q −BERNOULLİ MATRİSLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Semra KUŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2013
ANKARA

Semra KUŞ tarafından hazırlanan ‘q-BERNOULLİ MATRİSLERİ VE ÖZELLİKLERİ’ adlı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Naim TUĞLU ……………………

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Dursun TAŞÇI ………………….

Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç. Dr. Naim TUĞLU ..…………………

Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Doç. Dr. E. Gökçen KOÇER ……………………

İlköğretim Mat. Eğt. Anabilim Dalı, K. N. E. Ü.

Tez Savunma Tarihi: 08/07/2013

Bu tez ile G. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU ………….............

Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Semra KUŞ

q −BERNOULLİ MATRİSLERİ VE ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Semra KUŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2013

ÖZET

Bu çalışmada q −Bernoulli sayıları ve polinomları kullanılarak q −Bernoulli matrisleri tanımlandı. Ayrıca q −Bernoulli matrisinin tersi elde edildi. Sonra q − Pascal matrisi ile q −Bernoulli polinom matrisinin çarpanlaması yapıldı. Stirling sayılarının tanımı kullanılarak özel bir q matrisi elde edildi ve bu matrislerin çarpanlaması yapılarak q −Bernoulli matrisi elde edildi. Son olarak Stirling sayıları kullanılarak q −Bernoulli matrisinin elemanları elde edildi.

Bilim Kodu : **204.1.025**
Anahtar Kelimeler : **Bernoulli matrisi, q −Bernoulli sayıları ve polinomları, Pascal matrisi, Stirling sayıları**
Sayfa Adedi : **59**
Tez Yöneticisi : **Doç. Dr. Naim TUĞLU**

q −BERNOULLI MATRICES AND ITS PROPERTIES

Semra KUŞ

GAZI UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2013

ABSTRACT

In this thesis, we define q −Bernoulli matrices by using q −Bernoulli numbers and polynomials. Moreover, we obtain the inverse of q −Bernoulli matrix. Then, we make the factorization of generalized q −Pascal matrix and q −Bernoulli polynomial matrix. We identify a special q matrix by using the definition of Stirling numbers and obtain q −Bernoulli matrix after the factorization of q matrices. Finally, we obtain the elements of q −Bernoulli matrix with the help of Stirling numbers.

Science Code : 204.1.025
Key Words : Bernoulli matrices, q −Bernoulli numbers and polynomials, Pascal matrix, Stirling numbers
Page Number : 59
Adviser : Assoc. Prof. Dr. Naim TUĞLU

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli katkılarıyla beni yönlendiren ve her safhasında bilgisine başvurduğum Sayın Hocam Doç Dr. Naim TUĞLU'ya teşekkürü bir borç bilirim. Yine tecrübelerinden faydalandığım Hocalarım Prof. Dr. Dursun TAŞÇI'ya, Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK'a ve Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE'ye şükranlarımı sunarım. Ayrıca hayatımın her aşamasında manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan ilk matematik öğretmenim babam Bekir YILDIRIM'a, annem Ayşe YILDIRIM'a, eşim Zekeriya KUŞ'a ve kızım Özgü KUŞ'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$[n]_q$	Gauss sayısı
$\binom{n}{k}_q$	q −Binomiyel katsayı
$\delta_{i,j}$	Kronecker delta
$s(m,n)$	Birinci tür Stirling sayısı
$S(m,n)$	İkinci tür Stirling sayısı
B_n	n. Bernoulli sayısı
$B_n(x)$	n. Bernoulli polinomu
$\phi(t)$	Bernoulli sayıları için üreteç fonksiyon
$\phi(x,t)$	Bernoulli polinomları için üreteç fonksiyon
$B_n^{(r)}$	r. Mertebeden n. Bernoulli sayısı
$B_n^{(r)}(x)$	r. Mertebeden n. Bernoulli polinomu
$\mathcal{B}$	Bernoulli matrisi
$\mathcal{B}(x)$	Bernoulli polinom matrisi
$\mathcal{B}^{(r)}(x)$	Genelleştirilmiş Bernoulli matrisi
$\mathscr{b}_n(q)$	q − Bernoulli sayıları
$B_n(x,q)$	q −Bernoulli polinomları
$\mathcal{B}(q)$	q −Bernoulli matrisi
$D(q)$	q −Bernoulli matrisinin tersi
$\mathcal{B}(x,q)$	q −Bernoulli polinom matrisi
$P(x,q)$	Genelleştirilmiş q −Pascal matrisi
$\tilde{S}(q)$	$(n+1)\times(n+1)$ tipinde matris
$\tilde{s}(q)$	$(n+1)\times(n+1)$ tipinde matris

1. GİRİŞ

Bernoulli sayıları, İsviçreli büyük matematikçi Jacob Bernoulli (1654-1705) tarafından ilk kez tanımlanmıştır ve onun bu çalışmaları 1713 yılında Ars Conjectandi adlı kitabında ilk kez yayınlanmıştır [1].

Nörlund, 1924 yılında Bernoulli sayıları ve polinomları ile ilgili tanımlar vermiştir ve çeşitli özellikler elde etmiştir [2].

Carlitz, 1948 yılında Nörlund tarafından verilen çalışmaları kullanarak q −Bernoulli sayıları ve polinomlarını tanımlamıştır [3]. Ayrıca yüksek mertebeden Bernoulli sayıları ile Euler sayıları arasındaki bağıntıları incelemiştir [4 − 5].

Al-Salam, 1959 yılında q −Bernoulli sayıları ve polinomları ile ilgili farklı çalışmalar yapmıştır [6].

H. Radamacher, 1973 yılında Bernoulli sayılarının ve polinomlarının Riemann zeta fonksiyonları ile ilgili bağıntılarını vermiştir [8].

S. Roman, 1984 yılında ikinci tür Bernoulli sayılarını ilk kez tanımlamıştır. Ayrıca Bernoulli sayıları ve polinomları için üreteç (doğurucu) fonksiyon tanımlamıştır [18].

D. Zagier, 1998 yılında modifiye Bernoulli sayılarını tanımlamıştır ve çeşitli özellikler elde etmiştir [26].

Atul, Zagier' in çalışmalarını kullanarak modifiye Bernoulli sayıları ile ilgili çeşitli özellikler elde etmiştir [27].

Koblitz, q −Bernoulli sayıları ile q −zeta fonksiyonları arasında çeşitli bağıntılar elde etmiştir. Ayrıca q −Bernoulli sayılarını kullanarak p −adik q −Bernoulli sayılarını tanımlamıştır [7].

Satoh, q −Bernoulli sayıları ile Riemann zeta fonksiyonu arasında çeşitli özellikler ve bağıntılar elde etmiştir [9].

Tsumura, 1991 yılında q −Dirichlet serileri ile q −Bernoulli sayıları arasındaki ilişkiyi incelemiştir ve çeşitli özellikler elde etmiştir [10].

T. Kim, yüksek mertebeden Bernoulli sayıları ve polinomları, yüksek mertebeden q −Bernoulli sayıları ve polinomları ile ilgili çalışmalar yapmıştır. Bu polinomların yüksek mertebeden q −Euler polinomları ile ilişkilerini incelemiştir. Ayrıca genelleştirilmiş q −Bernoulli sayılarını ve polinomlarını tanımlamıştır $[23-28]$.

F. T. Howard, 1996 yılında dejenere Bernoulli sayıları ile ilgili çalışmalar yapmıştır [13].

Y. Şimşek, 2003 yılında q −twisted Bernoulli sayılarını tanımlayarak bunların genel özelliklerini incelemiştir [11].

Hegazi, 2005 yılında q −Bernoulli sayıları ve polinomları ile ilgili farklı bir rekürans elde etmiştir. q −Bernoulli sayıları ve polinomları için üreteç fonksiyon tanımlamıştır [14].

Chan, Carlitz'in q −Bernoulli sayılarını inceleyerek, q −Bernoulli sayıları için farklı bağıntılar elde etmiştir [16].

Zhizheng, 2006 yılında Bernoulli sayılarını ve Bernoulli polinomlarını kullanarak Bernoulli matrisini, Bernoulli polinom matrisini ve genelleştirilmiş Bernoulli matrisini tanımlamıştır. Ayrıca Bernoulli matrisinin tersi ile ilgili bir takım özellikler vermiştir. Bernoulli polinom matrisinin genelleştirilmiş Pascal matrisi ve Fibonacci matrisi ile çarpanlamasını yapmıştır ve çeşitli özellikler elde etmiştir. Yükseltilmiş Bernoulli matrisini tanımlayarak Vandermonde matrisi ile çarpanlamasını yapmıştır. Stirling sayıları ile elde ettiği matrislerin çarpanlamasından Bernoulli matisini elde etmiştir [20].

Bernoulli sayıları ve polinomları uygulamalı matematiğin bir çok alanında, sayılar teorisinde ve istatistikte kullanılmaktadır. En önemli uygulamalarıdan biri Stirling yaklaşımıdır.

$q-$Bernoulli sayıları, $q-$serilerinde, $p-$adik analizinde, sayılar teorisinde uygulamalı matematikte ve quantum cisim teorisinde kullanılmaktadır. Ayrıca Riemann zeta fonksiyonu, Hurwitz zeta fonksiyonu ve Dirichlet L$-$fonksiyonu gibi özel fonksiyonlarda kullanılmıştır $[11, 24-29]$.

