DİSKRET DEĞİŞKENLİ KLASİK ORTOGONAL POLİNOMLAR

Beyza AYATA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKİM 2012

ANKARA

Beyza AYATA tarafından hazırlanan ‘‘DİSKRET DEĞİŞKENLİ KLASİK ORTOGONAL POLİNOMLAR’’ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN ……………………..
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL ……………………..
Matematik, Ankara Üniversitesi

Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN ……………………..
Matematik, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Ogün DOĞRU ……………………..
Matematik, Gazi Üniversitesi

Tarih: 30/10/2012

Bu tez ile G.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU ……………………..
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Beyza AYATA

DİSKRET DEĞİŞKENLİ KLASİK ORTOGONAL POLİNOMLAR
(Yüksek Lisans Tezi)

Beyza AYATA

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ekim 2012

ÖZET

Bu çalışmada klasik ortogonal polinomlar ve diskret değişkenli ortogonal polinomlar incelenmiştir. Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, önbilgiler ve diğer bölümlerde kullanılacak olan fark operatörleri ve diferensiyel arasındaki ilişkiler verilmiştir. Üçüncü bölümde, klasik ortogonal ve diskret değişkenli ortogonal polinomların Rodrigues formülü, ortogonallik ve norm özellikleri genel anlamda incelenmiştir. Son bölüm ise üçüncü bölümün uygulaması olarak Hermite, Laguerre, Jacobi ve Hahn, Charlier, Kravchuk, Meixner polinomlarının bazı özelliklerine ayrılmıştır.

Bilim Kodu : 204.1.138

Anahtar kelimeler : Gamma fonksiyonu, Pochammer sembolü, Rodrigues formülü, ortogonallik, fark operatörü

Sayfa Adedi : 65

Tez Yöneticisi : Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN

CLASSICAL ORTHOGONAL POLINOMIALS OF A DISCRETE VARIABLE

(M. Sc. Thesis)

Beyza AYATA

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

October 2012

ABSTRACT

In this study, classical orthogonal polinomials and orthogonal polinomials of a discrete variable are investigated. Thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, preliminaries and relations of between difference operator and differential used in the other chapters are given. In the third chapter, Rodrigues formula, orthogonality and norm properties of classical orthogonal polinomials and orthogonal polinomials of a discrete variable generally are derived. In the last chapter, application to third chapter, some properties of Hermite, Laguerre, Jacobi, Hahn, Charlier, Kravchuk, Meixner polinomials are dealt with.

Science Code	**: 204.1.138**
Key Words	**: Gamma function, Pochammer symbol, Rodrigues formula, orthogonality, difference operator.**
Page Number	**: 65**
Adviser	**: Assist. Prof. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN**

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince değerli ve derin bilgileri ile bana yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yardımlarını esirgemeyerek destek olan ve titiz çalışma prensibi ile örnek olan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Esra ERKUŞ DUMAN'a, eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET………..…………………………………………………………………… iv

ABSTRACT………...………………………………………………………...v

TEŞEKKÜR………...………………………………………………..………...vi

İÇİNDEKİLER ……..………………...……………………………..……………...vii

ÇİZELGELERİN LİSTESİ…...………………………………………………...ix

SİMGELER VE KISALTMALA.………………………………………………x

1. GİRİŞ…………..…………………………………………..……………………1

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR…..……………………………………....3

2.1. Gamma Fonksiyonu………..……………………………...…………………..3

2.2. Pochammer Sembolü ………………………..……………………………..4

2.3. Fark Operatörü……………..……………………………………………….5

2.4. Fark ve Diferensiyel Arasındaki İlişki………..…………...…………………8

2.5. Self-Adjoint Form…………………...……………………….…………..9

3. KLASİK ORTOGONAL POLİNOMLAR İLE DİSKRET DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLARIN TEORİSİNE GİRİŞ…………..…...………11

3.1. Hipergeometrik Tipte Bir Denklem……………..……………….…………11

3.2. Hipergeometrik Tipten Bir Fark Denklemi ...……………...………….………13

3.3. Hipergeometrik Tipte Polinomlar ve Türevleri, Rodrigues Formülü………20

Sayfa

3.4. Hipergeometrik Tipten Polinom Analoglarının Sonlu Farkları ve Onların Türevleri, Rodrigues Formülü……….………………………………..……..26

3.5. Klasik Ortagonal Polinomların Ortogonallik Özelliği ...……..…….…...……33

3.5.1. Ortogonal polinomların genel özellikleri ...…………………….………..37

3.6. Diskret Değişkenli Klasik Ortogonal Polinomlar İçin Ortogonallik Özelliği..39

4. BAZI ÖZEL POLİNOMLAR …...…………………………………...……….45

4.1. Jacobi, Laguerre ve Hermite Polinomları....……………………..………..45

4.2. Hahn, Chebyshev, Meixner , Kravchuk ve Charlier Polinomları ......……....54

KAYNAKLAR ....………..……………………………..……………64

ÖZGEÇMİŞ ...…………..……….………………………………..…………...65

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 2.1. Diferensiyel ve fark hesabı arasındaki benzerlikler …..……..………9

Çizelge 4.1. Jacobi, Laguerre ve Hermite polinomlarının özellikleri ……………...53

Çizelge 4.2. Hahn ve Chebyshev polinomlarının özellikleri ...……………………..62

Çizelge 4.3. Meixner, Kravchuk ve Charlier polinomlarının özellikleri ………..…63

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\Gamma(x)$	Gamma fonksiyonu
$(\alpha)_r$	Pochammer sembolü
Δ	İleri fark operatörü
∇	Geri fark operatörü
$H_n(x)$	Hermite polinomu
$L_n^{(\alpha)}(x)$	Laguerre polinomu
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Jacobi polinomu
$T_n(x)$	Birinci çeşit Chebyshev polinomu
$U_n(x)$	İkinci çeşit Chebyshev polinomu
$C_n^{\lambda}(x)$	Gegenbauer polinomu
$h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	Hahn polinomu
$t_n(x) = h_n^{(0,0)}(x, N)$	Chebyshev polinomu
$m_n^{(\gamma,\mu)}(x)$	Meixner polinomu
$k_n^{(p)}(x, N)$	Kravchuk polinomu
$c_n^{(\mu)}(x)$	Charlier polinomu

1. GİRİŞ

Klasik ortogonal polinomlardan Jacobi, Laguerre ve Hermite polinomları özel fonksiyonların en önemli sınıflarıdır. Jacobi, Laguerre ve Hermite polinomları için Rodrigues formülü kullanılarak diğer özel fonksiyonların genel bir integral gösterimi elde edilebilir.

Bu polinomların teorisi için, “diskret değişkenli klasik ortogonal polinomların genelleştirilmesidir”, şeklinde bir yorum yapılabilir.

$p_n(x)$ polinomlarının temel özelliklerinin ortogonallik ilişkisi, $\varrho(x)$ ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\int_a^b p_n(x)p_m(x)\varrho(x)dx = 0 \ \ (m \neq n) \tag{1.1}$$

olarak verilir. Daha genel bir ifadeyle,

$$\int_a^b p_n(x)p_m(x)d\omega(x) = 0 \ \ (m \neq n) \tag{1.2}$$

dir. Burada $\omega(x)$ monoton azalmayan bir fonksiyondur. Genellikle dağılım fonksiyonu olarak adlandırılır. ω(x) fonksiyonunun (a, b) aralığında türevi alınıp, $\omega'(x)\varrho(x)$ olarak ifade edilirse, Eş. 1.2 Eş. 1.1 denklemine dönüştürülebilir. Eş. 1.2 deki $\omega(x)$ fonksiyonu, $x = x_i$ noktalarında ϱ_i sıçramalarıyla beraber parçalı sabit bir fonksiyon olduğu takdirde, birçok problemin çözümünde, ortogonal polinomlarda, ortogonallikle olan ilişkilerde kullanılır. Bu durumda Eş. 1.2 ortogonallik bağıntısı

$$\sum_i p_n(x_i)\, p_m(x_i)\varrho_i = 0 \ \ (m \neq n) \tag{1.3}$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Eş. 1.3 ifadesini sağlayan $p_n(x)$ polinomları diskret değişkenli klasik ortogonal polinomlar olarak adlandırılır. Klasik ortogonal polinomlar arasında $x_{i+1} = x_i + 1$ için Hahn, Meixner, Kravchuk ve Charlier polinomları en çok çalışılanlarıdır. Bu tezde bu polinomların, klasik ortogonal diferensiyel denklemlerden elde edilen fark denklemlerini sağladığını göstereceğiz.

Bu fark denklemleri, diferensiyel denklemler ile benzer özelliklere sahiptir. Bu da Jacobi, Laguerre ve Hermite polinomlarının teorisindeki benzerlikle beraber bir diskret değişkenli klasik ortogonal polinomlar teorisinin temelini oluşturur.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Gamma Fonksiyonu

$\Gamma(x)$ ile gösterilen gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \tag{2.1}$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır. Burada

$$F(u) = \int_0^\infty e^{-ut}\, dt = \frac{1}{u} \tag{2.2}$$

integrali ile tanımlanan fonksiyonu ele alalım. $c > 0$ olmak üzere bu integral her $c \leq u \leq d$ sonlu aralığında $\frac{1}{u}$ ya düzgün yakınsaktır. Eş. 2.2 den u ya göre türevler alınarak devam edildiğinde n -yinci türev için

$$(-1)^n F^{(n)}(u) = \int_0^\infty t^n\, e^{-ut}\, dt = \frac{u!}{u^{n+1}}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte $u = 1$ alınırsa;

$$\int_0^\infty t^n\, e^{-t}\, dt = n! = \int_0^\infty t^{(n+1)-1}\, e^{-t}\, dt = \Gamma(n+1)$$

olur. Burada n değerleri pozitif tamsayılar olarak alınmıştır. Hâlbuki n nin $n > -1$ olan herhangi bir reel sayı olması halinde de bu genelleştirilmiş integral tanımlıdır. Yani yakınsaktır. O halde $x > -1$ olan herhangi bir reel sayı olmak üzere;

$$x! = \int_0^\infty t^x\, e^{-t}\, dt = \Gamma(x+1)$$

yazılabilir. Buradan da görülür ki, -1 den büyük olan tüm reel sayıların faktöriyel değerlerini sonlu bir reel sayı olarak tanımlamak mümkündür. Bundan dolayı

Gamma fonksiyonuna “genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu” da denir.

$x = 0$ durumunda faktöriyel fonksiyonunun değeri,

$$0! = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}|_0^\infty = -(0-1) = 1$$

dir. Bu sonuç 0! değerinin neden 1 olarak tanımlanması gerektiğini açıklar. Elemanter matematikte n faktöriyel, $n! = n(n-1)(n-2) \dots 3.2.1$ çarpımı ile verilir. Bu özellik, $n! = n(n-1)!$ eşitliğini içerdiğine göre, eğer $x = n$ bir tamsayı ise

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)! = n\Gamma(n)$$

yazılabilir.

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x\, e^{-t}\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^x\, e^{-t}\, dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} (-t^x e^{-t})|_0^b + x \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt$$

$$= x\Gamma(x)$$

olduğundan Γ fonksiyonu, yukarıdaki eşitliğini tüm $x > 0$ değerleri için sağlar. Bu özellik yardımıyla Gamma fonksiyonu için, argümentin herhangi iki tamsayı arasındaki değerlerine karşılık gelen sonuçların bilinmesi halinde diğer aralıklardaki fonksiyon değerleri de hesaplanabilir.

2.2. Pochammer Sembolü

α reel ya da kompleks bir sayı, r sıfır ya da pozitif tamsayı olmak üzere

$$(\alpha)_0 = 1, \qquad (\alpha)_r = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+r-1)$$

şeklinde tanımlanan $(\alpha)_r$ ifadesi Pochammer sembolü olarak bilinir. Pochammer sembolü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$(\alpha)_r = \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)} \tag{2.3}$$

$$(\alpha)_{r+1} = \alpha(\alpha + 1)_r \ . \tag{2.4}$$

2.3. Fark Operatörü

Tanım 2.1

İleri fark operatörü Δ simgesi ile gösterilir. h herhangi bir sabit, x, h eşit aralıklı bağımsız bir değişken ve f, x bağımsız değişkeninin bir fonksiyonu olmak üzere,

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x) \tag{2.5}$$

biçiminde ifade edilen $\Delta f(x)$ fonksiyonuna f nin birinci farkı denir.

Δ sembolü, f fonksiyonu üzerinde işlem yaparak yeni bir Δf fonksiyonunu üreten fark operatörüdür. h sayısına, fark aralığı denir; x deki değişimi ifade eder ve genellikle Δx ile gösterilir. Bu durum, Eş. 2.5 de $f(x) = x$ alınarak aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\Delta f(x) = \Delta x = (x + h) - x = h$$

Tanım 2.2

f bir fonksiyon ve onun birinci farkı Δf olmak üzere, f nin birinci farkının farkı $\Delta^2 f$ ile gösterilir ve buna f nin ikinci farkı denir.

$$\Delta^2 f = \Delta(\Delta f)$$

Benzer biçimde f nin ikinci farkının farkına, f nin üçüncü farkı denir ve $\Delta^3 f$ ile gösterilir. Genel olarak, f nin $(n-1)$ -inci farkının farkına, f nin n -yinci farkı denir ve $\Delta^n f$ ile gösterilir.

$$\Delta^n f = \Delta(\Delta^{n-1} f\ ), \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Δ operatörü bir polinoma uygulandığında polinomun derecesi bir azalır. n -yinci dereceden bir polinomun n -yinci farkı bir sabite, $(n+1)$ -inci ve daha yüksek farkları ise özdeş olarak sıfıra eşit olur.

Tanım 2.3

Geri fark operatörü ∇ ile gösterilir. h, herhangi bir sabit, x, h eşit aralıklı bağımsız bir değişken ve f, x bağımsız değişkeninin bir fonksiyonu olmak üzere,

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h) \tag{2.6}$$

biçiminde ifade edilen $\nabla f(x)$ fonksiyonuna f nin birinci geri farkı denir.

Δ ve ∇ Operatörlerinin özellikleri

1) Bir sabitin farkı sıfırdır.
   $\Delta c = c - c = 0$
2) Bir sabit ile bir fonksiyonun çarpımının farkı,
   $$\begin{aligned}\Delta[c\, f(x)] &= cf(x+h) - cf(x)\\ &= c[f(x+h) - f(x)]\\ &= c\Delta[f(x)]\end{aligned}$$
   şeklindedir.
3) Dağılma özelliği:
   $$\begin{aligned}\Delta[f_1(x) + f_2(x)] &= [f_1(x+h) + f_2(x+h)] - [f_1(x) + f_2(x)]\\ &= [f_1\,(x+h) - f_1\,(x)\,] + [f_2(x+h) - f_2\,(x)]\\ &= \Delta[f_1(x)] + \Delta[f_2(x)]\end{aligned}$$
4) Lineerlik özelliği:
   $$\begin{aligned}\Delta[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] &= [c_1 f_1(x+h) + c_2 f_2(x+h)] - [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]\\ &= c_1[f_1(x+h) - f_1(x)] + c_2[f_2(x+h) - f_2(x)]\\ &= c_1\Delta[f_1(x)] + c_2\Delta[f_2(x)]\end{aligned}$$
5) $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = \nabla f(x+1)$ (2.7)
6) $\Delta\nabla f(x) = \Delta[f(x) - f(x-1)]$

$$= f(x+1) - f(x) - [f(x) - f(x-1)]$$
$$= f(x+1) - 2f(x) + f(x-1) \tag{2.8}$$

7) $\Delta\nabla f\ (x) = \Delta[f(x) - f(x-1)] = f(x+1) - f(x) - [f(x) - f(x-1)]$
$$= f(x+1) - f(x) - f(x) + f(x-1)$$
$$= [f(x-1) - f(x)] + [f(x+1) - f(x)]$$
$$= \nabla f(x) - \Delta f(x) \tag{2.9}$$

8) $\nabla\Delta f(x) = \nabla[f(x+1) - f(x)] = [f(x+1) - f(x)] - [f(x) - f(x-1)]$
$$= f(x+1) - f(x) - f(x) + f(x-1)$$
$$= [f(x-1) - f(x)] + [f(x+1) - f(x)]$$
$$= \nabla f(x) - \Delta f(x) \tag{2.10}$$

Eş. 2.9 ve Eş. 2.10 dan $\Delta\nabla f(x) = \nabla\Delta f(x)$ olur ve buradan

$$\nabla f(x) = \Delta f(x) - \Delta\nabla f(x) \tag{2.11}$$

olduğu görülür.

