İKİNCİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ

Şükran KÜLAH

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2013

ANKARA

Şükran KÜLAH tarafından hazırlanan "İKİNCİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ" adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Adil MISIR

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ogün DOĞRU ………………

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Adil MISIR

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi ………………

Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL ………………

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Tez Savunma Tarihi: 15/07/2013

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU ………………

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orjinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Şükran KÜLAH

İKİNCİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Şükran KÜLAH

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2013

ÖZET

Bu çalışmada, ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık davranışları incelenecektir.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılıgı için yapılan çalısmaların tarihçesi ele alınmıs. İkinci bölümde ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin özel bir sınıfının çözümlerinin davranışları incelenecektir.Üçüncü bölümde ayırma ve karşılaştırma kriterleri yardımıyla salınımlılık kriterleri verilecek. Dördüncü bölümde forced denklemlerin özel bir sınıfının salınım davranışları incelenecektir.

Bilim Kodu : **204.1.138**
Anahtar Kelimeler : **Diferensiyel Denklemler, Salınımlılık.**
Sayfa Adedi : **163**
Tez Yöneticisi : **Doç. Dr. Adil MISIR**

OSCILLATION CRITERIA ON SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS
(M.Sc. Thesis)

Şükran KÜLAH

GAZI UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
July 2013

ABSTRACT

In this study, we are examined oscillatory behaviour of solutions of the second order differential equations.

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, In the second chapter, the history of those studies, oscillation of the second order differential equations, have been dealt with. we are examined behaviour of solutions of a particular class of the second order differential equations. In the third chapter, we will be given oscillation criteria by the help of separation and comparison criteria.In the fourth chapter, we are examined behaviour of oscillation of a particular class of forced equations

Science Code : 204.1.138
Keywords : Differential Equations, Oscillation.
Page Number : 163
Adviser : Assoc. Prof. Dr. Adil MISIR

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında hiç bir zaman yardımlarını ve anlayışını eksik etmeyen, akademik başarısı ve kişiliğiyle örnek alınacak çok değerli hocam ve danışmanım Gazi Üniversitesi öğretim elemanı sayın Doç. Dr. Adil MISIR' a en derin saygılarımla sonsuz teşekkürlerimi sunarım. İhtiyaç duyduğum her an yardımlarını hiçbir şekilde eksik etmeyen çok değerli arkadaşlarım Süleyman ÖĞREKÇİ, Banu MERMERKAYA, Rukiye YEĞİN' e ve tezimin yazımı aşamasında çok yardımcı olan pedagojik formasyon eğitimimde tanıştığım çok değerli arkadaşım Yasin ÖZTÜRK' e ne kadar teşekkür etsem azdır. Ayrıca manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli kardeşlerim Mehmet KÜLAH ve Seçil KÜLAH'a, nişanlım Selçuk GÜZELDAĞ'a, kuzenim Filiz AYDIN'a ve haklarını hiç bir zaman ödeyemeyeceğim her zaman her koşulda yanımda olan canım babam Şevket KÜLAH ve canım annem Emine KÜLAH' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

Son yıllarda, ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin salınımlılığı ve salınımsızlıgı ile ilgili çok çesitli çalısmalar yapılmıstır. Salınımlılık ve salınımsızlık teorisinde ilk sonuçlar

$$x''(t)+q(t)x(t)=0 \tag{1.1}$$

lineer denklemi için elde edilmiştir. Bu denklem modeli için ilk integral tipi salınımlılık kriterini 1918 yılında Fite vermiştir. Fite bu çalışmasında $q(t)\geq 0$ olmak üzere

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t} q(s)\,ds=\infty \tag{1.2}$$

olması halinde Eş. 1.1 in salınımlı olduğunu ispatlamıştır [1]. 1949 yılında Wintner, Fite'nin kriterinin $q(t)<0$ olması durumunda da geçerli olduğunu göstermiştir. Ayrıca Wintner,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} q(u)\,duds=\infty \tag{1.3}$$

olması halinde Eş. 1.1 in salınımlı olduğunu ispatlamıştır [2]. Daha sonra Eş. 1.3 Fite-Wintner-Leighton kriteri olarak genişletilip Eş. 1.1 in salınımlılığı ispatlanmıştır [1,3]. Leighton da $p(t)$ pozitif sürekli bir fonksiyon olmak üzere daha genel

$$\left(p(t)x'(t)\right)'+q(t)x(t)=0 \tag{1.4}$$

lineer denklemi için çalışmalar yapmıştır [3]. Bizde bu çalışmamızda genel olarak

$a(t)\in C^1([t_1,t_2],\mathbb{R}^+)$ ve $q(t)\in C([t_1,t_2],\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\left(a(t)x'(t)\right)'+q(t)x(t)=0$$

denklem modelinin salınımlılık kriterleri üzerinde durup salınımlılık kriterleriyle ilgili var olan çalışmalardan bazı derlemeler yapacağız.

2. ÇÖZÜMLERİN DAVRANIŞLARI

Bu bölümde ikinci mertebeden lineer olmayan diferensiyel denklemlerin özel bir sınıfının tüm çözümlerinin sürdürülebilirlik, sınırlı ve sıfıra yakınsak olmasını garanti eden koşulları oluşturacağız. Bu kesimde $F \in C\left(\left[t_0,\infty\right)\times\mathbb{R}^3,\mathbb{R}\right)$ olmak üzere

$$F\left(t, x(t), x'(t), x''(t)\right)=0 \tag{2.1}$$

ikinci basamaktan adi diferensiyel denklemini ele alacağız. Bu denklemde geçen $x(t)$ fonksiyonu, $t\in\left[t_x,\infty\right)\subset\left[t_0,\infty\right)$ olmak üzere $\left[t_x,\infty\right)$ aralığında iki kez sürekli türevlenebilen ve Eş. 2.1 in çözümü olan bir fonksiyondur. $t_x \geq t_0 \geq 0$ sayısının seçimi incelenmekte olan özel $x(t)$ çözümüne bağlıdır.

İkinci basamaktan bir diferensiyel denklemin $(0,\infty)$ üzerinde tanımlı aşikar olmayan bir $x(t)$ çözümü her t_0 pozitif sayısı için $\left(t_0,\infty\right)$ aralığında sonsuz sayıda sıfıra sahipse böyle bir çözüme *salınımlı çözüm*, aksi halde salınımlı olmayan *salınımsız çözüm* denir. Her $t\geq t_1$ için $x(t)\neq 0$ olacak şekilde bir $t_1\geq t_0$ varsa $x(t)$ çözümü salınımsızdır. Başka bir deyişle, salınımsız bir çözüm belli bir noktadan sonra ya daima pozitif ya da daima negatif olmalıdır. Eş. 2.1 in tüm çözümleri salınımlı ise o zaman Eş. 2.1 e *salınımlıdır* deriz. Diferensiyel denklemlerin salınımlı davranışlarını inceleyeceğimiz bu çalışmamızda çözümlerin ayrıntılı bilgisine ihtiyacımız olmayacak, daha ziyade salınımlılığını göstermek için gerekli koşulları ve bu koşulların anlamlığını inceleyeceğiz.

2.1. Sürdürülebilirlik, Sınırlılık ve Sıfıra Yakınsama

$t_0\geq 0$ olmak üzere $a,q\in C\left(\left[t_0,\infty\right),\mathbb{R}^+\right)$, $f,g\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ve $h,e\in C\left(\left[t_0\times\infty\right),\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ verilmiş fonksiyonlr ve $\forall\, y\in\mathbb{R}$ için $g(y)>0$ olmak üzere

$$\left(a(t)x'(t)\right)' + h\left(t,x(t),x'(t)\right) + q(t)\,f\left(x(t)\right)g\left(x'(t)\right) = e\left(t,x(t),x'(t)\right) \tag{2.2}$$

formunda ikinci mertebeden lineer olmayan diferensiyel denklemini ele alalım. Eş. 2.2 nin yerine bazen ona denk olan

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= \frac{1}{a(t)}\left[-a'(t)y - h(t,x,y) - q(t)\,f(x)g(y) + e(t,x,y)\right] \end{aligned} \tag{2.3}$$

sistemini ele almak daha uygundur.

Eğer $p^{+}(t) := \max\{p(t),0\}$ ve $p^{-}(t) := \max\{-p(t),0\}$ olarak tanımlanırsa $p(t) = p^{+}(t) - p^{-}(t)$ olur. Eş. 2.2 ya da ona denk olan Eş. 2.3 de $F(x) = \int_0^x f(s)\,ds$, $G(y) = \int_0^y \frac{s}{g(s)}\,ds$ olarak tanımlayalım ve

$$\left|e(t,x,y)\right| \le r(t) \tag{2.4}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $r(t) \in C\left([t_0,\infty),\mathbb{R}\right)$ fonksiyonu var olsun. Ayrıca

$$yh(t,x,y) \ge 0 \tag{2.5}$$

olsun ve

$$\frac{|y|}{g(y)} \le m + nG(y) \tag{2.6}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde negatif olmayan *m* ve *n* sabitleri var olsun.

Sürdürülebilirlik ilgili teoremi vermeden önce, iyi bilinen Gronwall lemmasını verelim.

2.1. Lemma (Gronwall Eşitsizliği):

$\mathrm{I}=[t_0,\infty)\subset\mathbb{R}$ reel sayıların bir alt aralığı $u,q,t\geq t_0$ için negatif olmayan sürekli fonksiyonlar ve $c>0$ bir sabit olmak üzere;

$$u(t)\leq c+\int_{t_0}^{t} q(s)u(s)ds\ , \qquad t\in\mathrm{I}$$

ise bu durumda

$$u(t)\leq c\exp\left(\int_{t_0}^{t} q(s)ds\right)\ , \qquad t\in\mathrm{I}$$

dır.

2.1. Teorem:

Eş. 2.4-Eş. 2.6 sağlansın $t\geq t_0$ için $a'(t)\geq 0$ ve $F(x)$ alttan sınırlı olsun. Eğer $|y|\to\infty$ olması $G(y)\to\infty$ olmasını gerektiriyorsa her $t\geq t_0$ için Eş. 2.2 nin tüm çözümleri tanımlıdır.

İspat:

Kabul edelim ki Eş. 2.3 ün $\left(x(t),y(t)\right)$ çözümü bir $T\geq t_0$ noktasında sıçrama süreksizliği yapsın. Yani $\lim_{t\to T^-}\left[|x(t)|+|y(t)|\right]=\infty$ olsun. $F(x)$ alttan sınırlı olduğundan, öyle bir $K>0$ sabiti vardır ki $F(x)\geq -K$ sağlanır.

$$V(x,y,t)=\frac{1}{q(t)}G(t)+\frac{1}{a(t)}\left[F(x)+K\right]$$

tanımlayalım, o zaman

$$V'(x,y,t)=-\frac{q'(t)}{q^2(t)}G\big(y(t)\big)+\frac{1}{q(t)}G'\big(y(t)\big)y'(t)-\frac{a'(t)}{a^2(t)}\left[F\big(x(t)\big)+K\right]$$
$$+\frac{1}{a(t)}F'\big(x(t)\big)x'(t)$$

dir. $G'\big(y(t)\big)=\left(\int_0^y \frac{s}{g(s)}ds\right)'=\frac{y}{g(y)}$, $F'\big(x(t)\big)=\left(\int_0^x f(s)ds\right)'=f(x)$ ve Eş. 2.3 den $x'=y$ olduğundan

$$V'(x,y,t)=-\frac{q'(t)}{q^2(t)}G\big(y(t)\big)-\frac{a'(t)}{a^2(t)}\left[F\big(x(t)\big)+K\right]+\frac{1}{q(t)}\cdot\frac{y(t)}{g\big(y(t)\big)}y'(t)$$
$$+\frac{f\big(x(t)\big)}{a(t)}y(t)$$
$$=-\frac{q'(t)}{q^2(t)}G\big(y(t)\big)-\frac{a'(t)}{a^2(t)}\left[F\big(x(t)\big)+K\right]+\frac{1}{a(t)q(t)}\cdot\frac{y(t)}{g\big(y(t)\big)}a(t)y'(t)$$
$$+\frac{f\big(x(t)\big)}{a(t)}y(t)$$

yani

$$V'=-\frac{q'}{q^2}G-\frac{a'}{a^2}[F+K]+\frac{1}{aq}\left(\frac{y}{g(y)}\right)[-a'y-h-qfg+e]+\frac{fy}{a}$$
$$=-\frac{q'}{q^2}G-\frac{a'}{a^2}[F+K]-\frac{a'}{aq}\left(\frac{y^2}{g(y)}\right)-\frac{h}{aq}\left(\frac{y}{g(y)}\right)-\frac{fy}{a}$$
$$+\frac{e}{aq}\frac{y}{g(y)}+\frac{fy}{a}$$

elde edilir. Diğer taraftan $a'\frac{[F+K]}{a^2}+a'\frac{y^2}{aqg(y)}+h\frac{y}{aqg(y)}\geq 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}V' &\leq -\frac{q'}{q^2}G+\frac{e}{aq}\left(\frac{y}{g(y)}\right)\\ &\leq \left|-\frac{q'}{q^2}G+\frac{e}{aq}\left(\frac{y}{g(y)}\right)\right|\\ &\leq \frac{|-q'|}{q^2}G(y)+\frac{|e|}{aq}\frac{|y|}{g(y)}\end{aligned}$$

elde edilir. $|e|\leq r$ olduğundan

$$V' \leq \frac{|-q'|}{q^2}G(y)+\frac{r}{aq}\frac{|y|}{g(y)}$$

olur. Ayrıca $q'(t)^- := \max\{-q'(t),0\}$, $[-q'(t)]^+ = \max\{[-q'(t)],0\}$ ve $\frac{|y|}{g(y)}<m+nG(y)$ olduğundan

$$V'(t)\leq \frac{[q'(t)]^-}{q^2(t)}G(y(t))+m\frac{r(t)}{a(t)q(t)}+n\frac{r(t)}{a(t)q(t)}G(y) \qquad (2.7)$$

elde edilir.

$$V(x,y,t)=\frac{1}{q(t)}G(y)+\frac{1}{a(t)}[F(x)+K]$$

olduğundan $\frac{1}{q(t)}G(y)$'nin $V(x,y,t)$ den küçük olduğunu görüyoruz.

Yani $\frac{1}{q(t)}G(y)\le V$ dir. Eş. 2.7 yi t_0 dan t ye integrallersek $\frac{r(t)}{a(t)q(t)}$ nin $[t_0,T]$ aralığında sınırlı olduğunu dikkate alarak $t\in[t_0,T]$ için

$$\int_{t_0}^{t}V'(s)ds=V(t)-V(t_0)\le\int_{t_0}^{t}\left(\frac{[q'(s)]^-}{q^2(s)}G(y(s))+\underbrace{\frac{mr(s)}{a(s)q(s)}}_{\ge 0}+\frac{nr(s)}{a(s)q(s)}G(y(s))\right)ds$$

$$\underbrace{V(t)-V(t_0)}_{K_1}\le\int_{t_0}^{t}\left(\frac{[q'(s)]^-}{q^2(s)}+n\frac{r(s)}{a(s)q(s)}\right)G(y(s))ds$$

$$\frac{1}{q(t)}G(y(t))\le V(t)\le K_1+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{[q'(s)]^-}{q^2(s)}+n\frac{r(s)}{a(s)q(s)}\right)G(y(s))ds$$

$$\frac{1}{q(t)}G(y(t))\le K_1+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{[q'(s)]^-}{q(s)}+n\frac{r(s)}{a(s)}\right)\left(\frac{G(y(s))}{q(s)}\right)ds$$

buluruz. Gronwall eşitsizliğini kullanarak

$$\frac{1}{q(t)}G(y(t))\le K_1\exp\left(\int_{t_0}^{t}\left[\frac{[q'(s)]^-}{q(s)}+n\frac{r(s)}{a(s)}\right]ds\right)$$

$$\le K_1\exp\left(\int_{t_0}^{T}\left[\frac{[\alpha(s)]^-}{q(s)}+n\frac{r(s)}{a(s)}\right]ds\right)\le K_2\le\infty$$

elde ederiz. Bu da gösterir ki $[t_0,T)$ üzerinde $G(y(t))$ sınırlıdır. Dolayısıyla $y(t)=x'(t)$ olduğundan $x'(t)$ de aynı aralıkta sınırlıdır. O halde $x'(t)$ nin integrali de $[t_0,T)$ üzerinde sınırlıdır. Bu da Eş. 2.3 ün çözümü olan $(x(t),y(t))$ ikilisini sıçrama noktasında çözüm olması kabulümüzle çelişir.

2.1. Uyarı:

1. Teorem 2.1 de $e(t,x,y)=0$ olursa Eş. 2.4 kaldırılabilir.
2. $g(y)$ üzerine daha güçlü bir

$$|y| \geq k \text{ için } \frac{y^2}{g(y)} \leq MG(y) \tag{2.8}$$

olacak şekilde M ve k pozitif sabitleri vardır şartını ekleyerek, $a'(t)$ üzerine olan şartı da kaldırabiliriz.

Bu sonucun ispatı Teorem 2.1 in ispatından daha fazla detay içerdiğinden sonucun ispatına burada değinmeyeceğiz.

Bundan sonra çözümden kastımız $[t_0,\infty)$ üzerinde sürekli çözümler olacaktır.

Aşağıdaki sonuçlarda, Eş. 2.2 nin tüm çözümlerinin sınırlı olduğunu göstermek için yeterli şartlar vereceğiz. Bu sonuçlar aynı zamanda Eş. 2.2 deki $a(t)$ ve $g(x')$ fonksiyonları arasındaki ilişkiyi de göstermektedir.

2.2. Teorem:

Varsayalım ki Eş. 2.5 ve $n>0$ için Eş. 2.6 sağlansın. $t \geq t_0$ ve a_2 bir sabit olmak üzere;

$$a'(t) \geq 0 \ , \ \ a(t) \leq a_2 \tag{2.9}$$

ve

$$\left|e(t,x,y)\right| \leq \frac{1}{n} a(t) \frac{q'(t)}{q(t)}$$

olsun. Bu durumda eğer $|x| \to \infty$ iken $F(x) \to \infty$ ise, Eş. 2.2 nin tüm çözümleri sınırlıdır.

İspat:

$|x| \to \infty$ iken $F(x) \to \infty$ olduğundan $F(x)$ alttan sınırlıdır. Dolayısıyla bir $K > 0$ için $F(x) \geq -K$ olarak yazılabilir. Fakat $|x| \to \infty$ iken $F(x) \to \infty$ olduğundan $F(x)$ in bir üst sınırından bahsedemeyiz.

$$V(t,x,y) = \frac{q(t)}{a(t)}\left[F(x) + K\right] + G(y)$$

tanımlayalım. Buradan

$$\begin{aligned}
V'(t,x,y) &= q'(t)\frac{\left[F(x)+K\right]}{a(t)} + q(t)\left(\frac{\left[F(x)+K\right]}{a(t)}\right)' + G'\left(y(t)\right)y'(t) \\
&= \frac{q'(t)}{a(t)}\left[F(x)+K\right] + q(t)\left[\frac{x'(t)\, f\left(x(t)\right)a(t) - a'(t)\left[F(x)+K\right]}{a^2(t)}\right] \\
&\quad + \frac{y(t)}{g\left(y(t)\right)}y'(t) \\
&= \frac{q'}{a}\left[F+K\right] + q\left[\frac{yfa - a'\left[F+K\right]}{a^2}\right] + \frac{y}{g(y)a}\left(ay'\right) \\
&= \frac{q'}{a}\left[F+K\right] + q\left[\frac{yfa - a'\left[F+K\right]}{a^2}\right] + \frac{y}{g(y)a}\left(-ay' - h - qfg + e\right) \\
&= \frac{q'}{a}\left[F+K\right] + \frac{yqf}{a} - \frac{a'q\left[F+K\right]}{a^2} - \frac{a'}{a}\cdot\frac{y^2}{g} - \frac{hy}{ag} - \frac{yqf}{a} + \frac{ey}{ag}
\end{aligned}$$

$$V' = \frac{q'}{a}\left[F+K\right]+\frac{e}{a}\cdot\frac{y}{g\left(y\right)}-\left(\frac{a'q\left[F+K\right]}{a^{2}}+\frac{a'}{a}\cdot\frac{y^{2}}{g\left(y\right)}+\frac{hy}{ag\left(y\right)}\right)$$

elde edilir. $\frac{\left(a'q\left[F+K\right]\right)}{a^{2}}+\frac{a'y^{2}}{ag\left(y\right)}+\frac{hy}{ag\left(y\right)}\geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} V'\left(t\right) &\leq \frac{q'\left(t\right)}{a\left(t\right)}\left[F\left(x\left(t\right)\right)+K\right]+\frac{e\left(t,x,y\right)}{a\left(t\right)}\cdot\frac{y\left(t\right)}{g\left(y\left(t\right)\right)} \\ &\leq \frac{q'\left(t\right)}{a\left(t\right)}\left[F\left(x\right)+K\right]+\frac{e\left(t,x,y\right)}{a\left(t\right)}\cdot\frac{y}{g\left(y\right)} \end{aligned}$$

elde edilir. $\left|e\right|\leq\frac{1}{n}a\left(\frac{q'}{q}\right)$ olduğundan

$$\begin{aligned} V'\left(t\right) &\leq \frac{q'\left(t\right)}{a\left(t\right)}\left[F\left(x\right)+K\right]+\frac{\left|e\left(t,x,y\right)\right|}{a\left(t\right)}\cdot\frac{y}{g\left(y\right)} \\ &\leq \frac{q'\left(t\right)q\left(t\right)}{a\left(t\right)q\left(t\right)}\left[F\left(x\right)+K\right]+\frac{1}{n}\cdot\frac{q'}{q}\cdot\left(\frac{y}{g\left(y\right)}\right) \\ &\leq \frac{q'\left(t\right)q\left(t\right)}{a\left(t\right)q\left(t\right)}\left[F\left(x\right)+K\right]+\frac{1}{n}\cdot\frac{q'\left(t\right)}{q\left(t\right)}\cdot\frac{\left|y\right|}{g\left(y\right)} \\ &\leq \frac{q'\left(t\right)}{q\left(t\right)}\left\{\frac{q\left(t\right)}{a\left(t\right)}\left[F\left(x\right)+K\right]+\frac{1}{n}\cdot\frac{\left|y\right|}{g\left(y\right)}\right\} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği t_0 dan t ye integrallersek

$$V\left(t\right)\leq V\left(t_0\right)+\int_{t_0}^{t}\frac{q'\left(s\right)}{q\left(s\right)}\left\{\frac{q\left(s\right)}{a\left(s\right)}\left[F\left(x\left(s\right)\right)+K\right]+\frac{1}{n}\cdot\frac{\left|y\left(s\right)\right|}{g\left(y\left(s\right)\right)}\right\}ds$$

elde ederiz. Buradan

$$m+nV(t)\le m+nV(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{q'(s)}{q(s)}\left\{n\cdot\frac{q(s)}{a(s)}\left[F(x(s))+K\right]+\frac{|y(s)|}{g(y(s))}\right\}ds$$

olur. Diğer taraftan

$$V=\frac{q}{a}\left[F+K\right]+G$$

olduğundan

$$m+nV=n\frac{q}{a}\left[F+K\right]+m+nG$$

dir. Ayrıca Eş. 2.6 da

$$\frac{|y|}{g(y)}\le m+nG$$

olduğundan

$$\frac{nq}{a}\left[F+K\right]+\frac{|y|}{g(y)}\le\frac{nq}{a}\left[F+K\right]+m+nG$$

olup

$$\frac{nq(t)}{a(t)}\left[F(x(t))+K\right]+\frac{|y(t)|}{g(y(t))}\le m+nV(t)$$
$$\le m+nV(t_0)+\int_{t_0}^{t}\frac{q'(s)}{q(s)}\left\{\frac{|y(s)|}{g(y(s))}+\frac{nq(s)}{a(s)}\left[F(x(s))+K\right]\right\}ds$$

yani

$$\frac{nq(t)}{a(t)}\left[F\left(x(t)\right)+K\right]+\frac{\left|y(t)\right|}{g\left(y(t)\right)}$$
$$\leq m+nV\left(t_0\right)+\int_{t_0}^{t}\frac{q'(s)}{q(s)}\left\{\frac{\left|y(s)\right|}{g\left(y(s)\right)}+\frac{nq(s)}{a(s)}\left[F\left(x(s)\right)+K\right]\right\}ds$$

olup Gronwall eşitsizliğinden

$$\frac{\left|y(t)\right|}{g\left(y(t)\right)}+\frac{nq(t)}{a(t)}\left[F\left(x(t)\right)+K\right]\leq\left(m+nV\left(t_0\right)\right)\exp\left(\int_{t_0}^{t}\frac{q'(s)}{q(s)}ds\right)=K_1e^{\ln q(t)-\ln q(t_0)}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{\left|y(t)\right|}{g\left(y(t)\right)}+\frac{nq(t)}{a(t)}\left[F\left(x(t)\right)+K\right]\leq K_1\frac{q_1(t)}{q(t_0)}$$

olur. Böylece

$$\frac{nq(t)F\left(x(t)\right)}{a(t)}\leq K_1\frac{q_1(t)}{q(t_0)}$$

olur ki bu da $t\geq t_0$ için $F\left(x(t)\right)$ nin sınırlı olduğunu verir. Hipotezden $|x|\to\infty$ iken $\left|F(x)\right|\to\infty$ olduğundan $x(t)$ sınırlı olmalıdır.

2.3. Teorem:

Eş. 2.5, Eş. 2.7 ve Eş. 2.9 un sağlandığını varsayalım, a_2 bir sabit olmak üzere $a(t)\leq a_2$ ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\left[a'(s)\right]^-}{a(s)} ds < \infty \tag{2.10}$$

sağlansın, ayrıca $\left|e(t,x,y)\right| \le \dfrac{a(t)q'(t)}{Mq(t)}$ olsun. O zaman Eş. 2.2 nin tüm çözümleri sınırlıdır.

İspat:

Eş. 2.7, tüm *y* ler için $\dfrac{y^2}{g(y)} \le A + MG(y)$ sağlayan bir $A > 0$ sabitinin var olduğunu gösterir. Ayrıca $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ve $g(t) > 0$ olduğundan $t \in [t_0, T)$ için $\dfrac{1}{g(t)} > 0$ ve sınırlıdır. Eğer $|y| \le 1$ ise uygun $B > 0$ sabitleri için $\dfrac{|y|}{g(y)} \le \dfrac{1}{g(y)} \le B$ sağlanır. $|y| \ge 1$ ise $|y| \le y^2$ olup $\dfrac{|y|}{g(y)} \le \dfrac{y^2}{g(y)}$ dir. O halde tüm *y* ler için

$$\frac{|y|}{g(y)} \le B + \frac{y^2}{g(y)}$$

yazılabilir. $|x| \to \infty$ iken $F(x) \to \infty$ olduğundan $F(x) \ge -K$ olacak şekilde $K > 0$ sabiti vardır. $M \ge 1$ ise

$$V(t,x,y) = \frac{q(t)}{a(t)}\left[F(x) + K\right] + G(y) + A + B$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$V'(t)=q'(t)\frac{\left[F(x)+K\right]}{a(t)}+q(t)\left[\frac{F(x)+K}{a(t)}\right]'+G'(y)y'$$

$$=\frac{q'(t)}{q(t)}\cdot\left(\frac{q(t)}{a(t)}\left[F(x)+K\right]\right)+q(t)\left[\frac{F'(x)x'a(t)-a'(t)\left[F(x)+K\right]}{a^2(t)}\right]+G'y'$$

$$=\frac{q'(t)}{q(t)}\cdot\left(\frac{q(t)}{a(t)}\left[F(x)+K\right]\right)+q(t)\left[\frac{f(x)a(t)y-a'(t)\left[F(x)+K\right]}{a^2(t)}\right]+\frac{yy'}{g(y)}$$

$$=\frac{q'(t)}{q(t)}\cdot\left(\frac{q(t)}{a(t)}\left[F(x)+K\right]\right)+\frac{q(t)f(x)y}{a(t)}-\frac{a'(t)q(t)\left[F(x)+K\right]}{a^2(t)}$$

$$+\frac{y}{g(y)}\left\{\frac{1}{a(t)}\left[-a'y-h-qfg+e\right]\right\}$$

$$=\frac{q'}{q}\left(\frac{q}{a}\left[F(x)+K\right]\right)+\frac{qfy}{a}-\frac{a'q\left[F(x)+K\right]}{a^2}-\frac{a'y^2}{ag(y)}-\frac{hy}{ag(y)}$$

$$-\frac{qfy}{a}+\frac{ey}{ag(y)}$$

$$=\frac{q'}{q}\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]\right)+\frac{-a'}{a}\cdot\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]\right)+\frac{-a'y^2}{ag(y)}+\frac{ey-hy}{ag(y)}$$

elde edilir. Diğer taraftan $\left[-a'\right]^{-}=\max\{-a',0\}$ olduğundan

$$V'=\frac{q'}{q}\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]\right)+\frac{\left[a'\right]^{-}}{a}\cdot\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]+\frac{y^2}{g(y)}\right)+\frac{ey-hy}{ag(y)}$$

$$\leq\frac{q'}{q}\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]\right)+\frac{\left[a'\right]^{-}}{a}\cdot\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]+\frac{y^2}{g(y)}\right)+\frac{ey}{ag(y)}$$

$$\leq\frac{q'}{q}\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]\right)+\frac{\left[a'\right]^{-}}{a}\cdot\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]+\frac{y^2}{g(y)}\right)+\frac{|e||y|}{ag(y)}$$

elde edilir. $|e|\leq\dfrac{(a\cdot q')}{M\cdot q}$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
V' &\le \frac{q'}{q}\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]\right)+\frac{\left[a'\right]^{-}}{a}\cdot\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]+\frac{y^2}{g(y)}\right)+\frac{\frac{(aq')}{Mq}|y|}{ag(y)}\\
&\le \frac{q'}{q}\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]\right)+\frac{\left[a'\right]^{-}}{a}\cdot\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]+\frac{y^2}{g(y)}\right)+\frac{q'|y|}{Mqg(y)}\\
&\le \frac{q'}{q}\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]+\frac{|y|}{Mg(y)}\right)+\frac{\left[a'\right]^{-}}{a}\cdot\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]+\frac{y^2}{g(y)}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada

$$
\frac{|y|}{g(y)}\le B+\frac{y^2}{g(y)}\le B+A+MG(y)
$$

dir. Dolayısıyla

$$
\frac{1}{M}\cdot\frac{|y|}{g(y)}\le\frac{1}{M}\left(B+A+MG(y)\right)=\frac{1}{M}(A+B)+G(y)
$$

elde edilir. Eğer $\dfrac{y^2}{g(y)}\le A+MG(y)$ olduğunu kullanırsak,

$$
\begin{aligned}
V' &\le \frac{q'}{q}\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]+\frac{|y|}{Mg(y)}\right)+\frac{\left[a'\right]^{-}}{a}\cdot\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]+\frac{y^2}{g(y)}\right)\\
&\le \frac{q'}{q}\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]+\frac{1}{M}(A+B)+G(y)\right)+\frac{\left[a'\right]^{-}}{a}\cdot\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]+A+MG(y)\right)\\
&\le \frac{q'}{q}\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]+\frac{1}{M}(A+B)+G(y)\right)+\frac{\left[a'\right]^{-}}{a}\cdot\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]+A+B+MG(y)\right)\\
&= \frac{q'}{q}\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]+\frac{1}{M}(A+B)+G(y)\right)+\frac{M}{M}\cdot\frac{\left[a'\right]^{-}}{a}\cdot\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]+A+B+MG(y)\right)\\
&= \frac{q'}{q}\left(\frac{q}{a}\left[F+K\right]+\frac{1}{M}(A+B)+G(y)\right)+M\,\frac{\left[a'\right]^{-}}{a}\cdot\left(\frac{q}{a}\frac{\left[F+K\right]}{M}+\frac{1}{M}(A+B)+G(y)\right)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. $M \geq 1$ olduğunda $\frac{1}{M} \leq 1$ dir. O halde eşitsizlikteki $\frac{1}{M}$ yerine 1 yazarsak

$$V' \leq \frac{q'}{q}\left(\frac{q}{a}[F+K]+(A+B)+G(y)\right)+M\frac{[a']^{-}}{a}\cdot\left(\frac{q}{a}[F+K]+(A+B)+G(y)\right)$$

şeklinde eşitsizliği büyütebiliriz. Daha sonra

$$\begin{aligned} V' &\leq \frac{q'}{q}\left(\frac{q}{a}[F+K]+A+B+G(y)\right)+M\frac{[a']^{-}}{a}\cdot\left(\frac{q}{a}[F+K]+A+B+G(y)\right) \\ &=\left(\frac{q}{a}[F+K]+A+B+G(y)\right)\left(\frac{q'}{q}+M\frac{[a']^{-}}{a}\right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği t_0 dan t ye integrallersek

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V(t_0)+\int_{t_0}^{t}\underbrace{\left(\frac{q}{a}[F+K]+A+B+G(y)\right)}_{V(s)}\left(\frac{q'}{q}+M\frac{[a']^{-}}{a}\right)ds \\ &\leq V(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{q'(s)}{q(s)}+M\frac{\left[a'(s)\right]^{-}}{a(s)}\right)V(s)\,ds \end{aligned}$$

buluruz, Gronwall eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}\left(\frac{q'(s)}{q(s)}+M\frac{\left[a'(s)\right]^{-}}{a(s)}\right)ds} \\ &=V(t_0)e^{\ln\frac{q(t)}{q(t_0)}}e^{M\int_{t_0}^{t}\frac{\left[a'(s)\right]^{-}}{a(s)}ds} \\ &\leq V(t_0)\frac{q(t)}{q(t_0)}\cdot\frac{Ma(t)}{a(t_0)} \qquad ;a(t)\leq a_2 \\ &\leq \frac{V(t_0)}{a(t_0)}\cdot\frac{a_2 q(t)}{q(t_0)} \leq K_1\frac{q(t)}{q(t_0)} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece $\left[t_0, T\right)$ deki tüm t ler için

$$V(t) \leq K_1 \frac{q(t)}{q(t_0)}$$

olduğundan $V(t)$ sınırlıdır. O halde $|x| \to \infty$ için

$$V(t) = \frac{q(t)}{a(t)} \cdot \left[F(x) + K\right] + G(y) + A + B$$

sınırlı olmalıdır. Dolayısıyla $x(t)$ nin sınırlılığı Teorem 2.2 de olduğu gibi elde edilir. Eğer $M < 1$ ise ve

$$V(t, x, y) = \frac{q(t)}{a(t)} \cdot \left[F(x) + K\right] + G(y) + \frac{1}{M}(A + B)$$

şeklinde tanımlanırsa, benzer yolla

$$V'(t) \leq \left(\frac{q'(t)}{q(t)} + \frac{[a']^-}{a(t)} \right) V(t)$$

elde edilir ve yukarıdakine benzer sonuçlar bu durum için de geçerli olur.