Bu çalışmada Bernoulli sayıları, Bernoulli polinomları ve üreteç fonksiyonları tanımları verildi. Bernoulli matrisi ve özellikleri incelendi. $q-$Bernoulli sayıları ve polinomları için üreteç (doğurucu) fonksiyon tanımı verildi. Hegazi tarafından tanımlanan $q-$Bernoulli sayıları ve polinomları kullanılarak $q-$Bernoulli matrisi tanımlandı. Ayrıca $q-$Bernoulli matrisinin tersi elde edildi. $q-$ Pascal matrisi ile $q-$Bernoulli matrisinin çarpanlaması yapıldı. Stirling sayılarının tanımı kullanılarak özel bir q matrisi elde edildi ve bu q matrislerin çarpanlamasının $q-$Bernoulli matrisini verdiği gösterildi. $q-$Bernoulli sayıları ile Stirling sayıları arasındaki ilişki incelenerek Stirling sayıları yardımıyla $q-$Bernoulli matrisinin elemanları farklı bir yoldan elde edildi.

2. q −GÖSTERİMLER

2.1. Tanım

n pozitif bir tamsayı ve $q \in (0,1)$ olmak üzere n' nin q −benzeri olan

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}$$

ifadesine Gauss sayısı denir [15].

2.2. Tanım

n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $n!$' in q −benzeri

$$[n]_q! = \begin{cases} 1, & n = 0 \; ise \\ [n]_q [n-1]_q [n-2]_q \ldots [1]_q \,, & n > 0 \; ise \end{cases}$$

dir. Ayrıca

$$[n]_q = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n} \qquad (2.1)$$

dir [15].

2.3. Tanım

n, k negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$\binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[n-k]_q! \, [k]_q!} = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_{n-k} (q;q)_k}$$

ifadesine q −Binomiyel (Gauss binomiyel) katsayı denir [15].

Burada

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q \tag{2.2}$$

ve

$$\binom{n}{k}_q \binom{k}{j}_q = \binom{n}{j}_q \binom{n-j}{k-j}_q \qquad j = 0,1,2 \ldots \tag{2.3}$$

şeklindedir [15].

2.4. Tanım

x ve y birer değişken olmak üzere

$$(x+y)_q^n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (x+y)_q (x+qy)_q \ldots (x+q^{n-1}y)_q, & n \geq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. $n \geq 1$ için bu tanım kullanılarak Binom teoreminin q −benzeri

$$(x+y)_q^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q q^{\binom{k}{2}} x^{n-k} y^k \tag{2.4}$$

dir [15].

2.5. Tanım

$z \in \mathbb{C}, |z| < 1$ olmak üzere

$$e_q(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(q;q)_k} = \frac{1}{(z;q)_\infty} \tag{2.5}$$

eşitliği ile verilen $e_q(z)$ fonksiyonuna q −üstel üreteç fonksiyon denir [14].

x ve y $q -$ komütatif değişkenler yani,

$$x.y = q.y.x \tag{2.6}$$

şeklinde ise

$$e_q(x+y) = e_q(y)e_q(x) \tag{2.7}$$

dir [14].

Özellik

q −Binomiyel katsayı $\binom{i}{j}_q$ olmak üzere

$$\delta_{i,j} = \sum_{k=j}^{i} (-1)^{k-j} q^{\binom{k-j}{2}} \binom{i}{k}_q \binom{k}{j}_q \tag{2.8}$$

dir. Bu Kronecker deltanın $q -$ benzeridir [21].

Özellik

B_n n. Bernoulli sayısı olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} B_{n-k} = \delta_{n,0} \tag{2.9}$$

dir. Buna Bernoulli sayıları için ortogonalite bağıntısı denir [31].

2.6. Tanım

$m\ ve\ n$ negatif olmayan tamsayılar ve $s(0,0) = 1$ olmak üzere

$$s(m,n) = \begin{cases} 0, & n = 0\ ise \\ s(m-1,n-1) - (m-1)s(m-1,n), & 0 < n < m\ ise \end{cases} \quad (2.10)$$

reküransı ile verilen $s(m,n)$ sayılarına birinci tür Stirling sayıları denir [25].

Bazı birinci tür Stirling sayıları tablodaki gibidir.

Çizelge 2.1 Birinci tür Stirling sayıları

n/m	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
2	0	-1	1	0	0	0
3	0	2	-3	1	0	0
4	0	-6	11	-6	1	0
5	0	24	-50	35	-10	1

2.7. Tanım

$m\ ve\ n$ negatif olmayan tamsayılar olmak üzere

$$S(m,n) = \begin{cases} 1, & m = n > 0\ ise \\ 0, & m \geq 0, n = 0\ ise \\ S(m-1,n-1) + n.S(m-1,n), & 0 < n < m\ ise \end{cases} \quad (2.11)$$

reküransı ile verilen $S(m,n)$ sayılarına ikinci tür Stirling sayıları denir [25].

Bazı ikinci tür Stirling sayıları tablodaki gibidir.

Çizelge 2.2. İkinci tür Stirling sayıları

n/m	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0
6	0	1	31	90	65	15	1

3. BERNOULLİ SAYILARI VE POLİNOMLARI

3.1. Bernoulli Sayıları

3.1.1. Tanım

n negatif olmayan bir tamsayı ve $B_0 = 1$ olmak üzere

$$B_n = -\frac{1}{(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k$$

bağıntısı ile verilen sayılara Bernoulli sayıları denir [17].

Örnek

$$\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1-1}\binom{1+1}{k}B_k \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{0}\binom{2}{k}B_k \\
&= -\frac{1}{2}\binom{2}{0}B_0 \\
&= -\frac{1}{2}.1.1 = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{2-1}\binom{2+1}{k}B_k \\
&= -\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{1}\binom{3}{k}B_k \\
&= -\frac{1}{3}\left(\binom{3}{0}B_0 + \binom{3}{1}B_1\right) \\
&= -\frac{1}{3}\left(1.1 + 3.\left(-\frac{1}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$B_3 = -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3-1}\binom{3+1}{k}B_k$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{2}\binom{4}{k}B_k$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\binom{4}{0}B_0 + \binom{4}{1}B_1 + \binom{4}{2}B_2\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(1.1 + 4.\left(-\frac{1}{2}\right) + 6.\frac{1}{6}\right)$$

$$= 0$$

Bazı Bernoulli sayıları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 3.1. Bernoulli sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$-\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$

3.1.1. Lemma

$$\phi(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

ile verilen $\phi(t)$ fonksiyonu Berrnoulli sayıları için bir üreteç (doğurucu) fonksiyondur [18].

İspat

$$e^t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}$$

olduğu bilinmektedir. Ayrıca

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} \tag{3.1}$$

olsun. Eş. 3.1 in her iki tarafı $e^t - 1$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
t &= (e^t - 1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} \\
&= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} - 1\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \left(\frac{t^0}{0!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!} - 1\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \left(t\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{(m+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right) \\
&= t\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\frac{1}{(n-k+1)!}\right)t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\frac{1}{(n+1-k)!}\frac{(n+1)!}{(n+1)!}\right)t^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} a_k\right)\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

Bu son eşitlikte $k = 0$ ve $n = 0$ için $t = \binom{1}{0}a_0 t$ den $a_0 = 1$ olur.

Diğer taraftan $k \geq 1$ ve $n \geq 1$ için,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} a_k = 0$$

olmalıdır. Buradan

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} a_k + \binom{n+1}{n} a_n = 0$$

Böylece

$$a_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} a_k$$

olur ki $a_n = B_n$ Bernoulli sayıları elde edilir.

3.1.1. Teorem $(J.Bernoulli)$

$m \in \mathbb{Z}^+ \ ve$

$$S_m(n) = 1^m + 2^m + \cdots + (n-1)^m$$

olmak üzere

$$S_m(n) = \frac{1}{(m+1)} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}$$

dır [17].

Örnek

$m = 4$ ve $n = 6$ için

$$S_4(6) = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = 979$$

dir. Gerçekten

$$S_4(6) = \frac{1}{(4+1)}\sum_{k=0}^{4}\binom{4+1}{k}B_k 6^{4+1-k}$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}\binom{5}{k}B_k 6^{5-k}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\binom{5}{0}B_0 6^5 + \binom{5}{1}B_1 6^4 + \binom{5}{2}B_2 6^3 + \binom{5}{3}B_3 6^2 + \binom{5}{4}B_4 6^1\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1.1.7776 + 5.\left(-\frac{1}{2}\right)1296 + 10.1.\frac{1}{6} + 10.0.36 + 5.\left(-\frac{1}{30}\right).6\right)$$

$$= \frac{1}{5}\big(7776 + (-3224) + 360 + (-1)\big)$$

$$= 979$$

3.2. Genelleştirilmiş Bernoulli Sayıları

3.2.1. Tanım

$a, b \in \mathbb{R}^+ \ ve \ a \neq b$ olmak üzere

$$\phi(t,a,b) = \frac{t}{b^t - a^t} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(a,b)\frac{t^n}{n!}$$

$\phi(t,a,b)$ üreteç fonksiyonu ile verilen $B_n(a,b)$ sayılarına genelleştirilmiş Bernoulli sayıları denir [19].