9) İki fonksiyonun çarpımının farkı

$$\Delta[f(x)g(x)] = f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x)$$
$$= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x+1) + f(x)g(x+1) - f(x)g(x)$$
$$= g(x+1)[f(x+1) - f(x)] + f(x)[g(x+1) - g(x)]$$
$$= g(x+1)\Delta[f(x)] + f(x)\Delta[g(x)]$$
$$= f(x)\Delta g(x) + g(x+1)\Delta f(x) \tag{2.12}$$

olup bu eşitlikteki ifadeleri toplam şeklinde yazarsak aşağıdaki formülü elde ederiz.

$$\sum_{x_i=0}^{b-1} \Delta[f(x_i)g(x_i)] = \sum_{x_i=0}^{b-1} f(x_i)\Delta g(x_i) + \sum_{x_i=0}^{b-1} g(x_i+1)\,\Delta f(x_i)$$

Diğer taraftan,

$$\sum_{x=n_0}^{n-1} \Delta x(k) = x(n_0+1) - x(n_0) + x(n_0+2) - x(n_0+1) + \cdots + x(n) - x(-1)$$

$$= x(n) - x(n_0) = \int_a^b F(x)dx = F(b) - F(a)$$

özelliği kullanılırsa,

$$\sum_{x_i=0}^{b-1} f(x_i)\Delta g(x_i) = f(x_i)g(x_i)|_a^b - \sum_{x_i=0}^{b-1} g(x_i+1)\,\Delta f(x_i) \qquad (2.13)$$

bulunur.

m -yinci dereceden $q_m(x)$ polinomu için $\Delta q_m(x)$ ve $\nabla q_m(x)$ ifadeleri $(m-1)$-inci dereceden polinomlardır. O halde,

$$\Delta^m q_m(x) = \nabla^m q_m(x) = q_m^{(m)}(x)$$

dir.

2.4. Fark ve Diferensiyel Arasındaki İlişki

Verilen bir f fonksiyonunun x değerinde

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f(x)}{h}$$

limiti varsa buna f nin türevi denir. Bu türev $Df(x)$ ile gösterilir.

$$Df(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f(x)}{h}$$

D ye diferensiyel operatörü denir ve bir fonksiyona uygulandığında bu fonksiyonun türevini üretir. $[\Delta f(x)]/h$ sayısı, f nin grafiğinde x ve $x+h$ noktalarını birleştiren doğrunun eğimidir. $Df(x), x$ deki teğet doğrusunun eğimidir.

Bir fonksiyonun ard arda diferensiyelinin alınması, D operatörünün ard arda uygulanmasıyla gösterilir. f nin ikinci türevi (diferensiyeli) Df nin birinci türevinin türevi olarak $(D(Df))$ şeklinde tanımlanır ve D^2f biçiminde gösterilir. Benzer biçimde f nin n inci türevi de $D^n(f)$ ile gösterilir.

Fark hesabıyla diferensiyel hesap arasında güçlü bir benzerlik vardır. Bu benzerliklerden bazıları Çizelge 2.1 de verilmiştir.

Çizelge 2.1. Diferensiyel ve fark hesabı arasındaki benzerlikler

FARK HESAPLARI	DİFERENSİYEL HESAPLAR
1. $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$	1. $Dy(x) = \lim_{h\to 0} \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$
2. $\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1}y),\ \ n = 1,2,\dots$	2. $D^n y = D(D^{n-1}y)\ \ n = 1,2,\dots$
3. $\Delta(cy) = c\Delta y$	3. $D(cy) = cDy$
4. $\Delta(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1\Delta y_1 + c_2\Delta y_2$ y, n -yinci dereceden bir polinom ise $\Delta^n y$ bir sabit ve daha yüksek mertebeden farkları sıfırdır.	4. $D(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1Dy_1 + c_2Dy_2$ y, n -yinci dereceden bir polinom ise $D^n y$ bir sabit ve daha yüksek mertebeden farkları sıfırdır.
5. $\Delta y = Y \Rightarrow \Delta^{-1}Y = y + p$ dir. Burada p, h periyotlu bir fonksiyondur.	5. $Dy = Y \Rightarrow \int Y = y + c$ dir. Burada c, sabittir.
6. $\Delta x^n = nhx^{n-1}$	6. $Dx^n = nx^{n-1}$

2.5. Self-Adjoint Form

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + [a_2(x) + \lambda\,]y = 0 \tag{2.14}$$

diferensiyel denkleminin self- adjoint olması için gerek ve yeter koşul

$$a_0'(x) = a_1(x)$$

olmasıdır. Bu durumda Eş. 2.14,

$$a_0(x)y'' + a_0'(x)y' + [a_2(x) + \lambda]y = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[a_o(x)\frac{d}{dy}\right] + [a_2(x) + \lambda]y = 0$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer Eş. 2.14 self- adjoint değilse,

$$h(x) = \frac{1}{a_0(x)} \exp\,(\int_x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt)$$

ile çarpılarak

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + [q(x) + \lambda s(x)]y = 0$$

şeklinde self- adjoint formunda yazılabilir. Burada

$$p(x) = \exp\,(\int_x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt)$$

$$q(x) = \frac{a_2(x)}{a_0(x)}\, p(x)$$

$$s(x) = \frac{1}{a_0(x)}\, p(x)$$

dir.

3. KLASİK ORTOGONAL POLİNOMLAR İLE DİSKRET DEĞİŞKENLİ ORTOGONAL POLİNOMLARIN TEORİSİNE GİRİŞ

3.1. Hipergeometrik Tipte Bir Denklem

Hipergeometrik tipte bir denklemin uygulamalı matematik, teorik ve matematiksel fiziğin birçok problemindeki genel ifadesi,

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0 \tag{3.1}$$

şeklindedir. Burada $\sigma(x)$ ve $\tau(x)$ sırasıyla en fazla ikinci ve birinci dereceden polinomlardır ve λ sabittir. Eş. 3.1 hipergeomerik tipte bir denklemdir ve çözümü hipergeometrik tipte fonksiyonlardır.

Teorem 3.1

Hipergeometrik tipteki fonksiyonların türevleri de hipergeometrik tiptendir.

İspat

Eş. 3.1 in türevini alıp sonra da denklemde $y'(x) = v_1(x)$ yazarsak,

$$(\sigma(x)y'')' + (\tau(x)y')' + (\lambda y)' = 0$$

$$\sigma'(x)y'' + \sigma(x)(y'')' + \tau'(x)y' + \tau(x)y'' + \lambda y' = 0$$

$$y''[\sigma'(x) + \tau(x)] + \sigma(x)(y'')' + y'[\tau'(x) + \lambda] = 0$$

$$\sigma(x)(y'')' + \tau_1(x)y'' + \mu_1 y' = 0$$

$$\sigma(x)v_1'' + \tau_1(x)v_1' + \mu_1 v_1 = 0 \tag{3.2}$$

elde edilir. Burada $\tau_1(x) = \sigma'(x) + \tau(x),\ \mu_1 = \tau'(x) + \lambda,\ \tau_1(x)$ derecesi en fazla 1 olan polinomdur ve μ_1 x e bağlı değildir. Eş. 3.2 hipergeometrik tipte bir denklemdir.■

Teorem 3.1 in tersi de doğrudur. Eş. 3.2 nin her çözümü $\lambda = \mu_1 - \tau_1' + \sigma'' \neq 0$ olmak şartıyla Eş. 3.1 in bir çözümünün türevidir. Gerçekten, Eş. 3.2 nin bir çözümü

$v_1(x)$ olsun. Eğer $v_1(x)$, Eş. 3.1 in bir çözümü olan $y(x)$ in bir türevi olsaydı, o zaman bu denkleme göre $y(x)$ ve $v_1(x)$ fonksiyonları için arasındaki bağıntı şöyle olurdu:

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda}\,[\sigma(x)v_1' + \tau(x)v_1]$$

Bu formüldeki $y(x)$ i Eş. 3.1 de yerine yazarsak görürüz ki $y(x)$ in türevi $v_1(x)$ dir. Yani

$$\begin{aligned}\lambda y'(x) &= -[\sigma(x)v_1'' + \sigma'(x)v_1' + \tau(x)v_1' + \tau'(x)v_1] \\ &= -[\sigma(x)v_1'' + [\sigma'(x) + \tau(x)]v_1' + \tau'(x)v_1] \\ &= -[\sigma(x)v_1'' + \tau_1(x)v_1' + \tau'(x)v_1] = \lambda v_1\end{aligned}$$

$y' = v_1(x)$ olur. $y(x)$ için asıl ifadede $v_1 = y'(x)$ yerine yazarsak $y(x)$ için Eş. 3.1 i elde ederiz.

Teorem 3.2

Hipergeometrik tipteki fonksiyonların bütün türevleri de hipergeometrik tiptendir.

İspat

Eş. 3.1 in ikinci kez türevini alıp sonrada denklemde $y''(x) = v_2(x)$ yazarsak;

$$\begin{aligned}(y'')'[\sigma'(x) + \tau(x)] + [\sigma''(x) + \tau'(x)]y'' + \sigma'(x)(y'')' + [(y'')]''\sigma(x) \\ + y''[\tau'(x) + \lambda] = 0\end{aligned}$$

$$\sigma(x)(y'')'' + [\sigma'(x) + \sigma'(x) + \tau(x)](y'')' + [\sigma''(x) + \tau'(x) + \tau'(x) + \lambda]y'' = 0$$

$$\sigma(x)v_2'' + \tau_2(x)v_2' + \mu_2 v_2 = 0 \qquad (3.3)$$

elde edilir. Burada $\tau_2(x) = 2\sigma'(x) + \tau(x)$, $\mu_2 = \lambda + 2\tau' + \sigma''$ dir. $\tau_2(x)$ derecesi en fazla 1 olan polinomdur ve μ_2 x e bağlı değildir. Eş. 3.3 de hipergeometrik tipte bir denklemdir.

Aynı şekilde Eş. 3.1 in n inci kez türevini alırsak, $y^{(n)}(x) = v_n(x)$ fonksiyonu için

$$\sigma(x)v_n'' + \tau_n(x)v_n' + \mu_n v_n = 0 \tag{3.4}$$

elde edilir. Eş. 3.4 de hipergeometrik tipte bir denklemdir. Burada,

$$\tau_n(x) = \tau(x) + n\sigma'(x) \tag{3.5}$$

$$\mu_n = \lambda + n\tau' + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'' \tag{3.6}$$

olup, Eş. 3.4 ün her çözümü $\mu_k \neq 0$ $(k = 0,1,\dots,n-1)$ için $v_n(x) = y^{(n)}(x)$ formunda gösterilebilir. Burada $y(x)$, Eş. 3.1 in bir çözümüdür.■

3.2. Hipergeometrik Tipten Fark Denklemi

Hipergeometrik tipten bir fark denklemi genel olarak,

$$\tilde{\sigma}(x)y'' + \tilde{\tau}(x)y' + \lambda y = 0 \tag{3.7}$$

şeklindedir. Burada $\tilde{\sigma}(x)$ ve $\tilde{\tau}(x)$ sırasıyla ikinci ve birinci dereceden polinomlardır ve λ sabittir.

Eş. 3.7 diferensiyel denkleminde türevleri açık olarak yazarak bir fark denklemi oluşturmaya çalışalım:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(x)\frac{1}{h}\left[\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \frac{y(x)-y(x-h)}{h}\right] \\ + \frac{\tilde{\tau}(x)}{2}\left[\frac{y(x+h)-y(x)}{h} + \frac{y(x)-y(x-h)}{h}\right] + \lambda y(x) = 0\end{aligned} \tag{3.8}$$

Biz sağdan ve soldan bölüm farklarının lineer kombinasyonlarını kullanıp Eş. 3.7 yi Eş. 3.8 e dönüştürdüğümüzde $y'(x)$ ve $y''(x)$ türevlerine yaklaşırız.

$\frac{1}{h}[y(x) - y(x-h)]$ ve $\frac{1}{h}[y(x+h) - y(x)]$ $h \to 0$ için $O(h^2)$ hata verir.

$$y'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{y(x+h)-y(x)}{h} + \frac{y(x)-y(x-h)}{h}\right] + O(h^2)$$

$$y''(x) = \frac{1}{h}\left[\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \frac{y(x)-y(x-h)}{h}\right] + \mathrm{O}(h^2)$$

x ile hx bağımsız değişkeninin lineer değişimi ve

$y(hx) \to y(x)$, $\frac{\tilde{\sigma}\ (hx)}{h^2} \to \tilde{\sigma}(x)$, $\frac{\tilde{\tau}\ (hx)}{h} \to \tilde{\tau}(x)$ fonksiyonlarının değişimi ile Eş. 3.8

$$\tilde{\sigma}\ (hx)\frac{1}{h}\left[\frac{y(hx+h)-y(hx)}{h} - \frac{y(hx)-y(hx-h)}{h}\right]$$

$$+\frac{\tilde{\tau}\ (hx)}{2}\left[\frac{y(hx+h)-y(hx)}{h} + \frac{y(hx)-y(hx-h)}{h}\right] + \lambda y = 0$$

$$\tilde{\sigma}(hx)\frac{1}{h^2}[y(hx+h)-y(hx)-y(hx)+y(hx-h)]$$

$$+\frac{\tilde{\tau}(hx)}{2h}[y(hx+h)-y(hx)+y(hx)-y(hx+h)] + \lambda y = 0$$

$$\tilde{\sigma}(x)[y(hx+h)-y(x)-y(x)+y(hx-h)] + \frac{\tilde{\tau}\ (x)}{2}[y(hx+h)-y(x)+y(x) \\ -y(hx-h)\ \ + \lambda y = 0$$

şeklinde elde edilir. $h = 1$ için bu denklem,

$$\tilde{\sigma}(x)[\{y(x+1)-y(x)\} - \{y(x)-y(x-1)\}]$$

$$+\frac{\tilde{\tau}(x)}{2}[\{y(x+1)-y(x)\} + \{y(x)-y(x-1)\}] + \lambda y = 0$$

$$\tilde{\sigma}(x)[\Delta - \nabla]y(x) + \frac{\tilde{\tau}\ (x)}{2}[\Delta + \nabla]y(x) + \lambda y = 0 \qquad (3.9)$$

eşitliğine indirgenebilir. Burada $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x), \nabla f(x) = f(x) - f(x-1)$ ve $\nabla f(x) = \Delta f(x) - \Delta\nabla f(x)$ olduğundan Eş. 3.9,

$$\tilde{\sigma}(x)[\Delta - \Delta + \Delta\nabla]y(x) + \frac{\tilde{\tau}(x)}{2}[\Delta + \Delta - \Delta\nabla]y(x) + \lambda y(x) = 0$$

$$\tilde{\sigma}(x)\Delta\nabla y(x) + \frac{\tilde{\tau}(x)}{2}2\Delta y(x) - \frac{\tilde{\tau}(x)}{2}\Delta\nabla \mathrm{y(x)} + \lambda \mathrm{y(x)} = 0$$

$$\left[\tilde{\sigma}(x) - \frac{\tilde{\tau}(x)}{2}\right]\Delta\nabla y(x) + \tilde{\tau}(x)\Delta y(x) + \lambda y(x) = 0$$

$$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda y(x) = 0 \tag{3.10}$$

denklemine eşittir.

Burada,

$$\sigma(x) = \tilde{\sigma}(x) - \frac{\tilde{\tau}(x)}{2}\ , \qquad \tau(x) = \tilde{\tau}(x) \tag{3.11}$$

olup, $\sigma(x)$ ikinci dereceden bir polinomdur ve Eş. 3.10 fark denklemi yaklaşımın bir sonucu olarak elde edilmiştir.

Eş. 3.10 un çözümlerinde bir takım özellikler verelim. Aynı şekilde bu özellikler Eş. 3.7 nin çözümünde de kullanabilir.