2.1. Sonuç:

Teorem 2.2 ya da Teorem 2.3 ün hipotezlerine, q_2 sabit olmak üzere $q(t) \leq q_2$ ve $|y| \to \infty$ iken $G(y) \to \infty$ koşulları eklenirse Eş. 2.3 ün tüm çözümleri sınırlı olur.

İspat:

Teorem 2.2 nin ispatında

$$V(t,x,y)=\frac{q(t)}{a(t)}\cdot\left[F(x)+K\right]+G(y)$$

şeklinde tanımlayıp

$$V'(t)\leq\frac{q'(t)}{q(t)}\cdot\left\{\frac{q(t)}{a(t)}\left[F(x)+K\right]+\frac{1}{n}\cdot\frac{|y|}{g(y)}\right\}$$

olduğunu bulmuştuk. m , $n\geq 0$ olmak üzere

$$\frac{|y|}{g(y)}\leq m+nG(y)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}V'(t)&\leq\frac{q'(t)}{q(t)}\cdot\left\{\frac{q(t)}{a(t)}\left[F(x)+K\right]+\frac{1}{n}\cdot\left(m+nG(y)\right)\right\}\\&\leq\frac{q'(t)}{q(t)}\cdot\left\{\frac{m}{n}+V(t)\right\}\end{aligned}$$

buluruz. . Bu eşitsizliği t_0 dan t ye integrallersek

$$V(t)\leq V(t_0)+\frac{m}{n}\ln\frac{q(t)}{q(t_0)}+\int_{t_0}^{t}\frac{q'(s)}{q(s)}V(s)\,ds$$

bulunur. Böylece Gronwall eşitsizliğinden, K_2 bir sabit olmak üzere

$$V(t) \leq K_2 \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{q'(s)}{q(s)} ds \right) \leq K_2 \frac{q(t)}{q(t_0)} < \infty$$

elde edilir ki bu da $V(t)$ nin sınırlılığını verir. $y(t)$ nin sınırlılığı da $G(y)$ nin sınırlılığından kaynaklanır.

3. AYIRMA VE KARŞILAŞTIRMA KRİTERLERİ YARDIMIYLA SALINIMLILIK

3.1. Sturm Karşılaştırma Teoremi

3.1. Teorem (Sturm Karşılaştırma Teoremi):

$[t_1,t_2]\subseteq\mathbb{R}$ aralığında $x(t),\ x''(t)+q(t)x(t)=0$ denkleminin $y(t),\ y''(t)+q_1(t)y(t)=0$ denkleminin aşikar olmayan çözümü olsun. $x(t_1)=x(t_2)=0$ ve $t\in(t_1,t_2)$ için $x(t)\neq 0$ olsun. $q(t),q_1(t)\in C([t_1,t_2],\mathbb{R})$ olmak üzere $\forall t\in[t_1,t_2]$ için $q_1(t)\geq q(t),\ (q_1(t)\not\equiv q(t))$ sağlanıyorsa $y(t),\ (t_1,t_2)$ aralığında işaret değiştirmelidir.

İspatı standart methodla "Wronskian argümentine" bağlı olarak yazabiliriz.

$$
\begin{aligned}
W[y(t),x(t)] :&= \begin{vmatrix} y(t) & x(t) \\ y'(t) & x'(t) \end{vmatrix} \\
&= y(t)x'(t)-x(t)y'(t)
\end{aligned}
$$

eşitliği $x(t)$ ve $y(t)$'nin wronskiani olmak üzere $t\in(t_1,t_2)$ için $x(t)>0$ ve $y(t)>0$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\big(y(t)x'(t)-x(t)y'(t)\big) &= y(t)x''(t)-x(t)y''(t) \\
&= y(t)\big(-q(t)x(t)\big)-x(t)\big(-q_1(t)y(t)\big) \\
&= \big(q_1(t)-q(t)\big)x(t)y(t)
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Bu eşitliği t_1 den t_2 ye intagrallersek

$$y(t)x'(t)-x(t)y'(t)\Big|_{t_1}^{t_2}=\int_{t_1}^{t_2}\left[q_1(s)-q(s)\right]x(s)y(s)ds$$

elde ederiz. Kabulümüz gereği (t_1,t_2) de $x(t)>0$ ve $y(t)>0$ olduğundan $x'(t_2)<0$ ve $x'(t_1)>0$ olduğunu elde ederiz ki bu bizi bir çelişkiye ulaştırır. Bu da $y(t)>0$ olamayacağını verir. Bu sonuç $a(t),a_1(t)\in C^1([t_1,t_2],\mathbb{R}^+)$ ve $q(t),q_1(t)\in C([t_1,t_2],\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\left(a(t)x'(t)\right)'+q(t)x(t)=0$$

ile

$$\left(a_1(t)y'(t)\right)'+q_1(t)y(t)=0$$

denklemlerinin çözümlerine kolayca genişletilebilir. Bunu ispatlamak için

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)a(t)x'(t)-x(t)a(t)y'(t)\right)=\left(q_1(t)-q(t)\right)x(t)y(t)$$

Sturmian özdeşliği yeterli olacaktır.

Ancak, $a(t),a_1(t)\in C^1([t_1,t_2],\mathbb{R}^+)$ ve $q(t),q_1(t)\in C([t_1,t_2],\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\left(a(t)x'(t)\right)'+q(t)x(t)=0 \tag{3.1}$$

ile

$$\left(a_1(t)\,y'(t)\right)' + q_1(t)\,y(t) = 0 \tag{3.2}$$

denklemlerinin çözümlerini $[t_1,t_2]$ de

$$q_1(t) \ge q(t),\ \left(q_1(t) \ne q(t)\right) \quad \text{ve} \quad a(t) \ge a_1(t) \tag{3.3}$$

hipotezleri altında karşılaştırmak istersek, Sturmian özdeşliği

$$\frac{d}{dt}\left(ya(t)x' - xa_1(t)y'\right) = \left(q_1(t) - q(t)\right)xy + \left(a(t) - a_1(t)\right)x'y'$$

formunu alır. $x'(t)$ ve $y'(t)$'nin işaretleri bilinmediğinden kullanışlı değildir. Ancak $y(t) \ne 0$ ise o zaman bu özdeşlik Picone tarafından modife edilir [4]. Daha genel bir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{x(t)}{y(t)}\left(y(t)a(t)x'(t) - x(t)a_1(t)y'(t)\right)\right) &= \left(q_1(t) - q(t)\right)x^2(t) \\ &+ \left(a(t) - a_1(t)\right)\left(x'(t)\right)^2 + a_1(t)\left(x'(t) - \frac{x(t)}{y(t)}y'(t)\right)^2\end{aligned} \tag{3.4}$$

özdeşlik halini alır. Burada $x(t_1) = x(t_2) = 0$, $[t_1,t_2]$ de $y(t) > 0$ ve $[t_1,t_2]$ de Eş. 3.3 sağlanırsa, istenen çelişkiyi elde etmek için Eş. 3.4 ü t_1 den t_2 ye intagrallemek yeterli olacaktır.

Dolayısıyla Eş. 3.4 Picone özdeşliği, elementer olarak sağlanır bununla beraber Sturm'un orjinal teoreminin ispatı zor da olsa gerçekleşir. Bu sonuç aşağıda ispatsız olarak ifade edeceğimiz Sturm-Picane teoremi olarak bilinir.

3.2. Teorem:

Eğer Eş. 3.1 in $x(t_1)=x(t_2)=0$ özelliğine sahip, (t_1,t_2) aralığında

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big[\big[a(s)-a_1(s)\big]\big(x'(s)\big)^2+\big(q_1(s)-q(s)\big)x^2(s)\Big]ds\geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan aşikar olmayan reel değerli bir $x(t)$ çözümü varsa, o zaman Eş. 3.2 nin her $y(t)$ çözümü ya

(i) $y(t)$, (t_1,t_2) aralığında en az bir sıfıra sahiptir;

ya da

(ii) $y(t)$, $[t_1,t_2]$ aralığında $x(t)$ nin bir sabit çarpanıdır.

özelliklerinden birine sahiptir [5-6].

3.2. Karşılaştırma Teoremleri ve Salınımsızlık Teoremleri

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde salınımlılık teoremlerini ispatlamada sık sık kullanacağımız bazı salınımsızlık teoremlerini ispatsız olarak vereceğiz.

3.1. Lemma:

Eş. 3.1 in salınımsız olması için gerek ve yeter koşul eninde sonunda

$$u'(t)+\frac{u^2(t)}{a(t)}+q(t)\leq 0$$

eşitliğini sağlayan bir $u(t) \in C^1([t_0,\infty),\mathbb{R})$ fonksiyonunun var olmasıdır [5]. $a(t) \in C^1([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$, $p(t) \in C^1([t_0,\infty),\mathbb{R})$, $q(t) \in C([t_0,\infty),\mathbb{R})$ ve $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\left(a(t)x'(t)\right)' + p(t)x'(t) + q(t)f\left(x(t)\right) = 0 \tag{3.5}$$

daha genel denklemini ele alalım. Burada

(i) $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$

ve

(ii) k bir reel sabit olmak üzere $x \neq 0$ için $f'(x) \geq k > 0$

olduğunu kabul edeceğiz.

3.3. Teorem:

$\rho(t) \in C^2([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$ olan bir fonksiyon olsun. Eş. 3.5 salınımsız ise

$$\left(a(t)\rho(t)y'(t)\right)' + kQ^*(t)y(t) = 0 \tag{3.6}$$

denklemi de salınımsızdır. Burada

$$Q^*(t) = \rho(t)\left[q(t) + ka(t)h^{*2}(t) - \left(a(t)h^*(t)\right)' - \left(p(t)h^*(t)\right)\right] \tag{3.7}$$

ve

$$h^*(t)=\frac{p(t)\rho(t)-a(t)\rho'(t)}{2ka(t)\rho(t)} \tag{3.8}$$

dır [7].

3.1. Sonuç:

$Q^*(t)$, $h^*(t)$ sırasıyla Eş. 3.7, Eş. 3.8 de tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere Eş.3.6 salınımlı olacak şekilde bir $\rho(t)\in C^2([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$ fonksiyonuna sahipse, o zaman Eş. 3.5 de salınımlıdır.

3.1. Uyarı:

Eş. 3.8 den $\rho(t)$ fonksiyonunun

$$\rho(t)=\exp\left(-2k\int^t\left[h^*(s)-\frac{p(s)}{2ka(s)}\right]ds\right) \tag{3.9}$$

olarak tanımlanabileceği açıktır.

$f(x)=x$ ile $p(t)=0$ olan özel durumu için yani Eş. 3.5 in Eş. 3.1 e indirgenmesi durumu için aşağıdaki ilginç sonucu verelim.

3.2. Lemma:

$\rho(t)\in C^2([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$ verilen bir bir fonksiyon olsun. O zaman Eş. 3.1 in salınımlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\left(a(t)\rho(t)w'(t)\right)'+Q(t)w(t)=0 \tag{3.10}$$

denkleminin de salınımlı olmasıdır. Burada

$$Q(t)=\rho(t)\left[q(t)+a(t)h^2(t)-\left(a(t)h(t)\right)'\right] \tag{3.11}$$

ve

$$h(t)=-\frac{\rho'(t)}{2\rho(t)} \tag{3.12}$$

dir.

Teorem 3.2 ile Lemma 3.2 yi birleştirirsek aşağıdaki sonucu elde ederiz.

3.4. Teorem:

$a(t),a_1(t)\in C^1\left([t_1,t_2],\mathbb{R}^+\right)$ ve $q(t),q_1(t)\in C\left([t_1,t_2],\mathbb{R}\right)$ olsun.

$$\left(a(t)x'(t)\right)'+q(t)x(t)=0,\ \ x(t_1)=x(t_2)=0$$

Sınır Değer Problemi (t_1,t_2) üzerinde $x(t)\neq 0$ olan bir $x(t)$ çözümüne sahip olsun

$$Q_1(t)=\rho_1(t)\left[q_1(t)+a_1(t)h_1^2(t)-\left(a_1(t)h_1(t)\right)'\right] \tag{3.13}$$

ve

$$h_1(t)=-\frac{\rho_1'(t)}{2\rho_1(t)} \tag{3.14}$$

olmak üzere

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[a(s)\rho(s)-a_1(s)\rho_1(s)\right]\left(x'(s)\right)^2+\left(Q_1(s)-Q(s)\right)x^2(s)\right\}ds\geq 0$$

olacak şekilde $\rho(t),\rho_1(t)\in C^2\left(\left[t_1,t_2\right],\mathbb{R}^+\right)$ iki fonksiyon var olsun. O zaman $x(t)$ ve $y(t)$ orantılı olmadıkça Eş. 3.2 nin her $y(t)$ çözümü (t_1,t_2) aralığında sıfıra sahip olmalıdır.

3.2. Sonuç:

$a(t),a_1(t)\in C^1\left(\left[t_0,\infty\right),\mathbb{R}^+\right)$ ve $q(t),q_1(t)\in C\left(\left[t_0,\infty\right),\mathbb{R}\right)$ olsun Q,Q_1 sırasıyla Eş. 3.11 ve Eş. 3.13 de tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere $\left[t_0,\infty\right)$ üzerinde $a_1(t)g_1(t)\leq a(t)\rho(t)$ ile $Q_1(t)\geq Q(t)$ sağlayan iki $\rho(t),\rho_1(t)\in C^2\left(\left[t_0,\infty\right),\mathbb{R}^+\right)$ fonksiyonu var olsun. Bu durumda Eş. 3.1 salınımlı ise Eş. 3.2 de salınımlıdır.

3.1. Örnek:

$\left[1,\infty\right)$ aralığında *c* ile c_1 reel sabitler olmak üzere

$$x''(t)+\frac{c}{t_2}x(t)=0 \tag{3.15}$$

Euler diferensiyel denklemi ile

$$\left(t^2y'(t)\right)'+c_1y(t)=0 \tag{3.16}$$

diferensiyel denklemini ele alalım Eş. 3.15 deki Euler denklemi

$$t^2x'' + cx = 0$$

olarak yazılabilir. $D = \dfrac{d}{dt}$ olmak üzere bu denklemi operatör formunda

$$\left(t^2D^2 + c\right)x = 0$$

olarak yazabiliriz. $t = e^u$ ve $tD = D_1$ denirse bu denklem

$$\left(D_1\left(D_1 - 1\right) + c\right)x = 0$$

veya

$$\left(D_1^2 - D_1 + c\right)x = 0$$

halini alır. Bu denkleme karşılık gelen karakteristik denklem

$$r^2 - r + c = 0$$

dır.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4c$$

olduğundan $\Delta < 0$ ise salınımlı $\Delta \geq 0$ ise salınımsız olur. Bu yüzden $c > \dfrac{1}{4}$ ise salınımlı $c \leq \dfrac{1}{4}$ ise salınımsızdır.

Eş. 3.15 de $g\left(t\right) = 1$, Eş. 3.16 da $\rho_1\left(t\right) = \dfrac{1}{t^2}$ olsun. O zaman Sonuç 3.2 den Eş. 3.16,

$c_1 \geq c > \frac{1}{4}$ ise salınımlı ve $c_1 \leq c \leq \frac{1}{4}$ ise salınımsız olduğunu söyleyebiliriz.

$\rho(t), \rho_1(t) \in C\left([t_0,\infty), \mathbb{R}^+\right)$, Q, h, Q_1 ve h_1 fonksiyonları sırasıyla Eş. 3.11, Eş. 3.12, Eş. 3.13 ve Eş. 3.14 de tanımlanan fonksiyonlar,

$$\int^{\infty} \frac{1}{a(s)\rho(s)} ds = \infty = \int^{\infty} \frac{1}{a_1(s)\rho_1(s)} ds \tag{3.17}$$

ve $t \geq t_0$ sabiti için

$$\beta(t) = \int_t^{\infty} Q(s)ds < \infty, \;\; \beta_1(t) = \int_t^{\infty} Q_1(s)ds < \infty \tag{3.18}$$

olsun.

3.5. Teorem:

Aşağıdaki dört durum birbirine denktir.
(i) Eş. 3.1 salınımsızdır.
(ii) Bir $T \geq t_0$ sayısı ve bir $v(t) \in C\left([T,\infty), \mathbb{R}\right)$ fonksiyonu vardır ki

$$v(t) = \beta(t) + \int_t^{\infty} \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)} ds, \qquad t \geq T \tag{3.19}$$

olarak yazılabilir. Eğer $w(t)$, Eş. 3.10 un salınımsız bir çözümü ise $v(t)$, $t \geq T$ için $v(t) = \frac{a(t)\rho(t)w'(t)}{w(t)}$ olarak alınabilir.

(iii) Bir $T \geq t_0$ sayısı ile $v(t) \in C\left([T,\infty), \mathbb{R}\right)$ fonksiyonu vardır ki

$$|v(t)| \geq \left| \beta(t) + \int_t^\infty \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)} ds \right|, \qquad t \geq T \tag{3.20}$$

dır.

(iv) $t \geq T$ için

$$y'(t) + Q(t) + \frac{y^2(t)}{a(t)\rho(t)} \leq 0 \tag{3.21}$$

olacak şekilde $T \geq t_0$ için bir $y(t) \in C^1([T,\infty),\mathbb{R})$ fonksiyonu vardır [7].

3.6. Teorem:

Aşağıdaki üç durum birbirine denktir.

(i) Eş. 3.1 salınımsızdır.

(ii) $T \geq t_0$ sayısı ile bir $z(t) \in C([T,\infty),\mathbb{R})$ fonksiyonu vardır ki

$$y(t) \geq \xi(t) + \int_t^\infty \frac{\mu[s,t]}{a(s)\rho(s)} y^2(s) ds, \qquad t \geq T \tag{3.22}$$

sağlanır.

(iii) $T \geq t_0$ ile bir $y(t) \in C([T,\infty),\mathbb{R})$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$z(t) = \xi(t) + \int_t^\infty \frac{\mu[s,t]}{a(s)\rho(s)} z^2(s) ds, \qquad t \geq T \tag{3.23}$$

sağlanır. Burada

$$\xi(t) = \int_t^\infty \frac{\beta^2(s)}{a(s)\rho(s)} \mu[s,t] ds \tag{3.24}$$

$$\mu[s,t] = \exp\left(2\int_t^s \frac{\beta(\tau)}{a(\tau)\rho(\tau)}d\tau\right) \tag{3.25}$$

dır [7].

3.7. Teorem:

Aşağıdaki üç durum birbirine denktir.

(i) Eş. 3.1 salınımsızdır.

(ii) $T \geq t_0$ ile bir $y(t) \in C([T,\infty),\mathbb{R})$ fonksiyonu vardır ki

$$y(t) \geq \xi^*(t) + \int_t^\infty \mu^*[s,t]\frac{y^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds, \qquad t \geq T \tag{3.26}$$

sağlanır.

(iii) $T \geq t_0$ ile bir $z(t) \in C([T,\infty),\mathbb{R})$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$z(t) = \xi^*(t) + \int_t^\infty \mu^*[s,t]\frac{z^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds, \qquad t \geq T \tag{3.27}$$

dır. Burada

$$\xi^*(t) = \int_t^\infty \mu^*[s,t]\frac{\xi^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds \tag{3.28}$$

$$\mu^*[s,t] = \exp\left(2\int_t^s \frac{\beta(\tau)+\xi(\tau)}{a(\tau)\rho(\tau)}d\tau\right) \tag{3.29}$$

dır [7].

3.8. Teorem (Sturm Ayırma Teoremi):

Herhangi bir $I \subset \mathbb{R}$ aralığında $\forall t \in I$ için $p(t), q(t), h(t)$ sürekli fonksiyonlar ve $p(t) > 0$ olmak üzere $x(t)$ ve $y(t)$, $\left(p(t)x'(t)\right)' + q(t)x(t) = 0$ diferensiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri ise, sıfırları I aralığında birbirlerinin sıfırlarını ayırırlar. Yani $x(t)$ ile $y(t)$ nin ortak sıfırları yoktur ve bu çözümlerden birinin ardışık sıfırları arasında diğerinin bir tane sıfırı vardır [8].

3.3. Salınım Kriterleri

Bu bölümde $t_0 \geq 0$ için $a(t) \in C\left([t_0, \infty), \mathbb{R}^+\right)$, $q(t) \in C\left([t_0, \infty), \mathbb{R}\right)$ ve $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ verilen fonksiyonlar olmak üzere

$$\left(a(t)x'(t)\right)' + q(t)\, f\left(x(t)\right) = 0 \tag{3.30}$$

tipindeki ikinci mertebeden diferensiyel denklemlerin iyi bilinen bazı salınım kriterlerini ele alacağız. Burada

(i) $\int^{\infty} \dfrac{ds}{a(s)} = 0$

(ii) $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$ ve $f'(x) \geq 0$

olduğunu kabul edeceğiz.

3.9. Teorem:

(i) ve (ii) sağlansın. Eğer

$$\int^{\infty} q(s)\,ds = \infty \tag{3.31}$$

ise Eş. 3.30 salınımlıdır.

İspat:

Varsayalım ki $x(t)$, Eş. 3.30 un salınımsız bir çözümü olsun. O zaman $t \geq t_1 \geq t_0$ için $x(t) \neq 0$ olduğunu söyleriz. Bu durumda $x(t)$ ya pozitiftir yada negatiftir. $t \geq t_1$ için

$$w(t) = \frac{a(t)x'(t)}{f(x(t))}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman $t \geq t_1$ için

$$w'(t) = \frac{\left(a(t)x'(t)\right)' f(x(t)) - a(t)x'(t) f'(x(t))}{f^2(x(t))}$$

$$= \frac{-q(t) f(x(t)) f(x(t))}{f^2(x(t))} - \frac{a(t)x'(t)x'(t) f'(x(t))}{f^2(x(t))}$$

$$w'(t) = -q(t) - \frac{f'(x(t))w^2(t)}{a(t)} \leq -q(t) \tag{3.32}$$

elde ederiz. Eş. 3.32 yi t_1 den t ye integrallersek

$$w(t) \leq w(t_1) - \int_{t_1}^{t} q(s)\,ds$$

elde ederiz. Şimdi $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$ olduğunu varsayalım $t \geq t_1$ için $x(t) < 0$ durumunun ispatı da benzerdir bu yüzden ihmal edebiliriz. Eş. 3.31 e göre $t_2 \geq t_1$

olmak üzere $t \geq t_2$ için $x'(t) < 0$ dır. Eş. 3.31 ayrıca, $T \geq t_2$ olmak üzere $t \geq T$ için $\int_{t_2}^{T} q(s)\,ds = 0$ ve $\int_{T}^{t} q(s)\,ds \geq 0$ olduğunu gösterir. Eş. 3.30 a kısmi integrasyon kullanarak T den t ye integral alırsak

$$\begin{aligned} a(t)x'(t) &= a(T)x'(T) - \int_T^t q(s)\, f\left(x(s)\right) ds \\ &= a(T)x'(T) - \left[f\left(x(t)\right)\int_T^t q(s)\,ds - \int_T^t f'\left(x(s)\right)x'(s)\int_T^s q(u)\,du\,ds \right] \end{aligned}$$

elde ederiz. $f(x) \geq 0,\ \int_T^t q(s)\,ds \geq 0,\ f'(x) \geq 0,\ x' \leq 0$ olduğundan

$$a(t)x'(t) \leq a(T)x'(T)$$

olur. Buradan

$$x'(t) \leq a(T)x'(T)\frac{1}{a(t)}$$

olur. Bu eşitsizliğin de T den t ye integralini alırsak

$$x(t) \leq x(T) + a(T)x'(T)\int_T^t \frac{ds}{a(s)}$$

elde ederiz. $t \to \infty$ iken $x \to -\infty$ dır. Bu ise çelişki oluşturur.

3.2. Uyarı:

Teorem 3.9, $\gamma > 0$ reel bir sabit olmak üzere

$$\left(a(t)x'(t)\right)' + q(t)\left|x(t)\right|^{\gamma}\operatorname{sgn}\left(x(t)\right) = 0 \tag{3.33}$$

Emden-Fowler denklemine uygulanabilir.

Eş. 3.33 de $\gamma = 1$ olduğunda Teorem 3.9 da izlenen gelişmeleri elde etmek için Lemma 3.2 yi kullanabiliriz.

3.10. Teorem:

$Q(t)$, Eş. 3.11 de tanımlanan fonksiyon olmak üzere,

$$\int^{\infty} \frac{1}{a(s)\rho(s)} ds = \infty \tag{3.34}$$

ve

$$\int^{\infty} Q(s)\, ds = \infty \tag{3.35}$$

eşitliklerini sağlayan bir $\rho(t) \in C^2\left(\left[t_0, \infty\right), \mathbb{R}\right)$ fonksiyonu varsa Eş. 3.1 salınımlıdır [9-10].

3.3. Uyarı:

Eş. 3.5 in daha genel denklemini Teorem 3.10 a uygulamak için Teorem 3.3 ü kullanabiliriz.

3.2. Örnek:

c reel bir sabit olmak üzere

$$x''(t)+\left[\frac{1}{4t^2}+\frac{c}{(t\ln t)^2}\right]x(t)=0 \tag{3.36}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Teorem 3.9 un, Eş. 3.36 ya uygulanamayacağını kontrol etmek kolaydır.

$c>\frac{1}{4}$ ise,

$$\int^{\infty} q(s)\,ds=\int^{\infty}\left[\frac{1}{4s^2}+\frac{c}{(s\ln s)^2}\right]ds=\int^{\infty}\left[\frac{\ln s^2+4c}{4s^2\ln^2 s}\right]ds<\infty$$

olduğunu kolayca söyleyebiliriz. Ancak $g(t)=t\ln t$ alırsak, o zaman Eş. 3.12 den $t>1$ için

$$h(t)=-\frac{\rho'(t)}{2\rho(t)}=-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln t+\frac{1}{t}t}{t\ln t}\right]$$

elde ederiz.

$$\int^{\infty}\frac{1}{\rho(s)}ds=\int^{\infty}\frac{1}{s\ln s}ds=\int^{\infty}\frac{1}{u}du=\ln u\Big|^{\infty}=\infty$$

ve $Q(t)$, Eş. 3.11 de tanımlanmış olup

$$\int^{\infty} Q(s)\,ds=\int^{\infty}\rho(s)\left[q(s)+h^2(s)-h'(s)\right]ds$$

$$\int^{\infty} Q(s)\,ds = \int^{\infty} s\ln s\left[\frac{1}{4s^2}+\frac{c}{(s\ln s)^2}+\frac{1}{4s^2}+\frac{1}{2s^2\ln s}+\frac{1}{4s^2\ln^2 s}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2s^2}-\frac{1}{2s^2\ln s}-\frac{1}{2s^2\ln^2 s}\right]ds$$
$$=\int^{\infty}\frac{4c-1}{4s\ln s}\,ds$$

buluruz. Burada $c>\frac{1}{4}$ ise $\int^{\infty}\frac{4c-1}{4s\ln s}\,ds=\infty$ olur.

Dolayısıyla $c>\frac{1}{4}$ olduğunda Teorem 3.10 un tüm şartları sağlanır ve böylece $c>\frac{1}{4}$ ise Eş. 3.36 nın salınımlı olduğunu söyleyebiliriz. Teorem 3.6 ve 3.7 nin sonucu olarak Eş. 3.1 in salınımlılığı için aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.3. Sonuç:

$\xi(t)$ yi Eş. 3.24 de tanımlandığı şekilde alalım. Eğer

$$\int^{\infty}\frac{\beta^2(s)}{a(s)\rho(s)}\exp\left(2\int^{s}\frac{\beta(\tau)}{a(\tau)\rho(\tau)}\,d\tau\right)ds=\infty$$

ya da

$$\int^{\infty}\frac{\xi^2(s)}{a(s)\rho(s)}\exp\left(2\int^{\infty}\frac{\beta(\tau)+\xi(\tau)}{a(\tau)\rho(\tau)}\,d\tau\right)ds=\infty$$

ise Eş. 3.1 salınımlıdır.

3.3. Örnek:

$\left[1,\infty\right)$ aralığında $c > \dfrac{1}{4}$ için

$$x''\left(t\right)+\frac{c}{t^2}x\left(t\right)=0 \tag{3.15}$$

Euler diferensiyel denklemini ele alalım. Burada $1-\sqrt{4c-1}\leq\alpha<1$ olmak üzere $g\left(t\right)=t^{\alpha}$ alalım. Eş. 3.12 de $h\left(t\right)=-\dfrac{\rho'\left(t\right)}{2\rho\left(t\right)}$ olduğundan

$$h\left(t\right)=\frac{\alpha t^{\alpha-1}}{2t^{\alpha}}$$
$$h'\left(t\right)=-\frac{\alpha}{2t^2}$$

buluruz. Eş. 3.18 de $\beta\left(t\right)=\int_t^{\infty}Q\left(s\right)ds$ olduğundan

$$\begin{aligned}\beta\left(t\right)&=\int_t^{\infty}Q\left(s\right)ds=\int_t^{\infty}\rho\left(s\right)\left[q\left(s\right)+a\left(s\right)h^2\left(s\right)-\left(a\left(s\right)h\left(s\right)\right)'\right]ds\\&=\int_t^{\infty}s^2\left[\frac{c}{s^2}+\frac{\alpha^2}{4s^2}-\frac{\alpha}{2s^2}\right]ds\\&=\int_t^{\infty}\frac{\alpha^2-2\alpha+4c}{4s^{2-\alpha}}ds\\&=\frac{\alpha^2-2\alpha+4c}{4}\cdot\left.\frac{s^{\alpha-1}}{\alpha-1}\right|^{\infty}=\frac{\alpha^2-2\alpha+4}{4\left(1-\alpha\right)}t^{\alpha-1}\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada

$$\exp\left(2\int^{t}\frac{\beta(s)}{\rho(s)}ds\right)=\exp\left(2\int^{t}\frac{\alpha^{2}-2\alpha+4c}{4(1-\alpha)}\cdot\frac{1}{s}ds\right)$$
$$=\exp\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^{2}-2\alpha+4c}{(1-\alpha)}\ln t\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^{2}-2\alpha+4c}{(1-\alpha)}t$$

olduğundan

$$\int^{\infty}\frac{\beta^{2}(s)}{\rho(s)}\exp\left(2\int^{s}\frac{\beta(\tau)}{\rho(\tau)}d\tau\right)ds=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^{2}-2\alpha+4c}{(1-\alpha)}\right)^{3}\int^{\infty}s^{\alpha}ds=\infty$$

olur. Dolayısıyla $c>\frac{1}{4}$ ise Sonuç 3.3 den Eş. 3.15 salınımlıdır.