3.3. Bernoulli Polinomları

3.3.1. Tanım

n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}$$

şeklinde tanımlanan polinoma n. Bernoulli polinomu denir [17].

Örnek

$$\begin{aligned} B_0(x) &= \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} B_k x^{0-k} \\ &= \binom{0}{0} B_0 x^{0-0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1(x) &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} B_k x^{1-k} \\ &= \binom{1}{0} B_0 x^{1-0} + \binom{1}{1} B_1 x^{1-1} \\ &= 1.1.x - 1.\left(-\frac{1}{2}\right).1 \\ &= x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2(x) &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} B_k x^{2-k} \\ &= \binom{2}{0} B_0 x^{2-0} + \binom{2}{1} B_1 x^{2-1} + \binom{2}{2} B_2 x^{2-2} \\ &= 1.1.x^2 + 2.\left(-\frac{1}{2}\right) x + 1.\frac{1}{6} \\ &= x^2 - x + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_3(x) &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} B_k x^{3-k} \\ &= \binom{3}{0} B_0 x^{3-0} + \binom{3}{1} B_1 x^{3-1} + \binom{3}{2} B_2 x^{3-2} + \binom{3}{3} B_3 x^{3-3} \\ &= 1.1.x^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) x^2 + 3.\frac{1}{6} x + 1.0.1 \end{aligned}$$

$$= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

İlk birkaç Bernoulli polinomu tablodaki gibidir.

Çizelge 3.2. Bernoulli polinomları

n	$B_n(x)$
0	1
1	$x - \frac{1}{2}$
2	$x^2 - x + \frac{1}{6}$
3	$x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
4	$x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$
5	$x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{1}{6}x$
6	$x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{42}$
7	$x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^{3+}\frac{1}{6}x$
8	$x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30}$
9	$x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{3}{10}x$

$B_n(x)$ Bernoulli polinomları için $x = 0$ alındığında sabit terimler $\binom{n}{n}B_n$ olacaktır ki bu sonuç bize Bernoulli sayılarını vermektedir. Yani,

$$B_n(0) = B_n \tag{3.2}$$

olur.

Tablo 3.2. de $B_n(x)$ polinomlarının sabit terimleri

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30}\ , B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42}, B_7 = 0,\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_9 = 0$$

olur ki bunlar ilk dokuz Bernoulli sayılarıdır.

3.2.1. Lemma

$B_n(x)$ n. Bernoulli polinomu olmak üzere

$$\phi(x,t) = \frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

eşitliği ile verilen $\phi(x,t)$ fonksiyonu $B_n(x)$ Bernoulli polinomu için bir üreteç fonksiyonudur $[17 - 18]$.

İspat

B_n Bernoulli sayıları için üreteç fonksiyon

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

şeklindedir.

Eş. 2.5 den

$$e^{xt}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{n!}$$

olup,

$$\begin{aligned}\frac{t}{e^t-1}e^{xt}&=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{t^n}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\right)t^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\frac{n!}{n!}\right)t^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_kx^{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

dir.

3.4. Genelleştirilmiş Bernoulli Polinomları

3.4.1. Tanım

n negatif olmayan bir tamsayı $a,b,c>0$ ve $a\neq b$ olmak üzere

$$\phi(x,t,a,b,c)=\frac{tc^{xt}}{b^t-a^t}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x,a,b,c)\frac{t^n}{n!}$$

$\phi(x,t,a,b,c)$ üreteç fonksiyonu ile verilen $B_n(x,a,b,c)$ polinomuna genelleştirilmiş Bernoulli polinomu denir [19].

3.4.1. Teorem

$a, b, c > 0$ ve $a \neq b$ olmak üzere $x \in \mathbb{R}$ için

i. $B_n(x, 1, e, e) = B_n(x)$
ii. $B_n(0{,}1, e, e) = B_n$
iii. $B_n(0, a, b, c) = B_n(a, b)$
iv. $B_n(x, a, b, 1) = B_n(a, b)$
v. $B_n(x, 1, e, 1) = B_n$

dir [19].

3.5. Yüksek Mertebeden Bernoulli Sayıları

3.5.1. Tanım

$r \in \mathbb{N}, n$ negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$B_n^{(r)} = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_r=n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r} B_{k_1} B_{k_2} \dots B_{k_r}$$

eşitliği ile verilen $B_n^{(r)}$ sayılarına r. mertebeden n. Bernoulli sayısı denir. Burada

$$B_n^{(1)} = B_n \tag{3.3}$$

dir [23].

Örnek

$$B_0^{(2)} = \sum_{k_1+k_2=0} \binom{0}{k_1, k_2} B_{k_1} B_{k_2}$$

$$= \binom{0}{0,0} B_0 B_0$$

$$= \frac{0!}{0!\,0!}.1.1$$

$$= 1$$

$$B_1^{(2)} = \sum_{k_1+k_2=1} \binom{1}{k_1, k_2} B_{k_1} B_{k_2}$$

$$= \binom{1}{0,1} B_0 B_1 + \binom{1}{1,0} B_1 B_0$$

$$= \frac{1!}{0!\,1!} 1 \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1!}{1!\,0!} \left(-\frac{1}{2}\right) 1$$

$$= -1$$

$$B_2^{(2)} = \sum_{k_1+k_2=2} \binom{2}{k_1, k_2} B_{k_1} B_{k_2}$$

$$= 2 \binom{2}{0,2} B_0 B_2 + \binom{2}{1,1} B_1 B_1$$

$$= 2.\frac{2!}{0!\,2!}.1.\frac{1}{6} + \frac{2!}{1!\,1!}.\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{5}{6}$$

$$B_3^{(2)} = \sum_{k_1+k_2=3} \binom{3}{k_1, k_2} B_{k_1} B_{k_2}$$

$$= 2 \binom{3}{0,3} B_0 B_3 + 2 \binom{3}{2,1} B_2 B_1$$

$$= 2.\frac{3!}{0!\,3!}.1.0 + 2.\frac{3!}{2!\,1!}.\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

İlk birkaç yüksek mertebeden Bernoulli sayısı tablodaki gibidir.

Çizelge 3.3. Yüksek mertebeden Bernoulli sayıları

r/n	0	1	2
1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
2	1	-1	$\frac{5}{6}$
3	1	$-\frac{3}{2}$	2

Özellik

$r \in \mathbb{N}$ ve $B_n^{(r)}$ yüksek mertebeden Bernoulli sayısı olmak üzere $B_n^{(r)}$ sayısının üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^r$$

dir. Yani

$$\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(r)} \frac{t^n}{n!}$$

dir $[23 - 31]$.

3.5.1. Lemma

$r \in \mathbb{N}$ ve n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$B_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(r-1)} B_{n-k}$$

dir $[23-31]$.

İspat

$B_n^{(r)}$ yüksek mertebeden Bernoulli sayısının üreteç fonksiyonu tanımından

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{r-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(r-1)}\frac{t^n}{n!}$$

eşitliği yazılabilir.

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}$$

olduğu da göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{r-1}\frac{t}{e^t-1}&=\left(\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(r-1)}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}\right)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k^{(r-1)}}{k!}\frac{B_{n-k}}{(n-k)!}\frac{n!}{n!}\right)t^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^{(r-1)}B_{n-k}\right)\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{r}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(r)}\frac{t^n}{n!}$$

olduğundan

$$B_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(r-1)} B_{n-k}$$

dir.

Örnek

İkinci mertebeden birinci Bernoulli sayısı

$$\begin{aligned} B_1^{(2)} &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} B_k^{(1)} B_{1-k} \\ &= \binom{1}{0} B_0 B_1 + \binom{1}{1} B_1 B_0 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Üçüncü mertebeden üçüncü Bernoulli sayısı

$$\begin{aligned} B_3^{(3)} &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} B_k^{(2)} B_{3-k} \\ &= \binom{3}{0} B_0^{(2)} B_3 + \binom{3}{1} B_1^{(2)} B_2 + \binom{3}{2} B_2^{(2)} B_1 + \binom{3}{3} B_3^{(2)} B_0 \\ &= 1.1.0 + 3.(-1)\frac{1}{6} + 3.\frac{5}{6}\left(-\frac{1}{2}\right) + 1.\left(-\frac{1}{2}\right).1 \\ &= (-1) + \left(-\frac{5}{4}\right) \\ &= -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

3.6. Yüksek Mertebeden Bernoulli Polinomları

3.6.1. Tanım

$r \in \mathbb{N}$, n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$B_n^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}^{(r)} x^k$$

eşitliği ile verilen $B_n^{(r)}(x)$ polinomuna r. mertebeden n. Bernoulli polinomu denir.

$r = 1$ için $B_n^{(r)}(x)$ polinomu bilinen Bernoulli polinomuna dönüşür $[23 - 31]$.

$$B_n^{(1)}(x) = B_n(x) \tag{3.4}$$

Örnek

$$\begin{aligned} B_0^{(2)}(x) &= \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} B_{-k}^{(2)} x^k \\ &= \binom{0}{0} B_0^{(2)} x^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1^{(2)}(x) &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} B_{1-k}^{(2)} x^k \\ &= \binom{1}{0} B_1^{(2)} x^0 + \binom{1}{1} B_0^{(2)} x^1 \\ &= x - 1 \end{aligned}$$

$$B_1^{(2)}(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} B_{2-k}^{(2)} x^k$$

$$= \binom{2}{0} B_2^{(2)} x^0 + \binom{2}{1} B_1^{(2)} x^1 + \binom{2}{2} B_0^{(2)} x^2$$
$$= x^2 - 2x + \frac{5}{6}$$

Bazı yüksek mertebeden Bernoulli polinomları aşağıdaki tablodaki gibidir.

Çizelge 3.4. Yüksek mertebeden Bernoulli polinomları

r/n	0	1	2
1	1	$x - \frac{1}{2}$	$x^2 - x + \frac{1}{6}$
2	1	$x - 1$	$x^2 - 2x + \frac{5}{6}$
3	1	$x - \frac{3}{2}$	$x^2 - 3x + 2$

Özellik

$r \in \mathbb{N}$ ve $B_n^{(r)}(x)$ yüksek mertebeden Bernoulli polinomu olmak üzere $B_n^{(r)}(x)$ polinomunun üreteç fonksiyonu

$$\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^r e^{tx}$$

dir. Yani,

$$\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^r e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(r)}(x) \frac{t^n}{n!}$$

dir $[23 - 31]$.

3.6.1. Lemma

$r \in \mathbb{N}$ ve n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$B_n^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(r-1)}(x) B_{n-k}$$

dir [23].

İspat

$B_n^{(r)}(x)$ yüksek mertebeden Bernoulli polinomunun üreteç fonksiyonunun tanımından

$$\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^{r-1} e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(r-1)}(x) \frac{t^n}{n!}$$

dir.

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$$

olacak biçimde tanımlıdır. Bu eşitlikler yardımıyla

$$\begin{aligned}
\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^{r-1} \frac{t}{e^t - 1} e^{tx} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(r-1)}(x) \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k^{(r-1)}(x)}{k!} \frac{B_{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!}{n!}\right) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(r-1)}(x) B_{n-k}\right) \frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^r e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(r)}(x)\frac{t^n}{n!}$$

olduğundan

$$B_n^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(r-1)}(x) B_{n-k}$$

elde edilir.

Örnek

İkinci ve üçüncü mertebeden bazı Bernoulli polinomları aşağıda verilmiştir.

$$B_0^{(2)}(x) = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} B_k^{(0)}(x) B_{-k} = 1$$

$$\begin{aligned} B_1^{(2)}(x) &= \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} B_k^{(1)}(x) B_{1-k} \\ &= \binom{1}{0} B_0^{(1)}(x) B_1 + \binom{1}{1} B_1^{(1)}(x) B_0 \\ &= -\frac{1}{2} + x - \frac{1}{2} \\ &= x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2^{(2)}(x) &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} B_k^{(1)}(x) B_{2-k} \\ &= \binom{2}{0} B_0^{(1)}(x) B_2 + \binom{2}{1} B_1^{(1)}(x) B_1 + \binom{2}{2} B_2^{(1)}(x) B_0 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + x^2 - x + \frac{1}{6}$$
$$= x^2 - 2x + \frac{5}{6}$$

$$B_0^{(3)}(x) = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} B_k^{(2)}(x) B_{-k} = 1$$

$$B_1^{(3)}(x) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} B_k^{(2)}(x) B_{1-k}$$
$$= \binom{1}{0} B_0^{(2)}(x) B_1 + \binom{1}{1} B_1^{(2)}(x) B_0$$
$$= -\frac{1}{2} + x - 1$$
$$= x - \frac{3}{2}$$

$$B_2^{(3)}(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} B_k^{(2)}(x) B_{2-k}$$
$$= \binom{2}{0} B_0^{(2)}(x) B_2 + \binom{2}{1} B_1^{(2)}(x) B_1 + \binom{2}{2} B_2^{(2)}(x) B_0$$
$$= \frac{1}{6} + 2(x-1)\left(-\frac{1}{2}\right) + x^2 - 2x + \frac{5}{6}$$
$$= x^2 - 3x + 2$$

$B_n^{(r)}(x)$ polinomunun sabit terimleri $B_n^{(r)}$ yüksek mertebeden Bernoulli sayılarına eşit olur.

4. BERNOULLİ MATRİSLERİ

4.1. Bernoulli Matrisi

4.1.1. Tanım

B_n ler n. Bernoulli sayısını göstermek üzere

$$b_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j} B_{i-j}, & i \geq j \ ise \\ 0, & i < j \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $(n+1) \times (n+1)$ tipindeki $\mathcal{B} = [b_{ij}]$ matrisine Bernoulli matrisi denir [20].

Örnek

4×4 tipindeki Bernoulli matrisi

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

şeklindedir.

10×10 tipindeki Bernoulli matrisi

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{42} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{2} & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{7}{6} & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{7}{3} & 0 & \frac{14}{3} & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{10} & 0 & 2 & 0 & -\frac{21}{5} & 0 & 6 & -\frac{9}{2} & 1 \end{bmatrix}_{10\times 10}$$

şeklindedir.

4.2. Bernoulli Polinom Matrisi

4.2.1. Tanım

$B_n(x)$ ler n. Bernoulli polinomu ve

$$b_{ij}(x) = \begin{cases} \binom{i}{j} B_{i-j}(x), & i \geq j \; ise \\ 0, & i < j \; ise \end{cases}$$

olmak üzere $(n+1)\times(n+1)$ tipindeki $\mathcal{B}(x) = \left[b_{ij}(x)\right]$ matrisine Bernoulli polinom matrisi denir [20].

Örnek

4×4 tipindeki Bernoulli polinom matrisi

$$B_{00}(x) = \binom{0}{0} B_0(x) = 1 \;\; ve \;\; j \geq 1 \; için \; B_{0j}(x) = 0 \; dır.$$

$$B_{10}(x) = \binom{1}{0} B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$B_{11}(x) = \binom{1}{1} B_0(x) = 1$$

$$B_{12}(x) = 0$$

$$B_{20}(x) = \binom{2}{0} B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$B_{21}(x) = \binom{2}{1} B_1(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2x - 1$$

$$B_{22}(x) = \binom{2}{2} B_0(x) = 1$$

olmak üzere

$$\mathcal{B}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x - \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ x^2 - x + \frac{1}{6} & 2x - 1 & 1 & 0 \\ x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x & 3x^2 - 3x + \frac{1}{2} & 3x - \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

şeklindedir.

Eş. 3.2 den biliyoruz ki $B_n(x)$ Bernoulli polinomunun sabit terimleri B_n Bernoulli sayılarıdır. Benzer şekilde $\mathcal{B}(x)$ Bernoulli polinom matrisinin sabit terimlerinden elde edilen matris $\mathcal{B}$ Bernoulli matrisini verir.

4.3. Genelleştirilmiş Bernoulli Matrisi

4.3.1. Tanım

$r \in \mathbb{N}$ ve $B_n^{(r)}(x)$ yüksek mertebeden Bernoulli polinomu ve

$$b_{ij}^{(r)}(x) = \begin{cases} \binom{i}{j} B_{i-j}^{(r)}(x), & i \geq j \ ise \\ 0, & i < j \ ise \end{cases}$$

olmak üzere $\mathcal{B}^{(r)}(x)$=$\left[b_{ij}^{(r)}(x)\right]$ ile verilen $(n+1) \times (n+1)$ tipindeki $\mathcal{B}^{(r)}(x)$ matrisine genelleştirilmiş Bernoulli matrisi denir [20].

$r = 1$ için $\mathcal{B}^{(1)}(x) = \mathcal{B}(x)$ dir. (4.1)

Örnek

İkinci mertebeden 3×3 tipinde genelleştirilmiş Bernoulli matrisi

$B_{00}^{(2)}(x) = \binom{0}{0} B_0^{(2)}(x) = 1$, $B_{01}^{(2)}(x) = 0$ ve $B_{02}^{(2)}(x) = 0$ dir.

$$B_{10}^{(2)}(x) = \binom{1}{0} B_1^{(2)}(x) = 1.(x-1) = x-1$$

$$B_{11}^{(2)}(x) = \binom{1}{1} B_0^{(2)}(x) = 1 \ \ ve \ \ B_{12}^{(2)}(x) = 0$$

$$B_{20}^{(2)}(x) = \binom{2}{0} B_2^{(2)}(x) = x^2 - 2x + \frac{5}{6}$$

$$B_{21}^{(2)}(x) = \binom{2}{1} B_1^{(2)}(x) = 2.(x-1) = 2x-2$$

$$B_{22}^{(2)}(x) = \binom{2}{2} B_0^{(2)}(x) = 1$$

olmak üzere

$$\mathcal{B}^{(2)}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x-1 & 1 & 0 \\ x^2 - 2x + \frac{5}{6} & 2x-2 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

5. $q-$ BERNOULLİ SAYILARI VE POLİNOMLARI

5.1. $q-$ Bernoulli Sayıları

5.1.1. Tanım

n negatif olmayan bir tamsayı ve B_n $n.$ Bernoulli sayısı olmak üzere

$$\mathcal{b}_n(q)=B_n\frac{[n]_q!}{n!}$$

ile tanımlı $\mathcal{b}_n(q)$ sayılarına $q-$Bernoulli sayıları denir $[14]$.