Eş. 3.10 fark denkleminin her iki tarafına Δ operatörü uygulanıp $\Delta y(x) = v_1(x)$ alınırsa,

$$\Delta[\sigma(x)\Delta\nabla y(x)] + \Delta[\tau(x)\Delta y(x)] + \Delta\lambda y(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \Delta[\sigma(x)\nabla \mathrm{v}_1(x)] + \Delta[\tau(x)v_1(x)] + \lambda v_1(x) = 0$$

olur. Eş. 2.7, Eş. 2.12 ve $\tau(x) = \tau(x+1) - \Delta\tau(x)$ eşitliği kullanılırsa

$$0 = \sigma(x)\Delta\nabla v_1(x) + \nabla v_1(x+1)\Delta\sigma(x) + \tau(x)\Delta v_1(x) + v_1(x+1)\Delta\tau(x) + \lambda v_1(x)$$

$$= \sigma(x)\Delta\nabla v_1(x) + \Delta v_1(x)\Delta\sigma(x) + \Delta v_1(x)\tau(x) + \Delta\tau(x)v_1(x+1) + \lambda v_1(x)$$

$$= \sigma(x)\Delta\nabla v_1(x) + \Delta\sigma(x)\Delta v_1(x) + \Delta v_1(x)[\tau(x+1) - \Delta\tau(x)] + \Delta\tau(x)v_1(x+1) + \lambda v_1(x)$$

$$= \sigma(x)\Delta\nabla v_1(x) + \Delta v_1(x)[\tau(x+1) + \Delta\sigma(x)] + \Delta\tau(x)[v_1(x+1) - \Delta v_1(x)] + \lambda v_1(x)$$

$$= \sigma(x)\Delta\nabla v_1(x) + \Delta v_1(x)[\tau(x+1) + \Delta\sigma(x)] + \Delta\tau(x)v_1(x) + \lambda v_1(x)$$

$$= \sigma(x)\Delta\nabla v_1(x) + \Delta v_1(x)\tau_1(x) + v_1(x)[\Delta\tau(x) + \lambda]$$

$$= \sigma(x)\Delta\nabla v_1(x) + \tau_1(x)\Delta v_1(x) + \mu_1 v_1(x) \tag{3.12}$$

elde edilir. Burada $\tau_1(x) = \tau(x+1) + \Delta\sigma(x)$, $\mu_1 = \lambda + \Delta\tau(x)$ dır.

$\tau_1(x)$ birinci dereceden bir polinom ve μ_1, x den bağımsız olduğundan Eş. 3.12 de $v_1(x)$, Eş. 3.10 daki ile aynı formdadır.

Aksini ispatlamak kolaydır. $\lambda \neq 0$ olmak üzere Eş. 3.12 nin her çözümü $v_1(x) = \Delta y(x)$ formunda gösterilebilir.

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda}[\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x)]$$

Burada $y(x)$, Eş. 3.10 un bir çözümüdür.

Bu çözüm $v_1(x)$ cinsinden ifade edilebilir. $\Delta y(x) = v_1(x)$ olarak aldığımızdan

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda}[\sigma(x)\nabla v_1(x) + \tau(x)v_1(x)]$$

olup, bu da Eş. 3.12 nin bir çözümüdür.

Benzer şekilde $v_m(x) = \Delta^m y(x)$ fonksiyonu için

$$\sigma(x)\Delta\nabla v_m(x) + \tau_m(x)\Delta v_m(x) + \mu_m v_m(x) = 0 \tag{3.13}$$

şeklinde hipergeometrik tipte bir fark denklemi elde edilebilir. Burada,

$$\tau_m(x) = \tau_{m-1}(x+1) + \Delta\sigma(x), \qquad \tau_0(x) = \tau(x) \tag{3.14}$$

$$\mu_m = \mu_{m-1} + \Delta\tau_{m-1}(x), \qquad \mu_0 = \lambda \tag{3.15}$$

dır.

$\mu_k \neq 0$ $(k = 0,1,\ldots)$ olmak üzere Eş. 3.13 ün her çözümü de $v_m(x) = \Delta^m y(x)$ olarak alınabilir, burada $y(x)$, Eş. 3.10 un çözümüdür.

Eş. 3.14 kullanılarak,

$$\tau_1(x) = \tau(x+1) + \Delta\sigma(x)$$

$$\tau_2(x) = \tau_1(x+1) + \Delta\sigma(x) = \tau(x+2) + \Delta\sigma(x) + \Delta\sigma(x)$$

$$\tau_3(x) = \tau_2(x+1) + \Delta\sigma(x) = \tau_1(x+2) + 2\Delta\sigma(x) = \tau(x+3) + 3\Delta\sigma(x)$$

$\vdots$

$\tau_m(x) = \tau(x+m) + m\Delta\sigma(x)$

ve

$\Delta\sigma(x) = \sigma(x+1) - \sigma(x)$ olduğundan Eş. 3.14,

$\tau_m(x) = \tau_{m-1}(x+1) + \ \sigma(x+1) - \sigma(x)$

$$\tau_m(x) + \sigma(x) = \tau_{m-1}(x+1) + \ \sigma(x+1) \tag{3.16}$$

formunda tekrar yazılırsa $\tau_m(x)$ için

$$\tau_m(x) = \tau(x+m) + \sigma(x+m) - \sigma(x) \tag{3.17}$$

şeklinde daha açık bir ifade elde edilir.

Eş. 3.14 ün her iki tarafına Δ operatörü uygulanırsa,

$\Delta\tau_m(x) = \Delta\tau_{m-1}(x) + \Delta[\Delta\sigma(x)]$

olup, $\sigma(x)$ ikinci dereceden, $\tau(x)$ birinci derecen polinomlar olduğundan $\Delta\tau_m(x)$ ve $\Delta^2\sigma(x),\ x$ den bağımsız şekilde elde edilir. Böylece,

$\Delta\tau_m = \Delta\tau_{m-1} + \Delta^2\sigma$

$\Delta\tau_{m-1} = \Delta\tau_{m-2} + \Delta^2\sigma$

$\Delta\tau_{m-2} = \Delta\tau_{m-3} + \Delta^2\sigma$

$\vdots$

$\Delta\tau_1 = \Delta\tau_0 + \Delta^2\sigma$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa,

$\Delta\tau_m = \Delta\tau + m\Delta^2\sigma = \tau' + m\sigma''$

olur.

μ_m için daha açık bir formül

$$\mu_m = \mu_{m-1} + \Delta\tau_{m-1}$$

$$= \mu_{m-1} + \tau' + (m-1)\sigma''$$

$$= \mu_0 + \sum_{k=1}^{m}(\mu_k - \mu_{k-1}) = \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0 + \mu_2 - \mu_1 + \cdots + \mu_m - \mu_{m-1})$$

$$= \lambda + \sum_{k=1}^{m}(\mu_k - \mu_{k-1}) = \lambda + [\tau' + (\tau' + \sigma'') + \cdots + (\tau' + (m-1)\sigma'')]$$

$$= \lambda + m\tau' + \sigma''[1 + 2 + \cdots + (m-1)]$$

$$= \lambda + m\tau' + \frac{m(m-1)}{2}\sigma'' \tag{3.18}$$

şeklindedir.

$\sigma(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda y(x) = 0$

denklemini self-adjoint formda kullanalım. Bunun için denklemin her iki tarafı $\varrho(x)$ fonksiyonu ile çarpılırsa,

$$\sigma(x)\varrho(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\varrho(x)\Delta y(x) = \sigma(x)\varrho(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\varrho(x)\nabla y(x+1)$$

$$= \sigma(x)\varrho(x)\Delta\nabla y(x) + \nabla y(x+1)\Delta[\,\sigma(x)\varrho(x)]$$

olur. İki fonksiyonun çarpımının özelliğinden yukarıdaki ifade

$$\sigma(x)\varrho(x)\Delta\nabla y(x) + \tau(x)\varrho(x)\Delta y(x) = \Delta[\,\sigma(x)\varrho(x)\nabla y(x)]$$

şeklindedir. Burada

$$\Delta[\sigma(x)\varrho(x)] = \tau(x)\varrho(x) \tag{3.19}$$

olup, sonuçta Eş. 3.10,

$$\Delta[\,\sigma(x)\varrho(x)\nabla y(x)] + \lambda\varrho(x)y(x) = 0 \tag{3.20}$$

olarak self-adjoint forma dönüştürülebilir. Benzer şekilde Eş. 3.13 denklemi de aşağıdaki gibi self-adjoint forma dönüştürülebilir:

$$\Delta[\,\sigma(x)\varrho_m(x)\nabla v_m(x)] + \mu_m\varrho_m(x)v_m(x) = 0 \tag{3.21}$$

Burada $\varrho_m(x)$ fonksiyonu denklemde yerine yazılırsa

$$\Delta[\sigma(x)\varrho_m(x)] = \tau_m(x)\varrho_m(x) \tag{3.22}$$

olur.

$\tilde{\sigma}(x)y'' + \tilde{\tau}(x)y' + \lambda y = 0$ denklemi de

$$[\tilde{\sigma}(x)\varrho(x)]' = \tilde{\tau}(x)\varrho(x) \tag{3.23}$$

$$[\tilde{\sigma}(x)\varrho(x)y'(x)]' + \lambda\varrho(x)y(x) = 0$$

şeklinde self-adjoint forma dönüşebilir.

$$\frac{1}{h}[\tilde{\sigma}(x+h)\varrho(x+h) - \tilde{\sigma}(x)\varrho(x)] = \frac{1}{2}[\tilde{\tau}(x+h)\varrho(x+h) + \tilde{\tau}(x)\varrho(x)]$$

Burada, $x \to hx$, $\frac{1}{h^2}\tilde{\sigma}(hx) \to \tilde{\sigma}(x)$, $\frac{1}{h}\tilde{\tau}(hx) \to \tilde{\tau}(x)$ dönüşümleri uygulanıp $h = 1$ alınırsa,

$$\Delta[\tilde{\sigma}(x)\varrho(x)] = \frac{1}{2}[\tilde{\tau}(x+1)\varrho(x+1) + \tilde{\tau}(x)\varrho(x)] \tag{3.24}$$

olur. Eş. 3.11 kullanılarak Eş. 3.24 ün Eş. 3.19 a denk olduğu kolayca görülebilir.

Eş. 3.19 ve Eş. 3.22 sayesinde $\varrho_m(x)$ ve $\varrho(x)$ fonksiyonları arasında bir bağıntı elde edilebilir. Bunu elde etmek için Eş. 3.22 kullanılarak

$$\begin{aligned}\tau_m(x)\varrho_m(x) &= \Delta[\sigma(x)\varrho_m(x)]\\ &= \sigma(x)\Delta\varrho_m(x) + \varrho_m(x+1)\Delta\sigma(x)\\ &= \sigma(x)[\varrho_m(x+1) - \varrho_m(x)] + \varrho_m(x+1)[\sigma(x+1) - \sigma(x)]\\ &= \varrho_m(x+1)\sigma(x+1) - \varrho_m(x)\sigma(x)\end{aligned}$$

olup, her iki taraf $\varrho_m(x)$ ile bölünürse,

$$\frac{\tau_m(x)\varrho_m(x)}{\varrho_m(x)} = \frac{\varrho_m(x+1)\sigma(x+1) - \varrho_m(x)\sigma(x)}{\varrho_m(x)}$$

$$\frac{\sigma(x+1)\varrho_m(x+1)}{\varrho_m(x)} = \tau_m(x) + \sigma(x)$$

ilişkisi elde edilir. Eş. 3.16 dan bu eşitlik

$$\frac{\sigma(x+1)\varrho_m(x+1)}{\varrho_m(x)} = \tau_{m-1}(x+1) + \sigma(x+1) = \frac{\sigma(x+2)\varrho_{m-1}(x+2)}{\varrho_{m-1}(x+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\varrho_m(x+1)}{\sigma(x+2)\varrho_{m-1}(x+2)} = \frac{\varrho_m(x)}{\varrho_{m-1}(x+1)\sigma(x+1)} = c_m(x)$$

şeklinde de yazılabilir. $c_m(x)$, herhangi bir fonksiyon olup, Eş. 3.22 nin çözümünde kullanılacaktır. $c_m(x) = 1$ alınırsa,

$$\varrho_m(x) = \sigma(x+1)\varrho_{m-1}(x+1), \quad \varrho_0(x) = \varrho(x) \tag{3.25}$$

olup, Eş. 3.25 den

$$\varrho_1(x) = \sigma(x+1)\varrho_0(x+1)$$

$$\varrho_2(x) = \sigma(x+1)\varrho_1(x+1) = \sigma(x+1)[\sigma(x+2)\varrho_0(x+2)]$$

$$\varrho_3(x) = \sigma(x+1)\varrho_2(x+1) = \sigma(x+1)\sigma(x+2)[\sigma(x+3)\varrho_0(x+3)]$$

$\vdots$

$$\varrho_m(x) = \varrho(x+m)\prod_{k=1}^{m}\sigma(x+k) \tag{3.26}$$

formülü elde edilir.

3.3. Hipergeometrik Tipte Polinomlar ve Türevleri, Rodrigues Formülü

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0$$

denkleminin verilen bir λ ya karşılık gelen özel çözümlerinin bir ailesini elde edelim. Aslında $\mu_n = 0$ olduğunda Eş. 3.4 $v_n(x)$ =sabit özel çözümlerine sahiptir. $v_n(x) = y^{(n)}(x)$ olduğundan

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''$$

şeklindeki hipergeometrik tipteki denklem, derecesi n olan $y(x) = y_n(x)$ şeklinde özel bir çözüme sahiptir. Böyle çözümlere ‘‘hipergeometrik tipten polinomlar’’ denir. $y_n(x)$ polinomları Eş. 3.1 in en basit çözümleridir.

Hipergeometrik tipten polinomları bulmak için Eş. 3.1 ve Eş. 3.4 ü sırasıyla $\varrho(x)$ ve $\varrho_n(x)$ ile çarparsak onları self-adjoint forma dönüştürebiliriz.

$$\sigma(x)\varrho(x)y'' + \tau(x)\varrho(x)y' + \varrho\lambda y = 0$$

$$(\sigma\varrho y')' + \lambda\varrho y = 0 \tag{3.27}$$

$$\sigma(x)\varrho_n(x)v_n'' + \tau_n(x)\varrho_n(x)v_n' + \varrho_n(x)\mu_n v_n = 0$$

$$(\sigma\varrho_n v_n')' + \mu_n\varrho_n v_n = 0 \tag{3.28}$$

Burada $\varrho(x)$ ve $\varrho_n(x)$ yerine aşağıdaki diferensiyel denklemler yazılır.

$$(\sigma\varrho)' = \tau\varrho \tag{3.29}$$

$$(\sigma\varrho_n)' = \tau_n\varrho_n \tag{3.30}$$

Şimdi $\tau_n(x)$ için Eş. 3.5 i kullanarak $\varrho_n(x)$ ve $\varrho_0(x) = \varrho(x)$ arasındaki ilişkiyi aşağıdaki şekilde kolayca bulabiliriz.

$$\frac{(\sigma\varrho_n)'}{\varrho_n} = \tau_n = \tau + n\sigma' = \frac{(\sigma\varrho)'}{\varrho} + n\sigma'$$

Böylece,

$$\frac{\varrho_n{}'}{\varrho_n} = \frac{\varrho'}{\varrho} + \frac{n\sigma'}{\sigma}$$

olup, her iki tarafın integrali alınırsa,

$$\int \frac{\varrho_n{}'}{\varrho_n}dn = \int \frac{\varrho'}{\varrho}dx + n\int \frac{\sigma'}{\sigma}dx$$

$$\ln(\varrho_n) = \ln(\varrho) + n\ln(\sigma)$$

$\ln(\varrho_n) = \ln\,(\varrho\sigma^n)$

ve sonuç olarak

$$\varrho_n(x) = \sigma^n(x)\varrho(x) \qquad (n = 0,1,\dots) \tag{3.31}$$

elde edilir.

$\sigma(x)\varrho_n(x) = \varrho_{n+1}(x)$ ve $v_n'(x) = v_{n+1}(x)$ olduğundan Eş. 3.28 yeniden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varrho_n v_n = -\frac{1}{\mu_n}(\sigma\varrho_n v_n')' = -\frac{1}{\mu_n}(\varrho_{n+1}v_n')' = -\frac{1}{\mu_n}(\varrho_{n+1}v_{n+1})' \tag{3.32}$$

Buradan,

$$\varrho y = \varrho_0 v_0 = -\frac{1}{\mu_0}(\varrho_1 v_1)' = \left(-\frac{1}{\mu_0}\right)\left(-\frac{1}{\mu_1}\right)(\varrho_2 v_2)''$$

$$= \left(-\frac{1}{\mu_0}\right)\left(-\frac{1}{\mu_1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{\mu_{n-1}}\right)(\varrho_n v_n)^n = \frac{1}{A_n}(\varrho_n v_n)^n$$

olduğu görülür. Burada,

$$A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k\,, \qquad A_0 = 1 \tag{3.33}$$

dir. Hipergeometrik tipten polinomlar için açık bir form elde etmeye şimdi başlayabiliriz. $y(x)$ derecesi n olan polinom, yani $y = y_n(x)$ dir. O zaman
$v_n(x) = y_n^{(n)}(x)$ =sabit olur ve $y_n(x)$ için

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\varrho(x)}[\sigma^n(x)\varrho(x)]^n, \quad n = 0,1 \dots \tag{3.34}$$

ifadesi elde edilir ve Eş. 3.34 e Rodrigues formülü denir. Burada $B_n = A_n^{-1}y_n^{(n)}(x)$ normlaştırılmış bir sabittir ve A_n, Eş. 3.33 ile tanımlıdır.

Böylece Eş. 3.1 in polinom çözümleri Eş. 3.34 keyfi sabite kadar tek şekilde tanımlanır. Bu çözümler $\mu_n = 0$ değerine karşılık gelir. Yani,

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'' , \;\; n = 0,1 \ldots \tag{3.35}$$

Türevleri $y_n^{(m)}(x) = v_{mn}(x)$ olan $(n-m)$ -yinci dereceden polinomlar Eş. 3.4 de yerlerine yazıldığında

$$\sigma(x)v''_{mn} + \tau_m(x)v'_{mn} + \mu_m v_{mn} = 0 \tag{3.36}$$

elde edilir ve bunlar da hipergeometrik tipten polinomlardır. $y_n^{(m)}(x)$ için Eş. 3.32 den Rodrigues formülü

$$y_n^{(m)}(x) = \frac{A_{mn}B_n}{\sigma^m(x)\varrho(x)} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} [\sigma^n(x)\varrho(x)] \tag{3.37}$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$A_{mn} = A_m(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n} = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \mu_{kn} \qquad ,A_{0n} = 1 \,; \;\; \mu_{kn} = \mu_k(\lambda_n)$$

şeklindedir. μ_{kn} ler,

$$\mu_{kn} = \mu_k(\lambda_n) = \lambda_n - \lambda_k = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'' - \left(-k\tau' - \frac{1}{2}k(k-1)\sigma''\right)$$

$$= -(n-k)(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma'')$$

olup yukarıda yerine yazılırsa,

$$A_{mn} = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} -(n-k)\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right)$$

ve burada

$$\prod_{k=0}^{m-1}(n-k) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

$$\prod_{k=0}^{m-1}(-1) = (-1)^m \qquad m \leq n$$

olduğundan

$$A_{mn} = \frac{n!}{(n-m)!}\prod_{k=0}^{m-1}(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma'')$$

olarak elde edilir. Beklenildiği gibi n yerine $n-m$ ve $\varrho(x)$ yerine $\varrho_m(x) = \sigma^m(x)\varrho(x)$ yazılırsa Rodrigues formülünden $y_n^{(m)}(x)$, yani Eş. 3.37 elde edilir.

Şimdi Eş. 3.37 Rodrigues formülünün bazı sonuçlarını ele alalım.

1)

$$y_n^{(m)}(x) = \frac{A_{mn}B_n}{\sigma^m(x)\varrho(x)}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}[\sigma^n(x)\varrho(x)]$$

Rodrigues formülünde $m = 1$ alınırsa,

$$y_n'(x) = \frac{A_{1n}B_n}{\sigma(x)\varrho(x)}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[\sigma^n(x)\varrho(x)]$$

olur. Burada,

$$A_{1n} = A_1(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n} = (-1)\prod_{k=0}^{0}\mu_{kn} = (-1)\mu_{0n} = (-1)\mu_0(\lambda_n) = -\lambda_n$$

olup yukarıda yerine yazılırsa,

$$y_n'(x) = -\frac{\lambda_n B_n}{\sigma(x)\varrho(x)}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[\sigma^n(x)\varrho(x)]$$

ve $\varrho_n(x)\sigma(x) = \varrho_{n+1}(x)$ olduğundan $\sigma(x)\varrho(x) = \varrho_1(x)$ olur. O halde,

$$[\sigma^n(x)\varrho(x)] = [\sigma^{n-1}(x)\sigma(x)\varrho(x)] = [\sigma^{n-1}(x)\varrho_1(x)]$$

ve

$$y_n'(x) = -\frac{\lambda_n B_n}{\bar{B}_{n-1}}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{\bar{B}_{n-1}}{\varrho_1(x)}[\sigma^{n-1}(x)\varrho_1(x)] = -\lambda_n\frac{B_n}{\bar{B}_{n-1}}\bar{y}_{n-1}(x) \qquad (3.38)$$

bulunur. Burada, $\bar{y}_n(x)$, $y_n(x)$ ifadesindeki $\varrho(x)$ ile $\varrho_1(x)$ in yer değiştirilmesi ile bulunan bir polinomdur. $\bar{B}_n$, $\bar{y}_n(x)$ için Rodrigues formülündeki normlaştırılmış sabittir.

2) Rodrigues formülü kullanılarak $y_n(x)$ terimlerinde $y_n{}'(x)$ türevi ifade edilebilir. Aslında $\sigma^{n+1}(x)\varrho(x) = \sigma(x)\varrho_n(x)$ ve $(\sigma\varrho_n)' = \tau_n\varrho_n$ olduğundan Eş. 3.34 ve Eş. 3.37 ye göre

$$y_{n+1}(x) = \frac{B_{n+1}}{\varrho(x)}\left\{\tau_n(x)\frac{d^n}{dx^n}[\sigma^n(x)\varrho(x)] + n\tau_n'\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[\sigma^n(x)\varrho(x)]\right\}$$

$$= \frac{B_{n+1}}{B_n}\left[\tau_n(x)y_n(x) - \frac{n}{\lambda_n}\tau_n'\sigma(x)y_n'(x)\right]$$

bulunur. Buradan,

$$\sigma(x)y_n'(x) = \frac{\lambda_n}{n\tau_n'}\left[\tau_n(x)y_n(x) - \frac{B_n}{B_{n+1}}y_{n+1}(x)\right] \tag{3.39}$$

olur.

3) $m = n-1$ için Eş. 3.37 den $y_n(x) = a_nx^n + b_nx^{n-1} + \cdots$ açılımındaki a_n ve b_n katsayıları şu şekilde bulunabilir:

$$y_n^{(n-1)}(x) = n!\,a_nx + (n-1)!\,b_n\,,$$

$$\frac{d}{dx}[\sigma^n(x)\varrho(x)] = \frac{d}{dx}[\varrho_n(x)] = \frac{d}{dx}[\sigma(x)\varrho_{n-1}(x)] = \tau_{n-1}(x)\varrho_{n-1}(x)$$

olduğundan

$$n!\,a_nx + (n-1)!\,b_n = A_{n-1,n}B_n\tau_{n-1}(x)$$

elde edilir. Buradan

$$a_n = \frac{A_{n-1,n}B_n}{n!}\tau_{n-1}' = B_n\prod_{k=0}^{n-1}\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right), \qquad a_0 = B_0$$

$$b_n/a_n = n\tau_{n-1}(0)/\tau_{n-1}' \tag{3.40}$$

bulunur.

3.4. Hipergeometrik Tipteki Polinom Analoglarının Sonlu Farkları ve Onların Türevleri, Rodrigues Formülü

Bölüm 3.2. de verilen $\Delta^m y(x)$ fark türevinin özellikleri, diskret değişkenli klasik ortogonal polinomlar teorisini inşa etmemize yardımcı olur.

$$\sigma(x)\Delta\nabla v_m(x) + \tau_m(x)\Delta v_m(x) + \mu_m v_m(x) = 0$$

eşitliğinde $m = n$ alınırsa,

$$\sigma(x)\Delta\nabla v_n(x) + \tau_n(x)\Delta v_n(x) + \mu_n v_n(x) = 0 \qquad (3.41)$$

elde edilir. Bu eşitlikte eğer $\mu_n = 0$ olursa ve $v_n(x)$ =sabit çözüme sahip ise $v_n(x) = \Delta^n y(x)$ olduğunda bunun anlamı

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''$$

dir. Eş. 3.41 deki n -yinci dereceden polinom olan $y = y_n(x)$ in belli bir çözümü vardır. $\mu_m \neq 0\,, m = 0,1,\dots,n-1$ şartıyla, $v_m(x)$ için Eş.3.13 yeniden aşağıdaki gibi yazılır:

$$v_m(x) = -\frac{1}{\mu_m}[\sigma(x)\nabla v_{m+1}(x) + \tau_m(x)v_{m+1}(x)].$$

Buradan da açıktır ki eğer $v_{m+1}(x)$ bir polinom ise $\mu_n \neq 0$ olduğunda $v_m(x)$ de polinomdur.

$y_n(x)$ i daha açık bir şekilde ifade etmek için Eş. 3.25 kullanılarak Eş. 3.21, $v_m(x)$ ve $v_{m+1}(x)$ arasındaki basit bir ilişki olarak yazılabilir. Aslında

$$\varrho_m(x)v_m(x) = -\frac{1}{\mu_m}\Delta[\sigma(x)\varrho_m(x)\nabla v_m(x)]$$

$$= -\frac{1}{\mu_m}\nabla[\sigma(x+1)\varrho_m(x+1)\Delta v_m(x)]$$

$$= -\frac{1}{\mu_m}\nabla[\varrho_{m+1}(x)v_{m+1}(x)]\,, \qquad (m < n\,)$$

$$\varrho_m v_m = -\frac{1}{\mu_m}\nabla[\varrho_{m+1}v_{m+1}]$$

$$= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right)\left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right)\nabla^2(\varrho_{m+2}v_{m+2}) \tag{3.42}$$

$$= \left(-\frac{1}{\mu_m}\right)\left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right)\cdots\left(-\frac{1}{\mu_{m+n-m}}\right)\nabla^{n-m}(\varrho_{m+n-m}v_{m+n-m})$$

$$= \frac{A_m}{A_n}\nabla^{n-m}(\varrho_n v_n)$$

$$\frac{A_m}{A_n} = \frac{(-1)^m}{(-1)^n}\frac{\mu_0.\,\mu_1\,\ldots\,\mu_{m-1}}{\mu_0.\,\mu_1\,\ldots\,\mu_{m-1}.\mu_m.\,\mu_{m+1}\,\ldots\,\mu_{m+n-m}}$$

olup, buradan

$$A_m = (-1)^m\prod_{k=0}^{m-1}\mu_k\,, \quad A_0 = 1 \tag{3.43}$$

$y = y_n(x)$ ise $v_n(x)$ =sabit

elde edilir. Bu nedenle

$$v_{mn}(x) = \Delta^m y_n(x) = \frac{A_{mn}B_n}{\varrho_m(x)}\nabla^{n-m}[\varrho_n(x)] \tag{3.44}$$

dir. Burada,

$$A_{mn} = A_m(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n} = (-1)^m\prod_{k=0}^{m-1}\mu_{kn}\,, \quad A_{0n} = 1$$

$$\mu_{kn} = \mu_k(\lambda_n) = \lambda_n - \lambda_k = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'' - \left(-k\tau' - \frac{1}{2}k(k-1)\sigma''\right)$$

$$= -(n-k)\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right)$$

$$A_{mn} = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} -(n-k)\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right)$$

$$\prod_{k=0}^{m-1}(n-k) = n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad \prod_{k=0}^{m-1}(-1) = (-1)^m \ m \le n$$

olduğundan

$$A_{mn} = A_m(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n} = \frac{n!}{(n-m)!}\prod_{k=0}^{m-1}\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right), A_{0n} = 1 \tag{3.45}$$

elde edilir.

$$B_n = \frac{\Delta^n y_n(x)}{A_{nn}} = \frac{1}{A_{nn}} y_n^{(n)}(x)$$

olup, Eş. 3.44 de $m = 0$ alınırsa, $y_n(x)$ için daha açık bir ifade

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\varrho(x)} \nabla^n[\varrho_n(x)] \tag{3.46}$$

olarak elde edilir. Böylece Eş. 3.10 daki polinom çözümleri B_n normlaştırılmış faktörü ile Eş.3.46 olarak belirlendi. Bu çözümler Eş. 3.35 deki $\lambda = \lambda_m$ değerlerine de karşılık gelir.

$$\varrho(x) = \varrho(x+m)\prod_{k=1}^{m}\sigma(x+k), \qquad \Delta f(x) = \nabla f(x+1)$$

kullanılarak Eş. 3.46, aşağıdaki formda yazılabilir:

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\varrho(x)}\Delta^n[\varrho_n(x-n)] = \frac{B_n}{\varrho(x)}\Delta^n\left[\varrho(x)\prod_{k=0}^{n-1}\sigma(x-k)\right] \tag{3.47}$$

Eş. 3.44 deki denklem, aynı zamanda klasik ortogonal polinomlar ve onların türevleri için Rodrigues formülünün

$$v_{mn}(x) = \Delta^m y_n(x) = \frac{A_{mn}B_n}{\varrho_m(x)}\nabla^{n-m}[\varrho_n(x)]$$

şeklindeki fark analoğudur.

Rodrigues formülünün bazı sonuçları aşağıda verilmiştir:

1) $y_n(x)$ polinomları ve onların $\Delta y_n(x)$ farkları için Rodrigues formülü bize $\Delta y_n(x)$ ve kendi polinomları arasında bir ilişkiyi verir. Bunu bulmak için

$$\varrho_m(x) = \varrho(x+m)\prod_{k=1}^{m}\sigma(x+k)$$

Rodrigues formülünde $m = 1$ alınırsa,

$$\varrho_1(x) = \varrho(x+1)\sigma(x+1)$$

$$[\varrho_1(x)]_{n-1} = \varrho_1(x+n-1)\prod_{k=1}^{n-1}\sigma(x+k)$$

$$= \varrho(x+n)\sigma(x+n)\prod_{k=1}^{n-1}\sigma(x+k)$$

$$= \varrho(x+n)\prod_{k=1}^{n}\sigma(x+k) = \varrho_n(x)$$

$$A_{1n} = (-1)^1\mu_{0n} = -\mu_o(\lambda_n) = -\lambda_n$$

olur. Bundan dolayı,

$$\Delta y_n(x) = -\frac{\lambda_n B_n}{\varrho_1(x)}\nabla^{n-1}[\varrho_n(x)] = -\lambda_n\frac{B_n}{\bar{B}_{n-1}}\frac{\bar{B}_{n-1}}{\varrho_1(x)}\nabla^{n-1}[\varrho_1(x)]_{n-1}$$

$$= -\lambda_n\frac{B_n}{\bar{B}_{n-1}}\bar{y}_{n-1}(x) \tag{3.48}$$

dir. Burada $y_n(x)$ için yazılan formülde $\varrho(x)$ in $\varrho_1(x)$ ile yer değiştirilmesiyle elde edilen polinom $\bar{y}_n(x)$ dır. $\bar{B}_n$, de $\bar{y}_n$ için elde edilen Rodrigues formülünde normlaştırılmış sabittir.

2) Rodrigues formülü kullanılarak kolayca $\nabla y_n(x)$ farkı ile $y_n(x)$ ve $y_{n+1}(x)$ arasında lineer bir bağıntı elde edilebilir.

$$y_{n+1}(x) = \frac{B_{n+1}}{\varrho(x)}\nabla^{n+1}[\varrho_{n+1}(x)] = \frac{B_{n+1}}{\varrho(x)}\nabla^{n}[\nabla\varrho_{n+1}(x)] = \frac{B_{n+1}}{\varrho(x)}\nabla^{n}[\Delta\varrho_{n+1}(x-1)]$$

$$\Delta\varrho_{n+1}(x-1) = \Delta[\sigma(x)\varrho_n(x)] = \tau_n(x)\varrho_n(x)$$

Bu eşitlik kullanarak ve iki fonksiyon çarpımının farkı özelliğinden,

$$y_{n+1}(x) = \frac{B_{n+1}}{\varrho(x)}\nabla^{n}[\tau_n(x)\varrho_n(x)]$$

$$= \frac{B_{n+1}}{\varrho(x)}\{\tau_n(x)\nabla^{n}[\varrho_n(x)] + n\tau_n'\nabla^{n-1}[\varrho_n(x-1)]\}$$

olup,

$$\nabla y_n(x) = v_{1n}(x-1) = -\frac{\lambda_n B_n}{\sigma(x)\varrho(x)}\nabla^{n-1}[\varrho_n(x-1)]$$

olduğu için Eş. 3.39 ile benzer olan

$$\sigma(x)\nabla y_n(x) = \frac{\lambda_n}{n\tau_n'}\left[\tau_n(x)y_n(x) - \frac{B_n}{B_{n+1}}y_{n+1}(x)\right] \tag{3.49}$$

bağıntısı elde edilir.