3.4. Örnek:

$\alpha,\ \gamma\neq 0,\ \sigma>0$ ve c birer sabit olmak üzere

$$x''(t)+\left(\frac{\alpha\sin\gamma t}{t^{\sigma}}+\frac{c}{t^{2}}\right)x(t)=0 \tag{3.37}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. $\lambda>\max\left\{-\frac{1}{2},\frac{1-2\sigma}{2}\right\}$ olmak üzere

$$\rho(t)=\exp\left(-2\int^{t}\left[\frac{\lambda}{s}-\frac{\alpha\cos\gamma s}{\gamma s^{\sigma}}\right]ds\right)$$

alalım. O zaman $t\to\infty$ iken $\rho(t)=t^{-2\lambda}+o\left(t^{-2\lambda-\sigma}\right)$ dır.

$$\rho'(t)=\left(-2\int^{t}\left[\frac{\lambda}{s}-\frac{\alpha\cos\gamma s}{\gamma s^{\sigma}}\right]ds\right)'\rho(t)$$

$$\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}=-2\left(\frac{\lambda}{t}-\frac{\alpha\cos\gamma t}{\gamma t^{\sigma}}\right)$$

olduğundan

$$h(t)=-\frac{\rho'(t)}{2\rho(t)}=\frac{\lambda}{t}-\frac{\alpha\cos\gamma t}{\gamma t^{\sigma}}$$

elde ederiz. Ayrıca $t\to\infty$ iken

$$\begin{aligned}Q(t)&=\rho\left[q+ah^{2}-(ah)'\right]\\&=\left[t^{-2\lambda}+o\left(t^{-2\lambda-\sigma}\right)\right]\left(\frac{\alpha\sin\gamma t}{t^{\sigma}}+\frac{c}{t^{2}}+\frac{\lambda^{2}}{t^{2}}-\frac{2\lambda\alpha\cos\gamma t}{\gamma t^{\sigma+1}}\right.\\&\qquad\left.+\frac{\alpha^{2}\cos^{2}\gamma t}{\gamma^{2}t^{2\sigma}}+\frac{\lambda}{t^{2}}-\frac{\alpha\sin\gamma t}{t^{\sigma}}-\frac{\alpha\cos\gamma t}{t^{\sigma+1}}\right)\end{aligned}$$

$$Q(t)=\left[t^{-2\lambda}+o\left(t^{-2\lambda-\sigma}\right)\right]\left(\frac{\lambda^{2}+\lambda+c}{t^{2}}+\frac{\alpha^{2}}{2\gamma^{2}t^{2\sigma}}+\frac{\alpha^{2}\cos 2\gamma t}{2\gamma^{2}t^{2\sigma}}+\frac{\alpha(2\lambda+\gamma)\cos\gamma t}{\gamma t^{\sigma+1}}\right)$$

elde ederiz. Şimdi şu üç durumu ele alalım:

Durum 1:

$0<\sigma<1$ ise $(1-2\sigma)/2<\lambda<1/2$ alalım. O zaman $t\to\infty$ iken

$$\beta(t)=\int_{t}^{\infty}Q(s)\,ds=\frac{\alpha^{2}}{2\gamma^{2}(2\lambda+2\sigma-1)}t^{-2\sigma-2\lambda+1}+o\left(t^{-2\lambda-1}\right)$$

$$\exp\left(2\int^{t}\frac{\beta(s)}{\rho(s)}ds\right)=\exp\left(\frac{\alpha^{2}}{2\gamma^{2}(2\lambda+2\sigma-1)(2-2\sigma)}t^{2-2\sigma}\right)\left[1+o\left(t^{-2\lambda}\right)\right]$$

ve

$$\int^{\infty}\frac{\beta^2(s)}{\rho(s)}\exp\left(2\int^{s}\frac{\beta(\tau)}{\rho(\tau)}d\tau\right)ds=\infty$$

olur. Sonuç 3.3 den $0<c<1$ ise Eş. 3.36 nın salınımlı olduğu sonucu çıkar.

Durum 2:

$\sigma=1$ ve $c>(1/4)-\left(\alpha^2/2\gamma^2\right)$ ise $-\dfrac{1}{2}<\lambda\le\min\left\{\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}+\sqrt{c+\dfrac{\alpha^2}{2\gamma^2}-\dfrac{1}{4}}\right\}$ alalım. O zaman $t\to\infty$ iken

$$\beta(t)=\frac{2\gamma^2\left(\lambda^2+\lambda+c\right)+\alpha^2}{2\gamma^2(1+2\lambda)}t^{-2\lambda-1}+o\left(t^{-2\lambda-2}\right)$$
$$\exp\left(2\int^{t}\frac{\beta(s)}{\rho(s)}ds\right)=t^{\left(2\gamma^2\left(\lambda^2+\lambda+c\right)+\alpha^2\right)/\gamma^2(1+2\lambda)}\left[1+o\left(t^{-2\lambda-1}\right)\right]$$

ve

$$\int^{\infty}\frac{\beta^2(s)}{\rho(s)}\exp\left(2\int^{s}\frac{\beta(\tau)}{\rho(\tau)}d\tau\right)ds=\infty$$

olur. Sonuç 3.3 den $c>(1/4)-\left(\alpha^2/2\gamma^2\right)$ ve $\sigma=1$ ise Eş. 3.36 nın salınımlı olduğu sonucu çıkar.

Durum 3:

$\alpha>1$ ve $c>\dfrac{1}{4}$ ise $-\dfrac{1}{2}<\lambda\le\min\left\{\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}+\sqrt{c-\dfrac{1}{4}}\right\}$ alalım. O zaman $t\to\infty$ iken

$$\beta(t) = \frac{\lambda^2 + \lambda + c}{1 + 2\lambda} t^{-2\lambda-1} + o\left(t^{-2\lambda-2}\right)$$

$$\exp\left(2\int^{t} \frac{\beta(s)}{\rho(s)} ds\right) = t^{2\left(\lambda^2+\lambda+c\right)/(1+2\lambda)}\left[1 + o\left(t^{-2\lambda-1}\right)\right]$$

ve

$$\int^{\infty} \frac{\beta^2(s)}{\rho(s)} \exp\left(2\int^{s} \frac{\beta(\tau)}{\rho(\tau)} d\tau\right) ds = \infty$$

olur. Sonuç 3.3 den $\alpha > 1$ ve $c > 1/4$ ise Eş. 3.36 nın salınımlı olduğu sonucu ortaya çıkar.

Eş. 3.36, tüm ihtimaller için salınımlı olduğundan Eş. 3.36 salınımlıdır deriz. $q(t)$ üzerindeki ek bir şart altında, Eş. 3.31 tüm büyük $T \geq t_0$ lar için

$$\limsup_{t\to\infty} \int_T^t q(s)\, ds = \infty \tag{3.38}$$

şartıyla yer değiştirilebilir. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.11. Teorem:

(i) ve (ii) koşullarının sağlandığını kabul edelim. Eğer tüm yeterince büyük $T \geq t_0$ lar için

$$\liminf_{t\to\infty} \int_T^t q(s)\, ds \geq 0 \tag{3.39}$$

ve Eş. 3.38 sağlanırsa Eş. 3.30 salınımlıdır.

İspat:

$x(t)$, Eş. 3.30 un salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın $t \geq t_1 \geq t_0$ için $x(t) > 0$ olduğunu söyleyelim. Teorem 3.9 daki gibi $t \geq t_1$ için

$$w(t) = \frac{a(t)x'(t)}{f(x(t))}$$

tanımlayalım. O zaman $t \geq t_1$ için

$$w'(t) = \frac{\left(a(t)x'(t)\right)' f(x(t)) - a(t)x'(t) f'(x(t))}{f^2(x(t))}$$

$$= \frac{-q(t) f(x(t)) f(x(t))}{f^2(x(t))} - \frac{a(t)x'(t)x'(t) f'(x(t))}{f^2(x(t))}$$

$$w'(t) = -q(t) - \frac{f'(x(t)) w^2(t)}{a(t)} \leq -q(t) \tag{3.32}$$

elde ederiz. Şimdi şu üç durumu düşünelim.

Durum 1:

$x'(t)$ nin işaretlerinin değiştiğini kabul edelim. o zaman $x'(T_n) = 0$ sağlayan ve $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ olan bir $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır. Eş. 3.39 u sağlayan yeterince büyük bir N seçelim Eş. 3.32 yi T_n den t ye integrallersek

$$\int_{T_n}^{t} \left(\frac{a(s)x'(s)}{f(x(s))} \right)' ds \leq -\int_{T_N}^{t} q(s)ds$$

$$\frac{a(t)x'(t)}{f(x(t))} \leq \frac{a(T_N)x'(T_N)}{f(x(T_N))} - \int_{T_N}^{t} q(s)\,ds$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{a(t)x'(t)}{f(x(t))} \leq \frac{a(T_N)x'(T_N)}{f(x(T_N))} + \limsup_{t\to\infty}\left(-\int_{T_N}^{t} q(s)\,ds\right) < 0$$

elde ederiz. Bu Eş. 3.38 ile çelişir. Dolayısıyla $x'(t)$ nin salınımlı olmasıyla da çelişir.

Durum 2:

Tüm $t \geq t_2 \geq t_1$ için $x'(t) > 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman Eş. 3.32 den

$$\frac{a(t)x'(t)}{f(x(t))} - \frac{a(t_2)x'(t_2)}{f(x(t_2))} + \int_{t_2}^{t} q(s)\,ds \leq 0$$

elde ederiz. Daha sonra Eş. 3.38 den

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)x'(t)}{f(x(t))} \leq -\liminf_{t\to\infty} \int_{t_2}^{t} q(s)\,ds$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{a(t)x'(t)}{f(x(t))} = -\infty$$

olur. Bu da bir çelişkidir.

Durum 3:

$t \geq t_3 \geq t_0$ için $x'(t) < 0$ olduğunu varsayalım Eş. 3.39 gösterir ki her $t_4 \geq t_3$ için bir $T \geq t_4$ vardır öyle ki tüm $t \geq T$ için $\int_{T}^{t} q(s)\,ds \geq 0$ dır. Belirttiğimiz gibi $T \geq t_3$ seçersek ve Eş. 3.30 u integrallersek

$$a(t)x'(t) \le a(T)x'(T) - \int_T^t q(s) f(x(s))ds$$

kısmi integrasyon yardımıyla

$$a(t)x'(t) \le a(T)x'(T) - f(x(t))\int_T^t q(s)ds + \int_T^t f'(x(s))x'(s)\int_T^s q(u)duds$$

buluruz. Dolayısıyla

$$a(t)x'(t) \le a(T)x'(T)$$

olur. Buradan

$$x'(t) \le a(T)x'(T)\frac{1}{a(t)}$$

olur. Bu eşitsizliği de *T* den *t* ye integrallersek

$$x(t) \le x(T) + a(T)x'(T)\int_T^t \frac{1}{a(s)}ds$$

buluruz. Buradan $t \to \infty$ iken $x(t) \to -\infty$ olur. Fakat bu $t \ge t_1$ için $x(t) > 0$ olmasıyla çelişir. $x'(t)$ için tüm ihtimaller olasılık dışı olduğundan kabulümüz yanlıştır. Yani, $x(t)$ salınımlı olmalıdır. $t \ge t_1 \ge t_0$ için $x(t) < 0$ durumunun ispatı da benzer şekilde yapılır.

3.4. Salınım Kriterleri – Aralık Ortalama

Bu bölümde

$$\left(a(t)x'(t)\right)' + q(t)x(t) = 0 \tag{3.1}$$

ve

$$\left(a(t)x'(t)\right)' + p(t)x'(t) + q(t)f\left(x(t)\right) = 0 \tag{3.5}$$

denklemlerinin salınım davranışını incelemek için "aralık ortalama" tekniğini kullanacağız. Kullandığımız kriterler değişken katsayıların integrallerinin ortalama davranışlarını içerir. Bu kriterlerin motivasyonu $t_0 \geq 0$ olmak üzere $[t_0, \infty)$ aralığında Eş. 3.1 in disconjugate özellikli olmasıdır.

3.12. Teorem:

Eğer

$$\int^{\infty}\left(\int_{t_0}^{s} a(u)\,du\right)^{-1} ds = \infty \tag{3.40}$$

ve

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} q(u)\,duds = \infty \tag{3.41}$$

ise Eş. 3.1 salınımlıdır.

İspat:

$x(t)$, Eş. 3.1 in salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın $t \geq t_0 > 0$ için $x(t) > 0$ olsun. $t \geq t_0$ için

$$w(t) = a(t)\frac{x'(t)}{x(t)}$$

tanımlayalım. O zaman, $t \geq t_0$ için

$$w'(t) = \frac{\left(a(t)x'(t)\right)' x(t) - a(t)x'(t)x'(t)}{x^2(t)}$$

$$= \frac{-q(t)x(t)x(t)}{x^2(t)} - \frac{a(t)\left(x'(t)\right)^2}{x^2(t)} = -q(t) - \frac{w^2(t)}{a(t)}$$

$$w'(t) = -q(t) - \frac{1}{a(t)}w^2(t) \tag{3.42}$$

elde ederiz. Eş. 3.42 yi t_0 dan *t* ye iki kez integrallersek sırasıyla

$$w(t) - w(t_0) = -\int_{t_0}^{t} q(s)\,ds - \int_{t_0}^{t} \frac{w^2(s)}{a(s)}\,ds$$

$$\int_{t_0}^{t} w(s)\,ds - w(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^{t}\left(\int_{t_0}^{s} \frac{w^2(u)}{a(u)}\,du\right)ds = -\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} q(u)\,du\,ds$$

$$\int_{t_0}^{t} w(s)\,ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \frac{w^2(u)}{a(u)}\,du\,ds = w(t_0)t - w(t_0)t_0 - \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} q(u)\,du\,ds$$

elde ederiz. *k* bir sabit olmak üzere $w(t_0) = k$ dersek

$$\int_{t_0}^{t} w(s)\,ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \frac{w^2(u)}{a(u)}\,duds = t\left(k - \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} q(u)\,duds\right) - w(t_0)t_0$$

elde ederiz. Eş. 3.41 i göz önüne alırsak $t \geq t_1$ için

$$\int_{t_0}^{t} w(s)\,ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \frac{w^2(u)}{a(u)}\,duds < 0$$

sağlayacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ vardır. Buradan $t \geq t_1$ için

$$F(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} \frac{w^2(u)}{a(u)}\,duds < -\int_{t_0}^{t} w(s)\,ds$$

elde ederiz. $F(t)$ negatif olmayan bir fonksiyon olduğundan

$$F^2(t) < \left(\int_{t_0}^{t} w(s)\,ds\right)^2 \tag{3.43}$$

olmalıdır. Schwartz eşitsizliğinden $t \geq t_1$ için

$$\left(\int_{t_0}^{t} w(s)\,ds + \right)^2 = \left(\int_{t_0}^{t} \sqrt{a(s)}\,\frac{w(s)}{\sqrt{a(s)}}\,ds + \right)^2 \leq \left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)\left(\int_{t_0}^{t} \frac{w^2(s)}{a(s)}\,ds\right)$$

elde ederiz. $t \geq t_2$ için $F(t) > 0$ olacak şekilde bir $t_2 \geq t_1$ olduğunu kontrol etmek kolaydır. Bu yüzden $t \geq t_2$ için

$$\frac{1}{\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \le \frac{1}{\left(\int\limits_{t_0}^{t} w(s)\,ds +\right)^2} \cdot \int\limits_{t_0}^{t} \frac{w^2(s)}{a(s)}\,ds$$

$$\left(\int\limits_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right)^{-1} \le F^{-2}(t)\,F'(t) \tag{3.44}$$

dir. Eş. 3.44 ü t_2 den t ye integrallersek

$$\int\limits_{t_2}^{t} \left(\int\limits_{t_0}^{s} a(u)\,du\right)^{-1} ds \le -\frac{1}{F(t)} + \frac{1}{F(t_2)} \le \frac{1}{F(t_2)} < \infty$$

elde ederiz. Bu ise Eş. 3.40 ile çelişir. Benzer şeyleri $x(t) < 0$ için de söyleyebiliriz. Lemma 3.2 ve Teorem 3.12 den aşağıdaki sonucu verebiliriz

3.4. Sonuç:

Eğer

$$\int^{\infty} \left(\int\limits_{t_0}^{s} a(u)\,\rho(u)\,du\right)^{-1} ds = \infty \tag{3.45}$$

şartını sağlayan bir $\rho(t) \in C^2\left(\left[t_0,\infty\right),\mathbb{R}^+\right)$ fonksiyonu varsa ve $Q(t)$, Eş. 3.11 de tanımlanan fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{s} Q(u)\,du\,ds = \infty \tag{3.46}$$

ise Eş. 3.1 salınımlıdır.

Benzer şekilde Teorem 3.3 ve 3.12 den aşağıdaki sonuç çıkar.

3.5. Sonuç:

Eğer Eş. 3.45 i sağlayan bir $\rho(t)\in C^2\left(\left[t_0,\infty\right),\mathbb{R}^+\right)$ fonksiyonu varsa ve $Q^*(t)$ Eş. 3.7 de tanımlanan fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}Q^*(u)\,duds=\infty$$

ise Eş. 3.1 salınımlıdır.

3.5. Örnek:

c pozitif bir sabit olmak üzere $t\geq 1$ için

$$\left(\frac{1}{t}x'(t)\right)'+\frac{1}{t^2}x'(t)+\frac{c}{t^2}x(t)=0 \tag{3.47}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. $\rho(t)=t$ olsun. Bu denklem Eş. 3.5 tipinde bir denklemdir. Dolayısıyla $h^*(t)$ için Eş. 3.8 i $Q^*(t)$ için Eş. 3.7 yi kullanacağız.

$$p(t)\rho(t)-a(t)\rho'(t)=\frac{1}{t^2}t-\frac{1}{t}\cdot 1=0$$

olduğundan $h^*(t)=0$ dır. Dolayısıyla

$$Q^*(t)=\rho(t)q(t)=\frac{c}{t}$$

buluruz.

$$\int_{}^{\infty}\left(\int_{t_0}^{s} a(u)\rho(u)du\right)^{-1} ds = \int_{}^{\infty}\left(\int_{t_0}^{s}\frac{1}{t}tdu\right)^{-1} ds = \int_{}^{\infty}(s-t_0)ds = \infty$$

olduğundan Eş. 3.45 sağlanır.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} Q^*(u)duds &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\frac{c}{u}duds \\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} c(\ln s - \ln t_0)ds \\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{c}{t}(t\ln t - t - t_0\ln t_0 - t_0 - t\ln t_0 + t_0\ln t_0) = \infty\end{aligned}$$

olduğundan da Eş. 3.46 da sağlanmış olur. Teorem 3.13 ün tüm şartları sağlandığından $c > 0$ için Eş. 3.47 salınımlıdır.

Sonuç 3.4 de $\rho(t) = t$ alırsak Eş. 3.47 ile ilgili dampet (sönümlü) olmayan denklemi, yani

$$\left(\frac{1}{t}x'(t)\right)' + \frac{c}{t^2}x(t) = 0 \tag{3.48}$$

denklemi salınımlıdır. Bu yüzden Eş. 3.47 de dampet terim salınımlığı bozmaz.

3.4. Uyarı:

Teorem 3.12 ve Sonuç 3.4, 3.5 de a_1 pozitif bir sabit olmak üzere

$$a(t) \le a_1 \tag{3.49}$$

alırsak, Eş. 3.40 a gerek kalmaz. Eş. 3.45 de

$$\int^{\infty}\left(\int_{t_0}^{s}\rho(u)\,du\right)^{-1}ds=\infty \tag{3.50}$$

halini alır.

İlerde, Eş. 3.41 tüm büyük T ler için λ pozitif bir sabit olmak üzere

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{T}^{t}q(s)\,ds>-\lambda \tag{3.51}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_{T}^{t}\int_{T}^{s}q(u)\,du\,ds=\infty \tag{3.52}$$

iki zayıf şart ile değişebileceğini göstereceğiz.

3.13. Teorem:

a_1 pozitif bir sabit olmak üzere Eş. 3.49 ve tüm büyük T ler için λ pozitif bir sabit olmak üzere Eş. 3.51 ve Eş. 3.52 sağlanırsa, Eş. 3.1 salınımlı olur.

İspat:

$x(t)$, Eş. 3.1 in salınımsız bir çözümü olsun. $T\geq 1$ ile $t\geq T\geq t_0$ için $x(t)>0$ olsun. $t\geq T$ için

$$w(t)=a(t)\frac{x'(t)}{x(t)}$$

tanımlayalım. O zaman $t \geq T$ için

$$\begin{aligned} w'(t) &= \frac{\left(a(t)x'(t)\right)x(t)-a(t)x'(t)x'(t)}{x^2(t)} \\ &= \frac{-q(t)x(t)x(t)-a(t)x'(t)x'(t)}{x^2(t)} \\ &= -q(t)-a(t)\left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitliği *T* den *t* ye integrallersek

$$\int_T^t w'(t)ds = -\int_T^t q(s)ds - \int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds$$

$$w(t)-w(T) = -\int_T^t q(s)ds - \int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds$$

$$a(t)\frac{x'(t)}{x(t)}+\int_T^t q(s)ds+\int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds = \frac{a(T)x'(T)}{x(T)} = c \tag{3.53}$$

elde ederiz. Şimdi şu üç durumu ele alalım.

Durum 1:

$x'(t)$ nin keyfi büyük sayıda sıfırlara sahip olduğunu kabul edelim. yani $x'(t_n)=0$ şartını sağlayan $n \to \infty$ iken $t_n \to \infty$ olan bir $\{t_n\}$ dizisi var olsun. Eş. 3.53 ü bu diziler boyunca oluşturalım.

$$\int_T^t q(s)\,ds + \int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds = c - a(t)\frac{x'(t)}{x(t)}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \int_T^t q(s)\,ds + \int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds = c - a(t)\frac{x'(t)}{x(t)}$$

elde ederiz. Eş. 3.51 den

$$-\lambda + \int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds \le c - a(t)\frac{x'(t)}{x(t)}$$

buluruz. Buradan.

$$\int_T^t \left(\sqrt{a(s)}\,\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds \le c + \lambda - a(t)\frac{x'(t)}{x(t)}$$

$$\int_T^t \left(\sqrt{a(s)}\,\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds < \infty$$

olduğundan

$$\sqrt{a(s)}\,\frac{x'(s)}{x(s)} \in L^2(T,\infty) \tag{3.54}$$

elde ederiz. Buradan

$$\int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds < \left(\int_T^t a(s)\frac{x'(s)}{x(s)}\,ds\right)^2$$

olur. Schwartzs eşitsizliğinden

$$\left(\int_T^t \frac{a(s)x'(s)}{x(s)}ds\right)^2 \le \left(\int_T^t \sqrt{a(s)}^2 ds\right)\left(\int_T^t \left(\sqrt{a(s)}\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds\right)$$

$$\le \left(\int_T^t a(s)ds\right)\left(\int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds\right)$$

$$\le \left(\int_T^t a_1 ds\right)\left(\int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds\right)$$

$$\left(\int_T^t \frac{\sqrt{a(s)}\sqrt{a(s)}x'(s)}{x(s)}ds\right)^2 \le \left(\int_T^t a(s)ds\right)\left(\int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds\right)$$

$$\le a_1(t-T)\left(\int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds\right)$$

$$\le a_1 t\left(\int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds\right) - a_1 T\left(\int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds\right)$$

$$\le a_1 t\left(\int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds\right) \le a_1 a_2 t \le k^2 t^2$$

elde ederiz. Bu da bize k pozitif bir sabit olmak üzere

$$\left|\int_T^t \frac{a(s)x'(s)}{x(s)}ds\right| \le kt$$

$$-kt \le \int_T^t \frac{a(s)x'(s)}{x(s)}ds \le kt$$

$$\int_T^t \frac{a(s)x'(s)}{x(s)}ds \ge -kt$$

olduğunu gösterir.

$$\frac{a(t)x'(t)}{x(t)} + \int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds + \int_T^t q(s)ds = c$$

olduğundan dolayı

$$\int_T^t\int_T^s q(u)\,duds+\int_T^t\int_T^s a(u)\left(\frac{x'(u)}{x(u)}\right)^2 duds+\int_T^t\frac{a(s)x'(s)}{x(s)}ds=\int_T^t cds$$

elde ederiz. $t=t_n$ ler için $x'(t)=0$ ve $\int_T^t\frac{a(s)x'(s)}{x(s)}ds\geq -kt$ olduğundan da

$$\int_T^t\int_T^s q(u)\,duds-kt\leq c(t-T)$$
$$\frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}\int_T^t\int_T^s q(u)\,duds-k\right)\leq c(t-T)$$
$$-k+\frac{1}{t}\int_T^t\int_T^s q(u)\,duds\leq\frac{c(t-T)}{t}\leq c$$

elde ederiz. Böylece

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{T}\int_T^t\int_T^s q(u)\,duds<\infty$$

olur. Bu da Eş. 3.52 ile çelişir.

Durum 2:

$t\geq T_1\geq T$ için $x'(t)>0$ ise bir önceki durumda olduğu gibi Eş. 3.53 den Eş. 3.54 elde edilir ve benzer çelişki yakalanır.

Durum 3:

$t\geq t_1$ için $x'(t)>0$ ı sağlayan $t_1\geq T$ olsun. Eş. 3.53 ve Eş. 3.51 i ele alarak

$$-c+\int_T^t q(s)\,ds+\int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds=-\frac{a(t)x'(t)}{x(t)}$$

$$-c+\liminf_{t\to\infty}\int_T^t q(s)\,ds+\int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds=-\frac{a(t)x'(t)}{x(t)}$$

$$-(c+\lambda)+\int_T^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds\le-\frac{a(t)x'(t)}{x(t)} \tag{3.55}$$

elde ederiz. Eş. 3.55 in sol tarafındaki integral yakınsak ise önceki durumlarda olduğu gibi devam ettirebiliriz. İntegral ıraksak ise

$$\int_{t_1}^{t_2} a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds=1+c+\lambda$$

yı sağlayan bir $t_2\ge t_1$ vardır. Eş. 3.55 i

$$\frac{-\left(x'(t)/x(t)\right)}{-(c+\lambda)+\int_{t_1}^t a(s)\left(x'(s)/x(s)\right)^2 ds}$$

ile çarpıp t_2 den t ye integrallersek

$$\frac{a(t)\left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)^2}{-(c+\lambda)+\int_{t_1}^t a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds}\ge-\frac{x'(t)}{x(t)}$$

$$\int_{t_2}^t\frac{a(u)\left(\frac{x'(u)}{x(u)}\right)^2}{-(c+\lambda)+\int_{t_1}^u a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds}du\ge-\int_{t_2}^t\frac{x'(u)}{x(u)}du$$

$$\ln\left[-(c+\lambda)+\int_{t_1}^{t} a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds\right] \geq \ln\frac{x(t_2)}{x(t)}$$

elde ederiz. Buradan $t \geq t_2$ için

$$-a(t)\frac{x'(t)}{x(t)} \geq \frac{x(t_2)}{x(t)}$$

dır. Dolayısıyla $t \geq t_2$ için

$$x'(t) \leq -\frac{x(t_2)}{a_1}$$

dır. Eğer son kez integral alırsak $x(t)$ nin eninde sonunda negatif olduğunu görürüz. Bu da $t \geq T$ için $x(t) > 0$ kabulümüzle çelişir.

3.5. Uyarı:

Teorem 3.13 ün ispatında $x'(t)$ nin işaretine bağlı olarak düşünülen üç durum

$$\int_{T}^{t} a(s)\left(\frac{x'(s)}{x(s)}\right)^2 ds$$

integralinin yakınsak yada ıraksak olmasına bağlı olarak iki durumla yer değiştirilebilir. Bu tekniği sonraki teoremlerin ispatında sık sık kullanacağız. Şimdi Eş. 3.46,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} Q(u)\,du\,ds > -\infty$$

ve Eş. 3.46 daki limitin olmaması zayıf şartları yerine

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} Q(u)\,duds < \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} Q(u)\,duds \le \infty$$

şartını alabileceğimizi göstereceğiz.

3.14. Teorem:

Eğer

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}\int_{t_0}^{t} a(s)\rho(s)\,ds = 0 \tag{3.56}$$

şartını sağlayan bir $\rho(t)\in C^2\left([t_0,\infty),\mathbb{R}^+\right)$ fonksiyonu varsa ve $Q(t)$, Eş. 3.11 de tanımlanan fonksiyon olmak üzere

$$-\infty < \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} Q(u)\,duds < \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} Q(u)\,duds \le \infty \tag{3.57}$$

ise Eş. 3.1 salınımlıdır.

3.6. Uyarı:

Teorem 3.14 de $a(t)=\rho(t)=1$ ise Eş. 3.56 ihmal edilir ve Eş. 3.57 iyi bilinen

$$-\infty < \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} q(u)\,duds < \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} q(u)\,duds \le \infty \tag{3.58}$$

şartına indirgenir.

Teorem 3.14 ün ispatı “ağırlıklı integral” şartında kullanılan daha genel bir sonuç tarafından kapsanır. Bunun için

$$h(t) = -\frac{\rho'(t)}{2\rho(t)}$$

ve

$$Q(t) = \rho(t)\left[q(t) + a(t)h^2(t) - \left(a(t)h(t)\right)'\right]$$

şartlarını sağlayan bir $\rho(t) \in C^2\left(\left[t_0,\infty\right),\mathbb{R}^+\right)$ fonksiyonu verilsin. $\Omega(\rho)$ kümesi bazı $k \in [0,1)$ ler için

$$G_k(t) = \int^t \frac{g(s)\left(\int^s g(u)\,du\right)^k}{\left(\int^s a(u)\rho(u)g^2(u)\,du\right)} ds \tag{3.59}$$

olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty}\left(\int^t g(s)\,ds\right)^{1-k}\left[G_k(\infty) - G_k(t)\right] > 0 \tag{3.60}$$

şartını sağlayan $\left[t_0,\infty\right)$ üzerinde tüm negatif olmayan local integrallenebilir $g(t)$ fonksiyonlarının kümesi olsun.Eğer $G_k(\infty) = \infty$ ise $g \in \Omega(\rho)$ dır.

$\Omega_0(\rho)$ kümesi,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int^{\infty}a(s)\rho(s)g^2(s)ds}{\int^{t}g(s)ds}=0 \tag{3.61}$$

şartını sağlayan $[t_0,\infty)$ üzerindeki tüm negatif olmayan local integrallenebilir fonksiyonların kümesi olsun. Eş. 3.60 ya da Eş. 3.61 negatif olmayan local integrallenebilir bir $g(t)$ fonksiyonu tarafından sağlanabilmesi için

$$\int^{\infty}g(s)ds=\infty \tag{3.62}$$

olması gerekir.

$\Omega(\rho)$ ve $\Omega_0(\rho)$ sınıfının üyeleri $\rho(t)$ ye göre "ağırlıklı fonksiyon" olarak adlandırılır. Eş. 3.60 ve Eş. 3.61 den de anlaşıldığı gibi $\Omega_0(\rho)\subset\Omega(\rho)$ dir.

$g\in\Omega=\Omega(\rho)$ için,

$$A_g(s,t)=\frac{\int_s^t g(u)\int_s^u Q(\tau)d\tau du}{\int_s^t g(u)du} \tag{3.63}$$

tanımlayalım. Eş. 3.1 salınımsız ise Teorem 3.5 den $t\geq T\geq t_0$ için $w(t)>0$ olsun ve $t\geq T$ için

$$v(t)=a(t)\rho(t)w'(t)/w(t)$$

tanımlayalım. O zaman $t\geq T$ için

$$v'(t) = \left(a(t)\rho(t)w'(t)\right)' \frac{1}{w(t)} - a(t)\rho(t)w'(t)\frac{w'(t)}{w^2(t)}$$

$$= -Q(t) - a(t)\rho(t)\frac{\left(w'(t)\right)^2}{w^2(t)}$$

$$= -Q(t) - \frac{v^2(t)}{a(t)\rho(t)}$$

$$v'(t) + Q(t) + \frac{v^2(t)}{a(t)g(t)} = 0 \tag{3.64}$$

elde ederiz. Eş. 3.64 ün *s* den *t* ye integralini alırsak

$$v(t) = v(s) - \int_s^t \frac{v^2(u)}{a(u)\rho(u)} du - \int_s^t Q(u) du \tag{3.65}$$

buluruz.

3.3. Lemma:

$v(t)$ Eş. 3.64 ün bir çözümü olsun.

$$\liminf_{t\to\infty} A_g(\cdot, t) > -\infty \tag{3.66}$$

sağlayan bir $g(t) \in \Omega$ fonksiyonu varsa, o zaman

$$\int^{\infty} \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)} ds < \infty \tag{3.67}$$

dır.

İspat:

$$\int^{\infty} \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)} ds = \infty \tag{3.68}$$

olduğunu kabul edelim.

Eş. 3.65 i $g(t)$ ile çarpıp $t \geq \tau \geq T$ olmak üzere τ dan t ye integrallersek

$$v(t)g(t) = v(\tau)g(t) - \int_{\tau}^{s} \frac{v^2(u)}{a(u)\rho(u)} du g(t) - \int_{\tau}^{s} Q(u) du g(t)$$

$$\int_{\tau}^{t} v(s)g(s) ds = v(\tau)\int_{\tau}^{t} g(s) ds - \int_{\tau}^{t} g(s)\int_{\tau}^{s} Q(u) duds - \int_{\tau}^{t} g(s)\int_{\tau}^{s} \frac{v^2(u)}{a(u)\rho(u)} duds$$

elde ederiz. Eş. 3.63 den

$$\int_{\tau}^{t} v(s)g(s) ds = v(\tau)\int_{\tau}^{t} g(s) ds - A_g(\tau,t)\int_{\tau}^{t} g(s) ds - \int_{\tau}^{t} g(s)\int_{\tau}^{s} \frac{v^2(u)}{a(u)\rho(u)} duds$$

$$\int_{\tau}^{t} v(s)g(s) ds = \left[v(\tau) - A_g(\tau,t)\right]\int_{\tau}^{t} g(s) ds - \int_{\tau}^{t} g(s)\int_{\tau}^{s} \frac{v^2(u)}{a(u)\rho(u)} duds \tag{3.69}$$

elde ederiz. Eş. 3.65 den

$$v(\tau) = v(T) - \int_{T}^{\tau} Q(s) ds - \int_{T}^{\tau} \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)} ds$$

buluruz. $g(t) \in \Omega$ olduğundan

$$\int^{\infty} g(s) ds = \infty$$

sağlanır. Dolayısıyla

$$A_g(T,t)=\frac{\int_T^t g(s)\int_T^s Q(u)\,duds}{\int_T^t g(s)\,ds}$$

tanımıyla

$$\begin{aligned}\int_T^t g(s)\,dsA_g(T,t)&=\int_T^t g(s)\int_T^s Q(u)\,duds\\&=\int_T^\tau g(s)\left(\int_T^s Q(u)\,du\right)ds+\int_\tau^t g(s)\left(\int_T^\tau Q(u)\,du+\int_\tau^s Q(u)\,du\right)ds\\&=\int_T^\tau g(s)\left(\int_T^s Q(u)\,du\right)ds+\int_\tau^t g(s)\int_T^\tau Q(u)\,duds+\int_\tau^t g(s)\int_\tau^s Q(u)\,duds\\&=\int_T^\tau g(s)\left(\int_T^s Q(u)\,du\right)ds+\int_\tau^t g(s)\int_T^\tau Q(u)\,duds+A_g(\tau,t)\int_\tau^t g(s)\,ds\end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned}A_g(\tau,t)&=A_g(T,t)\frac{\int_T^t g(s)\,ds}{\int_\tau^t g(s)\,ds}-\frac{\int_T^\tau g(s)\left(\int_T^s Q(u)\,du\right)ds}{\int_\tau^t g(s)\,ds}-\frac{\int_\tau^t g(s)\int_T^\tau Q(u)\,duds}{\int_\tau^t g(s)\,ds}\\&=A_g(T,t)\frac{\int_T^t g(s)\,ds}{\int_\tau^t g(s)\,ds}-\int_T^\tau Q(u)\,du-\frac{\int_T^\tau g(s)\left(\int_T^s Q(u)\,du\right)ds}{\int_\tau^t g(s)\,ds}\\&=A_g(T,t)\frac{\int_T^\tau g(s)\,ds+\int_\tau^t g(s)\,ds}{\int_\tau^t g(s)\,ds}-\int_T^\tau Q(u)\,du-\frac{\int_T^\tau g(s)\left(\int_T^s Q(u)\,du\right)ds}{\int_\tau^t g(s)\,ds}\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $t \to \infty$ iken

$$A_g(T,t) - \int_T^{\tau} Q(u)\,du - o(1)$$

dır. Dolayısıyla $t \to \infty$ iken

$$A_g(\tau,t) = A_g(T,t) + v(\tau) - v(T) + \int_T^{\tau} \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds + o(1)$$

elde edilir. Burada $t \to \infty$ iken

$$v(\tau) - A_g(\tau,t) = v(T) - A_g(T,t) - \int_T^{\tau} \frac{v^2(s)}{a(s)g(s)}ds + o(1) \tag{3.70}$$

ve $g(t) \in \Omega$ olduğundan, *k*, Eş. 3.60 da tanımlandığı gibi olmak üzere

$$\frac{1}{\lambda} < (1-k)\limsup_{t\to\infty}\left(\int^{t} g(s)\,ds\right)^{1-k}\left[G_k(\infty) - G_k(t)\right] \tag{3.71}$$

sağlayan pozitif bir $\lambda > 0$ sayısı vardır. Eş. 3.66, Eş. 3.68 ve Eş. 3.70 den tüm $t \ge t_2$ için

$$v(t_1) - A_g(t_1,t) \le -\lambda \tag{3.72}$$

sağlayan $t_2 \ge t_1 \ge T$ olan iki sayının varlığı anlaşılır.

$y(t) = \int_{t_1}^{t} g(s)v(s)\,ds$ alalım. Buna göre Schwartzs eşitsizliği ile

$$y^2(s)=\left(\int_{t_1}^{s} g(u)v(u)du\right)^2=\left(\int_{t_1}^{s} g(u)v(u)\frac{\sqrt{a(u)\rho(u)}}{\sqrt{a(u)\rho(u)}}du\right)^2$$

$$\leq\int_{t_1}^{s} a(u)\rho(u)g^2(u)du\int_{t_1}^{s}\frac{v^2(u)}{a(u)\rho(u)}du$$

elde ederiz. Buradan da

$$\frac{y^2(s)}{\int_{t_1}^{s} a(u)\rho(u)g^2(u)du}\leq\int_{t_1}^{s}\frac{v^2(u)}{a(u)\rho(u)}du$$

buluruz. Eş. 3.69 ve Eş. 3.72 den

$$\int_{t_1}^{t} g(s)v(s)ds=\left[v(t_1)-A_g(t_1,t)\right]\int_{t_1}^{t} g(s)ds-\int_{t_1}^{t} g(s)\int_{t_1}^{s}\frac{v^2(s)}{a(u)\rho(u)}duds$$

$$y(t)\leq-\lambda\int_{t_1}^{t} g(s)ds-\int_{t_1}^{t}\frac{g(s)y^2(s)}{\int_{t_1}^{s} a(u)\rho(u)g^2(u)du}ds=-F(t) \tag{3.73}$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$F'(t)=\lambda g(t)+\frac{g(t)y^2(t)}{\int_{t_1}^{t} a(s)\rho(s)g^2(s)ds} \tag{3.74}$$

ve Eş. 3.73 den

$$0\leq\lambda\int_{t_1}^{t} g(s)ds\leq F(t)\leq\left|y(t)\right| \tag{3.75}$$

dir. Şimdi $t \geq t_1$ için Eş. 3.73 – Eş. 3.75 den

$$\lambda^k \left(\int_{t_1}^{t} g(s)\,ds \right)^k \leq F^k(t) \leq y^k(t)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliği $F'(t)$ ile çarpıp y^2 ye bölersek

$$\lambda^k \left(\int_{t_1}^{t} g(s)\,ds \right)^k \left[\lambda g(t) + \frac{g(t)\,y^2(t)}{\int_{t_1}^{t} a(s)\rho(s)g^2(s)\,ds} \right] \leq F^k(t)F'(t) \leq y^k(t)F'(t)$$

$$\lambda^k \left(\int_{t_1}^{t} g(s)\,ds \right)^k g(t) \left(\int_{t_1}^{t} a(s)\rho(s)g^2(s)\,ds \right)^{-1} \leq \frac{F^k(t)F'(t)}{y^2} \leq y^{k-2}F'(t)$$

$$F^{k-2}F'(t) \geq \frac{F^k(t)F'(t)}{y^2} \geq \lambda^k g(t) \left(\int_{t_1}^{t} g(s)\,ds \right)^k \left(\int_{t_1}^{t} a(s)\rho(s)g^2(s)\,ds \right)^{-1}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği $t \geq t_2$ den z ye integralleyip $z \to \infty$ alırsak $k \in [0,1)$ için

$$\int_{t}^{z} F^{k-2}(s)F'(s)\,ds \geq \lambda^k \int_{t}^{z} g(s) \left(\int_{t_1}^{s} g(u)\,du \right)^k \left(\int_{t_1}^{s} a(u)\rho(u)g^2(u)\,du \right)^{-1} ds$$

$$\frac{F^{k-1}}{k-1} \geq \lambda^k \left[G_k(\infty) - G_k(t) \right]$$

$$F^{k-1} \geq (1-k)\lambda^k \left[G_k(\infty) - G_k(t) \right]$$

buluruz. Bu eşitsizlik ile Eş. 3.75 den elde ettiğimiz

$$F^{1-k}(t) \geq \lambda^{1-k} \left(\int_{t_1}^{t} g(s)\,ds \right)^{1-k}$$

eşitsizliğini taraf tarafa çarparsak

$$\frac{1}{\lambda} \geq (1-k)\left(\int_{t_1}^{t} g(s)\,ds\right)^{1-k}\left[G_k(\infty)-G_k(t)\right]$$

elde ederiz. Buradan

$$\frac{1}{\lambda} \geq (1-k)\limsup\left(\int_{t_1}^{t} g(s)\,ds\right)^{1-k}\left[G_k(\infty)-G_k(t)\right]$$

olur. Bu Eş. 3.71 ile çelişir. Bu da ispatı tamamlar.

3.4. Lemma:

Eğer Eş. 3.64, Eş. 3.67 yi sağlayan bir $v(t)$ çözümüne sahipse o zaman her $g(t)\in\Omega_0=\Omega_0(g)$ için $\lim\limits_{t\to\infty} A_g(\cdot,t)$ vardır ve

$$\lim_{t\to\infty} A_g(\tau,t) = v(\tau) - \int_{\tau}^{\infty} \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}\,ds \tag{3.76}$$

dir.

İspat:

Lemma 3.3 deki gibi Eş. 3.69 u buluruz ve bu

$$\int_{\tau}^{t} g(s)v(s)\,ds = \left[v(\tau)-A_g(\tau,t)\right]\left(\int_{\tau}^{t} g(s)\,ds\right) - \int_{\tau}^{t} g(s)\int_{\tau}^{s} \frac{v^2(u)}{a(u)\rho(u)}\,du\,ds$$

$$A(\tau,t)=v(\tau)-\frac{\int_\tau^t g(s)v(s)ds}{\int_\tau^t g(s)ds}-\frac{\int_\tau^t g(s)\int_\tau^s \frac{v^2(u)}{a(u)\rho(u)}duds}{\int_\tau^t g(s)ds} \tag{3.77}$$

olduğunu gösterir. $g\in\Omega_0$ olduğundan $\int^\infty g(s)ds=\infty$ sağlanır. Böylece

$$0\le\lim_{t\to\infty}\frac{\int_\tau^t g(s)\int_\tau^s \frac{v^2(u)}{a(u)\rho(u)}duds}{\int_\tau^t g(s)ds}<\infty$$

sonucu çıkar. Daha sonra Schwartzs eşitsizliği ile

$$0\le\lim_{t\to\infty}\frac{\left|\int_\tau^t g(s)v(s)ds\right|}{\int_\tau^t g(s)ds}\le\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\int_\tau^t a(s)\rho(s)g^2(s)ds\right)^{1/2}\left(\int_\tau^t \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds\right)^{1/2}}{\int_\tau^t g(s)ds}=0$$

buluruz. Böylece Eş. 3.77 den $\lim_{t\to\infty}A_g(\tau,t)$ vardır ve

$$\lim_{t\to\infty}A(\tau,t)=\lim_{t\to\infty}v(\tau)-\lim_{t\to\infty}\frac{\int_\tau^t g(s)v(s)ds}{\int_\tau^t g(s)ds}-\lim_{t\to\infty}\frac{\int_\tau^t g(s)\int_\tau^s \frac{v^2(u)}{a(u)\rho(u)}duds}{\int_\tau^t g(s)ds}$$

$$\lim_{x\to\infty}A_g(\tau,t)=v(\tau)-\int_\tau^\infty \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds$$

sağlanır.

Lemma 3.3 ve 3.4 den aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.15. Teorem:

Eğer

$$-\infty < \liminf_{t\to\infty} A_g(\cdot,t) < \limsup_{t\to\infty} A_g(\cdot,t) \le \infty \tag{3.78}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $g(t)\in\Omega_0$ fonksiyonu varsa, Eş. 3.1 salınımlıdır.

3.16. Teorem:

Eğer bazı $k\in[0,1]$ ler için

$$\lim_{t\to\infty} G_k(t) = \infty$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} A_g(\cdot,t) = \infty$$

sağlayan $\rho(t)\in C^2([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$ ve $g(t)\in\Omega$ fonksiyonları varsa, Eş. 3.1 salınımlıdır [11].

3.6. Örnek:

$c>0$ ile

$$x''(t)+\left[\frac{1}{4t^2}+\frac{c}{(t\ln t)^2}\right]x(t)=0 \tag{3.79}$$

diferensiyel denklemini ele alalım $\rho(t)=t\ln t$ ise $t\geq T>1$ için

$$h(t)=-\frac{\rho'(t)}{2\rho(t)}=-\frac{\ln t+t\frac{1}{t}}{2t\ln t}=-\frac{1}{2t}-\frac{1}{2t\ln t}$$

$$h'(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^2\ln t}+\frac{1}{t^2\ln^2 t}\right)$$

ve

$$\begin{aligned}
Q(t)&=\rho(t)\left[q(t)+a(t)h^2(t)-\left(a(t)h(t)\right)'\right]\\
&=\rho(t)\left[q(t)+h^2(t)-h'(t)\right]\\
&=t\ln t\left[\frac{1}{4t^2}+\frac{c}{(t\ln t)^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t\ln t}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^2\ln t}+\frac{1}{(t\ln t)^2}\right)\right]\\
&=t\ln t\left(\frac{4c-1}{4(t\ln t)^2}\right)=\frac{4c-1}{4t\ln t}
\end{aligned}$$

elde ederiz. $t\geq T$ için $g(t)=\dfrac{1}{t\ln t}$ alalım. O zaman

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}G_k(t)&=\lim_{t\to\infty}\int_T^t\frac{g(s)\left(\int_T^s g(u)\,du\right)^k}{\int_T^s a(u)\rho(u)g^2(u)\,du}\,ds\\
&=\lim_{t\to\infty}\int_T^t\frac{\frac{1}{s\ln s}\left(\int_T^s\frac{1}{u\ln u}\,du\right)^k}{\int_T^s u\ln u\frac{1}{u^2\ln^2 u}\,du}\,ds\\
&=\lim_{t\to\infty}\int_T^t\frac{\frac{1}{s\ln s}\left(\ln\ln s-\ln\ln T\right)^k}{\left(\ln\ln s-\ln\ln T\right)}\,ds
\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to\infty} G_k\left(t\right) = \lim_{t\to\infty} \int_T^t \frac{\left(\ln\ln s - \ln\ln T\right)^{k-1}}{s\ln s} ds$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(\ln\ln t - \ln\ln T\right) = \infty$$

ve yeterince büyük bir $T > 1$ için $c > \frac{1}{4}$ iken

$$\lim_{t\to\infty} A_g\left(T,t\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_T^t g\left(s\right)\int_\tau^s Q\left(u\right) duds}{\int_T^t g\left(s\right) ds}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{4c-1}{4} \frac{\int_T^t \left(s\ln s\right)^{-1}\int_T^s \left(u\ln u\right)^{-1} duds}{\int_T^t \left(s\ln s\right)^{-1} ds}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{4c-1}{4} \int_T^t \frac{1}{s\ln s} ds$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{4c-1}{4}\left[\ln\ln t - \ln\ln T\right]$$

elde ederiz. Buradan $t \to \infty$ iken $A_g\left(T,t\right) \to \infty$ olur. Dolayısıyla $c > \frac{1}{4}$ için Eş. 3.79 daki diferensiyel denklem, Teorem 3.16 ya göre salınımlıdır.

3.7. Uyarı:

Teorem 3.14, Teorem 3.15 in bir uygulamasıdır. $g\left(t\right) = 1$ alırsak Eş. 3.56 ve Eş. 3.57 den $g\left(t\right) \in \Omega_0$ ve $\lim_{t\to\infty} A_g\left(\cdot,t\right)$ nin olmadığı sonucu çıkar. Dolayısıyla Teorem 3.14 e göre Eş. 3.1 salınımlıdır.

Ayrıca Teorem 3.15 e uygulama olarak şu sonuçları verelim.

3.6. Sonuç:

$k(t)\in C^1\left(\left[t_0,\infty\right),\mathbb{R}^+\right)$ olmak üzere $k'(t)=1/\left(a(t)\rho(t)\right)$ ve $\lim_{t\to\infty}k(t)=\infty$ olsun. Eğer

$$-\infty<\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{k(t)}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\frac{Q(u)}{a(u)\rho(u)}duds<\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{k(t)}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\frac{Q(u)}{a(u)\rho(u)}duds\leq\infty \tag{3.80}$$

ise, Eş. 3.1 salınımlıdır.

İspat:

$g(t)=1/\left(a(t)\rho(t)\right)=k'(t)$ alalım Eş. 3.80 den $g(t)\in\Omega_0$ ve $\lim_{t\to\infty}A_g(\cdot,t)$ nin mevcut olmadığı sonucu çıkar. Dolayısıyla Teorem 3.15 e göre Eş. 3.1 salınımlıdır.

3.7. Sonuç:

$T\geq t_0$ için $\left[T,\infty\right)$ üzerinde tanımlı öyle $g_1(t)$ ve $g_2(t)$ negatif olmayan sınırlı fonksiyonları var olsun ki

$$\int^{\infty}g_1(s)ds=\infty=\int^{\infty}g_2(s)ds$$

sağlansın ve $a(t)\rho(t)g_1(t)$ ile $a(t)\rho(t)g_2(t)$ fonksiyonları sınırlı olsunlar. Eğer

$$\lim_{t\to\infty}A_{g_1}(T,t)<\lim_{t\to\infty}A_{g_2}(T,t)$$

ise, Eş. 3.1 salınımlıdır.

İspat:

α_1 ve α_2

$$\lim_{t\to\infty} A_{g_1}(T,t) < \alpha_1 < \alpha_2 < \lim_{t\to\infty} A_{g_2}(T,t)$$

eşitsizliğini sağlayan iki sayı olsun. t_1, $A_r(T,t_1) > \alpha_2$ ve $\int_T^{t_1} r(s)\,ds \geq 1$ ifadelerinde geçen t_1 olmak üzere, $T \leq t < t_1$ için $r(t) = g_2(t)$ olsun. t_2, $A_r(T,t_2) \leq \alpha_1$ ve $\int_T^{t_2} r(s)\,ds > 2$ ifadelerinde geçen t_2 olmak üzere, $t_1 \leq t < t_2$ için $r(t) = g_1(t)$ olsun. Bu durumda

$$A_r(T,t_2) = \frac{\int_T^{t_2} r(s)\int_T^{s} Q(u)\,duds}{\int_T^{t_2} r(s)\,ds}$$

$$= \frac{\int_T^{t_2} g_1(s)\int_T^{s} Q(u)\,duds\int_T^{t_2} g_1(s)\,ds}{\left(\int_T^{t_1} g_2(s)\,ds + \int_{t_1}^{t_2} g_1(s)\,ds\right)\int_T^{t_2} g_1(s)\,ds} + \frac{\int_T^{t_1}\left[g_2(s) - g_1(s)\right]\int_T^{s} Q(u)\,du}{\int_T^{t_1} g_2(s)\,ds + \int_{t_1}^{t_2} g_1(s)\,ds}$$

$$= \left(\frac{\int_T^{t_2} g_1(s)\int_T^{s} Q(u)\,duds}{\int_T^{t_2} g_1(s)\,ds}\right)\left(\frac{\int_T^{t_2} g_1(s)\,ds}{\int_T^{t_1} g_2(s)\,ds + \int_{t_1}^{t_2} g_1(s)\,ds}\right) + \frac{\int_T^{t_1}\left[g_2(s) - g_1(s)\right]\int_T^{s} Q(u)\,duds}{\int_T^{t_1} g_2(s)\,ds + \int_{t_1}^{t_2} g_1(s)\,ds}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $t \to \infty$ iken

$$A_r(T,t_2) = A_{g_1}(T,t_2)\left[1 + o(1)\right] + o(1)$$

dır. Bu şekilde devam edersek, $[T,\infty)$ üzerinde tanımlanan

$$\liminf_{t\to\infty} A_r(T,t) \le \alpha_1 < \alpha_2 \le \limsup_{t\to\infty} A_r(T,t)$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_T^t a(s)\rho(s)r^2(s)\,ds}{\left(\int_T^t r(s)\,ds\right)^2} = 0$$

sağlayan negatif olmayan integrallenemeyen ve sınırlı bir $r(t)$ fonksiyonu elde ederiz. Bu $r(t)\in\Omega_0$ ve $\lim_{t\to\infty} A_r(T,t)$ nin olmadığını gösterir. Dolayısıyla Teorem 3.15 e göre Eş. 3.1 salınımlıdır.

3.8. Uyarı:

Yukarıda verilen sonuçlardan ve Teorem 3.3 den Teorem 3.13-3.16 nın her birinin hipotezindeki $Q(t)$ fonksiyonunun yerine Eş. 3.7 de tanımlanan $Q^*(t)$ nin yazılabileceği sonucu çıkar.

3.7. Örnek:

$t \ge t_0 \ge \dfrac{\pi}{2}$ için

$$\left(t^2 x'(t)\right)' - 3tx'(t) + \frac{1}{2}t^2\sqrt{t}\left(2+\cos t - 2t\sin t\right) f\left(x(t)\right) = 0 \qquad (3.81)$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Burada $f(x)$ fonksiyonu

(i) $x \in \mathbb{R}$ ve *m* pozitif bir sabit olmak üzere $f(x) = mx$

(ii) $x \in \mathbb{R}$ ve m, γ pozitif sabitler olmak üzere $f(x) = |x|^{\gamma} + mx$

(iii) $x \in \mathbb{R}$ ve $\mu > 1$ bir sabit olmak üzere $f(x) = x \ln^2(\mu + |x|)$

(iv) $x \in \mathbb{R}$ ve $\lambda > 0$ bir sabit olmak üzere $f(x) = x \exp(\lambda x)$

(v) $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = \sinh x$

fonksiyonlarından biridir.

$t \geq \dfrac{\pi}{2}$ olmak üzere $\rho(t) = \dfrac{1}{t^3}$ ve $g(t) = t$ alalım. O zaman

$$h^*(t) = \frac{p(t)\rho(t) - a(t)\rho'(t)}{2ka(t)\rho(t)} = \frac{-3t\dfrac{1}{t^3} - t^2\left(-\dfrac{3}{t^4}\right)}{2ka(t)\rho(t)} = 0$$

ve

$$Q^*(t) = \rho(t)\left[q(t) + ka(t)h^{*2}(t) - \left(a(t)h^*(t)\right)' - \left(p(t)h^*(t)\right)\right] = \rho(t)q(t)$$

$$Q^*(t) = \frac{1}{t^3}\frac{1}{2}t^2\sqrt{t}\left(2 + \cos t - 2t\sin t\right) = \frac{\left(2 + \cos t - 2t\sin t\right)}{2\sqrt{t}}$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t} \rho(s)q(s)\,ds &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \left[\sqrt{s}\sin s + \frac{1}{2\sqrt{s}}\left(2 + \cos s\right)\right] ds \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} d\left[\sqrt{s}\left(2 + \cos s\right)\right] \\
&= \sqrt{t}\left(2 + \cos t\right) - 2\left(\pi/2\right)^{1/2} \geq \sqrt{t} - 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

ve $t \to \infty$ iken

$$A_g(t_0,t) = \frac{1}{\int_{t_0}^{t} g(s)\,ds} \int_{t_0}^{t} g(s)\left(\int_{t_0}^{s} \rho(u)q(u)\,du\right)ds$$

$$= \frac{2}{t^2-(\pi/2)^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} s\left[\sqrt{s}\,(2+\cos s) - 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\right]ds$$

$$\geq \frac{1}{t^2-(\pi/2)^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \left[s\sqrt{s} - 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} s\right]ds \to \infty$$

elde ederiz. Dolayısıyla Q fonksiyonunun Q^* ile yer değiştirilmesiyle Teorem 3.16 nın tüm şartları sağlanmış olur. Böylece Eş. 3.80 in salınımlı olduğu sonucuna ulaşırız.

Teorem 3.13-3.16 da $\int^{\infty} \frac{ds}{a(s)} = \infty$ şartının gerekli olmadığını belirtebiliriz. Ayrıca Eş. 3.41 her $n > 1$ sabiti için

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^n} \int_{t_0}^{t} (t-s)^n q(s)\,ds = \infty \tag{3.82}$$

olduğunu gösteren

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} (t-s)\; q(s)\,ds = \infty \tag{3.83}$$

ile denk olduğunu da söyleyebiliriz.

Eş. 3.83 deki limit, bir üst sınır tarafından değiştirilemez.

Şimdi $q(t) \in C([t_0,\infty),\mathbb{R})$ olmak üzere

$$x''(t)+q(t)x(t)=0 \tag{3.84}$$

lineer diferensiyel denklemi için aşağıdaki salınım kriterlerini vereceğiz.

3.17. Teorem:

Uygun $n>1$ tamsayısı için

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^n}\int_{t_0}^{t}(t-s)^n\, q(s)\,ds=\infty$$

ise Eş. 3.84 salınımlıdır.

3.18. Teorem:

Uygun $n>1$ için

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^n}\int_{t_0}^{t}(t-s)^n\, q(s)\,ds<\infty$$

olsun. $t\geq t_0$ için $\Omega^{+}(t)=\max\{\Omega(t),0\}$ olmak üzere her $T\geq t_0$ için

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t^n}\int_{T}^{t}(t-s)^n\, q(s)\,ds\geq\Omega(T)$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(\Omega^{+}(s)\right)^2 ds = \infty$$

olan bir $\Omega(t) \in C\left(\left[t_0, \infty\right), \mathbb{R}\right)$ fonksiyonu varsa Eş. 3.84 salınımlıdır.

Teorem 3.17 nin bir genişlemesi aşağıdaki gibidir.

3.19. Teorem:

$\mathrm{H} : D = \left\{(t,s) : t \geq s \geq t_0\right\} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$t \geq t_0 \text{ için } H(t,t) = 0, \; t > s \geq t_0 \text{ için } H(t,s) > 0 \tag{3.85}$$

ve ikinci değişkene göre D de sürekli ve negatif olmayan bir kısmi türeve sahip sürekli bir fonksiyon olsun. $h : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, bütün $(t,s) \in D$ için

$$-\frac{\partial}{\partial s} H(t,s) = h(t,s)\sqrt{H(t,s)} \tag{3.86}$$

özelliğine sahip sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s) q(s) - \frac{1}{4} h^2(t,s) \right] ds = \infty$$

ise Eş. 3.84 salınımlıdır.

3.9. Uyarı:

Eş. 3.84 için Teorem 3.17-3.19 da verilen salınım kriterleri, çok kısıtlı uygulamaya sahiptir. Hatta, bu kriterler

$$x''(t)+\frac{c}{t^2}x(t)=0$$

Euler denkleminin salınım kriterlerini anlamak için yetersizdir. Bu kriterler, Lemma 3.2 uygulanarak Eş. 3.1 e oldukça kolay genişletilebilir. Bunun için ihtiyacımız olan yalnızca $\rho(t)\in C^1\left([t_0,\infty),\mathbb{R}^+\right)$ olduğunu varsaymak ve $a(t)$ fonksiyonu yerine $a(t)\rho(t)$ fonksiyonunu $q(t)$ fonksiyonu yerine $h(t)=-\rho'(t)/\left(2\rho(t)\right)$ olmak üzere

$$Q(t)=\rho(t)\left[q(t)+a(t)h^2(t)-\left(a(t)h(t)\right)'\right]$$

fonksiyonunu yazmaktır.

Ayrıca, Eş. 3.5 in daha genel denklemlerine bu kriterlerin genişletilmesi ve ilerletilmesi Teorem 3.3 uygulanarak mümkündür. Bunun için $\rho(t)\in C^1\left([t_0,\infty),\mathbb{R}^+\right)$ alalım ve $a(t)$ fonksiyonu yerine $a(t)\rho(t)$ fonksiyonunu $q(t)$ fonksiyonu yerine $Q^*(t)=\rho(t)\left[q(t)+a(t)h^{*2}(t)-\left(a(t)h^*(t)\right)'\right]$, $h^*(t)=\left(p(t)\rho(t)-a(t)\rho'(t)/\left(2ka(t)\rho(t)\right)\right)$ ve k sabiti (i_2) deki gibi yani $x\neq 0$ için $f'(x)\geq k>0$ olmak üzere $kQ^*(t)$ fonksiyonunu yazalım.

Aşağıdaki sonuçta, Eş. 3.1 e Teorem 3.19 u genişletelim.

3.20. Teorem:

H ve *h* Teorem 3.19 daki gibi olmak üzere Eş. 3.85 ve Eş. 3.86 sağlansın. Eğer

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left[H(t,s)q(s)-\frac{1}{4}h^2(t,s)a(s)\right]ds=\infty \tag{3.87}$$

ise Eş. 3.1 salınımlıdır.

İspat:

$x(t)$, Eş. 3.1 in salınımsız bir çözümü olsun ve $t \geq T_0$ için $x(t) \neq 0$ olan $T_0 \geq t_0$ var olsun. $t \geq T_0$ için

$$v(t) = \frac{a(t)x'(t)}{x(t)}$$

tanımlayalım. O zaman Eş. 3.1 den $t \geq T_0$ için $q(t) = -v'(t) - \left(v^2(t)/a(t)\right)$ olduğu anlaşılır. Buradan $t \geq T \geq T_0$ ile her t, T için

$$\int_T^t H(t,s)q(s)ds = \int_T^t H(t,s)\left[-v'(s) - \left(v^2(s)/a(s)\right)\right]ds$$

$$\int_T^t H(t,s)q(s)ds = -\int_T^t H(t,s)v'(s)ds - \int_T^t H(t,s)\frac{v^2(s)}{a(s)}ds$$

buluruz. Green Teoreminden

$$\int_T^t H(t,s)q(s)ds = H(t,T)v(T) - \int_T^t \left[-\frac{\partial}{\partial s}H(t,s)v(s) + H(t,s)\frac{v^2(s)}{a(s)}\right]ds$$

elde ederiz. Buradan da

$$\int_T^t H(t,s)q(s)ds = H(t,T)v(T) - \int_T^t \left[h(t,s)\sqrt{H(t,s)}v(s) + H(t,s)\frac{v^2(s)}{a(s)}\right]ds$$

$$\int_T^t H(t,s)q(s)ds = H(t,T)v(T) - \int_T^t \left[\left(\frac{H(t,s)}{a(s)} \right)^{1/2} v(s) + \frac{1}{2}\sqrt{a(s)}h(t,s) \right]^2 ds$$
$$+\frac{1}{4}\int_T^t h^2(t,s)a(s)ds$$

buluruz. Böylece her $t \geq T_0$ için

$$\int_{T_0}^t \left[H(t,s)q(s) - \frac{1}{4}h^2(t,s)a(s) \right] ds \leq H(t,T_0)v(T_0)$$
$$\leq H(t,T_0)|v(T_0)| \leq H(t,t_0)|v(T_0)|$$

elde ederiz. Buradan her $t \geq T_0$ için

$$\int_{t_0}^t \left[H(t,s)q(s) - \frac{1}{4}h^2(t,s)a(s) \right] ds = \int_{t_0}^{T_0} \left[H(t,s)q(s) - \frac{1}{4}h^2(t,s)a(s) \right] ds$$
$$+\int_{T_0}^t \left[H(t,s)q(s) - \frac{1}{4}h^2(t,s)a(s) \right] ds$$

$$\int_{t_0}^t \left[H(t,s)q(s) - \frac{1}{4}h^2(t,s)a(s) \right] ds \leq \int_{t_0}^{T_0} H(t,s)|q(s)|ds + H(t,t_0)|v(T_0)|$$
$$\leq H(t,t_0)\left[\int_{t_0}^{T_0} |q(s)|ds + |v(T_0)| \right]$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Bu da bize Eş. 3.87 ile çelişen

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^t \left[H(t,s)q(s) - \frac{1}{4}h^2(t,s)a(s) \right] ds \leq |v(T_0)| + \int_{t_0}^{T_0} |q(s)|ds$$

sonucunu verir.

Şimdi Uyarı 3.9 u göz önünde bulundurarak aşağıdaki daha genel sonuçları verelim.

3.21. Teorem:

$Q(t)$, Eş. 3.11 de tanımlandığı gibi olmak üzere H,h Teorem 3.19 daki gibi olsunlar ve

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)Q(s) - \frac{1}{4} h^2(t,s)a(s)\rho(s) \right] ds = \infty \tag{3.88}$$

sağlayan bir $\rho(t) \in C^1\left(\left[t_0,\infty\right),\mathbb{R}^+\right)$ fonksiyonu var olsun. Bu durumda Eş. 3.1 salınımlıdır.

3.22. Teorem:

Q^* ve k Uyarı 3.9 da tanımlandığı gibi olmak üzere H,h Teorem 3.19 daki gibi olsun ve

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} \left[H(t,s)Q^*(s) - \frac{1}{4k} h^2(t,s)a(s)\rho(s) \right] ds = \infty \tag{3.89}$$

sağlayan bir $\rho(t) \in C^1\left(\left[t_0,\infty\right),\mathbb{R}^+\right)$ fonksiyonu var olsun. Bu durumda Eş. 3.1 salınımlıdır.

3.8. Sonuç:

$R(t) = \int_{t_0}^{t} ds/a(s)$ olsun. bazı $n > 1$ için

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{R^n(t)}\int_{t_0}^{t}\left(R(t)-R(s)\right)^{n-2}\left[\left(R(t)-R(s)\right)^{n-2}Q^*(s)-\frac{n^2}{4k}\frac{\rho(s)}{4ka(s)}\right]ds=\infty \quad (3.90)$$

limitini sağlayan bir $\rho(t)\in C^1\left([t_0,\infty),\mathbb{R}^+\right)$ fonksiyonu varsa Eş. 3.5 salınımlıdır.

İspat:

$t\geq s\geq t_0$ için $H(t,s)=\left(R(t)-R(s)\right)^n$ olsun. O zaman $t\geq s\geq t_0$ için

$$h(t,s)=\frac{-\frac{\partial}{\partial s}H(t,s)}{\sqrt{H(t,s)}}=\frac{-\frac{\partial}{\partial s}\left(R(t)-R(s)\right)^n}{\left(R(t)-R(s)\right)^{n/2}}=\frac{-n\left(R(t)-R(s)\right)^{n-1}\left(R(t)-R(s)\right)'}{\left(R(t)-R(s)\right)^{n/2}}$$
$$=\frac{n}{a(s)}\left(R(t)-R(s)\right)^{(n-2)/2}$$

buluruz ve bu

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left[H(t,s)Q^*(s)-\frac{1}{4k}a(s)\rho(s)h^2(t,s)\right]ds$$
$$=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{\left(R(t)-R(t_0)\right)^n}\int_{t_0}^{t}\left[\left(R(t)-R(s)\right)^nQ^*(s)-\frac{1}{4k}a(s)\rho(s)\frac{n^2}{a^2(s)}\left(R(t)-R(s)\right)^{n-2}\right]ds$$

$$=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{R^n(t)}\int_{t_0}^{t}\left[\left(R(t)-R(s)\right)^nQ^*(s)-\frac{n^2}{4k}\cdot\frac{\rho(s)}{a(s)}\left(R(t)-R(s)\right)^{n-2}\right]ds$$
$$=\infty$$

olduğunu gösterir. Buradan Teorem 3.22 den Eş. 3.5 in salınımlı olduğu sonucunu çıkartabiliriz.

$\rho(t)=1$ ise $t\geq t_0$ için

$$\int_{t_0}^{t} a(s)\rho(s)h^2(t,s)ds = \int_{t_0}^{t} n^2 \frac{\rho(s)}{a(s)}\left(R(t)-R(s)\right)^{n-2} ds$$

$$= n^2 \left. \frac{\left(R(t)-R(s)\right)^{n-1}}{n-1} \right|_{t_0}^{t}$$

$$= \frac{n^2}{n-1}\left(R(t)-R(t_0)\right)^{n-1}$$

elde ederiz. Buradan kolayca aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.9. Sonuç:

Bazı $n>1$ için

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{R^n(t)} \int_{t_0}^{t} \left(R(t)-R(s)\right)^n Q^*(s)ds = \infty \tag{3.91}$$

ise, Eş. 3.5 salınımlıdır.

3.10. Uyarı:

Eş. 3.1 için Eş. 3.91 şartı bazı $n>1$ için

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{R^n(t)} \int_{t_0}^{t} \left(R(t)-R(s)\right)^n q(s)ds$$

şartına indirgenir.

3.10. Sonuç:

$t \geq t_0$, $R_1(t) = \int_t^{\infty} ds/a(s) < \infty$ olsun. Eğer bazı $n>1$ için

$$\limsup_{t\to\infty}\left(-\ln R_1(t)\right)^{-n}\int_{t_0}^{t}\left(\ln\left(\frac{R_1(s)}{R_1(t)}\right)\right)^{n}\left[R_1(s)Q(s)-\frac{1}{4a(s)R_1(s)}\right]ds=\infty \tag{3.92}$$

ise, o zaman Eş. 3.1 salınımlıdır.

İspat:

$t\geq t_0$ için $\rho(t)=R_1(t)$ ve $t\geq s\geq t_0$ için $H(t,s)=\left(\ln\left(R_1(s)/R_1(t)\right)\right)^n$ olsun. O zaman

$$h(t)=-\rho'(t)/2\rho(t)=\frac{\frac{1}{a(t)}}{2R_1(t)}=\frac{1}{2a(t)R_1(t)}$$

$$\begin{aligned}
Q(t)&=\rho(t)\left[q(t)+a(t)h^2(t)-\left(a(t)h(t)\right)'\right]\\
&=R_1(t)\left[q(t)+a(t)\frac{1}{4a^2(t)R_1^2(t)}-\left(a(t)\frac{1}{2a(t)R_1(t)}\right)'\right]\\
&=R_1(t)q(t)+\frac{R_1(t)}{4a(t)R_1^2(t)}-\left(\frac{1}{2R_1(t)}\right)'R_1(t)\\
&=R_1(t)q(t)+\frac{1}{4a(t)R_1(t)}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1(t)}\right)'R_1(t)\\
&=R_1(t)q(t)+\frac{1}{4a(t)R_1(t)}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a(t)R_1(t)}\right)\\
&=q(t)R_1(t)-\frac{1}{4a(t)R_1(t)}
\end{aligned}$$

ve $t\geq s\geq t_0$ için

$$h(t,s)=\frac{-\frac{\partial}{\partial s}H(t,s)}{\sqrt{H(t,s)}}=\frac{-\frac{\partial}{\partial s}\left(\ln\left(R_1(s)/R_1(t)\right)\right)^n}{\left(\ln\left(R_1(s)/R_1(t)\right)\right)^{n/2}}=\frac{-n\left(\ln\left(\frac{R_1(s)}{R_1(t)}\right)\right)^{n-1}\frac{R_1'(s)}{R_1(t)}}{\left(\ln\left(\frac{R_1(s)}{R_1(t)}\right)\right)^{n/2}}$$

$$h(t,s)=\frac{n}{a(s)R_1(s)}\left(\ln\left(\frac{R_1(s)}{R_1(t)}\right)\right)^{(n-2)/2}$$

buluruz. Böylece $t\geq t_0$ için

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t}a(s)\rho(s)h^2(t,s)ds&=\int_{t_0}^{t}a(s)R_1(s)\frac{n^2}{a^2(s)R_1^2(s)}\left(\ln\frac{R_1(s)}{R_1(t)}\right)^{n-2}ds\\&=\int_{t_0}^{t}\frac{n^2}{a(s)R_1(s)}\left(\ln\frac{R_1(s)}{R_1(t)}\right)^{n-2}ds\\&=\frac{n^2}{n-1}\left(\ln\frac{R_1(s)}{R_1(t)}\right)^{n-1}\Bigg|_{t_0}^{t}\end{aligned}$$

$$\int_{t_0}^{t}a(s)\rho(s)h^2(t,s)ds=\frac{n^2}{n-1}\left(\ln\frac{R_1(t_0)}{R_1(t)}\right)^{n-1}<\infty$$

kolayca gösterilebilir ki Eş. 3.48 den Eş. 3.92 ortaya çıkar. Böylece Eş. 3.1 salınımlıdır.

Şimdi de $n>1$ in bir sabit olmak üzere $t\geq s\geq t_0$ için

$$H(t,s)=(t-s)^n$$

alalım. Teorem 3.22 den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.11. Sonuç:

Eğer $n>1$ bir sabit olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^n}\int_{t_0}^{t}\left[(t-s)^2 Q^*(s)-\frac{n^2}{4k}a(s)\rho(s)\right]ds=\infty$$

limitini sağlayan bir $\rho(t)\in C^1\left([t_0,\infty),\mathbb{R}^+\right)$ fonksiyonu var ise Eş. 3.5 salınımlıdır.

3.8. Örnek:

$c>0$ bir sabit ve $f(x)$, $x\neq 0$ için $f'(x)\geq k>0$ ile Örnek 3.7 deki gibi olmak üzere $t\geq t_0\geq 1$ için

$$\left(t^2x'(t)\right)'-tx'(t)+cf\left(x(t)\right)=0 \tag{3.93}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. $t\geq 1$ için $\rho(t)=\frac{1}{t}$ ve $n>1$ olan bir sayı olsun. O zaman

$$a(t)\rho'(t)-p(t)\rho(t)=t^2\left(-\frac{1}{t^2}\right)+t\frac{1}{t}=0$$

buluruz. Buradan $t\geq 1$ için

$$h^*(t)=\frac{p(t)\rho(t)-a(t)\rho'(t)}{2ka(t)\rho(t)}=0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}Q^*(t) &= \rho(t)\left[q(t)+ka(t)h^{*2}(t)-\left(a(t)h^*(t)\right)'-\left(p(t)h^*(t)\right)\right]\\ &= \rho(t)q(t)\\ &= \frac{1}{t}c\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^n}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-2}\left[(t-s)^2Q^*(s)-\frac{n^2}{4k}a(s)\rho(s)\right]ds\\ &=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^n}\int_{t_0}^{t}\left[(t-s)^nQ^*(s)-\frac{n^2}{4k}a(s)\rho(s)(t-s)^{n-2}\right]ds\\ &=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^n}\int_{1}^{t}\left[(t-s)^n\left(\frac{c}{s}\right)-\frac{n^2}{4k}s^2\frac{1}{s}(t-s)^{n-2}\right]ds\\ &=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^n}\int_{1}^{t}\left[(t-s)^n\left(\frac{c}{s}\right)-\frac{n^2}{4k}(t-s)^{n-2}s\right]ds\end{aligned}$$

dir. $n>1$ olduğundan [12] den $t\geq s\geq 1$ için $(t-s)^n\geq t^n-nst^{n-1}$ olduğu sonucu çıkar. Buradan

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to\infty}\frac{c}{t^n}\int_{1}^{t}\frac{1}{s}(t-s)^n\,ds &\geq c\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^n}\int_{1}^{t}\frac{t^n-nst^{n-1}}{s}ds\\ &= c\limsup_{t\to\infty}\left[\ln t-\frac{1}{t}n(t-1)\right]=\infty\end{aligned}$$

buluruz. Ayrıca

$$\frac{n^2}{4}\int_{1}^{t}s(t-s)^{n-2}\,ds=\frac{n^2}{4}\left(s\frac{(t-s)^{n-1}}{n-1}\Bigg|_1^t-\frac{1}{(n-1)}\int_{1}^{t}(t-s)^{n-1}\,ds\right)$$

$$\frac{n^2}{4}\int_1^t s(t-s)^{n-2}\,ds = \frac{n^2}{4(n-1)}(t-1)^{n-1} + \left.\frac{n^2(t-s)^n}{4n(n-1)}\right|_1^t$$
$$= \frac{n^2}{4(n-1)}(t-1)^{n-1} + \frac{n}{4(n-1)}(t-1)^n < \infty$$

dır. Böylece

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^n}\int_1^t\left[\frac{c}{s}(t-s)^n - \frac{n^2}{4k}s(t-s)^{n-2}\right]ds$$
$$= c\limsup_{t\to\infty}\left[\ln t - \frac{n(t-1)}{t}\right] - \frac{n}{4(n-1)k} = \infty$$

böylece, Sonuç 3.11 den $c>0$ ise Eş. 3.93 ün salınımlı olduğunu söyleyebiliriz.

3.9. Örnek:

$c>0$ bir sabit, $f(x)$ Örnek 3.8 deki gibi olmak üzere

$$\left(tx'(t)\right)' + \frac{c}{t}f\left(x(t)\right) = 0 \qquad t\ge 1 \tag{3.94}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. $\rho(t)=1$ olsun. O zaman $t\ge 1$ için $p(t)\rho(t)-a(t)\rho'(t)=0\cdot 1-t\cdot 0$ olduğundan

$$h^*(t) = \frac{p(t)\rho(t)-a(t)\rho'(t)}{2ka(t)\rho(t)}$$
$$= 0$$
$$Q^*(t) = \rho(t)\left[q(t)+ka(t)h^{*2}(t)-\left(a(t)h^*(t)\right)' - \left(p(t)h^*(t)\right)\right]$$
$$= \frac{c}{t}$$

buluruz. Örnek 3.8 deki gibi devam ettirerek Eş. 3.44 ün $c > 0$ ise Sonuç 3.11 e göre salınımlı olduğunu buluruz.

Teorem 3.17-3.22 de $\int^{\infty} ds/a(s)$ üzerinde hiçbir varsayım yapılmamıştır. Bu yüzden bu kriterlerinin sonuçları aşağıdaki iki durumun ikisi için de aynıdır.

$$(\mathrm{I}) \int^{\infty} ds/a(s) = \infty, \quad (\mathrm{II}) \int^{\infty} ds/a(s) < \infty$$

örnek için Örnek 3.8 ve 3.9 a bakın.

(II) sağlanırsa, o zaman Eş. 3.90 bazı $n > 1$ için aşağıdaki

$$\lim_{t\to\infty}\sup \int_{t_0}^{t} \left(R(t)-R(s)\right)^{n-2} \left[\left(R(t)-R(s)\right)^2 Q^*(t) - \frac{n^2}{4}\frac{\rho(s)}{a(s)}\right] ds = \infty$$

şartına denktir. Ayrıca

$$\lim_{t\to\infty}\inf R_1(t)\int_{t_0}^{t} Q(s)\,ds > \frac{1}{4} \tag{3.95}$$

koşulunun, $n = 2$ ile Eş. 3.92 yi verdiğini göstermek kolaydır. Böylece aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz.

3.12. Sonuç:

Sonuç 3.10 un Eş. 3.92 deki koşulu Eş. 3.95 ile yer değiştirilsin, o zaman Eş. 3.1 salınımlıdır.

3.23. Teorem:

H ve *h*, Teorem 3.19 daki gibi olsun, Eş. 3.85 ve Eş. 3.86 daki koşullar sağlansın ve

$$0 < \inf_{s \geq t_0} \left\{ \liminf_{t \to \infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)} \right\} \leq \infty \tag{3.96}$$

olsun.

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} a(s)\rho(s)h^2(t,s)\,ds < \infty \tag{3.97}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{\left(\Omega^+(s)\right)^2}{a(s)\rho(s)}\,ds = \infty \tag{3.98}$$

koşullarını sağlayan $\rho \in C^1\left([t_0,\infty),\mathbb{R}^+\right)$ ve $\Omega \in C\left([t_0,\infty),\mathbb{R}\right)$ gibi iki fonksiyon var olsun ve *Q*, Eş. 3.11 de tanımlanmış fonksiyon $\Omega^+(t) = \max\{\Omega(t),0\}$ olmak üzere her $T \geq t_0$ için

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_{T}^{t} H(t,s)Q(s) - \frac{1}{4}h^2(t,s)a(s)\rho(s)\,ds \geq \Omega(T) \tag{3.99}$$

olsun, o zaman Eş. 3.1 salınımlıdır.

İspat:

Eş. 3.1 in salınımsız olduğunu varsayalım. $v(t)$ fonksiyonu Teorem 3.5 deki gibi olsun. O zaman $t \geq T_0 \geq t_0$ için

$$v(t)=\frac{a(t)\rho(t)w'(t)}{w(t)}$$

alalım. Bu durumda

$$v'(t)=\frac{\left(a(t)\rho(t)w'(t)\right)'w(t)-a(t)\rho(t)w'(t)w'(t)}{w^2(t)}$$
$$=-\frac{Q(t)w^2(t)}{w^2(t)}-a(t)\rho(t)\left(\frac{w'(t)}{w(t)}\right)^2$$

olur. Dolayısıyla,

$$Q(t)=-v'(t)-\frac{v^2(t)}{a(t)\rho(t)}$$

ya da

$$v'(t)+Q(t)+\frac{v^2(t)}{a(t)\rho(t)}=0$$

elde ederiz. Yukarıdaki eşitliğin iki tarafını $H(t,s)$ ile çarparsak ve Teorem 3.20 deki gibi devam edersek, $t\geq T\geq T_0$ için

$$\int_T^t H(t,s)Q(s)ds=\int_T^t H(t,s)\left[-v'(s)-v^2(s)/a(s)\rho(s)\right]ds$$
$$=-\int_T^t H(t,s)v'(s)-\int_T^t H(t,s)\frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds$$
$$=H(t,T)v(T)-\int_T^t\left[-\frac{\partial}{\partial s}H(t,s)v(s)+H(t,s)\frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}\right]ds$$

$$\int_T^t H(t,s)Q(s)ds = H(t,T)v(T) - \int_T^t \left[h(t,s)\sqrt{H(t,s)} + H(t,s)\frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)} \right] ds$$

$$= H(t,T)v(T) - \int_T^t \left[\left(\frac{H(t,s)}{a(s)\rho(s)} \right)^{1/2} v(s) + \frac{1}{2}\sqrt{a(s)\rho(s)}h(t,s) \right]^2 ds$$

$$+ \frac{1}{4}\int_T^t h^2(t,s)a(s)\rho(s)ds$$

elde ederiz. Eğer her iki tarafı $H(t,T)$ ile bölersek

$$\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t \left[H(t,s)Q(s) - \frac{1}{4}a(s)\rho(s)h^2(t,s) \right] ds$$

$$= v(t) - \frac{1}{H(t,T)}\int_T^t \left[\left(\frac{H(t,s)}{a(s)\rho(s)} \right)^{1/2} v(s) + \frac{1}{2}\sqrt{a(s)\rho(s)}h(t,s) \right]^2 ds$$

buluruz. Buradan her $T \geq T_0$ için

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)}\int_T^t \left[H(t,s)Q(s) - \frac{1}{4}a(s)\rho(s)h^2(t,s) \right] ds$$

$$= v(T) - \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)}\int_T^t \left[\left(\frac{H(t,s)}{a(s)\rho(s)} \right)^{1/2} v(s) + \frac{1}{2}\sqrt{a(s)\rho(s)}h(t,s) \right]^2 ds$$

elde edilir. Böylece Eş. 3.99 a göre her $T \geq T_0$ için

$$v(t) \geq \Omega(T) + \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)}\int_T^t \left[\left(\frac{H(t,s)}{a(s)\rho(s)} \right)^{1/2} v(s) + \frac{1}{2}\sqrt{a(s)\rho(s)}h(t,s) \right]^2 ds$$

elde ederiz. Bu $T \geq T_0$ için

$$v(T) \geq \Omega(T) \tag{3.100}$$

olduğunu ve

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)} \int_T^t \left[\left(\frac{H(t,s)}{a(s)\rho(s)} \right)^{1/2} v(s) + \frac{1}{2}\sqrt{a(s)\rho(s)}\,h(t,s) \right]^2 ds < \infty$$

olduğunu gösterir. Böylece

$$\begin{aligned} &\liminf_{t\to\infty} \left[\frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^t H(t,s) \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)} ds + \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^t h(t,s)\sqrt{H(t,s)}\,v(s)\,ds \right] \\ &\leq \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^t \left[\left(\frac{H(t,s)}{a(s)\rho(s)} \right)^{1/2} v(s) + \frac{1}{2}\sqrt{a(s)\rho(s)}\,h(t,s) \right]^2 ds < \infty \end{aligned} \tag{3.101}$$

yani

$$\liminf_{t\to\infty} \left[U(t) + W(t) \right] < \infty \tag{3.102}$$

olur. Burada $t \geq T_0$ için

$$U(t) = \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^t H(t,s) \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)} ds$$

ve

$$W(t) = \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^t h(t,s)\sqrt{H(t,s)}\,v(s)\,ds$$

dır. Artık

$$\int_{T_0}^{\infty} \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)} ds < \infty \tag{3.103}$$

olduğunu iddia edebiliriz. Bunun için

$$\int_{T_0}^{\infty} \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)} ds = \infty \tag{3.104}$$

olduğunu varsayalım. Eş. 3.96 ya göre pozitif bir η sabiti vardır. Öyle ki

$$\inf_{s \ge t_0} \left\{ \liminf_{t \to \infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)} \right\} > \eta > 0 \tag{3.105}$$

olan pozitif bir η sabiti vardır. μ bir keyfi sabit olsun. O zaman Eş. 3.104 dikkate alındığında her $t \ge T_1$ için

$$\int_{T_0}^{t} \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)} ds \ge \frac{\mu}{\eta}$$

sağlayan bir $T_1 > T_0$ vardır. Bu yüzden $t \ge T_1$ için

$$\begin{aligned}
U(t) &= \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} H(t,s)\, d\left(\int_{T_0}^{s} \frac{v^2(\tau)}{a(\tau)\rho(\tau)} d\tau \right) \\
&= \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_0}^{t} -\frac{\partial}{\partial s} H(t,s) \left(\int_{T_0}^{s} \frac{v^2(\tau)}{a(\tau)\rho(\tau)} d\tau \right) ds \\
&\ge \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_1}^{t} -\frac{\partial}{\partial s} H(t,s) \left(\int_{T_0}^{s} \frac{v^2(\tau)}{a(\tau)\rho(\tau)} d\tau \right) ds \\
&\ge \left(\frac{\mu}{\eta} \right) \frac{1}{H(t,T_0)} \int_{T_1}^{t} -\frac{\partial}{\partial s} H(t,s)\, ds = \left(\frac{\mu}{\eta} \right) \frac{H(t,T_1)}{H(t,T_0)}
\end{aligned}$$

dır. Eş. 3.105 den öyle bir $T_2 \geq T_1$ vardır ki her $t \geq T_2$ için $H(t,T_1)/H(t,t_0) \geq \eta$ sağlanır ki bu da her $t \geq T_2$ için $U(t) > \eta$ olması demektir. μ keyfi bir sabit olduğundan

$$\lim_{t\to\infty} U(t) = \infty \tag{3.106}$$

dir. Daha sonra, (t_0,∞) üzerinde bir $\{t_k\}^{\infty}$ dizisini ele alalım öyle ki

$$\lim_{k\to\infty}\left[U(t_k)+W(t_k)\right] = \liminf_{t\to\infty}\left[U(t)+W(t)\right]$$

ve

$$\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$$

sağlansın.

$$U(t_k)+W(t_k) \leq M \qquad k = 1,2,... \tag{3.107}$$

sağlayan bir *M* sabiti vardır. Eş. 3.106 dan

$$\lim_{k\to\infty} U(t_k) = \infty \tag{3.108}$$

olduğu anlaşılır ve böylece Eş. 3.107,

$$\lim_{k\to\infty} W(t_k) = -\infty \tag{3.109}$$

eşitliğini verir. Eş. 3.106 yı hesaba katarak, Eş. 3.108 den *k* yeterince büyük olmak üzere

$$\frac{U(t_k)}{U(t_k)}+\frac{W(t_k)}{U(t_k)}\leq\frac{M}{U(t_k)}<\frac{1}{2}$$

buluruz. Böylece, Eş. 3.109 ile

$$\lim_{k\to\infty}\frac{W^2(t_k)}{U(t_k)}=\infty \tag{3.110}$$

eşitliğini garantileyen tüm büyük *k* lar için

$$\frac{W(t_k)}{U(t_k)}<-\frac{1}{2}$$

elde edilir. Diğer taraftan Schwart's eşitsizliği ile tüm büyük *k* lar için

$$\begin{aligned}W^2(t_k)&=\left[\frac{1}{H(t_k,T_0)}\int_{T_0}^{t_k}h(t_k,s)\sqrt{H(t_k,s)}v(s)ds\right]^2\\&\leq\left[\frac{1}{H(t_k,T_0)}\int_{T_0}^{t_k}\left(\sqrt{a(s)\rho(s)}h(t_k,s)\right)^2ds\right]\left[\frac{1}{H(t_k,T_0)}\int_{T_0}^{t_k}\left(\sqrt{H(t_k,s)}\frac{v}{\sqrt{a(s)\rho(s)}}\right)^2ds\right]\\&\leq U(t_k)\left[\frac{1}{H(t_k,T_0)}\int_{t_0}^{t_k}a(s)\rho(s)h^2(t_k,s)ds\right]\end{aligned}$$

buluruz. Fakat Eş. 3.105

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,T_0)}{H(t,t_0)}>\eta$$

olmasını garantiler. Bu şu anlama gelir,

“ Her $t \geq T_3$ için $\dfrac{H(t,T_0)}{H(t,t_0)} \geq \eta$ sağlayan bir $T_3 \geq T_0$ vardır.”

Böylece tüm büyük k lar için $\dfrac{H(t_k,T_0)}{H(t_k,t_0)} \geq \eta$ dır ve böylece

$$\frac{W^2(t_k)}{U(t_k)} \leq \frac{1}{\eta H(t_k,t_0)} \int_{t_0}^{t_k} a(s)\rho(s)h^2(t_k,s)\,ds, \qquad \text{tüm büyük } \eta \text{ için}$$

dır. Eş. 3.110 dan

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{H(t_k,t_0)} \int_{t_0}^{t_k} a(s)\rho(s)h^2(t_k,s)\,ds = \infty \tag{3.111}$$

olduğu sonucu çıkar. Bu, Eş. 3.97 ile çelişen

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,t_0)} \int_{t_0}^{t} a(s)\rho(s)h^2(t,s)\,ds = \infty$$

durumunu verir. Buradan Eş. 3.103 sağlanır. Bu yüzden, Eş. 3.100 e göre, Eş. 3.98 ile çelişen

$$\int_{T_0}^{\infty} \frac{\left(\Omega^+(s)\right)^2}{a(s)\rho(s)}\,ds \leq \int_{T_0}^{\infty} \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}\,ds < \infty$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

$t \geq s \geq t_0$ için, $n > 1$ bir sabit olmak üzere $H(t,s) = (t-s)^n$ fonksiyonunu ele alalım. O zaman Teorem 3.23 den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

3.13. Sonuç:

$n>1$ bir sabit olsun ve Eş. 3.98 i sağlayan $\rho(t)\in C^1([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$ ve $\Omega(t)\in C([t_0,\infty),\mathbb{R})$ iki fonksiyon var olsun,

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^n}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-2}a(s)\rho(s)ds<\infty$$

ve tüm $T\geq t_0$ için

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^n}\int_{t_0}^{t}\left[(t-s)^n Q(s)-\frac{n^2}{4}(t-s)^{n-2}a(s)\rho(s)\right]ds\geq\Omega(T)$$

olsum. O zaman Eş. 3.1 salınımlıdır.

3.24. Teorem:

H ve *h* Teorem 3.19 daki gibi olsun ve Eş. 3.85 ve Eş. 3.86 sağlansın. Eş. 3.98 i sağlayan $\rho(t)\in C^1([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$ ve $\Omega(t)\in C([t_0,\infty),\mathbb{R})$ iki fonksiyonun var olduğunu kabul edelim.

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)Q(s)ds<\infty \tag{3.112}$$

ve her $T\geq t_0$ için, $Q(t)$ Eş. 3.11 de tanımlanan fonksiyon olmak üzere

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{T}^{t}\left[H(t,s)Q(s)-\frac{1}{4}h^2(t,s)a(s)\rho(s)\right]ds\geq\Omega(T) \tag{3.113}$$

olsun. O zaman Eş. 3.1 salınımlıdır.

İspat:

Tersini kabul edelim Eş. 3.1 salınımsız olsun. Teorem 3.23 deki gibi $t \geq T \geq T_0$ için

$$\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t \left[H(t,s)Q(s)-\frac{1}{4}a(s)\rho(s)h^2(t,s)\right]ds$$
$$=v(T)-\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t \left[\left(\frac{H(t,s)}{a(s)\rho(s)}\right)^{1/2} v(s)+\frac{1}{2}\sqrt{a(s)\rho(s)}h(t,s)\right]^2 ds$$

elde ederiz. Bundan dolayı tüm $T \geq T_0$ için

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{H(t,T)}\int_T^t \left[H(t,s)Q(s)-\frac{1}{4}a(s)\rho(s)h^2(t,s)\right]ds$$
$$=v(T)-\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t \left[\left(\frac{H(t,s)}{a(s)\rho(s)}\right)^{1/2} v(s)+\frac{1}{2}\sqrt{a(s)\rho(s)}h(t,s)\right]^2 ds$$

olur. Eş. 3.112 den tüm $T \geq T_0$ için

$$v(T)\geq \Omega(T)+\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_{T_0}^t \left[\left(\frac{H(t,s)}{a(s)\rho(s)}\right)^{1/2} v(s)+\frac{1}{2}\sqrt{a(s)\rho(s)}h(t,s)\right]^2 ds$$

olduğunu anlarız. Bu yüzden Eş. 3.100 tüm $T \geq T_0$ için geçerli ve

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T_0)}\int_{T_0}^t \left[\left(\frac{H(t,s)}{a(s)\rho(s)}\right)^{1/2} v(s)+\frac{1}{2}\sqrt{a(s)\rho(s)}h(t,s)\right]^2 ds \leq v(T_0)-\Omega(T_0)<\infty$$

dır. Bu $U(t)$ ve $W(T)$, Teorem 3.23 ün ispatında tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty}\left[U(t)+W(t)\right]$$
$$\le \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T_0)}\int_{T_0}^{t}\left[\left(\frac{H(t,s)}{a(s)\rho(s)}\right)^{1/2} v(s)+\frac{1}{2}\sqrt{a(s)\rho(s)}h(t,s)\right]^2 ds<\infty \tag{3.114}$$

olduğunu gösterir. Eş. 3.113 e göre

$$\Omega(t_0)\le \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\left[H(t,s)Q(s)-\frac{1}{4}h^2(t,s)a(s)\rho(s)\right]ds$$
$$\le \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}H(t,s)Q(s)ds-\frac{1}{4}\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}h^2(t,s)a(s)\rho(s)ds$$

dır. Yukarıdaki eşitsizlikten ve Eş. 3.112 den

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}h^2(t,s)a(s)\rho(s)ds<\infty$$

buluruz. Böylece

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{H(t_k,t_0)}\int_{t_0}^{t_k}h^2(t_k,s)a(s)\rho(s)ds$$
$$=\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}h^2(t,s)a(s)\rho(s)ds<\infty \tag{3.115}$$

yı sağlayan $\lim_{k\to\infty}t_k=\infty$ özelliğine sahip (t_0,∞) da tanımlı bir $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi vardır. Eş. 3.104 ün sağlandığını kabul edelim. Teorem 3.23 ün adımlarını kullanarak Eş. 3.108 in sağlandığı sonucunu çıkartırız. Eş. 3.114 den Eş. 3.107 yi gerçekleştiren bir M sabiti vardır sonucunu çıkartırız. Daha sonra Teorem 3.23 deki gibi Eş. 3.115 ile çelişen Eş. 3.111 in sağlandığını buluruz. Bundan dolayı Eş. 3.104 geçersiz olur. İspatın geri kalanı Teorem 3.23 dekine benzer olduğundan detayları burada vermeyeceğiz.