Örnek

$$\mathcal{b}_0(q)=B_0\frac{[0]_q!}{0!}=1$$

$$\mathcal{b}_1(q)=B_1\frac{[1]_q!}{1!}=-\frac{1}{2}\frac{(q^1-1)}{(q-1)}=-\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{b}_2(q)=B_2\frac{[2]_q!}{2!}=-\frac{1}{6}\frac{[2]_q!}{2!}=-\frac{[2]_q!}{12}$$

$$\mathcal{b}_3(q)=B_3\frac{[3]_q!}{3!}=0$$

$$\mathcal{b}_4(q)=B_4\frac{[4]_q!}{4!}=-\frac{1}{30}\frac{[4]_q!}{4!}=-\frac{[4]_q!}{720}$$

İlk birkaç $q-$Bernoulli sayısı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 5.1. q −Bernoulli sayıları

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathscr{b}_n(q)$	1	$-\frac{1}{1!\,2}$	$\frac{[2]_q!}{2!\,6}$	0	$-\frac{[4]_q!}{4!\,30}$	0	$-\frac{[6]_q!}{6!\,42}$	0	$-\frac{[8]_q!}{8!\,30}$	0	$\frac{[10]_q!\,5}{10!\,66}$

$q \to 1^-$ için q −Bernoulli sayıları bilinen Bernoulli sayılarına dönüşür.

$$\lim_{q\to 1^-} \mathscr{b}_n(q) = B_n$$

dir.

Örnek

$$\lim_{q\to 1^-} \mathscr{b}_2(q) = \lim_{q\to 1^-} \frac{[2]_q!}{12} = \lim_{q\to 1^-} \frac{q+1}{12} = \frac{1}{6} = B_2$$

elde edilir.

Özellik

$\mathscr{b}_n(q)$, q −Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\frac{z}{(1-q)\left(e^{\frac{z}{1-q}}-1\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathscr{b}_n(q) \frac{z^n}{(q;q)_n}$$

dir [14].

5.2. $q-$ Bernoulli Polinomları

5.2.1. Tanım

n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere

$$B_n(x,q)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_q \mathscr{b}_k(q)x^{n-k}$$

şeklinde tanımlanan polinoma $n.$ $q-$Bernoulli polinomu denir [14].

$$B_0(x,q)=\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}_q \mathscr{b}_k(q)x^{0-k}$$
$$=\binom{0}{0}_q \mathscr{b}_0(q)x^{0-0}=1$$

$$B_1(x,q)=\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}_q \mathscr{b}_k(q)x^{1-k}$$
$$=\binom{1}{0}_q \mathscr{b}_0(q)x^{1-0}+\binom{1}{1}_q \mathscr{b}_1(q)x^{1-1}$$
$$=[1]_q.1.x-[1]_q.\left(-\frac{1}{2}\right).1$$
$$=\frac{q-1}{q-1}x-\left(\frac{q-1}{q-1}\right)\frac{1}{2}$$
$$=x-\frac{1}{2}$$

$$B_2(x,q)=\sum_{k=0}^{2}\binom{2}{k}\mathscr{b}_k(q)x^{2-k}$$
$$=\binom{2}{0}_q \mathscr{b}_0(q)x^{2-0}+\binom{2}{1}_q \mathscr{b}_1(q)x^{2-1}+\binom{2}{2}_q \mathscr{b}_2(q)x^{2-2}$$

$$= [1]_q.1.x^2 + [2]_q.\left(-\frac{1}{2}\right)x + [1]_q.\frac{[2]_q}{12}$$

$$= x^2 - \frac{[2]_q}{2}x + \frac{[2]_q}{12}$$

$$B_3(x,q) = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k}_q \mathscr{b}_k(q)x^{3-k}$$

$$= \binom{3}{0}_q \mathscr{b}_0(q)x^{3-0} + \binom{3}{1}_q \mathscr{b}_1(q)x^{3-1} + \binom{3}{2}_q \mathscr{b}_2(q)x^{3-2}$$

$$+ \binom{3}{3}_q \mathscr{b}_3(q)x^{3-3}$$

$$= [1]_q.1.x^3 + [3]_q\left(-\frac{1}{2}\right)x^2 + [3]_q.\frac{[2]_q}{12}x + [1]_q.0.1$$

$$= x^3 - \frac{[3]_q}{2}x^2 + \frac{[3]_q[2]_q}{12}$$

Bazı q −Bernoulli polinomları tabloda verilmiştir.

Çizelge 5.2. q −Bernoulli polinomları

n	$B_n(x,q)$
0	1
1	$x - \frac{1}{2}$
2	$x^2 - \frac{[2]_q}{2}x + \frac{[2]_q}{12}$
3	$x^3 - \frac{[3]_q}{2}x^2 + \frac{[3]_q[2]_q}{12}x$
4	$x^4 - \frac{[4]_q}{2}x^3 + \frac{[4]_q[3]_q}{12}x^2 - \frac{[4]_q!}{720}$
5	$x^5 - \frac{[5]_q}{2}x^4 + \frac{[5]_q[4]_q}{12}x^3 - \frac{[5]_q!}{720}x$

Çizelge 5.2. (Devam) q −Bernoulli polinomları

6	$x^6-\frac{[6]_q}{2}x^5+\frac{[6]_q[5]_q}{12}x^4-\frac{[6]_q[5]_q[4]_q[3]_q}{720}x^2+\frac{[6]_q!}{30240}$
7	$x^7-\frac{[7]_q}{2}x^6+\frac{[7]_q[6]_q}{12}x^5-\frac{[7]_q[6]_q[5]_q[4]_q}{720}x^3+\frac{[7]_q!}{30240}x$

$q\to 1^-$ için q −Bernoulli polinomları klasik Bernoulli polinomlarına dönüşür. Yani,

$$\lim_{q\to 1^-} B_n(x,q)=B_n(x)$$

dir.

Örnek

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 1^-} B_2(x,q) &= \lim_{q\to 1^-} x^2-\frac{[2]_q}{2}x+\frac{[2]_q}{12}\\ &= \lim_{q\to 1^-} x^2-\frac{q^2-1}{2(q-1)}x+\frac{q^2-1}{12(q-1)}\\ &= \lim_{q\to 1^-} x^2-\frac{q+1}{2}x+\frac{q+1}{12}\\ &= x^2-\frac{2}{2}x+\frac{2}{12}\\ &= x^2-x+\frac{1}{6}\\ &= B_2(x)\end{aligned}$$

Özellik

$B_n(x,q)$, q −Bernoulli polinomlarının q −üreteç fonksiyonu

$$\frac{z}{(1-q)\left(e^{\frac{z}{1-q}}-1\right)}e_q(zx)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x,q)\frac{z^n}{(q;q)_n}$$

dir [14].

İspat

$\mathscr{b}_n(q)$, q −Bernoulli sayılarının üreteç fonksiyonu

$$\frac{z}{(1-q)\left(e^{\frac{z}{1-q}}-1\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathscr{b}_n(q)\frac{z^n}{(q;q)_n}$$

ve

$$e_q(zx)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{z^n}{(q;q)_n}$$

olup,

$$\begin{aligned}\frac{z}{(1-q)\left(e^{\frac{z}{1-q}}-1\right)}e_q(zx)&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathscr{b}_n(q)\frac{z^n}{(q;q)_n}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\frac{z^n}{(q;q)_n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathscr{b}_k(q)}{(q;q)_k}\frac{x^{n-k}}{(q;q)_{n-k}}\right)z^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathscr{b}_k(q)}{(q;q)_k}\frac{x^{n-k}}{(q;q)_{n-k}}\frac{(q;q)_n}{(q;q)_n}\right)z^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}_q\mathscr{b}_k(q)x^{n-k}\right)\frac{z^n}{(q;q)_n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x,q)\frac{z^n}{(q;q)_n}\end{aligned}$$

dir.

Özellik

$n.$ Bernoulli polinomu $B_n(x,q)$ olmak üzere

$$B_n(x+y,q)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}_q B_k(x,q)y^{n-k}$$

dir [14].

İspat

$B_n(x,q)$, q −Bernoulli polinomunun q −üreteç fonksiyonu tanımından

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x,q)\frac{z^n}{(q;q)_n}=\frac{z}{(1-q)\left(e^{\frac{z}{1-q}}-1\right)}e_q(zx)$$

olup,

$$e_q(zy)=\sum_{n=0}^{\infty}y^n\frac{z^n}{(q;q)_n}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}y^n\frac{z^n}{(q;q)_n}\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x,q)\frac{z^n}{(q;q)_n}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k(x,q)}{(q;q)_k}\frac{y^{n-k}}{(q;q)_{n-k}}\right)z^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k(x,q)}{(q;q)_k}\frac{y^{n-k}}{(q;q)_{n-k}}\frac{(q;q)_n}{(q;q)_n}\right)z^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}_q B_k(x,q)y^{n-k}\right)\frac{z^n}{(q;q)_n}\end{aligned}$$

ve

$$e_q(zy)\frac{z}{(1-q)\left(e^{\frac{z}{1-q}}-1\right)}e_q(zx)=\frac{z}{(1-q)\left(e^{\frac{z}{1-q}}-1\right)}e_q(zy)e_q(zx)$$
$$=\frac{z}{(1-q)\left(e^{\frac{z}{1-q}}-1\right)}e_q(zx+zy)$$
$$=\frac{z}{(1-q)\left(e^{\frac{z}{1-q}}-1\right)}e_q\big(z(x+y)\big)$$

dir. Böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x+y,q)\frac{z^n}{(q;q)_n}=\frac{z}{(1-q)\left(e^{\frac{z}{1-q}}-1\right)}e_q\big(z(x+y)\big)$$

olduğundan

$$B_n(x+y,q)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_q B_k(x,q)y^{n-k}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$B_n(x+y,q)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_q B_k(y,q)x^{n-k}$$

olduğunu gösterelim.

$B_n(y,q)$, q −Bernoulli polinomunun q −üreteç fonksiyonu tanımından

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(y,q)\frac{z^n}{(q;q)_n} = \frac{z}{(1-q)\left(e^{\frac{z}{1-q}}-1\right)} e_q(zy)$$

olup,

$$e_q(zx) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{z^n}{(q;q)_n}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{z^n}{(q;q)_n} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(y,q)\frac{z^n}{(q;q)_n} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k(y,q)}{(q;q)_k}\frac{x^{n-k}}{(q;q)_{n-k}}\right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k(y,q)}{(q;q)_k}\frac{x^{n-k}}{(q;q)_{n-k}}\frac{(q;q)_n}{(q;q)_n}\right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k}_q B_k(y,q) x^{n-k}\right)\frac{z^n}{(q;q)_n}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
e_q(zx)\frac{z}{(1-q)\left(e^{\frac{z}{1-q}}-1\right)} e_q(zy) &= \frac{z}{(1-q)\left(e^{\frac{z}{1-q}}-1\right)} e_q(zx)e_q(zy) \\
&= \frac{z}{(1-q)\left(e^{\frac{z}{1-q}}-1\right)} e_q(zy+zx) \\
&= \frac{z}{(1-q)\left(e^{\frac{z}{1-q}}-1\right)} e_q\big(z(y+x)\big) \\
&= \frac{z}{(1-q)\left(e^{\frac{z}{1-q}}-1\right)} e_q\big(z(x+y)\big)
\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x+y,q)\frac{z^n}{(q;q)_n} = \frac{z}{(1-q)\left(e^{\frac{z}{1-q}}-1\right)} e_q\big(z(x+y)\big)$$

olduğundan

$$B_n(x+y,q) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}_q B_k(y,q)x^{n-k}$$

elde edilir.

6. q −BERNOULLİ MATRİSLERİ

Bu bölümde Bernoulli matrislerine benzer şekilde q −Bernoulli sayıları kullanılarak q −Bernoulli matrisleri tanımlanacaktır.

6.1. q −Bernoulli Matrisi

6.1.1. Tanım

$\mathscr{b}_n(q)$, $n.$ q −Bernoulli sayısı ve

$$b_{ij}(q) = \begin{cases} \binom{i}{j}_q \mathscr{b}_{i-j}(q), & i \geq j \; ise \\ 0, & i < j \; ise \end{cases}$$

olmak üzere $\mathcal{B}(q) = \left[b_{ij}(q)\right]$ ile verilen $(n+1) \times (n+1)$ tipindeki $\mathcal{B}(q)$ matrisine q −Bernoulli matrisi denir.

Örnek

3×3 tipindeki q −Bernoulli matrisi

$$\mathcal{B}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{[2]_q}{2.3!} & -\frac{[2]_q}{2} & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

şeklindedir.

7×7 tipindeki q −Bernoulli matrisi

$$\mathcal{B}(q)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{[2]_q}{2.3!} & -\frac{[2]_q}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{[3]_q[2]_q}{2.3!} & -\frac{[3]_q}{2} & 1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{[4]_q!}{30.4!} & 0 & \frac{[4]_q[3]_q}{2.3!} & -\frac{[4]_q}{2} & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{[5]_q!}{30.4!} & 0 & \frac{[5]_q[4]_q}{2.3!} & -\frac{[5]_q}{2} & 1 & 0\\ \frac{[6]_q!}{42.6!} & 0 & -\frac{[6]_q[5]_q[4]_q[3]_q}{30.4!} & 0 & \frac{[6]_q[5]_q}{2.3!} & -\frac{[6]_q}{2} & 1 \end{bmatrix}_{7\times 7}$$

şeklindedir.

Özel olarak $i \geq j$ için

$$b_{ij}(q)=\binom{i}{j}_q \mathscr{b}_{i-j}(q)$$

$$=\frac{[i]_q!}{[j]_q!\,[i-j]_q!}B_{i-j}\frac{[i-j]_q!}{(i-j)!}$$

$$=\frac{[i]_q!\,B_{i-j}}{[j]_q!\,(i-j)!}$$

olduğundan q −Bernoulli matrisi, Bernoulli sayılarının özelliği kullanılarak

$$b_{ij}(q)=\begin{cases}\frac{[i]_q!\,B_{i-j}}{[j]_q!\,(i-j)!}, & i \geq j \ ise\\ 0, & i<j \ ise\end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

$q \to 1^-$ için q −Bernoulli polinom matrisi, Bernoulli matrisine eşittir.

6.1.1. Teorem

q −Binomiyel katsayı $\binom{i}{j}_q$ olmak üzere

$$d_{ij}(q)=\begin{cases}\binom{i}{j}_q\dfrac{(i-j)_q!}{(i-j+1)!}, & i\geq j\ ise\\ 0, & i<j\ ise\end{cases}$$

ile verilen $(n+1)\times(n+1)$ tipindeki $D(q)=[d_{ij}(q)]$ matrisi q −Bernoulli matrisinin tersidir. Yani,

$$\mathcal{B}^{-1}(q)= D(q)$$

dir.

İspat

$\mathcal{B}$(q)=$[b_{ij}(q)]$ olmak üzere

$\mathcal{B}$(q) D(q)=I

olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{B}(q)D(q)\right)_{ij} &= \sum_{k=0}^{n} b_{ik}(q)d_{kj}(q)\\ &= \sum_{k=j}^{i}\binom{i}{k}_q \mathscr{b}_{i-k}(q)\binom{k}{j}_q\frac{[k-j]_q!}{(k-j+1)!}\\ &= \sum_{k=j}^{i}\binom{i}{k}_q\binom{k}{j}_q \mathscr{b}_{i-k}(q)\frac{[k-j]_q!}{[k-j+1]!}\\ &= \sum_{k=j}^{i}\binom{i}{j}_q\binom{i-j}{k-j}_q \mathscr{b}_{i-k}(q)\frac{[k-j]_q!}{(k-j+1)!}\end{aligned}$$

$$= \binom{i}{j}_q \sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-j}{k}_q \mathscr{b}_{i-j-k}(q) \frac{[k]_q!}{(k+1)!}$$

$$= \binom{i}{j}_q \sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-j}{k}_q B_{i-j-k} \frac{[i-j-k]_q!}{(i-j-k)!} \frac{[k]_q!}{(k+1)!}$$

$$= \binom{i}{j}_q \sum_{k=0}^{i-j} \frac{[i-j]_q!}{[k]_q! \, [i-j-k]_q!} B_{i-j-k} \frac{[i-j-k]_q!}{(i-j-k)!} \frac{[k]_q!}{(k+1)k!} \frac{(i-j)!}{(i-j)!}$$

$$= \binom{i}{j}_q \frac{[i-j]_q!}{(i-j)!} \sum_{k=0}^{i-j} \frac{1}{(k+1)} \binom{i-j}{k} B_{i-j-k}$$

Eş. 2.9 dan dolayı

$$\big(\mathcal{B}(q)D(q)\big)_{ij} = \binom{i}{j}_q \frac{[i-j]_q!}{(i-j)!} \delta_{i-j,0} = \delta_{i,j}$$

dir.

Örnek

$$D(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{[2]_q!}{3!} & \frac{[2]_q}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{[3]_q!}{4!} & \frac{[3]_q!}{3!} & \frac{[3]_q}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{[4]_q!}{5!} & \frac{[4]_q!}{4!} & \frac{[4]_q[3]_q}{3!} & \frac{[4]_q}{2} & 1 & 0 \\ \frac{[5]_q!}{6!} & \frac{[5]_q!}{5!} & \frac{[5]_q[4]_q[3]_q}{4!} & \frac{[5]_q[4]_q}{3!} & \frac{[5]_q}{2} & 1 \end{bmatrix}_{6\times 6}$$

6.2. q −Bernoulli Polinom Matrisi

6.2.1. Tanım

$B_n(x,q),\ n.\ q$ −Bernoulli polinomu olmak üzere

$$b_{ij}(x,q)=\begin{cases}\binom{i}{j}_q B_{i-j}(x,q), & i\geq j \ ise\\ 0, & i<j \ ise\end{cases}$$

ile verilen $(n+1)\times(n+1)$ tipindeki $\mathcal{B}(x,q)=\left[\mathfrak{b}_{ij}(x,q)\right]$ matrisine q −Bernoulli polinom matrisi denir.

Örnek

5×5 tipinde q −Bernoulli polinom matrisi

$$\mathcal{B}(x,q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ x-\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0\\ x^2-\frac{[2]_q}{2}x+\frac{[2]_q}{12} & [2]_q\left(x-\frac{1}{2}\right) & 1 & 0 & 0\\ x^3-\frac{[3]_q}{2}x^2+\frac{[3]_q[2]_q}{12}x & [3]_q x^2-\frac{[3]_q[2]_q}{2}x+\frac{[3]_q[2]_q}{12} & [3]_q\left(x-\frac{1}{2}\right) & 1 & 0\\ x^4-\frac{[4]_q}{2}x^3+\frac{[4]_q[3]_q}{12}x^2-\frac{[4]_q!}{720} & [4]_q x^3-\frac{[4]_q[3]_q}{2}x^2+\frac{[4]_q[3]_q[2]_q}{12}x & \frac{[4]_q[3]_q}{12}\left(x^2-\frac{[2]_q}{2}x+\frac{[2]_q}{12}\right) & [4]_q\left(x-\frac{1}{2}\right) & 1 \end{bmatrix}_{5\times 5}$$

şeklindedir.

6.3. q −Bernoulli Matrisi ve Genelleştirilmiş q −Pascal Matrisi

6.3.1.Tanım

q −Binomiyel katsayılar $\binom{i}{j}_q$ olmak üzere

$$p_{ij}(q) = \begin{cases} \binom{i}{j}_q x^{i-j}, & i \geq j \; ise \\ 0, & i < j \; ise \end{cases}$$

ile verilen $(n+1) \times (n+1)$ tipindeki $P(x,q) = [p_{ij}(x,q)]$ matrisine genelleştirilmiş q −Pascal matrisi denir $[21]$.

6.3.1. Teorem

$\mathcal{B}(x,q), q$ −Bernoulli polinom matrisi ve $P(x,q)$, genelleştirilmiş q −Pascal matrisi olmak üzere

$$\mathcal{B}(x+y,q) = P(x,q)\mathcal{B}(y,q) = P(y,q)\mathcal{B}(x,q)$$

dur. Özel olarak

$$\mathcal{B}(x,q) = P(x,q)\mathcal{B}(q)$$

dur.

İspat

$$\begin{aligned}
\left(P(y,q)\mathcal{B}(x,q)\right)_{ij} &= \sum_{k=0}^{n} p_{ik}(q) b_{kj}(x,q) \\
&= \sum_{k=j}^{i} \binom{i}{k}_q y^{i-k} \binom{k}{j}_q B_{k-j}(x,q) \\
&= \sum_{k=j}^{i} \binom{i}{k}_q \binom{k}{j}_q y^{i-k} B_{k-j}(x,q) \\
&= \sum_{k=j}^{i} \binom{i}{j}_q \binom{i-j}{k-j}_q y^{i-k} B_{k-j}(x,q)
\end{aligned}$$

$$= \binom{i}{j}_q \sum_{k=j}^{i} \binom{i-j}{k-j}_q y^{i-k} B_{k-j}(x,q)$$

$$= \binom{i}{j}_q \sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-j}{k}_q y^{i-j-k} B_k(x,q)$$

$$= \binom{i}{j}_q B_{i-j}(x+y,q)$$

$$= \big(\mathcal{B}(x+y,q)\big)_{ij}$$

olur. Benzer şekilde $P(x,q)\mathcal{B}(y,q)$ olduğu gösterilir.

Şimdi $\mathcal{B}(x,q) = P(x,q)\mathcal{B}(q)$ olduğunu gösterelim.

$i < k < j$ için $\big(\mathcal{B}(x,q)\big)_{ij} = (P(x,q)B(q))_{ij} = 0$

dır.

$i \geq k \geq j$ için

$$\big(P(x,q)\mathcal{B}(q)\big)_{ij} = \sum_{k=0}^{n} p_{ik}(q) b_{kj}(q)$$

$$= \sum_{k=j}^{i} \binom{i}{k}_q x^{i-k} \binom{k}{j}_q \mathscr{b}_{k-j}(q)$$

$$= \sum_{k=j}^{i} \binom{i}{k}_q \binom{k}{j}_q x^{i-k} \mathscr{b}_{k-j}(q)$$

$$= \sum_{k=j}^{i} \binom{i}{j}_q \binom{i-j}{k-j}_q x^{i-k} \mathscr{b}_{k-j}(q)$$

$$= \binom{i}{j}_q \sum_{k=j}^{i} \binom{i-j}{k-j}_q x^{i-k} \mathscr{b}_{k-j}(q)$$

$$= \binom{i}{j}_q \sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-j}{k}_q x^{i-j-k} \mathscr{b}_k(q)$$
$$= \binom{i}{j}_q B_{i-j}(x,q)$$
$$= \left(\mathcal{B}(x,q)\right)_{ij}$$

elde edilir.

Örnek

$$P(y,q)\mathcal{B}(x,q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ y^2 & [2]_q y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x - \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ x^2 - \frac{[2]_q}{2} x + \frac{[2]_q}{12} & [2]_q \left(x - \frac{1}{2}\right) & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (x+y) - \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ x^2 + (q+1)xy + y^2 + \frac{(q+1)}{2}(x+y) + \frac{(q+1)}{12} & (q+1)\left(x + y - \frac{1}{2}\right) & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (x+y) - \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ x^2 + [2]_q xy + y^2 + \frac{[2]_q}{2}(x+y) + \frac{[2]_q}{12} & [2]_q \left(x + y - \frac{1}{2}\right) & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \mathcal{B}(x+y,q)$$

$$P(x,q)\mathcal{B}(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ x^2 & [2]_q x & 1 & 0 \\ x^3 & [3]_q x^2 & [3]_q x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{[2]_q}{12} & -\frac{[2]_q}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{[3]_q[2]_q}{12} & -\frac{[3]_q}{2} & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x - \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ x^2 - \frac{[2]_q}{2} x + \frac{[2]_q}{12} & [2]_q \left(x - \frac{1}{2}\right) & 1 & 0 \\ x^3 - \frac{[3]_q}{2} x^2 + \frac{[3]_q[2]_q}{12} x & [3]_q x^2 - \frac{[3]_q[2]_q}{2} x + \frac{[3]_q[2]_q}{12} & [3]_q \left(x - \frac{1}{2}\right) & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \mathcal{B}(x,q)$$

6.4. q −Bernoulli Matrisi ve Stirling Sayıları

$s(m,n)$ ve $S(m,n)$ Eş. 2.10 ve Eş. 2.11 deki gibi sırası ile birinci ve ikinci tür Stirling sayıları olmak üzere

$\tilde{S}(q) = \left[S_{ij}(q)\right]_{(n+1)\times(n+1)}$ ve $\tilde{s}(q) = \left[s_{ij}(q)\right]_{(n+1)\times(n+1)}$

matrisleri

$$S_{ij}(q) = \begin{cases} \dfrac{[i]_q!}{i!} S(i, j-1), & i \geq j \; ise \\ \quad 0, & i < j \; ise \end{cases} \tag{6.1}$$

ve

$$s_{ij}(q) = \begin{cases} \dfrac{(j+1)!}{[j]_q!\, i} s(i, j+1), & i \geq j \; ise \\ \quad 0, & i < j \; ise \end{cases} \tag{6.2}$$

şeklinde tanımlayalım.

6.4.1. Teorem

$\tilde{S}(q)$ ve $\tilde{s}(q)$ sırasıyla Eş. 6.1 ve Eş. 6.2 de tanımlanan matrisler olmak üzere

$\mathcal{B}(q) = \tilde{S}(q)\tilde{s}(q)$

dir.

İspat

Bernoulli matrislerinde i< j için $b_{ij} = 0$ ve i ≥ j için

$$b_{ij} = \binom{i}{j} B_{i-j} = \sum_{k=1}^{i+1} \frac{j+1}{k} S(i,k-1)s(k,j+1)$$

[22] şeklinde olup ,

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{B}(q)\right)_{ij} &= \binom{i}{j}_q \mathscr{b}_{i-j}(q) \\
&= \binom{i}{j}_q \frac{[i-j]_q!}{(i-j)!} B_{i-j} \\
&= \frac{[i]_q!}{[j]_q!\,[i-j]_q!} \frac{[i-j]_q!}{(i-j)!} \frac{1}{\binom{i}{j}} \sum_{k=1}^{i+1} \frac{j+1}{k} S(i,k-1)s(k,j+1) \\
&= \frac{[i]_q!}{[j]_q!} \frac{1}{(i-j)!} \frac{(i-j)!\,(j)!}{(i)!} \sum_{k=1}^{i+1} \frac{j+1}{k} S(i,k-1)s(k,j+1) \\
&= \sum_{k=1}^{i+1} \frac{[i]_q!}{(i)!} \frac{(j)!}{[j]_q!} \frac{(j+1)}{k} S(i,k-1)s(k,j+1) \\
&= \sum_{k=1}^{i+1} \frac{[i]_q!}{(i)!} \frac{(j+1)!}{[j]_q!\,k} S(i,k-1)s(k,j+1) \\
&= \sum_{k=1}^{i+1} \frac{[i]_q!}{(i)!} S(i,k-1) \frac{(j+1)!}{[j]_q!\,k} s(k,j+1) \\
&= \sum_{k=1}^{i+1} S_{ik}\,(q) s_{kj}(q) \\
&= \left(\tilde{S}(q)\tilde{s}(q)\right)_{ij}
\end{aligned}$$

dir.

Örnek

$$\tilde{S}(q)\tilde{s}(q)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{[2]_q}{2} & \frac{[2]_q}{2} & 0\\ 0 & \frac{[3]_q[2]_q}{6} & \frac{[3]_q[2]_q}{2} & \frac{[3]_q[2]_q}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & -2 & \frac{2}{[2]_q} & 0\\ -\frac{3}{2} & \frac{11}{2} & -\frac{9}{[2]_q} & \frac{6}{[3]_q[2]_q}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0\\ \frac{[2]_q}{2.3!} & -\frac{[2]_q}{2} & 1 & 0\\ 0 & \frac{[3]_q[2]_q}{2.3!} & -\frac{[3]_q}{2} & 1\end{bmatrix}$$

$$=\mathcal{B}(q)$$

6.4.2. Teorem

$s(m,n)$ ve $S(m,n)$ Eş. 2.10 ve Eş. 2.11 deki gibi sırası ile birinci ve ikinci tür Stirling sayıları olmak üzere

$$\mathscr{b}_n(q)=\frac{[n]_q!}{n!}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}S(n,k-1)s(k,1)$$

dir.

İspat

[22] den

$$s(k,1)=(-1)^{k-1}(k-1)!$$

ve

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \; S(n,k) \frac{k!}{k+1}$$

dir [22].

$$\begin{aligned}
\mathscr{b}_n(q) &= \frac{[n]_q!}{n!} B_n \\
&= \frac{[n]_q!}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \; S(n,k) \frac{k!}{k+1} \\
&= \frac{[n]_q!}{n!} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \; S(n,k-1) \frac{(k-1)!}{k} \\
&= \frac{[n]_q!}{n!} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \; S(n,k-1) s(k,1)
\end{aligned}$$

dir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Bernoulli sayıları ve polinomları ile elde edilen Bernoulli matrisleri ve özellikleri incelendi. $q-$Bernoulli sayılarının ve polinomlarının tanımından yararlanılarak $q-$Bernoulli matrisleri tanımlandı. $q-$Bernoulli matrisinin tersi gösterildi. Genelleştirilmiş $q-$Pascal matrisinin $q-$Bernoulli matrisleri ile çarpanlaması yapıldı. Yine birinci ve ikinci tür Stirling sayılarının tanımı kullanılarak bulunan özel q matrislerinin çarpanlaması yapıldı ve $q-$Bernoulli matrisi elde edildi. Ayrıca Stirling sayılarının özellikleri kullanılarak $q-$Bernoulli matrisinin elemanları için farklı bir bağıntı elde edildi.

$q-$Bernoulli matrislerinin tanımından faydalanılarak genelleştirilmiş $q-$Bernoulli matrisleri tanımlanabilir. Genelleşirilmiş $q-$Bernoulli matrislerinin $q-$Pascal ve $q-$Fibonacci matrisleri ile çarpanlaması yapılabilir. Ayrıca yüksek mertebeden $q-$Bernoulli sayıları ve polinomları için farklı bir rekürans bağıntısı ve çeşitli özellikler elde edilebilir. Yine bu özelllikler kullanılarak genelleştirilmiş $q-$Bernoulli matrislerinin tersi bulunabilir.

KAYNAKLAR

1. Bernoulli, J., “Ars Conjectandi”, ***Published Posthumously Basel***, Switzerland, 1-33, (1713).

2. Nörlund, N. E., “Vorlesungen Über Differenzenrechnung”, ***Chelsea Publishing Company.,*** Newyork, (1924).

3. Carlitz, L., “q −Bernoulli Numbers and Polynomials”, ***Duke Math. J.***, 15(4): 987-1000 (1948).

4. Carlitz, L., “Some theorems on Bernoulli Numbers of Higher Order Received”, ***Pacific J. Math.*** 2(2): 127–139 (1952).

5. Carlitz, L., “Some theorems on Bernoulli and Euler Numbers of Higher Order”, ***Duke Math J.*** 21(3): 405-421 (1954).

6. Al-Salam, W. A., “q −Bernoulli Numbers and Polynomials” ***Mathematische Nachrichten ,***17(3-6): 239-260 (1958).

7. Koblitz, N., “On Carlitz’s q−Bernoulli Numbers”, ***Journal of Number Theory,*** 14(3) : 332– 339 (1982).

8. Rademacher, H., “ Bernoulli Polynomials and Bernoulli Numbers”, ***Analytic Number Theory Springer–Verlag,*** 169:1–13 (1973).

9. Satoh, J., “q−Analogue of Riemann’s ξ–Function and q–Euler Numbers”, ***Journal of Number Theory,*** 3(3) : 346–362 (1989).

10. Tsumura, H., “A Note on q−Analogues of the Dirichlet Series and q–Bernoulli Numbers”, ***Journal of Number Theory,*** 39(3): 251–256 (1991).

11. Şimşek, Y., “On q−Analogue of the Twisted L–Functions and q–Twisted Bernoulli Numbers”, ***J–Korean Math.,*** 40(6): 963–975 (2003).

12. Deeba, E. Y. , Rodriguez, D. M., “Stirling’s Series and Bernoulli Numbers”, ***Amer. Math. Montly,*** 98: 423–426 (1991).

13. Howard, F. T., “Explicit formulas for degenerate Bernoulli numbers”, ***Discrete Math.,*** 162(1-3): 175–185 (1996).

14. Hegazi, A. S. , Mansour, M., “A Note on q −Bernoulli Numbers and Polynomials”, ***Journal of Nonlinear Mathematical Physics,*** 13(1): 9-18 (2005).

15. Kac, V., Cheung P., “Quantum Calculus”, ***Springer Newyork,*** 1-122, (2002).

16. Chan,O-Y. , Manna, D., “A New q −Analogue for Bernoulli Numbers’, ***Ams classification Numbers,*** 1-12, (2010).

17. Lalin, M.,N., “Bernoulli Numbers”, ***Junior Number Theory Seminar-Universty of Texas at Austin September,*** 6th, 1-10, (2005).

18. Roman, S., “The Umbral Calculus”, ***Academic Press. Inc.***, (1984).

19. Luo, Q.-M., Guo, B., Quı, F. , Depnath, L., “Generalizations of Bernoulli Numbers and Polynomials”, ***International Journal of Mathematics and Math. Sciences,*** 59:3769-3776 (2001).

20. Zhang, Z., Whang, J., “Bernoulli Matrix and its Algebraic Properties” ***Discrete Applied Mathematics,*** 154: 1622-1632 (2006).

21. Ernst, T., “q −Pascal and q −Bernoulli Matrices and Umbral Approach”, ***Department of Mathematics Uppsala Universty,*** 1-21, (2008).

22. Cheon, G.-S. , Kim, J.-S., “Factorial Stirling Matrix and Related Combinatorial Sequences”, ***Linear Algebra and its Applications,*** 357(1-3): 247-258 (2002).

23. İnternet: Cornell University Library, Kim[1], D. S. , Kim[2], T., “Umbral Calculus Associated with Bernoulli Polynomials” arXive: math/1212.2589, (2013).

24. İnternet: Cornell University Library, Kim, T., Şimşek, Y. , H. M. Srivastava “q −Bernoulli Numbers and Polynomials Associated with Multiple q −Zeta Functions and Basic L-Series” arXive: math/0502019, (2013).

25. Thomas, A., “Combinatorics Part-II Stirling Numbers”, ***Applications of Discrete Mathematics,*** 6: 94-111, (1991).

26. Zagier, D., “A Modified Bernoulli Numbers”, ***Nieuw Arch. Wisk.,*** 4(16): 1-2, 63-72 (1998).

27. İnternet: Cornell University Library, Dixit, A., Moll, V. H. , Vignat, C., “The Zagier Modification of Bernoulli Numbers and Polynoml Extension. Part I” arXiv: math/1209.4110, (2013).

28. İnternet: Cornell University Library, Kim, T., “On the Weighted q −Bernoulli Numbers and Polynomials” arXiv: math/ 0502019v1, (2013).

29. Kim, T., “On p −adic q −Bernoulli Numbers”, ***J. Korean Math. Soc.,*** 37(1): 21-30 (2000).

30. Kim, T., “A Note on q −Bernoulli Numbers and Poynomials”, ***Journal of Nonlinear Mathematical Physics,*** 13(3): 315-322 (2006).

31. Riordan, J., “Combinatorial Identites”, **Wiley, Newyork, London, Sydney,** 1-256, (1968).

32. Carlitz, L., “A Note Bernoulli Numbers and Polynomials”, ***Prog. Amer. Math,.*** 3(4): 608-613 (1952).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: KUŞ, Semra
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 03.08.1982 KIRŞEHİR
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (505) 866 00 24
e-mail	: semrakus40@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Selçuk Üniversitesi	
	Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi	
	Matematik Öğretmenliği	2005
Lise	Anadolu Öğretmen Lisesi Kırşehir	2000

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2005- 2007	Özel Kavram Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2007-2008	Merzifon Çözüm Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2008-	Ahi Evran Üniversitesi	Öğretim Görevlisi

Yabancı Dil
İngilizce

Hobiler
Spor yapmak, kitap okumak, fotoğrafçılık.