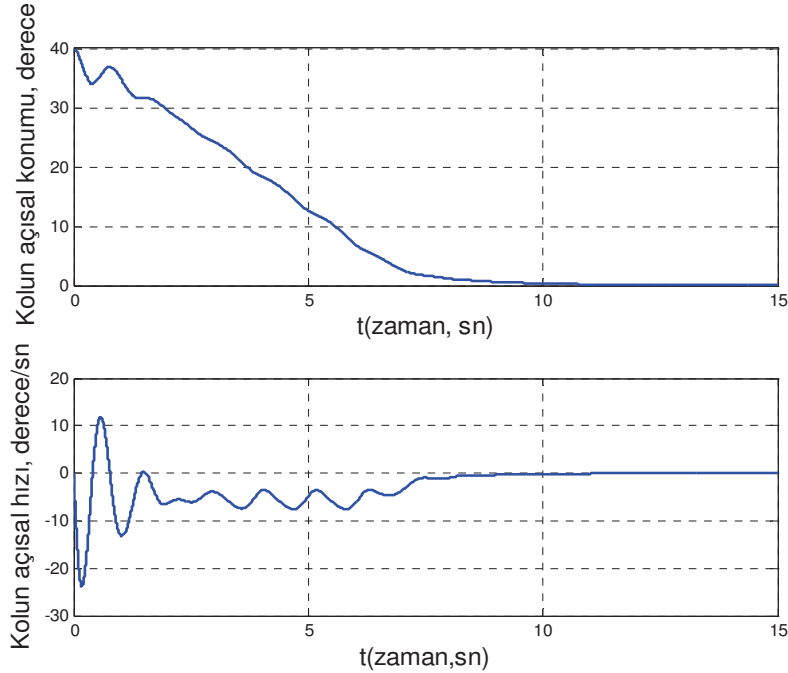
$$u_{es} = -(S(x, t)b(x, t))^{-1}(S(x, t)A(x, t)x + \dot{S}(x, t)x) \quad (3.127)$$

Kontrol girişinin ikinci kısmı ise sistemi kayma yüzeyi üzerinde tutacak şekilde aşağıdaki gibi seçilir.

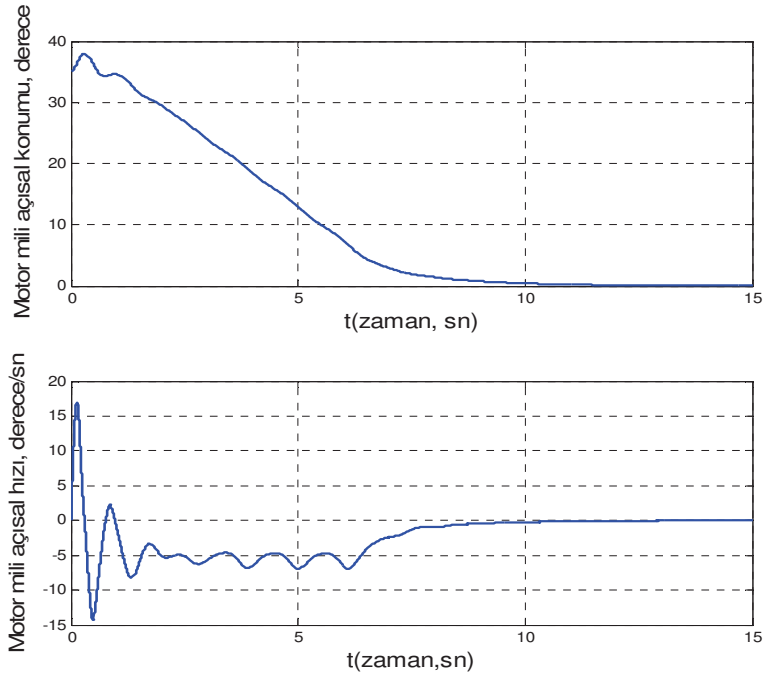
$$u_k = -k \text{sign}(s(x, t)), k = 10 \quad (3.128)$$

Kayma yüzeyi hesabında kullanılan Q matrisi, $Q = 1000 \times I_{4 \times 4}$ olarak seçilmiştir. Sistem $t = 15$ saniye süre ve 0.001 saniye zaman basamak artışı ile kontrol edilmektedir. Kontrolcü $|u| \leq 200 \text{ Nm}$ ile sınırlandırılmıştır.

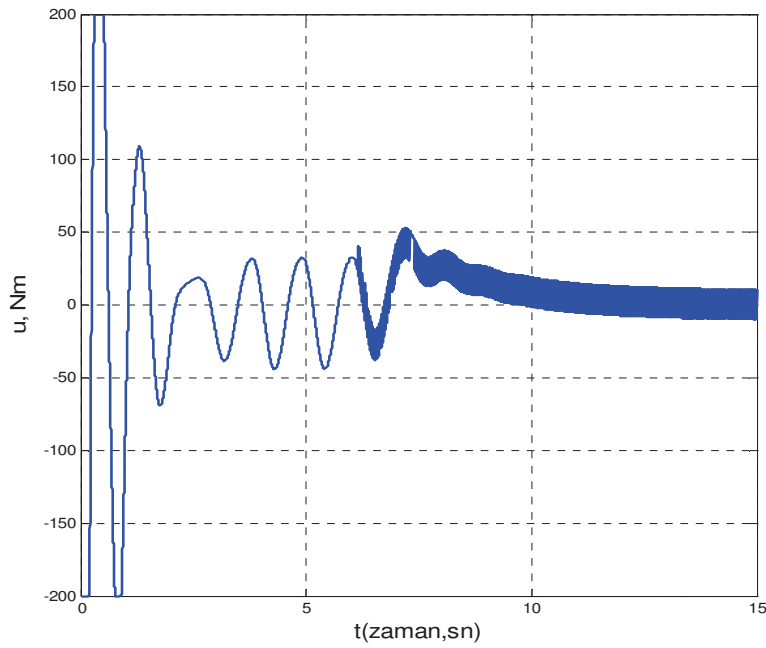
Başlangıç koşulu $x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$ için:



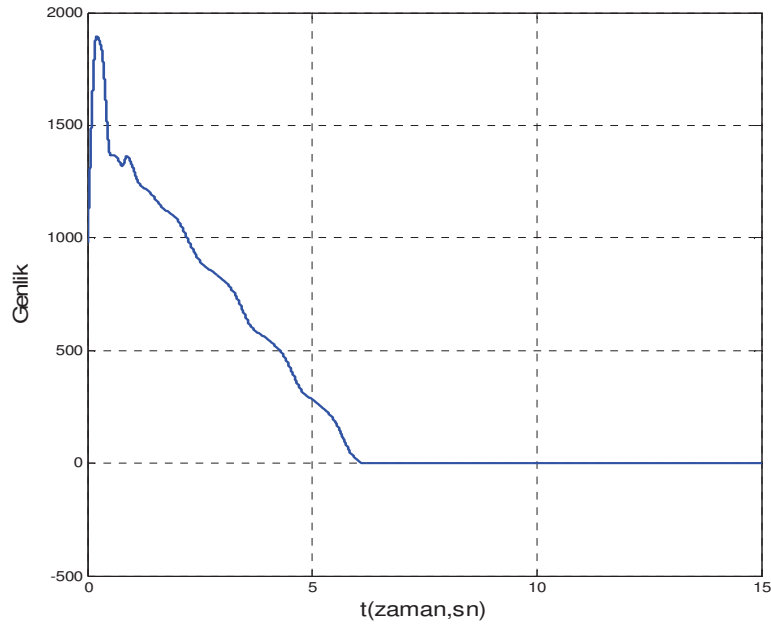
Şekil 3.22. Kolun açılmal konumu ve açılmal hızı ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$)



Şekil 3.23. Motor mili açısai konumu ve açısai hızı ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$)

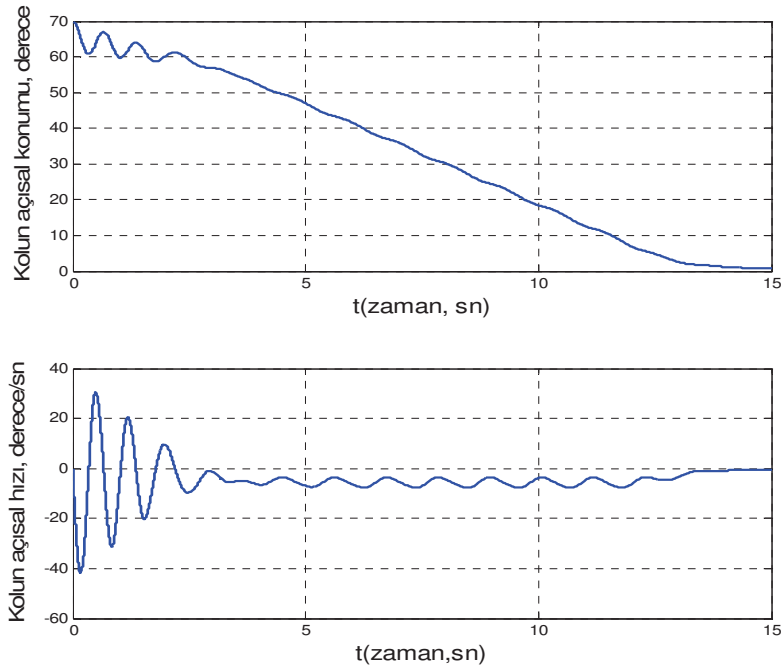


Şekil 3.24. Kontrol girişı ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$)

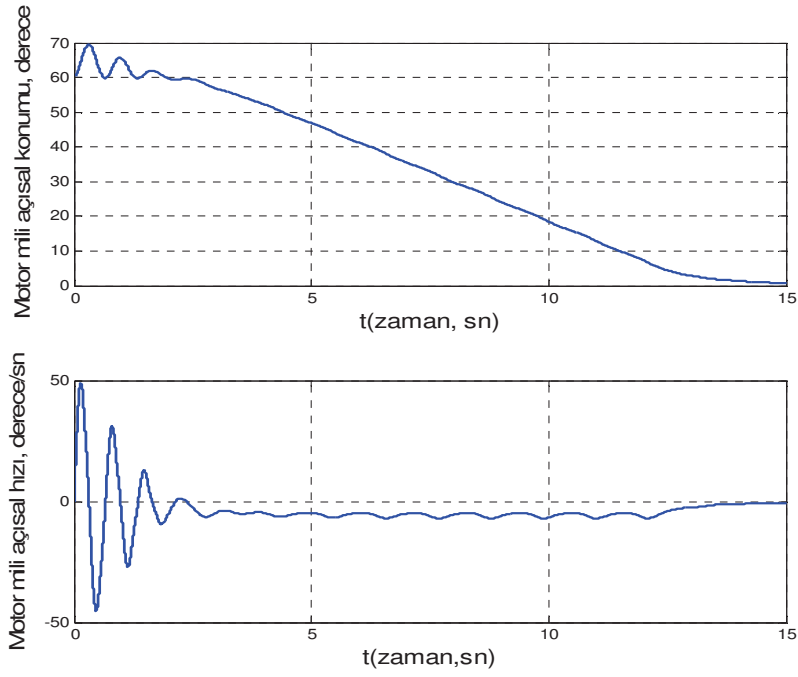


Şekil 3.25. Sistemin kayma yüzeyi fonksiyonunun değişimi
 $(x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0])$

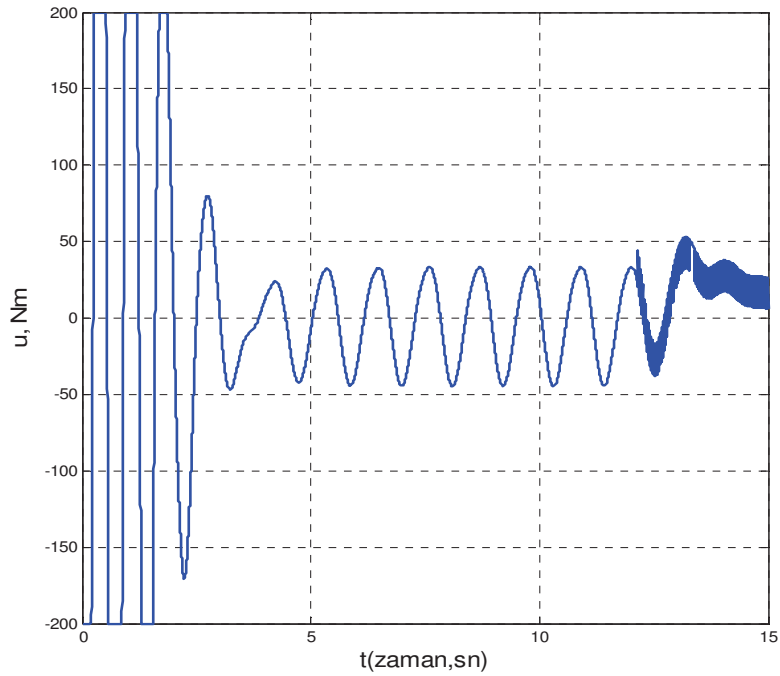
Başlangıç koşulu $x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$ için:



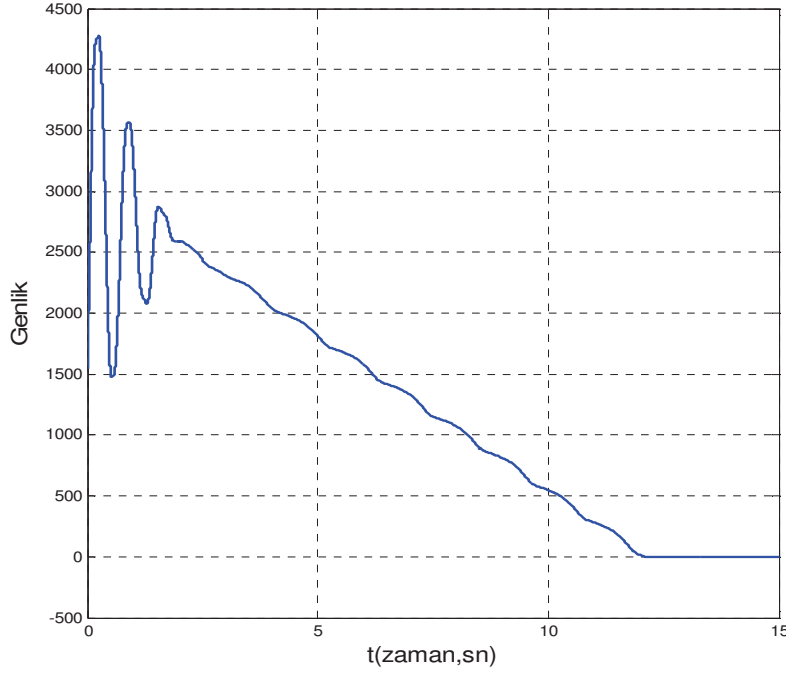
Şekil 3.26. Kolumun açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)



Şekil 3.27. Motor mili açısai konumu ve açısai hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)



Şekil 3.28. Kontrol girişi ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)



Şekil 3.29. Sistemin kayma yüzeyi fonksiyonunun değişimi
($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)

Benzetim sonuçlarında görüldüğü gibi sistem her iki başlangıç değeri içinde kayan kipli kontrol metodu ile kararlı hale getirilmiştir. Ancak sistem denge noktasına ulaştıktan sonra kontrol girişlerinde meydana gelen yüksek frekanslı, sürekli çattırtı Şekil 3.24 ve Şekil 3.28 de açıkça görülmektedir.

3.5.2. Zamanla değişen, doğrusal olmayan sektör metodu ile çözüm

Sistem sırası ile $x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$, $x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$ başlangıç değerleri ve $x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$ başlangıç değerinde $d = 6\sin(4t)$ bozucu için bölüm 3.3'te ele alınan zamanla değişen doğrusal olmayan sektör kullanılarak kontrol edilmektedir. Kayan sektör tasarımında kullanılan P matrisi Eş. 3.70 diferansiyel Riccati denkleminin çözümünden elde edilir. Diğer kontrolcü parametreleri ise aşağıdaki gibidir.

$$Q = \text{diag}\{80, 25, 70, 23\}, r = 0.8, \bar{Q} = 0.2Q$$

Sisteme Eş. 3.89'da belirtilen değişken yapıllı kontrol uygulanır.

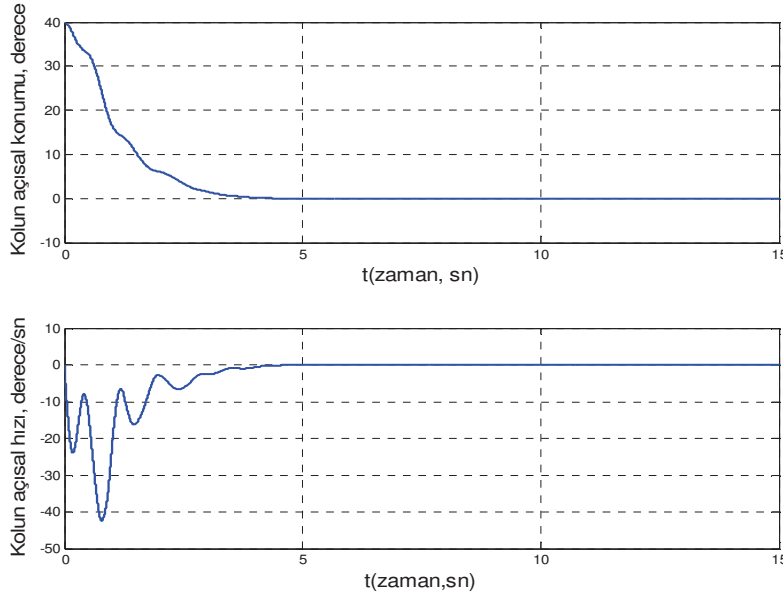
Eş. 3.55 ile belirtilen $k(x, t)$ kazanç fonksiyonu aşağıdaki eşitliğe göre seçilir.

$$k(x, t) > \frac{\alpha(x, t)(q(x, t)\|x\| + p(t))}{\beta(x, t)\sqrt{rx^T Q(x, t)x}}$$

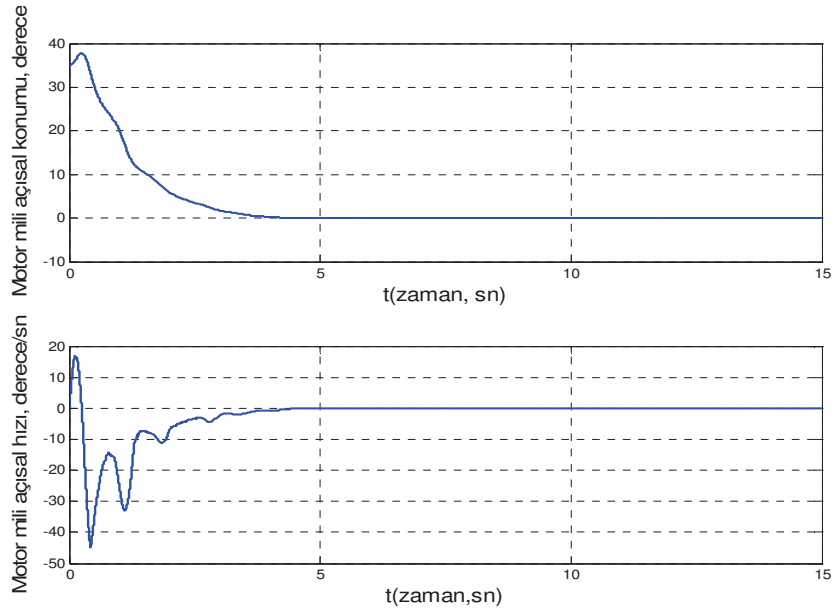
Bu çalışmada başlangıç değerleri $x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$ ve $x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$ olan benzetimler için $k(x, t) = 2$ seçilirken, başlangıç değeri $x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$ olan ve $d = 6\sin(4t)$ belirsizlik içeren benzetimde $k(x, t) = 6$ seçilmiştir.

Sistem $t = 15$ saniye süre ve 0.001 zaman basamak artışı ile kontrol edilmektedir. Kontrolcü $|u| \leq 200 \text{ Nm}$ ile sınırlandırılmıştır.

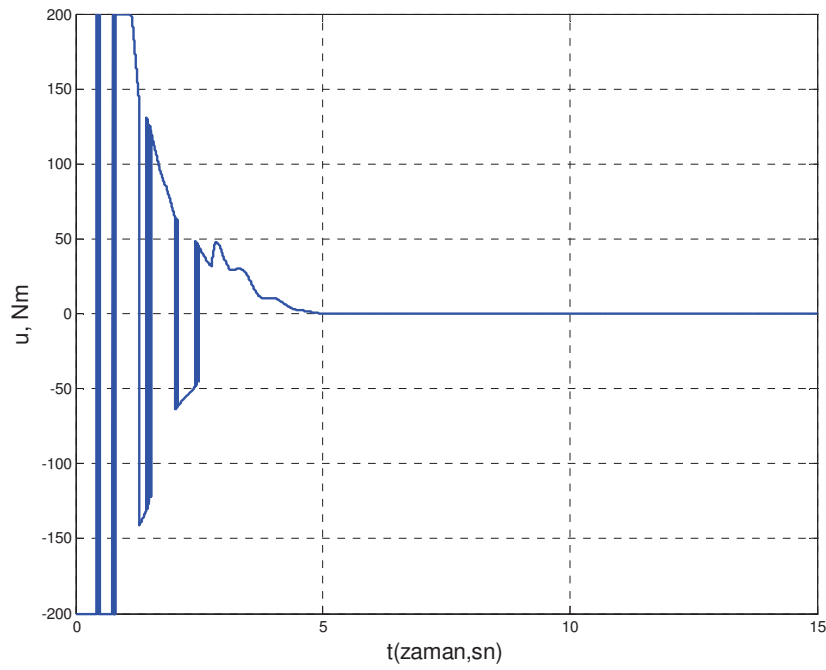
Başlangıç koşulu $x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$ için:



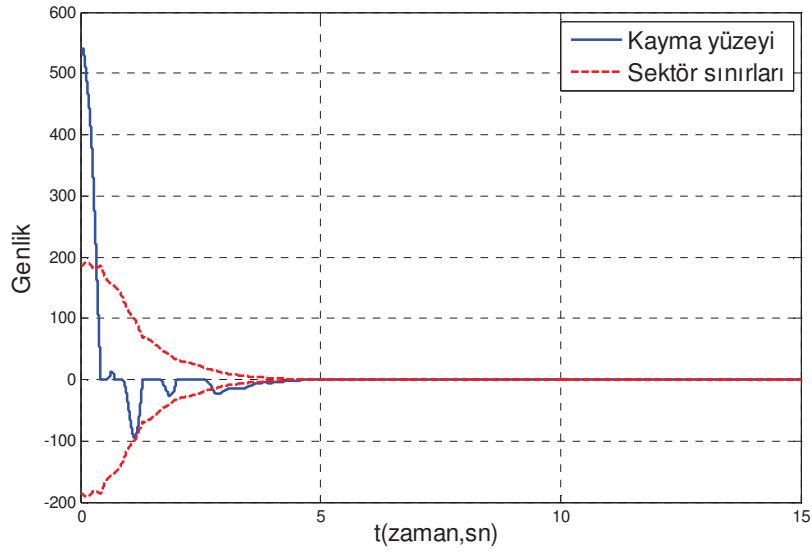
Şekil 3.30. Kolun açısıl konumu ve açısıl hızı ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$)



Şekil 3.31. Motor mili açısai konumu ve açısai hızı ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$)

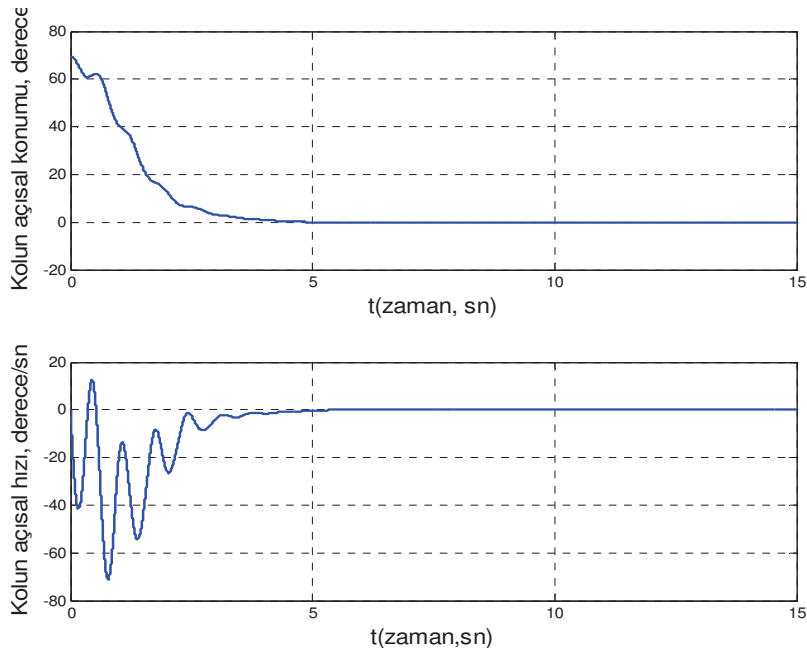


Şekil 3.32. Kontrol girişı ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$)

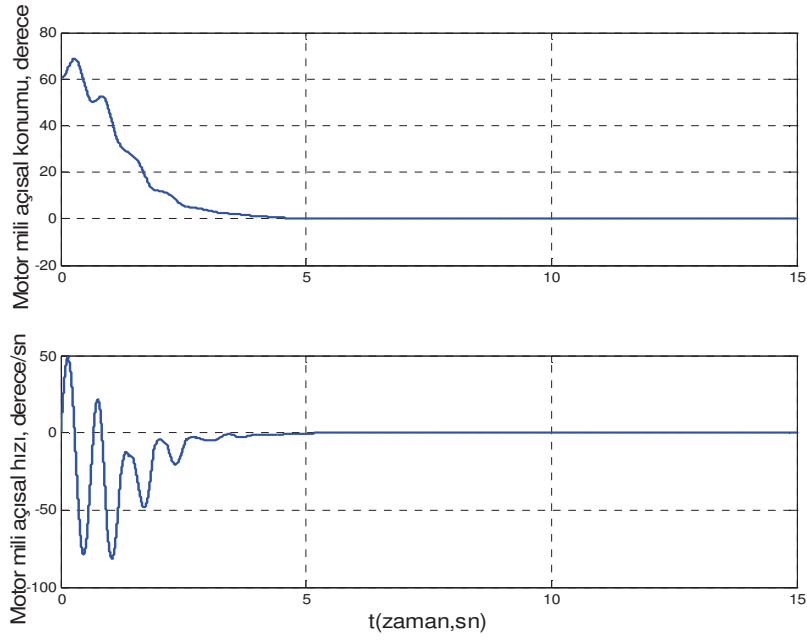


Şekil 3.33. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$)

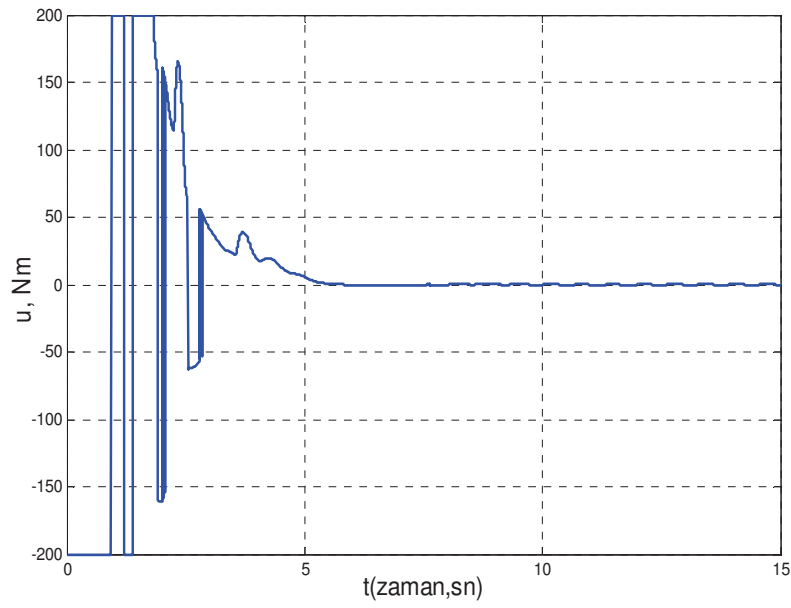
Başlangıç koşulu $x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$ için:



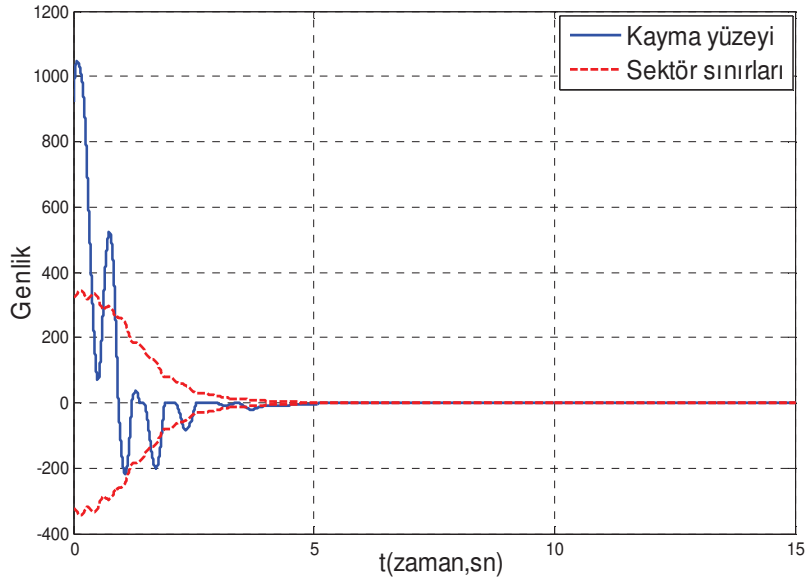
Şekil 3.34. Kolun açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)



Şekil 3.35. Motor mili açışsal konumu ve açışsal hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)

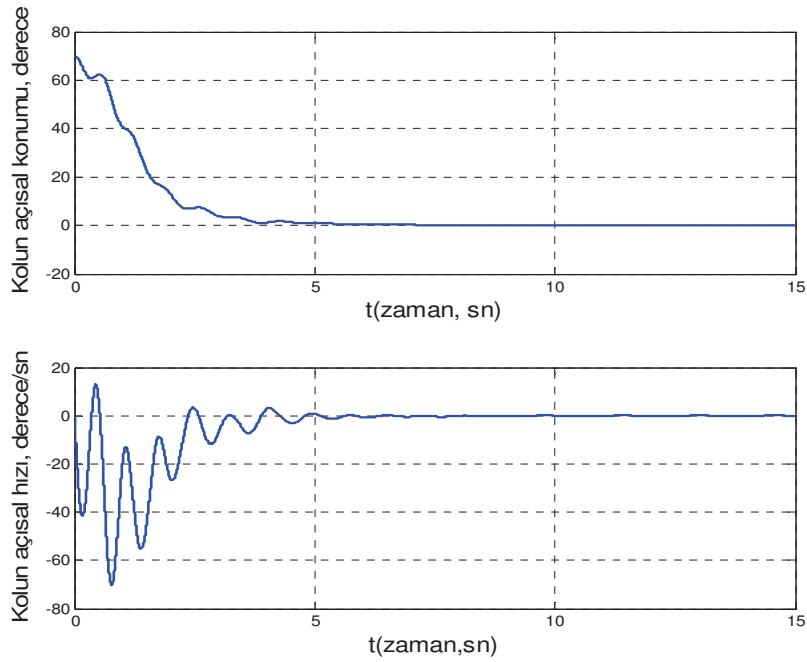


Şekil 3.36. Kontrol girişı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)

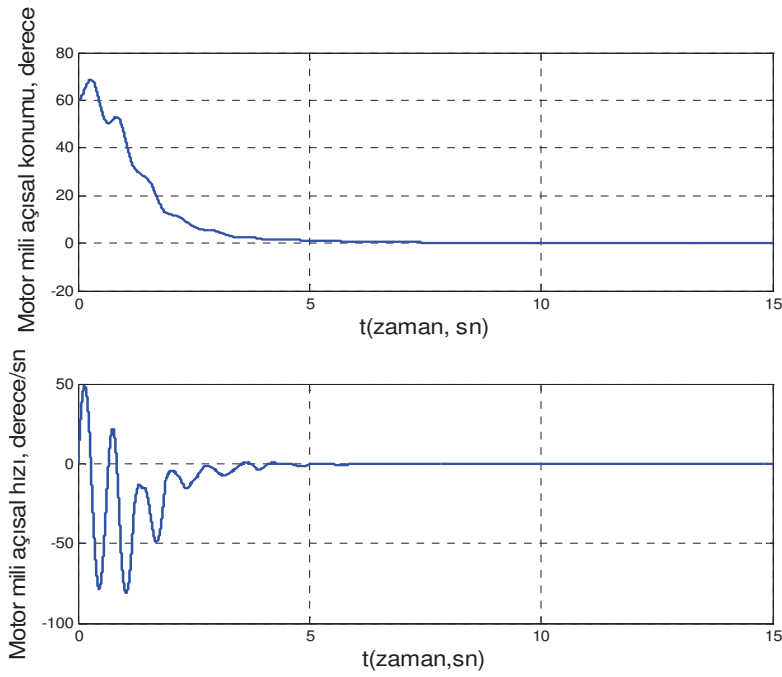


Şekil 3.37. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)

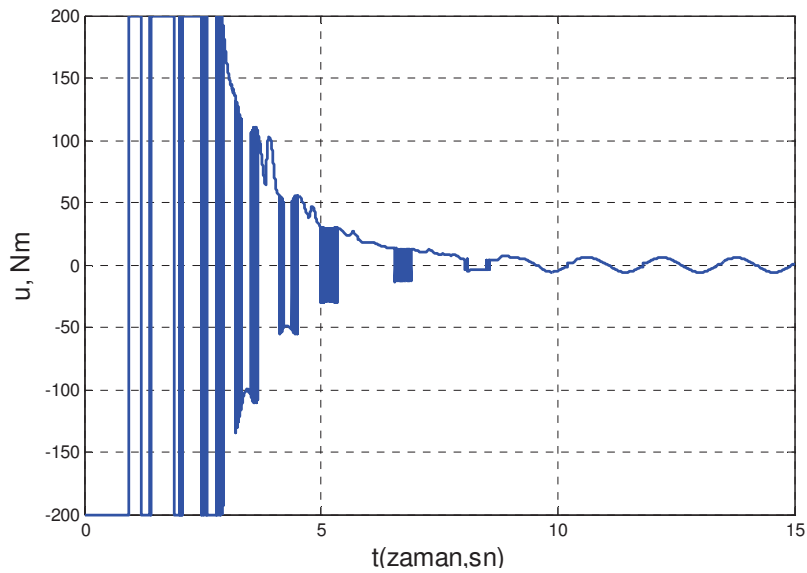
Başlangıç koşulu $x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$ ve $d = 6\sin(4t)$ bozucu için:



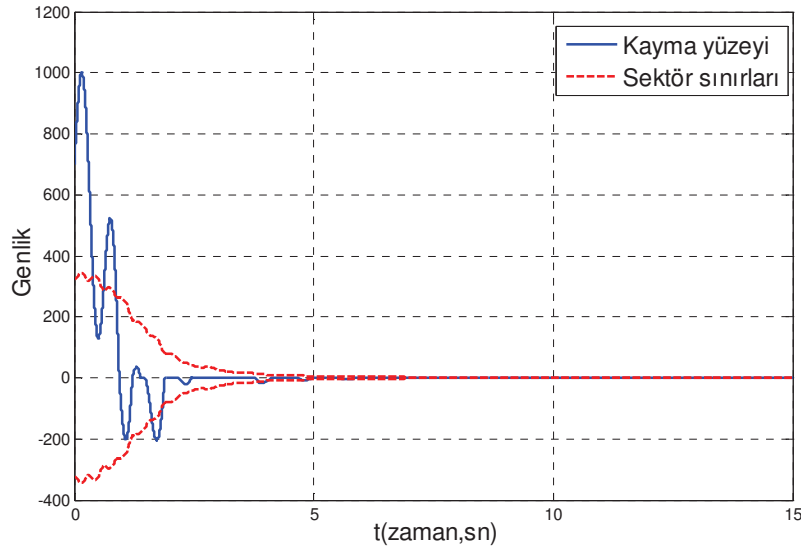
Şekil 3.38. Kolun açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$, $d = 6\sin(4t)$)



Şekil 3.39. Motor mili açısai konumu ve açısai hızı
 $(x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0], d = 6\sin(4t))$



Şekil 3.40. Kontrol girişı $(x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0], d = 6\sin(4t))$



Şekil 3.41. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$, $d = 6\sin(4t)$)

Benzetim sonuçları incelendiğinde sistemin üç durum için de başarı ile kontrol edilerek kararlı hale getirildiği görülür. Sistem kararlı hale gelirken kayan kipli kontrolde olduğu gibi yüksek frekanslı sürekli bir çarptırı meydana gelmemektedir. Bunun yerine kontrol sinyalinde (Şekil 3.32, Şekil 3.36) sistemin sektör içerisindeki konumuna bağlı olarak ortaya çıkan genliği zamanla azalan kısa süreli çarptırı hareketleri görülmektedir. Sektörün sıfır noktası etrafında kararlı olmasıyla birlikte sistemin kontrol girişi de sıfır olmakta ve sistem sektörden çıkmadığı sürece kontrol girişine ihtiyaç duyulmamaktadır.

Belirsizlik içeren sistemde ise kontrol sinyali çarptırıtıyı azaltması yönünden benzer davranış sergilerken sektörün sıfır etrafında kararlı olması ile birlikte kontrol sinyalinde (Şekil 3.40) sadece belirsizlikten kaynaklanan sinüs fonksiyonu kalmaktadır.

3.5.3. Durum değişkenlerine bağlı doğrusal sektör metodu ile çözüm

Sistem sırası ile $x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$, $x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$ başlangıç değerleri ve $x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$ başlangıç değerinde $d = 6\sin(4t)$ bozucu için bölüm 3.4 de ele alınan durum değişkenlerine bağlı doğrusal sektör kullanılarak kontrol edilmektedir. Kontrolcü parametreleri ise karşılaştırma yapılabilmesi için bir önceki uygulamadaki gibi seçilmiştir.

$$Q = \text{diag}\{80, 25, 70, 23\}, r = 0.8$$

Kayma sektörü tasarımı Eş. 3.93'te verilmiştir. Kayma sektörü tasarımında kullanılan P matrisi her bir zaman aralığında cebirsel Riccati denkleminin çözümünden elde edilir. Tasarlanan sektör $\alpha = 0.8$ seçilerek iç ve dış sektörlerle ayrılır.

Belirsizlik içermeyen durumlar için sistem Teorem 3.8 ile belirtilen değişken yapıyı kontrolcü kullanılarak kontrol edilir.

$$u(t) = -\sigma(s(x, t), \delta(x, t))(S(x, t)b(x, t))^{-1} \left(S(x, t)A(x, t)x + \dot{S}(x, t)x + K(x, t)s(x, t) \right)$$

Kontrolcüdeki $K(x, t)$ katsayısı Eş. 3.99 ve Eş. 3.100'e göre her bir zaman aralığında bir döngü yardımı ile programa otomatik olarak hesaplatılarak seçilmektedir.

Belirsizlik içeren sistemin kontrolünde ise Teorem 3.9'da belirtilen gürbüz kontrolcü kullanılarak kontrol edilir.

$$u(t) = -\sigma(s(x, t), \delta(x, t))\hat{g}^{-1}(x, t)(S(x, t)b(x, t))^{-1} \left(S(x, t)A(x, t)x + \dot{S}(x, t)x + (K(x, t)\beta(x, t)|s(x, t)| + k(x, t))\text{sgn}(s(x, t)) \right)$$

Kontrolcüdeki $K(x, t)$ katsayısı Eş. 3.99 ve Eş. 3.100'e göre seçilirken $k(x, t)$ katsayısı her bir aralıkta Eş. 3.118'de belirtilen eşitliğe göre aşağıdaki gibi belirlenir.

$$k(x, t) = \beta(x, t)[(F(x, t) + \|d\|)\|x(t)\|] + 0.1$$

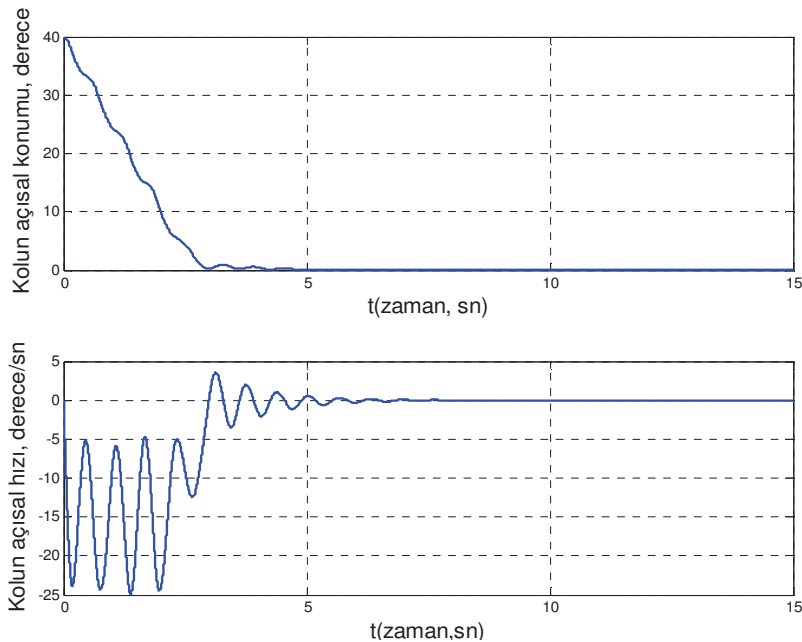
Burada $F(x, t) > \|f(x, t)\|$ ve $f(x, t) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$.

Kontrolcünün diğer parametreleri aşağıdaki gibi seçilmiştir.

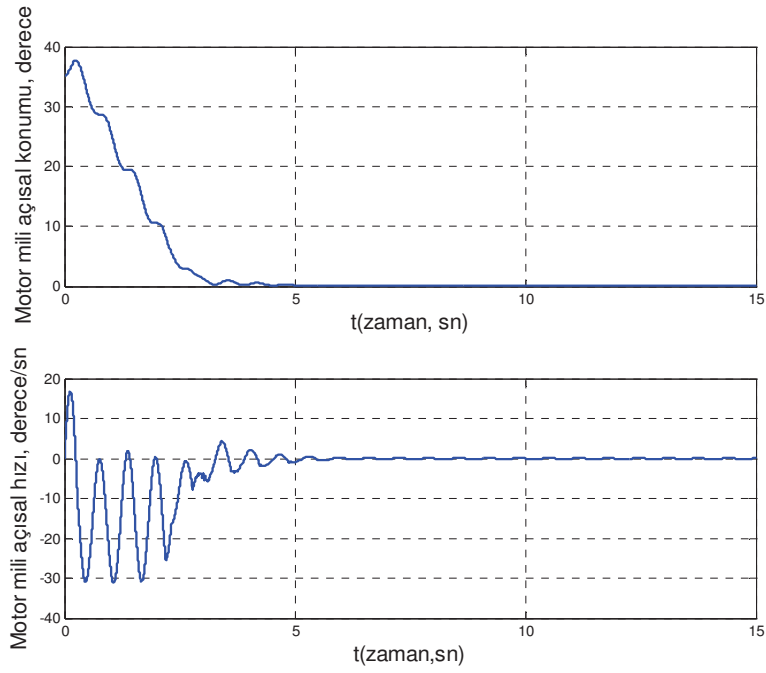
$$g = 1, \hat{g} = 1, \beta = 1, \gamma = 0.8$$

Sistem $t = 15$ saniye süre ve 0.001 zaman basamak artışı ile kontrol edilmektedir. Kontrolcü $|u| \leq 200 \text{ Nm}$ ile sınırlandırılmıştır.

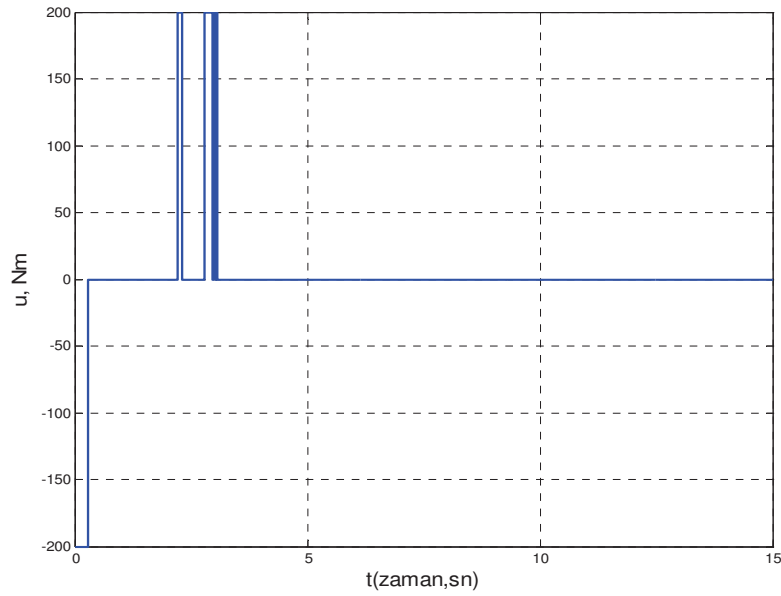
Başlangıç koşulu $x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$ için:



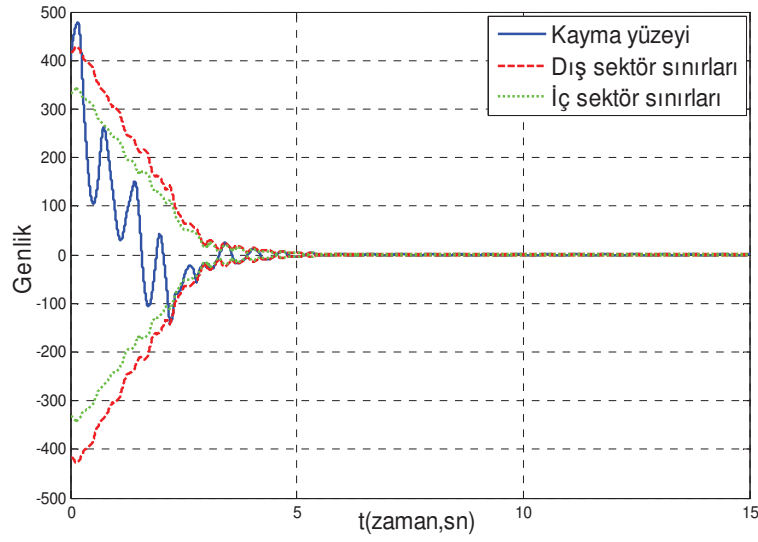
Şekil 3.42. Kulun açısai konumu ve açısai hızı ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$)



Şekil 3.43. Motor mili açısai konumu ve açısai hızı ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$)

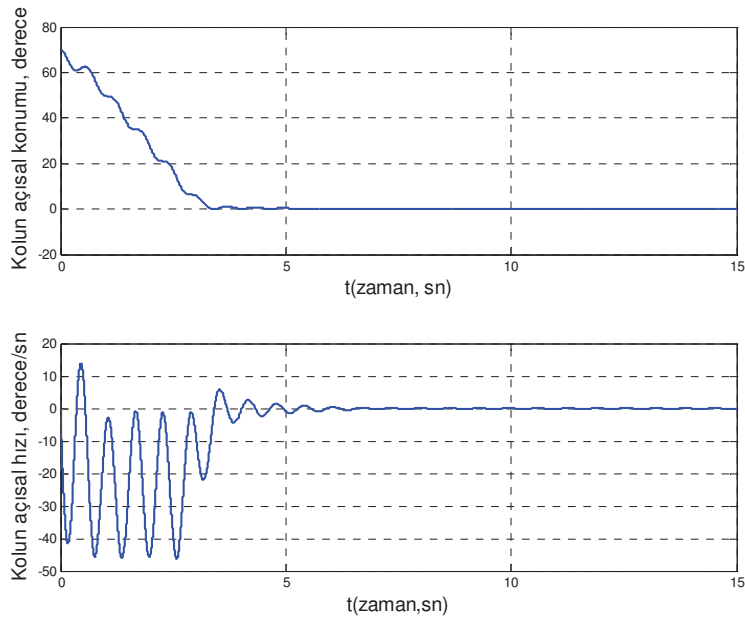


Şekil 3.44. Kontrol girişı ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$)

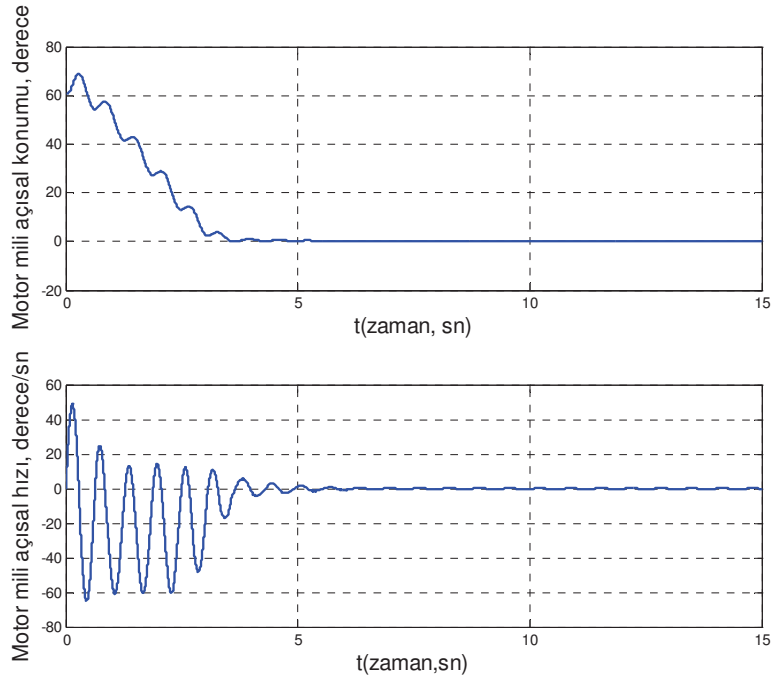


Şekil 3.45. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi ($x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$)

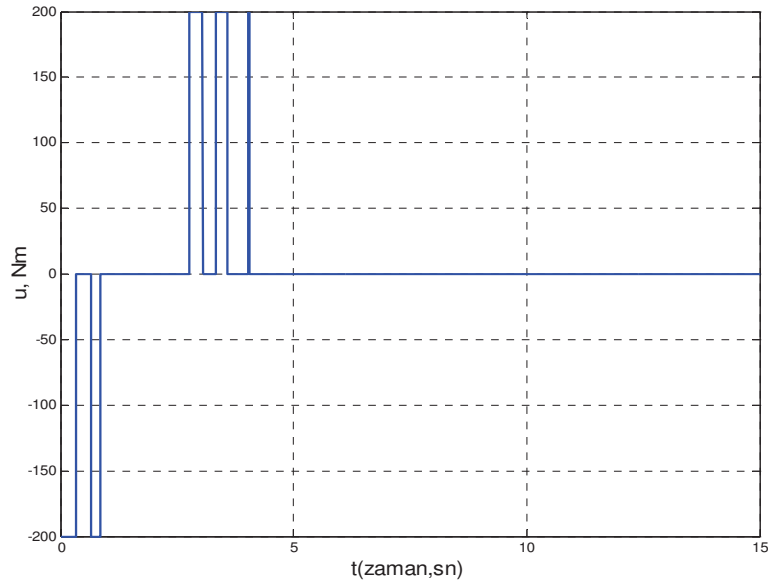
Başlangıç koşulu $x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$



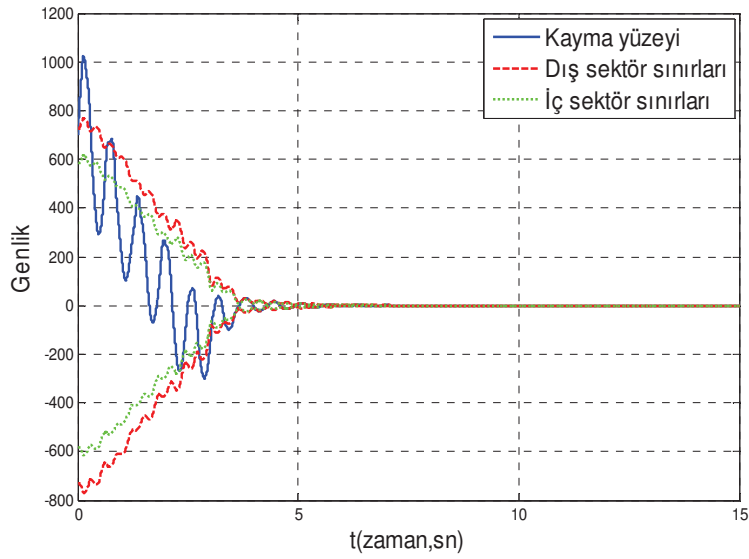
Şekil 3.46. Kolumun açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)



Şekil 3.47. Motor mili açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)

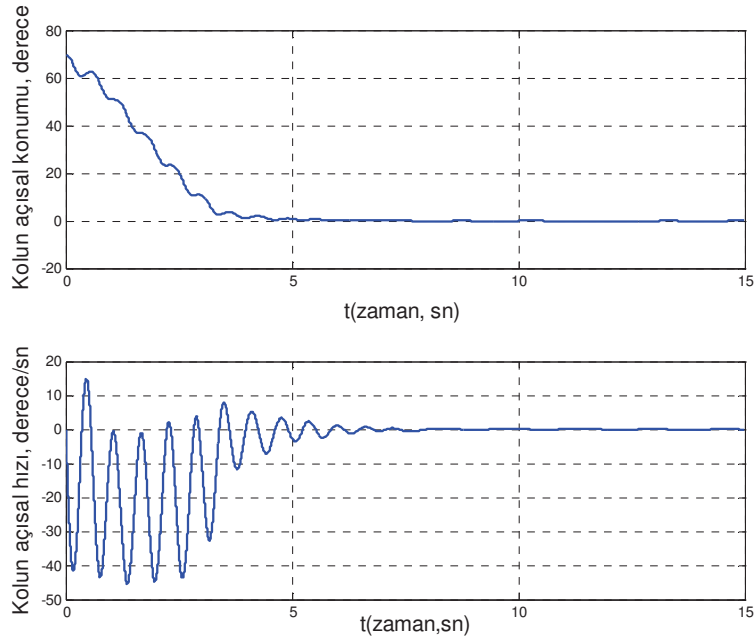


Şekil 3.48. Kontrol girişi ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)

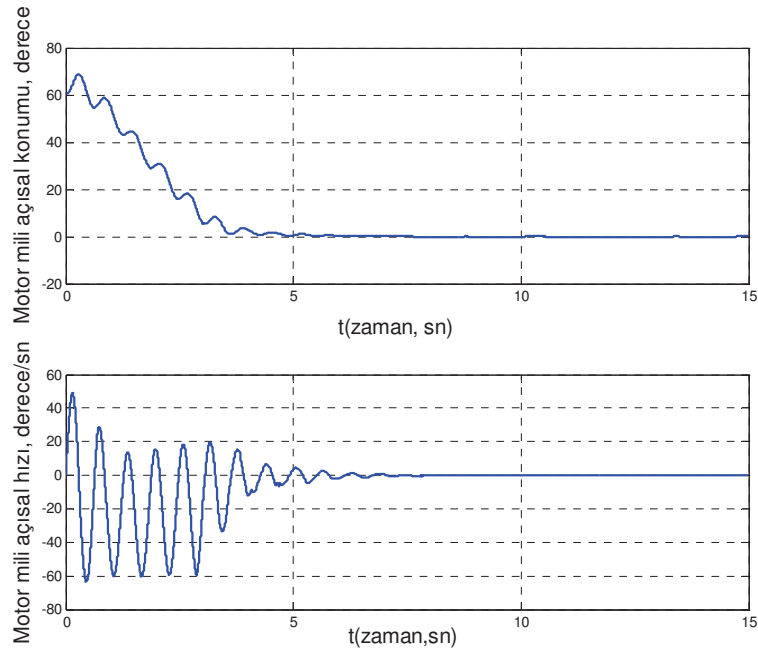


Şekil 3.49. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$)

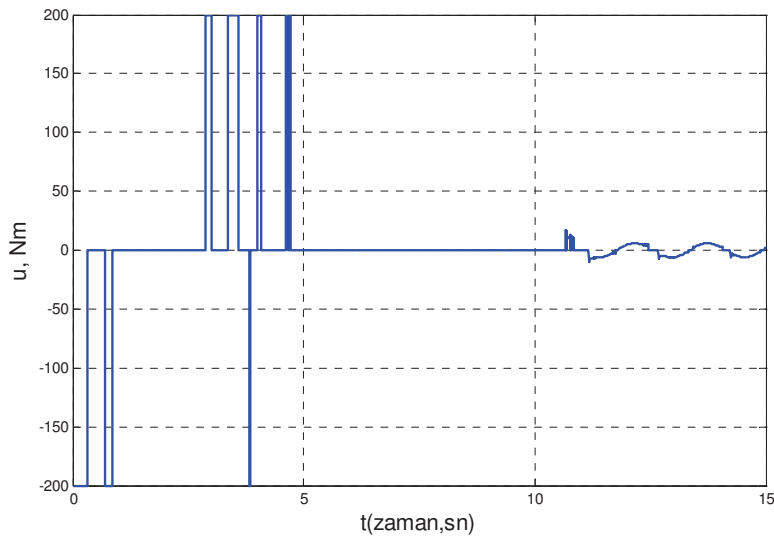
Başlangıç koşulu $x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$ ve $d = 6\sin(4t)$ bozucu için:



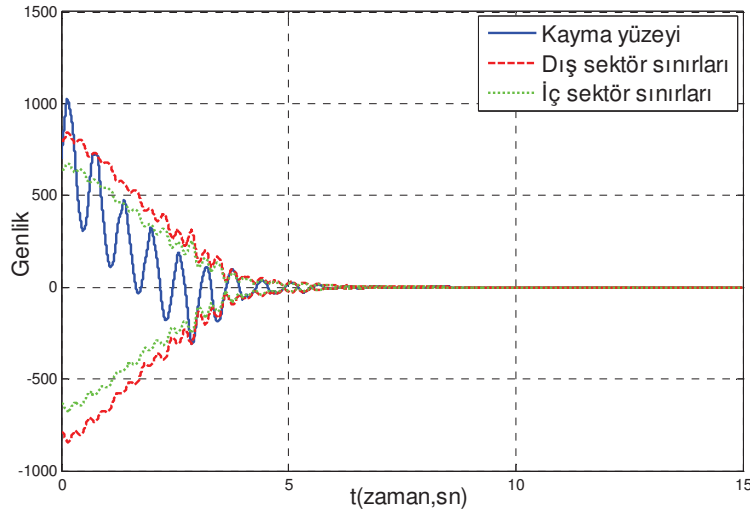
Şekil 3.50. Kolun açısal konumu ve açısal hızı ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$, $d = 6\sin(4t)$)



Şekil 3.51. Motor mili açısal konumu ve açısal hızı
 $(x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0], d = 6\sin(4t))$



Şekil 3.52. Kontrol girişi $(x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0], d = 6\sin(4t))$



Şekil 3.53. Sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi ($x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$, $d = 6\sin(4t)$)

Benzetim sonuçları incelendiğinde sistemin üç durum için de başarı ile kontrol edilerek kararlı hale getirildiği görülür. Kayan kipli kontrol kullanıldığında meydana gelen çattırtı problemi ise neredeyse yok edilmiştir.

Bütün benzetim sonuçları incelendiğinde her iki kayan sektör kontrol yaklaşımının da kayan kipli kontrolden üstünlükleri açıkça görülmektedir. Her iki yaklaşımda çattırtıyı belirgin oranda yok etmiş ve bir süre sonra kontrol girişine ihtiyaç duymadan sistemin kararlı kalmasını sağlamışlardır. Ayrıca kontrol sinyalinde kayan kipli kontrole oranla enerji tasarrufu sağlamışlardır. Bunun yanında her iki yaklaşımda da belirsizlik içeren durumda başarılı sonuçlar elde edilmiştir.

İki kayan sektör yaklaşımı kendi içerisinde karşılaştırılacak olursa;

Bölüm 3.5.2'de doğrusal olamayan sektör tasarımına göre yapılan çözümde sektör tasarımı diferansiyel Riccati denkleminin çözümüne dayanmaktadır. Seçilen değişken yapılı kontrolcü sektör dışarısında durum geri besleme kontrolcü, sektör içerisinde ise kayan kipli kontrolcü benzeri bir davranış sergilemektedir.

Sektör içerisinde meydana gelen kısa süreli çatırtı oluşumlarının sektörün sifıra yaklaşması ile genliği azalmakta ve sonunda yok olmaktadır. Daha önce belirtildiği gibi sistem sektör içerisinde kararlı bir davranış sergilemeye çalışır. Ancak kontrolcü sektör içerisinde de çalışarak sistemin gürbüzlüğü arttırmaktadır.

Bölüm 3.5.3'te durum değişkenlerine bağlı doğrusal sektör tasarımı ile yapılan çözümde sektör tasarımı cebirsel Riccati denkleminin her bir zaman aralığında çözümüne dayanır. Seçilen kontrolcü yapı olarak durum geri besleme kontrole benzer davranış gösterir. Ancak bu yaklaşımda sistemin sektör içerisindeki kararlı davranışından faydalanılarak iç sektörde kontrol girişi yapılmamaktadır. Sektör içerisinde sistemin kararlı dinamik davranışından faydalanılması çatırtıyı azaltmakta ve enerji tasarrufu sağlamaktadır.

Belirsizliğin olmadığı $x_0^T = [40 \ 0 \ 35 \ 0]$ ve $x_0^T = [70 \ 0 \ 60 \ 0]$ başlangıç koşullarında iki yaklaşımda 5 saniye sonra sistemi kararlı hale getirmektedir. İlk başlangıç koşulunda doğrusal olmayan sektör tasarımı ile kontrol edilen sistemde durum değişkenleri (Şekil 3.30, Şekil 3.31) diğerine (Şekil 3.42, Şekil 3.43) oranla daha az salınım yapmaktadır. Bununla birlikte doğrusal olmayan sektör kontrolde (Şekil 3.36) kontrol girişinde durum değişkenlerine bağlı doğrusal sektör kontrole (Şekil 3.44) oranla daha fazla çatırtı meydana gelmekte ve daha fazla enerji harcanmaktadır. İkinci başlangıç koşulu içinde benzeri davranışlar gözlemlenmektedir.

Belirsizlik içeren durumlar da ise diğer sonuçlardan farklı olarak sistem doğrusal olmayan sektör kontrolde, durum değişkenlerine bağlı doğrusal sektör kontrole oranla daha hızlı cevap vermekte ve daha gürbüz bir yapı sergilemektedir.

3.6. Bölüm Özeti

Bu bölümde kayan sektör kontrol yöntemi detaylı olarak ele alınmıştır. İlk olarak doğrusal sistemler için kayan sektör yaklaşımı ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Daha sonra doğrusal olmayan sistemler için doğrusal olmayan, zamanla değişen kayan sektör kontrol ele alınmıştır. Son olarak Özcan'ın da üzerinde çalışmaları yaptığı doğrusal olmayan sistemler için durum değişkenlerine bağlı kayan sektör kontrol yöntemi önerilmiştir [24]. Bu yöntemin teorisindeki eksikliklerin giderilebilmesi için yöntem detaylı olarak ele alınmıştır. Bu bölümdeki temel katkı olan Teorem 3.8 ve Teorem 3.9 yazılarak bölüm içerisinde ispatları yapılmıştır. Bölüm içerisindeki anlatımlar örneklerle desteklenerek önerilen yöntemler esnek mafsallı robot manipülatör sistemi üzerinde uygulanmıştır.

4. DOĞRUSAL OLMAYAN SİSTEMLERE ZAMANLA DEĞİŞEN DOĞRUSAL SEKTÖRLERLE YAKINSAYARAK KAYAN SETÖR KONTROL

Kayan sektör kontrol kullanarak doğrusal ve doğrusal olmayan sistemlerin kontrolü bölüm 3'te ayrıntılı olarak ele alınmıŐtı. Bu bölümde doğrusal olmayan sistemler için daha önce ele alınan yöntemlerden farklı olarak doğrusal olmayan sisteme doğrusal zamanla değişen sistemler yardımı ile yakınsanmaktadır. Elde edilen ardışık zamanla değişen doğrusal sistemler yardımı ile doğrusal olmayan sistem için kayan sektör tasarımı yapılarak değişken yapılı kontrol uygulanmaktadır.

Ardışık yakınsama tekniği ile ilgili literatürde çeşitli çalışmalar mevcuttur. Salamcı ve Banks ardışık yakınsama tekniği ile optimum kayma yüzeyi tasarımı yapmışlardır [34]. Salamcı doktora çalışmasında bir füze modeli için ardışık yakınsama tekniği ile kayan kipli kontrol uygulaması yapmıştır [35]. Rodriguez ve Banks doğrusal olmayan sistemlerin doğrusal yakınsama Şartlarını ve kararlılık analizini yapmışlardır [32]. Çimen ve Banks optimal kontrol yöntemi için ardışık yakınsama tekniği ile uçuŐ kontrol sistemi tasarlamıŐlardır [7].

Bu bölümde önceki çalışmalardan farklı olarak doğrusal olmayan sisteme doğrusal sistemlerle yakınsama tekniği, kayan sektör kontrol ile birleŐtirilmektedir. Öncelikle zorlanmıŐ ve zorlanmamıŐ sistemler için yakınsama koşulları ele alınmaktadır. Daha sonra Bölüm 3'de ele alınan yöntemlere benzer Şekilde zamanla değişen doğrusal sistemler için kayan sektör kontrol tasarımı anlatılarak yakınsama tekniği ile birleŐtirilmektedir. Son olarak önerilen yöntemler fiziksel sistemler üzerinde uygulanmaktadır.

Doğrusal olmayan sistemlere yakınsama konusunda Salamcı'nın çalışmaları temel alınmıştır [35].

4.1. Doğrusal Olmayan Sistemlere Doğrusal Yakınsama

Doğrusal olmayan sistemlerin Taylor serisi açılımı ile denge noktası etrafında doğrusallaştırılarak sistem davranışının incelenmesi ve sisteme uygun kontrolcü tasarlanması bilinen bir yöntemdir. Doğrusallaştırılmış sistemin davranışı, doğrusal olmayan sistemin genel davranışını temsil etmez. Doğrusallaştırılmış sistem kullanılarak tasarlanan kontrolcüde yalnızca denge noktasının yakın komşuluklarında etkilidir. Bu yüzden kontrolcünün çalışma bölgesini genişletmek için farklı çalışma noktalarında farklı doğrusallaştırma modelleri türetilir ve sistem belirli bir çalışma yörüngesinden geçerken kontrolcü kazançları ayarlanabilir.

Bu bölümde doğrusal olmayan sistemlerin belli bir grubu için farklı bir yakınsama tekniği anlatılmaktadır.

Aşağıdaki gibi bir doğrusal olmayan sistem ele alınsın.

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u \quad (4.1)$$

Burada $x \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}^m$, $A(x) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ve $B(x) \in \mathcal{R}^{n \times m}$ dir. Ardışıklık tekniği sistemin, birinci yakınsama hariç doğrusal zamanla değişen yakınsamalarını oluşturur. Eş. 4.1'in yakınsama dizisi aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$\dot{x}^{[i]} = A(x^{[i-1]}(t))x^{[i]} + B(x^{[i-1]}(t))u^{[i]}, \quad x^{[i]}(t_0) = x_0 \quad (4.2)$$

Bu durumda ilk yakınsama aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\dot{x}^{[1]} = A(x_0)x^{[1]} + B(x_0(t))u^{[1]}, \quad x^{[1]}(t_0) = x_0 \quad (4.3)$$

Eş. 4.1'deki doğrusal olmayan sistemin ilk yakınsaması doğrusal, zamanla değişmeyen sistemdir. Bundan sonraki yakınsamalar ise doğrusal, zamanla değişen sistemler olacaktır.

Eş. 4.2'nin yakınsama koşulları incelenmeden önce Eş. 4.1'in zorlanmayan kısmı ele alınsın.

$$\dot{x} = A(x)x \quad (4.4)$$

Eş. 4.4'ün yakınsama dizisi aşağıdaki gibidir.

$$\dot{x}^{[i]} = A(x^{[i-1]}(t))x^{[i]}, \quad x^{[i]}(t_0) = x_0$$

$$\dot{x}^{[1]} = A(x_0(t))x^{[1]}, \quad x^{[1]}(t_0) = x_0 \quad (4.5)$$

$\Phi^{[i-1]}(t, t_0)$, $A(x^{[i-1]}(t))$ tarafından üretilen durum geçiş matrisi olsun [42].

$$\|\Phi^{[i-1]}(t, t_0)\| \leq \exp \left[\int_{t_0}^t \mu \left(A(x^{[i-1]}(\tau)) \right) d\tau \right] \quad (4.6)$$

Burada $\mu(A(\cdot))$, $A(\cdot)$ 'nin logaritmik normudur ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mu(A(\cdot)) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(\|I + hA(\cdot)\| - 1)}{h}$$

ya da

$$\mu(A(\cdot)) = \frac{1}{2} \max \lambda(A(\cdot) + A(\cdot)^T) \quad (4.7)$$

$\|\cdot\|$ standart yapay matris normu olarak kabul edilsin. Bu durumda $\Phi^{[i-1]}(t, t_0) - \Phi^{[i-2]}(t, t_0)$ 'nin tahmini aşağıdaki lemma ile yapılabilir.

4.1. Lemma [32, 35]

Her $x, y \in \mathcal{R}^n$ için $\mu(A(x)) \leq \kappa_1$ ve $\|A(x) - A(y)\| \leq \kappa_2 \|x - y\|$ olduğu düşünölsün. Bu durumda

$$\|\Phi^{[i-1]}(t, t_0) - \Phi^{[i-2]}(t, t_0)\| \leq \kappa_2 e^{\kappa_1(t-t_0)} \sup \|x^{[i-1]}(s) - x^{[i-2]}(s)\| \quad (4.8)$$

olur.

İspat [35]

$\Phi^{[i-1]}(t, t_0)$ ve $\Phi^{[i-2]}(t, t_0)$ aşağıdaki ardışık denklemlerin çözümleridir.

$$\dot{x}^{[i]} = A(x^{[i-1]}(t))x^{[i]}, \quad x^{[i]}(t_0) = x_0 \quad (4.9)$$

$$\dot{x}^{[i-1]} = A(x^{[i-2]}(t))x^{[i-1]}, \quad x^{[i-1]}(t_0) = x_0 \quad (4.10)$$

Böylece

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (x^{[i]}(t) - x^{[i-1]}(t)) &= A(x^{[i-1]}(t)) (x^{[i]}(t) - x^{[i-1]}(t)) \\ &\quad + [A(x^{[i-1]}(t)) - A(x^{[i-2]}(t))] x^{[i-1]}(t) \text{ olur.} \end{aligned}$$

$$x^{[i]}(t) - x^{[i-1]}(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{[i-1]}(t, s) [A(x^{[i-1]}(s)) - A(x^{[i-2]}(s))] x^{[i-1]}(s) ds$$

$x^{[i]}(t) = \Phi^{[i-1]}(t, t_0)x_0$ ve $x^{[i]}(t) - x^{[i-1]}(t) = [\Phi^{[i-1]}(t, t_0) - \Phi^{[i-2]}(t, t_0)]x_0$ olduğundan

$$\begin{aligned} &\|x^{[i]}(t) - x^{[i-1]}(t)\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \exp\left(\int_s^t \mu(A(x^{[i-1]}(\tau))) d\tau\right) \kappa_2 \|x^{[i]}(s) - x^{[i-1]}(s)\| \\ &\quad \times \exp\left(\int_{t_0}^s \mu(A(x^{[i-2]}(\tau))) d\tau\right) \|x_0\| ds \\ &\leq \kappa_2 e^{\kappa_1(t-t_0)} (t - t_0) \sup \|x^{[i]}(s) - x^{[i-2]}(s)\| \|x_0\| \quad (4.11) \end{aligned}$$

■

Şimdi $\xi^{[i]}(t)$ aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\xi^{[i]}(t) = \sup_{s \in [t_0, t]} \|x^{[i]}(s) - x^{[i-2]}(s)\| \quad (4.12)$$

Bu durumda

$$\xi^{[i]}(t) \leq \kappa_2 e^{\kappa_1(t-t_0)}(t-t_0)\|x_0\|\xi^{[i-1]}(t) \text{ olur.}$$

$$\gamma_1(t) = \kappa_2 e^{\kappa_1(t-t_0)}(t-t_0)\|x_0\| < 1 \quad (4.13)$$

olduğu kabul edilirse;

$$\xi^{[i]}(t) \leq \gamma_1(t)\xi^{[i-1]}(t)$$

ve böylece

$$\xi^{[i]}(t) \leq \gamma_1^{i-2}(t)\xi^{[2]}(t) \quad (4.14)$$

olur.

4.1. Teorem [32, 35]

κ_1 ve κ_2 , sonlu sayılardır ve $A(x)$ aşağıdaki şartları sağlar.

- $\mu(A(x)) \leq \kappa_1, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n$
- $\|A(x) - A(y)\| \leq \kappa_2\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{R}^n$

$\gamma_1(T) = \kappa_2 e^{\kappa_1(T-t_0)}(T-t_0)\|x_0\| < 1$ olduğu varsayalım. Eş. 4.4, $C([t_0, T], \mathcal{R}^n)$ ' de Eş. 4.5'teki yakınsamanın çözüm sınırları $[t_0, T]$ ile verilen tek bir çözüme sahiptir.

İspat [32, 35]

$x^{[i]}(t)$ Banach uzayında bir Cauchy serisi olduğu için Eş. 4.14 doğrudan teoremin ispatını sağlar. ■

4.1. Tanım [35]

Yakınsama dizisinde, kontrol terimi u' nun etkisini görmek için aşağıdaki gibi bir doğrusal olmayan durum-geri besleme kontrolcü ele alınsın.

$$u = K_a(x)x \quad (4.15)$$

Buna göre;

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)K_a(x)x = A(x)x + \hat{B}(x)x \quad (4.16)$$

ve yakınsama dizisi

$$\dot{x}^{[i]} = A(x^{[i-1]}(t))x^{[i]} + \hat{B}(x^{[i-1]}(t))x^{[i]} \quad (4.17)$$

olur. Burada $\dot{x}^{[1]} = A(x_0)x^{[1]} + \hat{B}(x_0)x^{[1]}$

4.2. Teorem [35]

$\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ ve κ_5 sonlu sayıları için $A(x)$ ve $\hat{B}(x)$ aşağıdaki şartları sağlasın.

- $\mu(A(x)) \leq \kappa_1, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n$
- $\|A(x) - A(y)\| \leq \kappa_2 \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{R}^n$
- $\|\hat{B}(x) - \hat{B}(y)\| \leq \kappa_3 \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{R}^n$
- $\|\hat{B}(x)\| \leq \kappa_4, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n$
- $\mu(\hat{B}(x)) \leq \kappa_5, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n$

Aşağıdaki eşitliğin sağlandığı kabul edilirse;

$$\gamma_2(t) = \frac{\kappa_1 e^{\kappa_1(t-t_0)} \|x_0\|}{\{\kappa_1 + \kappa_4(1 - e^{\kappa_1(t-t_0)})\}} \left\{ \frac{1}{2} \kappa_2 \kappa_4 (t - t_0)^2 + \left(\kappa_2 + \kappa_3 + \frac{\kappa_2 \kappa_4}{\kappa_1 - \kappa_5} \right) (t - t_0) \right. \\ \left. + \left(\frac{\kappa_2 \kappa_4 + \kappa_3(\kappa_5 - \kappa_1)}{(\kappa_5 - \kappa_1)^2} \right) (e^{(\kappa_5 - \kappa_1)(t-t_0)} - 1) \right\}$$

Bu durumda $t \in [t_0, T]$ için $|\gamma_2(t)| < 1$ olur ve Eş. 4.17'deki yakınsama dizisinin çözümü $C([t_0, T], \mathcal{R}^n)$ ' de Eş. 4.16'nın çözümüne yakınsar.

İspat [35]

Eş. 4.17'deki diferansiyel yakınsama dizisinin çözümü aşağıdaki gibidir.

$$x^{[i]}(t) = \Phi^{[i-1]}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{[i-1]}(t, s) \hat{B}(x^{[i-1]}(s)) x^{[i]}(s) ds \quad (4.18)$$

Bunun sonucu olarak aşağıdaki eşitlik yazabilir.

$$\begin{aligned} x^{[i]}(t) - x^{[i-1]}(t) &= [\Phi^{[i-1]}(t, t_0) - \Phi^{[i-2]}(t, t_0)]x_0 \\ &+ \int_{t_0}^t \Phi^{[i-1]}(t, s) \hat{B}(x^{[i-1]}(s)) [x^{[i]}(s) - x^{[i-1]}(s)] ds \\ &+ \int_{t_0}^t [\Phi^{[i-1]}(t, s) - \Phi^{[i-2]}(t, t_0)] \hat{B}(x^{[i-1]}(s)) x^{[i-1]}(s) ds \\ &+ \int_{t_0}^t \Phi^{[i-2]}(t, s) [\hat{B}(x^{[i-1]}(s)) - \hat{B}(x^{[i-2]}(s))] x^{[i-1]}(s) ds \quad (4.19) \end{aligned}$$

Lemma 4.1'e göre;

$$\begin{aligned} \|x^{[i]}(t) - x^{[i-1]}(t)\| &\leq \kappa_2 e^{\kappa_1(t-t_0)}(t-t_0) \sup_{s \in [t_0, t]} \|x^{[i-1]}(s) - x^{[i-2]}(s)\| \|x_0\| \\ &+ \int_{t_0}^t e^{\kappa_1(t-s)} \kappa_4 \|x^{[i]}(s) - x^{[i-1]}(s)\| ds \\ &+ \int_{t_0}^t \kappa_2 e^{\kappa_1(t-s)}(t-s) \sup_{s \in [t_0, t]} \|x^{[i-1]}(s) - x^{[i-2]}(s)\| \kappa_4 \|x^{[i-1]}(s)\| ds \\ &+ \int_{t_0}^t e^{\kappa_1(t-s)} \kappa_3 \|x^{[i-1]}(s) - x^{[i-2]}(s)\| \|x^{[i-1]}(s)\| ds \quad (4.20) \end{aligned}$$

Buna göre $\|x^{[i]}(t)\| \leq [e^{\kappa_1(t-t_0)} + e^{\kappa_5(t-t_0)}] \|x_0\|$ olur.

Eş. 4.12'nin vasıtasıyla aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\xi^{[i]}(t) &\leq \kappa_2 e^{\kappa_1(t-t_0)}(t-t_0)\|x_0\|\xi^{[i-1]}(t) - \frac{\kappa_4}{\kappa_1}[1 - e^{\kappa_1(t-t_0)}]\xi^{[i]}(t) \\
&\quad + \frac{1}{2}\kappa_2\kappa_4 e^{\kappa_1(t-t_0)}(t-t_0)^2\|x_0\|\xi^{[i-1]}(t) \\
&\quad + \frac{\kappa_2\kappa_4}{\kappa_1 - \kappa_5} e^{\kappa_1(t-t_0)}(t-t_0)\|x_0\|\xi^{[i-1]}(t) \\
&\quad + \frac{\kappa_2\kappa_4}{(\kappa_1 - \kappa_5)^2} [e^{\kappa_5(t-t_0)} - e^{\kappa_1(t-t_0)}]\|x_0\|\xi^{[i-1]}(t) \\
&\quad + \kappa_3 e^{\kappa_1(t-t_0)}(t-t_0)\|x_0\|\xi^{[i-1]}(t) \\
&\quad + \frac{\kappa_3}{\kappa_5 - \kappa_1} [e^{\kappa_5(t-t_0)} - e^{\kappa_1(t-t_0)}]\|x_0\|\xi^{[i-1]}(t)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

ya da

$$\begin{aligned}
&\left\{1 + \frac{\kappa_4}{\kappa_1}[1 - e^{\kappa_1(t-t_0)}]\right\} \xi^{[i]}(t) \\
&\leq \left\{\frac{1}{2}\kappa_2\kappa_4(t-t_0)^2 + \left[\kappa_2 + \kappa_3 + \frac{\kappa_2\kappa_4}{\kappa_1 - \kappa_5}\right](t-t_0) \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\kappa_2\kappa_4}{(\kappa_5 - \kappa_1)^2} + \frac{\kappa_3}{\kappa_5 - \kappa_1}\right] (e^{(\kappa_5 - \kappa_1)(t-t_0)} - 1) \right\} e^{\kappa_1(t-t_0)}\|x_0\|\xi^{[i-1]}(t)
\end{aligned}$$

Buradan hareketle aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

$$\xi^{[i]}(t) \leq \gamma_2(t)\xi^{[i-1]}(t) \tag{4.22}$$

Burada $\gamma_2(t)$ aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\gamma_2(t) &= \frac{\kappa_1 e^{\kappa_1(t-t_0)}\|x_0\|}{\kappa_1 + \kappa_4(1 - e^{\kappa_1(t-t_0)})} \left\{ \frac{1}{2}\kappa_2\kappa_4(t-t_0)^2 + \left(\kappa_2 + \kappa_3 + \frac{\kappa_2\kappa_4}{\kappa_1 - \kappa_5}\right)(t-t_0) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\kappa_2\kappa_4 + \kappa_3(\kappa_5 - \kappa_1)}{(\kappa_5 - \kappa_1)^2}\right) (e^{(\kappa_5 - \kappa_1)(t-t_0)} - 1) \right\}
\end{aligned}$$

Böylece eğer $t \in [t_0, T]$ için $\gamma_2(t) < 1$ ise, $C([t_0, T], \mathcal{R}^n)$ aralığında $x^{[i]}(t) \rightarrow x(t)$ dir. ■

4.2. Tanım [35]

Kontrol terimi u aşağıdaki gibi bir işaret fonksiyonu olsun.

$$u = K_b(x) \text{sign}(\sigma(x)) \quad (4.23)$$

Burada $\sigma(x)$ kayma yüzeyidir.

Buna göre;

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)K_b(x) \text{sign}(\sigma(x)) = A(x)x + f(x) \quad (4.24)$$

ve yakınsama dizisi

$$\dot{x}^{[i]} = A(x^{[i-1]}(t))x^{[i]} + f(x^{[i-1]}) \quad (4.25)$$

olur. Burada $\dot{x}^{[1]} = A(x_0)x^{[1]} + f(x_0)$

4.3. Teorem [35]

$\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ ve κ_4 sonlu sayıları için $A(x)$ ve $f(x)$ aşağıdaki şartları sağlasın.

- $\mu(A(x)) \leq \kappa_1, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n$
- $\|A(x) - A(y)\| \leq \kappa_2 \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{R}^n$
- $\|f(x) - f(y)\| \leq \kappa_3 \|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{R}^n$
- $\|f(x)\| \leq \kappa_4, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n$

Aşağıdaki eşitliğin sağlandığı kabul edilsin.

$$\gamma_3(t) = e^{\kappa_1(t-t_0)}(t-t_0) \left(\kappa_2 \|x_0\| + \frac{\kappa_2 \kappa_4}{\kappa_1} \right) + \left(\frac{\kappa_2 \kappa_4}{\kappa_1^2} - \frac{\kappa_3}{\kappa_1} \right) (1 - e^{\kappa_1(t-t_0)}) \quad (4.26)$$

Bu durumda $t \in [t_0, T]$ için $|\gamma_3(t)| < 1$ olur ve Eş. 4.25'teki yakınsama dizisinin çözümü $C([t_0, T], \mathcal{R}^n)$ ' de Eş. 4.24'ün çözümüne yakınsar.

İspat [35]

Eş. 4.25'teki diferansiyel yakınsama dizisinin çözümü aşağıdaki gibidir.

$$x^{[i]}(t) = \Phi^{[i-1]}(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{[i-1]}(t, s) f(x^{[i-1]}(s)) x^{[i]} ds \quad (4.27)$$

Buradan aşağıdaki eşitlik yazabilir.

$$\begin{aligned} x^{[i]}(t) - x^{[i-1]}(t) &= [\Phi^{[i-1]}(t, t_0) - \Phi^{[i-2]}(t, t_0)]x_0 \\ &\quad + \int_{t_0}^t \Phi^{[i-1]}(t, s) [f(x^{[i-1]}(s)) - f(x^{[i-2]}(s))] ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t [\Phi^{[i-1]}(t, s) - \Phi^{[i-2]}(t, t_0)] f(x^{[i-2]}(s)) ds \end{aligned} \quad (4.28)$$

Çözüm Eş. 4.14 ve Lemma 4.1'e göre düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \|x^{[i]}(t) - x^{[i-1]}(t)\| &\leq \kappa_2 e^{\kappa_1(t-t_0)}(t-t_0)\xi^{[i]}(t)\|x_0\| - \frac{\kappa_3}{\kappa_1} [1 - e^{\kappa_1(t-t_0)}]\xi^{[i-1]}(t) \\ &\quad + \frac{\kappa_2\kappa_4}{\kappa_1^2} e^{\kappa_1(t-t_0)}(t-t_0)\xi^{[i-1]}(t) + \frac{\kappa_2\kappa_4}{\kappa_1^2} [1 - e^{\kappa_1(t-t_0)}]\xi^{[i-1]}(t) \end{aligned}$$

Ya da $\xi^{[i]}(t) \leq \gamma_3(t)\xi^{[i-1]}(t)$ yazılabilir.

Burada $\gamma_3(t)$ aşağıdaki gibidir.

$$\gamma_3(t) = e^{\kappa_1(t-t_0)}(t-t_0) \left(\kappa_2\|x_0\| + \frac{\kappa_2\kappa_4}{\kappa_1} \right) + \left(\frac{\kappa_2\kappa_4}{\kappa_1^2} - \frac{\kappa_3}{\kappa_1} \right) (1 - e^{\kappa_1(t-t_0)})$$

Böylece eğer $t \in [t_0, T]$ için $\gamma_3(t) < 1$ ise, $C([t_0, T], \mathcal{R}^n)$ aralığında $x^{[i]}(t) \rightarrow x(t)$ dir. ■

4.2. Zamanla Değişen Doğrusal Sistemler İçin Kayan Sektör Kontrol

Doğrusal olmayan sistemlere, zamanla değişen doğrusal sistemler kullanarak yakınsama metodu ve yakınsama şartları önceki bölümde incelenmiştir. Kayan sektör kontrol yöntemi için yakınsama şartlarını sağlayacak biçimde seçilen bir değişken yapıli kontrolcü ile zamanla değişen doğrusal sistemler kullanarak doğrusal olmayan sisteme yakınsamak mümkündür. Kayan sektör ve kontrolcü zamanla değişen doğrusal sistemler kullanarak tasarlanır ve yakınsamalarda kullanılır. Yakınsamaların yanıtı doğrusal olmayan sistemin yanıtı ile birleştiği zaman yakınsamalardan elde edilen kazanç katsayıları doğrusal olmayan sisteme uygulanarak sistem kontrol edilebilir.

Yakınsamaların yapılabilmesi için zamanla değişen doğrusal sistemler için kayan sektör ve değişken yapıli kontrolcü tasarımı yapılmalıdır.

Aşağıdaki gibi zamanla değişen doğrusal tek girişli bir sistem ele alınsın.

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u \quad (4.29)$$

Burada $x \in \mathcal{R}^n$, $u \in \mathcal{R}^1$, $A(t) \in \mathcal{R}^{n \times n}$, $b(t) \in \mathcal{R}^{n \times 1}$ ve $(A(t), b(t))$ ikilisi $[t_1, t_2]$ zaman aralığında kontrol edilebilirdir.

Zamanla değişen doğrusal sistem için zamanla değişen, doğrusal kayma sektörü Tanım 3.3'e benzer şekilde aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{x \mid |s(x, t)| \leq \delta(x, t), x \in \mathcal{R}^n\} \\ s(x, t) &= S(t)x, S \in \mathcal{R}^{1 \times n} \\ \delta(x, t) &= \sqrt{x^T \Delta(t)x}, \Delta \in \mathcal{R}^{n \times n} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Burada $\Delta(t) = Q(t) - R(t)$ olup $Q(t) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ pozitif tanımlı simetrik matristir. $R(t) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ pozitif yarı tanımlı simetrik matristir ve $0 < r < 1$ için $R(t) = (1 - r)Q(t)$ şeklinde seçilebilir.

Kayma sektörü \mathcal{S}_i iç sektör ve \mathcal{S}_o dış sektör alt gruplarının birleşimi olarak tanımlanabilir.

$$\mathcal{S}_i = \{x \mid |s(x, t)| \leq \alpha \delta(x, t), x \in \mathcal{R}^n\} \quad (4.31)$$

$$\mathcal{S}_o = \{x \mid \alpha \delta(x, t) < |s(x, t)| \leq \delta(x, t), x \in \mathcal{R}^n\} \quad (4.32)$$

Burada α , $0 < \alpha < 1$ eşitsizliğini sağlayan pozitif sabit bir sayıdır ve $\mathcal{S} = \mathcal{S}_i \cup \mathcal{S}_o$ olduğu açıkça gözükmemektedir.

Zamanla değişen doğrusal sistemler için dinamik optimizasyon problemleri Hamilton-Jacobi denklemi ya da Hamilton-Jacobi-Bellman denkleminin göre uygun performans ölçütünü minimum yapılmasına dayanır. Genel olarak performans ölçütü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} h(x(t), u(t)) dt + g(x(t_f)) \quad (4.33)$$

4.3. Tanım

Sektör tasarımında kullanılan $s(x, t) = S(t)x$ kayma yüzeyi denklemi ele alınsın.

$$S(t) = b^T(t)P(t) \quad (4.34)$$

Performans ölçütü aşağıdaki gibi seçilirse;

$$J = \int_{t_0}^{t_f} (x^T Q(t)x + u^T 1u) dt \quad (4.35)$$

Pozitif tanımlı simetrik matris $P(t) \in \mathcal{R}^{n \times n}$ aşağıdaki zaman bağlı diferansiyel Riccati denkleminin $P(t_f) = P_f$ için geri integrasyon yöntemleri ile çözümünden elde edilir.

$$\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t) - P(t)b(t)b^T(t)P(t) + Q(t) = 0 \quad (4.36)$$

Doğrusal olmayan sisteme doğrusal sistemler ile yakınsamanın gerçekleştirilebilmesi ve kararlılığın sağlanabilmesi için zamana bağlı diferansiyel Riccati denkleminin çözümü olan pozitif tanımlı simetrik $P(t)$ matrisi aşağıdaki şartları sağlamalıdır [32].

- $P(\cdot)$ sürekli olmalı.
- Her $t \in \mathcal{R}^+$ ve bazı $\alpha, \beta > 0$ sabitleri için $\alpha I \leq P(t) \leq \beta I$ olmalı.
- Her $t \in \mathcal{R}^+$, $x \in \mathcal{R}^n$ ve bazı λ pozitif sabitleri için $x^T (\dot{P}(t) + P(t)A(t) + A^T(t)P(t))x \leq -\lambda \|x\|^2$ olmalı.

4.4. Teorem

Zamanla değişen sistem için aşağıdaki gibi bir kontrolcü tanımlansın.

$$u = -\sigma(s(x, t), \delta(x, t))(S(t)b(t))^{-1} (S(t)A(t)x + \dot{S}(t)x + K(t)s(x, t)) \quad (4.37)$$

Yeterince büyük bir K değeri için sistem kayan sektörün dışından iç sektörün içine doğru hareket eder. Bu durumda K aşağıdaki eşitsizliğe göre seçilir.

$$K(t) > \max \left\{ \frac{S(t)b(t)}{2}, K_0(t) \right\} \quad (4.38)$$

Burada $K_0(t)$ pozitif bir sayıdır ve aşağıdaki eşitsizliğe göre seçilir.

$$2K_0(t)\alpha^2 r Q(t) + 2S^T(t)\dot{S}(t) + S^T(t)S(t)A(t) + A^T(t)S^T(t)S(t) > 0 \quad (4.39)$$

$\sigma(s(x, t), \delta(x, t))$ parçalı fonksiyonu ise aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\sigma(s(x, t), \delta(x, t)) = \begin{cases} 0 & x \in \mathcal{S}_i \\ \text{değişmez} & x \in \mathcal{S}_o \\ 1 & x \notin \mathcal{S} \end{cases} \quad (4.40)$$

İspat

Lyapunov fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$L(t) = x^T P(t)x > 0, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n, \quad (x \neq 0), \forall t \in \mathcal{R}^+ \quad (4.41)$$

Sistem sektör dışında iken $\sigma(s(x, t), \delta(x, t)) = 1$ olur. Bu durumda kayma yüzeyinin türevi aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\begin{aligned} \dot{s}(x, t) &= \dot{S}(t)x + S(t)\dot{x} = \dot{S}(t)x + S(t)[A(t)x + b(t)u(t)] \\ &= -K(t)s(x, t) \end{aligned} \quad (4.42)$$

Kayma yüzeyinin karesinin türevi aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\frac{d}{dt}s^2(x, t) = 2s(x, t)\dot{s}(x, t) = -2K(t)s^2(x, t) < 0, \quad \forall x \notin \mathcal{S}_i \quad (4.43)$$

Yani yeterince büyük $K(x, t)$ değeri için sistem durum değişkenleri iç sektörün içine doğru hareket eder.

Sistemin yörüngeleri boyunca Lyapunov fonksiyonunun türevi alınırsa;

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) &= \frac{d}{dx}(x^T P(t)x) = \dot{x}^T P(t)x + x^T \dot{P}(t)x + x^T P(t)\dot{x} \\ &= x^T \{A^T P(t) + P(t)A(t) + \dot{P}(t)\}x + 2x^T P(t)b(t)u \end{aligned} \quad (4.44)$$

Eş. 4.36 ve Eş. 4.37'ye göre Lyapunov fonksiyonunun türevi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) &= x^T \{-Q(t) + P(t)b(t)b^T(t)P(t)\}x \\ &\quad - 2x^T P(t)b(t)(S(t)b(t))^{-1}(S(t)A(t)x + \dot{S}(t)x + K(t)s(t)) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$s(x, t) = b^T(t)P(t)x$, $s^T(x, t) = x^T P(t)b(t)$ ve $\Delta(t) = Q(t) - R(t) > 0$ ise

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) &= s^2(x, t) - x^T Q(t)x \\ &\quad + 2s(x, t)[-(S(t)b(t))^{-1}(S(t)A(t)x + \dot{S}(t)x + K(t)s(x, t))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{L}(t) &= s^2(x, t) - x^T \Delta(t)x - x^T R(t)x \\
&\quad - 2s(x, t) \left[(S(t)b(t))^{-1} (S(t)A(t)x + \dot{S}(t)x + K(t)s(x, t)) \right] \\
&= - \left[2(S(t)b(t))^{-1} K(t) - 1 \right] s^2(x, t) \\
&\quad - 2s(x, t)(S(t)b(t))^{-1} [S(t)A(t) + \dot{S}(t)]x - \delta^2(x, t) - x^T R(t)x \\
&\leq - \left[2(S(t)b(t))^{-1} K(t) - 1 \right] \alpha^2 \delta^2(x, t) \\
&\quad - 2x^T S^T(t)(S(t)b(t))^{-1} [S(t)A(t) + \dot{S}(t)]x - \delta^2(x, t) - x^T R(t)x \\
&< -2(S(t)b(t))^{-1} K(t) \alpha^2 \delta^2(x, t) \\
&\quad - 2x^T S^T(t)(S(t)b(t))^{-1} [S(t)A(t) + \dot{S}(t)]x - x^T R(t)x \\
&= -(S(t)b(t))^{-1} x^T [2K(t)\alpha^2 r Q(t) + S^T(t)S(t)A(t) + 2S^T(t)\dot{S}(t) \\
&\quad + A^T(t)S^T(t)S(t)]x - x^T R(t)x \\
&< -x^T R(t)x, \quad x \notin \mathcal{S}_i \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Burada $S(t)b(t) = b^T(t)P(t)b(t) > 0$.

Sistem sektör dışarısında iken Eş. 4.38'i pozitif tanımlı yapacak uygun $K(t)$ değerinin seçilmesi ile yukarıdaki şart sağlanır.

Sistem iç sektörün içine girdikten sonra $\sigma(s(x, t), \delta(x, t)) = 0$ olur ve Lyapunov fonksiyonunun türevi aşağıdaki şartı sağlar.

$$\begin{aligned}
\dot{L}(t) &= s^2(x, t) - \delta^2(x, t) - x^T R(t)x \\
&\leq -x^T R(t)x, \quad \forall x \in \mathcal{S} \text{ ve } \sigma(s(x, t), \delta(x, t)) = 0. \tag{4.47}
\end{aligned}$$

Böylece sistem kararlı hale gelir. ■

Teorem 4.4 ile ele alınan aşağıdaki kontrolcü düzenlenirse;

$$u = - \left[\sigma(s(x, t), \delta(x, t))(S(t)b(t))^{-1} (S(t)A(t) + \dot{S}(t)x + K(t)S(t)) \right] x \tag{4.48}$$

ya da $u = K_a(x)x$ olur. Bu durumda kontrolcü Tanım 4.1 ve Teorem 4.2'yi sağlar.

4.5. Teorem

Zamanla değişen sistem için aşağıdaki gibi bir kontrolcü tanımlansın.

$$u = \begin{cases} -k(t)s(x, t) & x \notin \mathcal{S} \\ -k(t)\delta(x, t)\text{sgn}(s(x, t)) & x \in \mathcal{S} \end{cases} \quad (4.49)$$

Burada $k(t) \geq 0.5$ pozitif sabit bir sayıdır. Bu durumda, sistem yörüngeleri kayma sektörünün dışından içine doğru hareket eder. Burada $k(t)$ aşağıdaki eşitsizliği sağlamalıdır.

$$k(t) > \frac{(S(t)b(t))^{-1}(\dot{S}(t)x + S(t)A(t)x)}{s(x, t)} \quad (4.50)$$

İspat

Lyapunov fonksiyonunu Eş. 4.41'deki gibi tanımlansın.

$$L(t) = x^T P(t)x > 0, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n, \quad (x \neq 0), \forall t \in \mathcal{R}^+$$

Sistemin başlangıç değerinin kayan sektör dışında olduğu kabul edilsin. Bu durumda $s(x, t) > \delta(x, t)$ olur ve sisteme aşağıdaki kontrol girişi etki eder.

$$u = -k(t)s(x, t) \quad (4.51)$$

Kayma yüzeyinin karesinin türevi aşağıdaki eşitliği sağlar.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s^2(x, t) &= 2s(x, t)\dot{s}(x, t) = 2s(x, t)\{\dot{S}(t)x + S(t)(A(t)x + b(t)u)\} \\ &= 2s(x, t)(\dot{S}(t)x + S(t)A(t)x) - 2S(t)b(t)k(t)s^2(x, t) < 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Yeterince büyük $k(t)$ değeri için sistem durum değişkenleri iç sektörün içine doğru hareket eder. Bu durumda $k(t)$ aşağıdaki eşitsizliği sağlamalıdır.

$$k(t) > \frac{(S(t)b(t))^{-1}(\dot{S}(t)x + S(t)A(t)x)}{s(x, t)}$$

Lyapunov fonksiyonunun türevi alınırsa;

$$\begin{aligned}\dot{L}(t) &= \frac{d}{dx}(x^T P(t)x) = \dot{x}^T P(t)x + x^T \dot{P}(t)x + x^T P(t)\dot{x} \\ &= x^T \{A^T P(t) + P(t)A(t) + \dot{P}(t)\}x + 2x^T P(t)b(t)u\end{aligned}\quad (4.53)$$

Eş. 4.36 ve Eş. 4.49'a göre Lyapunov fonksiyonunun türevi aşağıdaki gibi olur.

$$\dot{L}(t) = x^T \{-Q(t) + P(t)b(t)b^T(t)P(t)\}x - 2x^T P(t)b(t)k(t)s(x, t) \quad (4.54)$$

$s(x, t) = b^T(t)P(t)x$, $s^T(x, t) = x^T P(t)b(t)$ ve $\Delta(t) = Q(t) - R(t) > 0$ ise

$$\begin{aligned}\dot{L}(t) &= s^2(x, t) - x^T \Delta(t)x - x^T R(t)x - 2k(t)s^2(x, t) \\ &= -[2k(t) - 1]s^2(x, t) - \delta^2(x, t) - x^T R(t)x < -x^T R(t)x\end{aligned}\quad (4.55)$$

Her $k(t) > 0.5$ pozitif sabiti için sistemin durumu sektör dışından sektörün içine doğru değişir.

Sistem sektörün sınırları içerisindeyken $|s(x, t)| \leq \delta(x, t)$ olur. Bu durumda sisteme aşağıdaki kontrol girişi etki eder.

$$u = -k(t)\delta(x, t)\text{sgn}(s(x, t)) \quad (4.56)$$

Bu durumda Lyapunov fonksiyonunun türevi alınırsa;

$$\begin{aligned}\dot{L}(t) &= s^2(x, t) - x^T \Delta(t)x - x^T R(t)x - 2s(x, t) \left(k(t)\delta(x, t)\text{sgn}(s(x, t)) \right) \\ &\leq s^2(x, t) - \delta^2(x, t) - x^T R(t)x \leq -x^T R(t)x, \quad \forall x \in \mathcal{S}(t)\end{aligned}\quad (4.57)$$

Lyapunov fonksiyonunun türevi zamanla azalır. ■

Teorem 4.5 ile ele alınan kontrolcü düzenlenirse;

- Sistem sektör dışarısında iken $u = -k(t)s(x, t) = K_a(x)x$ olur. Bu durumda kontrolcü Tanım 4.1 ve Teorem 4.2'yi sağlar.

- Sistem sektör içerisinde iken $u = -k(t)\delta(x,t)\text{sgn}(s(x,t)) = K_b(x)\text{sign}(\sigma(x))$ olur. Bu durumda kontrolcü Tanım 4.2 ve Teorem 4.3'ü sağlar.

Doğrusal olmayan sistemlere zamanla değişen doğrusal sistemler kullanarak yakınsama metodu ile kayan sektör kontrol uygulamalarında aşağıdaki sıralama takip edilebilir.

1. Sistem ilk yakınsama için x_0 başlangıç değerlerinde değerlendirilerek Eş. 4.3 ile belirtilen aşağıdaki gibi zamanla değişmeyen doğrusal bir sistem elde edilir.

$$\dot{x}^{[1]} = A(x_0)x^{[1]} + B(x_0(t))u^{[1]}, \quad x^{[1]}(t_0) = x_0$$

2. Elde edilen zamanla değişmeyen doğrusal sistem için 3. Bölümde anlatılan doğrusal sistemler için PR-kayan sektör tasarımı yapılır ve sistem uygun değişken yapıli kontrolcü ile kontrol edilir.

Kullanılacak değişken yapıli kontrolcü daha sonra yakınsamalarda kullanılacak zamanla değişen doğrusal sistemlerdeki kontrolcü ile aynı olmalıdır.

3. İlk yakınsamanın çözümünden elde edilen $x(t)$ dizini kullanılarak zamanla değişen $A(t)$ ve $B(t)$ dizinleri elde edilir.
4. Bir önceki yakınsamadan elde edilen veriler kullanılarak Eş. 4.2 ile belirtilen aşağıdaki yakınsama dizisi oluşturulur.

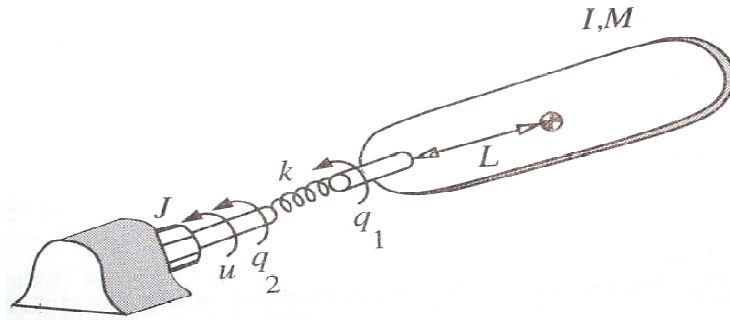
$$\dot{x}^{[i]} = A(x^{[i-1]}(t))x^{[i]} + B(x^{[i-1]}(t))u^{[i]}, \quad x^{[i]}(t_0) = x_0$$

5. Oluşturulan zamanla değişen doğrusal sistem için kayan sektör tasarımı yapılır.

6. Teorem 4.4 ya da Teorem 4.5 ile belirtilen değişken yapılı kontrolcülerden uygun olanı seçilerek sistem kontrol edilir. Çözümünden elde edilen $x(t)$ dizinleri bir sonraki yakınsamada kullanılmak üzere saklanır.
7. Doğrusal olmayan sistem yakınsamalardan elde edilen kontrolcü kazançları kullanılarak kontrol edilir.
8. Zamanla değişen doğrusal sistemin cevabı doğrusal olmayan sistemin cevabına yakınsayana kadar çözüme devam edilir.

4.3. Esnek Bağlantılı Robot Manipülatör Uygulaması

Bu çalışmada, Bölüm 4.1'de ele alınan doğrusal olmayan sistemlere yakınsama tekniği ve Teorem 4.4 ile geliştirilen kontrol algoritması esnek bağlantıya sahip robot manipülatöre uygulanmaktadır.



Şekil 4.1. Esnek bağlantılı robot manipülatör [33]

Şekil 4.1 ile gösterilen robot manipülatöre ait dinamik denklemler aşağıdaki gibidir [33].

$$I\ddot{q}_1 + MgL\sin(q_1) + k(q_1 - q_2) = 0 \quad (4.58)$$

$$J\ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = u \quad (4.59)$$

Sistem durum uzayı formunda yazılırsa;

$$x^T = [q_1 \quad \dot{q}_1 \quad q_2 \quad \dot{q}_2],$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{MgL \sin(x_1)}{I} - \frac{k}{I} x_1 & 0 & \frac{k}{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{J} & 0 & -\frac{k}{J} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J \end{bmatrix} u \quad (4.60)$$

Burada kolun toplam kütlesi M , yerçekimi ivmesi g , ağırlık merkezinin uzunluğu L , kolun atalet momenti I , yay sabiti k , motor rotorunun atalet momenti J , kontrol girişi u (motor torku), kolun açısal konumu q_1 , motor milinin açısal konumu q_2 ile ifade edilmektedir.

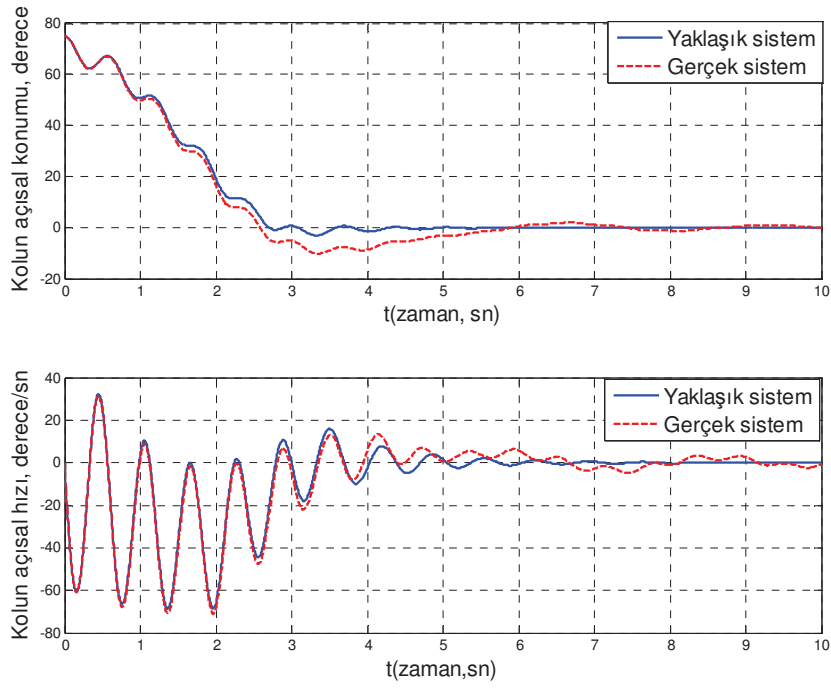
Sistem parametreleri ise aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} M &= 5 \text{ kg}, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \quad L = 0.5 \text{ m}, \quad I = 2.5 \text{ kgm}^2 \\ k &= 100 \text{ N/m}, \quad J = 1.5 \text{ kgm}^2 \end{aligned} \quad (4.61)$$

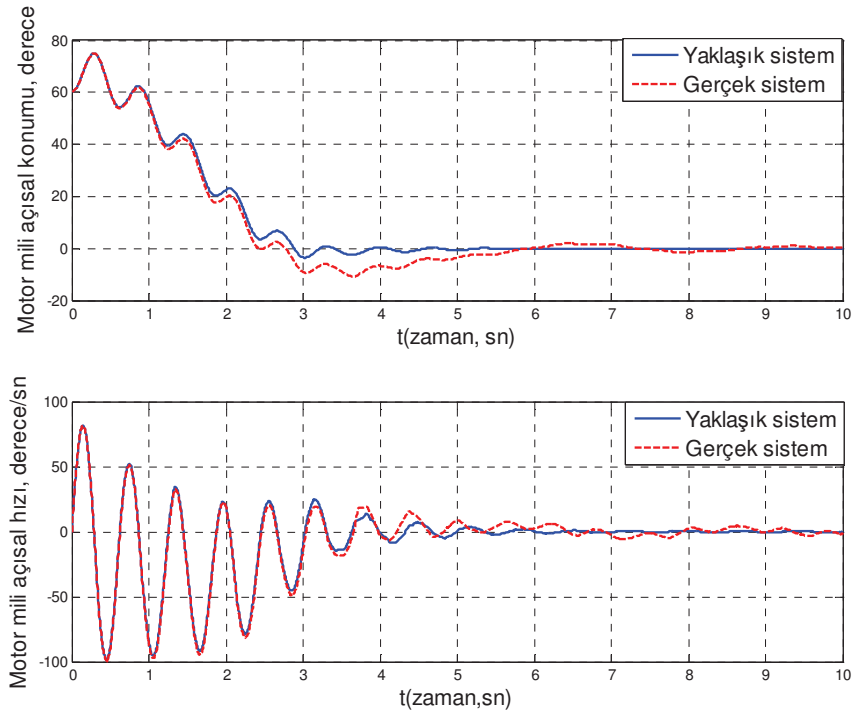
Sistem $x_0^T = [75 \quad 0 \quad 60 \quad 0]$ başlangıç koşulu için $t = 15$ saniye süre ve 0.001 zaman basamak artışı ile kontrol edilecektir. Kontrolcü $|u| \leq 200 \text{ Nm}$ ile sınırlandırılmıştır ve kontrolcü parametreleri aşağıdaki gibidir.

$$r = 0.6, \quad \alpha = 0.7, \quad Q = \text{diag}\{80, 25, 70, 23\} \quad (4.62)$$

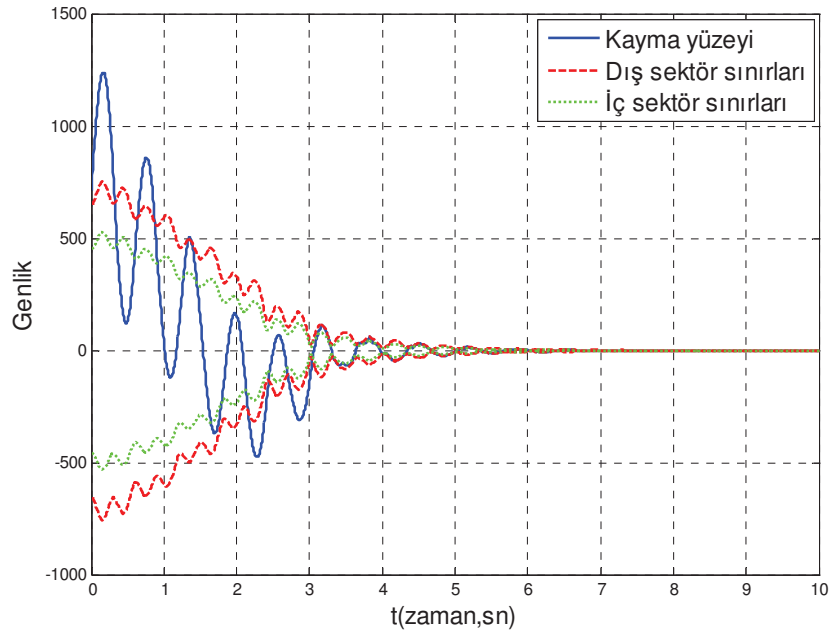
Sistem $\dot{x}^{[1]} = A(x_0)x^{[1]} + B(x_0(t))u^{[1]}$, $x^{[1]}(t_0) = x_0$ için ilk yakınsamada x_0 başlangıç noktasında değerlendirilerek zamanla değişmeyen doğrusal sistem 3. bölümde anlatılan PR-kayan sektör metodu ile kontrol edilir.



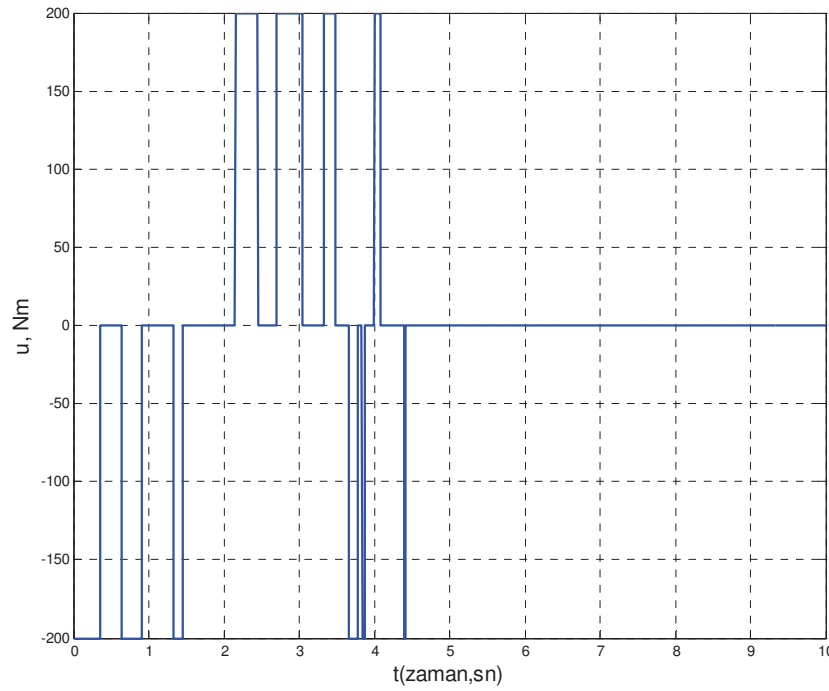
Şekil 4.2. Birinci yakınsama için kolun açısai konumu ve açısai hızı



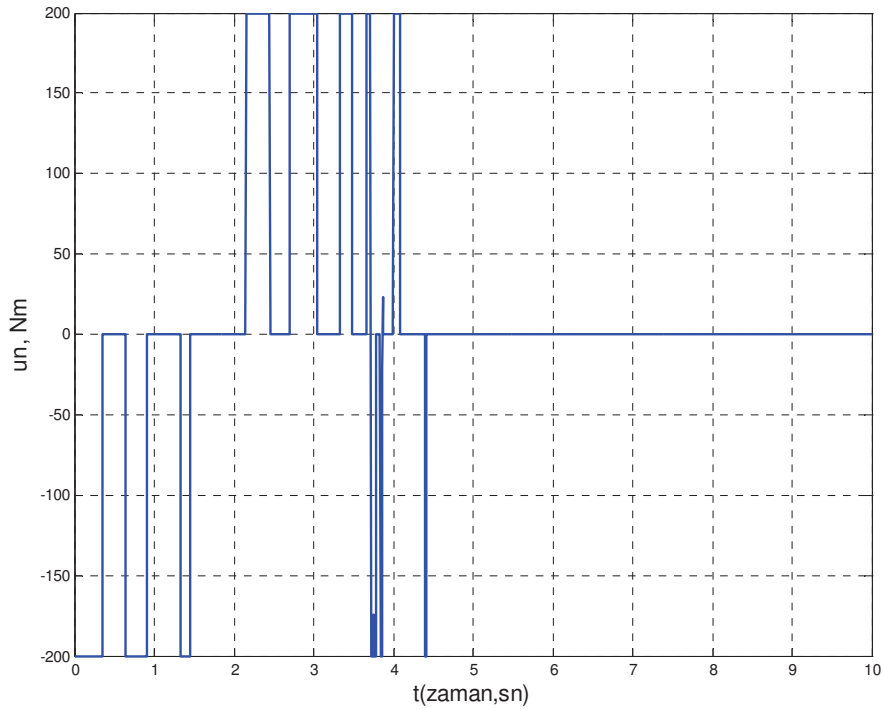
Şekil 4.3. Birinci yakınsama için motor milinin açısai konumu ve açısai hızı



Şekil 4.4. Birinci yakınsama için sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi



Şekil 4.5. Birinci yakınsama için yaklaşık sistemin kontrol girişi

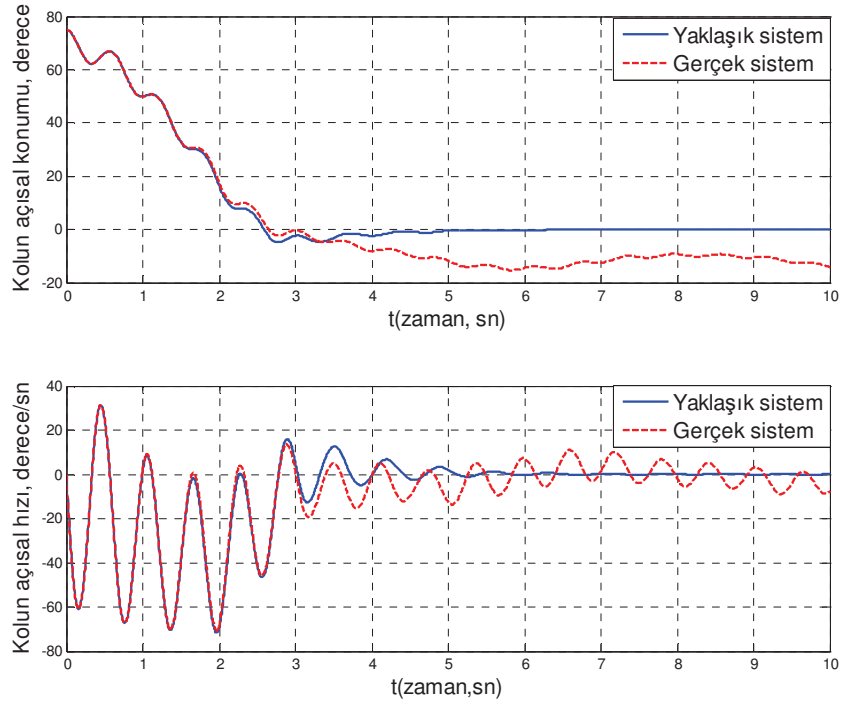


Şekil 4.6. Birinci yakınsama için gerçek sistemin kontrol girişi

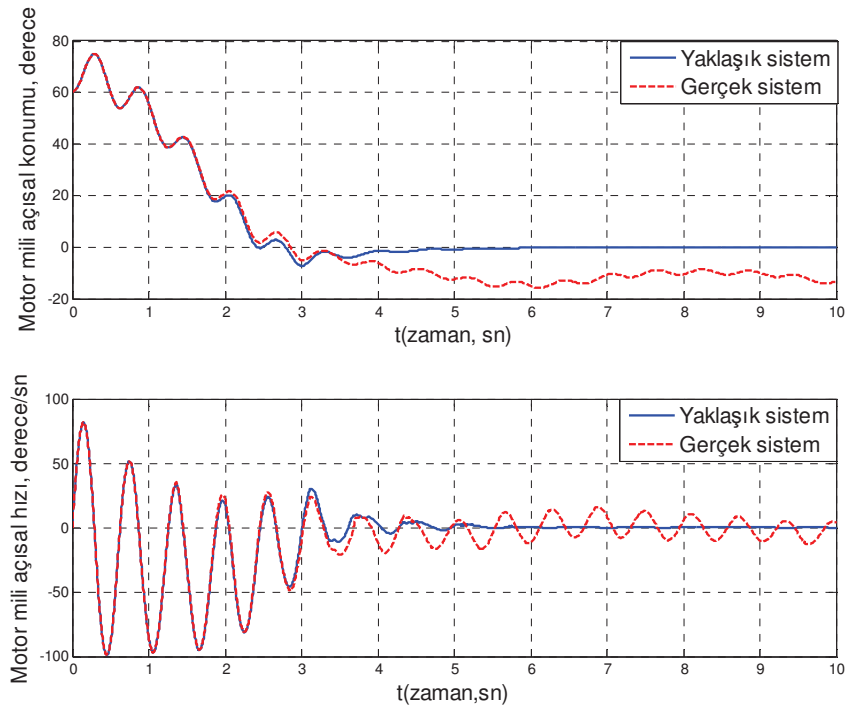
İlk yaklaşım başlangıç değeri için oluşturulan zamanla değişmeyen doğrusal sistemdir ve gerçek sistemin dinamik davranışını ifade etmez. Ancak bu örnekteki gibi doğrusala yakın sistemler için doğrusal sistemler doğrusal olmayan sistemin davranışı birbirine yakın çıkabilir.

Bundan sonraki yakınsamalarda zamanla değişen doğrusal sistemler kullanılarak doğrusal olmayan sistem kontrol edilmeye çalışılır. Ele alınan uygulamada zamanla değişen doğrusal sistemler için Teorem 4.4 ile ele alınan kontrolcü kullanılır. Teorem 4.2'ye göre, zamanla değişen doğrusal sistem bu kontrolcü ile doğrusal olmayan sisteme yakınsayacaktır.

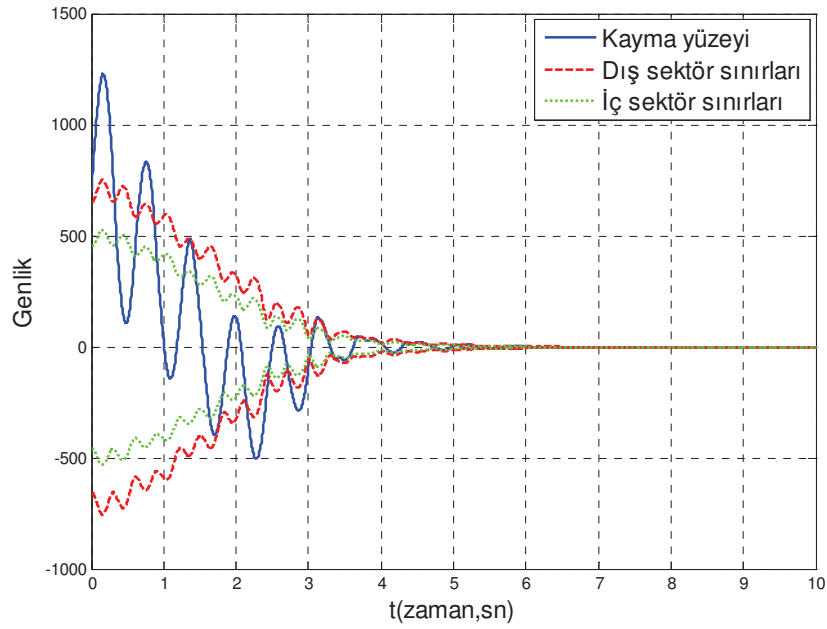
Her bir yakınsamada çözümden elde edilen $x(t)$ dizini sıradaki yakınsamada kullanılarak doğrusal olmayan sistem kontrol edilir.



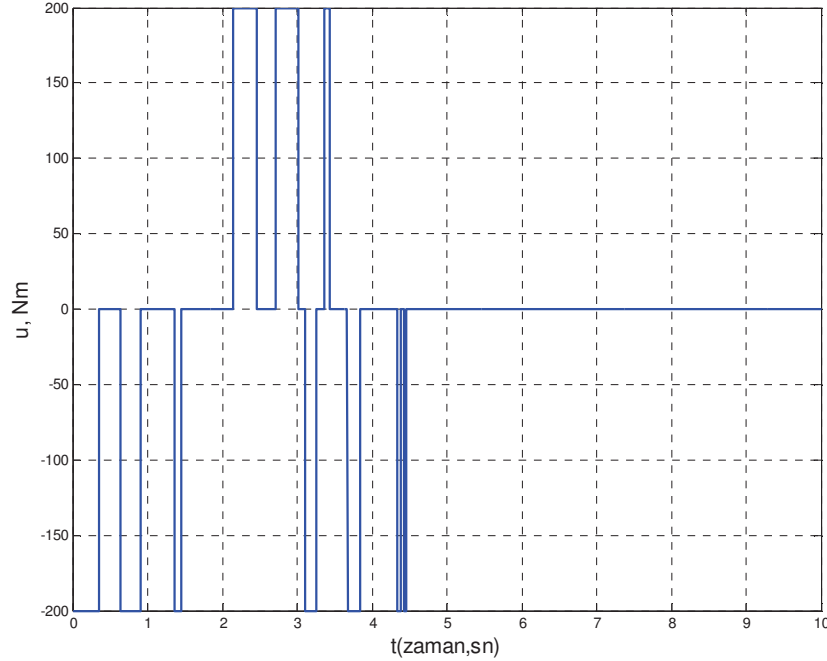
Şekil 4.7. İkinci yakınsama için kolun açısai konumu ve açısai hızı



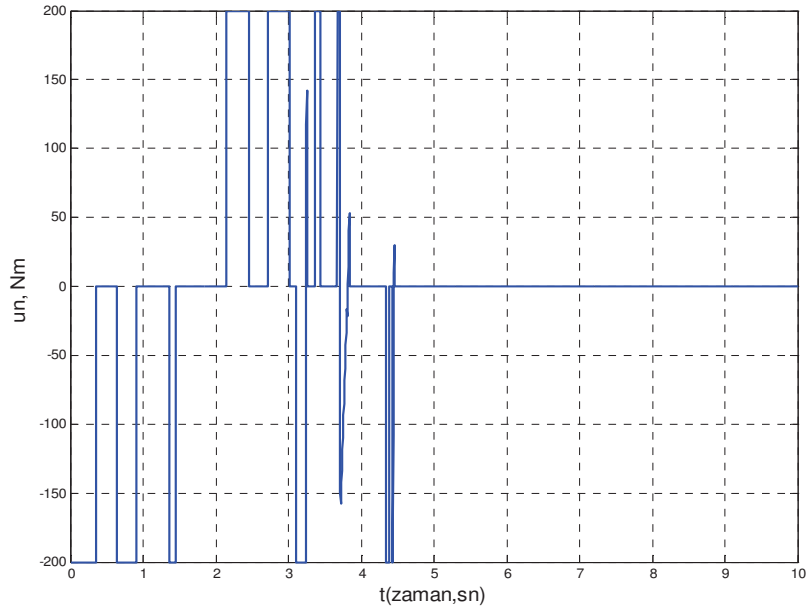
Şekil 4.8. İkinci yakınsama için motor milinin açısai konumu ve açısai hızı



Şekil 4.9. İkinci yakınsama için sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi

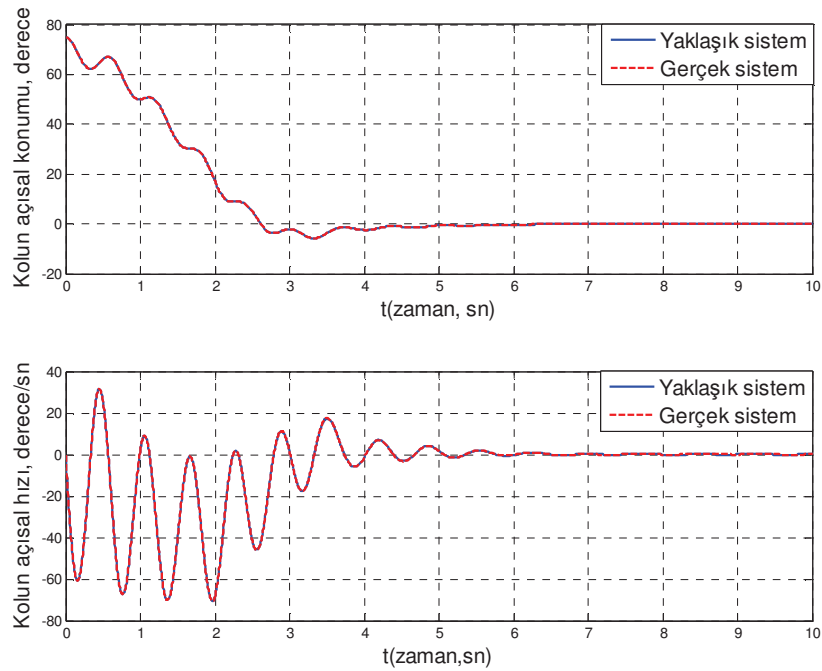


Şekil 4.10. İkinci yakınsama için yaklaşık sistemin kontrol girişi

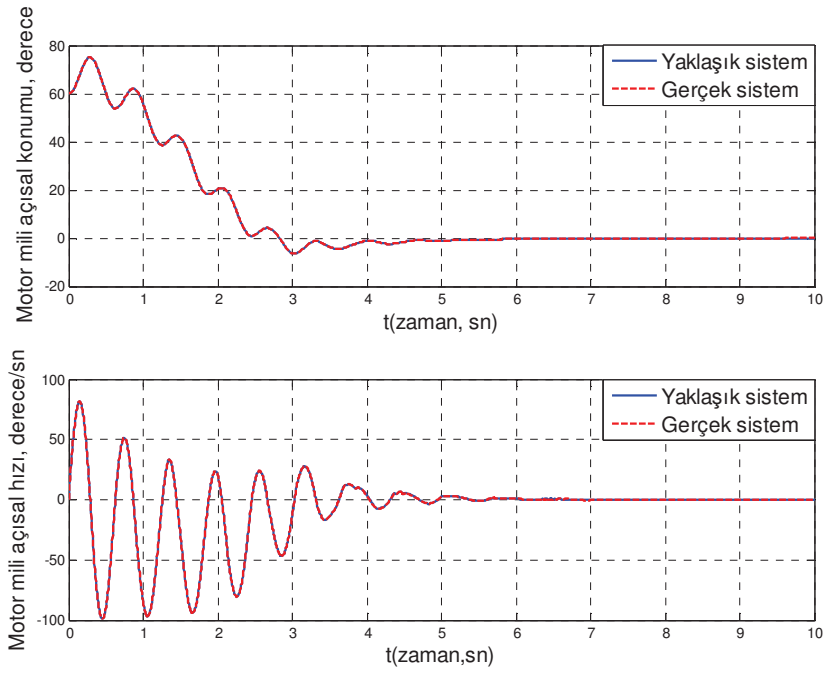


Şekil 4.11. İkinci yakınsama için gerçek sistemin kontrol girişi

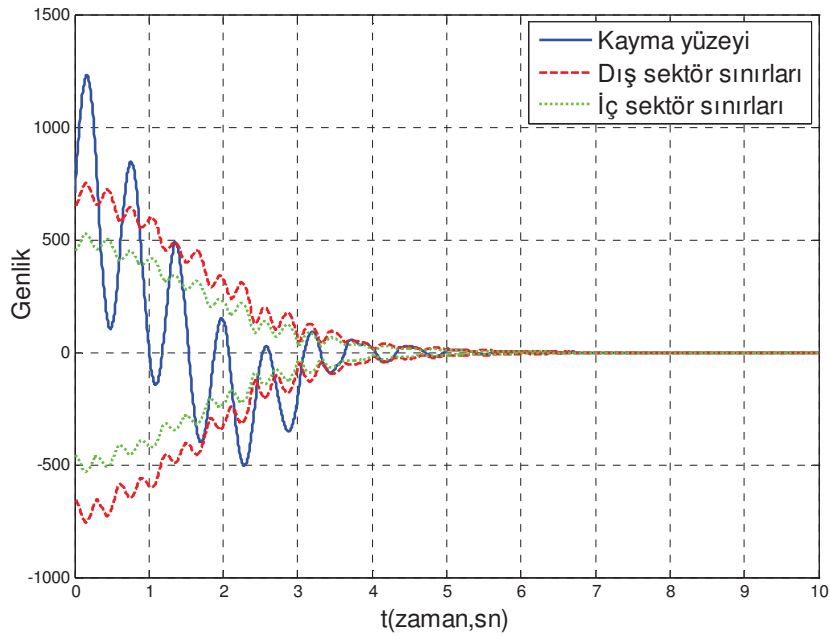
Çözüme devam edildiğinde beşinci yakınsamada doğrusal sistemin cevabının doğrusal olmayan sistemin cevabına yakınsadığı görülür.



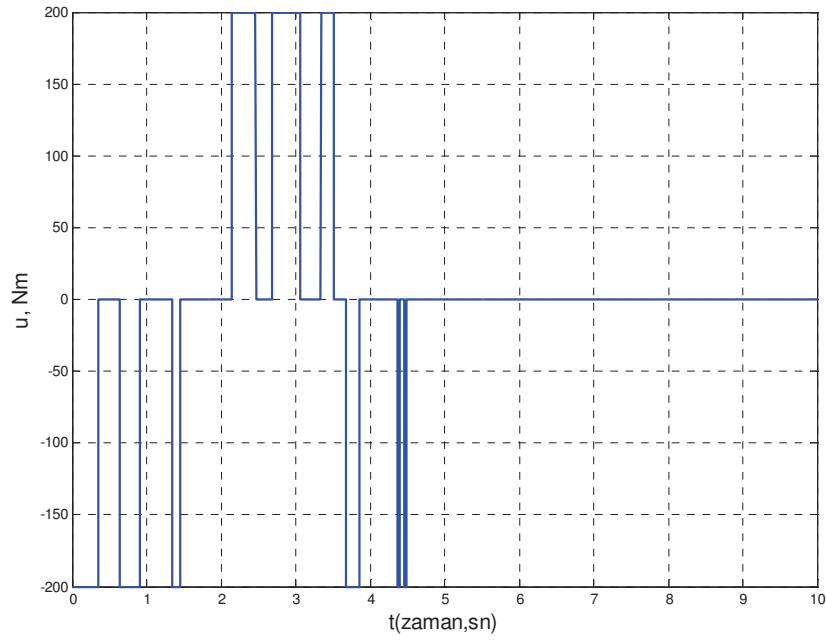
Şekil 4.12. Beşinci yakınsama için kolun açısal konumu ve açısal hızı



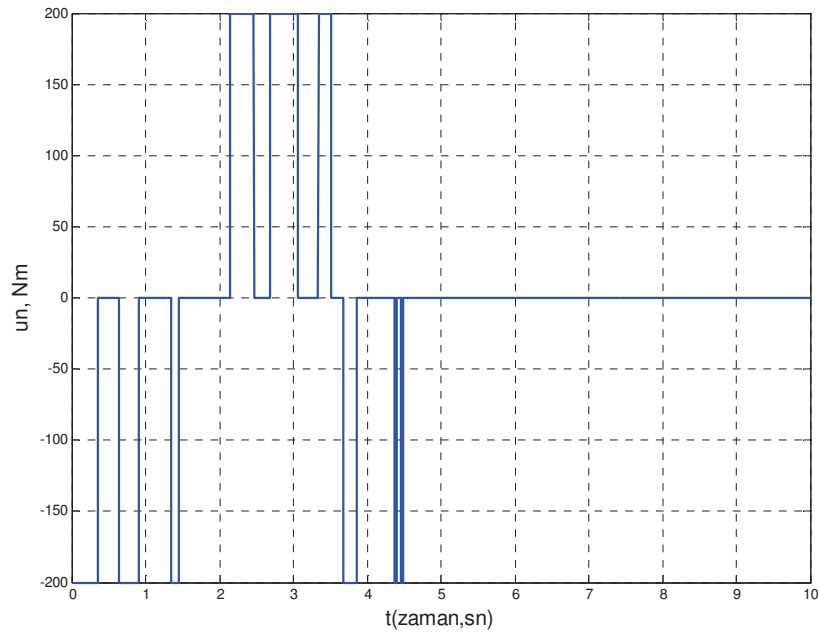
Şekil 4.13. Beşinci yakınsama için motor milinin açısıl konumu ve açısıl hızı



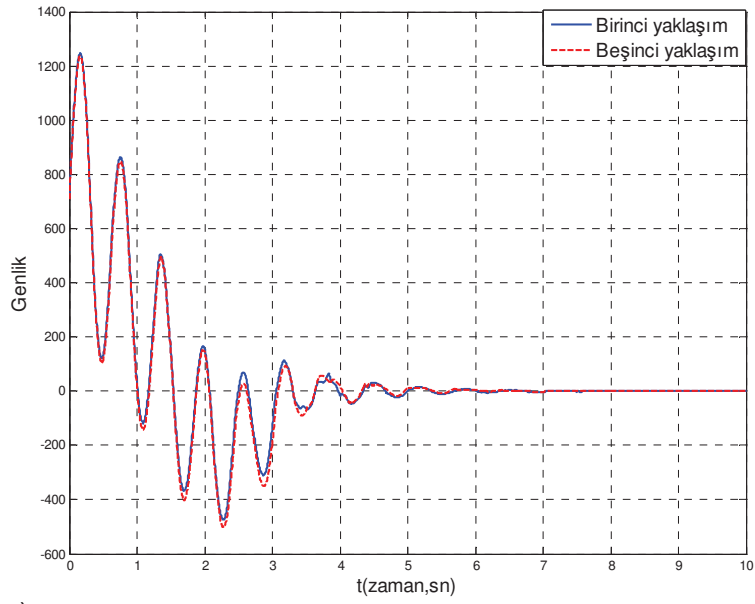
Şekil 4.14. Beşinci yakınsama için sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi



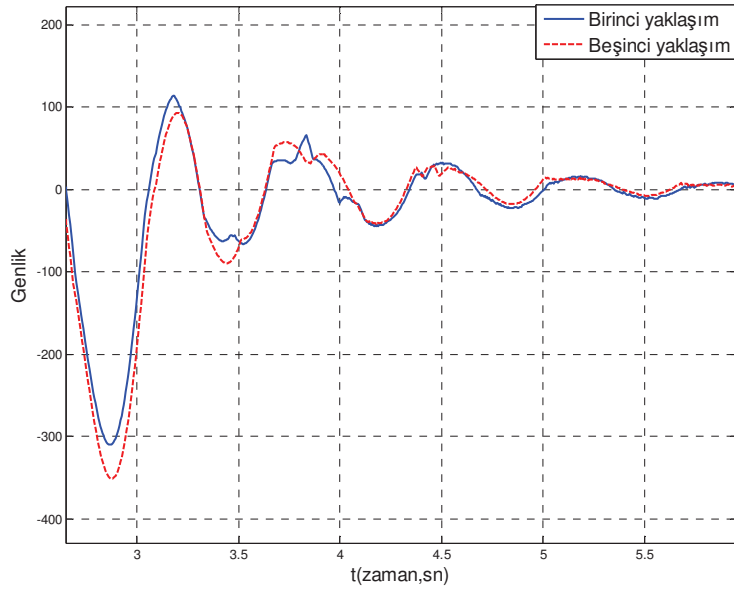
Şekil 4.15. Beşinci yakınsama için yaklaşık sistemin kontrol girişi



Şekil 4.16. Beşinci yakınsama için gerçek sistemin kontrol girişi

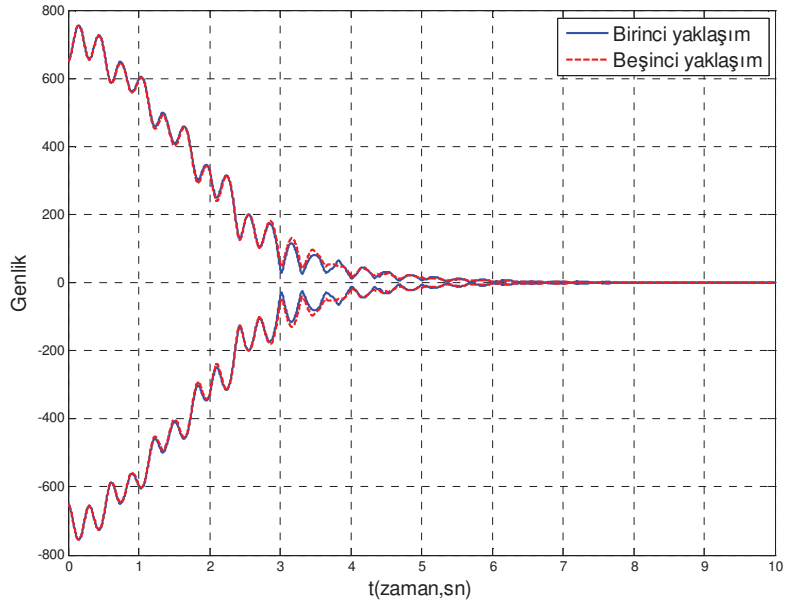


a)

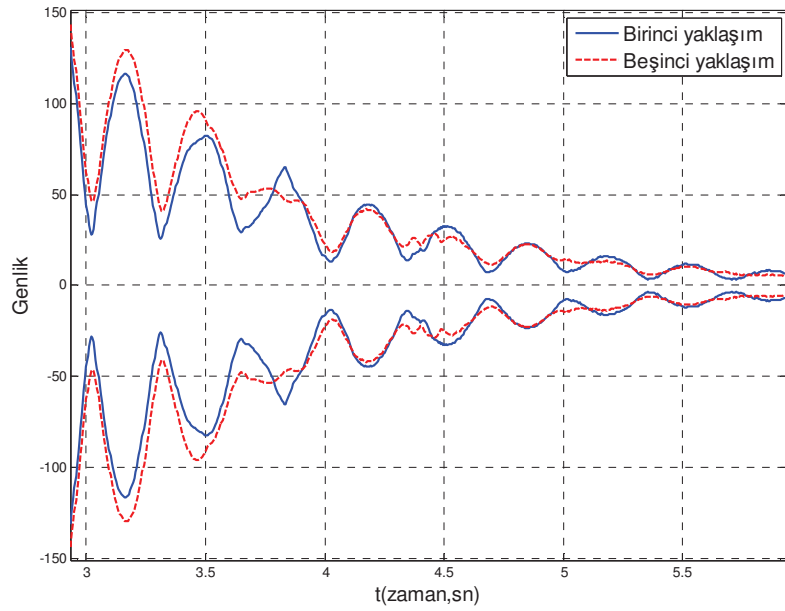


b)

Şekil 4.17. a) Kayma yüzeyi fonksiyonunun yaklaşık çözümler boyunca değişimi
b) 1.5-5.5 saniye arası yakınlaştırılmış



a)

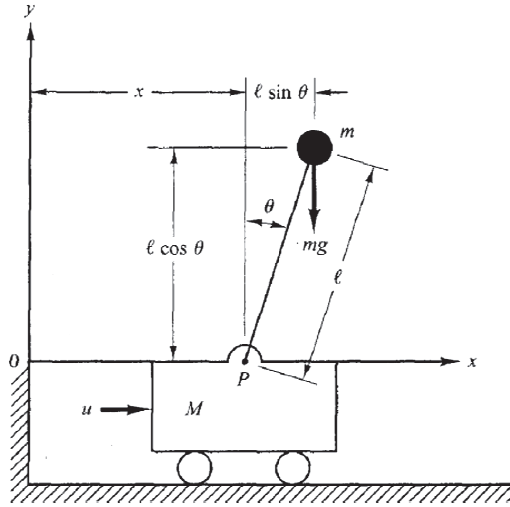


b)

Şekil 4.18. a) Kayma sektörü fonksiyonunun yaklaşık çözümler boyunca değişimi
b) 3-5.5 saniye arası yakınlaştırılmış

4.4. Ters Sarkaç Uygulaması

Bu çalışmada, Bölüm 4.1'de ele alınan doğrusal olmayan sistemlere yakınsama tekniği ve Teorem 4.5 ile geliştirilen kontrol algoritması ters sarkaç sistemine uygulanmaktadır. Ters sarkaç sistemi doğrusal olmayan kontrol yöntemleri ile ilgili kitaplarda ve yayınlarda sıkça kullanılan bir sistemdir. Dolayısıyla sistemin hareket denklemleri ilgili kaynaklardan alınmıştır.



Şekil 4.19. Ters sarkaç [23]

Şekil 4.19 ile gösterilen ters sarkaç sisteminin dinamik denklemleri aşağıdaki gibidir [14].

$$\ddot{x} = \frac{u - b\dot{x} + ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - mg \cos(\theta) \sin(\theta)}{(M+m) - m \cos^2(\theta)} \quad (4.63)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(b\dot{x} - u - ml \sin(\theta) \dot{\theta}^2) \cos(\theta) + (M+m)g \sin(\theta)}{l(M+m - m \cos^2(\theta))} \quad (4.64)$$

Sistem durum uzayı formatında yazılırsa;

$$x^T = [x \quad \dot{x} \quad \theta \quad \dot{\theta}]$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, b(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{12} \\ 0 \\ b_{14} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

$$a_{22} = \frac{-b}{d(x)}, \quad (4.66)$$

$$a_{23} = \frac{-mg\cos(x_3)\sin(x_3)}{d(x)x_3}, \quad (4.67)$$

$$a_{24} = \frac{mlx_4\sin(x_3)}{d(x)}, \quad (4.68)$$

$$a_{42} = \frac{bcos(x_3)}{d(x)l}, \quad (4.69)$$

$$a_{43} = \frac{(M+m)g\sin(x_3)}{d(x)lx_3}, \quad (4.70)$$

$$a_{44} = \frac{-ml\cos(x_3)\sin(x_3)}{d(x)lx_3} \quad (4.71)$$

$$b_{12} = \frac{l}{d(x)} \quad (4.72)$$

$$b_{14} = \frac{-\cos(x_3)}{d(x)l} \quad (4.73)$$

$$d(x) = M + m - m\cos^2(x_3) \quad (4.74)$$

Burada arabanın kütlesi M , sarkacın kütlesi m , sarkaç uzunluğu l , sürtünme sabiti b ve yerçekimi ivmesi g ile gösterilmektedir. Sistem parametreleri aşağıda verilmiştir.

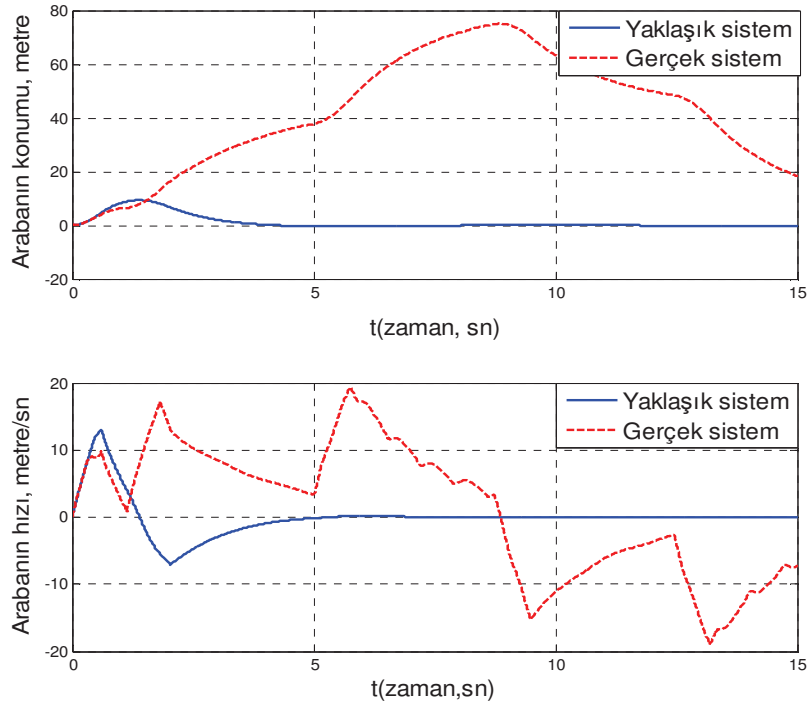
$$M = 3 \text{ kg}, m = 0.5 \text{ kg}, l = 0.5 \text{ m}, b = 2 \text{ kg/s}, g = 9.81 \text{ kgm/s}^2 \quad (4.75)$$

Sistem $x_0^T = [0 \ 0 \ 65 \ 0]$ başlangıç koşulu için $t = 15$ saniye süre ve 0.001 zaman basamak artışı ile kontrol edilecektir. Kontrolcü $|u| \leq 100$ ile sınırlandırılmış olup kayan sektör kontrolcü parametreleri aşağıdaki gibidir.

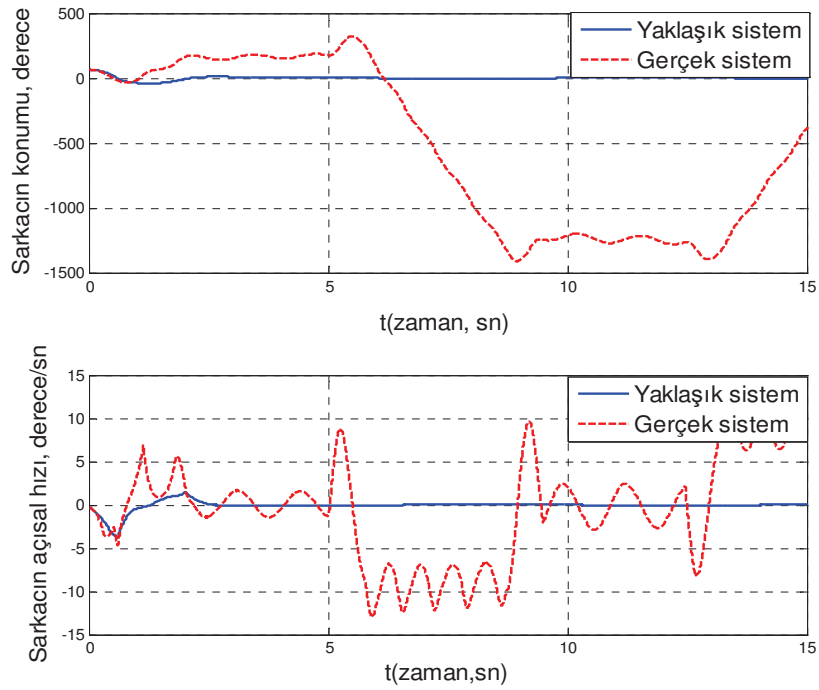
$$r = 0.7, Q = 50 \times I_{4 \times 4}, k = 0.65 \quad (4.76)$$

Sistem ilk yakınsamada x_0 başlangıç noktasında değerlendirilerek Teorem 4.5'e göre aşağıdaki gibi zamanla değişmeyen doğrusal sistem kontrol edilir.

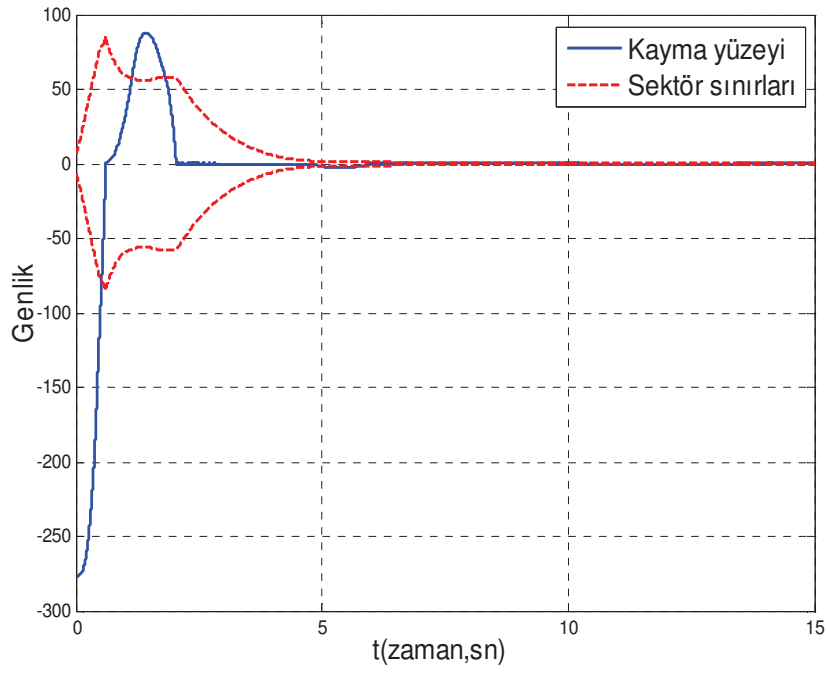
$$\dot{x}^{[1]} = A(x_0)x^{[1]} + B(x_0(t))u^{[1]}, \quad x^{[1]}(t_0) = x_0$$



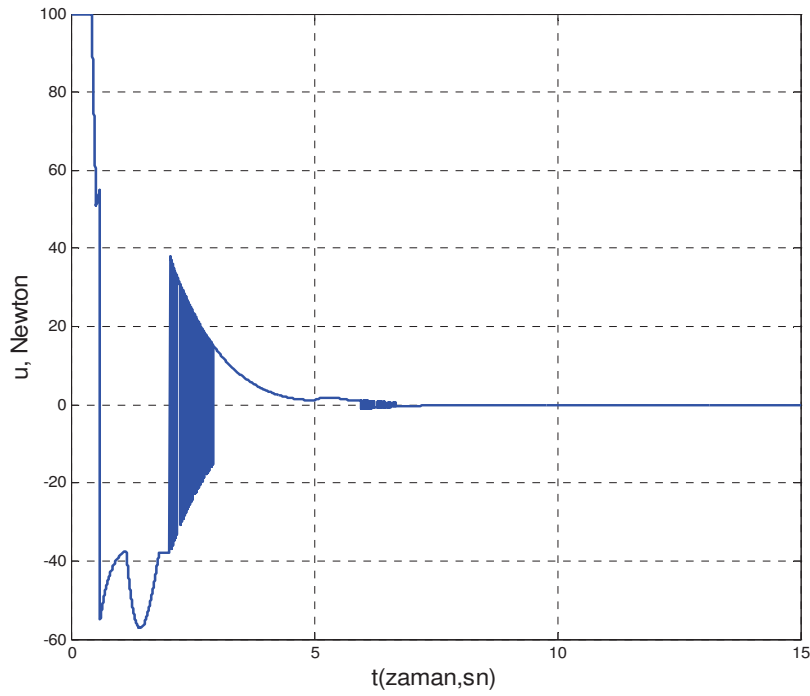
Şekil 4.20. Birinci yakınsama için arabanın konumu ve hızı



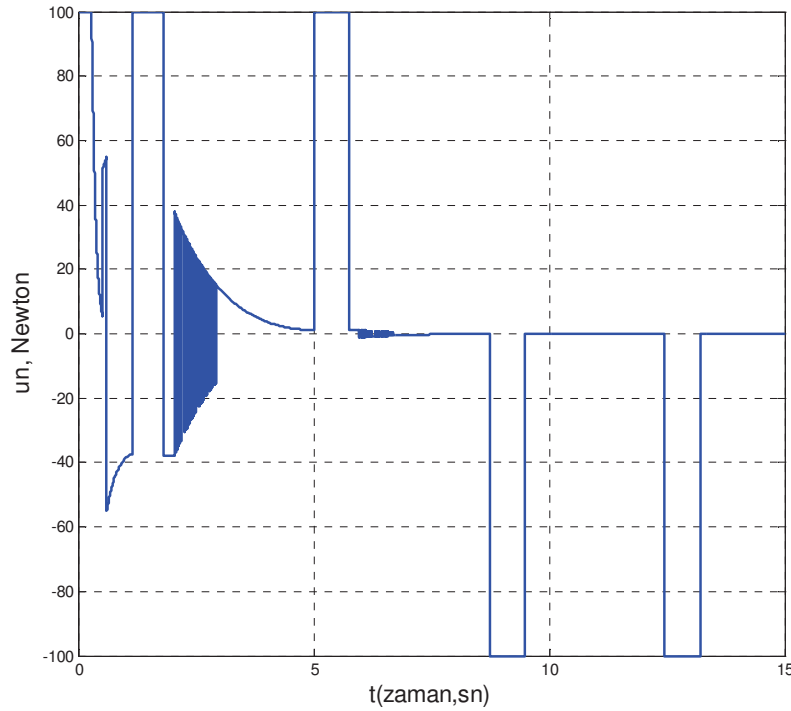
Şekil 4.21. Birinci yakınsama için sarkacın konumu ve açısai hızı



Şekil 4.22. Birinci yakınsama için sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi



Şekil 4.23. Birinci yakınsama için yaklaşık sistemin kontrol girişi

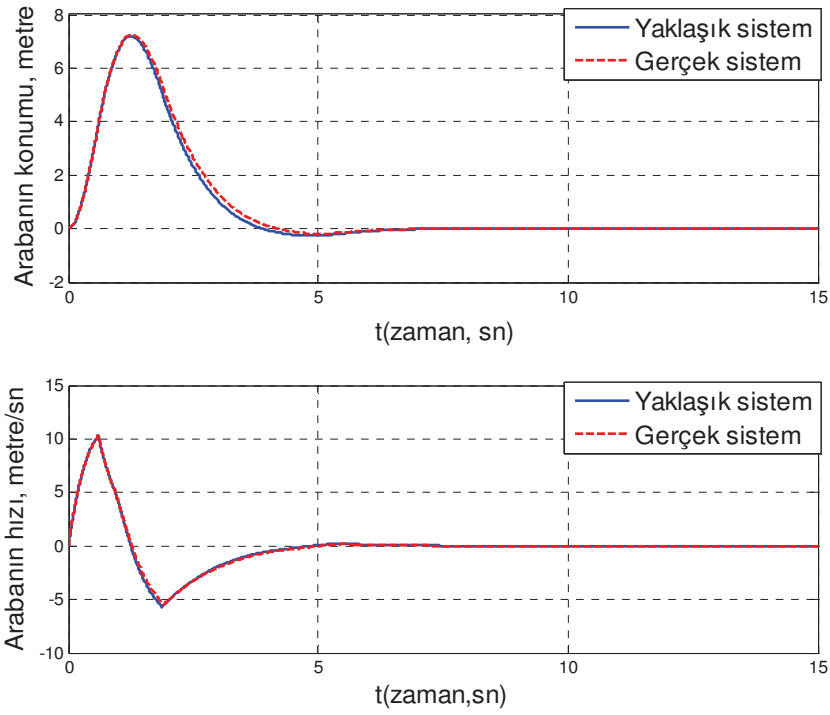


Şekil 4.24. Birinci yakınsama için gerçek sistemin kontrol girişi

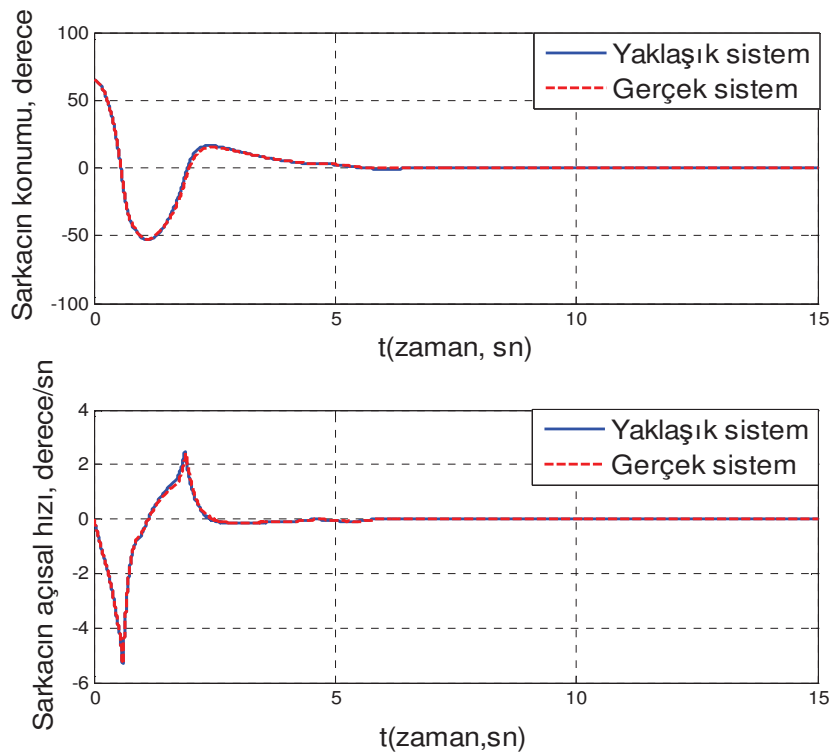
İlk yaklaşım başlangıç değeri için oluşturulan zamanla değişmeyen doğrusal sistemdir ve gerçek sistemin dinamik davranışını ifade etmez. Şekil 4.20 ve Şekil 4.21 de görüldüğü gibi yaklaşık sistem belli bir süre sonra kararlı hale gelirken gerçek sistem oldukça kararsız bir davranış sergilemektedir.

Bundan sonraki yakınsamalarda zamanla değişen doğrusal sistemler kullanılarak doğrusal olmayan sistem kontrol edilmeye çalışılır. Ele alınan uygulamada zamanla değişen doğrusal sistemler için Teorem 4.5 ile ele alınan kontrolcü kullanılır. Teorem 4.3'e göre, zamanla değişen doğrusal sistem bu kontrolcü ile doğrusal olmayan sisteme yakınsayacaktır.

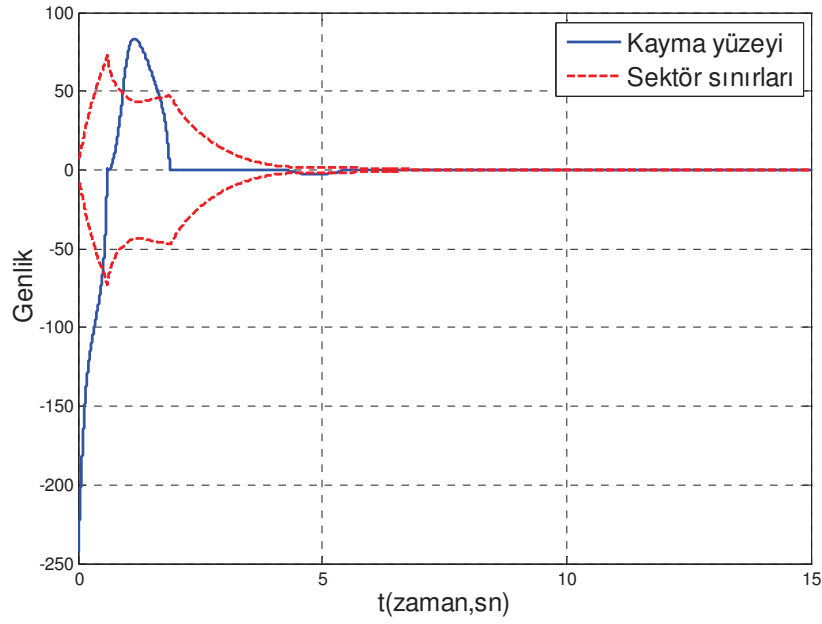
Her bir yakınsamada çözümden elde edilen $x(t)$ dizini sıradaki yakınsamada kullanılarak doğrusal olmayan sistem kontrol edilir.



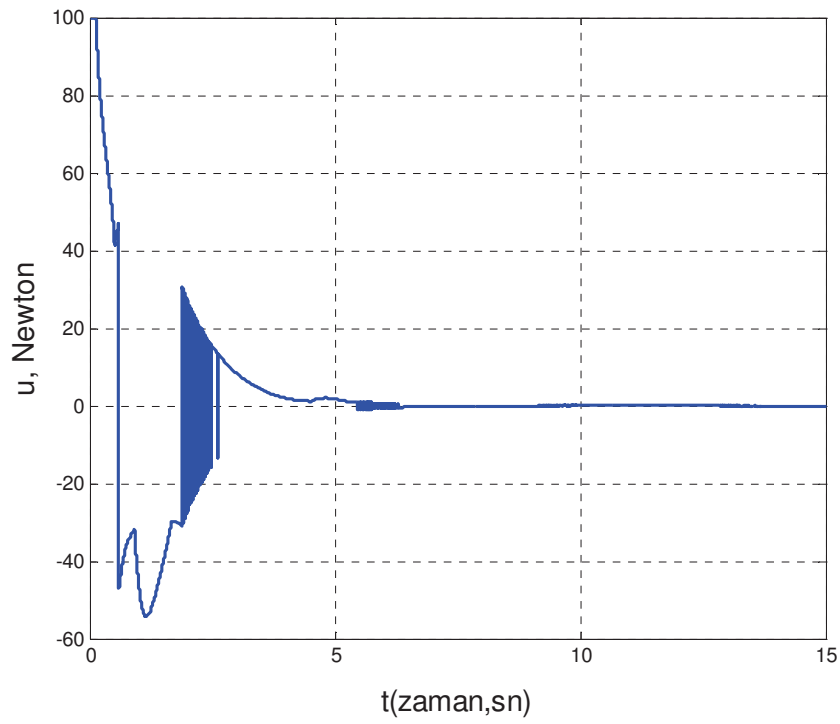
Şekil 4.25. Onuncu yakınsama için arabanın konumu ve hızı



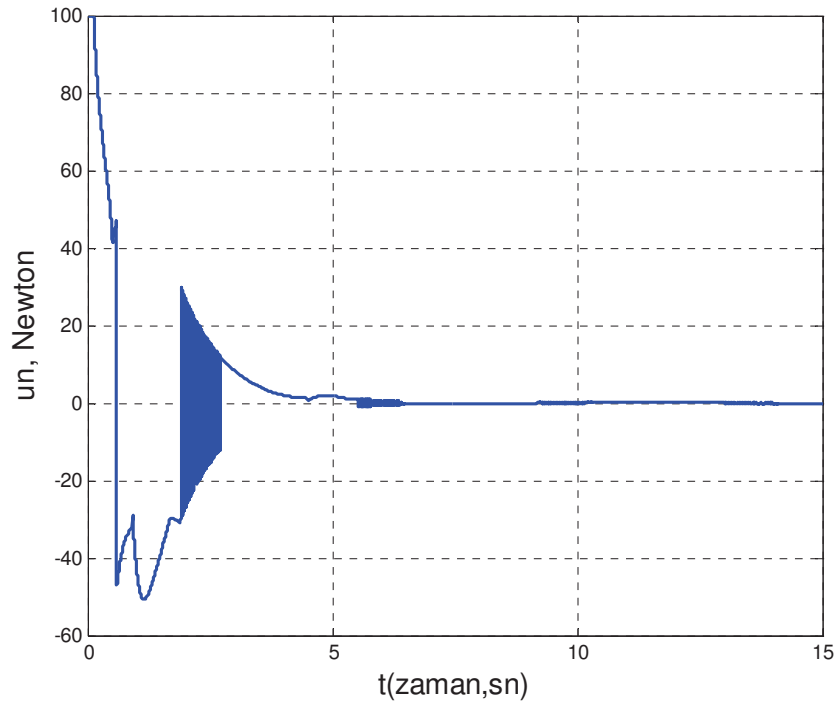
Şekil 4.26. Onuncu yakınsama için sarkacın konumu ve açısal hızı



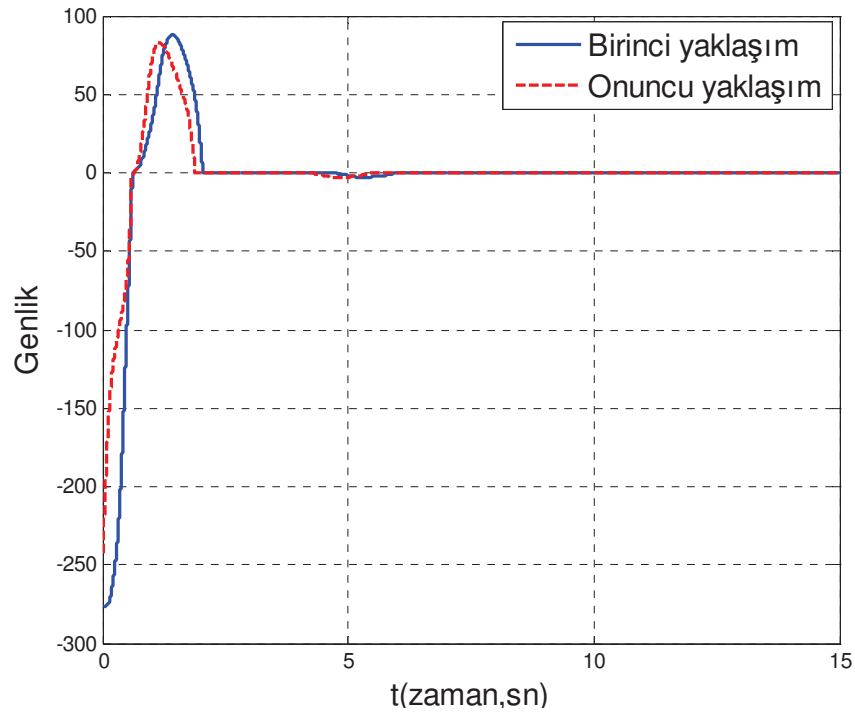
Şekil 4.27. Onuncu yakınsama için sistemin kayma sektörü ve kayma yüzeyi fonksiyonlarının değişimi



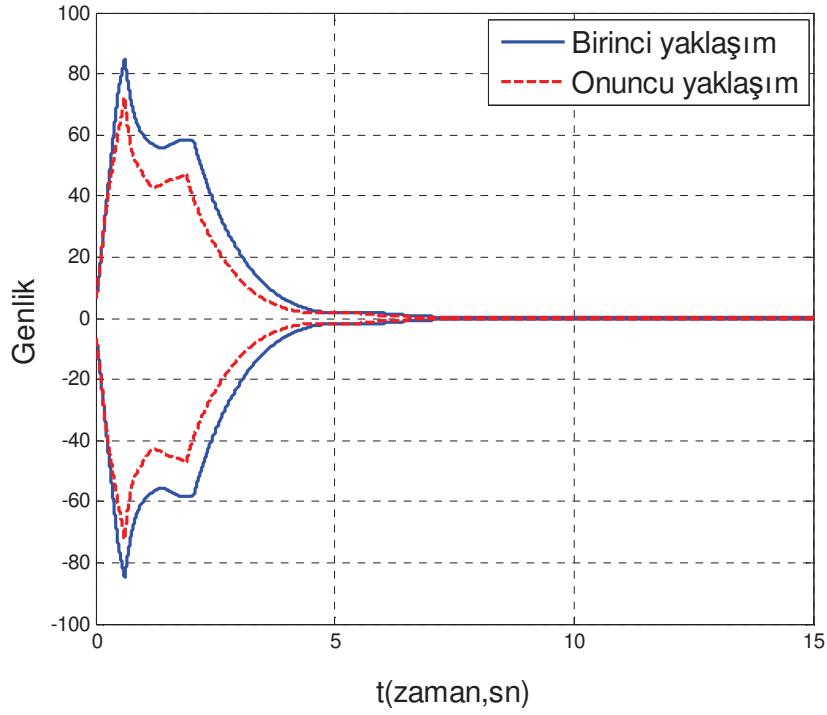
Şekil 4.28. Onuncu yakınsama için yaklaşık sistemin kontrol girişi



Şekil 4.29. Onuncu yakınsama için gerçek sistemin kontrol girişi



Şekil 4.30. Kayma yüzeyi fonksiyonunun yaklaşık çözümler boyunca değişimi



Şekil 4.31. Kayma sektörü fonksiyonunun yaklaşık çözümler boyunca değişimi

Her iki uygulamada da kullanılan kayan sektör metotlarının benzerleri daha önce bölüm 3'te ele alınarak avantajlarından bahsedilmiştir. Benzetim sonuçları incelendiğinde iki fiziksel uygulama içinde yakınsamanın kayan sektör kontrol metodu ile birlikte başarılı bir şekilde gerçekleştirildiği görülmektedir. Böylece doğrusal olmayan sistem başarı ile kontrol edilebilmektedir.

4.5. Bölüm Özeti

Bu bölümde doğrusal olmayan sistemler için yeni bir kayan sektör kontrolcü tasarımı önerilmiştir. Yöntem doğrusal olmayan sistemlere zamanla değişen doğrusal sistemler kullanarak yakınsanmasına dayanmaktadır. Bu yöntemde sektör tasarımı için zamanla değişen doğrusal sistemler kullanılmaktadır Bu bölümde temel katkı olarak zamanla değişen doğrusal sistemler için kayan sektör kontrol yaklaşımları Teorem 4.4 ve Teorem 4.5 ile önerilmiş ve ispatları bölüm içerisinde verilmiştir. Yöntemin yakınsama şartları ve ispatlar yine bölüm içerisinde verilmiştir. Yöntem esnek mafsallı robot manipülatör ve ters sarkaç sistemleri üzerinde uygulanmıştır.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında doğrusal ve doğrusal olmayan tek girişli sistemler için kayan kipli kontrolde meydana gelen çatırtıyı azaltacak ve bunu yaparken de sistemin kararlılığından ve gürbüzlüğünden ödün vermeyecek değişken yapıli kontrol sistemleri ele alınmıştır ve yeni üç yöntem önerilmiştir.

Bu bağlamda, bölüm 2'de ikinci mertebeden kayan kipli kontrol yöntemleri incelemiştir. Bu yöntemlerden en temelleri olan burulma ve süper burulma kontrol algoritmaları tercih edilmiştir. Daha önce yapılan çalışmalardan farklı olarak dinamik sistemler için kayma yüzeyi kararlı manifold teoremi ile hesaplanmıştır. Böylece dinamik sistemler için alternatif bir kayma yüzeyi tasarım metodu sunulmuştur. Ele alınan matematiksel model üzerinde yapılan benzetimlerde kararlı manifold teoremi ve ikinci mertebeden kayan kipli kontrol yöntemi başarılı bir şekilde bir arada kullanılmıştır. Kararlı manifold teoremi ile sistemin kendi dinamik yapısından faydalanılarak tasarlanan kayma yüzeyinin sistemin kararlılığında olumlu etkisi olduğu görülmüştür. Bu yüzden sistem kayma yüzeyi üzerinde hareket ederken kararlı bir davranış sergileme eğiliminde olduğu için kontrol çabasının azaldığı gözlemlenmiştir. Değişken yapıli kontrolcü olarak seçilen burulma ve süper burulma algoritmalarının değişken yapıli kontrol uygulamalarında kontrol sinyalinde meydana gelen çatırtı problemini gidermekte oldukça başarılı sonuçlar verdiği görülmüştür. Sonuç olarak kararlı manifold üzerinde ikinci mertebeden kayan kipli kontrol uygulaması bölüm 2'de belirtilen kabuller altında tek girişli doğrusal ve doğrusal olmayan sistemler için kontrol sinyalinde meydana gelen çatırtı problemini gidermekte ve kontrol çabasını azaltmaktadır.

Bölüm 3'te çatırtıyı gidermek için henüz çok uygulaması olmayan bir yaklaşım olan kayan sektör kontrol metodu önerilmiştir. Öncelikle doğrusal sistemler için kayan sektör tasarımı ve değişken yapıli kontrol teorisi incelenmiştir. Doğrusal olmayan sistemler için zamanla değişen doğrusal olmayan kayan sektör kontrol ve durum değişkenlerine bağlı doğrusal kayan sektör kontrol algoritmaları ele alınmıştır. Daha önce yapılan çalışmalardan farklı olarak durum değişkenlerine bağlı zamanla değişen kayan sektör kontrol algoritmasında değişen yüzey eğimleri göz önüne alınarak kayan sektör kontrol algoritması geliştirilmiştir. Önerilen yöntemler esnek bağlantıya sahip robot manipölatör sistemi üzerinde uygulanarak sonuçlar kayan kipli kontrol yöntemi ile karşılaştırılmıştır. Yapılan benzetim sonuçlarından kayan sektör kontrol yöntemlerinin hem seçilen iki başlangıç koşulunda hem de belirsizlik içeren sistemde kayan kipli kontrole olan üstünlükleri gözlemlenmiştir. Sistem, dinamik yapısına uygun olarak tasarlanan sektör içerisinde kontrol girişinin olmadığı durumlarda dahi kararlı davranış sergileme eğiliminde olduğu için kontrol çabası büyük oranda azaltılarak enerji tasarrufu sağlanmıştır. Kayan sektör kontrol metodunda sektör belli bir süre sonra denge noktası etrafında kararlı hale gelmektedir. Sektörün bu özelliği, sistemin kararlılığından ve gürbüzlüğünden ödün vermeden kontrol sinyalinde meydana gelen çatırtı problemini belirsizlik içermeyen sistemler için tamamen ortadan kaldırmakta, belirsizlik içeren sistemlerde ise çok büyük oranda azaltmaktadır.

Bölüm 4'de ise ardışık yakınsama metodu ile kayan sektör kontrol metodu birleştirilerek doğrusal olmayan sistemler için yeni bir kayan sektör tasarımı önerilmiştir. Doğrusal olmayan sisteme zamanla değişen doğrusal sistemler kullanarak yakınsanmış elde edilen zamanla değişen doğrusal sistemler kayan sektör metodu ile kontrol edilerek doğrusal olmayan sistemi kararlı hale getirecek kontrol sinyali elde edilmiştir. Önerilen yöntemler esnek bağlantılı robot manipölatör ve ters sarkaç sistemlerine uygulanmıştır. Önerilen iki kayan sektör kontrolcüde başarılı bir şekilde sistemi kontrol ederek doğrusal olmayan sisteme yakınsamıştır.

Bunlardan Teorem 4.4 ile ele alınan ve esnek bağlantılı robot manipülatör uygulamasında kullanılan kontrolcünün doğrusala yakın sistemler için daha uygun olduğu gözlemlenirken Teorem 4.5 ile ele alınan ve ters sarkaç mekanizmasının kontrolünde kullanılan değişken yapıli kontrolcünün daha gürbüz davranışa ihtiyaç duyulan sistemler için kullanılabileceği gözlemlenmiştir.

Daha sonraki çalışmalarda önerilen yöntemler deneysel olarak incelenerek benzetimlerle deneysel sonuçlar karşılaştırılabilir. Çok girişli sistemler için önerilen yöntemler geliştirilerek füze ve uçak gibi dinamik sistemlerin kontrolünde kullanılmak üzere takip algoritmaları tasarlanabilir.

KAYNAKLAR

1. Banks, S.P., Salamcı, M.U. And Özgören, M.K., “On the Global Stabilization Systems via Switching Manifolds”, ***The Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences***, 7(1-3): (1999).
2. Banks, S.P., Salamcı, M.U. And McCaffrey, D., “Non-Local Stabilization of Nonlinear Systems using Switching Manifolds”, ***International Journal of Systems Science***, 31(2): 243-254 (2000).
3. Bartolini, G., Pisano, A., Punta, E. And Usai, E., “Digital Second Order Sliding Mode Control SISO Uncertain Nonlinear Systems”, ***Proc. of the American Control Conference***, Philadelphia, PA, USA ,119-124 (1998).
4. Bartolini, G., Pisano, A., Punta, E. And Usai, E., “A Survey of Applications of Second-Order Sliding Mode Control to Mechanical Systems”, ***Int. J. Control***, 76(9/10): 875–892 (2003).
5. Boothby, W.M., “An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry 2nd ed.”, ***Elsevier***, Singapore, 6,53 (2007).
6. Cheng, D., Ma, J., Lu, Q. And Mei, S., “Quadratic Form of Stable Sub-Manifold for Power Systems”, ***International Journal of Robust and Nonlinear Control***, (14): 773-788 (2004).
7. Çimen, T., Banks, S.P., “Global Optimal Feedback Control for General Nonlinear Systems with Nonquadratic Performance Criteria”, ***Systems & Control Letters***, (53): 327-346 (2004).
8. Doğan, C., Salamcı, M.U. ve Tombul, G.S., “Kararlı Manifold Teoremi Kullanarak Doğrusal Olmayan Sistemler için Denetleyici Tasarımı”, ***12. Ulusal Makine Teorisi Sempozyumu***, Kayseri, 441-448 (2005).
9. Edwards, C., Spurgeon, S.K., “Sliding Mode Control, Theory and Applications”, ***Taylor&Francis***, London, 1-92 (1998).
10. Elmalı, H., Olgaç, N., “Robust Output Tracking Control of Nonlinear MIMO Systems via Sliding Mode Technic”. ***Automatica***, 28: 145-151 (1992).
11. Furuta, K., Pan, Y., “A New Approach To Design A Sliding Sector For VSS Controller” , ***Proceedings of the American Control Conference***, Seattle, Washington, 1304-1308 (1995).
12. Furuta, K., Hatakeyama, S. And Pan, Y., “ VS Controller Design for Continuous System from Sampled Data”, ***Proceedings of the American Control Conference***, San Diego, California, 1032-1036 (1999).

13. Furuta, K., Pan, Y., "Variable Structure Control with Sliding Sector" , ***Automatica***, 36, 211-228 (2000).
14. Gökbilen, B., "Doğrusal Olmayan Sistemlerin Zamanla Değişen Doğrusal Yüzey Kullanılarak Kayan Kipli Kontrolü ve Uygulamaları", Yüksek Lisans Tezi, ***Gazi Üniversitesi***, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 19-50, (2006).
15. Isidori, A., "Nonlinear Control Systems II", ***Springer-Verlag***, Berlin, (1999).
16. Kachroo, P., Tomizuka, M., "Chattering Reduction and Error Convergence in the Sliding-Mode Control of a Class of Nonlinear Systems", ***IEEE Transactions on Automatic Control***, 41: 1063-1068 (1996).
17. Korondi, P., Hashimoto, H. And Sziebig, G., "Sliding Sector Design for Nonlinear Systems", ***Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control***, Seoul, Korea, 3556-3561 (2008).
18. Levant, A., "Sliding Order and Sliding Accuracy in Sliding Mode Control", ***International Journal of Control***, 58(6): 1247-1263 (1993).
19. Levant, A., "Robust Exact Differentiation via Sliding Mode Technique", ***Automatica***, 34(3): 379-384 (1998).
20. Levant, A., "Higher-Order Sliding Modes, Differentiation and Output-Feedback Control", ***International Journal of Control***, 76: 924-941 (2003).
21. Levant, A., "Quasi-Continuous High-Order Sliding-Mode Controllers", ***IEEE Transactions on Automatic Control***, 50 (11): 1812-1816 (2005).
22. Levant, A., "Principles of 2-Sliding Mode Design", ***Automatica***, 43, 576-586 (2007).
23. Ogata, K., "Modern Control Engineering", 3rd ed., ***Prentice-Hall, Inc.***, USA, 710-982 (1997).
24. Özcan, S., "Nonlineer Sistemler İçin Kayan Sektör İçeren Değişken Yapılı Kontrolcu Tasarımı", Yüksek Lisans Tezi, ***Gazi Üniversitesi***, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 40-51, (2012).
25. Pan, Y., Kumar, K.D. And Liu, G., "Design of Variable Structure Control System With Nonlinear Time-Varying Sliding Sector", ***IEEE Transactions on Automatic Control***, 54(8): 1981-1986 (2009).

26. Pan, Y., Furuta, K. And Hatakeyama, S., "Invariant Sliding Sector for Variable Structure Control", ***Proceedings of the 38th Conference on Decision And Control***, Phoenix, Arizona, 5152-5157 (1999).
27. Pan, Y., Furuta, K., Suzuki, S. And Hatakeyama, S., "Design of Variable Structure Controller – From Sliding Mode to Sliding Sector", ***Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control***, Sydney, Australia, 1685-1690 (2000).
28. Pan, Y., Furuta, K., "Variable Structure Control with Sliding Sector for Hybrid Systems", ***2006 International Workshop on Variable Structure Systems***, Alghero, Italy, 286-291 (2006).
29. Pan, Y., Furuta, K., "Variable Structure Control With Hybrid – Type Input", ***Proceedings of the 5th International Conference on Machine Learning and Cybernetics***, Dalian, 635-640 (2006).
30. Pan, Y., Furuta, K., "Variable Structure Control By Switching Among Feedback Control Laws", ***Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control***, San Diego, USA, 789-794 (2006).
31. Perko, L., "Differential Equations and Dynamical Systems 3rd ed.", Marsden J.E., Sirovich L., Golubitsky M., ***Springer***, New York, 54, 95, 96, 105-119 (2001).
32. Rodriguez, M.T., Banks, S.P., "Linear approximations to nonlinear dynamical systems with applications to stability and spectral theory", ***IMA Journal of Mathematical Control and Information***, 20, 89-103 (2003)
33. Slotine, J.J.E., Li, W., "Applied Nonlinear Control", ***Prentice Hall***, New Jersey, 242-244, 276-307 (1991).
34. Salamci, M.U., Banks, S.P., "Optimal Sliding Surface Design for a Class of Nonlinear Systems", ***4th International Conference on Optimization: Techniques and Applications***, Perth, Australia, 743-750 (1998).
35. Salamci, M.U., "Two New Switching Surface Design Techniques for Nonlinear System with Their Applications to Missile Control", Doktora Tezi, ***ODTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü***, Ankara, 47-114 (1999).
36. Salamci, M.U., Özgören, M.K. And Banks, S.P., "Sliding Mode Control with Optimal Sliding Surfaces for Missile Autopilot Design", ***AIAA Journal of Guidance Control and Dynamics***, 23(4): 719-727 (2000).

37. Salamci, M.U., Tombul, G.S., "Sliding Mode Control Design with Time Varying Sliding Surfaces for A Class of Nonlinear Systems", **CCA'06, IEEE International Conference on Control Applications**, Munich, Germany, (2006).
38. Shtessel, Y. B., Shkolnikov, I.A. And Levant A, "Smooth Second-Order Sliding Modes: Missile Guidance Application", **Automatica**, 43, 1470-1476 (2007).
39. Suzuki, S., Furuta, K. And Pan, Y., "State-Dependent Sliding-Sector VS-Control and Application to Swing-Up Control of Pendulum", **Proceedings of the 42th IEEE Conference on Decision and Control**, Hawaii USA, 251-256 (2003).
40. Utkin, V.I., "Sliding Modes in Control and Optimization", **Springer Verlag**, Berlin, 46-125 (1992).
41. Vecchio, C., "Sliding Mode Control: Theoretical Developments and Applications Uncertain Mechanical Systems", Doktora Tezi, **Università degli Studi di Pavia**, Italy, 27-41 (2008).
42. Brauer, F., "Perturbations of Nonlinear Systems of Differential Equations, II", **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 17, 418-434 (1967)
43. Xu, J.X., Lee, T.H. And He, C., "Modified Sliding Mode Controller for a Class of Nonlinear Multi-Input Systems", **IEEE Workshop on Variable Structure Systems**, California, USA, 55-60 (1996).
44. Xu, H., Mirmirani, M.D. And Loannou, P.A., "Adaptive Sliding Mode Control Design for a Hypersonic Flight Vehicle", **AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics**, 27(5): 829-838 (2004).

EKLER

EK-1. Kararlı Manifold Teoreminin İspatı

İspat [31]

Eş. 2.9 ile belirtilen sistem ele alınsın.

$$U(t) = \begin{bmatrix} e^{Pt} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } V(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{Qt} \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

Bu durumda $e^{At} = U(t) + V(t)$ olur.

Eğer $\alpha > 0$, $K > 0$ ve $\beta > 0$ için yeterince büyük bir K ve yeterince küçük bir β seçilirse $U(t)$ ve $V(t)$ 'nin aşağıdaki şartları sağladığı görülür.

$$\|U(t)\| \leq Ke^{-(\alpha+\beta)t}; \quad t \geq 0$$

$$\|V(t)\| \leq Ke^{\beta t}; \quad t \leq 0$$

Eş. 2.12 ele alınsın.

$$w(t, a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(w(s, a))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(w(s, a))ds$$

Eğer $w(t, a)$ Eş. 2.12'nin sürekli çözümü ise aynı zamanda Eş. 2.9 diferansiyel denkleminin de çözümüdür. Eş. 2.12 integral denklemi ise ardışık yaklaşım yöntemi ile çözülebilir, böylece Eş. 2.13 aşağıdaki şekilde yazılır.

$$w^{(0)}(t, a) = 0$$

$$w^{(k+1)}(t, a) =$$

$$U(t)a + \int_0^t U(t-s)G(w^{(k)}(s, a))ds - \int_t^\infty V(t-s)G(w^{(k)}(s, a))ds$$

Yukarıdaki tüme varım hipotezi kabul edilirse;

$$|w^{(k)}(t, a) - w^{(k-1)}(t, a)| \leq \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^{k-1}}; \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad t \geq 0 \quad (1)$$

EK-1. (Devam) Kararlı Manifold Teoreminin İspatı

$k = 1$, $t \geq 0$ için G , Lipschitz koşulunu ve $\|U(t)\|$, $\|V(t)\|$ yukarıdaki kabulleri sağlar. Bu durumda $t \geq 0$ için tüme varım hipotezi takip edilirse;

$$\begin{aligned}
|w^{(m+1)}(t, a) - w^{(m)}(t, a)| &\leq \int_0^t \|U(t-s)\| \varepsilon |w^{(m)}(s, a) - w^{(m-1)}(s, a)| ds \\
&\quad + \int_t^\infty \|V(t-s)\| \varepsilon |w^{(m)}(s, a) - w^{(m-1)}(s, a)| ds \\
&\leq \varepsilon \int_0^t K e^{-(\alpha+\beta)(t-s)} \frac{K|a|e^{-\alpha s}}{2^{m-1}} ds \\
&\quad + \int_0^\infty K e^{\beta(t-s)} \frac{K|a|e^{-\alpha s}}{2^{m-1}} ds \\
&\leq \frac{\varepsilon K^2 |a| e^{-\alpha t}}{\beta 2^{m-1}} + \frac{\varepsilon K^2 |a| e^{-\alpha t}}{\beta 2^{m-1}} \\
&< \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^{m-1}} = \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^m} \quad (2)
\end{aligned}$$

Eş. 2 $\varepsilon K/\beta < 1/4$ için sağlanır. Yani $\varepsilon < \beta/4K$ seçilir. G fonksiyonunun Eş. 2.6 Lipschitz koşulunu sağlaması için $K|a| < \delta/2$ olmalıdır. Yani $|a| < \delta/2K$ seçilir. Daha sonra $k = 1, 2, 3, \dots$ ve $t \geq 0$ için Eş. 1 takip edilirse;

$$\begin{aligned}
|w^{(n)}(t, a) - w^{(m)}(t, a)| &\leq \sum_{k=N}^{\infty} |w^{(k+1)}(t, a) - w^{(k)}(t, a)| \\
&\leq K|a| \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{K|a|}{2^{N-1}}
\end{aligned}$$

Yukarıdaki nicelik sifıra yaklaşırken $N \rightarrow \infty$ olur. Bu yüzden $w^{(k)}(t, a)$, Cauchy dizisi bir sürekli fonksiyondur. Diferansiyel denklem sistemleri için varlık ve teklik teoremine göre;

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w^{(k)}(t, a) = w(t, a); \quad t \geq 0, |a| < \delta/2K$$

EK-1. (Devam) Kararlı Manifold Teoreminin İspatı

Eş. 2.13'de eşitliğin iki tarafı için de limit alınır, düzgün yakınsamadan gelen $w(t, a)$ sürekli fonksiyonu Eş. 2.12 integral denklemini ve Eş. 2.9 diferansiyel denklemini sağlar. Öyleyse her $t \geq 0$ ve $|a| < \delta/2K$ için $G \in C^1(E)$ ve $w^{(k)}(t, a)$ türevlenebilir fonksiyonlardır. Bu sayede düzgün yakınsamadan elde edilen $w(t, a)$, her $t \geq 0$ ve $|a| < \delta/2K$ için türevlenebilir bir fonksiyondur. Böylece Eş. 2 aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$|w(t, a)| \leq 2K|a|e^{-\alpha t}; \quad t \geq 0, |a| < \delta/2K \quad (3)$$

Eş. 2.12 integral denkleminde a vektörünün son $n - k$ terimi hesaplamaya girmez ve dolayısıyla sıfır alınabilir. Böylece $w(t, a)$ çözümünün bileşenlerinden biri olan $w_k(t, a)$ başlangıç değerinin sağlar.

$$w_k(0, a) = a_k; \quad k = 1, \dots, j$$

$$w_k(0, a) = - \left(\int_0^\infty V(-s) G(w(s, a_1, \dots, a_j, 0)) ds \right)_k; \quad k = j + 1, \dots, n \quad \text{olur.}$$

Her $k = j + 1, \dots, n$ için aşağıdaki gibi bir fonksiyon tanımlanabilir.

$$\psi_k(a_1, \dots, a_j) = w_k(0, \dots, a_1, \dots, a_j, 0, \dots, 0) \quad (4)$$

Bu durumda Eş. 4'e göre $y_k = w_k(0, \dots, a_1, \dots, a_j, 0, \dots, 0)$ başlangıç değeri $y_k = \psi_k(y_1, \dots, y_j)$ eşitliğini sağlar. Burada $k = j + 1$ dir. Bu denklemler $\sqrt{y_1^2 + \dots + y_j^2} < \delta/2K$ için türevlenebilir manifold S' i belirler. Buna ek olarak eğer $y(t)$ Eş. 2.9 diferansiyel denkleminin $y(0) \in S$ üzerinde çözümü ise, yani $y(0) = w(0, a)$ ise $y(t) = w(t, a)$ olur.

EK-1. (Devam) Kararlı Manifold Teoreminin İspatı

Eş. 3 ele alınır, eğer $y(t)$ Eş. 2.9'un $y(0) \in S$ üzerinde çözümü ise $y(t) \rightarrow 0$ iken $t \rightarrow \infty$ olur. Benzer şekilde eğer $y(t)$ Eş. 2.9'un $y(0) \notin S$ üzerinde çözümü ise $y(t) \rightarrow 0$ iken $t \rightarrow \infty$ olur. Yani eğer $y(0) \in S$ ise her $t \geq 0$ için $y(t) \in S$ olur ve aşağıdaki şart sağlanır.

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial y_i}(0) = 0; \quad i = 1, \dots, j, \quad k = j + 1, \dots, n$$

Yani türevlenebilir manifold S , $y = Ax$ doğrusal sisteminin kararlı alt uzayı $E^S = \{y \in R^n | y_1 = \dots = y_j = 0\}$ 'a teğettir.

Eş. 2.9 ile $t \rightarrow -t$ için yani $\dot{x} = -Ax - F(x)$ için aynı metot tekrarlanarak kararsız manifoldun varlığı da ispat edilebilir.

ÖZGEÇMİŞ**Kişisel Bilgiler**

Soyadı, adı : BİRİNCİ, Burak Eren

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yer : 21.06.1987 Ankara

Medeni hali : Bekar

e-mail : burak.eren.birinci@gmail.com**Eğitim****Derece****Eğitim Birimi****Mezuniyet tarihi**

Yüksek lisans

Gazi Üniversitesi/ Makine Müh. Böl.

2013

Lisans

Gazi Üniversitesi/ Makine Müh. Böl.

2010

Lise

Çankaya Lisesi

2004

İş Deneyimi**Yıl****Yer****Görev**

2010-2011

Makine Mühendisleri Odası

Teknik Görevli

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Latin dansları, Halk dansları, Savunma sporları