3.10. Örnek:

λ ve μ, $\lambda \le 1$, $-1 < \mu \le 1$ ve $2\mu + 1 \ge \lambda$ olan sabitler olmak üzere $t \ge t_0 \ge 0$ için

$$\left(t^{\lambda} x'(t)\right)' + \left(t^{\mu} \cos t\right) x(t) = 0 \tag{3.116}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. $\rho(t) = 1$ ve $t \ge s \ge t_0$ için $H(t,s) = (t-s)^2$ olsun. O zaman

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t^2} \int_{t_0}^{t} (t-s)^2 s^{\mu} \cos s \, ds = -t_0^{\mu} \cos t_0 < \infty$$

ve k_1 bir pozitif küçük sabit olmak üzere $T \ge t_0$ için

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{1}{t^2} \int_{T}^{t} \left[(t-s)^2 s^{\mu} \cos s - s^{\lambda} \right] ds \ge -T^{\mu} \sin T - k_1$$

elde ederiz.

$\Omega(T) = -T^{\mu} \sin T - k_1$ olarak tanımlayalım. O zaman $(2N+1)\pi + \frac{\pi}{4} > t_0$ sağlayan bir N sabiti vardır ve $n \ge N$ ise $(2n+1)\pi + \frac{\pi}{4} \le T \le 2(n+1)\pi - \frac{\pi}{4}$ dür. δ küçük bir sabit olmak üzere $\Omega(T) = -T^{\mu} \sin T - k_1 \ge \delta T^{\mu}$ dir. $2\mu + 1 \ge \lambda$ kaydederek

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\left(\Omega^+(s)\right)^2}{a(s)\rho(s)} ds \geq \sum_{N=n}^{\infty} \delta^2 \int_{(2n+1)\pi+\pi/4}^{2(n+1)-\pi/4} s^{2\mu-\lambda} ds$$
$$\geq \sum_{N=n}^{\infty} \delta^2 \int_{(2n+1)\pi+\pi/4}^{2(n+1)-\pi/4} \frac{ds}{s} = \infty$$

elde ederiz. Böylece, Teorem 3.24 ün tüm şartları sağlanır. Bu yüzden Eş. 3.116 salınımlıdır.

Literatürde bilinen sonuçların çoğuna ilaveten, yukarıdaki salınım kriterleri tüm $[t_0,\infty)$ yarıdoğrusu üzerinde Eş. 3.1 ve Eş. 3.5 in bilgisine gerek duyar. Şimdi ise Sturm Ayırma Teoremi yardımıyla bu denklemler için salınım kriterlerini denklemlerin katsayı fonksiyonlarının $[t_0,\infty)$ un $\left\{[a_i,b_i]\right\}_{i=1}^{\infty}$ alt aralıklarının bir dizisindeki davranışları yardımıyla vereceğiz. Ardından eğer *H*, Teorem 3.19 daki gibi ise yani Eş. 3.85 i sağlayan $D=\left\{(t,s): t\geq s\geq t_0\right\}$ olmak üzere $H\in C\left(D,\mathbb{R}^+\right)$ ve D üzerinde $\frac{\partial H}{\partial t}$ ile $\frac{\partial H}{\partial s}$ kısmi türevleri var ve bu kısmi türevler $h_1,h_2\in L_{loc}\left(D,\mathbb{R}\right)$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial t}H(t,s)=h_1(t,s)\sqrt{H(t,s)} \quad ve \quad \frac{\partial}{\partial t}H(t,s)=-h_2(t,s)\sqrt{H(t,s)} \tag{3.117}$$

şeklinde iseler $H=H(t,s)\in\Gamma$ dır diyeceğiz.

3.2. bölümünün sonuçlarından, Eş. 3.1, Eş. 3.10 a denk olduğundan Eş. 3.1 salınımsızdır ancak ve ancak Eş. 3.10 salınımsızdır. Önceki gibi, $w(t)$ Eş. 3.10 un bir çözümü olsun ve $t\geq T\geq t_0$ için $w(t)>0$ olduğunu varsayalım. Bir $\rho(t)\in C^1\left([t_0,\infty),\mathbb{R}^+\right)$ için $t\geq T$ olmak üzere

$$v(t)=a(t)\rho(t)\frac{w'(t)}{w(t)}$$

tanımlayalım. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra $Q(t)$, Eş. 3.11 de tanımlanan fonksiyon olmak üzere $t\geq T$ için

$$v'(t)+Q(t)+\frac{v^2(t)}{a(t)\rho(t)}=0 \tag{3.118}$$

sonucuna ulaşırız.

Aşağıdaki lemma, Eş. 3.1 için aralık salınımlılık kriterlerini kurmada temel rol oynar.

3.5. Lemma:

$w(t)$, $v(t)$ ve T yukarıdaki gibi tanımlansın.

(i) $[c,b]\subset[T,\infty)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $H\in\Gamma$ için

$$\int_c^b H(b,s)Q(s)ds\leq H(b,c)v(c)+\frac{1}{4}\int_c^b a(s)\rho(s)h_2^2(b,s)ds \tag{3.119}$$

(ii) $[a,c]\subset[T,\infty)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $H\in\Gamma$ için

$$\int_a^c H(s,a)Q(s)ds\leq -H(c,a)v(c)+\frac{1}{4}\int_a^c a(s)\rho(s)h_1^2(s,a)ds \tag{3.120}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat:

(i) Eş. 3.118 i $H(b,s)$ ile çarpıp, c den b ye, s ye göre integral alıp, Eş. 3.85 ve Eş. 3.117 yi kullanırsak

$$\begin{aligned}
\int_c^b H(b,s)Q(s)ds &= -\int_c^b H(b,s)v'(s)ds - \int_c^b H(b,s)\frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds \\
&= -\left[\int_c^b \frac{\partial}{\partial s}\big(H(b,s)v(s)\big)ds - \int_c^b v(s)\frac{\partial}{\partial s}H(b,s)ds\right] \\
&\qquad - \int_c^b H(b,s)\frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds \\
&= -\left[H(b,b)v(b) - H(b,c)v(c) - \int_c^b v(s)\frac{\partial}{\partial s}H(b,s)ds\right] \\
&\qquad - \int_c^b H(b,s)\frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds \\
&= H(b,c)v(c) + \int_c^b v(s)h_2(b,s)\sqrt{H(b,s)}ds \\
&\qquad - \int_c^b H(b,s)\frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds \\
&= H(b,c)v(c) - \int_c^b \left[\left(\frac{H(b,s)}{a(s)\rho(s)}\right)^{1/2} v(s) - \frac{1}{2}\sqrt{a(s)\rho(s)}h_2(b,s)\right]^2 \\
&\qquad + \frac{1}{4}\int_c^b h_2^2(b,s)a(s)\rho(s)ds \\
&\le H(b,c)v(c) + \frac{1}{4}\int_c^b h_2^2(b,s)a(s)\rho(s)ds
\end{aligned}$$

elde ederiz.

(ii) (i) dekine benzer şekilde Eş. 3.118 i $H(s,a)$ ile çarpıp a dan c ye, s ye göre integral alıp, Eş. 3.85 ve Eş. 3.117 yi kullanırsak

$$\int_a^c H(s,a)Q(s)\,ds = -\int_a^c H(s,a)v'(s)\,ds - \int_a^c H(s,a)\frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}\,ds$$
$$= -\left[\int_a^c \frac{\partial}{\partial s}\big(H(s,a)v(s)\big)ds - \int_a^c \frac{\partial}{\partial s}H(s,a)v(s)\,ds\right] - \int_a^c H(s,a)\frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}\,ds$$
$$= -H(c,a)v(c) + H(a,a)v(a) + \int_a^c h_1(s,a)\sqrt{H(s,a)}v(s)\,ds$$
$$- \int_a^c H(s,a)\frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}\,ds$$
$$= -H(c,a)v(c) + \int_a^c h_1(s,a)\sqrt{H(s,a)}v(s)\,ds - \int_a^c H(s,a)\frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}\,ds$$
$$= -H(c,a)v(c) + \frac{1}{4}\int_a^c h_1^2(s,a)a(s)\rho(s)\,ds$$
$$- \int_a^c \left[\left(\frac{H(s,a)}{a(s)\rho(s)}\right)^{1/2} v(s) + \frac{1}{2}\sqrt{a(s)\rho(s)}h_1(s,a)\right]^2 ds$$
$$\leq -H(c,a)v(c) + \frac{1}{4}\int_a^c h_1^2(s,a)a(s)\rho(s)\,ds$$

elde ederiz.

3.14. Sonuç:

$w(t), v(t)$ ve T yukarıdaki gibi tanımlansın. O zaman $H \in \Gamma$ ve $a,b,c \in \mathbb{R}$ öyle ki $T \leq a < c < b$ olmak üzere

$$\frac{1}{H(c,a)}\int_a^c H(s,a)Q(s)\,ds + \frac{1}{H(b,c)}\int_c^b H(b,s)Q(s)\,ds$$
$$\leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{H(c,a)}\int_a^c h_1^2(s,a)a(s)\rho(s)\,ds + \frac{1}{H(b,c)}\int_c^b h_2^2(b,s)a(s)\rho(s)\,ds\right] \tag{3.121}$$

dır.

İspat:

Eş. 3.119 ve Eş. 3.120 sırasıyla $H(b,c)$ ve $H(c,a)$ ya bölüp onları toplarsak Eş. 3.121 i buluruz.

Şimdi temel aralık salınımlılık teoremlerini ispatlayacağız.

3.25. Teorem:

Her bir $T \geq t_0$ için $H \in \Gamma$, $\rho(t) \in C^1([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$ ve $a,b,c \in \mathbb{R}$ öyle ki $T \leq a < c < b$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\frac{1}{H(c,a)}\int_a^c H(s,a)Q(s)\,ds + \frac{1}{H(b,c)}\int_c^b H(b,s)Q(s)\,ds \\ &> \frac{1}{4}\left[\frac{1}{H(c,a)}\int_a^c h_1^2(s,a)a(s)\rho(s)\,ds + \frac{1}{H(b,c)}\int_c^b h_2^2(b,s)a(s)\rho(s)\,ds\right] \end{aligned} \tag{3.122}$$

ise Eş. 3.1 salınımlıdır.

İspat:

Genelliği bozmadan $w(t)$, Eş. 3.10 un eninde sonunda pozitif bir çözümü olsun. O zaman Sonuç 3.14 den herhangi bir $H \in \Gamma$ için Eş. 3.121 eşitsizliğini sağlayan $T \geq t_0$ ve $T \leq a < c < b$ yi sağlayan $a,b,c \in \mathbb{R}$ vardır deriz. Fakat bu Eş. 3.122 ile çelişir.

3.26. Teorem:

Herhangi bir $r \geq t_0$ için

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\int_r^t H(s,r)Q(s)\,ds}{\int_r^t h_1^2(s,r)a(s)\rho(s)\,ds}=\infty \tag{3.123}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\int_r^t H(s,r)Q(s)\,ds}{\int_r^t h_2^2(s,r)a(s)\rho(s)\,ds}=\infty \tag{3.124}$$

şartlarını sağlayan $H\in\Gamma$ varsa Eş. 3.1 salınımlıdır.

İspat:

Herhangi bir $T\geq t_0$ için $a=T$ olsun. Eş. 3.123 de $r=a$ seçelim. O zaman

$$\int_a^c H(s,a)Q(s)\,ds>\frac{1}{4}\int_a^c h_1^2(s,a)a(s)\rho(s)\,ds \tag{3.125}$$

şartını sağlayan $c>a$ vardır. Eş. 3.124 de $r=c$ seçelim. O zaman

$$\int_c^b H(b,s)Q(s)\,ds>\frac{1}{4}\int_c^b h_2^2(b,s)a(s)\rho(s)\,ds \tag{3.126}$$

şartını sağlayan $b>c$ vardır. Eş. 3.125 ve Eş. 3.126 yı birleştirirsek, Eş. 3.122 yi elde ederiz. Teorem 3.25 yardımıyla sonuca kolayca ulaşılır.

Aşağıdaki sonuç Teorem 3.26 nın denk bir versiyonudur.

3.27. Teorem:

Eğer herhangi bir $r \geq t_0$ için

$$\limsup_{t\to\infty} \int_r^t \left[H(s,r)Q(s) - \frac{1}{4} h_1^2(s,r)a(s)\rho(s) \right] ds > 0 \tag{3.127}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} \int_r^t \left[H(t,s)Q(s) - \frac{1}{4} h_2^2(t,s)a(s)\rho(s) \right] ds > 0 \tag{3.128}$$

şartlarını sağlayan bir $H \in \Gamma$ varsa Eş. 3.1 salınımlıdır.

İspat:

Herhangi bir $T \geq t_0$ için $a = T$ olsun. Eş. 3.127 de $r = a$ seçelim. O zaman

$$\int_a^c \left[H(s,a)Q(s) - \frac{1}{4} h_1^2(s,a)a(s)\rho(s) \right] ds > 0 \tag{3.129}$$

sağlayan $c > a$ vardır. Eş. 3.128 de $r = c$ seçelim. O zaman

$$\int_c^b \left[H(b,s)Q(s) - \frac{1}{4} h_2^2(b,s)a(s)\rho(s) \right] ds > 0 \tag{3.130}$$

sağlayan $b > c$ vardır. Eş. 3.129 ve Eş. 3.130 u birleştirirsek Eş. 3.122 yi elde ederiz. Teorem 3.25 yardımıyla sonuç kolayca gözükür.

$H = H(t-s) \in \Gamma$ durumunda $h_1(t-s) = h_2(t-s)$ dir. Bunları kısaca $h(t-s)$ ile ifade ederiz. $H(t-s)$ içine alan Γ nın alt sınıfını Γ_0 ile göstereceğiz. Teorem 3.25 Γ_0 a uygulandığında aşağıdaki sonucu doğurur.

3.28. Teorem:

Eğer her bir $T \geq t_0$ için

$$\int_a^c H(s-a)\left[Q(s)+Q(2c-s)\right]ds > \frac{1}{4}\int_a^c h^2(s-a)\left[a(s)\rho(s)+a(2c-s)\rho(2c-s)\right]ds \tag{3.131}$$

eşitsizliğini sağlayan $H \in \Gamma_0$ ve $\rho(t) \in C^1\left([t_0,\infty),\mathbb{R}^+\right)$ iki fonksiyonu ve $T \leq a < c$ olan $a,c \in \mathbb{R}$ varsa, Eş. 3.1 salınımlıdır.

İspat:

$b = 2c-a$ olsun. $H(b-c) = H(c-a) = H\left((b-a)/2\right)$ ve $\forall y \in L[a,b]$ için

$$\int_c^b y(s)\,ds = \int_a^c y(2c-s)\,ds$$

eşitliğine sahibiz. Bu yüzden

$$\int_c^b H(b-s)Q(s)\,ds = \int_a^c H(s-a)Q(2c-s)\,ds$$

ve

$$\int_c^b a(s)\rho(s)h^2(b-s)\,ds = \int_a^c a(2c-s)\rho(2c-s)h^2(s-a)\,ds$$

olur. Böylece Eş. 3.131, $H \in \Gamma_0$ için Eş. 3.122 nin sağlandığını gösterir. Dolayısıyla Eş. 3.1 salınımlıdır.

Şimdi $n>1$ olmak üzere $H(t-s)=(t-s)^n$ olsun. Açıktır ki $H \in \Gamma_0$ ve $h(t-s)=n(t-s)^{\frac{n-2}{2}}$ dir. O zaman yukarıdaki sonuçlardan aşağıdaki salınım kriterlerini verebiliriz.

3.15. Sonuç:

Bazı $n>1$ için ve herhangi bir $r \geq t_0$ için ya

I)

$$\limsup_{t\to\infty} \int_r^t \left[(s-r)^n Q(s) - \frac{n^2}{4}(s-r)^{n-2} a(s)\rho(s) \right] ds > 0$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} \int_r^t \left[(t-s)^n Q(s) - \frac{n^2}{4}(t-s)^{n-2} a(s)\rho(s) \right] ds > 0$$

eşitsizlikleri sağlanıyor ya da

II)

$$\limsup_{t\to\infty} \int_r^t \left[(s-r)^n \big(Q(s)+Q(2t-s)\big) - \frac{n^2}{4}(s-r)^{n-2} \big(a(s)\rho(s)+a(2t-s)\rho(2t-s)\big) \right] ds > 0$$

eşitsizliği sağlanıyor ise Eş. 3.1 salınımlıdır.

Tekrar $t \geq r \geq t_0$ için $R(t) = \int_r^t \frac{du}{a(u)}$ tanımlayalım ve $n > 1$ reel bir sabit olmak üzere $t \geq s \geq t_0$ için $H(t,s) = \left(R(t) - R(s)\right)^n$ olsun. O zaman Teorem 3.27 ye göre aşağıdaki sonucu verelim.

3.16. Sonuç:

Her bir $r \geq t_0$ için $\lim_{t\to\infty} R(t) = \infty$ ve bazı $n > 1$ için

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{R^{n-1}(t)} \int_r^t \left(R(s) - R(r)\right)^n q(s)\,ds > \frac{n^2}{4(n-1)} \tag{3.132}$$

ve

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{R^{n-1}(t)} \int_r^t \left(R(t) - R(s)\right)^n q(s)\,ds > \frac{n^2}{4(n-1)} \tag{3.133}$$

eşitsizlikleri sağlanıyor ise Eş. 3.1 salınımlıdır.

İspat:

$\rho(t) = 1$ olsun. O zaman $t \geq t_0$ için $Q(t) = q(t)$,

$$h_1(t,s) = \frac{n}{a(t)}\left(R(t) - R(s)\right)^{(n-2)/2}$$

ve

$$h_2(t,s)=\frac{n}{a(s)}\big(R(t)-R(s)\big)^{(n-2)/2}$$

dir ve

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{R^{n-1}(t)}\int_r^t\big(R(s)-R(r)\big)^{n-1}q(s)-\frac{1}{4}a(s)h_1^2(s,r)ds\\
&=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{R^{n-1}(t)}\int_r^t\left[\big(R(s)-R(r)\big)^{n}q(s)-\frac{n^2}{4}\big(R(s)-R(r)\big)^{n-1}\frac{1}{a(s)}\right]ds\\
&=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{R^{n-1}(t)}\int_r^t\big(R(s)-R(r)\big)^{n}q(s)ds-\lim_{t\to\infty}\frac{1}{R^{n-1}(t)}\left[\frac{n^2}{4(n-1)}\big(R(t)-R(r)\big)^{n-1}\right]\\
&=\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{R^{n-1}(t)}\int_r^t\big(R(s)-R(r)\big)^{n}q(s)ds-\frac{n^2}{4(n-1)}
\end{aligned}$$

dir. Eş. 3.132 göz önünde bulundurulduğunda Eş. 3.127 sağlanır. Benzer şekilde Eş. 3.133 de Eş. 3.128 i sağlar. Böylece Teorem 3.27 den Eş. 3.1 salınımlıdır.

3.11. Uyarı:

1. $a(t)=1$ ve/yada $\rho=1$ olduğunda Eş. 3.1 için yukarıdaki salınım aralık kriterlerinin özel durumları kolayca formülleştirilebilir.

2. Yukarıdaki sonuçların genişletmeleri Eş. 3.1 tipindeki daha genel denklemlere kolayca uygulanabilir.

Aşağıdaki örnekler teoriyi pratikte nasıl uygulayabileceğimizi gösterir.

3.11. Örnek:

$$x''(t)+q(t)x(t)=0 \tag{3.134}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Burada $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$q(t) = \begin{cases} 5(t-3m) & 3m \le t \le 3m+1 \\ 5(-t+3m+2) & 3m+1 < t \le 3m+2 \\ -m & 3m+2 < t < 3m+3 \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Herhangi bir $T \ge 0$ için $3m \ge T$ yi sağlayan $m \in \mathbb{N}$ vardır. $t \ge s \ge T$ için $a = 3m,\ c = 3m+1,\ H(t-s) = (t-s)^2$ ve $t \ge T$ için $\rho(t) = 1$ dir. O zaman $t \ge T$ için $Q(t) = q(t)$ dir.

Eş. 3.131 in sağlandığını kontrol etmek kolaydır ve bu yüzden Eş. 3.134 ün her çözümü Teorem 3.25 e göre salınımlıdır.

Bu denklemde $\int\limits_0^\infty q(s)\,ds = -\infty$ olarak aldık.

3.12. Örnek:

$t \ge 1$ ve $c > \dfrac{1}{4}$ ile

$$x''(t) + \frac{c}{t^2}x(t) = 0 \tag{3.15}$$

Euler diferensiyel denklemini ele alalım. Açık bir şekilde

$$R(t) = \int\limits_1^t ds = t - 1$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} R(t) = \infty$$

dur. Her bir $t \geq r \geq 1$ ve $n > 1$ için

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{R^{n-1}(t)} \int_r^t \left(R(s) - R(r)\right)^n q(s)\,ds$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{R^{n-1}(t)} \int_r^t (s-r)^n \frac{c}{s^2}\,ds$$
$$\geq c \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{n-1}} \int_r^t \frac{s^n - nrs^{n-1}}{s^2}\,ds = c \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{n-1}} \int_r^t \left[s^{n-2} - nrs^{n-3}\right] ds$$
$$= \frac{c}{n-1}$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{R^{n-1}(t)} \int_r^t \left(R(t) - R(s)\right)^n q(s)\,ds$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{R^{n-1}(t)} \int_r^t (t-s)^n \frac{c}{s^2}\,ds$$
$$\geq c \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{n-1}} \int_r^t \frac{t^n - nst^{n-1}}{s^2}\,ds = c \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{n-1}} \int_r^t t^{n-1} \left[\frac{t}{s^2} - \frac{n}{s}\right] ds$$
$$= c \lim_{t\to\infty} \left[\frac{t}{r} - 1 - n \ln \frac{t}{r}\right] = \infty$$

$\dfrac{c}{n-1} > \dfrac{n^2}{4(n-1)}$ ise Eş. 3.132 sağlanır. Ayrıca Eş. 3.133 otomatik sağlanır.

Böylece Sonuç 3.16, $c > \dfrac{1}{4}$ olduğundan Eş. 3.15 in salınımlı olduğunu gösterir.

3.5. Salınım Kriterleri – İntegrallenebilir Katsayılar

Bu bölümde katsayıların integrallenebilir ve küçük olduğunda Eş. 3.1 için salınım kriterlerini vereceğiz. Bunun için $z_0(t) \in C([t_0,\infty),\mathbb{R})$ verilen fonksiyon ve $Q = \rho(t)\left[q(t)+a(t)h^2(t)-(a(t)h(t))'\right]$, $h(t) = -\dfrac{\rho'(t)}{2\rho(t)}$ olmak üzere

$$\int^{\infty} \frac{1}{a(s)\rho(s)} ds = \infty \tag{3.135}$$

ve

$$\beta(t) = \int_t^{\infty} Q(s)\,ds < \infty \tag{3.136}$$

şartlarını sağlayan bir $\rho(t) \in C^2([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$ fonksiyonunun var olduğunu kabul edeceğiz.

$z^+(t) = \left(\dfrac{z(t)+|z(t)|}{2}\right)$ olmak üzere $t \geq t_0$ için (mevcutsa) $n = 1,2,...$ için

$$z_n(t) = z_0 + \int_t^{\infty} \frac{\left(z_{n-1}^+(s)\right)^2}{a(s)\rho(s)} ds$$

olmak üzere bir $\{z_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi tanımlayalım. Açık bir şekilde $z_1(t) \geq z_0(t)$ dir. Bu da $z_1^+(t) \geq z_0^+(t)$ olduğunu gösterir. Böylece tümevarımla $t \geq t_0$ için $n = 1,2,...$ olmak üzere

$$z_{n+1}(t) \geq z_n(t) \tag{3.137}$$

elde ederiz. Yani $\{z_n(t)\}$ dizisi $[t_0,\infty)$ aralığında azalmayandır.

3.29. Teorem:

$t \geq t_0$ için $z_0(t) \leq \beta(t)$ olduğunu kabul edelim. Eğer Eş. 3.1 salınımsız ise o zaman $t \geq t_1$ için

$$\lim_{n\to\infty} z_n(t) = z(t) < \infty \tag{3.138}$$

koşulunu sağlayan bir $t_1 \geq t_0$ vardır.

İspat:

Varsayalım ki Eş. 3.1 salınımsız olsun. O zaman Teorem 3.5 e göre $t_1 \geq t_0$ için $[t_1,\infty)$ üzerinde

$$v(t) = \beta(t) + \int_t^\infty \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds$$

sağlayan $v(t) \in C([t_1,\infty),\mathbb{R})$ vardır. Burada $t \geq t_1$ için $v(t) \geq z_0(t)$ dir ve böylece $t \geq t_1$ için $v^+(t) \geq z_0^+(t)$ dir. Bu $t \geq t_1$ için

$$\begin{aligned} v(t) = \beta(t) + \int_t^\infty \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds &\geq z_0(t) + \int_t^\infty \frac{\left(v^+(s)\right)^2}{a(s)\rho(s)}ds \\ &\geq z_0(t) + \int_t^\infty \frac{\left(z_0^{\,+}(s)\right)^2}{a(s)\rho(s)}ds = z_1(t) \end{aligned}$$

olduğunu gösterir. Böylece tümevarımla $t \geq t_1$ için $\mathrm{n} = 0,1,2,\ldots$ olmak üzere

$$v(t) \geq z_n(t) \tag{3.139}$$

olduğunu görürüz.

Eş. 3.137 ve Eş. 3.139 dan $\{z_n(t)\}$ dizisinin $[t_1, \infty)$ üzerinde üstten sınırlı olduğu anlaşılır. Böylece Eş. 3.138 sağlanır.

Teorem 3.29 dan aşağıdaki salınım sonuçlarını verebiliriz.

3.30. Teorem:

$z_0(t) \leq \beta(t)$ olduğunu kabul edelim. Eğer aşağıdaki iki şarttan biri sağlanıyor ise Eş. 3.1 salınımlıdır.

(i) $n = 1,2,\ldots,m-1$ için $z_n(t)$ ler mevcut, fakat $z_m(t)$ mevcut olmayacak şekilde pozitif bir *m* sabiti vardır;

(ii) $n = 1,2,\ldots$ için $z_n(t)$ ler tanımlı fakat yeterince büyük $T^* \geq t_0$ için

$$\lim_{n\to\infty} z_n(t^*) = \infty \tag{3.140}$$

olacak şekilde $t^* \geq T^*$ vardır.

Aşağıdaki sonuçlar Eş. 3.1 in salınımsızlığını garantiler.

3.31. Teorem:

$t \geq t_0$ için $z_0(t) \geq |\beta(t)|$ olduğunu kabul edelim. eğer Eş. 3.138 i sağlayan bir $t_1 \geq t_0$ varsa, Eş. 3.1 salınımsızdır.

İspat:

Eş. 3.137 ve Eş. 3.138 den $t \geq t_1$ için $n = 0,1,2,...$ olmak üzere $z_n(t) \leq z(t)$ olduğu anlaşılır. Monoton yakınsaklık teoremini uygulayarak $t \geq t_1$ için

$$z(t) = z_0(t) + \int_t^\infty \frac{\left(z^+(s)\right)^2}{a(s)\rho(s)} ds \geq 0$$

buluruz. Böylece $t \geq t_1$ için

$$\begin{aligned} z^+(t) = z(t) &= \int_t^\infty \frac{\left(z^+(s)\right)^2}{a(s)\rho(s)} ds + z_0(t) \geq \int_t^\infty \frac{\left(z^+(s)\right)^2}{a(s)\rho(s)} ds + |\beta(t)| \\ &\geq \left| \int_t^\infty \frac{\left(z^+(s)\right)^2}{a(s)\rho(s)} ds + \beta(t) \right| \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece [7] deki Sonuç 2.3.16 dan Eş. 3.1 in salınımsız olduğu anlaşılır. Sonraki sonuç Eş. 3.1 in salınımlılığı için gerekli koşulları sağlar.

3.32. Teorem:

$t \geq t_0$ için $z_0(t) \geq |\beta(t)|$ olsun. Eğer Eş. 3.1 salınımlı ise o zaman aşağıdaki iki şarttan biri sağlanır.

(i) $n=1,2,...,m-1$ için $z_n(t)$ tanımlı, fakat $z_m(t)$ yi tanımsız yapan pozitif *m* sabiti vardır.

(ii) $n=1,2,...$ için $z_n(t)$ ler tanımlı fakat yeterince büyük $T^* \geq t_0$ için Eş. 3.140 sağlanacak şekilde bir $t^* \geq T^*$ vardır.

Eğer $t \geq t_0$ için $\beta(t) \geq 0$ ise o zaman yukarıdaki sonuçlar kullanılarak aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

3.17. Sonuç:

$t \geq t_0$ için $z_0(t) = \beta(t) \geq 0$ olsun. O zaman Eş. 3.1 in salınımsız olması için gerek ve yeter koşul Eş. 3.138 i sağlayan bir $t_1 \geq t_0$ var olmasıdır.

3.18. Sonuç:

$t \geq t_0$ için $z_0(t) = \beta(t) \geq 0$ olsun. O zaman Eş. 3.1 salınımlıdır ancak ve ancak ya

(i) $n=1,2,...,m-1$ için $z_n(t)$ tanımlı, fakat $z_m(t)$ yi tanımsız yapan bir pozitif *m* sabiti vardır.

ya da

(ii) $n=1,2,...$ için $z_n(t)$ ler tanımlı fakat yeterince büyük $T^* \geq t_0$ için Eş. 3.140 ı sağlayan $t^* \geq T^*$ vardır.

dır.

3.13. Örnek:

$t > 0$ için

$$x''(t)+\frac{1}{3}t^{-4/3}\left(2+\cos t+3t\sin t\right)x(t)=0 \tag{3.141}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. $\rho(t)=1$ olsun. O zaman $t>0$ için

$q(t)=Q(t)=\frac{1}{3}t^{-4/3}\left(2+\cos t+3t\sin t\right)$ dir.

$$\begin{aligned}z_0(t)=\beta(t)&=\int_t^{\infty}q(s)\,ds=\int_t^{\infty}\frac{1}{3}s^{-4/3}\left(2+\cos s+3s\sin s\right)ds\\&=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\left(-6s^{-1/3}\Big|_t^b-3s^{-1/3}\cos s\Big|_t^b-3\int_t^b s^{-1/3}\sin s\,ds+3\int_t^b s^{-1/3}\sin s\,ds\right)\\&=t^{-1/3}\left(2+\cos t\right)\geq t^{-1/3}\end{aligned}$$

olduğundan

$$z_0^{+}(t)=\left(z_0(t)+\left|z_0(t)\right|\right)/2=t^{-1/3}\left(2+\cos t\right)=z_0(t)$$

elde edilir. O zaman tüm büyük t ler için $z_0(t)=z_0^{+}(t)$ dir. Ayrıca

$$\int_t^{\infty}\frac{\left(z_0^{+}(t)\right)^2}{a(s)\rho(s)}ds\geq\int_t^{\infty}s^{-2/3}ds=3s^{1/3}\Big|_t^{\infty}=\infty$$

dur. Dolayısıyla $m=1$ dir. Eş. 3.141 in salınımlılığı Teorem 3.30 dan anlaşılır.

3.14. Örnek:

$t>0$ için

$$x''(t)+\frac{1}{2}\left(t^{-3/4}\sin\sqrt{t}+\frac{1}{2}t^{-5/4}\cos\sqrt{t}\right)x(t)=0 \tag{3.142}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Burada $\rho(t)=1$ alalım. O zaman $t>0$ için

$$q(t)=Q(t)=\frac{1}{2}\left(t^{-3/4}\sin\sqrt{t}+\frac{1}{2}t^{-5/4}\cos\sqrt{t}\right)$$

olur ve

$$z_0(t)=\beta(t)=\int_t^{\infty}q(s)\,ds=\frac{1}{2}\int_t^{\infty}\left[s^{-3/4}\sin\sqrt{s}+\frac{1}{2}s^{-5/4}\cos\sqrt{s}\right]ds$$

$$\begin{aligned}
z_0(t)=\beta(t)&=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\int_t^{b}\left[s^{-3/4}\sin\sqrt{s}+\frac{1}{2}s^{-5/4}\cos\sqrt{s}\right]ds\\
&=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left[\int_t^{b}s^{-3/4}\sin\sqrt{s}ds-2s^{-1/4}\cos\sqrt{s}\Big|_t^b-\int_t^{b}s^{-1/4}s^{-1/2}\sin\sqrt{s}ds\right]\\
&=-\lim_{b\to\infty}s^{-1/4}\cos\sqrt{s}\Big|_t^b\\
&=t^{-1/4}\cos\sqrt{t}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$z_0^{+}(t)=\left(z_0(t)+\left|z_0(t)\right|\right)/2=\frac{1}{2}t^{-1/4}\left[\cos\sqrt{t}+\left|\cos\sqrt{t}\right|\right]$$

dir ve $k = \ t \ +1$ için

$$\begin{aligned}
z_1(t)&=\frac{1}{2}\int_t^{\infty}\frac{1}{\sqrt{s}}\left[\cos^2\sqrt{s}+\cos\sqrt{s}\left|\cos\sqrt{s}\right|\right]ds+z_0(t)\\
&\geq\frac{1}{2}\sum_{n=k}^{\infty}\int_{[(2n+1)\pi/2]^2}^{[(2n+3)\pi/2]^2}\left[\frac{1}{\sqrt{s}}\left(\cos^2\sqrt{s}+\cos\sqrt{s}\left|\cos\sqrt{s}\right|\right)\right]ds+z_0(t)\\
&=\sum_{n=k}^{\infty}\int_{[(4n-1)\pi/2]^2}^{[(4n+1)\pi/2]^2}\frac{\cos^2\sqrt{s}}{\sqrt{s}}ds+z_0(t)
\end{aligned}$$

$$z_1(t) = 2\sum_{n=k}^{\infty}\int_{3\pi/2}^{5\pi/2}\cos^2 s ds + z_0(t) = \infty$$

elde edilir. O zaman $m=1$ ile Teorem 3.30 (i) nin tüm koşulları sağlanır. Dolayısıyla Eş. 3.142 salınımlıdır.

Şimdi Eş. 3.2 yi ele alalım. Kabul edelim ki $\alpha_0(t) \in C([t_0,\infty),\mathbb{R})$ şeklinde bir fonksiyon verilsin ve $Q_1(t)$, Eş. 3.13 de tanımlanan fonksiyon olmak üzere

$$\beta_1(t) = \int_t^{\infty} Q_1(s)ds \quad \text{ve} \quad \int^{\infty}\frac{1}{a_1(s)\rho_1(s)}ds = \infty$$

olacak şekilde bir $\rho(t) \in C^2([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu var olsun. Tekrar, (varsa) aşağıdaki gibi için $n=1,2,...$ olmak üzere

$$\alpha_n(t) = \alpha_0(t) + \int_t^{\infty}\frac{\left(\alpha_{n-1}^+(s)\right)^2}{a_1(s)\rho_1(s)}ds \tag{3.143}$$

$\{\alpha_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi tanımlayalım. Açıktır ki, $t \geq t_0$ için $\alpha_1(t) \geq \alpha_0(t)$ dir ve bu $\alpha_1^+(t) \geq \alpha_0^+(t)$ olduğunu gösterir. Böylece tümevarımı kullanarak $t \geq t_0$ için $n=1,2,...$ olmak üzere

$$\alpha_{n+1}(t) \geq \alpha_n(t) \tag{3.144}$$

olduğunu söyleyebiliriz. Yani Eş. 3.143 ile tanımlanan $\{\alpha_n(t)\}$ dizisi $[t_0,\infty)$ da azalmayandır.

3.6. Salınım İçin Mukayese Kriterleri

Teorem 3.29 ve 3.31 den ilham alarak bazı karşılaştırma mukayeselerini aşağıdaki şekilde veririz.

3.33. Teorem:

Tüm büyük *t* ler için

$$0 < a(t)\rho(t) \le a_1(t)\rho_1(t), \quad |\beta_1(t)| \le \beta(t) \tag{3.145}$$

olduğunu kabul edelim. Eğer Eş. 3.1 salınımsız ise, o zaman Eş. 3.2 salınımsızdır ya da aynı şekilde, Eş. 3.2 salınımlı ise o zaman Eş. 3.1de salınımlıdır.

İspat:

$t \ge t_0$ için $z_0(t) = \beta(t)$ ve $\alpha_0(t) = |\beta_1(t)|$ olsun. Varsayalım ki Eş. 3.1 salınımsız olsun. Teorem 3.29 dan Eş. 3.138 i sağlayan bir $t_1 \ge t_0$ vardır. Açıktır ki Eş. 3.145 e göre

$$\alpha_0(t) = |\beta_1(t)| \le \beta(t) = z_0(t)$$

dir. Bu yüzden, $t \ge t_1$ için

$$\alpha_0^+(t) \le z_0^+(t)$$

dir. Böylece $t \ge t_1$ için

$$\alpha_1(t) = \alpha_0(t) + \int_t^\infty \frac{\left(\alpha_0^+(s)\right)^2}{a_1(s)\rho_1(s)} ds$$
$$\leq \alpha_0(t) + \int_t^\infty \frac{\left(\alpha_0^+(s)\right)^2}{a(s)\rho(s)} ds = z_1(t)$$

dir. Tümevarımla

$$\alpha_n(t) \leq z_n(t), \quad n = 0,1,2,..., \quad t \geq t_1 \tag{3.146}$$

olur. Böylece Eş. 3.138, Eş. 3.144 ve Eş. 3.146 yardımıyla

$$\alpha(t) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \leq \lim_{n\to\infty} z_n(t) = z(t) < \infty, \quad t \geq t_1$$

buluruz. Dolayısıyla Teorem 3.31 e göre Eş. 3.2 salınımsızdır.

3.34. Teorem:

$t \geq t_0$ için $z_0(t) \leq \beta(t)$ olsun. eğer Eş. 3.1 salınımsız ise, o zaman $z(t)$, Eş. 3.138 de tanımlanan fonksiyon olmak üzere

$$\limsup_{t\to\infty} \left(z(t) - \beta(t)\right) \exp\left(4\int^t \frac{\beta^+(s)}{a(s)\rho(s)} ds\right) < \infty \tag{3.147}$$

dir.

İspat:

Eş. 3.1 salınımsız olsun. O zaman Teorem 3.5 den $t \geq T \geq t_0$ için

$$v(t) = \beta(t) + y(t)$$

olarak yazabiliriz. Burada

$$y(t) = \int_t^{\infty} v^2(s) / \big(a(s)\rho(s)\big) ds$$

dir. $t \geq T$ için *y(t)* nin türevini alırsak.

$$y'(t) = -\frac{v^2(t)}{a(t)\rho(t)} = -\frac{\big(\beta(t) + y(t)\big)^2}{a(t)\rho(t)} \leq 0$$

buluruz. Buradan da

$$y'(t) + 4\frac{\beta^+(t)}{a(t)\rho(t)} y(t) \leq 0, \qquad t \geq T \tag{3.148}$$

elde ederiz. $y(t) > 0$ ve $y'(t) < 0$ olduğundan $\beta(t) \leq 0$ ise Eş. 3.53 sağlanır. $\beta(t) \geq 0$ ise o zaman

$$\left[\beta(t) + y(t)\right]^2 \geq 4\beta^+(t) y(t)$$

dir. Bu da Eş. 3.148 ün sağlandığını gösterir. Eş. 3.148 den

$$\frac{y'(t)}{y(t)} \leq -4\frac{\beta^+(t)}{a(t)\rho(t)}$$

$$\int_T^t \frac{y'(s)}{y(s)} ds \leq \int_T^t -4\frac{\beta^+(s)}{a(s)\rho(s)} ds$$

$$\ln y(s)\Big|_T^t \le -4\int_T^t \frac{\beta^+(s)}{a(s)\rho(s)}ds$$

$$\ln y(t) - \ln y(T) \le -4\int_T^t \frac{\beta^+(s)}{a(s)\rho(s)}ds$$

$$\ln \frac{y(t)}{y(T)} \le \left(-4\int_T^t \frac{\beta^+(s)}{a(s)\rho(s)}ds\right)$$

$$y(t) \le y(T)\exp\left(-4\int_T^t \frac{\beta^+(s)}{a(s)\rho(s)}ds\right), \qquad t \ge T \tag{3.149}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan

$$v(t) = \beta(t) + y(t) \ge \beta(t) \ge z_0(t)$$

dir. Bu yüzden

$$y(t) = \int_t^\infty \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds \ge \int_t^\infty \frac{\left(z_0^{\ +}(s)\right)^2}{a(s)\rho(s)}ds$$

olur. Bu $t \ge T$ için

$$v(t) = \beta(t) + y(t) \ge z_0(t) + \int_t^\infty \frac{\left(z_0^{\ +}(s)\right)^2}{a(s)\rho(s)}ds = z_1(t)$$

olmasını verir ve tümevarımla

$$v(t) = \beta(t) + y(t) \ge z_n(t), \qquad n = 0,1,2,... \qquad t \ge T \tag{3.150}$$

elde edilir. Böylece Eş. 3.149 ve Eş. 3.150 den

$$z_n(t)-\beta(t)\le y(t)\le y(T)\exp\left(-4\int_T^t\frac{\beta^+(s)}{a(s)\rho(s)}ds\right)$$

elde ederiz ki bunun anlamı $t\ge T$ için $n=0,1,2,...$ olmak üzere

$$\left(z_n(t)-\beta(t)\right)\exp\left(4\int_T^t\frac{\beta^+(s)}{a(s)\rho(s)}ds\right)\le y(T)$$

olmasıdır. Bu son eşitsizlik ve Eş. 3.138 birleştirilirse

$$\left(z_n(t)-\beta(t)\right)\exp\left(4\int_T^t\frac{\beta^+(s)}{a(s)\rho(s)}ds\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(z_n(t)-\beta(t)\right)\exp\left(4\int_T^t\frac{\beta^+(s)}{a(s)\rho(s)}ds\right)\le y(T)<\infty$$

olduğu sonucu ortaya çıkar. Böylece Eş. 3.147 sağlanır.

3.35. Teorem:

$z_0(t)\le\beta(t)$ olmak üzere ya

(i) $n=1,2,...,m$ için $z_n(t)$ var ve

$$\limsup_{t\to\infty}\left(z_m(t)-\beta(t)\right)\exp\left(4\int^t\frac{\beta^+(s)}{a(s)\rho(s)}ds\right)=\infty$$

olsun.

ya da

(ii) Eş. 2.138 sağlansın ve

$$\limsup_{t\to\infty}\left(z(t)-\beta(t)\right)\exp\left(4\int^{t}\frac{\beta^{+}(s)}{a(s)\rho(s)}ds\right)=\infty$$

olsun. Bu durumda Eş. 3.1 salınımlıdır.

3.36. Teorem:

$t\geq t_0$ için $z_0(t)\leq\beta(t)$ olsun. Eğer

$$\int^{\infty}\exp\left(-4\int^{s}\frac{\beta^{+}(u)}{a(u)\rho(u)}du\right)<\infty \tag{3.151}$$

ise ve

$$\int^{\infty}z_m(s)\,ds=\infty \tag{3.152}$$

sağlayan bir negatif olmayan bir *m* sabiti varsa, Eş. 3.1 salınımlıdır.

İspat:

Kabul edelim ki Eş. 3.1 salınımsız olsun. Teorem 3.34 deki gibi

$$\left(z_n(t)-\beta(t)\right)\leq y(T)\exp\left(-4\int^{t}\frac{\beta^{+}(s)}{a(s)\rho(s)}ds\right),\quad n=0,1,2,\ldots,\quad t\geq T \tag{3.153}$$

elde ederiz. Eş. 3.153 ü *T* den *t* ye integrallersek, $t\to\infty$ iken

$$\int_T^{\infty} z_n(s)\,ds \le y(T)\int_T^{\infty} \exp\left(-4\int_T^{s} \frac{\beta^+(u)}{a(u)\rho(u)}\,du\right)ds + \int_T^{\infty}\beta(s)\,ds < \infty$$

buluruz. Bu Eş. 3.152 ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonraki sonucumuzu ispatlamak için aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız olacak.

3.6. Lemma:

Her Eş. 3.1 salınımsız denklemi

$$\int^{\infty} \frac{ds}{a(s)x^2(s)} < \infty$$

sağlayan bir $x(t)$ çözümüne sahiptir ve

$$\int^{\infty} \frac{ds}{a(s)y^2(s)} = \infty$$

sağlayan aşikar olmayan bir $y(t)$ çözümüne sahiptir.

3.37. Teorem:

Eğer

$$\int^{\infty} \frac{1}{a(s)\rho(s)}\cdot \exp\left(-4\int^{s} \frac{\beta^+(\tau)}{a(\tau)\rho(\tau)}\,d\tau\right)ds < \infty \tag{3.154}$$

ise, o zaman Eş. 3.1 salınımlıdır.

İspat:

Eğer Eş. 3.1 salınımsız ise, o zaman Teorem 3.5 den $t \geq T$ için

$$v(t) = \beta(t) + \int_t^\infty \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)} ds$$

sağlayan bir $T \geq t_0$ vardır. Burada

$$v(t) = a(t)\rho(t)\frac{w'(t)}{w(t)}$$

ve $w(t)$,

$$\int^\infty \frac{ds}{a(s)\rho(s)w^2(s)} < \infty$$

sağlayan Eş. 3.10 un salınımsız bir çözümüdür. Şimdi Teorem 3.34 deki gibi

$$y(t) = \int_t^\infty \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)} ds$$

tanımlayalım ve Eş. 3.149 u elde edelim. Eş. 3.154 den

$$\int^\infty \frac{y(s)}{a(s)\rho(s)} ds < \infty$$

olduğu ve

$$\int^{\infty}\frac{k(s)v^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds<\infty$$

olduğu bulunur. Burada $k'(t)=\dfrac{1}{a(t)\rho(t)}$ dir.

$$\left(\ln\frac{w(t)}{w(T)}\right)^2=\left(\int_T^t\frac{v(s)}{a(s)\rho(s)}ds\right)^2\le\left(\int_T^t\frac{ds}{k(s)a(s)\rho(s)}\right)\left(\int_T^t\frac{k(s)v^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds\right)$$

olduğundan öyle c_0, c_1 sabitleri vardır ki tüm büyük t ler için

$$\ln\frac{w(t)}{w(T)}\le\left(\int_T^t\frac{ds}{k(s)a(s)\rho(s)}\right)^{1/2}\left(\int_T^t\frac{k(s)v^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds\right)$$

$$w(t)\le\exp\left(c_1\sqrt{\ln k(t)}\right)c_0$$

$$|w(t)|\le c_0\exp\left(c_1\sqrt{\ln k(t)}\right)$$

dir. Böylece

$$\int^{\infty}\frac{ds}{a(s)\rho(s)w^2(s)}\ge\frac{1}{c_0}\int^{\infty}\frac{1}{a(s)\rho(s)}\exp\left(-2c_1\sqrt{\ln k(s)}\right)ds=\infty$$

olur ki bu bir çelişki verir.

3.19. Sonuç:

Eğer $0<\delta\le 4$ olan δ lar için

$$\int^{\infty}\frac{1}{a(s)\rho(s)}\cdot\exp\left(-\delta\int^{s}\frac{\beta^+(\tau)}{a(\tau)\rho(\tau)}d\tau\right)ds<\infty \qquad (3.155)$$

ise, o zaman Eş. 3.1 salınımlıdır.

3.15. Örnek:

$c > 1/4$ olmak üzere

$$x''(t) + \left[\frac{1}{4t^2} + \frac{c}{(t\ln t)^2}\right] x(t) = 0$$

diferensiyel denklemini ele alalım. λ sabiti $\left(1-\sqrt{4c-1}\right)/2 < \lambda < 1/2$ olmak üzere $\rho(t) = t\ln^{2\lambda} t$ olsun. Bu durumda $\dfrac{2c-2\lambda^2}{2\lambda-1} < -1$ dir ve bu verilenlerden yola çıkarak

$$\begin{aligned} h &= -\frac{\rho'(t)}{2\rho(t)} = -\frac{\ln^{2\lambda} t + t2\lambda\ln^{2\lambda-1} t\dfrac{1}{t}}{2t\ln^{2\lambda} t} = -\frac{1}{2t} - \frac{\lambda\ln^{2\lambda} t\ln^{-1} t}{t\ln^{2\lambda} t} \\ &= -\frac{1}{2t} - \frac{\lambda}{t\ln t} \end{aligned}$$

$$h' = \frac{1}{2t^2} - \frac{(-\lambda)(t\ln t)'}{t^2\ln^2 t} = \frac{1}{2t^2} + \frac{\lambda\left(\ln t + t\dfrac{1}{t}\right)}{t^2\ln^2 t} = \frac{1}{2t^2} + \frac{\lambda}{t^2\ln t} + \frac{\lambda}{t^2\ln^2 t}$$

$$\begin{aligned} Q(t) &= \rho(t)\left[q(t) + a(t)h^2(t) - \left(a(t)h(t)\right)'\right] \\ &= t\ln^{2\lambda} t\left[\frac{1}{4t^2} + \frac{c}{(t\ln t)^2} + \frac{1}{4t^2} + \frac{\lambda}{t^2\ln t} + \frac{\lambda^2}{t^2\ln^2 t} - \frac{1}{2t^2} - \frac{\lambda}{t^2\ln t} - \frac{\lambda}{t^2\ln^2 t}\right] \\ &= t\ln^{2\lambda} t\left[\frac{\lambda^2-\lambda+c}{t^2\ln^2 t}\right] \end{aligned}$$

olduğundan $t > 0$ için

$$Q(t)=\left(\lambda^2-\lambda+c\right)\frac{\ln^{2(\lambda-1)}t}{t}$$

ve

$$\int^{\infty}\frac{1}{a(s)\rho(s)}ds=\int^{\infty}\frac{1}{s\ln^{2\lambda}s}ds=\int^{\infty}\frac{du}{u^{2\lambda}}=\left.\frac{u^{-2\lambda+1}}{1-2\lambda}\right|^{\infty}=\infty$$

$$\beta(t)=\left(\lambda^2-\lambda+c\right)\int_t^{\infty}\frac{\ln^{2(\lambda-1)}s}{s}ds=\left(\lambda^2-\lambda+c\right)\int_{\ln t}^{\infty}u^{2(\lambda-1)}du$$

$$=\left.\frac{u^{2\lambda-1}}{2\lambda-1}\right|_{\ln t}^{\infty}\left(\lambda^2-\lambda+c\right)=\left(\lambda^2-\lambda+c\right)\frac{\ln^{2\lambda-1}t}{1-2\lambda}$$

olduğundan

$$\beta(t)=\frac{\lambda^2-\lambda+c}{1-2\lambda}\ln^{2\lambda-1}t<\infty$$

ayrıca $T>0$ için

$$\int^{\infty}\frac{1}{a(s)\rho(s)}\cdot\exp\left(-2\int_T^s\frac{\beta(\tau)}{a(\tau)\rho(\tau)}d\tau\right)ds$$

$$=\int_T^{\infty}\frac{1}{s\ln^{2\lambda}s}\exp\left(-2\int_T^s\frac{\left(\lambda^2-\lambda+c\right)}{(1-2\lambda)}\ln^{2\lambda-1}\tau\frac{1}{\tau\ln^{2\lambda}\tau}d\tau\right)ds$$

$$=e^{-2\left(\frac{\lambda^2-\lambda+c}{1-2\lambda}\right)}\lim_{b\to\infty}\int_T^b\frac{1}{s\ln^{2\lambda}s}\exp\left(\int_T^s\frac{1}{\tau}\ln^{-1}\tau d\tau\right)ds$$

$$=e^{-2\left(\frac{\lambda^2-\lambda+c}{1-2\lambda}\right)}\lim_{b\to\infty}\int_T^b\frac{1}{s\ln^{2\lambda}s}\exp\left(\int_{\ln T}^{\ln s}u^{-1}du\right)ds$$

$$=e^{-2\left(\frac{\lambda^2-\lambda+c}{1-2\lambda}\right)}\lim_{b\to\infty}\int_T^b\frac{1}{s\ln^{2\lambda}s}\frac{\ln s}{\ln T}ds$$

$$\int_T^{\infty}\frac{1}{a(s)\rho(s)}\exp\left(-2\int_T^{s}\frac{\beta(\tau)}{a(\tau)\rho(\tau)}d\tau\right)ds$$

$$=e^{-2\left(\frac{\lambda^2-\lambda+c}{1-2\lambda}\right)}\frac{1}{\ln T}\lim_{b\to\infty}\int_T^{b}\frac{1}{s}\ln^{1-2\lambda}sds$$

$$=e^{-2\left(\frac{\lambda^2-\lambda+c}{1-2\lambda}\right)}\frac{1}{\ln T}\lim_{b\to\infty}\left.\frac{u^{2-2\lambda}}{2-2\lambda}\right|_{\ln T}^{\ln b}$$

$$=\frac{1}{(2-2\lambda)\ln T}e^{-2\left(\frac{\lambda^2-\lambda+c}{1-2\lambda}\right)}\lim_{b\to\infty}\left(\ln b^{2-2\lambda}-\ln T^{2-2\lambda}\right)<\infty$$

elde ederiz. Böylece $\delta=2$ ile Sonuç 3.19 dan $c>\frac{1}{4}$ iken ele alınan diferensiyel denklemimizin salınımlı olduğunu söyleyebiliriz.

3.20. Sonuç:

$k(t)\in C^1\left([t_0,\infty),\mathbb{R}^+\right)$, $k'(t)=\dfrac{1}{a(t)\rho(t)}$ olsun. Eğer

$$\liminf_{t\to\infty} k(t)\beta(t)>\frac{1}{4} \tag{3.156}$$

ise, o zaman Eş. 3.1 salınımlıdır.

İspat:

Eş. 3.156 göz önünde bulundurulduğunda, $t\geq T\geq t_0$ ve $\lambda>\frac{1}{4}$ için $k(t)\beta(t)>\lambda$ eşitsizliğini sağlayan iki sabit vardır. O zaman

$$
\begin{aligned}
&\int_T^\infty \frac{1}{a(s)\rho(s)}\exp\left(-4\int_T^s \frac{\beta^+(\tau)}{a(\tau)\rho(\tau)}d\tau\right)ds \\
&< \int_T^\infty \frac{1}{a(s)\rho(s)}\exp\left(-4\lambda\int_T^s \frac{1}{a(\tau)\rho(\tau)k(\tau)}d\tau\right)ds \\
&= \int_T^\infty \frac{1}{a(s)\rho(s)}\exp\left(-4\lambda\int_T^s \frac{k'(\tau)}{k(\tau)}d\tau\right)ds \\
&= \int_T^\infty \frac{1}{a(s)\rho(s)}\exp\left(-4\lambda \ln k(\tau)\Big|_T^s\right)ds \\
&= \int_T^\infty \frac{1}{a(s)\rho(s)}\exp\left(4\lambda\left(\ln k(T)-\ln k(s)\right)\right)ds \\
&= \int_T^\infty \frac{1}{a(s)\rho(s)} e^{\ln(k(t))^{4\lambda}} e^{\ln(k(s))^{-4\lambda}} ds \\
&= \int_T^\infty \frac{1}{a(s)\rho(s)}\left(k(T)\right)^{4\lambda}\left(k(s)\right)^{-4\lambda} ds \\
&= \left(k(t)\right)^{4\lambda}\int_T^\infty \frac{1}{a(s)\rho(s)\left(k(s)\right)^{4\lambda}} ds \\
&= \left(k(T)\right)^{4\lambda}\lim_{t\to\infty}\int_T^t \frac{k'(s)}{\left(k(s)\right)^{4\lambda}} ds \\
&= \left(k(T)\right)^{4\lambda}\lim_{t\to\infty}\left.\frac{\left(k(s)\right)^{-4\lambda+1}}{-4\lambda+1}\right|_T^t \\
&= k(T)^{4\lambda}\frac{1}{1-4\lambda}\left(\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\left(k(t)\right)^{4\lambda-1}}\right)-\frac{1}{\left(k(T)\right)^{4\lambda-1}}\right) < \infty
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu da Eş. 3.154 deki koşuludur. Dolayısıyla Teorem 3.37 den Eş. 3.1 in salınımlı olduğu sonucunu çıkarırız.

3.16. Örnek:

$c > \dfrac{1}{4}$ olmak üzere

$$\left(\left(t\ln^2 t\right)x'(t)\right)' + \frac{c}{t}x(t) = 0, \qquad t \geq 2 \tag{3.157}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Burada $\sqrt{4c-1} < \lambda < -1$ olmak üzere $\rho(t) = \ln^{\lambda} t$ ve $k(t) = -\ln^{-1-\lambda} \dfrac{t}{1+\lambda}$ olsun. O zaman

$$h(t) = -\frac{\rho'(t)}{2\rho(t)} = -\frac{\lambda \ln^{\lambda-1} t}{2t\ln^{\lambda} t} = -\frac{\lambda}{2t\ln t},$$

$$h'(t) = \frac{-2\ln t - 2}{4t^2\ln^2 t} = -\frac{1}{t^2\ln t} - \frac{1}{t^2\ln^2 t},$$

olur ve buradan

$$Q(t) = \rho(t)\left[q(t) + a(t)h^2(t) - \left(a(t)h(t)\right)'\right]$$
$$= \ln^{\lambda} t\left[\frac{c}{t} + t\ln^2 t\frac{\lambda^2}{4t^2\ln^2 t} - \left(t\ln^2 t\left(-\frac{\lambda}{2t\ln t}\right)\right)'\right]$$
$$= \frac{c\ln^{\lambda} t}{t} + \frac{\lambda^2\ln^{\lambda} t}{4t} - \left(-\frac{\lambda\ln t}{2}\right)'\ln^{\lambda} t$$
$$= \left(c + \frac{\lambda^2}{4}\right)\frac{\ln^{\lambda} t}{t} + \frac{\lambda\ln^{\lambda} t}{2t} = \left(\frac{\lambda^2 + 2\lambda + 4c}{4}\right)\frac{\ln^{\lambda} t}{t},$$

elde edilir. Böylece

$$\beta(t) = \int_t^{\infty} Q(s)\,ds = \frac{\lambda^2 + 2\lambda + 4c}{4}\int_t^{\infty}\frac{\ln^{\lambda} s}{s}\,ds$$
$$= \frac{\lambda^2 + 2\lambda + 4c}{4}\lim_{b\to\infty}\int_t^{b}\frac{\ln^{\lambda} s}{s}\,ds$$
$$= \frac{\lambda^2 + 2\lambda + 4c}{4}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\ln^{\lambda+1} b}{\lambda+1} - \frac{\ln^{\lambda+1} t}{\lambda+1}\right)$$

$$\beta(t) = -\frac{\lambda^2 + 2\lambda + 4c}{4(\lambda+1)} \ln^{\lambda+1} t$$

olur ve

$$\liminf_{t\to\infty} k(t)\beta(t) = \liminf_{t\to\infty} \frac{\ln^{-1-\lambda} t}{1+\lambda} \frac{(\lambda^2 + 2\lambda + 4c)}{4(\lambda+1)} \ln^{\lambda+1} t$$

$$\liminf_{t\to\infty} k(t)\beta(t) = \frac{\lambda^2 + 2\lambda + 4c}{4(\lambda+1)^2} = \frac{(\lambda+1)^2 + 4c - 1}{4(\lambda+1)^2} = \frac{1}{4} + \frac{4c-1}{4(\lambda+1)^2} > \frac{1}{4}$$

buluruz. O zaman Sonuç 3.20 den $c > \frac{1}{4}$ iken Eş. 3.1 in salınımlı olduğunu söyleriz.

3.21. Sonuç:

$k(t) \in C^1([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$, $k'(t) = \frac{1}{a(t)\rho(t)}$ olsun. Eğer

$$\liminf \frac{t}{4a(t)\rho(t)}\left[4\beta^+(t) + \left(a(t)\rho(s)\right)'\right] > \frac{1}{4} \tag{3.158}$$

ise o zaman Eş. 3.1 salınımlıdır.

İspat:

Eş. 3.158 göz önünde bulundurulduğunda, $t \geq T$ için

$$\frac{t}{4a(t)\rho(t)}\left[4\beta^+(t) + \left(a(t)\rho(t)\right)'\right] > c$$

ya da

$$\frac{\beta^{+}(t)}{a(t)\rho(t)} > \frac{c}{t} - \frac{\left(a(t)\rho(t)\right)'}{4a(t)\rho(t)}$$

sağlayan $T \geq t_0$ ve $c > \dfrac{1}{4}$ iki sabit vardır. O zaman

$$\begin{aligned}
&\int_T^{\infty} \frac{1}{a(s)\rho(s)} \exp\left(-4\int_T^{s} \frac{\beta^{+}(\tau)}{a(\tau)\rho(\tau)} d\tau\right) ds \\
&< \int_T^{\infty} \frac{1}{a(s)\rho(s)} \exp\left(\int_T^{s} \left[-\frac{4c}{\tau} + \frac{\left(a(\tau)\rho(\tau)\right)'}{a(\tau)\rho(\tau)}\right] d\tau\right) ds \\
&= \int_T^{\infty} \frac{1}{a(s)\rho(s)} \exp\left(-4c \ln \tau\Big|_T^s + \ln\left(a(\tau)\rho(\tau)\right)\Big|_T^s\right) ds \\
&= \frac{T^{4c}}{a(T)\rho(T)} \int_T^{\infty} \frac{1}{a(s)\rho(s)} \left(s^{-4c} a(s)\rho(s)\right) ds \\
&= \frac{T^{4c}}{a(T)\rho(T)} \lim_{b\to\infty} \int_T^{b} s^{-4c} ds \\
&= \frac{T^{4c}}{a(T)\rho(T)} \lim_{b\to\infty} \frac{s^{1-4c}}{1-4c}\Bigg|_T^b \\
&\int_T^{\infty} \frac{1}{a(s)\rho(s)} \exp\left(-4\int_T^{s} \frac{\beta^{+}(\tau)}{a(\tau)\rho(\tau)} d\tau\right) ds < \infty
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece Teorem 3.37 den Eş. 3.1 in salınımlı olduğunu söyleyebiliriz.

3.17. Örnek:

$c > 1/4$ iken

$$x''(t) + \frac{c}{t^2} x(t) = 0$$

Euler denklemini ele alalım. $\lambda < 1$ bir sabit olmak üzere $\rho(t) = t^{\lambda}$ alalım. Buradan

$$h(t) = -\frac{\rho'(t)}{2\rho(t)} = -\frac{\lambda t^{\lambda-1}}{2t^{\lambda}} = -\frac{\lambda}{2t},$$

$$h'(t) = \frac{\lambda}{2}\frac{1}{t^2},$$

$$\begin{aligned} Q(t) &= \rho(t)\left[q(t) + a(t)h^2(t) - \left(a(t)h(t)\right)'\right] \\ &= t^{\lambda}\left[\frac{c}{t^2} + \frac{\lambda^2}{4t^2} - \left(\frac{\lambda}{2t^2}\right)\right] \\ &= \frac{\left(\lambda^2 - 2\lambda + 4c\right)}{4} t^{\lambda-2} \end{aligned}$$

buluruz. $t \geq T > 0$ için

$$\begin{aligned} \beta(t) &= \int_t^{\infty} Q(s)\,ds = \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 4c}{4} \lim_{b\to\infty} \int_t^b s^{\lambda-2} ds \\ &= \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 4c}{4(\lambda - 1)} \lim_{b\to\infty} s^{\lambda-1}\Big|_t^b \\ &= \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 4c}{4(1-\lambda)} t^{\lambda-1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &\liminf_{t\to\infty} \frac{t}{4a(t)\rho(t)}\left[4\beta^{+}(t) + \left(a(t)\rho(t)\right)'\right] \\ &= \liminf_{t\to\infty} \frac{t}{4t^{\lambda}}\left[\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 4c}{1-\lambda} t^{\lambda-1} + \lambda t^{\lambda-1}\right] \\ &= \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{4t^{\lambda-1}}\left[\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 4c + \lambda - \lambda^2}{1-\lambda} t^{\lambda-1}\right] = \frac{4c - \lambda}{4(1-\lambda)} \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $\left(c-(\lambda/4)\right)/(1-\lambda)>1/4$ iken, Sonuç 3.21 den Euler denkleminin salınımlı olduğunu söyleyebiliriz.

Eş. 3.10 da, $t\geq t_0$ için $Q(t)>0$ ise, o zaman aşağıdaki sonucu çıkarabiliriz.

3.38. Teorem:

$t\geq t_0$ için $Q(t)>0$ ve $k(t)\in C^1\left([t_0,\infty),\mathbb{R}^+\right)$, $k'(t)=\dfrac{1}{a(t)\rho(t)}$ olsun. Eğer

$$\limsup_{t\to\infty} k(t)\beta(t)>1 \tag{3.159}$$

ise, o zaman Eş. 3.1 salınımlıdır.

*İspat***:**

Eş. 3.1 in salınımsız olduğunu kabul edelim. Teorem 3.5 den, bir $T\geq t_0$ vardır öyle ki

$$v(t)=\beta(t)+\int_t^\infty \frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds,$$

olarak yazılabilir. Burada

$$v(t)=a(t)\rho(t)\frac{w'(t)}{w(t)} \tag{3.160}$$

dir ve $w(t)$, $t\geq T$ için $w(t)>0$ ile Eş. 3.10 un bir çözümüdür. $t\geq t_0$ için $Q(t)>0$ ise, o zaman $a(t)\rho(t)w'(t)$ fonksiyonu kesin azalandır ve $t\geq T$ için $v(t)\geq\beta(t)$

dir. Ayrıca $t \geq T$ için $w'(t) > 0$ olduğunu kontrol etmek kolaydır.

$$\frac{w(t)}{k(t)w'(t)} = \frac{w(T) + \int_T^t \frac{a(s)\rho(s)}{a(s)\rho(s)} w'(s)ds}{k(t)w'(t)} = \frac{w(T) + \int_T^t a(s)\rho(s)k'(s)w'(s)ds}{k(t)w'(t)}$$

$$\frac{w(t)}{k(t)w'(t)} \geq \frac{w(T) + a(t)\rho(t)w'(t)\left[k(t) - k(T)\right]}{k(t)w'(t)}$$

$$\geq a(t)\rho(t)\left(\frac{k(t) - k(T)}{k(t)}\right)$$

olduğundan Eş. 3.159 ile çelişen

$$\limsup_{t\to\infty} k(t)\beta(t) \leq \limsup_{t\to\infty} k(t)v(t) \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{k(t)}{k(t)-k(T)} = 1$$

sonucuna ulaşırız.

3.39. Teorem:

Eğer

$$\int^{\infty} \frac{\beta(s)}{a(s)\rho(s)} ds < \infty \tag{3.161}$$

ve Eş. 3.24 de tanımlanan $\xi(t)$ için

$$\int^{\infty} \frac{1}{a(s)\rho(s)} \exp\left(-4\int^{s} \frac{\xi(\tau)}{a(\tau)\rho(\tau)} d\tau\right) ds < \infty \tag{3.162}$$

sağlanırsa, o zaman Eş. 3.1 salınımlıdır.

3.40. Teorem:

Eş. 3.1 salınımsız ve

$$\int^{\infty} a(s)\rho(s)\exp\left(2\int^{s}\frac{\xi(\tau)}{a(\tau)\rho(\tau)}d\tau\right)ds=\infty \tag{3.163}$$

ise, o zaman Eş. 3.1

$$\int^{\infty} a(s)u^2(s)ds<\infty$$

sağlayan bir $u(t)$ çözümüne sahip olamaz.

İspat:

Eş. 3.1 salınımsız olduğundan, Teorem 3.5 den, $v(t)$ Eş. 3.160 da tanımlanan fonksiyon ve $w(t)$, Eş. 3.10 un bir çözümü olmak üzere

$$v(t)=\beta(t)+\int_t^{\infty}\frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds$$

olacak şekilde bir $T\geq t_0$ ve bir $v(t)\in C([T,\infty),\mathbb{R})$ fonksiyonu vardır. Böylece tüm $t\geq T$ ler için

$$\frac{d}{dt}\ln w(t)=\frac{w'(t)}{w(t)}=\frac{v(t)}{a(t)\rho(t)}=\frac{1}{a(t)\rho(t)}\left[\beta(t)+\int_t^{\infty}\frac{v^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds\right]\geq\frac{\beta(t)}{a(t)\rho(t)}$$

elde ederiz. Bu da bize

$$
\begin{aligned}
\int^{\infty} a(s)u^2(s)\,ds &= \int^{\infty} a(s)\rho(s)w^2(s)\,ds \\
&\geq \int^{\infty} a(s)\rho(s)\exp\left(2\int^{s}\frac{\beta(\tau)}{a(\tau)\rho(\tau)}d\tau\right)ds = \infty
\end{aligned}
$$

olduğunu verir.

4. FORCED (ZORLA) SALINIMLAR

4.1. Homogen Olmayan Damping Terimli Denklemelr

$a(t)\in C([t_0,\infty),\mathbb{R}^+)$ ve $e(t), p(t), q(t)\in C([t_0,\infty),\mathbb{R})$ verilen fonksiyonlar olmak üzere

$$\left(a(t)x'(t)\right)' + p(t)x'(t)+q(t)x(t)=e(t) \tag{4.1}$$

formundaki diferensiyel denkleme *ikinci basamaktan forced (homojen olamayan) diferensiyel denklem* denir. Bu bölümde Eş. 4.1 deki forced denklemlerinin salınım davranışlarını inceleyeceğiz. Ayrıca bu bölümde

$$\left(a(t)z'(t)\right)' + p(t)z'(t)+q(t)z(t)=0 \tag{4.2}$$

forced olmayan (homojen) denklemin salınımsız olduğunu kabul edeceğiz.

$z(t)$, Eş. 4.2 nin bir aşikar olmayan çözümü olsun. Bu durumda Lemma 3.6 dan $z(t)$,

$$\rho(t)=\exp\left(\int^{t}\frac{p(s)}{a(s)}ds\right) \tag{4.3}$$

olmak üzere

$$\int^{\infty}\frac{1}{a(s)\rho(s)z^2(s)}ds<\infty \tag{4.4}$$

eşitliğini sağlar. Bu bölümde kullanacağımız $\psi(t)$ fonksiyonu

$$\psi(t)=\int^{t}\frac{1}{a(s)\rho(s)z^{2}(s)}\left(\int^{s}e(u)\rho(u)z(u)du\right)ds \tag{4.5}$$

olarak tanımlayalım.

4.1. Teorem:

Eş. 4.2 salınımsız ve $z(t)$ aşikar olmayan bir çözüm olsun. Eğer

$$\limsup_{t\to\infty}\psi(t)=-\liminf_{t\to\infty}\psi(t)=\infty \tag{4.6}$$

ise Eş. 4.1 salınımlıdır.

İspat:

$\rho(t)$, Eş. 4.3 de tanımlanan fonksiyon olmak üzere Eş. 4.1 de $x(t)=y(t)z(t)$ değişken değiştirme yaparsak Eş. 4.1,

$$\begin{aligned}&\left(a(t)\rho(t)z^{2}(t)y'(t)\right)'+z(t)\left[\left(a(t)z'(t)\right)'+p(t)z'(t)+q(t)z(t)\right]\rho(t)y(t)\\&=e(t)\rho(t)z(t)\end{aligned} \tag{4.7}$$

denklemine dönüşür. c_1 ve c_2, $y(t_0)$ ve $y'(t_0)$ başlangıç koşullarına bağlı olan sabitler olmak üzere Eş. 4.7 nin integrasyonu yardımıyla $y(t)$ fonksiyonunu

$$y(t)=c_1+c_2\int_{t_0}^{t}\frac{1}{a(s)\rho(s)z^{2}(s)}ds+\int_{t_0}^{t}\frac{1}{a(s)\rho(s)z^{2}(s)}\left(\int_{t_0}^{s}e(u)\rho(u)z(u)du\right)ds$$

olarak ifade edebiliriz. $z(t)$ aşikar olmayan bir çözüm olduğundan Eş. 4.4 ve Eş. 4.6, $y(t)$ nin

$$\limsup_{t\to\infty} y(t) = -\liminf_{t\to\infty} y(t) = \infty \tag{4.8}$$

eşitliğini sağladığını gösterir. $z(t)$, salınımsız olduğundan $t \geq t_1 \geq t_0$ için $z(t) \neq 0$ dır. Böylece Eş. 4.8, $y(t)$ nin salınımlı olduğunu gösterir. Dolayısıyla $x(t) = y(t)z(t)$ fonksiyonu da salınımlıdır.

4.1. Örnek:

α, β, k birer sabit olmak üzere

$$x''(t) + \frac{\sin kt}{t} x(t) = t^{\alpha} \sin \beta t, \qquad t \geq t_0 > 0 \tag{4.9}$$

forced diferensiyel denklemini ele alalım. $|k| > \sqrt{2}$ için

$$z''(t) + \frac{\sin kt}{t} z(t) = 0 \tag{4.10}$$

lineer forced olmayan denklem salınımsızdır. Eş. 4.10, $\gamma = \left(\left(k^2 - 2\right)/\left(4k^2\right)\right)^{1/2} > 0$ olmak üzere $t \to \infty$ iken

$$z_1(t) \sim t^{\gamma+(1/2)} = t^{\gamma+(1/2)}\left[1 + o(1)\right]$$

ve

$$z_2(t) \sim t^{-\gamma+(1/2)} = t^{-\gamma+(1/2)}\left[1+o(1)\right]$$

asimtotik davranışlar yapan $z_1(t)$ ve $z_2(t)$ lineer bağımsız iki çözüme sahiptir. Böylece $z_1(t)$, aşikar olmayan bir çözümdür. Eş. 4.5 de $z_1(t)$ ve $t^{\alpha}\sin\beta t$ yi yerine yazarsak, $\alpha > \gamma + (1/2)$ ve herhangi bir $\beta \neq 0$ olduğunda Eş. 4.6 nın sağlandığını görürüz. $\gamma < 1/2$ olduğundan, herhangi bir $\alpha > 1$ ve bütün $\beta, k \neq 0$ için Eş. 4.9 salınımsızdır.

4.2. Örnek:

$e \in C([t_0,\infty),\mathbb{R})$ ve $t \geq t_0 > 0$ olmak üzere

$$x''(t) - x(t) = e(t) \tag{4.11}$$

forced diferensiyel denklemini ele alalım. Burada $a(t)=1,\ p(t)=0$ ve $\rho(t)=1$ dir. Lineer forced olmayan $z''(t)-z(t)=0$ denkleminin lineer bağımsız iki çözümü e^{-t} ile e^{t} dir. Açıktır ki $z(t)=e^{t}$ aşikar olmayan bir çözümdür. Dolayısıyla $z''(t)-z(t)=0$ salınımsız bir denklemdir.

Şimdi aşağıdaki iki durumu ele alalım:

(i) $e(t)=\sin t$ olsun. O zaman $\psi(t)=\int^{t} e^{-2s}\left(\int^{s} e^{\tau}\sin\tau d\tau\right)ds$ olur. Açıktır ki bütün $t>0$ ler için $|\psi(t)|<\infty$ olur ve böylece Eş. 4.6 sağlanmaz. Bu durumda Eş. 4.11 in genel çözümü c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $x(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{t}-(1/2)\sin t$ olur. Bu çözüm, yeterince büyük tüm *t* ler ve $c_2 \neq 0$ için salınımsızdır.

(ii) $\delta > 0$ ve $\varepsilon > 1$ birer sabit olmak üzere $e(t) = t^{\delta} e^{t} \sin t$ ya da $e^{\varepsilon t} \sin t$ olsun. $z(t) = e^{t}$ ile $e(t)$ yi Eş. 4.5 de yerine yazarsak Eş. 4.6 nın sağlandığını buluruz. Böylece Teorem 4.1 den Eş. 4.11 in salınımlı olduğunu buluruz. Dolayısıyla büyük forced terimler salınımlılığı doğurur.

4.3. Örnek:

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \sin t, \qquad t \geq t_0 > 0 \tag{4.12}$$

forced diferensiyel denklemini ele alalım. Burada $a(t) = 1$, $p(t) = 2$ ve $\rho(t) = e^{2t}$ dir. Lineer forced olmayan $z''(t) + 2z'(t) + z(t) = 0$ denkleminin lineer bağımsız iki çözümü e^{-t} ile te^{-t} dir. $\psi(t) = \int^{t} (1/s^2)\left(\int^{s} \tau e^{\tau} \sin \tau d\tau\right) ds$ olduğundan Eş. 4.6 sağlanır. Böylece Teorem 4.1 yardımıyla Eş. 4.12 nin salınımlı olduğunu söyleyebiliriz.

c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere Eş. 4.12 nin genel çözümü $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} - (1/2)\sin t$ dir. Bu çözüm tüm büyük *t* ler için salınımlıdır. Eş. 4.4 sağlanmadığından yani $z(t)$, Eş. 4.2 nin aşikar çözümü olduğundan aşağıdaki sonucu ele alabiliriz.

4.2. Teorem:

$\rho(t)$, Eş. 4.3 de ve $\psi(t)$, Eş. 4.5 de tanımlanan fonksiyonlar olmak üzere, her bir $t_0 > 0$ ve bazı $m > 0$ sabitleri için

$$\liminf_{t\to\infty} \int_0^t e(s)\rho(s)z(s)ds = -\infty \text{ ve } \limsup_{t\to\infty} \int_{t_0}^t e(s)\rho(s)z(s)ds = \infty \tag{4.13}$$

$$\left|\psi(t)\right| \le m\int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)\rho(s)z^2(s)}ds \tag{4.14}$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(s)\rho(s)z^2(s)}ds = \infty \tag{4.15}$$

koşullarını sağlayan Eş. 4.2 nin bir pozitif $z(t)$ çözümü varsa Eş. 4.1 salınımlıdır.

İspat:

$x(t)$, Eş. 4.1 nin eninde sonunda pozitif bir çözümü olsun. yani $t \ge t_0 \ge 0$ için $x(t) > 0$ olsun. $x(t) = y(t)z(t)$ ile tanımlanan $y(t)$ fonksiyonu Eş. 4.7 nin salınımsız bir çözümü olsun. *T* yeterince büyük olmak üzere Eş. 4.7 yi $T > t_0$ den *t* ye integrallersek

$$a(t)\rho(t)z^2(t)y'(t) = a(T)\rho(T)z^2(T)y'(T) + \int_{T}^{t} e(s)\rho(s)z(s)ds \tag{4.16}$$

elde ederiz ve Eş. 4.13 yardımıyla $\liminf\limits_{t\to\infty} a(t)\rho(t)z^2(t)y'(t) = -\infty$ buluruz. Daha sonra

$$a(t_1)\rho(t_1)z^2(t_1)y'(t_1) < -2m, \quad m > 0 \tag{4.17}$$

eşitliğini sağlayan yeterince büyük bir $t_1 \ge T$ seçelim. Eş. 4.16 da T yerine t_1 alıp t_1 den *t* ye integralleyip Eş. 4.14 ile Eş. 4.17 yi kullanırsak

$$y(t) \le y(t_1) - m\int_{t_1}^{t} \frac{1}{a(s)\rho(s)z^2(s)}ds$$

elde ederiz. Böylece Eş. 4.15 yardımıyla $y(t)$ çözümünün eninde sonunda negatif olduğunu söyleyebiliriz. Bu da $x(t)$ nin eninde sonunda pozitif olması kabulümüzle çelişir.

4.4. Örnek:

$$x''(t)-3x'(t)+2x(t)=e^{3t}\sin t,\qquad t\geq 0 \tag{4.18}$$

forced diferensiyel denklemini ele alalım. $z''(t)-3z'(t)+2z(t)=0$ forced olmayan denklem salınımsızdır. Hakikaten e^{t} ve e^{2t} bu denklemin lineer bağımsız iki çözümüdür. Burada $z(t)=e^{t}$ alalım. $a(t)=1$ ve $p(t)=-3$ olduğundan $\rho(t)=e^{-3t}$ buluruz. Böylece Eş. 4.14 ve Eş. 4.15 koşulları sağlanır. Buradan Eş. 4.13 ün sağlandığını görmek kolaydır ve böylece, Teorem 4.2 yardımıyla Eş. 4.18 salınımlıdır. $z(t)=e^{2t}$ çözümünü aşikar olmayan bir çözüm olarak alırsak Teorem 4.1 den aynı sonuca ulaşırız.

4.1. Sonuç:

Her bir $t_0>0$ için Eş. 4.6 ve Eş. 4.13 ün sağlandığı Eş. 4.2 nin bir pozitif $y(t)$ çözümü varsa Eş. 4.1 salınımlıdır.

Eş. 4.1 in özel bir durumu olan

$$\left(a(t)x'(t)\right)'+q(t)x(t)=e(t) \tag{4.19}$$

denklemini ele alıp aşağıdaki sonucu ifade edelim.

4.3. Teorem:

n_0, bir sabit pozitif tam sayı olmak üzere bütün $n\geq n_0$ lar için c_n^{+},c_n^{-} pozitif sabitler

ve

$$V^{\pm}=\int_{p_n^{\pm}}^{p_n^{\pm}+\pi/\sqrt{c_n^{\pm}}}\Big[c_n^{\pm}\left(1-q(s)\right)\cos^2\left(\sqrt{c_n^{\pm}}\left(t-p_n^{\pm}\right)\right)+\left(q(s)-c_n^{\pm}\right)\sin^2\left(\sqrt{c_n^{\pm}}\left(t-p_n^{\pm}\right)\right)\Big]ds\geq 0 \tag{4.20}$$

olan iki pozitif artan ıraksak $\{p_n^{+}\}$, $\{p_n^{-}\}$ dizileri ve iki $\{c_n^{+}\}$, $\{c_n^{-}\}$ dizisi var olsun. Ayrıca bütün $n\geq n_0$ lar için $e(t)$ fonksiyonu

$$e(t)\begin{cases}\geq 0 & t\in\left[p_n^{+},p_n^{+}+\pi/\sqrt{c_n^{+}}\right.\\ \leq 0 & t\in\left[p_n^{-},p_n^{-}+\pi/\sqrt{c_n^{-}}\right.\end{cases} \tag{4.21}$$

olsun. O zaman Eş. 4.19 salınımlıdır.

Aşağıdaki sonuç, Teorem 4.3 ü genişletir.

4.4. Teorem:

Herhangi bir $T\geq 0$ için

$$e(t)\begin{cases}\leq 0 & t\in\left[s_1,t_1\right]\\ \geq 0 & t\in\left[s_2,t_2\right]\end{cases} \tag{4.22}$$

olan $T\leq s_1\leq t_1\leq s_2\leq t_2$ var olsun. Eğer $i=1,2$ için

$$Q_i(u)=\int_{s_i}^{t_i}\left[q(s)u^2(s)-a(s)\left(u'(s)\right)^2\right]ds\geq 0 \tag{4.23}$$

eşitsizliğini sağlayan

$$u(t) \in D(s_i, t_i) = \{u(t) \in C^1([s_i, t_i], \mathbb{R}) : u(t) \neq 0, u(s_i) = u(t_i) = 0\}$$

varsa, Eş. 4.19 salınımlıdır [13].

4.2. Monoton Artan *f* Çarpanlı Forced Denklem Hali

a, e, p ve *q* fonksiyonları Eş. 4.1 deki fonksiyonlar ve $x \neq 0$ için $f(x) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $xf(x) > 0$ olmak üzere, daha genel forced denklem olan

$$\left(a(t)x'(t)\right)' + p(t)x'(t) + q(t)f\left(x(t)\right) = e(t) \tag{4.24}$$

denklemini ele alacağız.

Eş. 4.24 için aşağıdaki salınım kriteri, Teorem 4.3 ile 4.4 ü genişletip birleştirir. Bunun için Teorem 4.4 deki her bir $T \geq 0$, $T \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2$ ve $i = 1, 2$ için $D(s_i, t_i)$ kümesine ihtiyacımız olacak.

4.5. Teorem:

k bir reel sabit olmak üzere $x \neq 0$ için

$$f'(x) \geq k > 0 \tag{4.25}$$

olsun ve her bir $T \geq 0$ için Eş. 4.22 yi sağlayan $T \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2$ var olsun. Eğer

$$\gamma(t) = a(t)\rho'(t) - p(t)\rho(t) \tag{4.26}$$

olmak üzere $i=1,2$ için

$$Q_i(u)=\int_{s_i}^{t_i}\rho(s)\left[q(s)u^2(s)-\frac{a(s)}{k}\left(u'(s)+\frac{\gamma(s)}{2a(s)\rho(s)}\right)^2\right]ds\geq 0 \tag{4.27}$$

eşitsizliğini sağlayan $\rho(t)=C^1([s_i,t_i],\mathbb{R}^+)$ ve $u(t)\in D(s_i,t_i)$ varsa, Eş. 4.24 salınımlıdır.

İspat:

$x(t)$, Eş. 4.24 ün bir salınımsız çözümü olsun. Burada genelliği bozmaksızın $t\geq t_0\geq 0$ için $x(t)>0$ alalım. $t\geq t_0$ için $w(t)=-\rho(t)a(t)x'(t)\big/ f(x(t))$ tanımlayalım. O zaman $t\geq t_0$ için

$$\begin{aligned}
w'(t)&=-(a(t)x'(t))'\frac{\rho(t)}{f(x(t))}-\frac{(a(t)x'(t))(\rho(t)f'(x(t))-\rho'(t)f(x(t)))}{f^2(x(t))}\\
&=\frac{p(t)x'(t)\rho(t)}{f(x(t))}+q(t)\rho(t)-\frac{e(t)\rho(t)}{f(x(t))}-f'(x(t))\frac{a(t)(x'(t))^2\rho(t)}{f^2(x(t))}\\
&\qquad-\frac{a(t)x'(t)\rho'(t)}{f(x(t))}\\
&=\rho(t)q(t)-\frac{\rho(t)e(t)}{f(x(t))}+f'(x(t))\frac{w^2(t)}{a(t)\rho(t)}-\frac{x'(t)}{f(x(t))}(a(t)\rho'(t)-p(t)\rho(t))
\end{aligned}$$

$$w'(t)=\rho(t)q(t)-\frac{\rho(t)e(t)}{f(x(t))}+f'(x(t))\frac{w^2(t)}{a(t)\rho(t)}+\frac{\gamma(t)}{a(t)\rho(t)}w(t) \tag{4.28}$$

elde ederiz. Hipotez yardımıyla, $t_1\geq t_0$, $s_1<t_1$ olan s_1 seçebiliriz. Böylece $I=[s_1,t_1]$ üzerinde $e(t)\leq 0$ olur. Dolayısıyla I aralığında $w(t)$ fonksiyonu

$$w'(t) \geq \rho(t)q(t) + \frac{\gamma(t)}{a(t)\rho(t)}w(t) + f'(x(t))\frac{w^2(t)}{a(t)\rho(t)} \tag{4.29}$$

eşitsizliğini sağlar. Hipotezdeki gibi $u(t) \in D(s_1, t_1)$ olsun. Eş. 4.29 un her iki tarafını u^2 ile çarpıp I üzerinden integrallersek,

$$\begin{aligned}\int_I u^2(s)w'(s)ds \geq \int_I u^2(s)\rho(s)q(s)ds + \int_I \frac{\gamma(s)}{a(s)\rho(s)}u^2(s)w(s)ds \\ + \int_I f'(x(s))u^2(s)\frac{w^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds\end{aligned} \tag{4.30}$$

buluruz. Eş. 4.30 un sol tarafına kısmi integrasyon uygularsak ve $u(s_1) = u(t_1) = 0$ olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned}-2\int_I u(s)u'(s)w(s)ds \geq \int_I u^2(s)\rho(s)q(s)ds + \int_I \frac{\gamma(s)}{a(s)\rho(s)}u^2(s)w(s)ds \\ + \int_I f'(x(s))u^2(s)\frac{w^2(s)}{a(s)\rho(s)}ds\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlik $t \in I$, $y(t) = u(t)/f(x(t))$ olmak üzere

$$0 \geq \int_I \left[\sqrt{\frac{f'(x(s))}{a(s)\rho(s)}}u(s)w(s) + \left(u'(s) - \frac{\gamma(s)u(s)}{2a(s)\rho(s)}\right)\sqrt{\frac{a(s)\rho(s)}{f'(x(s))}}\right]^2 ds + Q_1(u) \tag{4.31}$$

eşitsizliğine denktir. $Q_1(u) \geq 0$ olduğundan Eş. 4.31 in

$$\frac{f'(x(t))}{a(t)\rho(t)}u(t)\left(-\rho(t)\frac{a(t)x'(t)}{f(x(t))}\right) + u'(t) + \frac{\gamma(t)u(t)}{2a(t)\rho(t)} = 0$$

olduğu, yani

$$\left[-\frac{f'\big(x(t)\big)x'(t)}{f\big(x(t)\big)}u(t)+u'(t)\right]+\frac{\gamma(t)u(t)}{2a(t)\rho(t)}=0$$

veya

$$f\big(x(t)\big)\frac{d}{dt}\left(\frac{u(t)}{f\big(x(t)\big)}\right)+\frac{\gamma(t)u(t)}{2a(t)\rho(t)}=0$$

ya da

$$\frac{d}{dt}y'(t)+\frac{\gamma(t)}{2a(t)\rho(t)}y(t)=0,\quad I \text{ üzerinde} \tag{4.32}$$

eşitliğini verir. Eş. 4.32 den $t\in I$,

$$c(t)=\exp\left(\int_{s_1}^{t}\frac{\gamma(s)}{2a(s)\rho(s)}ds\right)$$

olmak üzere I üzerinde $\big(c(t)y(t)\big)'=0$ olduğu sonucu çıkar. Bu yüzden c bir sabit olmak üzere $c(t)y(t)=c$ dir ve böylece I üzerinde $u(t)=cf\big(x(t)\big)/c(t)$ dir. $u(t)\in D(s_1,t_1)$ ve $u(t)\neq 0$ olduğundan $u(t_1)=u(s_1)=0$ olamaz. $u\in D$ olması ile çelişir.

Eninde sonunda $x(t)<0$ olduğunda, benzer çelişkiye ulaşmak için $[s_2,t_2]$ üzerinde $u(t)\in D(s_2,t_2)$ ve $e(t)\geq 0$ olması durumlarını kullanırız. Böylece $x(t)$ nin salınımsız olması mümkün değildir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.5 i Eş. 4.19 a uyarlamak için aşağıdaki formu ele alacağız.

4.2. Sonuç:

Herhangi bir $T \geq 0$ için Eş. 4.22 yi sağlayan $T \leq s_1 \leq t_1 \leq s_2 \leq t_2$ var olsun. Eğer $i = 1,2$ için

$$Q_i(u) = \int_{s_i}^{t_i} \rho(s)\left[q(s)u^2(s) - a(s)\left(u'(s) + \frac{\rho'(s)}{2\rho(s)}u(s) \right)^2 \right] ds \geq 0 \qquad (4.33)$$

eşitsizliğini sağlayan $\rho(t) = C^1\left([s_i, t_i], \mathbb{R}^+\right)$ ve $u(t) \in D(s_i, t_i)$ varsa, Eş. 4.19 salınımlıdır.

4.1. Uyarı:

Sonuç 4.2 de $\rho(t) = 1$ alırsak Teorem 4.4 sonucuna ulaşırız. Ayrıca, ağırlık fonksiyonu

$$\rho(t) = \exp\left(\int^t \frac{p(s)}{a(s)} ds \right) \qquad (4.34)$$

ise Eş. 4.26 da tanımlanan $\gamma(t)$, sıfır olacaktır. Böylece Teorem 4.5 deki Eş. 4.27 $i = 1,2$ için

$$Q_i(u) = \int_{s_i}^{t_i} \rho(s)\left[q(s)u^2(s) - \frac{a(s)}{k}\left(u'(s)\right)^2 \right] ds \geq 0 \qquad (4.35)$$

formunu alır.

4.5. Örnek:

$$\left(\sqrt{t}x'(t)\right)' + \frac{1}{\sqrt{t}}x'(t) + \frac{1}{\sqrt{t}}x(t) = \sin\sqrt{t}, \qquad t > 0 \tag{4.36}$$

forced denklemini ele alalım. Burada $\sin\sqrt{t}$ forcing teriminin sıfırları $(n\pi)^2, n \in \mathbb{Z}$ değerleridirler.

Herhangi bir $T \geq 0$ için $(n\pi)^2 \geq T$ olan yeterince büyük n seçelim ve $s_1 = (n\pi)^2$ ve $t_1 = (n+1)^2\pi^2$ olsun. $u(t) = \sin\sqrt{t}$, $\rho(t) = t$ ve $k = 1$ alalım, o zaman

$$\begin{aligned}
Q_1(u) &= \int_{s_1}^{t_1}\left[\rho(s)q(s)u^2(s) - a(s)\rho(s)\left(u'(s)\right)^2\right]ds \\
&= \int_{n^2\pi^2}^{(n+1)^2\pi^2} \sqrt{s}\left(\sin^2\sqrt{s} - \frac{1}{4}\cos^2\sqrt{s}\right)ds \\
&= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} 2v^2\left(\sin^2 v - \frac{1}{4}\cos^2 v\right)dv \\
&= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{v^2}{4}\left(3 - 5\cos 2v\right)dv \\
&= \frac{3n^2+3n+1}{4}\pi^3 - \frac{5}{16}\pi > 0
\end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer şekilde $s_2 = (n+1)^2\pi^2$ ve $t_2 = (n+2)^2\pi^2$ için $Q_2(u) > 0$ olduğunu gösterebiliriz. Böylece Teorem 4.5 den Eş.4.36 nın salınımlı olduğu görülür

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Fen bilimlerinde bir çok uygulama sahasına sahip olan ikinci basamaktan adi diferensiyel denklemlerin salınımlılığı son zamanlarda oldukça popüler bir çalışma sahası olarak karşımıza çıkmaktadır. Biz bu çalışmamızda

$$x''(t)+q(t)x(t)=0$$

ile

$$\left(p(t)x'(t)\right)'+q(t)x(t)=0$$

denklemlerinin çözümlerinin salınımlı olabilmeleri için yeter koşulları ortaya koymaya çalıştık.

Bundan sonra bu konuda çalışmak isteyen araştırmacılar bizim ilgilendiğimiz denklem modellerini içine alan daha genel diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık davranışları ile ilgili kullanılabilir koşullar elde etmek için çalışabilirler.

Bu çalışma sahasının önü açık olup denklem modellerini genelleme ve yeter koşulları yalın hale getirme ilerleyen zamanlarda araştırmacıların ilgi odağı olacağı düşüncesindeyiz.

KAYNAKLAR

1. Fite, W. B., "Concerning zeros of the solutions of certain differential equations”, ***Trans. Amer. Math. Soc.***, 117: 341-352 (1918).

2. Wintner, A., “A criterion of oscillatory stability”, ***Quart. Appl. Math.***, 7: 115-117 (1949).

3. Leighton, W., “The detection of oscillation of solutions of second-order differential equations”, ***Duke Math.*** 17: 57-62 (1950).

4. Picone, M., “Sui valorieccezionali di un parametro de cui dipends un equazioni differenziale lineare ordinaria del second ordine” , ***Ann. Scuola Norm. Pisa***, 11: 1-141 (1909).

5. Swanson, C. A., “Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations”, ***Academic Press***, New York, 1-109 (1968).

6. Kreith, K., “Oscillation Theory, Lecture Notes in Math.”, ***Springer Verlag***, New York, 324 (1973).

7. Agarwal, R. P., Grace,S. R. And O’Regan, D., “Oscillation Theory for Second Order Linear, Half-Linear, Superlinear and Sublinear Dynamic Equations” , ***Kluwer Academic Publishers***, London, 1- 92 (2002).

8. Simmons, G., “Differential Equations with Applications and Historical Notes”, ***Mc Graw-Hill***, NewYork, 158 (1972).

9. Graef, J. R., Rankin, S. M. and Spikes, P. W., “Oscillation theorems for perturbed nonlinear differential equations”, ***J. Math. Anal. Appl.***, 65: 375-390 (1978).

10. Leighton, W., “The detection of the oscillation of solutions of a second order linear differential equation”, ***Duke J. Math.*** , 17: 57-62 (1950).

11. Willet, D., “On the oscillatory behavior of the solutions of second order linear differential equations”, ***Ann. Polon. Math.***, 21: 175-194 (1969).

12. Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Polya, G., “Inequalities, 2nd ed.”, ***Cambridge Univ. Press***, (1988).

13. Wong, J. S. W., “Oscillation criteria for a forced second order linear differential equation”, ***J. Math. Anal. Appl.***, 231: 235-240 (1999).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: KÜLAH, Şükran
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 03.04.1987 Nazilli
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 505 820 69 13
e-mail	: sukran19kulah86@hotmail.com.

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2013
Lisans	Gazi Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2009
Lise	Nazilli Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2010-2011	Halk Eğitim Merkezi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce