KOMPAKT DİSKLERDE KOMPLEKS BERNSTEİN-STANCU POLİNOMLARI İLE YAKLAŞIM

Maya ALTINOK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2013

ANKARA

Maya ALTINOK tarafından hazırlanan KOMPAKT DİSKLERDE KOMPLEKS BERNSTEİN-STANCU POLİNOMLARI İLE YAKLAŞIM adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr .Nurhayat İSPİR ………………………………

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL ……………………………

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Nurhayat İSPİR ……………………………

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ …………………………….

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Tarih: 21/01/2013

Bu tez ile G. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU ………..…………………..

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Maya ALTINOK

KOMPAKT DİSKLERDE KOMPLEKS BERNSTEİN-STANCU POLİNOMLARI İLE YAKLAŞIM

(Yüksek Lisans Tezi)

Maya ALTINOK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2013

ÖZET

Bu çalışmada öncelikle reel değişkenli Bernstein, Bernstein-Stancu ve Kantorovich-Stancu polinomlarının yaklaşım özellikleri incelendi. İkinci olarak analitik fonksiyonlara ilişkin kompleks Bernstein, kompleks Bernstein-Stancu ve Kantorovich-Stancu polinomlar dizisi için eşanlı yaklaşımın derecesi, nicel tahminli Voronovskaja tip sonuçlar ve tam yakınsama oranları verildi. Böylelikle Bernstein-Stancu polinomlarının yaklaşım özelliklerinin reel aralıklardan kompleks düzlemin kompakt disklerine genişletildi.

Bilim Kodu	:	**204.1.095**
Anahtar Kelimeler	:	**Kompleks Bernstein-Stancu, Kantorovich-Stancu polinomları, eş anlı yaklaşım, yakınsaklık oranı**
Sayfa Adedi	:	**53**
Tez Yöneticisi	:	**Prof.Dr. Nurhayat İSPİR**

APPROXIMATION BY COMPLEX BERNSTEİN-STANCU POLYNOMIALS IN COMPACT DISKS

(M. Sc. Thesis)

Maya ALTINOK

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

January 2013

ABSTRACT

In this thesis, firstly, the approximation properties of real Bernstein, Bernstein-Stancu and Kantorovich-Stancu polynomials of real variable are investigated. Secondly, order of simultaneous approximation, Voronovskaja type results with quantitative estimate and exact order for complex Bernstein, complex Bernstein-Stancu and Kantorovich-Stancu polynomials attached to analytic functions on compact disks are given. In this way, the approximation properties of the Bernstein-Stancu polynomials are extended to compact disks in the complex plane from real intervals.

Science Code : 204.1.095

Key Words : Complex Bernstein-Stancu, Kantorovich-Stancu polynomials Simultaneous approximation, exactorder

Page Number : 53

Adviser : Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Prof. Dr. Nurhayat İSPİR' e, manevi desteklerini benden esirgemeyen eşim Mesut ALTINOK' a ve aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$< a.b >$	$\mathbb{R}$ deki sonlu veya sonsuz herhangi bir aralık
$L_n(f;x)$	Lineer pozitif operatör
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$L_1[0,1]$	$[0,1]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$\|f\|_{C[a,b]}$	$C[a,b]$ de maksimum norm
$\omega(f,\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$B_n(f;x)$	Reel değişkenli Bernstein polinomu
$B_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)$	Reel değişkenli Bernstein-Stancu polinomu
$S_n^{(\alpha,\beta)}(f;z)$	Kompleks değişkenli Bernstein-Stancu polinomu
$K_n(f;x)$	Reel değişkenli Kantorovich polinomu
$K_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)$	Reel değişkenli Kantorovich-Stancu polinomu
$\Delta^p_{1/(n+\beta)} f$	f nin n adımlı p. fark operatörü
$[f;x_0,x_1]$	f nin 1. Bölünmüş farkı

1.GİRİŞ

Weierstrass 1885 yılında kompakt aralıklarda sürekli fakat türevi olmayan fonksiyonlara yakınsayan bir polinomlar dizisinin varlığını ispatlamıştır [1,2]. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonuna ilişkin,

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x)f\left(\frac{k}{n}\right),\qquad P_{n,k}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\quad 0\le x\le 1$$

polinomu 1912 yılında Bernstein tarafından Weierstrass Teoreminin ispatı için oluşturulan ilk polinomlardan biridir ve yaklaşım teorisinde de önemli bir yeri vardır. Bernstein polinomları $C[0,1]=\{f\mid f:[0,1]\to\mathbb{R}$ sürekli$\}$ uzayından kendine tanımlı bir lineer pozitif operatör olması nedeni ile birçok matematikçi tarafından yaklaşım özellikleri çalışılmıştır. Aynı zamanda Schurer polinomları, Kantorovich polinomları, Stancu polinomları gibi diğer yaklaşım operatörlerinin tanımlanmasında rol oynamıştır.

$\mathbb{R}$ reel eksenin alt aralıklarından $\mathbb{C}$ kompleks düzlemin bölgelerine yaklaşım problemini genişletme çalışmaları Bernstein polinomları ile başlamıştır. Buna göre $B_n(f,x)$ ifadesindeki $x\in[0,1]$ noktaları yerine, f nin analitik olduğu varsayılan $[0,1]$ aralığını içeren $\mathbb{C}$ nin bazı bölgelerindeki z kompleks sayısı alınarak elde edilen

$$B_n(f;z)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)z^k(1-z)^{n-k};\quad z\in\mathbb{C}$$

kompleks Bernstein polinomlarının çeşitli yaklaşım özellikleri incelenmiştir $[3-9]$.

Bu tezde amaç Bernstein polinomlarının bir genelleştirmesi olan Bernstein-Stancu polinomlar dizisinin reel ve kompleks anlamda yaklaşım özelliklerini incelemektir. Bu polinomlar 1969 yılında Stancu tarafından $0\le\alpha\le\beta$ sabitler, $f\in C[0,1]$ ve $x\in[0,1]$ olmak üzere

$$B_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)$$

olarak tanımlanmıştır $[10]$.

Çalışmamızda reel tip Bernstein-Stancu polinomlar dizisinin sürekli reel fonksiyonlara yaklaşım derecesi ifade edilmiş ve integrallenebilen fonksiyonlar için polinomun Kantorovich formunda yaklaşım özellikleri verilmiştir. Bu sonuçların bir genişletmesi olan kompleks Bernstein-Stancu polinomlarının analitik fonksiyonlara ilişkin yakınsama oranları ve tam yakınsaklık oranı incelenmiş ve benzer incelemeler polinomun kompleks Kantorovich biçimi için de yapılmıştır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölüm lineer pozitif operatör dizilerinin yaklaşım özelliklerinin ifade edildiği temel teorem ve tanımların verildiği ve diğer bölümlerin alt yapısını oluşturan temel kavramları içeren bölümdür.

Üçüncü bölüm reel değişkenli Bernstein, Bernstein-Stancu polinomlarının ve Kantorovich tip operatörlerin yaklaşım özelliklerinin kısaca incelendiği bölümdür.

Dördüncü bölüm Gal'in $[11], [16]$ eserlerinin incelenerek kompleks Bernstein, kompleks Bernstein-Stancu ve kompleks Kantorovich-Stancu polinomlarının ele alındığı bölümdür. İlk olarak üçüncü bölümde reel değişkenli durumda verilen sürekli fonksiyonlara Korovkin tip düzgün yakınsama sonucu kompleks düzlemde Vitali teoremi yardımı ile analitik fonksiyonlara yakınsayan kompleks Bernstein polinomlarına genişletilmiştir. İkinci olarak önemli bir problem olan yakınsama oranı araştırılmıştır. Bu bölümün esası, söz konusu kompleks operatörlerin kompleks düzlemin kompakt alt bölgelerinde analitik olan fonksiyonlara eş anlı yaklaşım oranı, Voronoskaja tip asimptotik yaklaşım tahminleri ve tam yakınsama oranına ilişkin nicel tahminlerin verildiği kısımdır. Bu bölümde ayrıca kompleks Kantorovich-Stancu polinomları içinde benzer sonuçlar verilmiştir.

Böylece üçüncü bölümde reel değişkenli durumda verilen sonuçların, kompleks düzlemin kompakt disklerine genişletilmesi incelenmiştir.

2. LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER

Bu bölümde yaklaşım teorisinin önemli bir problemi olan lineer pozitif operatör dizilerinin yaklaşım özelliklerine ilişkin bazı tanım, teorem ve özelliklerden bahsedilecektir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörler

X ve Y normlu iki fonksiyon uzayı olsun. X den alınmış her f fonksiyonuna Y de bir g fonksiyonu denk getiren bir L kuralı varsa o taktirde X uzayında bir operatör tanımlanmıştır denir ve g nin tanım kümesindeki x ler için $g(x)=L(f;x)$ şeklinde gösterilir. t, f nin tanım kümesinin herhangi bir elemanı ise $L(f(t);x)$, $L(f)(x)$, $L(f;x)$ gösterimlerinden biri kullanılır $[2, 13]$.

2.1. Tanım

X ve Y iki lineer fonksiyon uzayı olmak üzere L: $X \rightarrow Y$ şeklindeki L operatörünü göz önüne alalım. Her $f_1, f_2 \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için L operatörü;

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2; x) = \alpha L(f_1; x) + \beta L(f_2; x)$$

koşulunu gerçekleştiriyorsa o taktirde L operatörüne lineer operatör denir.

2.2. Tanım

X, Y iki lineer uzay, T_f ve T_g sırasıyla f ve g fonksiyonlarının tanım kümeleri olmak üzere her $t \in T_f$ için $f(t) \geq 0$ ise f ye pozitif fonksiyon denir.

$$X^+ = \{f \in X : f(t) \geq 0, \text{her } t \in T_f\} \text{ ve } Y^+ = \{g \in Y : g(x) \geq 0, \text{her } x \in T_g\}$$

olsun. Eğer X uzayında tanımlanmış L operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f pozitif fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyorsa L ye pozitif operatör denir. L pozitif operatörü için $L(X^+) \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(t) \geq 0$ olduğunda $L(f; x) \geq 0$ olur $[2, 13]$.

Hem lineerlik hem de pozitiflik şartlarını sağlayan operatörlere lineer pozitif operatörler denir.

Aşağıdaki önermede lineer pozitif operatörlerin bazı özelliklerini verelim.

2.1. Önerme

$L: X \rightarrow Y$ bir lineer pozitif operatör olsun.

a) L monotondur.
b) L lineer pozitif operatörü her $t \in T_f$ için $f(t) < 0$ koşulunu sağlayan fonksiyonları yine aynı özelliği sağlayan fonksiyonlara dönüştürür.
c) $|L(f; x)| \leq L(|f|; x)$
$[13]$.

2.3. Tanım

$C[a, b] = \{f \mid f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli$\}$ lineer uzayı üzerinde bir norm

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

ile tanımlanır. Burada $C[a, b]$ fonksiyonların noktasal toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile bir lineer uzaydır.

2.4. Tanım (Bölünmüş Farklar)

$x_0, x_1, \dots, x_n \in (a,b)$ ve f, (a,b) de tanımlı bir fonksiyon olsun. $k = 0,1,2,\dots,n$ için $[x_k] = f(x_k)$ diyelim.

1. bölünmüş fark:

$$[x_0, x_1] = [f; x_0, x_1] = \frac{[x_0] - [x_1]}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

dir. Ortalama değer teoreminden

$$[f; x_0, x_1] = \frac{f'(\xi)}{1!}$$

olacak şekilde en az bir $\xi \in (a,b)$ vardır.

2. bölünmüş fark:

$$[f; x_0, x_1, x_2] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

n. bölünmüş fark:

$$\begin{aligned}[f; x_0, x_1, \dots, x_n] \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)\dots(x_0 - x_n)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)\dots(x_1 - n)} + \cdots \\ &+ \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_{n-1})}\end{aligned}$$

dir. Burada

$$[f;x_0,x_1,\dots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\ ,\xi\in(a,b)$$

$[2,13]$.

2.5. Tanım

f nin n adımlı p. fark operatörü

$$\Delta_n^p f\left(\frac{k}{n}\right)=\sum_{i=0}^{p}(-1)^{p-i}\binom{p}{i}f\left(\frac{k+i}{n}\right)=p!\frac{1}{n^p}\left[f;\frac{k}{n},\frac{k+1}{n},\dots,\frac{k+p}{n}\right]$$

olup
$\Delta_n^p f>0$ ise *f* , *p*. basamaktan konvekstir.
$\Delta_n^p f<0$ ise *f* , *p*. basamaktan konkavdır.

2.2. Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı

Bu kısımda $n\in\mathbb{N}$, $L_n\colon C[a,b]\to C[a,b]$ lineer pozitif operatör, $f\in C[a,b]$ olsun. $\big(L_n(f)\big)$ dizisinin *f* ye düzgün yakınsaklığı $x\in[a,b]$ için $\big(L_n(f;x)\big)$ dizisi için $f(x)$ e düzgün yakınsaklığı anlamındadır. Aynı zamanda $\|\ \|_{C[a,b]}$ normundaki yakınsaklık düzgün yakınsaklığa denktir.

1951 yılında Bohman toplam şeklindeki lineer pozitif operatörler dizisinin [0,1] aralığında sürekli fonksiyonlara yaklaşması problemini incelemiştir.
Bohman göstermiştir ki her $x\in[0,1]$, $0\le a_{k,n}\le 1$ olduğunda

$$L_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}f\big(a_{k,n}\big)P_{k,n}\ ;\ \ P_{k,n}(x)\ge 0$$

lineer pozitif operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşullar $e_k(x) = x^k$, $k = 0,1,2$ olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(e_k) - e_k\|_{C[0,1]} = 0$$

şeklindedir [13].

1953 yılında Korovkin Bohman teoremini genelleştirerek aşağıdaki teoremi vermiştir.

2.1. Teorem (Korovkin Teoremi)

Her n için $L_n: C[a,b] \to C[a,b]$ olmak üzere (L_n) lineer pozitif operatörler dizisi olsun. Her bir $k = 0,1,2$ için $e_k(x) = x^k$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(e_k) - e_k\|_{C[a,b]} = 0\,; \quad k = 0,1,2$$

koşulları gerçekleniyorsa, bu durumda $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olan her f fonksiyonu için,

$$\lim_{n\to\infty} \|L_n(f) - f\|_{C[a,b]} = 0 \qquad (2.1)$$

dir $[1,2,13]$.

2.3. Yaklaşımın Derecesi

Lineer operatörler dizisinin f sürekli fonksiyonuna yakınsama oranını veya yaklaşım derecesinin hata miktarını belirleme yöntemlerinden biri süreklilik modülünü kullanmaktır.

2.6.Tanım (Süreklilik Modülü)

$< a,b >$ ifadesi $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $(-\infty,\infty)$, $(-\infty,b)$, (a,∞) aralıkların dan birini göstersin. $\omega\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}^+\cup\{\infty\}$ olup, $x,y\in< a,b >$ için $\delta>0$ olmak üzere,

$$\omega(f,\delta)=\sup_{|x-y|\le\delta}|f(x)-f(y)| \tag{2.2}$$

değerine *f* nin süreklilik modülü denir. $\omega(f,\delta)$ yerine $\omega(\delta)$ veya $\omega_f(\delta)$ gösterimleri de kullanılabilir $[2,14]$.

2.1. Lemma

f, $< a,b >$ da sürekli olsun. Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) $\omega(f;\delta)\ge 0$

(ii) $\delta_1\le\delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1)\le\omega(f;\delta_2)$

(iii) $m\in\mathbb{N}$ için $\omega(f;m\delta)\le m\omega(f;\delta)$

(iv) $\lambda\in\mathbb{R}^+$ için $\omega(f;\lambda\delta)\le(1+\lambda)\omega(f;\delta)$

(v) f nin herhangi $I\subset\mathbb{R}$ alt aralığında düzgün sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{\delta\to 0}\omega(f;\delta)=0$ olmasıdır.

(vi) $|f(t)-f(x)|\le\omega(f;|t-x|)$

(vii) $|f(t)-f(x)|\le\left(1+\frac{|t-x|}{\delta}\right)\omega(f,\delta)$

2.2. Teorem

(L_n), $C[a,b]$ den $C[c,d]$ ye lineer pozitif operatörler dizisi ve $[c,d] \subseteq [a,b]$ olsun. $x \in [c,d]$ ve $f \in C[a,b]$ için

$$\begin{aligned} |L_n(f,x) - f(x)| & \\ &\leq |f(x)||L_n(1;x) - 1| \\ &+ \left(L_n(1;x) + \big(L_n(1;x)\big)^{1/2}\right)\omega\big(f, \alpha_n(x)\big) \end{aligned} \tag{2.3}$$

dir. Burada $\alpha_n^2(x) = L_n((t-x)^2;x)$ dir [2,14].

3. BERNSTEİN-STANCU VE KANTOROVICH-STANCU POLİNOMLAR DİZİSİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Weierstrass teoremi $[a, b]$ da sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak bir (P_n) polinom dizisinin var olduğunu ifade eder.

Bu teoremin ispatını sağlayan ilk polinomlardan biri Bernstein tarafından 1912 yılında tanımlanmıştır [2,6].

Bernstein polinomları; olasılık teorisi, nümerik analiz gibi matematiğin bazı alanlarındaki öneminin yanı sıra elde ediliş tekniği ve lineer pozitif operatör olması nedeni ile yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahiptir.

Bernstein polinomları yardımı ile elde edilen diğer yaklaşım operatörleri Schurer, Stancu polinomları, Kantorovich polinomları, q-Bernstein polinomları ve bazı genelleştirmeleridir.

3.1. Bernstein Polinomlar Dizisinin Düzgün Yakınsaklığı

3.1. Tanım

Her $x \epsilon [0,1]$ ve her $f \epsilon C[0,1]$ için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \quad P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlı olan polinomlara Bernstein polinomları denir.

Açık olarak, Bernstein polinomu $C[0,1]$ den $C[0,1]$ e bir lineer pozitif operatördür ve (B_n) polinomlar dizisi için Korovkin teoremi sağlanır.

Gerçekten;

$e_k(t) = t^k$; $k = 0,1,2$, t bir parametre, her $x \in [0,1]$ olmak üzere

$B_n(e_0; x) = 1,$

$B_n(e_1; x) = x,$

$$B_n(e_2; x) = x^2 + \frac{(1-x)x}{n}$$

bulunur. Buradan

$\lim_{n\to\infty} \|B_n(e_k) - e_k\|_{C[0,1]} = 0$; $k = 0,1,2$

olduğundan $[0,1]$ aralığı üzerinde her $f \epsilon C[0,1]$ için

$\lim_{n\to\infty} \|B_n(f) - f\|_{C[0,1]} = 0$

dir.

3.1. Teorem

Her $x\epsilon[0,1]$, her $f\epsilon C[0,1]$ ve $B_n: C[0,1] \to C[0,1]$ için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

olarak tanımlanan Bernstein polinomu için Teorem 2.2 den

$$|B_n(f; x) - f(x)| \le \frac{3}{2}\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

dir. Yani Bernstein polinomunun $f\epsilon C[0,1]$ fonksiyonuna yaklaşım derecesi en fazla $\frac{1}{\sqrt{n}}$ dir [2,6].

3.2. Bernstein-Stancu Polinomlar Dizisinin Düzgün Yakınsaklığı

Bernstein operatörlerinin bir genelleştirmesi olan reel değişkenli Bernstein-Stancu polinomları 1969 yılında Stancu tarafından tanımlanmıştır [15].

3.2. Tanım

$0 \leq \alpha \leq \beta, \quad \alpha, \beta \quad n$'den bağımsız sabitler, $f: C[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu için

$$B_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right), \quad P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlı olan polinoma Bernstein-Stancu polinomu denir [15].

Stancu, $\alpha = \beta = 0$ özel durumu Bernstein polinomuna karşılık gelen (3.2) polinomunun yaklaşım özelliklerini incelemiştir [10]. $B_n^{(\alpha,\beta)}$ polinomlarının $f\epsilon C[0,1]$ fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı ve Bernstein polinomları için verilen Voronovskaja teoreminin bir genelleştirmesini elde etmiştir.

Bazı basit hesaplamalar ile$\left(B_n^{(\alpha,\beta)}\right)$ dizisinin $f\epsilon C[0,1]$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını Korovkin teoremi yardımı ile görebiliriz.

$e_k(t) = t^k$; $\;k = 0,1,2$, t bir parametre, her $x\epsilon[0,1]$ olmak üzere

$$B_n^{(\alpha,\beta)}(e_0;x) = 1$$

$$B_n^{(\alpha,\beta)}(e_1;x)=\frac{1}{n+\beta}(x+\alpha)$$

$$B_n^{(\alpha,\beta)}(e_2;x)=\frac{1}{(n+\beta)^2}(n^2x^2+nx(1-x)+2n\alpha x+\alpha^2)$$

bulunur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n^{(\alpha,\beta)}(e_k)-e_k\right\|_{C[0,1]}=0\,;\quad k=0,1,2$$

olduğundan Korovkin teoremi gereğince $[0,1]$ aralığı üzerinde her $f\,\epsilon\, C[0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n^{(\alpha,\beta)}(f)-f\right\|_{C[0,1]}=0$$

dır.

Aşağıdaki teorem $\left(B_n^{(\alpha,\beta)}\right)$ nin f ye yaklaşım derecesini verir.

3.2. Teorem

$0\le\alpha\le\beta,\;\; \alpha,\beta \;\; n$ den bağımsız sabitler, $f\in C[0,1]$ olmak üzere

$$B_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)=\sum_{k=0}^{n}P_{n,k}(x)f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)$$

olarak tanımlı Bernstein-Stancu polinomu için Teorem 2.2 den

$$\left|B_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)-f(x)\right|\le 2\omega_f\left(\delta_n^{(\alpha,\beta)}\right)$$

dir. Yani Bernstein-Stancu polinomunun $f \in C[0,1]$ fonksiyonuna yaklaşım derecesi $\delta_n^{(\alpha,\beta)}$ ile belirlenir. Burada

$$\delta_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{n+\beta}\left(\frac{n}{4}(1+2\beta) + \left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)^2\right)^{1/2}$$

ve $n \to \infty$ için $\delta_n^{(\alpha,\beta)} \to 0$ dir [2].

3.1. Lemma

Eş. 3.2 ile verilen Bernstein-Stancu polinomunu

$$B_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \Delta^p_{1/(n+\beta)} f\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right) e_p(z)$$

olarak yazılabilir.

İspat

$$B_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)$$

polinomunun *x* e göre türevini alırsak

$$\left(B_n^{(\alpha,\beta)}\right)'(f;x)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (n-k) x^{k}(1-x)^{n-k-1} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} k x^{k-1}(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} (n-k) x^{k}(1-x)^{n-k-1} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} x^{k}(1-x)^{n-k-1} f\left(\frac{k+\alpha+1}{n+\beta}\right)$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} x^{k}(1-x)^{n-k-1} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{k+\alpha+1}{n+\beta}\right) - f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)\right] \binom{n-1}{k} x^{k}(1-x)^{n-k-1} \quad (3.3)$$

Benzer işlemlerle 2. türev alınırsa

$$\left(B_n^{(\alpha,\beta)}\right)''(f;x)$$

$$= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \left[f\left(\frac{k+\alpha+2}{n+\beta}\right) - 2f\left(\frac{k+\alpha+1}{n+\beta}\right)\right.$$

$$\left. + f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right)\right] \binom{n-2}{k} x^{k}(1-x)^{n-k-2}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$\Delta^{p}_{1/(n+\beta)} f(x) = f\left(x + \frac{p}{n+\beta}\right) - \binom{p}{1} f\left(x + \frac{p-1}{n+\beta}\right) + \cdots + (-1)^{p} f(x)$$

olmak üzere

$$\left(B_n^{(\alpha,\beta)}\right)^{(p)}(f;x)$$

$$= n(n-1)\dots(n-p+1)\left[\Delta^p_{1/(n+\beta)} f\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right)(1-x)^{n-p}\right.$$

$$\left. + \Delta^p_{1/(n+\beta)} f\left(\frac{\alpha+1}{n+\beta}\right)\binom{n-p}{1} x(1-x)^{n-1-p} + \cdots\right]$$

bulunur. $x = 0$ alınırsa

$$\left(B_n^{(\alpha,\beta)}\right)^{(p)}(f;0) = n(n-1)\dots(n-p+1)\Delta^p_{1/(n+\beta)} f\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right) \tag{3.4}$$

olur. $B_n^{(\alpha,\beta)}$ polinomunun Maclaurin açılımı ve Eş. 3.4 birlikte düşünülürse

$$B_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{\left(B_n^{(\alpha,\beta)}\right)^{(p)}(0)}{p!} x^p = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \Delta^p_{1/(n+\beta)} f\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right) x^p \tag{3.5}$$

elde edilir. Burada $a_{n,p} = \binom{n}{p} \Delta^p_{1/(n+\beta)} f\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right)$ denilirse

$$a_{n,p} = \frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)\frac{\Delta^p_{1/(n+\beta)} f\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right)}{(\Delta x)^p}, \quad \Delta x = \frac{1}{n}$$

olur. Eğer *f* türevlenebilir ise $n \to \infty$ için $a_{n,p}$ ifadesi $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ a yakınsar. Dolayısıyla Eş. 3.5 in sağ tarafı *f* fonksiyonunun Maclaurin seri açılımının ilk $(n+1)$ terimidir.

3.3. Kantorovich Polinomlar Dizisinin Düzgün Yakınsaklığı

İntegrallenebilir fonksiyonlara lineer operatörlerle yaklaşmak için tanımlanan ilk operatör Kantorovich operatörüdür. Bu operatör Bernstein polinomunun türevi yardımıyla elde edilir.

$F(x) = \int_0^x f(t)dt \,, f \in L_1$

$F'(x) = f(x)$ olsun.

Her $f \in C[0,1]$ ve her $x \in [0,1]$ olmak üzere

$$B_n(F;x) = \sum_{k=0}^{n} F\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(x), \quad P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

olarak tanımlanan Bernstein polinomunun *x* değişkenine göre türevi alınırsa

$$B_n'(F;x) = n \sum_{k=0}^{n-1} P_{n-1,k}(x) \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt$$

elde edilir. Buna göre aşağıdaki tanımı verebiliriz.

3.3. Tanım

Her $x \in [0,1]$ ve her $f \in L_1[0,1]$ için $P_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ olmak üzere

$$K_n(f;x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) \int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t)dt \qquad (3.6)$$

olarak tanımlanan polinoma Kantorovich polinomu denir [2].

K_n, $L_1[0,1]$ den $C[0,1]$ e bir lineer pozitif operatördür.

(K_n) polinomlar dizisi için Korovkin teoremi sağlanır.

Önce $e_k(t) = t^k$; $k = 0,1,2$ test fonksiyonları için $K_n(e_k)$ değerlerini yazalım. Basit hesaplamalar ile

$$K_n(e_0; x) = 1$$

$$K_n(e_1; x) = \frac{1}{n+1}\left(nx + \frac{1}{2}\right)$$

$$K_n(e_2; x) = \frac{1}{(n+1)^2}\left(n(n-1)x^2 + 2nx + \frac{1}{3}\right)$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} K_n(e_k; x) = e_k(x)$$

olup her $x \in [0,1]$, hem $f \in C[0,1]$ hem de $p \geq 1$ olmak üzere $f \in L_p[0,1]$ için

$$K_n(e_k; x) \to e_k(x)$$

dir.

Korovkin teoremi gereğince her $f \in C[0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|K_n(f) - f\|_{C[0,1]} = 0$$

dir. Aynı zamanda $p \geq 1$ olmak üzere her $f \in L_p[0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} K_n(f;x) = f(x)$$

dir [2].

Şimdi Kantorovich polinomu için süreklilik modülü ile yaklaşım derecesini yazalım.

3.3. Teorem

Her $x \in [0,1]$, her $f \in L_1[0,1]$ verildiğinde

$$K_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) \int_{k/n+1}^{(k+1)/n+1} f(t)dt$$

olarak tanımlı Kantorovich polinomu için

$$|K_n(f;x) - f(x)| \leq 2w_f(\delta_n)$$

eşitsizliği sağlanır. Yani Kantorovich polinomunun her $f \in L_1[0,1]$ fonksiyonuna yaklaşım derecesi δ_n olup, burada

$$\delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

dir.

3.4. Kantorovich-Stancu Polinomlar Dizisinin Düzgün Yakınsaklığı

Şimdi Kantorovich polinomunun bir genelleştirmesi olan Kantorovich-Stancu polinomunun yaklaşım özelliklerini inceleyeceğiz.

3.4. Tanım

$0 \leq \alpha \leq \beta,\ \ \alpha, \beta\ \ \ n$'den bağımsız sabitler, $f \in L_1[0,1]$ olmak üzere

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) = (n+\beta+1)\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(x) \int_{\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}} f(t)dt \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlı olan polinoma Kantorovich-Stancu polinomu denir [17].

$K_n^{(\alpha,\beta)}$, $L_1[0,1]$ den $C[0,1]$ e bir lineer pozitif operatördür.

$\left(K_n^{(\alpha,\beta)}\right)$ polinomlar dizisi için Korovkin teoremi sağlanır.

t bir parametre, $e_k(t) = t^k$; $\ k = 0,1,2$ test fonksiyonları için

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(e_0;x) = 1$$

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(e_1;x) = \frac{1}{n+\beta+1}\left(nx + \frac{2\alpha+1}{2}\right)$$

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(e_2;x) = \frac{1}{(n+\beta+1)^2}\left(n(n-1)x^2 + 2n(\alpha+1)x + \alpha(\alpha+1) + \frac{1}{3}\right)$$

bulunur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} K_n^{(\alpha,\beta)}(e_k;x) = e_k(x)$$

olup $x \in [0,1]$, hem $f \in C[0,1]$ hem de $p \geq 1$ olmak üzere $f \in L_p[0,1]$ için

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(e_k;x) \to e_k(x)$$

dir.

Korovkin teoremi gereğince her $f \in C[0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| K_n^{(\alpha,\beta)}(f) - f \right\|_{C[0,1]} = 0$$

dir. Aynı zamanda $p \geq 1$ olmak üzere her $f \in L_p[0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty} K_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) = f(x)$$

dir.

Şimdi Kantorovich-Stancu polinomu için süreklilik modülü ile yaklaşım derecesini yazalım.

3.4. Teorem

Her $x \in [0,1]$, her $f \in L_1[0,1]$ için (3.7) ile tanımlı Kantorovich-Stancu polinomu için

$$\left| K_n^{(\alpha,\beta)}(f;x) - f(x) \right| \leq 2w_f\left(\delta_n^{(\alpha,\beta)}\right)$$

dir. Yani Kantorovich-Stancu polinomunun $f \in L_1[0,1]$ fonksiyonuna yaklaşım derecesi δ_n olup, burada

$$\delta_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{\left((\alpha-\beta)(\alpha-\beta-1)+\frac{1}{3}\right)^{1/2}}{n+\beta+1}$$

dir.

4. KOMPLEKS BERNSTEIN-STANCU VE KOMPLEKS KANTOROVICH-STANCU POLİNOMLAR DİZİSİNİN KOMPAKT DİSK ÜZERİNDE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümün ilk kısmında analitik fonksiyonlara ilişkin kompleks Bernstein-Stancu polinomlarının tam yakınsaklık oranı incelenecektir. Bunun için operatör dizisinin kompakt disklerde analitik fonksiyona yakınsaklık oranı, Voronovskaja tip asimptotik yaklaşım sonucu yardımı ile üst yakınsama sınırı verilecek benzer sonuçlar eş anlı yakınsaklık için ifade edilecektir. İkinci kesimde ise benzer sonuçlar kompleks Bernstein-Stancu-Kantorovich polinomları için gösterilecektir.

Bu bölümde Gal in [11], [17] eserleri incelenmiştir.

4.1. Kompleks Analizde Yardımcı Teoremler

Bu kısımda daha sonra vereceğimiz teoremlerin ispatlarında gerek duyacağımız kompleks analizin bazı önemli teoremlerini ispatsız olarak hatırlatalım.

4.1. Teorem (Vitali Teoremi)

Ω, $\mathbb{C}$ de bir bölge ve $F \subset \Omega$, Ω da en az bir yığılma noktasına sahip küme olsun. Ω da analitik olan fonksiyonların dizisi (f_n), Ω da sınırlı ve her $z \in F$ için $\big(f_n(z)\big)$ yakınsak ise bu durumda (f_n), Ω nın her kompakt alt kümesinde düzgün yakınsaktır. Bu çalışmada $\Omega = \mathrm{D_R} = \{\mathrm{z} \in \mathbb{C}: |z| < R, R > 1\}$ olarak, kompakt alt kümeleri $D_r = \{\mathrm{z} \in \mathbb{C}: |z| \leq r, 1 \leq r < R\}$ olarak alacağız. F, D de kalan bir doğru parçasıdır [11].

Kompleks analizin önemli sonuçlarından biri olan Cauchy formülünü hatırlayalım.

4.2. Teorem

$r > 0$ ve $f: \overline{D_r} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu D_r de analitik, $\overline{D_r}$ de sürekli olsun, $|z| < r$ ve Γ, $|z| < r$ nin sınırı olmak üzere her $p \in \{0,1,\ldots\}$ için

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(u)}{(u-z)^{p+1}}\,du$$

dir [11].

4.3. Teorem

$G \subset \mathbb{C}$ bir açık küme olsun. Eğer G üzerinde analitik fonksiyonların dizisi (f_n), f analitik fonksiyonuna yakınsak ve G nin her bir kompakt alt kümesinde düzgün yakınsak ise her $p \in \mathbb{N}$ için $\left({f_n}^{(p)}\right)$, p. türev dizisi, G nin kompakt alt kümelerinde $f^{(p)}$ ye düzgün yakınsaktır.

Bu çalışmada genellikle $R > 1$ için $G = D_R$ ve G de kompakt alt kümeler $1 \leq r < R$ olmak üzere D_r olarak alınmaktadır [11].

4.4.Teorem

Eğer $\Omega \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölge ve $f: \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, Ω de analitik ve $\overline{\Omega}$ da sürekli ise Ω nin sınırı Γ olmak üzere

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{|f(z)| : z \in \Gamma\}$$

dir [11].

4.5. Teorem (Özdeşlik Teoremi)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve f, g Ω de birer analitik fonksiyon olsun. $\{z \in \Omega: f(z) = g(z)\}$

kümesinin Ω da bir yığılma noktası varsa bu durumda Ω nın tamamında $f \equiv g$ dir [11].

Son olarak kompleks polinomlar için kompakt disk üzerinde Bernstein eşitsizliğini verelim.

4.6.Teorem

$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{C}$, her $k \in \{0,1,2,\dots\}$ ve $r > 0$ için

$\|P_n\|_r = \max\{|P_n(z)|: |z| \leq r\}$

olsun.

i) Her $|z| \leq 1$ için $|P_n'(z)| \leq n\|P_n\|_r$

ii) $r > 0$ ise her $|z| \leq r$ için $|P_n'(z)| \leq \frac{n}{r}\|P_n\|_r$

dir [8,11].

4.2. Kompleks Bernstein Polinomlar Dizisinin Yaklaşım Özellikleri

Bu kısımda kompleks Bernstein polinomlar dizisinin analitik bir fonksiyona düzgün yakınsaklık ve yakınsama oranını ifade eden teoremleri verilerek, benzer sonuçlar kompleks Bernstein-Stancu polinomlar dizisi için Gal in [18] eserinden incelenecektir.

4.1. Tanım

$D_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R, R > 1\}$, $A(D_R) = \{f \mid f: D_R \to \mathbb{C} \text{ analitik}\}$, $z \in \mathbb{C}$, $f \in A(D_R)$ olmak üzere

$$B_n(f;z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{4.1}$$

polinomuna f analitik fonksiyonuna ilişkin kompleks Bernstein polinomu denir [6,11].

4.7. Teorem

$0 \le a \le 1, R \ge a, R \ge 1-a$ olmak üzere $[0,1]$ aralığını içeren $|z-a| \le R$ de $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ analitik olsun. Bu durumda $|z-a| \le R$ üzerinde $\lim_{n\to\infty} B_n(f;z) = f(z)$ dir. Yani kompleks Bernstein polinomu, $f(z)$ ye $|z-a| \le R$ de düzgün yakınsaktır.

İspat

Vitali teoreminden yararlanarak ispatı verelim. $f(z)$, $|z-a| \le R$ de analitik olduğundan $M = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| R_1^k$ sonlu olacak şekilde $R_1 > R$ vardır. Bernstein polinomu $[0,1]$ aralığında f ye düzgün yakınsaktır. Teorem 4.1 den $|z-a| \le R_1$ de $B_n(f;z)$ polinomunun sınırlı olduğunu göstermemiz yeterli olur. Yani $|z-a| \le R_1$ için $|B_n(f;z)| \le M$ olduğunu göstermeliyiz. $\phi_k(z) = (z-a)^k$ ve $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ olduğundan

$$B_n(f;z) = \sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right) P_{n,\nu}(z) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{\nu}{n} - a\right)^k P_{n,\nu}(z)$$

olup

$$\pi_k(z) = B_n(\phi_k; z) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left(\frac{\nu}{n} - a\right)^k z^\nu (1-z)^{n-\nu}$$

alırsak, $B_n(f; z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \pi_k(z)$ olduğundan $|z-a| \le R_1$ için

$$|\pi_k(z)| \le R_1^k \tag{4.2}$$

olduğunu göstermeliyiz. $\pi_k(z)$ den üretilmiş $\Phi(u,z)$ fonksiyonunu yazarsak

$$\begin{aligned}
\Phi(u,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\ \pi_k(z) u^k &= \sum_{\nu=0}^{n} P_{n,\nu}(z) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\nu}{n} - a\right)^k \frac{u^k}{k!} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} z^\nu (1-z)^{n-\nu} e^{(\nu - an)un^{-1}} \\
&= \left(ze^{(1-a)un^{-1}} + (1-z)e^{-aun^{-1}}\right)^n \qquad (4.3) \\
&= \left(z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left((1-a)un^{-1}\right)^k}{k!} + (1-z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-aun^{-1})^k}{k!}\right)^n \\
&= \left(1 + \frac{z-a}{n} u + \cdots + (z(1-a)^k + (1-z)(-a)^k) \frac{u^k}{k!\, n^k} + \cdots\right)^n
\end{aligned}$$

olup $|z-a| \ge a$, $|z-a| \ge 1-a$ ise

$$|z(1-a)^k + (1-z)(-a)^k| \le |z-a|^k \tag{4.4}$$

olduğunu göstermeliyiz. $a \le 1-a$ olduğunu kabul edersek $a \le \frac{1}{2}$ ve $k \ge 1$ olur ve (4.4) de $\nu = z - a$ alarak

$$\begin{aligned}
&|\nu|^k - |\nu((1-a)^k - (-a)^k) + a(1-a)((1-a)^{k-1} - (-a)^{k-1})| \ge 0, \\
&\qquad |\nu| \ge 1-a
\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz.

$(1-a)^k-(-a)^k>0$ ve $(1-a)^{k-1}-(-a)^{k-1}>0$ dir. Yani (4.4) eşitsizliği

$$\mathrm{g}(\nu)=\nu^k-\nu((1-a)^k-(-a)^k)-a(1-a)((1-a)^{k-1}-(-a)^{k-1})\geq 0,$$
$$\nu\geq 1-a$$

eşitsizliğinden elde edilir. Burada $\mathrm{g}(1-a)=0$ ve

$$\mathrm{g}'(\nu)=k\nu^{k-1}-(1-a)^k+(-a)^k\geq(1-a)^{k-1}-(1-a)^k+(-a)^k\geq 0,\nu\geq 1-a$$

dir.

Eğer $|z-a|=R_1$ ise (4.4) eşitsizliği, (4.3) denkleminin son satırında verilen kuvvet serilerindeki u^k nın katsayılarının

$$\sum\frac{(R_1u)^kn^{-k}}{k!}=e^{R_1un^{-1}}$$

olduğunu gösterir. Bu ise $\Phi(u,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\ \pi_k(z)u^k$ denklemindeki u^k nin katsayılarının mutlak değerinin $\left(e^{R_1un^{-1}}\right)^n=e^{R_1u}$ denklemindeki katsayıları aşamadığını gösterir.

Aşağıdaki teorem, kompleks Bernstein polinomları için eş anlı yaklaşımda yakınsaklık oranına ilişkin bir sonuç vermektedir.

4.8. Teorem

$D_R=\{z\in\mathbb{C}:|z|<R,R>1\}$ olmak üzere $f:D_R\to\mathbb{C}$ olarak tanımlanan f fonksiyonu analitik olsun. Bu durumda

$i)1\leq r<R,$ her $|z|\leq r$ ve $n\in\mathbb{N}$ için

$$|B_n(f,z) - f(z)| \leq \frac{C_r(f)}{n}$$

$ii)$ $1 < r < r_1 < R$ keyfi sabiti, her $|z| \leq r$ ve $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\left|B_n^{(p)}(f;z) - f^{(p)}(z)\right| \leq \frac{C_{r_1}(f)p!\,r_1}{n(r_1 - r)^{p+1}}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Burada

$$0 < C_r(f) = \frac{3r(r+1)}{2}\sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)\left|c_j\right| r^{j-2} < \infty$$

dir [11].

Aşağıda Gal tarafından verilmiş olan kompleks Bernstein polinomu için Voronovskaja teoremini ifade edeceğiz.

4.9. Teorem

$D_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R, R > 1\}$, $f: D_R \to \mathbb{C}$ analitik olsun. Bu durumda

$$B_n(f;z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

kompleks Bernstein polinomu için

i)Kapalı birim diskte her $z \in D_R, n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|B_n(f;z) - f(z) - \frac{z(1-z)}{2n} f''(z)\right| \leq \frac{|z(1-z)|}{2n} \frac{10M(f)}{n}$$

sağlanır. Burada

$$0 < M(f) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)^2|c_k| < \infty$$

dir.

ii) $r \in [1,R)$ olsun. Her $|z| \leq r, n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|B_n(f;z) - f(z) - \frac{z(1-z)}{2n} f''(z)\right| \leq \frac{5(1+r)^2}{2n} \frac{M_r(f)}{n}$$

dir. Burada

$$M_r(f) = \sum_{k=3}^{\infty} |c_k| k(k-1)(k-2)^2 r^{k-2} < \infty$$

dir [17].

4.3. Kompleks Bernstein-Stancu Polinomlar Dizisinin Yaklaşım Özellikleri

Bu kısım Gal in [11] ve [18] eserlerinin incelenmesidir. Bu kısımda Bernstein-Stancu polinomlarının analitik f fonksiyonuna yakınsama ve eş anlı yakınsama oranları verilecektir. Ayrıca Voronovskaja tip teorem ifade edilerek asimptotik yaklaşım oranı belirlenecek, buradan tam yakınsama oranı elde edilecektir.

4.2. Tanım

$z \in \mathbb{C}$, $0 \leq \alpha \leq \beta$ sabitler $f \in A(D_R)$ olmak üzere

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(f;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right) \tag{4.5}$$

polinomuna kompleks Bernstein-Stancu polinomu denir [11].

4.10. Teorem

$D_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R, R > 1\}$, $f: D_R \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon, $0 \leq \alpha < \beta$ olsun.
i) $1 \leq r < R$ olmak üzere her $|z| \leq r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|S_n^{(\alpha,\beta)}(f;z) - f(z)\right| \leq \frac{M_{2,r}^{(\beta)}(f)}{n+\beta}$$

dir. Burada

$$0 < M_{2,r}^{(\beta)}(f) = 2r^2 \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)\left|c_j\right| r^{j-2} + 2\beta r \sum_{j=1}^{\infty} j\left|c_j\right| r^{j-1} < \infty$$

dir.

ii) $1 \leq r < r_1 < R$, her $|z| \leq r$ ve $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\left[S_n^{(\alpha,\beta)}(f)\right]^{(p)}(z) - f^{(p)}(z)\right| \leq \frac{M_{2,r_1}^{(\beta)}(f) p!\, r_1}{(n+\beta)(r_1 - r)^{p+1}}$$

dir. Burada $M_{2,r_1}^{(\beta)}$, $M_{2,r}^{(\beta)}$biçimindedir.

İspat

i) $e_k(z) = z^k$ dersek *f*, D_R de analitik olduğundan her $z \in D_R$ için

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k=\sum_{k=0}^{\infty} c_k e_k(z)$$

yazılır. f fonksiyonuna $S_n^{(\alpha,\beta)}$ yı uygularsak

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(f;z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k S_n^{(\alpha,\beta)}(e_k;z)$$

olup

$$\left|S_n^{(\alpha,\beta)}(f;z)-f(z)\right|\leq\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|\left|S_n^{(\alpha,\beta)}(e_k;z)-e_k(z)\right|$$

yazılabilir.

Her $n\in\mathbb{N}$ için $\left|S_n^{(\alpha,\beta)}(e_k;z)-e_k(z)\right|$ ifadesinin üst sınırını belirlemek için (i) $0\leq k\leq n$ ve (ii) $k>n$ durumları dikkate alınacaktır.

p. mertebeden sonlu fark operatörü ile $S_n^{(\alpha,\beta)}(f;z)$ yi yeniden ifade edersek

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(f;z)=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\Delta^p_{1/(n+\beta)} f\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right)e_p(z)$$

elde ederiz.

1. Durum: $0\leq k\leq n$ olması halinde $k=0$ için $\left|S_n^{(\alpha,\beta)}(e_k;z)-e_k(z)\right|=0$ olduğu açıktır. Bu nedenle $1\leq k\leq n$ olma durumunu inceleyeceğiz.

$$C_{n,p,k}^{(\alpha,\beta)}=\binom{n}{p}\Delta^p_{1/(n+\beta)} e_k\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right)=\binom{n}{p}\left[\frac{\alpha}{n+\beta},\frac{\alpha+1}{n+\beta},\dots,\frac{\alpha+p}{n+\beta};e_k\right]\frac{p!}{(n+\beta)^p}$$

diyelim.

e_k konveks olduğundan

$$\left[\frac{\alpha}{n+\beta}, \frac{\alpha+1}{n+\beta}, \dots, \frac{\alpha+p}{n+\beta}; e_k\right] > 0$$

dir. O halde $C_{n,p,k}^{(\alpha,\beta)} \geq 0$ dir. $S_n^{(\alpha,\beta)}(f;z)$ nin terimlerini yazarsak

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(f;z) = \binom{n}{0}(1-z)^n f\left(\frac{\alpha}{n+\beta}\right) + \binom{n}{1} z(1-z)^{n-1} f\left(\frac{1+\alpha}{n+\beta}\right) + \cdots$$
$$+ \binom{n}{n} z^n f\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}\right)$$

olup $z = 1$ için $S_n^{(\alpha,\beta)}(f;1) = f\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}\right)$ dir.

Bu ifadeyi dikkate alırsak

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(e_k;1) = e_k\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}\right) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \Delta_{1/(n+\beta)}^{p} e_k(0) = \sum_{p=0}^{n} C_{n,p,k}^{(\alpha,\beta)} = \left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}\right)^k \leq 1$$

olduğu görülür.

Her $|z| \leq r, 1 \leq r < R$ için

$$
\begin{aligned}
\left|S_n^{(\alpha,\beta)}(e_k;z)-e_k(z)\right| &= \left|\sum_{p=0}^{k} C_{n,p,k}^{(\alpha,\beta)} e_p(z)-e_k(z)\right| \\
&= \left|\left[C_{n,k,k}^{(\alpha,\beta)}-1\right] e_k(z)+\sum_{p=0}^{k-1} C_{n,p,k}^{(\alpha,\beta)} e_p(z)\right| \\
&\leq \left[1-\frac{n(n-1)\ldots\big(n-(k-1)\big)}{(n+\beta)^k}\right] r^k \\
&+ \left[\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}\right)^k-\frac{n(n-1)\ldots\big(n-(k-1)\big)}{(n+\beta)^k}\right] r^k \\
&= 2\left[1-\frac{n(n-1)\ldots\big(n-(k-1)\big)}{(n+\beta)^k}\right] r^k+\left[\left(\frac{n+\alpha}{n+\beta}\right)^k-1\right] r^k \\
&\leq 2\left[1-\frac{n(n-1)\ldots\big(n-(k-1)\big)}{(n+\beta)^k}\right] r^k \\
&\leq \frac{1}{n+\beta}\left[2\beta k+k(k-1)\right] r^k
\end{aligned}
$$

yazabiliriz. Burada $0 \leq x_j \leq 1,\, j=1,2,\ldots,k$ için

$$
1-\prod_{j=1}^{k} x_j \leq \sum_{j=1}^{k}\left(1-x_j\right)
$$

eşitsizliğinden faydalandık.

2. Durum: $1 \leq r < R$, $|z| \leq r$ ve $k > n \geq 1$ için

$$
\begin{aligned}
\left|S_n^{(\alpha,\beta)}(e_k;z)-e_k(z)\right| &\leq \left|S_n^{(\alpha,\beta)}(e_k;z)\right|+r^k \leq \sum_{p=0}^{n} C_{n,p,k}^{(\alpha,\beta)} r^p+r^k \leq r^n+r^k \\
&\leq 2r^k \leq 2nr^k \leq 2(k-1)\frac{k+\beta}{n+\beta} r^k=\frac{2k(k-1)+2\beta(k-1)}{n+\beta} r^k \\
&\leq \frac{2k(k-1)+2\beta k}{n+\beta} r^k
\end{aligned}
$$

dir. Durum 1 ve Durum 2 yi birleştirirsek

$$\left|S_n^{(\alpha,\beta)}(f;z)-f(z)\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}|c_k|\frac{1}{n+\beta}[2\beta k+2k(k-1)]r^k$$
$$=\frac{1}{n+\beta}\left[2r^2\sum_{j=2}^{\infty}j(j-1)|c_k|r^{j-2}+2\beta r\sum_{j=1}^{\infty}j\left|c_j\right|r^{j-1}\right]=\frac{M_{2,r}^{(\beta)}(f)}{n+\beta}$$

sonucuna ulaşırız.

ii) Eş anlı yaklaşım için Γ, $r_1 > r$ yarıçaplı, 0 merkezli çemberi göstersin. Her $|z| \leq r$ ve $v \in \Gamma$ için $|\,v - z| \geq r_1 - r$ dir. Cauchy türev formülünden her $|z| \leq r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\left[S_n^{(\alpha,\beta)}(f)\right]^{(p)}(z)-f^{(p)}(z)\right| = \left|\frac{p!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{S_n^{(\alpha,\beta)}(f;\,v)-f(v)}{(\,v-z)^{p+1}}dv\right|$$
$$\leq \frac{p!}{2\pi}\int_{\Gamma}\frac{\left|S_n^{(\alpha,\beta)}(f;\,v)-f(v)\right|}{|v-z|^{p+1}}|dv| \leq \frac{p!}{2\pi}\frac{M_{2,r_1}^{(\beta)}(f)}{n+\beta}\frac{2\pi r_1}{(r_1-r)^{p+1}}$$
$$=\frac{M_{2,r_1}^{(\beta)}(f)}{n+\beta}\frac{p!\,r_1}{(r_1-r)^{p+1}}$$

elde edilir.

Hipotezden dolayı $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$ serisi $|z|\leq r,\ (1\leq r<R)$ için mutlak ve düzgün yakınsaktır. Böylece $f(z)$ ye karşılık gelen $\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$ serisinin 2 kez terim terim türevi alınırsa $f''(z)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_k z^{k-2}$ serisi de $|z|\leq r$ de düzgün yakınsak olur. Böylece $M_{2,r}$ serisi sonlu bir toplama sahiptir.

Aşağıdaki teoremde kompleks Stancu polinomları için Voronovskaja tip asimptotik yaklaşım oranı üzerine bir sonuç ifade edilecektir.

4.11. Teorem

$D_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R, R > 1\}$ ve $f: D_R \to \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon, $0 \leq \alpha < \beta$ sabitler olsun.

i) Her $|z| \leq 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|S_n^{(\alpha,\beta)}(f;z) - f(z) + \frac{\beta z - \alpha}{n+\beta} f'(z) - \frac{nz(1-z)}{2(n+\beta)^2} f''(z)\right|$$
$$\leq \frac{|z||1-z|}{(n+\beta)^2} M_1^{(\alpha,\beta)}(f) + \frac{M_2^{(\alpha,\beta)}(f)}{(n+\beta)^2}$$

dir. Burada

$$0 < M_1^{(\alpha,\beta)}(f) = \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| \left[\frac{9(k-1)^3(k-2)}{2} + \frac{(k-1)^2(k-2)^2}{2} + 4\beta(k-1)^3 \right.$$
$$\left. + \frac{3\beta(k-1)^2(k-2)}{2} + \frac{3\alpha(k-1)^2(k-2)}{2} + \beta k(k-1)^2(k-2)\right]$$
$$< \infty$$

$$0 < M_2^{(\alpha,\beta)}(f) = (\alpha+\beta)^2 \sum_{k=2}^{\infty} |c_k| \frac{k(k-1)}{2} < \infty$$

dir.

ii) $1 \leq r < R$ için

$$\left\|\left(S_n^{(\alpha,\beta)}(f) - f + \frac{\beta e_1 - \alpha}{n+\beta} f' - \frac{n e_1(1-e_1)}{2(n+\beta)^2} f''\right)\right\|_r \leq \frac{M_r^{(\alpha,\beta)}(f)}{(n+\beta)^2}$$

dir. Burada $M_r^{(\alpha,\beta)}(f) > 0$, *n* den bağımsız, *f*, *r*, α, β ya bağlı bir sabittir [18].

Şimdi vereceğimiz teoremle Teorem 4.10. da bulduğumuz $\frac{1}{n+\beta}$ yakınsaklık oranının aslında tam yakınsaklık oranı olduğunu göreceğiz.

4.12. Teorem

$0 \leq \alpha \leq \beta$, $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, R > 1\}$ ve $f: D_R \to \mathbb{C}$, D_R de analitik olsun. Eğer *f* derecesi 0 olmayan bir polinom ise $1 \leq r < R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| S_n^{(\alpha,\beta)}(f) - f \right\|_r \geq \frac{C_r^{(\alpha,\beta)}(f)}{n+\beta}$$

dir. Burada $C_r^{(\alpha,\beta)}(f)$ f, r, α, β ya bağlı sabittir.

İspat

Her $z \in D_R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için Teorem 4.11 (*ii*) dikkate alınarak

$$\begin{aligned} S_n^{(\alpha,\beta)}(f;z) - f(z) \\ &= \frac{1}{n+\beta}\Bigg[-(\beta z-\alpha)f'(z) + \frac{z(1-z)}{2}f''(z) \\ &+ \frac{1}{n+\beta}\Bigg[(n+\beta)^2\Bigg(S_n^{(\alpha,\beta)}(f;z) - f(z) + \frac{\beta z-\alpha}{n+\beta}f'(z) \\ &- \frac{nz(1-z)}{2(n+\beta)^2}f''(z)\Bigg) - \frac{\beta z(1-z)}{2}f''(z)\Bigg]\Bigg] \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\|F+G\|_r \geq \big|\|F\|_r - \|G\|_r\big| \geq \|F\|_r - \|G\|_r$$

bilindik eşitsizliği yukarıdaki eşitliğe uygulanırsa

$$\left\|S_n^{(\alpha,\beta)}(f)-f\right\|_r$$

$$\geq \frac{1}{n+\beta}\left[\left\|-(\beta e_1-\alpha)f'+\frac{e_1(1-e_1)}{2}f''\right\|_r\right.$$

$$-\frac{1}{n+\beta}\left[\left\|(n+\beta)^2\left(S_n^{(\alpha,\beta)}(f)-f+\frac{\beta e_1-\alpha}{n+\beta}f'-\frac{ne_1(1-e_1)}{2(n+\beta)^2}f''\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\beta e_1(1-e_1)}{2}f''\right\|_r\right]\right]$$

elde edilir. Teorem 4.11 (*ii*) den

$$\left\|(n+\beta)^2\left(S_n^{(\alpha,\beta)}(f)-f+\frac{\beta e_1-\alpha}{n+\beta}f'-\frac{ne_1(1-e_1)}{2(n+\beta)^2}f''\right)-\frac{\beta e_1(1-e_1)}{2}f''\right\|_r$$

$$\leq M_r^{(\alpha,\beta)}(f)+\beta\|f''\|_r$$

yazılır.

$$H(z)=-(\beta z-\alpha)f'(z)+\frac{z(1-z)}{2}f''(z)$$

$\|H\|_r>0$ olduğu gösterilirse f,α,β ya bağlı öyle bir n_0 sayısı bulunurki her $n\geq n_0$ için

$$\left\|S_n^{(\alpha,\beta)}(f)-f\right\|_r\geq\frac{1}{n+\beta}\frac{\|H\|_r}{2}$$

eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır.

$n\in\{1,2,\dots,n_0-1\}$ için

$$\left\| S_n^{(\alpha,\beta)}(f) - f \right\|_r \geq \frac{A_{n,r}^{(\alpha,\beta)}(f)}{n+\beta}$$

olup burada $A_{n,r}^{(\alpha,\beta)}(f) = (n+\beta)\left\| S_n^{(\alpha,\beta)}(f) - f \right\|_r > 0$ dir.

Bu ise $C_r^{(\alpha,\beta)}(f) = \min\left\{ \mathrm{A}_{1,r}^{(\alpha,\beta)}, \mathrm{A}_{2,r}^{(\alpha,\beta)}(f), \dots, \mathrm{A}_{n_0,r}^{(\alpha,\beta)}(f), \frac{\|H\|_r}{2} \right\}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| S_n^{(\alpha,\beta)}(f) - f \right\|_r \geq \frac{C_r^{(\alpha,\beta)}(f)}{n+\beta}$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla $\|H\|_r > 0$ olduğunu göstermemiz ispat için yeterlidir. $\|H\|_r = 0$ olduğunu kabul ederek aşağıdaki durumları inceleyelim:

Durum 1) $0 = \alpha < \beta$ ve her $|z| \leq r$ için $H(z) = -\beta z f'(z) + \frac{z(1-z)}{2} f''(z) = 0$ olsun. $y(z) = f'(z)$ dersek $y(z)$, D_R de analitiktir ve $-\beta f'(z) + \frac{(1-z)}{2} f''(z) = 0$ diferensiyel denkleminin çözümüdür. $|z| \leq r$ de $y(z)$ analitik olduğundan $y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ şeklinde yazılabilir. Bu ifade yerine yazılırsa $k = 0,1,2, \dots$ için $b_k = 0$ bulunur. Özdeşlik teoremi (4.5) gereğince D_R deki her z için $y(z) = 0$ olur. Bu ise *f* üzerindeki kabulümüze aykırıdır.

Durum 2) $0 < \alpha \leq \beta$ olmak üzere $y(z) = f'(z)$ dersek $f(z)$ D_R de analitik olduğundan $y(z)$ D_R de analitiktir ve her $|z| \leq r$ için $-(\beta z - \alpha) y(z) + \frac{z(1-z)}{2} y'(z) = 0$ diferensiyel denkleminin çözümüdür. $z = 0$ alırsak $\alpha y(0) = 0$ yani $y(0) = 0$ elde ederiz. $y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ ifadesi diferensiyel denkleminde yerine yazılırsa $k = 0,1,2, \dots$ için $b_k = 0$ bulunur. Bu ise f in sabit olması anlamına gelir. Bu ise *f* üzerindeki hipoteze aykırıdır.

Sonuç olarak $\|H\|_r > 0$ olmalıdır.

Teorem 4.10 ve Teorem 4.12 dikkate alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.1. Sonuç

$0 \leq \alpha \leq \beta$, $D_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R, R > 1\}$ ve $f: D_R \to \mathbb{C}$, analitik bir fonksiyon olsun. Eğer f derecesi 0 olmayan bir polinom ise $1 \leq r < R$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| S_n^{(\alpha,\beta)}(f) - f \right\|_r \sim \frac{1}{n+\beta}$$

dir [11].

Sonuçların Değerlendirilmesi

1. Teorem 4.10 de $\alpha = 0 = \beta$ alınırsa Teorem 4.8 de verilen Bernstein polinomları için yakınsaklık ve eşanlı yakınsaklık oranları elde edilir.

2. $\alpha = 0 = \beta$ alınması halinde Teorem 4.9, Teorem 4.11 in özel bir durumudur.

3. Teorem 4.12 ise $\alpha = 0 = \beta$ durumunda [11] de verilen kompleks Bernstein polinomları için tam yakınsama oranına ulaşılır.

Yani f D_R de analitik ve derecesi ≤ 1 olmayan bir polinom ise herhangi $r \in [1, R)$ için $\|B_n(f) - f\|_r \sim \frac{1}{n}$ dir.

4. Teorem 4.12 ve Teorem 4.10 (ii) nin ispat yöntemi dikkate alınarak kompleks Stancu polinomları için eş anlı yaklaşımda tam yakınsama oranının $\frac{1}{n+\beta}$ olduğu görülür. Daha açık olarak ; $R > 1$, $0 \leq \alpha \leq \beta$, $\alpha + \beta > 0$ ve $p \in \mathbb{N}$ sabit olsun. f, D_R de analitik ve derecesi $p - 1$ den küçük olmayan bir polinom ise bu durumda

$$\left\| \left[S_n^{(\alpha,\beta)}(f) \right]^{(p)} - f^{(p)} \right\|_r \sim \frac{1}{n+\beta}$$

dir.

4.4. Kompleks Kantorovich Polinomlar Dizisinin Yaklaşım Özellikleri

Bu kesimde kesim 4.3 de elde edilen sonuçları B_n polinomların Kantorovich formuna genelleştireceğiz.

4.3. Tanım

$z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$K_n(f;z) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(z) \int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t)dt \tag{4.6}$$

eşitliği ile verilen $K_n(f;z)$ polinomuna Kantorovich polinomu denir $[11]$. Kesim (3.3) deki reel durum için verilen sonuca benzer şekilde amacımız için yardımcı olacak aşağıdaki teoremi verelim.

4.13. Teorem

$F(z) = \int_0^z f(t)dt$ olsun. $B_n(f;z)$ kompleks Bernstein polinomu ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$K_n(f;z) = B'_{n+1}(F;z)$$

dir.

İspat

(4.1) ile verilen $B_n(f;z)$ polinomunda n yerine $n+1$ yazıp türev alırsak

$$B'_{n+1}(F:z) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\left[F\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - F\left(\frac{k}{n+1}\right)\right]\binom{n}{k} z^k(1-z)^{n-k}$$

$$= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\left[\int_0^{(k+1)/(n+1)} f(t)dt - \int_0^{k/(n+1)} f(t)dt\right]\binom{n}{k} z^k(1-z)^{n-k}$$

$$= (n+1)\sum_{k=0}^{n}\int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t)dt\binom{n}{k} z^k(1-z)^{n-k} = K_n(f;z).$$

4.14. Teorem

$D_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R, R > 1\}$, $f: D_R \to \mathbb{C}$ analitik, $1 \leq r < r_1 < R$ olsun. Her $|z| \leq r$ ve $n, p \in \mathbb{N}$ için

i)

$$\left|K_n^{(p)}(f;z) - f^{(p)}(z)\right| \leq \frac{C_{2,r_1}(f)(p+1)!\,r_1}{(n+1)(r_1-r)^{p+2}}$$

dir. Burada

$$0 < C_{2,r_1}(f) = 2\sum_{j=0}^{\infty}(j-1)\left|c_{j-1}\right| r_1^j < \infty$$

dir.

ii)

$$\left|K_n(f;z) - f(z) - \frac{1-2z}{2(n+1)}f'(z) - \frac{z(1-z)}{2(n+1)}f''(z)\right| \le C_{r_1,n+1}(f)\frac{r_1}{(r_1-r)^2}$$

dir. Burada

$$C_{r_1,n}(f) = \frac{5(1+r_1)^2}{2n}\frac{\sum_{k=3}^{\infty}|c_{k-1}|\,(k-1)(k-2)^2 r_1^{k-2}}{n}$$

dir [17].

Aşağıdaki sonuç kompleks Kantorovich polinomlarının eşanlı tam yakınsaklık oranını vermektedir.

4.2. Sonuç

$D_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R, R > 1\}$ $f: D_R \to \mathbb{C}$, D_R analitik, $R > 1$ ve $1 \le r < R$ için
i) Eğer *f* derecesi ≤ 0 olmayan bir polinom ise her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|K_n(f) - f\|_r \sim \frac{1}{n}$$

dir.

ii) Eğer *f* derecesi $\le \max\{1, p-1\}$ olmayan bir polinom ise her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|K_n^{(p)}(f) - f^{(p)}\right\|_r \sim \frac{1}{n}$$

dir.

4.5. Kompleks Kantorovich-Stancu Polinomlar Dizisinin Yaklaşım Özellikleri

Burada kesim (3.4) de reel durum için verilen Kantorovich-Stancu polinomlarının kompleks duruma bir genelleştirmesini tanımlayarak kesim 4.4 deki yakınsaklık oranına ilişkin sonuçları bu polinomlar için inceleyeceğiz.

4.4. Tanım

$0 \leq \alpha \leq \beta$ sabitler, $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(f;z) = (n+\beta+1)\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(z) \int_{(k+\alpha)/(n+\beta+1)}^{(k+\alpha+1)/(n+\beta+1)} f(t)dt \qquad (4.7)$$

olarak tanımlanan polinoma kompleks Kantorovich-Stancu polinomu denir.

4.15. Teorem

$F(z) = \int_0^z f(t)dt$ olsun. $S_n^{(\alpha,\beta)}(f;z)$ Eş. 4.5 ile verilen kompleks Bernstein-Stancu polinomu ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(f;z) = \frac{n+\beta+1}{n+1}\left[S_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(F)\right]'(z)$$

dir [17, 18].

İspat

$$\left[S_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(F)\right]'(z)$$

$$= (n+\beta+1)\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(z)\left[F\left(\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}\right) - F\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}\right)\right]$$

$$-\beta\sum_{k=0}^{n} P_{n,k}(z)\left[F\left(\frac{k+\alpha+1}{n+\beta+1}\right) - F\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta+1}\right)\right]$$

$$= K_n^{(\alpha,\beta)}(f)(z) - \frac{\beta}{n+\beta+1}K_n^{(\alpha,\beta)}(f)(z) = \frac{n+1}{n+\beta+1}K_n^{(\alpha,\beta)}(f)(z)$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem eşanlı yaklaşımda yakınsaklık oranını ve Voronovskaja tip asimptotik yaklaşım derecesini vermektedir.

4.16. Teorem

$D_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R, R > 1\}$, $f: D_R \to \mathbb{C}$ analitik, $1 \le r < r_1 < R$ olsun. Her $|z| \le r$ ve $n, p \in \mathbb{N}$ için

i)

$$\left|\left[K_n^{(\alpha,\beta)}(f)\right]^{(p)}(z) - f^{(p)}(z)\right| \le \frac{C_{2,r_1}^{(\beta)}(f)(p+1)!\, r_1}{(n+1)(r_1-r)^{p+2}} + \frac{\beta}{n+1}\|f\|_r$$

dir. Burada

$$0 < C_{2,r_1}^{(\beta)}(f) = 2\sum_{j=2}^{\infty}(j-1)|c_{j-1}|r_1^j + 2\beta\sum_{j=1}^{\infty}|c_{j-1}|r_1^j < \infty$$

dir.

ii)

$$\left|K_n^{(\alpha,\beta)}(f;z) - f(z) + \left(\frac{\beta z - \alpha}{n+1} - \frac{1-2z}{2(n+\beta+1)}\right) f'(z) - \frac{z(1-z)}{2(n+\beta+1)} f''(z)\right| \le \frac{C(f,r_1,\alpha,\beta)}{(n+1)(n+\beta+1)} \frac{r_1}{(r_1-r)^2}$$

dir. Burada $C(f,r_1,\alpha,\beta)$, f,r_1,α ve β ya bağlı pozitif bir sabittir [17].

İspat

i) Teorem 4.15. dan ve Teorem 4.10. *ii*) den

$$\begin{aligned}\left|\left[K_n^{(\alpha,\beta)}(f)\right]^{(p)}(z) - f^{(p)}(z)\right| &= \left|\frac{n+\beta+1}{n+1}\left[S_n^{(\alpha,\beta)}(F)\right]^{(p+1)}(z) - F^{(p+1)}(z)\right| \\ &\le \frac{n+\beta+1}{n+1}\left|\left[S_n^{(\alpha,\beta)}(F)\right]^{(p+1)}(z) - F^{(p+1)}(z)\right| + \frac{\beta}{n+1}\left|F^{(p+1)}(z)\right| \\ &\le \frac{n+\beta+1}{n+1}\frac{M_{2,r_1}^{(\beta)}(F)(p+1)!\,r_1}{(n+\beta+1)(r_1-r)^{p+2}} + \frac{\beta}{n+1}\left|f^{(p)}(z)\right| \\ &\le \frac{M_{2,r_1}^{(\beta)}(F)(p+1)!\,r_1}{(n+1)(r_1-r)^{p+2}} + \frac{\beta}{n+1}\left\|f^{(p)}\right\|_r\end{aligned}$$

yazılır. Burada $\left\|f^{(p)}\right\|_r = \sup\left\{\left|f^{(p)}(z)\right| : |z| < r\right\}$ olup $z \in D_R$ olmak üzere

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k z^k$$

ve

$$0 < M_{2,r_1}^{(\beta)}(f) = 2r_1^2 \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)\left|C_j\right| r_1^{j-2} + 2\beta r_1 \sum_{j=1}^{\infty} j\left|C_j\right| r_1^{j-1} < \infty$$

için

$$F(z)=\int_0^z\left[\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k\right]dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{k+1}z^{k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k-1}}{k}z^k$$

dir. Yani $C_k=\frac{c_{k-1}}{k}$ ve

$$0<C_{2,r_1}^{(\beta)}(f)=2\sum_{j=2}^{\infty}(j-1)|c_{j-1}|r_1^j+2\beta\sum_{j=1}^{\infty}|c_{j-1}|r_1^j<\infty$$

dir.

ii) Teorem 4.11. *ii*) de n yerine $n+1$, r yerine r_1 ve f yerine F alırsak, her $|z|\leq r_1$ ve $n\in\mathbb{N}$ için

$$\left|S_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(F)(z)-F(z)+\frac{\beta z-\alpha}{n+\beta+1}F'(z)-\frac{(n+1)z(1-z)}{2(n+\beta+1)^2}F''(z)\right|\leq\frac{C(f,r_1,\alpha,\beta)}{(n+\beta+1)^2}$$

yazılır.

$$E_n(F)(z)=S_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(F)(z)-F(z)+\frac{\beta z-\alpha}{n+\beta+1}F'(z)-\frac{(n+1)z(1-z)}{2(n+\beta+1)^2}F''(z)$$

diyelim.

Γ, 0 merkezli, $r_1>r$ yarıçaplı çember olsun. $|z|\leq r$ ve $v\in\Gamma$ için $|v-z|\geq r_1-r$ dir. Cauchy-Türev formülünden her $|z|\leq r$ ve $n\in\mathbb{N}$ için

$$|E_n'(F)(z)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_\Gamma\frac{E_n(f)(z)}{(v-z)^2}dv\right|=\frac{C(f,r_1,\alpha,\beta)}{(n+\beta+1)^2}\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi r_1}{(r_1-r)^2}$$
$$=\frac{C(f,r_1,\alpha,\beta)}{(n+\beta+1)^2}\frac{r_1}{(r_1-r)^2}$$

dir. Teorem 4.15. den

$$
\begin{aligned}
E_n'(F)(z) = \frac{n+1}{n+\beta+1} K_n^{(\alpha,\beta)}(f)(z) - f(z) + \frac{\beta}{n+\beta+1} f(z) + \frac{\beta z-\alpha}{n+\beta+1} f'(z) \\
- \frac{n+1}{2(n+\beta+1)^2}\left((1-z)f'(z) - zf'(z) + z(1-z)f''(z)\right) \\
= \frac{n+1}{n+\beta+1} K_n^{(\alpha,\beta)}(f)(z) - \frac{n+1}{n+\beta+1} f(z) \\
+ \left(\frac{\beta z-\alpha}{n+\beta+1} - \frac{(n+1)(1-2z)}{2(n+\beta+1)^2}\right) f'(z) - \frac{(n+1)z(1-z)}{2(n+\beta+1)^2} f''(z) \\
= \frac{n+1}{n+\beta+1}\left[K_n^{(\alpha,\beta)}(f)(z) - f(z)\right. \\
\left. + \left(\frac{\beta z-\alpha}{n+1} - \frac{1-2z}{2(n+\beta+1)}\right) f'(z) - \frac{z(1-z)}{2(n+\beta+1)} f''(z)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

4.3. Sonuç

$R > 1$ olmak üzere $f: D_R \to \mathbb{C}$, D_R de analitik, $1 \le r < R$ ve $0 \le \alpha \le \beta$, $\alpha + \beta > 0$ için

i) Eğer *f* özdeş olarak 0'dan farklı ise bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$
\left\| K_n^{(\alpha,\beta)}(f) - f \right\|_r \sim \frac{1}{n+\beta}
$$

dir.

ii) Eğer *f* derecesi $\le p-1$ olmayan bir polinom ise her $n, p \in \mathbb{N}$ için

$$
\left\| \left[K_n^{(\alpha,\beta)}(f)\right]^{(p)} - f^{(p)} \right\|_r \sim \frac{1}{n+\beta}
$$

dir.

İspat

Teorem 4.15. ve Sonuç 4.1. den

i)

$$\left\|K_n^{(\alpha,\beta)}(f)-f\right\|_r=\left\|\left[S_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(F)\right]'-F'\right\|_r\sim\frac{1}{n+\beta}$$

elde edilir.

ii)

$$\left\|\left[K_n^{(\alpha,\beta)}(f)\right]^{(p)}-f^{(p)}\right\|_r=\left\|\left[S_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(F)\right]^{(p+1)}-F^{(p+1)}\right\|_r\sim\frac{1}{n+\beta}$$

elde edilir.
Belirtelim ki *i*) ve *ii*) de sonucu etkileyen sabitler Teorem 4.16 ile bağlantılı olup *f*, *r*, α, β ve p ye bağlıdır.

Sonuç olarak; kompleks Bernstein-Stancu polinomları için Sonuç 4.1 de elde edilen tam yakınsama oranı ile kompleks Kantorovich-Stancu polinomlarının tam yakınsama oranı sabitler farkı ile aynıdır.

KAYNAKLAR

1. Korovkin, P.P., “Linear operators and approximation theory”, ***Hindustan Publishing Corp. (India)***, Delhi, 1-63, 38-45 (1960).

2. Altomare, F., Campiti, M., “ Korovkin-Type approximation theory and its applications”, ***Walter de Gryter***, Berlin, Newyork, 265-373 (1994).

3. Wright, E.M., “The Bernstein approximation polynomials in the complex plane”, ***J. London Math. Soc.***, 5: 265-269 (1930).

4. Kantorovich, L.V., “Sur la convergence de la suite de polynomes de S. Bernstein en Dehors de 1’interval fundamental”, ***Bull. Acad. Sci.URSS***, 1103-1115 (1931).

5. Benstein, S.N., “Sur la convergence de certaines suites des polynomes”, ***J. Math. Pures Appl.***, 15(9): 345-358 (1935).

6. Benstein, S.N., “Sur le domaine de convergence des polynomess”, ***C. R. Acad. Sci. Paris***, 202: 1356-1358 (1936).

7. Bernstein, S.N., “On the domains of convergence of polynomials”, ***Izv. Akad. Nauk. SSSR***, 7: 49-88 (1943).

8. Lorentz, G.G., “Bernstein polynomials”, 2nd edition, ***Chelsea Publ.***, New York 88-90 (1986).

9. Tonne, P.C., “ On the convergence of Bernstein polynomials for some unbounded analytic functions”, ***Proc. Amer. Math. Soc.***, 22: 1-6 (1969).

10. Stancu, D.D., “Approximation of function by a new class of polynomial operators”, ***Rev. Roum. Math. Pures et Appl.***, 13(8): 1173-1194 (1968).

11. Gal, S.G., “Approximation by complex Bernstein and convolution type operators”, ***World Scientific Publishing Co.Rte. Ltd.***, Singapore 67-78 (2009).

12. Gal, S.G., “Shape preserving approximation by real and complex polynomials”, ***Birkhauser Publ.***, Boston, Basel, Berlin 263-270 (2008).

13. Hacısalihoğlu, H.H., Hacıyev, A., “Lineer pozitif operatör dizilerinin yakınsaklığı”, ***Ankara Üniv. Basımevi,*** Ankara, 1-80 (1995)

14.Devore, V.A., “The approximation of continuous functions by linear positive operators” , ***Springer-Verlag,*** Berlin, 28-29 (1972)

15. Stancu, D.D., “ On a generalization of Bernstein polynomials”, ***Studia Univ. Ser. Math.***, 14(2): 31-44 (1969)

16. Gal, S.G., “Voronovskaja’s theorem and iterations for complex Bernstein polynomials in compact disks”, ***Mediterr. J. Math.***, 5(3): 253-272 (2008)

17.Gal, S.G., “Approximation by complex Bernstein-Kantorovich and Stancu-Kantorovich polynomials and their iterates in compact disks”, ***Revue D’Anal. Numer. Theor. De L’ Approx.***,37(2): 159-168 (2008)

18.Gal, S.G., “Approximation by Complex Bernstein–Stancu Polynomials in Compact Disks”, ***Results in Mathematics***, 53: 245-256 (2009)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: ALTINOK, Maya
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 09.02.1987 Bayburt
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (537) 842 91 42
e-mail	: maya_kantar@hotmail.com.

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Bölümü	2013
Lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2009
Lise	Bayburt Anadolu Lisesi	2004

Yabancı Dil

İngilizce