3) Rodrigues formülünde $m = n - 1$ alınırsa,

$$y_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \cdots$$

açılımındaki a_n ve b_n ler kolaylıkla hesaplanabilir.

Bu amaçla önce birinci dereceden polinom olan $(n-1)$ -inci fark $\Delta^{n-1}(x^n)$ hesaplanarak, α_n ve β_n in sabit sayılar olduğu

$$\Delta^{n-1}(x^n) = \alpha_n(x + \beta_n)$$

bağıntısı elde edilir. α_n ve β_n i belirlemek için

$\Delta^n(x^n) = \Delta[\alpha_n(x+\beta_n)] = \alpha_n$

incelenir. Aslında

$$\alpha_{n+1}(x+\beta_{n+1}) = \Delta^n(x^{n+1}) = \Delta^{n-1}(\Delta x^{n+1})$$

$$= \Delta^{n-1}[(x+1)^{n+1} - x^{n+1}]$$

$$= \Delta^{n-1}[(n+1)x^n + \frac{(n+1)n}{2}x^{n-1} + \cdots]$$

$$= (n+1)\alpha_n(x+\beta_n) + \frac{(n+1)n}{2}\alpha_{n-1}$$

dir. Bu eşitliğin her iki tarafında aynı kuvvetteki x lerin katsayıları karşılaştırıldığında,

$$\alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n \quad , \quad \alpha_{n+1}\beta_{n+1} = (n+1)\alpha_n\beta_n + \frac{(n+1)n}{2}\alpha_{n-1}$$

olup, her iki taraf $(n+1)\alpha_n$ ile bölünürse,

$$\frac{\alpha_{n+1}\beta_{n+1}}{(n+1)\alpha_n} = \frac{(n+1)\alpha_n\beta_n}{(n+1)\alpha_n} + \frac{\frac{(n+1)n}{2}\alpha_{n-1}}{(n+1)\alpha_n}$$

ve

$\alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n$ ve $\alpha_n = n\alpha_{n-1}$ olduğundan

$$\beta_{n+1} = \beta_n + \frac{1}{2}$$

elde edilir. $\beta_1 = 0$ olduğunda,

$$\beta_2 = \beta_1 + \frac{1}{2}$$

$$\beta_3 = \beta_2 + \frac{1}{2}$$

$\vdots$

$$\beta_n = \beta_{n-1} + \frac{1}{2}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\beta_n = \beta_1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n-1}{2}$$

bulunur. Ayrıca,

$\alpha_1 = 1$ ve $\beta_1 = 0$ olduğunda,

$n = 0$ için, $\alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n \Rightarrow \alpha_1 = 1\alpha_0$, $\alpha_0 = 1$ olur.

$$\alpha_1 = 1.\alpha_0$$
$$\alpha_2 = 2.\alpha_1$$
$$\alpha_3 = 3.\alpha_2$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n = n.\alpha_{n-1}$$

eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa,

$$\alpha_n = 1.2 \dots n = n!$$

olur. Buna göre,

$$\Delta^{n-1}(x^n) = \alpha_n(x + \beta_n) = n!\left(x + \frac{n-1}{2}\right)$$

dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}\Delta^{n-1}y_n(x) &= \Delta^{n-1}(a_n x^n + b_n x^{n-1} + \cdots) \\ &= a_n \Delta^{n-1}x^n + b_n \Delta^{n-1}x^{n-1} \\ &= a_n \alpha_n(x + \beta_n) + b_n \alpha_{n-1} \\ &= n!\, a_n\left(x + \frac{n-1}{2}\right) + (n-1)!\, b_n\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\nabla\varrho_n(x) = \Delta\varrho_n(x-1) = \Delta[\sigma(x)\varrho_{n-1}(x)] = \tau_{n-1}(x)\varrho_{n-1}(x)$$

dir. Sonuç olarak Eş. 3.44 deki Rodrigues formülünde $m = n - 1$ alınırsa,

$$v_{1n} = \Delta^{n-1} y_n(x) = \frac{A_{n-1,n} B_n}{\varrho_{n-1}(x)} \nabla^{n-n+1}[\varrho_n(x)]$$

$$= \Delta^{n-1} y_n(x) = n!\, a_n \left(x + \frac{n-1}{2}\right) + (n-1)!\, b_n = A_{n-1,n} B_n \tau_{n-1}(x)$$

olup,

$$a_n = \frac{A_{n-1,n} B_n}{n!} \tau'_{n-1} = B_n \prod_{k=0}^{n-1} \left(\tau' + \frac{n+k-1}{2} \sigma''\right), \quad a_0 = B_0 \tag{3.50}$$

$$\frac{b_n}{a_n} = n \frac{\tau_{n-1}(0)}{\tau'_{n-1}} - \frac{1}{2} n(n-1)$$

$$= n \frac{\tau(0) + (n-1)[\sigma'(0) + \tau'/2]}{\tau' + (n-1)\sigma''} \tag{3.51}$$

olarak bulunur.

3.5. Klasik Ortogonal Polinomların Ortogonallik Özelliği

$\sigma(x) y'' + \tau(x) y' + \lambda y = 0$

denkleminin polinom çözümleri ortogonallik özelliğine sahiptir. Bu özelliği elde etmek için önce $y_n(x)$ ve $y_m(x)$ ler, bu denklemde yerlerine yazılır, $\varrho(x)$ ile çarpılır ve

$$[\sigma(x)\varrho(x) y'_n]' + \lambda_n \varrho(x) y_n = 0, \qquad [\sigma(x)\varrho(x) y'_m]' + \lambda_m \varrho(x) y_m = 0$$

olarak self-adjoint forma getirilirler. Birinci eşitlik $y_m(x)$ ile ikinci eşitlik $y_n(x)$ ile çarpıldıktan sonra taraf tarafa çıkarılırsa,

$$[\sigma(x)\varrho(x) y'_n]' y_m + \lambda_n \varrho(x) y_n y_m - [\sigma(x)\varrho(x) y'_m]' y_n - \lambda_m \varrho(x) y_m y_n = 0$$

$$\Rightarrow [\sigma(x)\varrho(x)]' y'_n y_m + y_m y''_n [\sigma(x)\varrho(x)] + \lambda_n \varrho(x) y_n y_m$$

$$-[\sigma(x)\varrho(x)]' y'_m y_n - y_n y''_m [\sigma(x)\varrho(x)] - \lambda_m \varrho(x) y_m y_n = 0$$

$$[\sigma(x)\varrho(x)][y_m y''_n - y_n y''_m] + [\sigma(x)\varrho(x)]'[y_m y'_n - y_n y'_m] + (\lambda_n - \lambda_m)\varrho(x) y_n y_m = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\{\sigma(x)\varrho(x)W[y_m(x)y_n(x)]\} = (\lambda_m - \lambda_n)\varrho(x)y_n y_m$$

olur. Bu son eşitliğin her iki yanı (a, b) aralığında, a dan b ye integre edilirse,

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b \varrho(x)y_n(x)y_m(x)\,dx = \sigma(x)\varrho(x)W[y_m(x)y_n(x)]_a^b$$

olur. Burada,

$$W(u, v) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = uv' - vu'$$

wronskiyendir.

$\varrho(x)$ fonksiyonu bazı a ve b ler için

$$\sigma(x)\varrho(x)x^k|_{x=a,b} = 0, \qquad k = 0,1 \ldots \tag{3.52}$$

şartını sağlasın. $W[y_m(x), y_n(x)]$, x in bir polinomu olduğundan elde edilen eşitliğin sağ tarafı sıfırdır. Bundan dolayı $\lambda_m \neq \lambda_n$ olduğunda

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\varrho(x)dx = 0 \tag{3.53}$$

elde edilir. Dikkat edilmelidir ki Eş. 3.53 deki $\lambda_m \neq \lambda_n$ şartı

$$\tau' + \frac{1}{2}(n + m - 1)\sigma'' \neq 0 \tag{3.54}$$

ise $m \neq n$ şartı ile yer değiştirebilir.

a ve b sonlu değerlerinde Eş. 3.52 şartının sağlanması için $\varrho(x)$ fonksiyonunun

$$\sigma(x)\varrho(x)|_{x=a} = 0 \qquad \sigma(x)\varrho(x)|_{x=b} = 0$$

sınır şartlarını sağlaması gereklidir. Fakat örneğin a sonlu bir değer $b = +\infty$ ise o zaman Eş. 3.52 şartı

$$\sigma(x)\varrho(x)|_{x=a} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \sigma(x)\varrho(x)x^k = 0, \qquad k = 0,1,\ldots$$

şartlarına denktir. Diğer olası durumlar da benzer şekilde göz önüne alınabilir. $\varrho(x)$ fonksiyonu Eş. 3.52 şartını sağladığında hipergeometrik tipteki $y_n(x)$ polinomları klasik ortogonal polinomlar olarak bilinirler. Bu polinomlar genellikle (a,b) aralığında $\varrho(x) > 0$ ve $\sigma(x) > 0$ koşulları altında göz önüne alınırlar.

Klasik ortogonal polinom sistemi $\{y_n(x)\}$

$$\int_a^b f^2(x)\varrho(x)dx < \infty$$

kare integrallenebilirlik şartını sağlayan $f(x)$ fonksiyonu için kapalıdır. Yani,

$$\int_a^b f(x)y_n(x)\varrho(x)dx = 0, \qquad n = 0,1\ldots$$

$x \in (a,b)$ için $f(x) = 0$ dır.

Hipergeometrik tipteki polinomların türevlerinin özelliklerinden $y_n^{(k)}(x)$, klasik ortogonal polinomların türevidir. $y_n^{(k)}(x)$ ler klasik polinomlardır. (a,b) aralığında $\varrho_k(x) = \sigma^k(x)\varrho(x)$ ortogonal ağırlığı ile

$$\int_a^b y_m^{(k)}(x)y_n^{(k)}(x)\varrho_k(x)dx = \delta_{mn}d_{kn}^2 \tag{3.55}$$

$y_n^{(k)}$ polinomlarının d_{kn}^2 kare normu $y_n(x)$ polinomlarının $d_n^2 = d_{0n}^2$ kare normu cinsinden ifade edilebilir. $y_n^{(k)}(x)$ için

$(\sigma \varrho_n v_n')' + \mu_n \varrho_n v_n = 0$

eşitliği kullanılırsa,

$$\frac{d}{dx}\left[\varrho_{k+1}(x) y_n^{(k+1)}(x)\right] + \mu_{kn} \varrho_k(x) y_n^{(k)}(x) = 0 \tag{3.56}$$

elde edilir. Bu denklem $y_n^{(k)}(x)$ ile çarpılır ve (a, b) aralığında integre edilirse, kısmi integralinin alınmasından sonra

$$\varrho_{k+1}(x) y_n^{(k+1)}(x) y_n^k(x) - \int_a^b [y_n^{(k+1)}(x)]^2 \varrho_{k+1}\,(x) dx + \mu_{kn} \int_a^b [y_n^k(x)]^2 \varrho_k\,(x) dx = 0$$

olur. Eş. 3.52 şartından dolayı integrallenmiş terim sıfırdır. Ve bundan dolayı $d_{k+1,n}^2 = \mu_{kn} d_{kn}^2$ dir. Böylece tümevarımdan

$$d_{mn}^2 = d_{nn}^2 \Big/ \prod_{k=m}^{n-1} \mu_{kn} \tag{3.57}$$

bulunur.

$$d_{nn}^2 = \int_a^b \left[y_n^{(n)}(x)\right]^2 \sigma^n(x) \varrho(x)\, dx = (a_n n!)^2 \int_a^b \sigma^n(x) \varrho(x)\, dx \tag{3.58}$$

olduğundan $m = 0,1, \dots, n-1$ olmak üzere d_{mn}^2 nin hesaplanması $\int_a^b \sigma^n(x) \varrho(x)\, dx$ integralinin hesaplanmasına indirgenebilir. Sonuç olarak $d_n^2 = d_{on}^2$ için

$$d_n^2 = (-1)^n A_{nn} B_n^2 \int_a^b \sigma^n(x) \varrho(x)\, dx \tag{3.59}$$

elde edilir.

3.5.1. Ortogonal polinomların genel özellikleri

Jacobi, Laguerre ve Hermite polinomlarının bazı özellikleri direk olarak onların ortogonalliğinden yararlanarak incelenebilir. Bu kısımda $\varrho(x) > 0$ ağırlık fonksiyonuna göre bir (a, b) aralığında ortogonal $P_n(x)$ polinomlarının bazı genel özelliklerini göz önüne alacağız. $P_n(x)$ in başkatsayısını reel ve sıfırdan farklı kabul edebiliriz.

Polinomların özellikleri göz önüne alındığında her n -yinci dereceden $q_n(x)$ polinomu $k = 0,1, \dots, n$ olmak üzere $P_k(x)$ ortogonal polinomlarının bir lineer kombinasyonu olarak

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{kn} P_k(x)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, c_{kn} katsayıları,

$$\int_a^b P_n(x) P_m(x) \varrho(x) dx = 0, \qquad m \neq n \tag{3.60}$$

ortogonallik özelliğinden,

$$c_{kn} = \frac{1}{d_k^2} \int_a^b q_n(x) P_k(x) \varrho(x) dx \tag{3.61}$$

formülü ile kolayca belirlenebilir. Burada,

$$d_k^2 = \int_a^b P_k^2\,(x) \varrho(x) dx$$

dır. Eş. 3.60 ortogonallik bağıntısının,

$$\int_a^b P_n(x)x^m\varrho(x)dx = 0 \qquad (m < n) \tag{3.62}$$

ifadesine denk olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 3.3.

α_n, $\beta_n$ve γ_n sabitler olmak üzere tüm ortogonal polinomlar

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x),$$

bağıntısına sahiptirler.

İspat

$$xP_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{kn} P_k(x) \tag{3.63}$$

ve

$$c_{kn} = \frac{1}{d_k^2}\int_a^b P_k(x)xP_n(x)\varrho(x)dx \tag{3.64}$$

ifadeleri göz önüne alınsın. $xP_k(x)$, $(k+1)$ –inci dereceden bir polinom olduğu için $k+1 < n$ olduğunda $P_n(x)$ in ortogonallik özelliğinden $c_{kn} = 0$ dır. Bundan dolayı, $\alpha_n = c_{n+1,n}$ $\beta_n = c_{nn}$ $\gamma_n = c_{n-1,n}$ için Eş. 3.63, Eş. 3.64 şeklinde yazılabilir. $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ katsayıları $P_n(x)$ de d_n^2 kare normu ve a_n , b_n baş katsayıları cinsinden ifade edilebilir. Eş.3.64 den $d_k^2 c_{kn} = d_n^2 c_{nk}$ olduğu görülür.

$\alpha_{n-1} = c_{n,n-1}$, $\gamma_n = c_{n-1,n}$ olduğundan k yerine $n-1$ yazılırsa,

$$\gamma_n = \alpha_{n-1}\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}$$

elde edilir. Diğer yandan Eş. 3.63 ün sağ ve sol taraflarındaki en yüksek derecedeki terimlerin katsayıları karşılaştırılırsa,

$a_n = \alpha_n a_{n+1}$, $b_n = \alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n$

elde edilir. Böylece

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \ , \quad \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \ , \quad \gamma_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2} \tag{3.65}$$

bulunur.

3.6. Diskret Değişkenli Klasik Ortogonal Polinomlar İçin Ortogonallik Özelliği

$y_n(x)$ polinom çözümleri,

$\sigma(x)\nabla\Delta y(x) + \tau(x)\Delta y(x) + \lambda y = 0$

eşitliğindeki katsayıların belli sınırlamaları altında ortogonallik özelliğine sahiptir. Gerçekten, $y_n(x)$ ve $y_m(x)$ bu denklemin iki çözümü olsunlar. Bu durumda,

$$\Delta[\sigma(x)\varrho(x)\nabla y_n(x)] + \lambda_n\varrho(x)y_n(x) = 0, \qquad \Delta[\sigma(x)\varrho(x)\nabla y_m(x)] + \lambda_m\varrho(x)y_m(x) = 0$$

şeklinde self – adjoint formdaki denklemler yazılabilir. Birinci eşitlik $y_m(x)$ ile ikinci eşitlik $y_n(x)$ ile çarpıldıktan sonra bu iki eşitlik taraf tarafa çıkartılırsa,

$$\Delta[\sigma(x)\varrho(x)\nabla y_m(x)]y_n(x) - \Delta[\sigma(x)\varrho(x)\nabla y_n(x)]y_m(x)$$
$$+(\lambda_m - \lambda_n)\varrho(x)y_m(x)y_n(x) = 0$$

$$\Delta\{\sigma(x)\varrho(x)[y_m(x)\nabla y_n(x) - y_n(x)\nabla y_m(x)]\} = (\lambda_m - \lambda_n)\varrho(x)y_m(x)y_n(x)$$

olur. Şimdi $x = x_i,\ x_{i+1} = x_i + 1 \quad a \le x_i \le b - 1$ için her iki tarafın toplamı alınırsa,

$$(\lambda_m - \lambda_n)\sum_{x_i=a}^{b-1} y_m(x_i)y_n(x_i)\varrho(x_i) = \sigma(x)\varrho(x)[y_m(x)\nabla y_n(x) - y_n(x)\nabla y_m(x)]_a^b$$

elde edilir.

$y_m\nabla y_n - y_n\nabla y_m$ ifadesi x'e bağlı bir polinomdur. Eş. 3.10 un polinom çözümleri $[a, b-1]$ aralığında ortogonaldir.

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, m = n \\ 0\,, m \neq n \end{cases}$$

$$\sigma(x)\varrho(x)x^l|_a^b = 0 \qquad (l = 0,1,\ldots,) \tag{3.67}$$

sınır koşulları altında Eş. 3.66 nın doğru olması koşulu ile $y_n(x)$ polinomlarına

diskret değişkenli klasik ortogonal polinomlar denir. Bunlar genellikle $a \leq x_i \leq b - 1$ için $\varrho(x_i) > 0$ koşulu altında geçerlidir.

$y_n(x)$ in fark türevlerinin ortogonalik özelliğini düşünelim. $\Delta y_n(x) = v_{1n}(x)$ polinomları, $y_n(x)$ eşitliğinde $\varrho(x)$ in $\varrho_1(x) = \sigma(x+1)\varrho(x+1) = [\sigma(x) + \tau(x)]\varrho(x)$ ve λ nın $\mu_1 = \lambda + \tau'$ ile yer değiştirmesiyle elde edilen eşitliği sağlar. $\varrho_1(x)$ fonksiyonu Eş. 3.67 dekine benzer olarak

$$\sigma(x)\varrho_1(x)x^l|_{x=a,b-1} = 0 \qquad (l = 0,1,\ldots,)$$

şartını sağlar.

Böylece $\Delta y_n(x)$ polinomları

$$\sum_{x_i=a}^{b-2} v_{1m}(x_i)v_{1n}(x_i)\varrho_1(x_i) = \delta_{mn}d_{1n}^2$$

şeklindeki ortogonallik özelliğine sahiptir.

Benzer şekilde devam edilirse, Eş. 3.66 nın sağlanması koşuluyla,

$$\sigma(x)\varrho_k(x)x^l|_{x=a,b-k} = 0 \qquad (l = 0,1,\ldots,) \tag{3.68}$$

şartının sağlandığı gösterilebilir.

Ayrıca $\Delta^k y_n(x) = v_{kn}(x)$ polinomları için

$$\sum_{x_i=a}^{b-k-1} v_{km}(x_i)v_{kn}(x_i)\varrho_1(x_i) = \delta_{mn}d_{kn}^2$$

olarak elde edilir.

Eğer $\varrho(a) > 0$ alınırsa ve

$\sigma(x_i) > 0$ için $a + 1 \leq x_i \leq b - 1$

$\sigma(x_i) + \tau(x_i) > 0$ için $a \leq x_i < b - 2$

olmak üzere, $\Delta[\sigma(x)\varrho(x)] = \tau(x)\varrho(x)$ fark denklemi,

$$\tau(x)\varrho(x) = \sigma(x)\Delta\varrho(x) + \varrho(x+1)\Delta\sigma(x)$$

$$= \sigma(x)[\varrho(x+1) - \varrho(x)] + \varrho(x+1)[\sigma(x+1) - \sigma(x)]$$

$$= \sigma(x)\varrho(x+1) - \sigma(x)\varrho(x) + \varrho(x+1)\sigma(x+1) - \sigma(x)\varrho(x+1)$$

$$\Longrightarrow \tau(x)\varrho(x) + \sigma(x)\varrho(x) = \varrho(x+1)\sigma(x+1)$$

$$\Longrightarrow \varrho(x)[\tau(x) + \sigma(x)] = \varrho(x+1)\sigma(x+1)$$

$$\Longrightarrow \frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = \frac{\sigma(x) + \tau(x)}{\sigma(x+1)}$$

formunda yeniden yazılabilir. Ayrıca $\varrho_k(x)$ için

$\varrho_k(x_i) > 0$ için $a \leq x_i \leq b - k - 1 \quad (k = 0,1, \dots)$

dir.

Şimdi de a ve b nin seçimleri hakkında kabullenmeleri ve $[a, b-1]$ ortogonal aralığında $\varrho(x_i)$ ağırlık fonksiyonu için pozitiflik şartını inceleyelim. Eğer a sonlu ise $\varrho(a) > 0$ hipoteziyle $a, \sigma(x)$ in bir köküdür. $x \to x + a$ değişkenin lineer değişimi denklemin tipini korudukça eğer $\sigma(x) \neq$ sabit ise $\sigma(0) = 0$ almak her zaman mümkündür. Yani $a = 0$ kabul edilebilir. Eğer b sonlu ise iki fonksiyonun çarpımı kullanılarak,

$$\sigma(b)\varrho(b) = [\sigma(b-1) + \tau(b-1)]\varrho(b-1)$$

elde edilir. $\varrho(b-1) > 0$ oldukça

$$\sigma(b-1) + \tau(b-1) = 0$$

olur.

$$\lim_{a\to\infty} x^l \varrho(x) = 0 \qquad (l = 0,1,\dots)$$

$b = +\infty$ olduğunda Eş. 3.67 deki sınır şartları sağlanır. Benzer düşünce $a = -\infty$ olduğunda da uygulanır.

Tam kare normundaki d_n^2 leri hesaplamak için, tam kare normları olan d_{kn}^2 ve $d_{k+1,n}^2$ arasında bir bağıntı aşağıdaki şekilde bulunabilir:

$$d_{kn}^2 = \sum_{x_i=a}^{b-k-1} v_{kn}^2(x_i)\varrho_k(x_i) \qquad , \quad d_{0n}^2 = d_n^2 \quad , \quad v_{kn}(x) = \Delta^k y_n(x)$$

dir. $v_{kn}(x)$ için bir fark denklemi,

$$\Delta[\sigma(x)\varrho_k(x)\nabla v_{kn}(x)] + \mu_{kn}\varrho_k(x)v_{kn}(x) = 0$$

şeklindedir. Burada $\mu_{kn} = \mu_k(\lambda)|_{\lambda=\lambda_n} = \lambda_n - \lambda_k$ dır.

$y_n(x)$ ile çarpılıp $x = x_i$ için $a \le x_i \le b - k - 1$ değerleri üzerinden toplam alınırsa,

$$\sum_i v_{kn}(x_i)\Delta[\sigma(x_i)\varrho_k(x_i)\nabla v_{kn}(x_i)] + \mu_{kn} d_{kn}^2 = 0$$

olur. Burada da

$$\Delta v_{kn}(x) = v_{k+1,n}(x) \ , \quad \sigma(x+1)\varrho_k(x+1) = \varrho_{k+1}(x)$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\sum_i v_{kn}(x_i)\Delta[\sigma(x_i)\varrho_k(x_i)\nabla v_{kn}(x_i)] = \sigma(x)\varrho_k(x)\nabla v_{kn}(x)v_{kn}(x)|_a^{b-k} - d_{k+1,n}^2$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafının birinci kısmı sıfır oldukça Eş. 3.68 sınır şartlarından,

$$d_{kn}^2 = \frac{1}{\mu_{kn}} d_{k+1,n}^2$$

elde edilir. Böylece,

$$d_n^2 = d_{0n}^2 = \frac{1}{\mu_{0n}} d_{1n}^2 = \frac{1}{\mu_{on}} \frac{1}{\mu_{1n}} d_{2n}^2 = \cdots = \frac{d_{nn}^2}{\prod_{k=0}^{n-1} \mu_{kn}} = \frac{v_{nn}^2(x)}{\prod_{k=0}^{n-1} \mu_{kn}} S_n$$

yazılabilir. Şimdi diskret değişkenli klasik ortogonal polinomlar için norm ifadelerini bulalım.

$$A_{nn} = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_{kn} \,, \quad v_{nn} = A_{nn} B_n$$

eşitliği sağlandıkça

$$d_n^2 = (-1)^n A_{nn} B_n^2 S_n \tag{3.69}$$

dir. Burada

$$S_n = \sum_{x_i=a}^{b-n-1} \varrho_n(x_i) \tag{3.70}$$

şeklindedir.

$n = b - a - 1$ $\quad$ ($b - a = N$ sonlu olduğunda) için S_n toplamı sadece bir terim bulundurur ve aslında

$$S_{N-1} = \varrho_{n-1}(a) \tag{3.71}$$

olduğu kolayca hesaplanır.

$n < N - 1$ için S_n i hesaplamak için ${S_n}/{S_{n+1}}$ oranını hesaplayabilmek yeterlidir.

Bunu yapmak için $\varrho_n(x)$ ve $\varrho_{n+1}(x)$ arasındaki ilişkiyi kullanarak Eş. 3.70 deki ifade S_{n+1} için yazılırsa,

$$S_{n+1} = \sum_{x_i=a}^{b-n-2} \varrho_{n+1}(x_i) = \sum_{x_i=a}^{b-n-2} \sigma(x_i + 1)\varrho_n(x_i + 1) = \sum_{x_i=a}^{b-n-1} \sigma(x_i)\varrho_n(x_i)$$

olur. $\sigma(x)$ birinci dereceden polinom olan $\tau_n(x)$ in kuvvetlerine genişletilirse,

$$\sigma(x) = A\tau_n^2(x) + B\tau_n(x) + C$$

olup, $\varrho_n(x)$ için olan eşitlik kullanılarak ve parça parça toplam alarak,

$$S_{n+1} = \sum_i [A\tau_n(x_i) + B]\tau_n(x_i)\varrho_n(x_i) + CS_n$$

$$= \sum_i [A\tau_n(x_i) + B]\Delta[\sigma(x_i)\varrho_n(x_i)] + CS_n$$

$$= -\sum_i \sigma(x_i + 1)\varrho_n(x_i + 1)\Delta[A\tau_n(x_i) + B] + CS_n$$

$$= -A\tau_n' S_{n+1} + CS_n$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{1 + A\tau_n'}{C} = \frac{1 + \sigma''/(2\tau_n')}{\sigma(x_n^*)} \tag{3.72}$$

x_n^* , $\tau_n(x) = 0$ denkleminin bir kökü ve $\sigma(x_n^*) = C$, $\sigma'' = 2A(\tau_n')^2$ dir.

Eş. 3.69-3.72 arasındaki formüller yardımıyla

$$d_n^2 = (-1)^n A_{nn} B_n^2 \varrho_{N-1}(a) \prod_{k=n}^{N-2} [\frac{1 + \sigma''/(2\tau_k')}{\sigma(x_k^*)}]$$

elde edilir.

$N = b - a$, $\tau_k' = \tau' + k\sigma''$, x_k^* $\tau_k(x) = 0$ denkleminin bir köküdür. Yani,

$$\tau(x) + k\left[\sigma'(x) + \tau' + \tfrac{1}{2}k\sigma''\right] = 0$$

dır.

4. BAZI ÖZEL POLİNOMLAR

4.1. Hermite, Laguerre ve Jacobi Polinomları

- Eş. 3.29 da

$\sigma(x) = 1$ için ağırlık fonksiyonu $\varrho(x) = e^{-x^2}$ seçilirse,

$$(\sigma\varrho)' = \left(1.e^{-x^2}\right)' = -2x\, e^{-x^2} = -2x\, \varrho(x) = \tau(x)\varrho(x)$$

olup, $\tau(x) = -2x$ olur ve $B_n = (-1)^n$ olmak üzere, $y_n(x)$ polinomları Hermite polinomları olarak adlandırılır ve $H_n(x)$ ile gösterilir.

Eş.3.34 den Hermite polinomlarının Rodrigues formülü

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

şeklindedir. Hermite polinomları ve onların türevleri $(-\infty, \infty)$ aralığında ortogonaldir.

Eş.3.35 den,

$$\lambda_n = -n\,(-2x)' - \frac{1}{2}\, n(n-1)(1)'' = 2n$$

dir.

$$a_n = B_n \prod_{k=0}^{n-1} (\tau' + \frac{n+k-1}{2}\, \sigma'')$$

eşitliğinde B_n , τ ve σ değerleri yazılırsa,

$$a_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} (-2 + \frac{n+k-1}{2}\, 0) = (-1)^n(-2)^n = 2^n$$

elde edilir.

$$\frac{b_n}{a_n} = n\frac{\tau_{n-1}(0)}{\tau'_{n-1}}$$

eşitliğinden $b_n = 0$ olur.

Eş.3.59 dan Hermite polinomlarının normu,

$$d_n^2 = (-1)^n n!\,[(-1)^n]^2(-2)^n \int_{-\infty}^{\infty} 1\ e^{-x^2}\,dx = 2^n n!\sqrt{\pi}$$

olarak bulunur.

Eş.3.65 den sırasıyla α_n , β_n ve γ_n

$$\alpha_n = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \quad , \quad \beta_n = \frac{0}{2^n} - \frac{0}{2^{n+1}} = 0 \quad , \quad \gamma_n = \frac{2^{n-1}}{2^n}\,\frac{2^n n!\sqrt{\pi}}{2^{n-1}(n-1)!\sqrt{\pi}} = n$$

olarak bulunurlar.

- Eş. 3.29 da

$\sigma(x) = x$ için ağırlık fonksiyonu $\varrho(x) = x^\alpha e^{-x}$ seçilirse,

$$(\sigma\varrho)' = (x\,x^\alpha e^{-x})' = (\alpha+1)x^\alpha e^{-x} - x^{\alpha+1}e^{-x} = x^\alpha e^{-x}[\alpha+1-x] = \varrho(x)\tau(x)$$

olup, $\tau(x) = 1+\alpha-x$ bulunur. $B_n = \frac{1}{n!}$ olmak üzere, $y_n(x)$ polinomları Laguerre polinomları olarak adlandırılır ve $L_n(x)$ ile gösterilirler.

Eş. 3.34 den Laguerre polinomlarınn Rodrigues formülü

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!}e^x x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}(x^{n+\alpha}e^{-x})$$

şeklindedir. Laguerre polinomları ve onların türevleri $a = 0$, $b = \infty$, $\alpha > -1$ olduğunda ortogonaldir. Eş. 3.35 den,

$$\lambda_n = -n(1+\alpha-x)' - \frac{1}{2}n(n-1)(x)'' = n$$

bulunur.

$$a_n = B_n \prod_{k=0}^{n-1} (\tau' + \frac{n+k-1}{2}\ \sigma'')$$

eşitliğinde B_n , τ ve σ değerleri yerlerine yazılırlarsa,

$$a_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (-1 + \frac{n+k-1}{2} 0) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

elde edilir.

$$b_n = (-1)^{n-1} \frac{n+\alpha}{(n-1)!}$$

bulunur.

Eş. 3.59 dan, Laguerre polinomunun normu

$$d_n^2 = (-1)^n n!\,(-1)^n \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \int_0^\infty x^n x^\alpha e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \int_0^\infty x^n x^\alpha e^{-x} dx = \frac{1}{n!} \Gamma(n+\alpha+1)$$

olarak elde edilir.

Eş.3.65 den sırasıyla α_n , β_n ve γ_n ler,

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(n+1)!}{(-1)^{n+1}} = -(n+1)$$

$$\beta_n = \frac{(-1)^n}{(-1)} \frac{n+\alpha}{(n-1)!} \frac{n!}{(-1)^n} - \frac{(-1)^n (n+\alpha+1)}{n!} \frac{(n+1)!}{(-1)^n} = \alpha + 2n + 1$$

$$\gamma_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{n!}{(-1)^n} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \frac{(n-1)!}{\Gamma(\alpha+n)} = (-n) \frac{1}{n} \frac{(\alpha+n)!}{(\alpha+n-1)!} = -(\alpha+n)$$

şeklinde bulunurlar.

- Eş. 3.29 da,

$\sigma(x) = 1 - x^2$ için ağırlık fonksiyonu $\varrho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ seçilirse,

$$(\sigma\varrho)' = \left[(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(1-x^2)\right]' = \left[(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}\right]'$$

$$= -(\alpha+1)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta+1} + (\beta+1)(1+x)^{\beta}(1-x)^{\alpha+1}$$

$$= (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}[-(\alpha+1)(1+x) + (\beta+1)(1-x)]$$

$$= (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}[-\alpha - \alpha x - 1 - x + \beta - \beta x + 1 - x]$$

$$= (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}[-x(\alpha+\beta+2) + (\beta-\alpha)]$$

$$= \varrho(x)\tau(x)$$

olup, $\tau(x) = -x(\alpha+\beta+2) + (\beta-\alpha)$ bulunur. $B_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$ olmak üzere, $y_n(x)$ polinomları Jacobi polinomları olarak adlandırılır ve $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ile gösterilir.

Eş. 3.34 den Jacobi polinomlarının Rodrigues formülü,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}]$$

şeklindedir. Jacobi polinomları ve onların türevleri $a = -1$, $b = 1$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$ olduğunda ortogonaldir.

Eş. 3.35 den,

$$\lambda_n = -n[\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x]' - \frac{1}{2}n(n-1)(1-x^2)''$$

$$= n(\alpha+\beta+2) + n(n-1) = n(\alpha+\beta+n+1)$$

bulunur.

$$a_n = B_n \prod_{k=0}^{n-1}(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma'')$$

eşitliğinde B_n , τ ve σ değerleri yerlerine yazılırlarsa,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \prod_{k=0}^{n-1} \left[-(\alpha+\beta+2) + \frac{n+k-1}{2}(-2) \right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \prod_{k=0}^{n-1} -1(\alpha+\beta+n+1)$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!} [(-1)^n (\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+2) \ldots (\alpha+\beta+n+n)]$$

olup, Eş. 2.3 den,

$$(\alpha+\beta+n+1)_n = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}$$

yazılabilir. Böylece

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (-1)^n \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}$$

olarak elde edilir.

$$A_{nn} = \frac{n!}{(n-n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (\tau' + \frac{n+k-1}{2} \sigma'') = n! \prod_{k=0}^{n-1} [-(\alpha+\beta+2) + (-n-k+1)]$$

$$= n! \prod_{k=0}^{n-1} (-1)(\alpha+\beta+n+k+1) = n!\,(\alpha+\beta+n+1) \ldots (\alpha+\beta+n+n)$$

$$= n!\,(\alpha+\beta+n+1)_n$$

olup, Eş. 3.59 da yerine yazılmasıyla, Jacobi polinomlarının normu,

$$d_n^2 = (-1)^n n!\,(\alpha+\beta+n+1)_n \frac{(-1)^{2n}}{[2^n n!]^2} \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}\, dx$$

$$= (-1)^n n!\,(\alpha+\beta+n+1)_n \frac{(-1)^{2n}}{[2^n n!]^2} 2^{\alpha+\beta+2n+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+1} 2^{2n}}{2^{2n} n!} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\beta+\alpha+1)}$$

şeklinde elde edilir.

Eş.3.65 den sırasıyla α_n , β_n ve γ_n ler,

$$\alpha_n = \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n n!\,\Gamma(\,\alpha+\beta+n+1)}\;\frac{2^{n+1}(n+1)!\,\Gamma(\,\alpha+\beta+n+2)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+3)}$$

$$= \frac{(2n+\alpha+\beta)!\,(n+1)2(\alpha+\beta+n+1)!}{(\alpha+\beta+n)!\,(\alpha+\beta+2n+2)!}$$

$$= \frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)}$$

$$\beta_n = \left[\frac{(\alpha-\beta)\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{2^n(n-1)!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\;\frac{(\alpha+\beta+n+2)}{2(n+1)}\right]$$

$$-\left[\frac{(\alpha-\beta)\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)}{2^{n+1}(n)!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}\;\frac{(\alpha+\beta+n+3)}{2(n+2)}\right]$$

olup, burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\beta_n = \frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$$

olur.

$$\gamma_n = \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta-1)}{2^{n-1}(n-1)!\,\Gamma(\,\alpha+\beta+n)}\;\frac{2^n n!\,\Gamma(\,\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\;\frac{(n-1)!\,(2n+\alpha+\beta-1)\Gamma(n+\alpha+\beta)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)}$$

olup, burada da gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$\gamma_n = \frac{(2n+\alpha+\beta-2)!\,(n+\alpha)!\,(n+\beta)!\,(2n+\alpha+\beta-1)2}{(2n+\alpha+\beta)!\,(n+\alpha-1)!\,(n+\beta-1)!\,(2n+\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}$$

olarak elde edilir.

Jacobi polinomlarının bazı özel durumları aşağıda verilmiştir.

a) Jacobi polinomunda $\alpha = \beta = 0$ alınırsa, $P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$ Legendre polinomları elde edilir.

b) Jacobi polinomunda $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ alınırsa, $T_n(x) = \frac{n!}{(1/2)_n} P_n^{\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)}(x)$ olarak birinci çeşit Chebyshev polinomları elde edilir.

c) Jacobi polinomunda $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ alınırsa, $U_n(x) = \frac{(n+1)!}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} P_n^{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}(x)$ olarak ikinci çeşit Chebyshev polinomları elde edilir.

d) Jacobi polinomları ile Gegenbauer polinomları arasındaki bağıntı da

$$C_n^{\lambda}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{\left(\lambda+1/2\right)_n} P_n^{\left(\frac{\lambda-1}{2},\frac{\lambda-1}{2}\right)}(x)$$

şeklindedir.

Örnek

$T_n(x) = \cos(narccosx)$ Chebyshev polinomları ve $P_n^{(\alpha,\beta)}$ Jacobi polinomları arasındaki bağıntıyı kuralım.

$$cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\,\varphi = \cos(n\varphi + n) + \cos\,(n\varphi - \varphi)$$

$$= (\cos n\varphi\ cos\varphi) - (sinn\varphi sin\varphi) + (cosn\ cos\varphi) + (sinn\varphi\ sin\varphi) = 2cos\varphi cosn\varphi$$

$x = cos\varphi$ ve tümevarım kullanılarak $T_n(x)$ in $a_n = 2^{n-1}$ $(a_0 = 1)$ başkatsayılı, n dereceli bir polinom olduğunu göstermek kolaydır.

$$\int_0^{\pi} cosm\varphi cosn\varphi d\varphi = 0\,, \qquad m \neq n$$

$cosn\varphi$ fonksiyonunun ortogonallik özelliğinin bir sonucudur.

$x = cos\varphi$ olup, $dx = -sin\varphi d\varphi$ dir.

$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ olduğundan $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ dir.

$\cos^2\varphi = x^2$ olup, $\sin^2\varphi = 1 - x^2$ dir.

$$\int_{-1}^{1} T_m(x)T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad m \neq n$$

elde edilir.

$T_n(x)$ ve $P_n^{\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right)}(x)$ aynı olup, $\varrho(x) = (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$ ağırlık fonksiyonu ile (-1,1) aralığında ortogonal oldukları için, $T_n(x) = C_n P_n^{\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right)}(x)$ elde edilir. (C_n = sabit)

Eş. 3.38 den Jacobi , Hermite ve Laguerre polinomları için,

$$\frac{d}{dx}P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = -n\frac{(n+\alpha+\beta+1)\frac{(-1)^n}{2^n n!}}{\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!}}\,P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}$$

$$= \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$$

$$\frac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x) = -n\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n-1)!}}L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) = -\,L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$$

$$\frac{d}{dx}H_n(x) = -2n\,\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}}H_{n-1}(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

şeklindeki türev içeren rekürans bağıntıları elde edilir.

Jacobi, Laguerre ve Hermite polinomları için temel bilgiler Çizelge 4.1. de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Jacobi, Laguerre ve Hermite polinomlarının özellikleri

$y_n(x)$	$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(x>-1,\beta>-1)$	$L_n^{\alpha}(x)(x>-1)$	$H_n(x)$
(a,b)	$(-1,1)$	$(0,\infty)$	$(-\infty,\infty)$
$\varrho(x)$	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	$x^{\alpha}e^{-x}$	e^{-x^2}
$\sigma(x)$	$1-x^2$	x	1
$\tau(x)$	$\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x$	$1+\alpha-x$	$-2x$
λ_n	$n(n+\alpha+\beta+1)$	n	$2n$
B_n	$\frac{(-1)^n}{2^n n!}$	$\frac{1}{n!}$	$(-1)^n$
a_n	$\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{2^n n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\frac{(-1)^n}{n!}$	2^n
b_n	$\frac{(\alpha-\beta)\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{2^n(n-1)!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$(-1)^{n-1}\frac{n+\alpha}{(n-1)!}$	0
d_n^2	$\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$	$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$	$2^n n!\,\sqrt{\pi}$
α_n	$\frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$-(n+1)$	$\frac{1}{2}$
β_n	$\frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$2n+\alpha+1$	0
γ_n	$\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}$	$-(n+\alpha)$	n

4.2.Hahn, Chebyshev, Meixner, Kravchuk ve Charlier Polinomları

$\varrho(x)$ in açık bir ifadesini bulmak için Eş. 3.19 fark denklemini

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)}=\frac{\sigma(x)+\tau(x)}{\sigma(x+1)} \tag{4.1}$$

formunda tekrar yazalım.

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)}=f(x)$$

fark denkleminin çözümü kolayca bulunabilir. Bu denklemin sağ tarafı iki fonksiyonun çarpımı veya bölümü olarak ifade edilebilir ve aşağıdaki özelliğe sahiptir.

Eğer $\varrho_1(x)$ ve $\varrho_2(x)$ fonksiyonları

$$\frac{\varrho_1(x+1)}{\varrho_1(x)}=f_1(x)\,, \qquad \frac{\varrho_2(x+1)}{\varrho_2(x)}=f_2(x)$$

denklemlerinin çözümleri ise

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)}=f(x)$$

denkleminin çözümü

$f(x)=f_1(x)f_2(x)$ için $\varrho(x)=\varrho_1(x)\varrho_2(x)$ ve

$f(x)=f_1(x)/f_2(x)$ için $\varrho(x)=\varrho_1(x)/\varrho_2(x)$

dır. Eş. 4.1 in sağ tarafı rasyonel fonksiyon olduğundan, çözümü fark denklemlerinin çözümleri cinsinden,

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)}=\gamma+x \tag{4.2}$$

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)}=\gamma-x \tag{4.3}$$

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = \gamma \tag{4.4}$$

olarak ifade edilebilir. Burada γ bir sabittir.

$$\gamma + x = \frac{\Gamma(\gamma + x + 1)}{\Gamma(\gamma + x)}$$

olduğundan Eş. 4.2 nin özel çözümü $\varrho(x) = \Gamma(\gamma + x)$ formundadır. Benzer olarak

$$\gamma - x = \frac{\Gamma(\gamma - x + 1)}{\Gamma(\gamma - x)} = \frac{1}{\Gamma[(\gamma + 1) - (x + 1)]} : \frac{1}{\Gamma(\gamma + 1 - x)}$$

eşitliği kullanılarak Eş. 4.3 ün bir özel çözümü

$$\varrho(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma + 1 - x)}$$

şeklinde elde edilir.

Eş. 4.4 ün özel çözümünün $\varrho(x) = \gamma^x$ olduğu kolayca ispatlanabilir.

Şimdi fark derecedeki $\sigma(x)$ polinomuna uygun olarak Eş. 4.1 in çözümünü bulalım.

$\sigma(x)$ ikinci dereceden bir polinom ve

$$\sigma(x) = x(\gamma_1 - x) \quad , \quad \sigma(x) + \tau(x) = (x + \gamma_2)(\gamma_3 - x)$$

olsun. Bu arada $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ birer sabit $a = 0$ ve $b = N$ ile

$$\sigma(x_i) > 0 \qquad 1 \le x_i \le N - 1$$

$$\sigma(x_i) + \tau(x_i) > 0 \qquad 0 \le x_i \le N - 2$$

$$\sigma(N-1) + \tau(N-1) = 0$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Eğer,

$$\gamma_1 = N + \alpha \quad , \quad \gamma_2 = \beta + 1 \quad (\alpha > -1, \beta > -1), \quad \gamma_3 = N - 1$$

alınırsa, bu durumda Eş. 4.1,

$$\frac{\varrho(x+1)}{\varrho(x)} = \frac{(x+\beta+1)(N-1-x)}{(x+1)(N+\alpha-x-1)} \tag{4.5}$$

formunda yazılabilir. Eş. 4.5 in bir çözümü

$$\varrho(x) = \frac{\Gamma(N+\alpha-x)\Gamma(x+\beta+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)} \quad (\alpha > -1\,, \beta > -1) \tag{4.6}$$

şeklindedir. γ_1 ve γ_2 nin $\gamma_1 = N + \alpha\,,\ \gamma_2 = \beta + 1$ formunda seçilmesinin sebeplerine bakalım. $x = (N/2)(1+s)$ değişkeninin lineer değişiminden sonra $(0, N)$ aralığını $(-1{,}1)$ aralığına taşıyan $y_n(x)$ in polinom çözümünün $N \to \infty$ ($\Delta s = h = 2/N \to 0$ olduğunda) $P_n^{(\alpha,\beta)}(s)$ Jacobi polinomuna yönelmesi ve ağırlık fonksiyonu $\varrho(x)$ in Jacobi polinomları için sabit bir çarpana kadar $(1-s)^\alpha(1+s)^\beta$ ağırlık fonksiyonuna yönelmesini beklemek normaldir. Eş. 4.1 in bir çözümü

$$\sigma(x) = x(\gamma_1 - x)\,, \quad \sigma(x) + \tau(x) = (x+\gamma_2)(N-1-x)$$

için

$$\varrho(x) = \frac{\Gamma(\gamma_1 - x_1)\Gamma(x+\gamma_2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}$$

$$= \frac{\Gamma[(N/2)(1-s)+\gamma_1 - N]}{\Gamma[(N/2)(1-s)]} \frac{\Gamma[(N/2)(1+s)+\gamma_2]}{\Gamma[(N/2)(1+s)+1]}$$

olarak verilmiştir.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(z)z^a} = 1$$

olduğu sürece

$$\varrho(x) =\approx \left[{}^{N}\!/_{2}\,(1-s)\right]^{\gamma_1 - N} \left[{}^{N}\!/_{2}\,(1+s)\right]^{\gamma_2 - 1}, \quad N \to \infty$$

elde edilir. Sonuç olarak $\gamma_1 - N = \alpha\,,\ \gamma_2 - 1 = \beta$ almak doğaldır.

$B_n = (-1)^n/n!$ olmak üzere ve $\varrho(x)$ ağırlık fonksiyonu ile Eş. 4.6 da tanımlanan $y_n(x)$ polinomlarına Hahn polinomları denir ve $h_n^{(\alpha,\beta)}(x,N)$ şeklinde gösterilirler. Ayrıca $h_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ notasyonu da uygun formüllerde N sabit olduğunda kullanılabilir.

Hahn polinomları $\alpha > -1$ ve $\beta > -1$ olduğunda $[0, N-1]$ aralığında ortogonaldir.

Hahn polinomlarının önemli bir özel hali $\varrho(x) = 1$ için $t_n(x) = h_n^{(0,0)}(x,N)$ olarak tanımlanan diskret değişkenli Chebyshev polinomlarıdır.

$\sigma(x)$ birinci dereceden $\sigma(x) = x$ polinomu olsun. Üç durumu göz önüne alalım.

$$\sigma(x) + \tau(x) = \begin{cases} \mu(\gamma + x), \\ \mu(\gamma - x), \\ \mu. \end{cases}$$

Burada μ ve γ sabittir. Eş. 4.1 den

$$\varrho(x) = \begin{cases} C\dfrac{\mu^x \Gamma(\gamma + x)}{\Gamma(x+1)} \\ C\dfrac{\mu^x}{\Gamma(x+1)\Gamma(\gamma+1-x)} \\ C\dfrac{\mu^x}{\Gamma(x+1)} \end{cases}$$

dır. Birinci durumda $a = 0,\ b = +\infty \quad 0 < \mu < 1,\ \gamma > 0$ alınırsa, Eş.3.67 deki sınır koşulları ve $\varrho(x_i)$ ağırlık fonksiyonunun pozitifliği sağlanır. C yerine $1/\Gamma(\gamma)$ almak uygundur.

Olasılık teorisinden pascal dağılımı olarak bilinen

$$\varrho(x) = \frac{\mu^x (\gamma)_x}{\Gamma(x+1)}$$

elde edilir. Bu durumda $B_n = \mu^{-n}$ olmak üzere, $y_n(x)$ polinomları Meixner polinomları olarak adlandırılır ve $m_n^{(\gamma,\mu)}(x)$ ile gösterilirler.

İkinci durumda $a = 0,\ b = N+1,\ \gamma = N,\ \mu = p/q\ \ (p > 0, q > 0, p + q = 1)$, $C = q^N N$ alınırsa, olasılık teorisinden binom dağılımı olarak bilinen,

$$\varrho(x_i) = C_N^i p^i q^{N-i}, \qquad C_N^i = \frac{N!}{i!\,(N-i)!}$$

bulunur. Bu durumda, $B_n = (-1)^n\, q^n/n!$ olmak üzere, $y_n(x)$ polinomları Kravchuk polinomları olarak adlandırılır ve $k_n^{(p)}(x,N)$ ile gösterilirler.

Üçüncü durumda $a = 0, b = +\infty, C = e^{-\mu}$ alınırsa, poisson dağılımı olarak bilinen

$$\varrho(x_i) = \frac{e^{-\mu}\mu^i}{i!}$$

elde edilir. Bu durumda da $B_n = \mu^{-n}$ olmak üzere, $y_n(x)$ polinomları Charlier polinomları olarak adlandırılır ve $c_n^{(\mu)}(x)$ ile gösterilirler.

Meixner polinomları için özel olarak

$\sigma(x) = x, \varrho(x) = \mu^x\Gamma(\gamma + x)/\Gamma(1 + x)\Gamma(\gamma)$ seçilirse $\tau(x) = \gamma\mu - x(1-\mu)$ bulunur.

$$\lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'' = -n(\mu - 1) - 0 = n(1-\mu)$$

elde edilir. Eş. 3.50 den,

$$a_n = \frac{1}{\mu^n}\prod_{k=0}^{n-1}[-(1-\mu) + 0] = \left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right)^n$$

olarak bulunur ve Eş. 3.45 den

$$A_{nn} = n!\prod_{k=0}^{n-1}[(\mu - 1) + \frac{n+k-1}{2}0] = n!\,(-1)^n(1-\mu)^n$$

bulunur.

$$\varrho_n(x) = \varrho(x+n)\prod_{k=1}^{n}\sigma(x+k)$$

eşitliğinden,

$$\varrho_n(x) = \frac{\mu^{x+n}\Gamma(\gamma+x+n)}{\Gamma(1+x+n)\Gamma(\gamma)}\prod_{k=1}^{n}(x+k) = \frac{\mu^{x+n}\Gamma(\gamma+x+n)}{\Gamma(1+x+n)\Gamma(\gamma)}\frac{(x+n)!}{x!}$$

$$= \frac{\mu^{x+n}\Gamma(\gamma+x+n)}{\Gamma(1+x+n)\Gamma(\gamma)}\frac{\Gamma(x+n+1)}{\Gamma(x+1)} = \frac{\mu^{x+n}\Gamma(\gamma+x+n)}{\Gamma(x+1)\Gamma(\gamma)}$$

olarak elde edilir.

Eş. 3.70 den ,

$$S_n = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mu^{i+n}\Gamma(n+\gamma+i)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(i+1)}$$

olup, Taylor formülünden $|\mu| < 1$ olmak üzere,

$$(1-\mu)^{-(\gamma+n)} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\gamma+i+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{\mu^i}{i!}$$

şeklindedir. Bilinen B_n, S_n ve A_{nn} Eş. 3.69 da yerlerine yazılırsa, Meixner polinomlarının normu,

$$d_n^2 = (-1)^n n!\,(-1)^n(1-\mu)^n\left(\frac{1}{\mu^n}\right)^2\mu^n(\gamma)_n(1-\mu)^{-(\gamma+n)} = \frac{n!\,(\gamma)_n}{(1-\mu)^{\gamma}\mu^n}$$

olarak elde edilir.

Hahn, Meixner, Kravchuk ve Charlier polinomları için rekürans bağıntısı

$$xy_n(x) = \alpha_n y_{n+1}(x) + \beta_n y_n(x) + \gamma_n y_{n-1}(x)$$

eşitliği kullanılarak elde edilir. Bunların katsayıları,

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}, \qquad \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}, \qquad \gamma_n = \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}$$

formülleri kullanılarak bilinen a_n , $b_n$ve d_n^2 değerleri tarafından bulunabilir. Örneğin, Meixner polinomu için,

$$\alpha_n = \frac{(\mu-1)^n/\mu^n}{(\mu-1)^{n+1}/\mu^{n+1}} = \frac{\mu}{\mu-1}$$

$$\beta_n = \frac{n\left(\gamma+\frac{n-1}{2}\frac{\mu+1}{\mu}\right)\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{n-1}}{\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{n}} - \frac{(n+1)\left(\gamma+\frac{n}{2}\frac{\mu+1}{\mu}\right)\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{n}}{\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{n\gamma+[\mu+1/\mu](-1)-n\gamma-\gamma}{\mu+1/\mu} = \frac{-\mu n-n-\mu\gamma}{\mu-1} = \frac{n+\mu(n+\gamma)}{1-\mu}$$

$$\gamma_n = \frac{(\mu-1)^{n-1}}{\mu^{n-1}}\frac{\mu^n}{(\mu-1)^n}\frac{n!\,(\gamma)_n}{\mu^n(1-\mu)^\gamma}\frac{\mu^{n-1}(1-\mu)^\gamma}{(n-1)!\,(\gamma)_{n-1}}$$

$$= \frac{\mu}{\mu-1}\frac{\Gamma(\gamma+n)n}{\Gamma(\gamma+n-1)\mu} = \frac{n(\gamma+n-1)}{\mu-1}$$

şeklindedir. Hahn, Meixner, Kravchuk ve Charlier polinomları hakkındaki basit bilgiler Çizelge 4.2. ve Çizelge 4.3. de verilmiştir.

Eş. 3.48 kullanılarak Hahn, Meixner, Kravchuk ve Charlier polinomları için,

$$\Delta h_n^{(\alpha,\beta)}(x,N) = -n(\alpha+\beta+n+1)\frac{(-1)^n/n!}{(-1)^{n-1}/(n-1)!}h_n^{(\alpha+1,\beta+1)}(x,N-1)$$

$$= (\alpha+\beta+n+1)h_n^{(\alpha+1,\beta+1)}(x,N-1)$$

$$\Delta k_n^{(p)}(x,N) = -n/q\,\frac{(-1)^n q^n/n!}{(-1)^{n-1}q^{n-1}/(n-1)!}k_{n-1}^{(p)}(x,N-1) = k_{n-1}^{(p)}(x,N-1)$$

$$\Delta m_n^{(\gamma,\mu)}(x) = -n(1-\mu)\frac{1/\mu^n}{1/\mu^{n-1}}m_{n-1}^{(\gamma+1,\mu)}(x) = -\frac{n(1-\mu)}{\mu}m_{n-1}^{(\gamma+1,\mu)}(x)$$

$$\Delta c_n^{(\mu)}(x) = -n\frac{1/\mu^n}{1/\mu^{n-1}}c_{n-1}^{(\mu)}(x) = -\frac{n}{\mu}c_{n-1}^{(\mu)}(x)$$

şeklindeki fark içeren rekürans bağıntıları elde edilir.

Rodrigues formülü kullanılarak ortogonal aralığının sınır değerlerine Hahn, Meixner, Kravchuk ve Charlier polinomların değerlerini bulmak kolaydır. Tümevarım yöntemiyle ispatlanabilen,

$\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} f(x-k)$

formülünü kullanalım. $\sigma(0) = 0$ koşulu altında $\varrho_n(x) = \varrho(x+n)\sigma(x+1) \dots \sigma(x+n)$ fonksiyonu $x = -1, -2, \dots, -n$ de sıfır oldukça $\nabla^n \varrho_n(0) = \varrho_n(0)$ dır ve Eş. 3.46 Rodrigues formülü kullanılırsa aşağıdaki eşitlik

$$y_n(0) = \frac{B_n}{\varrho(0)} \varrho_n(0)$$

sağlanır. Bu nedenle Hahn, Meixner, Kravchuk ve Charlier polinomları için aşağıdaki eşitlikler

$$h_n^{(\alpha,\beta)}(0) = (-1)^n \frac{(N-1)!}{n!\,(N-n-1)!} \frac{\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)}$$

$$m_n^{(\gamma,\beta)}(0) = \frac{\Gamma(n+\gamma)}{\Gamma(\gamma)}$$

$$k_n^{(p)}(0) = (-1)^n \frac{N!}{n!\,(N-n)!} p^n$$

$$c_n^{(\mu)}(0) = 1$$

elde edilir.

Çizelge 4.2. Hahn ve Chebyshev polinomların özellikleri

$y_n(x)$	$h_n^{(\alpha,\beta)}(x,N)$	$t_n(x)$
(a,b)	$(0,N)$	$(0,N)$
$\varrho(x)$	$\dfrac{\Gamma(N+\alpha-x)\Gamma(\beta+1+x)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x)}$ $(\alpha>-1,\beta>-1)$	1
$\sigma(x)$	$x(N+\alpha-x)$	$x(N-x)$
$\tau(x)$	$(\beta+1)(N-1)-(\alpha+\beta+2)x$	$N-1-2x$
λ_n	$n(\alpha+\beta+n+1)_n$	$n(n-1)$
B_n	$(-1)^n/n!$	$(-1)^n/n!$
$\varrho_n(x)$	$\dfrac{\Gamma(N+\alpha-x)\Gamma(n+\beta+1+x)}{\Gamma(\mathrm{x}+1)\Gamma(N-n-x)}$	$\dfrac{\Gamma(N-x)\Gamma(n+1+x)}{\Gamma(N-n-x)\Gamma(x+1)}$
a_n	$\dfrac{1}{n!}(\alpha+\beta+n+1)$	$\dfrac{1}{n!}(n+1)_n$
b_n	$-\dfrac{(\alpha+\beta+n+1)_{n-1}}{(n-1)!}\Big[(\beta+1)(N-1)$ $+\dfrac{n-1}{2}(\alpha-\beta+2N-2)\Big]$	$-\dfrac{N-1}{(n-1)!}(n)_n$
d_n^2	$\dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+1)_N}{(\alpha+\beta+2n+1)n!\,(N-n-1)!}$	$\dfrac{(N+n)!}{(2n+1)(N-n-1)!}$
α_n	$\dfrac{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)}$	$\dfrac{(n+1)}{2(2n+1)}$
β_n	$\dfrac{\alpha-\beta+2N+2}{4}$ $+\dfrac{(\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+2N)}{4(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)}$	$\dfrac{N-1}{2}$
γ_n	$\dfrac{(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+N+n)(N-n)}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+1)}$	$\dfrac{n(N^2-n^2)}{2(2n+1)}$

Çizelge 4.3. Meixner, Kravchuk ve Charlier polinomlarının özellikleri

$y_n(x)$	$m_n^{(\gamma,\mu)}(x)$	$k_n^{(p)}(x)$	$c_n^{(\mu)}(x)$
(a,b)	$(0,\infty)$	$(0,N+1)$	$(0,\infty)$
$\varrho(x)$	$\dfrac{\mu^x\Gamma(\gamma+x)}{\Gamma(x+1)\Gamma(\gamma)}$ $(\gamma>0, 0<\mu<1)$	$\dfrac{N!\,p^x\,q^{N-x}}{\Gamma(x+1)\Gamma(N+1-x)}$ $(p>0, q>0, p+q=1)$	$\dfrac{e^{-\mu}\mu^x}{\Gamma(x+1)}$ $(\mu>0)$
$\sigma(x)$	x	x	x
$\tau(x)$	$\gamma\mu-x(1-\mu)$	$(Np-x)/q$	$\mu-x$
λ_n	$n(1-\mu)$	n/q	n
B_n	$\dfrac{1}{\mu^n}$	$\dfrac{(-1)^n q^n}{n!}$	$\dfrac{1}{\mu^n}$
$\varrho_n(x)$	$\dfrac{\mu^{x+n}\,\Gamma(n+\gamma+x)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(x+1)}$	$\dfrac{N!\,p^{x+n}\,q^{N-n-x}}{\Gamma(x+1)\Gamma(N+1-n-x)}$	$\dfrac{e^{-\mu}\mu^{x+n}}{\Gamma(x+1)}$
a_n	$\left(\dfrac{\mu-1}{\mu}\right)^n$	$\dfrac{1}{n!}$	$\dfrac{1}{(-\mu)^n}$
b_n	$n\left(\gamma+\dfrac{n-1}{2}\,\dfrac{\mu+1}{\mu}\right)$ $\times\left(\dfrac{\mu-1}{\mu}\right)^{n-1}$	$-\dfrac{Np+(n-1)(1/2)-p}{(n-1)!}$	$\dfrac{n[1+(n-1)/2\mu]}{(-\mu)^{n-1}}$
d_n^2	$\dfrac{n!\,(\gamma)_n}{\mu^n(1-\mu)^\gamma}$	$\dfrac{N!}{n!\,(N-n)!}(pq)^n$	$\dfrac{n!}{\mu^n}$
α_n	$\dfrac{\mu}{\mu-1}$	$n+1$	$-\mu$
β_n	$\dfrac{n+\mu(n+\gamma)}{1-\mu}$	$n+p(N-2n)$	$n+\mu$
γ_n	$\dfrac{n(n-1+\gamma)}{\mu-1}$	$pq(N-n+1)$	$-n$

KAYNAKLAR

1. Rainville, E. D., “Special Functions”, ***The Macmillan Company***, NewYork, (1960).

2. Srivastava, H. M., Manocha, H.L., “ A treatise on generating functions”, New York (1984).

3. Nikiforov, A.F., Suslov, S.K., Uvarov, V.B., “ Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable”, ***Springer-Verlag***, New York, (1991).

4. Andrews, G.E., Askey R., Roy R., “Special Functions”, ***Cambridge Univ. Press***, Cambridge, (1999).

5. Gonzalez, B., Matera J., Srivastava, H.M., “Some q-generating functions and associated generalized hypergeometric polynomials”, ***Math. Comput. Modelling***, 34: 133-175 (2001).

6. Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F. G., “Higher Transcendental Functions, Vol. III”, ***McGraw-Hill Book Company***, New York, Toronto, London, (1955).

7. Altın, A., “Uygulamalı Matematik”, ***Gazi Kitabevi***, Ankara, (2011).

8. Szegö, G., “Orthogonal Polynomials, Vol. 23, 4th ed.”, ***Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.***, (1975).

9. Fujiwara, I., “A unified presentation of classical orthogonal polynomials”, ***Math. Japon***. 11: 133-148 (1966).

10. Erdelyi, A., “Higher Transcandental Functions”, ***Manuscript Project***, New York, (1953).

11. Nikiforof, A.F., Uvarov, V.B., “Theory of Special Functions”, ***The Macmillan Company,*** Russia, (1974).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: AYATA, Beyza
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 02.01.1988
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0506 447 23 88
e-mail	: beyzayata@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Ahi Evran Üniversitesi/Matematik Bölümü	2010
Lise	Özel Erciyes Lisesi	2006

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2010-2012	Özgün Mat-Fen Dershanesi	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce