ÖRTÜ DÖNÜŞÜMLERİ GRUPLARI

Gökhan MUTLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2013
ANKARA

Gökhan MUTLU tarafından hazırlanan "ÖRTÜ DÖNÜŞÜMLERİ GRUPLARI" adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL ……………………………
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ …………………………….
Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.

Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL ……………………………
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Prof. Dr. Nurhayat İSPİR ……………………………..
Matematik Anabilim Dalı, G.Ü.

Tez Savunma Tarihi: 10/07/2013

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU …………………………
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Gökhan MUTLU

ÖRTÜ DÖNÜŞÜMLERİ GRUPLARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Gökhan MUTLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2013

ÖZET

Bu tezde, örtü dönüşümleri grupları ve bu grupların ilgili topolojik uzaylar üzerindeki etkisi incelenmiştir. İlk olarak, örtü uzayları ile ilgili temel kavramlar ifade edilmiş, örtü uzaylarının sınıflandırılması ve örtü uzayları ile esas gruplar arasındaki ilişkiler açıklanmıştır. Daha sonra, topolojik uzaylar üzerine düzgün süreksiz olarak etki eden örtü dönüşümleri grupları incelenmiştir. Son olarak, S.Kinoshita tarafından ifade edilen Sperner Şartı'nı sağlayan dönüşüm grupları ile ilgili sonuçlar ele alınmıştır.

Bilim Kodu	**: 204.1.095**
Anahtar Kelimeler	**: Örtü dönüşümleri grupları, örtü dönüşümleri, grupların düzgün süreksiz etkileri, Sperner Şartı, Sperner Şartı'nı sağlayan dönüşüm grupları**
Sayfa Adedi	**: 55**
Tez Yöneticisi	**: Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL**

COVERING TRANSFORMATIONS GROUPS

(M.Sc. Thesis)

Gokhan MUTLU

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
July 2013

ABSTRACT

In this thesis, covering transformations groups and actions of these groups on related topological spaces are studied. Firstly, fundamental concepts related to covering spaces are introduced, then classification of covering spaces and relations between fundamental groups and covering spaces are explained. Furthermore, covering transformations groups acting properly discontinuously on related topological spaces are studied. Finally, the results concerning transformation groups which satisfy Sperner's condition introduced by S.Kinoshita are examined.

Science Code	**: 204.1.095**
Key Words	**: Covering transformations groups, covering transformations, properly discontinuous actions of groups, Sperner's condition, transformation groups which satisfy Sperner's condition**
Page Number	**: 55**
Adviser	**: Prof. Dr. Ahmet Ali OCAL**

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında ilgi ve desteği ile beni yönlendiren, bilgi ve birikimlerinden yararlanma fırsatı veren değerli danışmanım Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL'a ve bu süreçte beni hiç yalnız bırakmayan sevgili aileme ve dostlarıma teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simge	Açıklama
a^{-1}	a elemanının tersi
c_y	y noktasındaki sabit fonksiyon
e	birim eleman
f^{-1}	f eğrisinin tersi
$f \simeq g$	f ve g fonksiyonları homotoptur
$f * g$	f ve g eğrilerinin çarpımı
$[f]$	f 'nin homotopi sınıfı
$F : f \simeq g$	f ve g, F homotopisi ile homotoptur
G_x	x 'in G içindeki dengeleyicisi
$G \cong H$	G ve H grupları izomorftur
$[G : H]$	H 'nin G içindeki indeksi
$H \leq G$	H, G 'nin altgrubudur
$H \lhd G$	H, G 'nin normal altgrubudur
I	$[0,1]$ kapalı aralığı
$N_G(H)$	H altgrubunun G içindeki normalleyeni
$o(x)$	x 'in yörüngesi
$p\|_U$	p fonksiyonunun U kümesine kısıtlanışı
S^1	merkezcil birim çember
$\overline{U}$	U kümesinin kapanışı
$\lvert X \rvert$	X kümesinin kardinalitesi
X / G	X 'in G grubuna göre yörünge uzayı

Simge	Açıklama
$\pi_1(X, x)$	X uzayının x noktasındaki esas grubu
1_X	X 'den X 'e tanımlı özdeş fonksiyon

1. GİRİŞ

Örtü uzayları konusu sadece Cebirsel Topoloji'de değil Diferensiyel Geometri, Lie Grupları ve Riemann Yüzeyleri gibi alanlarda da önemli bir yer teşkil etmektedir.

Modern matematikte esas grup, örtü uzayı ve düzgün süreksiz grup etkisi kavramları birbirine o denli bağlıdır ki bunlardan her biri diğer ikisini belirler. Tarihsel olarak bu kavramlar ters sırada ortaya çıkmışlardır.

Örtü uzayları kavramının ilk ortaya çıkışı Riemann sayesinde olmuştur. Düzlemin bir bölgesini örten ve birbiri üzerine konumlanmış çok katlı bir yüzey fikri ilk olarak Riemann tarafından ortaya atılmıştır ve bu fikir örtü uzaylarının bir çeşidi olan dallanmış örtü uzaylarının temelini oluşturmaktadır.

Esas gruplar, bir topolojik uzayın bütün örtü uzaylarının sınıflandırılmasında önemli rol oynarlar. Diğer taraftan örtü uzayları, bazı özel koşullar altında ilgili topolojik uzayın esas grubunun hesaplanmasına olanak sağlar. Bir topolojik uzayın bir örtü uzayı verildiğinde bu örtü uzayı yardımıyla düzgün süreksiz bir grup etkisi bulunabilir. Tersine, bir topolojik uzay üzerinde düzgün süreksiz bir grup etkisi verildiğinde bu etkinin sonucu olarak bir örtü uzayı bulunabilir. Çalışmamızda bu ilişkilerin tümü ele alınmış ve açıklanmıştır.

Örtü uzayları, Cebirsel Topoloji'nin önemli bir konusu olan Lifleme Teorisi'ne temel oluşturmaktadır. Son yıllarda ise dallanmış Riemann yüzeylerinin bir genelleştirilmesi olan çatallı örtü uzayları ile ilgili çalışmalar yapılmaktadır.

Bu tezin amacı, örtü dönüşümleri grupları, düzgün süreksiz grup etkileri ve Sperner Şartı'nı sağlayan grup etkileri üzerine bir inceleme sunmak bu konular arasındaki ilişkileri açıklamaktır.

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür.

Çalışmamız boyunca kullanacağımız temel tanım ve teoremlerin verildiği ikinci bölümde bazı topolojik ve cebirsel kavramlar kısaca tanıtılmış ve esas gruplar ile ilgili temel tanım ve özellikler ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde örtü uzayları ile ilgili temel tanımlar ve teoremler ifade edilerek örtü uzaylarının bazı önemli özellikleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde bir X topolojik uzayının esas grubu ile bu uzayın bir örtü uzayının esas grubu arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca X 'in esas grubunun altgrupları ile X 'in örtü uzayları arasındaki ilişkiler açıklanmıştır.

Beşinci bölümde örtü uzaylarının sınıflandırılmasını açıklamak için bir topolojik uzayının iki örtü uzayının denk olması ifade edilerek ve belirli şartları sağlayan topolojik uzayların bütün örtü uzaylarının bu denklik farkıyla belirlenebileceği gösterilmiştir.

Altıncı bölümde örtü dönüşümleri ve örtü dönüşümleri grubu ile ilgili tanım ve teoremler ifade edilmiş ve örtü dönüşümleri grubu ile esas grup arasındaki ilişki açıklanmıştır.

Son olarak yedinci bölümde düzgün süreksiz grup etkisi ile ilgili tanımlar ve teoremler ifade edilmiştir. Ayrıca "Notes on Covering Transformations" [1] adlı makalede S.Kinoshita tarafından ifade edilen Sperner Şartı'nı sağlayan grup etkileri tanıtılarak bu grup etkileri ile ilgili sonuçlar incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışmamız boyunca kullanacağımız temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

2.1. Bazı Topolojik Kavramlar

2.1.1. Tanım:

X bir topolojik uzay olsun ve $I=\left[0,1\right]=\left\{x\in\mathbb{R}: 0\leq x\leq 1\right\}$ diyelim. Bu durumda aşağıdaki tanımları verebiliriz.

(i) $f:I\to X$ sürekli fonksiyonuna X 'de bir eğri denir. $f(0)$ noktasına f eğrisinin başlangıç noktası, $f(1)$ noktasına f eğrisinin bitiş noktası denir.

(ii) X boş olmayan ayrık iki açık kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa X topolojik uzayı irtibatlıdır denir.

(iii) X 'in herhangi iki noktası X 'de bir eğri ile bağlanabiliyorsa, bir başka ifadeyle; her $x, y\in X$ için $x=f(0), y=f(1)$ olacak biçimde bir $f:I\to X$ eğrisi varsa X topolojik uzayı eğrisel irtibatlıdır denir.

(iv) Her $x\in X$ ve x noktasının her U açık komşuluğu için $x\in V\subset U$ olacak biçimde eğrisel irtibatlı ve açık bir V kümesi varsa X topolojik uzayı yerel eğrisel irtibatlıdır denir.

2.1.2. Teorem [12]:

Eğrisel irtibatlı her topolojik uzay irtibatlıdır.

2.1.3. Teorem [2]:

X topolojik uzayı irtibatlı ve yerel eğrisel irtibatlı ise eğrisel irtibatlıdır.

2.1.4 Uyarı:

Teorem 2.1.2'nin tersi doğru değildir, yani irtibatlı bir topolojik uzay eğrisel irtibatlı olmayabilir. Örneğin; $f:\left(0,\frac{1}{2\pi}\right]\to[-1,1],\ f(x)=\sin\frac{1}{x}$ fonksiyonun grafiği $G_f=\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right):0<x\leq\frac{1}{2\pi}\right\}$ olmak üzere $\overline{G_f}=G_f\cup\left\{(0,y)\in\mathbb{R}^2:-1\leq y\leq 1\right\}$ uzayı irtibatlıdır ancak eğrisel irtibatlı değildir.

Yerel eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay eğrisel irtibatlı olmayabilir. Benzer şekilde eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay yerel eğrisel irtibatlı olmayabilir. Örneğin; $f:\left(0,\frac{1}{2\pi}\right]\to[-1,1],\ f(x)=\sin\frac{1}{x}$ fonksiyonun grafiği $G_f=\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right):0<x\leq\frac{1}{2\pi}\right\}$ olmak üzere $\overline{G_f}=G_f\cup\left\{(0,y)\in\mathbb{R}^2:-1\leq y\leq 1\right\}$ dir. g eğrisi $\mathbb{R}^2$ uzayında $(0,1)$ noktasını $\left(\frac{1}{2\pi},0\right)$ noktasına birleştiren bir eğri olmak üzere X uzayı $\overline{G_f}$ kümesi ile g eğrisinin noktalarının birleşimi olsun. X eğrisel irtibatlıdır ancak yerel eğrisel irtibatlı değildir.

2.1.5. Teorem [8]:

Eğrisel irtibatlı bir topolojik uzayın sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsü de eğrisel irtibatlıdır.

2.1.6. Tanım:

X bir topolojik uzay olmak üzere aşağıdaki tanımları verelim.

(i) $x \neq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için $x \in G, y \notin G$ ve $x \notin H, y \in H$ şartlarını sağlayan $G, H \subset X$ açık kümeleri varsa, X topolojik uzayına T_1-uzayı denir.

(ii) $x \neq y$ olacak biçimdeki her $x, y \in X$ için $x \in G, y \in H$ ve $G \cap H = \emptyset$ şartlarını sağlayan $G, H \subset X$ açık kümeleri varsa, X topolojik uzayına T_2-uzayı ya da Hausdorff uzayı denir.

(iii) X 'in her kapalı A altkümesi ve her $x \notin A$ için $x \in G, A \subset H$ ve $G \cap H = \emptyset$ şartlarını sağlayan $G, H \subset X$ açık kümeleri varsa, X topolojik uzayına T_3-uzayı denir. Eğer X topolojik uzayı T_1-uzayı ve T_3-uzayı ise, X topolojik uzayına regüler uzay denir.

2.1.7. Teorem [7]:

Her regüler uzay bir Hausdorff uzayıdır. Ayrıca bir regüler uzayın her altuzayı da regülerdir.

2.1.8. Teorem [12]:

X bir Hausdorff uzayı ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin bir yığılma noktasının her komşuluğu A kümesine ait sonsuz nokta içerir.

2.1.9. Tanım:

X bir topolojik uzay olsun. Eğer X 'in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü bulunabiliyorsa X topolojik uzayı kompakttır denir.

2.1.10. Teorem [8]:

X bir topolojik uzay olsun. X 'in sonlu sayıda kompakt altkümelerinin birleşimi kompakttır.

2.1.11. Teorem [8]:

X kompakt topolojik uzayının sonsuz her altkümesinin X 'de en az bir yığılma noktası vardır.

2.1.12. Teorem [6]:

X bir Hausdorff uzayı, $D \subset X$ kompakt ve $x \notin D$ ise $x \in V$, $D \subset W$ ve $V \cap W = \varnothing$ olacak biçimde X 'de açık olan V, W altkümeleri vardır.

2.1.13. Tanım:

Her $x \in X$ için x noktasının kompakt bir komşuluğu varsa X topolojik uzayı yerel kompakttır denir.

Tanım 2.1.13'ten açıkça görülmektedir ki, her kompakt topolojik uzay yerel kompakttır. Ancak bunun tersi doğru değildir. Örneğin; $\mathbb{R}$ kümesi alışılmış topoloji ile kompakt değildir. Ancak; her $x \in \mathbb{R}$ için $x \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ sayısı bulunabilir ve $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ kümesi $\mathbb{R}$ 'de kompakt olup x noktasının bir komşuluğudur. Dolayısıyla $\mathbb{R}$ kümesi alışılmış topoloji ile yerel kompakt bir topolojik uzaydır.

2.1.14. Teorem [8]:

X bir topolojik uzay olsun. Her $x \in X$ için $\overline{U}$ kompakt olacak biçimde x noktasının bir U komşuluğu var ise X topolojik uzayı yerel kompakttır.

2.1.15. Uyarı:

Bazı kaynaklarda yerel kompaktlık tanımı olarak şu tanım verilmektedir; Her $x \in X$ için $\overline{U}$ kompakt olacak biçimde x noktasının bir U komşuluğu varsa X topolojik uzayı yerel kompakttır denir. Ancak Teorem 2.1.14'ten görülmektedir ki; Tanım2.1.13 daha geneldir.

2.1.16. Teorem [8]:

X bir Hausdorff uzayı olsun. Bu durumda; X topolojik uzayı yerel kompakttır ancak ve ancak her $x \in X$ için $\overline{U}$ kompakt olacak biçimde x noktasının bir U komşuluğu vardır.

2.1.17. Teorem [8]:

Her yerel kompakt, Hausdorff uzayı bir regüler uzaydır.

2.1.18. Teorem [8]:

X, Y topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ fonksiyonu sürekli, örten ve açık olsun. Eğer X yerel kompakt ise Y de yerel kompakttır.

2.1.19. Tanım:

X, Y topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu sürekli, birebir, örten ve $f^{-1} : Y \to X$ fonksiyonu sürekli ise f'ye bir homeomorfizm denir. Eğer X'den Y'ye tanımlı bir $f : X \to Y$ homeomorfizmi varsa X ve Y topolojik uzayları homeomorftur veya eşyapılıdır denir.

Tanım 2.1.19'a göre X ve Y topolojik uzayları homeomorftur ancak ve ancak $g \circ f = 1_X$ ve $f \circ g = 1_Y$ olacak biçimde $f : X \to Y$ ve $g : Y \to X$ sürekli fonksiyonları vardır.

2.1.20. Tanım:

X, Y topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer X 'de açık olan her U kümesi için $f(U)$ kümesi Y 'de açık oluyorsa f 'ye bir açık fonksiyon denir.

2.1.21. Teorem [7]:

X, Y topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f homeomorfizmdir ancak ve ancak f fonksiyonu sürekli, birebir, örten ve açıktır.

2.2. Bazı Cebirsel Kavramlar

2.2.1. Tanım:

G bir grup, $H \subset G$ ve $H \neq \varnothing$ olsun. Eğer H kümesi G üzerinde tanımlanan işlemle bir grup oluyorsa H, G 'nin bir altgrubur denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

2.2.2. Tanım:

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $a \in G$ olmak üzere $aH = \{ah : h \in H\}$ kümesine H 'nin G içindeki bir sol yan kümesi, $Ha = \{ha : h \in H\}$ kümesine H 'nin G içindeki bir sağ yan kümesi denir.

2.2.3. Teorem [9]:

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur.

(i) $\forall a \in G$ için $|Ha| = |H| = |aH|$

(ii) $\forall a, b \in G$ için $aH = bH$ ya da $aH \cap bH = \varnothing$ tur.

(iii) G kümesi H 'nin G içindeki bütün farklı sol kosetlerinin ayrık birleşimi olarak yazılabilir.

(iv) H 'nin G içindeki bütün farklı sol kosetlerinin sayısı, H 'nin G içindeki bütün farklı sağ kosetlerinin sayısına eşittir.

2.2.4. Tanım:

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. H 'nin G içindeki bütün farklı sol ya da sağ kosetlerinin sayısına H 'nin G içindeki indeksi denir ve $[G:H]$ ile gösterilir.

2.2.5. Tanım:

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. H aşağıda verilen ve birbirine denk olan şartlardan birini sağlıyorsa H, G 'nin normal altgrubur denir ve $H \lhd G$ ile gösterilir.

(i) $\forall a \in G$ için $aH = Ha$

(ii) $\forall a \in G$ için $aHa^{-1} = H$

(iii) $\forall a \in G$ ve $\forall h \in H$ için $aha^{-1} \in H$

2.2.6. Tanım:

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$ kümesine H altgrubunun G içindeki normalleyeni denir. $H \lhd N_G(H)$ dır. Ayrıca $H \lhd G$ olması için gerek ve yeter koşul $G = N_G(H)$ olmasıdır.

2.2.7. Tanım:

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $a \in G$ olmak üzere $aHa^{-1} = \{aha^{-1} : h \in H\}$ kümesine H altgrubunun G içindeki bir eşleniği denir. Açık olarak $aHa^{-1} \leq G$ ve $\left|aHa^{-1}\right| = |H|$ dır.

Tanım 2.2.5'e göre G'nin bir H altgrubunun G'nin normal altgrubu olması için gerek ve yeter şart H altgrubunun G içindeki bütün eşleniklerinin H'ye eşit olmasıdır.

2.2.8. Tanım:

G bir grup ve $H, K \leq G$ olsun.

$H \sim K \iff \exists g \in G \ni K = gHg^{-1}$

bağıntısını tanımlayalım. Bu bağıntı G'nin bütün altgruplarının oluşturduğu küme üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıya göre H'nin denklik sınıfı $[H] = \{gHg^{-1} : g \in G\}$ olup bu kümeye H'nin G içindeki eşlenik sınıfı denir.

2.2.9. Tanım:

G bir grup ve $H \lhd G$ olsun. H'nin G içindeki bütün farklı sol ya da sağ kosetlerinin kümesini $G/H = \{gH : g \in G\} = \{Hg : g \in G\}$ ile gösterelim. $aH, bH \in G/H$ olmak üzere G/H üzerinde bir ikili işlemi

$(aH)(bH) = (ab)H$

biçiminde tanımlayalım. Bu işleme göre G/H bir gruptur. Bu gruba G'nin bir bölüm grubu denir.

2.2.10. Tanım:

G ve H iki grup ve $f: G \to H$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall a, b \in G$ için $f(ab) = f(a)f(b)$ oluyorsa f 'ye G 'den H 'ye bir grup homomorfizmi denir.

G ve H iki grup ve $f: G \to H$ bir grup homomorfizmi olsun. Eğer f birebir ise f 'ye grup monomorfizmi, f örten ise f 'ye grup epimorfizmi, f birebir ve örten ise f 'ye grup izomorfizmi denir. Eğer f izomorfizm ise G, H 'ye izomorftur denir ve $G \cong H$ ile gösterilir.

2.2.11. Tanım:

G ve H iki grup ve $f: G \to H$ bir grup homomorfizmi olsun.
$Ker\ f = \{x \in G : f(x) = e_H\}$ ve $\operatorname{Im} f = \{f(x) : x \in G\}$
kümelerine sırasıyla f 'nin çekirdeği ve f 'nin görüntüsü denir. Eğer $\operatorname{Im} f = \{e_H\}$ ise f 'ye sıfır homomorfizmi denir.

2.2.12. Teorem [9]:

G ve H iki grup ve $f: G \to H$ bir grup homomorfizmi olsun. $A \leq G$ ve $B \leq H$ ise aşağıdaki önermeler doğrudur.
(i) $Ker\ f \lhd G$
(ii) $f(A) \leq H$
(iii) $f^{-1}(B) \leq G$

2.2.13. Teorem [10]: (1. İzomorfizma Teoremi)

G ve H iki grup ve $f: G \to H$ bir grup homomorfizmi ise $G / Ker\ f \cong \operatorname{Im} f$ dir.

2.2.14. Tanım:

G bir grup ve A boş olmayan bir küme olsun.

(i) $\forall a \in A$ için $e \cdot a = a$

(ii) $\forall a \in A$ ve $\forall g, h \in G$ için $(gh) \cdot a = g \cdot (h \cdot a)$

şartlarını sağlayan

$G \times A \to A,\ (g,a) \to g \cdot a$

fonksiyonu varsa G grubu A kümesi üzerine etki eder denir ve A'ya bir G-kümesi denir.

2.2.15. Tanım:

G grubu A kümesi üzerine etki etsin. Eğer $\forall x, y \in G$ için $\exists g \in G \ni y = g \cdot x$ oluyorsa G grubu A kümesi üzerine geçişli olarak etki eder denir.

2.2.16. Tanım:

G grubu A kümesi üzerine etki etsin ve $x \in A$ olsun. $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$ kümesine x'in G içindeki dengeleyicisi ve $o(x) = \{g \cdot x : g \in G\}$ kümesine ise x'in G içindeki yörüngesi denir.

2.2.17. Teorem [10]:

G grubu A kümesi üzerine etki etsin ve $x \in A$ olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur.

(i) $G_x \leq G$

(ii) $|o(x)| = [G : G_x]$

2.2.18. Teorem [9]:

G grubu A kümesi üzerine etki etsin. $a,b \in A$ olmak üzere

$a \sim b \;\Leftrightarrow\; \exists g \in G \;\ni\; b = g \cdot a$

şeklinde tanımlanan bağıntı A üzerinde bir denklik bağıntısıdır ve $x \in A$ ise x'in bu bağıntıya göre denklik sınıfı $o(x) = \{g \cdot x : g \in G\}$ dir. Dolayısıyla A kümesini $A = \bigcup\{o(x) : x \in A\}$ şeklinde yörüngelerin ayrık birleşimi olarak yazabiliriz.

Örnek:

G bir grup olsun. $G = A$ alırsak

$G \times G \to G,\ (g,a) \to g \cdot a = gag^{-1}$

şeklinde tanımlanan fonksiyonla G grubu kendi üzerine etki eder. Bu etkiye G'nin kendi üzerine eşlenikleme etkisi denir. $x \in G$ ise bu etki için

$o(x) = \{gxg^{-1} : g \in G\} = Cl_G(x)$ ve $G_x = \{g \in G : gx = xg\} = C_G(x)$

olur. Burada $Cl_G(x)$ kümesine x'in G içindeki eşlenik sınıfı ve $C_G(x)$ kümesine ise x'in G içindeki merkezleyeni denir.

Örnek:

G bir grup olsun. A kümesi olarak G'nin bütün altgruplarının oluşturduğu kümeyi alalım.

$G \times A \to A,\ (g,H) \to g \cdot H = gHg^{-1}$

şeklinde tanımlanan fonksiyonla G grubu A üzerine etki eder. Bu etkiye G'nin altgrupları üzerine eşlenikleme etkisi denir. $H \in A$ ise bu etki için

$o(H) = \{gHg^{-1} : g \in G\}$ ve $G_H = \{g \in G : gH = Hg\} = N_G(H)$

olur. Burada $o(H) = \{gHg^{-1} : g \in G\}$ kümesi Tanım 2.2.8'de ifade edilen H'nin G içindeki eşlenik sınıfı ve $G_H = \{g \in G : gH = Hg\}$ kümesi Tanım 2.2.6'da ifade edilen H altgrubunun G içindeki normalleyenidir. Teorem 2.2.18'den A kümesini $A=\bigcup\{o(x):x\in A\}$ biçiminde G'nin altgruplarının eşlenik sınıflarının ayrık birleşimi olarak yazabiliriz.

2.3. Esas Gruplar ve Bazı Özellikleri

2.3.1. Tanım:

X bir topolojik uzay ve $x_0\in X$ olsun. (X,x_0) sıralı ikilisine bir noktalı topolojik uzay denir.

(X,x_0) ve (Y,y_0) birer noktalı topolojik uzay, $f:X\to Y$ fonksiyonu sürekli ve $f(x_0)=y_0$ olsun. Bu durum $f:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ şeklinde gösterilir.

2.3.2. Tanım:

$I=[0,1]$ olmak üzere; X, Y topolojik uzaylar ve $f,g:X\to Y$ sürekli fonksiyonlar olsun. Her $x\in X$ için $F(x,0)=f(x)$ ve $F(x,1)=g(x)$ olacak biçimde sürekli bir $F:X\times I\to Y$ fonksiyonu varsa f, g'ye homotoptur denir ve $f\simeq g$ ile gösterilir. Ayrıca F'ye bir homotopi denir ve $F: f\simeq g$ ile gösterilir.

2.3.3. Tanım:

X, Y topolojik uzaylar ve $y\in Y$ olsun. $c_y:X\to Y$, $c_y(x)=y$ şeklinde tanımlanan fonksiyona y noktasındaki sabit fonksiyon denir. $f:X\to Y$ sürekli fonksiyon olsun. Eğer $f\simeq c_y$ olacak biçimde bir $c_y:X\to Y$ sabit fonksiyonu varsa f sabite homotoptur denir. Eğer 1_X özdeş fonksiyonu sabite homotop ise X topolojik uzayı büzülebilirdir denir.

Örneğin; $n \geq 1$ ise $D^n = \left\{ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \leq 1 \right\}$ birim diski büzülebilirdir.

2.3.4. Tanım:

X, Y topolojik uzaylar ve $f : X \to Y$ sürekli fonksiyon olsun. $f \circ g \simeq 1_Y$ ve $g \circ f \simeq 1_X$ olacak biçimde sürekli bir $g : Y \to X$ fonksiyonu varsa f 'ye bir homotopi eşdeğerlilik denir. Eğer bir $f : X \to Y$ homotopi eşdeğerliliği varsa X ve Y topolojik uzayları aynı homotopi tipindendir denir.

2.3.5. Teorem [2]:

X topolojik uzayı büzülebilirdir ancak ve ancak X topolojik uzayı tek noktadan oluşan topolojik uzayla aynı homotopi tipindendir.

2.3.6. Uyarı:

Açık olarak X ve Y topolojik uzayları homeomorf ise aynı homotopi tipindendir. Ancak bunun tersi doğru değildir. Örneğin; D^n birim diski büzülebilir olduğundan Teorem 2.3.5'ten tek noktadan oluşan topolojik uzayla aynı homotopi tipindendir. Ancak D^n ve tek noktadan oluşan topolojik uzay homeomorf değildir.

2.3.7. Tanım:

X bir topolojik uzay $f, g : I \to X$ iki eğri ve $f(1) = g(0)$ olsun.

$$f * g : I \to X , \ \ (f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & , \ 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \ \text{ise} \\[2ex] g(2t-1) & , \ \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \ \text{ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $f * g$ fonksiyonu X 'de bir eğri olup bu eğriye f ve g eğrilerinin çarpımı denir.

2.3.8. Tanım:

X bir topolojik uzay, f ve g, X ’de başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan iki eğri olsun. $I = [0,1]$ olmak üzere;

(i) $\forall x \in I$ için $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = g(x)$

(ii) $\forall t \in I$ için $F(0,t) = f(0) = g(0)$ ve $F(1,t) = f(1) = g(1)$

şartlarını sağlayan sürekli bir $F : I \times I \to X$ fonksiyonu varsa, f ve g eğrileri homotoptur denir ve $f \simeq g$ ile gösterilir. Ayrıca F ’ye bir homotopi denir ve $F : f \simeq g$ ile gösterilir.

2.3.9. Teorem [2]:

X bir topolojik uzay olsun. Homotop olma bağıntısı X ’de başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan eğrilerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

f, X ’de bir eğri olmak üzere f ’nin homotop olma bağıntısına göre denklik sınıfı $[f]$ ile gösterilir.

2.3.10. Tanım:

X bir topolojik uzay ve f, X ’de bir eğri olsun. $f^{-1} : I \to X$, $f^{-1}(t) = f(1-t)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon X ’de bir eğri olup bu eğriye f eğrisinin tersi denir. Eğer $f(0) = f(1) = x_0$ ise f ’ye kapalı bir eğri ya da x_0 ’da bir eğri denir.

2.3.11. Teorem [6]:

X bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. $\pi_1(X, x_0) = \{ [f] : f, x_0 \text{'da bir eğri} \}$ diyelim. Bu küme üzerinde $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$ olmak üzere;

$[f][g] = [f * g]$

işlemini tanımlayalım. Her $[f],[g],[h] \in \pi_1(X,x_0)$ için aşağıdakiler sağlanır.

(i) $[f][g] \in \pi_1(X,x_0)$

(ii) $([f][g])[h] = [f]([g][h])$

(iii) $[f][c_{x_0}] = [c_{x_0}][f] = [f]$

(iv) $[f][f^{-1}] = [f^{-1}][f] = [c_{x_0}]$

Teorem 2.3.11'den görülmektedir ki $\pi_1(X,x_0)$ kümesi bir gruptur. Bu gruba X topolojik uzayının x_0 noktasındaki esas grubu denir. Bu grubun birim elemanı $[c_{x_0}]$ ve bir $[f]$ elemanının tersi $[f^{-1}]$ dir.

2.3.12. Teorem [2]:

X, Y, Z topolojik uzaylar ve $f, g : X \to Y$ fonksiyonları sürekli olsun. $h : Y \to Z$ sürekli fonksiyonu verilsin. Eğer $f \simeq g$ ise $h \circ f \simeq h \circ g$ dir.

2.3.13. Tanım:

X, Y topolojik uzaylar ve $h : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda

$h_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1(Y,y_0)$, $h_*([f]) = [h \circ f]$

şeklinde tanımlanan fonksiyona h tarafından belirlenen homomorfizm denir ve h_* ile gösterilir.

2.3.14. Teorem [2]:

X eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ise her $x_0, y_0 \in X$ için $\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,y_0)$ dır.

Teorem 2.3.14'den X eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ise bütün noktalardaki esas grupları izomorf olduğundan $\pi_1(X, x_0)$ gösterimi yerine $\pi_1(X)$ gösterimi kullanılabilir.

2.3.15. Tanım:

X topolojik uzayı eğrisel irtibatlı ve her $x_0 \in X$ için $\pi_1(X, x_0) = \{e\}$ ise X topolojik uzayı basit irtibatlıdır denir.

2.3.16. Teorem [6]:

Birim çemberin esas grubu tamsayıların toplamsal grubuna izomorftur.

3. ÖRTÜ UZAYLARI

Bu bölümde örtü uzayları ile ilgili temel tanım ve teoremler ifade edilecektir.

3.1. Tanım:

X bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan ($\tilde{X}$, p) ikilisine X 'in bir örtü uzayı denir.

(i) $\tilde{X}$ eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay,

(ii) $p:\tilde{X} \rightarrow X$ fonksiyonu sürekli,

(iii) Her $x \in X$ için x 'in bir U açık komşuluğu vardır öyle ki; $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ ve her $i \in I$ için $p|_{U_I} : U_i \rightarrow U$ bir homeomorfizm olacak biçimde ayrık ve $\tilde{X}$ 'da açık U_i alt kümeleri vardır.

Burada p 'ye bir örtü izdüşümü, her $i \in I$ için U_i 'ye U üzerinde bir yaprak, U 'ya ise x noktasının bir elemanter komşuluğu denir.

Örnek 1:

S^1 birim çember olmak üzere $p:\mathbb{R} \rightarrow S^1$ fonksiyonunu $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ olarak tanımlayalım. $(\mathbb{R}, p)$, S^1 uzayının bir örtü uzayıdır. Burada p fonksiyonu her $n \in \mathbb{Z}$ için $[n, n+1]$ aralığını birim çemberin üzerine sarıyor gibi düşünebiliriz.

Örnek 2:

Düzlemde kutupsal koordinatları kullanırsak birim çemberi $S^1 = \{ (r,t) : r = 1,\ \mathrm{t} \in [0, 2\pi] \}$ şeklinde ifade edebiliriz. $n \neq 0$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $p: S^1 \to S^1$ fonksiyonunu $p(1,t)=(1,nt)$ olarak tanımlayalım. (S^1, p), S^1 uzayının bir örtü uzayıdır. Burada p fonksiyonu birim çemberi kendi etrafına n defa sarıyor gibi düşünebiliriz.

3.2. Lemma [2]:

($\tilde{X}$, p), X topolojik uzayının bir örtü uzayı olsun. $p: \tilde{X} \to X$ fonksiyonu örten ve açıktır. Ayrıca X topolojik uzayı eğrisel irtibatlıdır.

3.3. Lemma [1,2]:

($\tilde{X}$, p), X topolojik uzayının bir örtü uzayı olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur.

(i) X yerel eğrisel irtibatlı $\Rightarrow$ $\tilde{X}$ yerel eğrisel irtibatlıdır.

(ii) X yerel kompakt $\Rightarrow$ $\tilde{X}$ yerel kompakttır.

(iii) X Hausdorff uzayı $\Rightarrow$ $\tilde{X}$ Hausdorff uzayıdır.

(iv) X regüler uzay $\Rightarrow$ $\tilde{X}$ regüler uzaydır.

3.4. Lemma [2]:

($\tilde{X}$, p), X topolojik uzayının bir örtü uzayı ve $x_0, x_1 \in X$ olsun. Bu durumda $\left| p^{-1}(x_0) \right| = \left| p^{-1}(x_1) \right|$ dir.

3.5. Tanım:

($\tilde{X}$, p), X topolojik uzayının bir örtü uzayı olsun. Her $x \in X$ için ortak olan $\left| p^{-1}(x) \right|$ sayısına ($\tilde{X}$, p) örtü uzayının yaprak sayısı denir. Eğer ($\tilde{X}$, p)'nin yaprak sayısı n ise ($\tilde{X}$, p), X 'in n-katlı örtü uzayıdır denir. Örnek 2'deki (S^1, p) S^1'in n-katlı örtü uzayıdır.

3.6. Tanım:

($\tilde{X}$, p), X topolojik uzayının bir örtü uzayı, Y bir topolojik uzay ve $f : Y \to X$ fonksiyonu sürekli olsun. $p \circ \tilde{f} = f$ olacak biçimde $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ sürekli fonksiyonu varsa $\tilde{f}$ 'ya f 'nin bir yükseltmesi denir.

3.7. Teorem [2]:

($\tilde{X}$, p), X topolojik uzayının bir örtü uzayı, Y irtibatlı bir topolojik uzay ve $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ fonksiyonu sürekli olsun. $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ verilmiş olsun. Eğer $p \circ \tilde{f} = f$ olacak biçimde $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ sürekli fonksiyonu varsa tektir.

($\tilde{X}$, p), X topolojik uzayının bir örtü uzayı ve f, $\tilde{X}$ 'da bir eğri olsun. Bu durumda $p \circ f$ de X 'de bir eğridir. Üstelik f ve g, $\tilde{X}$ 'da iki eğri ve $f \simeq g$ ise Teorem 2.3.12'den $p \circ f \simeq p \circ g$ dir. Lemma 3.8 ve Lemma 3.9 bu sonuçların ikisinin de terslerinin doğru olduğunu göstermektedir.

3.8. Lemma [3]:

($\tilde{X}$, p), X topolojik uzayının bir örtü uzayı, $x_0 \in X$ ve f, X 'de x_0 noktasında başlayan bir eğri olsun. $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ verildiğinde $p \circ \tilde{f} = f$ olacak biçimde $\tilde{x}_0$ 'da başlayan bir $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ eğrisi vardır ve tektir.

3.9. Lemma [3]:

$(\tilde{X}, p)$, X topolojik uzayının bir örtü uzayı, f ve g, $\tilde{X}$ ’da aynı noktada başlayan iki eğri ve $p \circ f \simeq p \circ g$ ise f ve g nin bitiş noktaları aynı olup $f \simeq g$ dir.

3.10. Teorem [4]:

$(\tilde{X}, p)$, X topolojik uzayının bir örtü uzayı, f ve g, X ’de iki eğri ve $F : f \simeq g$ olsun. f ’nin bir $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ yükseltmesi verildiğinde $p \circ \tilde{F} = F$ olacak biçimde bir $\tilde{F} : \tilde{f} \simeq \tilde{g}$ homotopisi vardır ve tektir.

3.11. Sonuç [4]:

$(\tilde{X}, p)$, X topolojik uzayının bir örtü uzayı, f ve g, X ’de iki eğri ve $f(0) = g(0) = x_0$, $f(1) = g(1) = x_1$ olsun. $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ verilsin. Lemma 3.6’dan f ’nin $\tilde{x}_0$ ’da başlayan bir tek yükseltmesi $\tilde{f}$ ve g ’nin $\tilde{x}_0$ ’da başlayan bir tek yükseltmesi $\tilde{g}$ vardır. Eğer $f \simeq g$ ise $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$ dir.

4. ÖRTÜ UZAYLARININ ESAS GRUPLARI

Bu bölümde bir X topolojik uzayının esas grubu ile bu uzayın bir örtü uzayının esas grubu arasındaki ilişkiler incelenecektir. Ayrıca X 'in esas grubunun altgrupları ile X 'in örtü uzayları arasındaki ilişkiler açıklanacaktır.

$(\tilde{X}, p)$, X topolojik uzayının bir örtü uzayı, $x_0 \in X$ ve $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ olsun. $p:(\tilde{X},\tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ fonksiyonu sürekli olduğundan Tanım 2.3.13'den p tarafından indirgenen $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ homomorfizmi vardır. Aşağıdaki teorem p_* fonksiyonunun birebir olduğunu göstermektedir.

4.1. Teorem [2]:

$(\tilde{X}, p)$, X topolojik uzayının bir örtü uzayı, $x_0 \in X$ ve $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ olsun. $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ bir monomorfizmadır.

Teorem 4.1'in ve 1. İzomorfizma Teoremi'nin bir sonucu olarak $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ grubunu $\pi_1(X, x_0)$ grubunun bir altgrubu olarak düşünebiliriz.

$(\tilde{X}, p)$, X topolojik uzayının bir örtü uzayı, $x_0 \in X$ ve $Y = p^{-1}(x_0)$ olsun.

$\pi_1(X, x_0) \times Y \to Y$, $([f], y) \to [f] \cdot y = \tilde{f}(1)$

olarak tanımlayalım. Burada $\tilde{f}$, f 'nin y 'de başlayan bir tek yükseltmesidır. Bu şekilde tanımlanan fonksiyonla $\pi_1(X, x_0)$ grubu Y kümesi üzerine etki eder. Şimdi bu etkinin özelliklerini ifade eden teoremi ifade edelim.

4.2. Teorem [2]:

$(\tilde{X}, p)$, X topolojik uzayının bir örtü uzayı, $x_0 \in X$ ve $Y = p^{-1}(x_0)$ olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur.

(i) $\pi_1(X, x_0)$ grubu Y kümesi üzerine geçişli olarak etki eder.

(ii) $\tilde{x}_0 \in Y$ ise $\tilde{x}_0$ 'nın dengeleyicisi $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ dir.

(iii) $\tilde{x}_0 \in Y$ olmak üzere $|Y| = \left[\pi_1(X, x_0) : p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\right]$ dir.

4.3. Teorem [2]:

$(\tilde{X}, p)$, X topolojik uzayının bir örtü uzayı, $x_0 \in X$ ve $Y = p^{-1}(x_0)$ olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur.

(i) $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in Y$ ise $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ ve $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$, $\pi_1(X, x_0)$ grubunun eşlenik altgruplarıdır.

(ii) $\tilde{x}_0 \in Y$ ve S, $\pi_1(X, x_0)$ grubunun $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ altgrubuna eşlenik bir altgrubu ise $S = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ olacak biçimde $\tilde{x}_1 \in Y$ vardır.

İspat:

(i) $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in Y$ olsun. $\tilde{X}$ eğrisel irtibatlı olduğundan $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$, $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_1$ olacak biçimde bir $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{X}$ eğrisi vardır. Ayrıca Teorem 2.3.14'ten $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ dır. Buradaki izomorfizm;

$$h : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1), \left[\tilde{f}\right] \to \left[\left(\tilde{\gamma}\right)^{-1} * \tilde{f} * \tilde{\gamma}\right]$$

biçiminde tanımlıdır. Ayrıca $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma : I \to X$ eğrisi için $\gamma(0) = \gamma(1) = \mathrm{x}_0$ olup

$k:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X,x_0)\ ,\ [f]\to[\gamma^{-1}*f*\gamma]$

fonksiyonu bir izomorfizmdir.

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0) & \xrightarrow{h} & \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1) \\
\downarrow{\scriptstyle p_*} & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\
\pi_1(X,x_0) & \xrightarrow{k} & \pi_1(X,x_0)
\end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Gerçekten $[g]\in\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ ise

$$\begin{aligned}
p_*\big(h([g])\big)=p_*\left(\left[\left(\tilde{\gamma}\right)^{-1}*g*\tilde{\gamma}\right]\right)&=\left[p\circ\left(\left(\tilde{\gamma}\right)^{-1}*g*\tilde{\gamma}\right)\right]\\
&=\left[\left(p\circ\left(\tilde{\gamma}\right)^{-1}\right)*(p\circ g)*\left(p\circ\tilde{\gamma}\right)\right]\\
&=\left[\gamma^{-1}*(p\circ g)*\gamma\right]\\
&=k\big(p_*([g])\big)
\end{aligned}$$

Diyagram değişmeli olduğundan,

$$\begin{aligned}
p_*\left(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1)\right)=p_*\left(h\left(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)\right)\right)
&=k\left(p_*\left(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)\right)\right)\\
&=\left[\gamma^{-1}\right]p_*\left(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)\right)[\gamma]\\
&=[\gamma]^{-1}p_*\left(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)\right)[\gamma]
\end{aligned}$$

olacak biçimde $[\gamma]\in\pi_1(X,x_0)$ olduğundan $p_*\left(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)\right)$ ve $p_*\left(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1)\right)$ eşlenik altgruplardır.

(ii) $\tilde{x}_0\in Y$ ve S, $\pi_1(X,x_0)$ grubunun $p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$ altgrubuna eşlenik bir altgrubu olsun. $S=[\alpha]^{-1}p_*\left(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)\right)[\alpha]$ olacak biçimde $[\alpha]\in\pi_1(X,x_0)$ vardır. $\tilde{\alpha}$, α 'nın $\tilde{x}_0$ noktasında başlayan bir tek yükseltmesi olsun. $p\circ\tilde{\alpha}=\alpha$ olduğundan

$\left(p \circ \tilde{\alpha}\right)(1) = p\left(\tilde{\alpha}(1)\right) = \alpha(1) = x_0$ olup $\tilde{\alpha}(1) \in Y$ dir. $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_1$ diyelim. $\tilde{\alpha}$ 'yı ispatın (i) şıkkındaki $\tilde{\gamma}$ olarak düşünürsek (i) şıkkındaki

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{h} & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \\ \downarrow_{p_*} & & \downarrow_{p_*} \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{k} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

değişmeli diyagramından

$$\begin{aligned} S = [\alpha]^{-1} p_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\right)[\alpha] &= \left[\alpha^{-1}\right] p_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\right)[\alpha] \\ &= k\left(p_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\right)\right) \\ &= p_*\left(h\left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\right)\right) \\ &= p_*\left(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)\right) \end{aligned}$$

olacak biçimde $\tilde{x}_1 \in Y$ var olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 4.3'e göre $\forall\ \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ için $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ altgrupları $\pi_1(X, x_0)$ grubunun altgruplarının bir eşlenik sınıfını oluşturur. Tersine $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ için $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ altgrubunun eşlenik sınıfındaki her bir altgrup bir $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ için $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ biçimindedir.

4.4. Tanım:

$(\tilde{X}, p)$, X topolojik uzayının bir örtü uzayı olsun. Eğer $\forall\ x_0 \in X$ ve $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ için $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \lhd \pi_1(X, x_0)$ ise $(\tilde{X}, p)$'ye X 'in bir regüler örtü uzayı denir.

Teorem 4.3’ün açık bir sonucu olarak aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

4.5. Sonuç [2]:

$(\tilde{X}, p)$, X topolojik uzayının bir örtü uzayı olsun. $(\tilde{X}, p)$, X ’in regüler örtü uzayıdır ancak ve ancak $\forall\, x_0 \in X$ ve $\forall\, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ için $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ dir.

5. ÖRTÜ UZAYLARININ SINIFLANDIRILMASI

Bu bölümde bir topolojik uzayın iki örtü uzayının denk olması ifade edilecek ve belirli şartları sağlayan topolojik uzayların bütün örtü uzaylarının bu denklik farkıyla belirlenebileceği gösterilecektir. İlk olarak herhangi bir sürekli fonksiyonun bir yükseltmesinin olup olmadığını belirlememizi sağlayan teoremi ifade edelim.

5.1. Teorem (Yükseltme Kriteri) [2]:

Y irtibatlı ve yerel eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve $f:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ fonksiyonu sürekli olsun. $(\tilde{X}, p)$, X topolojik uzayının bir örtü uzayı ve $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ ise f 'nin $\tilde{f}:(Y,y_0)\to(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ yükseltmesi vardır ve tektir ancak ve ancak $f_*(\pi_1(Y,y_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$

5.2. Sonuç [2]:

Y basit irtibatlı ve yerel eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve $f:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ fonksiyonu sürekli olsun. Eğer $(\tilde{X}, p)$, X topolojik uzayının bir örtü uzayı ve $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ ise f 'nin $\tilde{f}:(Y,y_0)\to(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ yükseltmesi vardır ve tektir.

5.3. Sonuç [2]:

X irtibatlı ve yerel eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve $(\tilde{X}, p)$ ile $(\tilde{Y}, q)$, X 'in birer örtü uzayı olsun. $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, $\tilde{y}_0 \in q^{-1}(x_0)$ olmak üzere $p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))=q_*(\pi_1(\tilde{Y},\tilde{y}_0))$ dir ancak ve ancak $p\circ h=q$ olacak biçimde $h:(\tilde{Y},\tilde{y}_0)\to(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ homeomorfizmi vardır ve tektir.

5.4. Teorem [2]:

X irtibatlı ve yerel eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve $(\tilde{X}, p)$ ile $(\tilde{Y}, q)$, X 'in birer örtü uzayı olsun. $x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, $\tilde{y}_0 \in q^{-1}(x_0)$ olmak üzere $q_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ ise $p \circ h = q$ olacak biçimde $h:(\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ sürekli fonksiyonu vardır ve tektir. Üstelik $(\tilde{Y}, h)$, $\tilde{X}$ 'nın bir örtü uzayıdır.

$q_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ ise Yükseltme Kriteri'ne göre $p \circ h = q$ olacak biçimde $h:(\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ sürekli fonksiyonu vardır ve tektir. Teorem 5.4 Yükseltme Kriteri'ne ek olarak, bu $h:\tilde{Y} \to \tilde{X}$ fonksiyonunun bir örtü izdüşümü olduğunu söylemektedir.

5.5. Tanım:

$(\tilde{X}, p)$, X topolojik uzayının bir örtü uzayı olsun. Eğer $\tilde{X}$ basit irtibatlı ise $(\tilde{X}, p)$ ye X 'in bir evrensel örtüsü denir. Örneğin; Örnek 1'deki $(\mathbb{R}, p)$, S^1 uzayının bir evrensel örtü uzayıdır. Çünkü $\mathbb{R}$ eğrisel irtibatlıdır. Ayrıca $\mathbb{R}$ büzülebilir olduğundan $\pi_1(\mathbb{R}) = \{e\}$ olup $\mathbb{R}$ basit irtibatlıdır.

X irtibatlı ve yerel eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay, $(\tilde{Y}, q)$ X 'in bir örtü uzayı ve $(\tilde{X}, p)$, X 'in bir evrensel örtü uzayı olsun. Lemma 3.3'den $\tilde{X}$ da yerel eğrisel irtibatlı olup $\tilde{X}$ basit irtibatlı olduğundan Sonuç 5.2'den $p = q \circ h$ olacak biçimde sürekli $h:\tilde{X} \to \tilde{Y}$ fonksiyonu vardır. Ayrıca Teorem 5.4'den $(\tilde{X}, h)$, $\tilde{Y}$ 'nın bir örtü uzayıdır. Sonuçta X 'in evrensel örtü uzayı X 'in diğer bütün örtü uzaylarının bir örtü uzayıdır.

5.6. Tanım:

$(\tilde{X}, p)$ ve $(\tilde{Y}, q)$, X topolojik uzayının birer örtü uzayı olsun. $q = p \circ h$ olacak biçimde bir $h : \tilde{Y} \to \tilde{X}$ homeomorfizmi varsa $(\tilde{X}, p)$ ve $(\tilde{Y}, q)$ örtü uzayları izomorftur denir.

Şimdi bir topolojik uzayın herhangi iki örtü uzayının izomorf olup olmadığını belirlememizi sağlayan teoremi ifade edelim.

5.7. Teorem [2]:

X yerel eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. $(\tilde{X}, p)$ ile $(\tilde{Y}, q)$ X'in birer örtü uzayı, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, $\tilde{y}_0 \in q^{-1}(x_0)$ olsun. $(\tilde{X}, p)$ ve $(\tilde{Y}, q)$ izomorftur ancak ve ancak $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ ve $q_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0))$ altgrupları $\pi_1(X, x_0)$ içinde eşleniktirler.

İspat:

$(\tilde{X}, p)$ ve $(\tilde{Y}, q)$ izomorf olsun. $q = p \circ h$ olacak biçimde bir $h : \tilde{Y} \to \tilde{X}$ homeomorfizmi vardır. $h(\tilde{y}_0) \in p^{-1}(x_0)$ olup Sonuç 5.3'ten $p_*(\pi_1(\tilde{X}, h(\tilde{y}_0))) = q_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0))$ dir. $h(\tilde{y}_0)$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ olduğundan Teorem4.3 ün (i) şıkkından $p_*(\pi_1(\tilde{X}, h(\tilde{y}_0)))= q_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0))$ ve $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ altgrupları $\pi_1(X, x_0)$ içinde eşleniktirler.

$p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ ve $q_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0))$ altgrupları $\pi_1(X, x_0)$ içinde eşlenik olsunlar. Teorem 4.3'ün (ii) şıkkından $q_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0))= p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ olacak biçimde

$\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ vardır. Sonuç 5.3'ten $q = p \circ h$ olacak biçimde bir $h:(\tilde{Y},\tilde{y}_0) \to (\tilde{X},\tilde{x}_1)$ homeomorfizmi vardır. O halde ($\tilde{X}$, p) ve ($\tilde{Y}$, q) izomorf olup ispat tamamlanır.

X yerel eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ ve ($\tilde{X}$, p), X 'in bir örtü uzayı olsun. Teorem 5.7 ve Teorem 4.3'ün bir sonucu olarak $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ için $p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$ altgrubunun $\pi_1(X,x_0)$ içindeki eşlenik sınıfı X topolojik uzayının $(\tilde{X}, p)$ örtü uzayını izomorfizm farkıyla belirler. Acaba $\pi_1(X,x_0)$ grubunun altgruplarının her bir eşlenik sınıfı için bu sonuç doğru mudur? Yani $\pi_1(X,x_0)$ grubunun altgruplarının her bir eşlenik sınıfı için $p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$ bu eşlenik sınıfına dâhil olacak biçimde X 'in bir ($\tilde{X}$, p) örtü uzayı var mıdır? X topolojik uzayı irtibatlı, yerel eğrisel irtibatlı ve X 'in bir evrensel örtü uzayı varsa bu sorunun cevabı "Evet" olacaktır. Her topolojik uzayının bir evrensel örtü uzayı olmayabilir. Şimdi bir topolojik uzayın hangi şartlar altında evrensel örtü uzayı olduğunu ifade edelim.

5.8. Tanım:

Her $x \in X$ noktasının $i:U \to X$ içerme fonksiyonu tarafından belirlenen $i_*:\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$ homomorfizmini sıfır homomorfizmi yapacak biçimde bir U açık komşuluğu varsa X topolojik uzayı yarı-yerel basit irtibatlıdır denir.

5.9. Teorem [4]:

X irtibatlı ve yerel eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay olsun. X 'in bir evrensel örtü uzayı vardır ancak ve ancak X yarı-yerel basit irtibatlıdır.

5.10. Teorem [3]:

X irtibatlı, yerel eğrisel irtibatlı ve yarı-yerel basit irtibatlı bir topolojik uzay olsun. $\pi_1(X, x_0)$ grubunun altgruplarının bir eşlenik sınıfı verilmiş olsun. Bu durumda bu eşlenik sınıfına karşılık gelen X 'in bir $(\tilde{X}, p)$ örtü uzayı vardır. Başka bir ifade ile $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ verilen eşlenik sınıfına dâhil olacak biçimde X 'in bir $(\tilde{X}, p)$ örtü uzayı vardır.

Sonuç olarak; X irtibatlı, yerel eğrisel irtibatlı ve yarı-yerel basit irtibatlı bir topolojik uzay olmak üzere X 'in her bir $(\tilde{X}, p)$ örtü uzayına karşılık $\pi_1(X, x_0)$ grubunun bir altgrubu ve tersine $\pi_1(X, x_0)$ grubunun her bir altgrubuna karşılık X 'in bir $(\tilde{X}, p)$ örtü uzayı bulunabilir. Ayrıca $\pi_1(X, x_0)$ grubunun altgruplarının her bir eşlenik sınıfına karşılık X 'in $(\tilde{X}, p)$ örtü uzayları izomorfizm farkıyla belirlenebilir ve tersine X 'in birbirine izomorf olan bütün örtü uzaylarına karşılık $\pi_1(X, x_0)$ grubunun altgruplarının bir eşlenik sınıfı bulunabilir.

6. ÖRTÜ DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde örtü dönüşümleri ve örtü dönüşümleri grubu ile ilgili tanım ve teoremler ifade edilecek ve örtü dönüşümleri grubu ile esas grup arasındaki ilişki açıklanacaktır.

6.1. Tanım:

($\tilde{X}$, p), X topolojik uzayının bir örtü uzayı olsun. $p \circ h = p$ olacak biçimde bir $h : \tilde{X} \to \tilde{X}$ homeomorfizmi varsa h'ye bir örtü dönüşümü denir. $\tilde{X}$'dan $\tilde{X}$'ya tanımlı bütün örtü dönüşümlerinin kümesini Cov($\tilde{X} / X$) ile gösterelim. Cov($\tilde{X} / X$) kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu gruba $(\tilde{X}, p)$'in örtü dönüşümleri grubu denir.

($\tilde{X}$, p), X topolojik uzayının bir örtü uzayı ve $x_0 \in X$ olsun. Cov($\tilde{X} / X$) grubu $p^{-1}(x_0)$ kümesi üzerine etki eder. Buradaki etki;

Cov($\tilde{X}$ / X)$\times$ $p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_0)$, $(h, y) \to h \cdot y = h(y)$

biçiminde tanımlıdır. Bu etkinin bir sonucu olarak Cov($\tilde{X} / X$)'in her bir elemanı $p^{-1}(x_0)$'ın elemanlarını birbirine dönüştürür.

6.2. Teorem [2]:

X irtibatlı ve yerel eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. ($\tilde{X}$, p), X topolojik uzayının bir örtü uzayı olsun. ($\tilde{X}$, p), X'in regüler örtü uzayıdır ancak ve ancak Cov($\tilde{X} / X$) grubu $p^{-1}(x_0)$ kümesi üzerine geçişli olarak etki eder.

6.3. Teorem [2]:

$\tilde{X}$ irtibatlı bir topolojik uzay ve ($\tilde{X}$, p), X topolojik uzayının bir örtü uzayı olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur.

(i) $h \in$ Cov($\tilde{X}$ / X) ve $h \neq 1_{\tilde{X}}$ ise h'nin sabit noktası yoktur, bir başka ifadeyle $\forall \tilde{x} \in \tilde{X}$ için $h(\tilde{x}) \neq \tilde{x}$ dır.

(ii) $h_1, h_2 \in$ Cov($\tilde{X}$ / X) ve $\exists \tilde{x} \in \tilde{X}$ $\ni$ $h_1(\tilde{x}) = h_2(\tilde{x})$ ise $h_1 = h_2$ dir.

İspat:

(i) $h \in$ Cov($\tilde{X}$ / X) ve $h \neq 1_{\tilde{X}}$ olsun. Kabul edelim ki $\exists \tilde{x} \in \tilde{X}$ öyle ki $h(\tilde{x}) = \tilde{x}$ olsun. $h \in$ Cov($\tilde{X}$ / X) olduğundan $p = p \circ h$ olup h, p'nin bir yükseltmesidir. Ayrıca $p = p \circ 1_{\tilde{X}}$ olduğundan $1_{\tilde{X}}$ fonksiyonu da p'nin bir yükseltmesidir. $\tilde{X}$ irtibatlı olduğundan Teorem 3.7'den $h = 1_{\tilde{X}}$ bulunur. Bu ise $h \neq 1_{\tilde{X}}$ ile çelişir.

(ii) $h_1, h_2 \in$ Cov($\tilde{X}$ / X) ve $\exists \tilde{x} \in \tilde{X}$ $\ni$ $h_1(\tilde{x}) = h_2(\tilde{x})$ olsun. $h_1, h_2 \in$ Cov($\tilde{X}$ / X) olduğundan $p = p \circ h_1$ ve $p = p \circ h_2$ olup h_1 ve h_2, p'nin birer yükseltmesidir. $\tilde{X}$ irtibatlı olduğundan Teorem 3.7'den $h_1 = h_2$ elde edilir.

Şimdi X topolojik uzayının esas grubu $\pi_1(X, x_0)$ ile örtü dönüşümleri grubu Cov($\tilde{X}$ / X) arasındaki ilişkiyi açıklayan teoremi ifade edelim.

6.4. Teorem [2]:

X yerel eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve ($\tilde{X}$, p), X ’in bir örtü uzayı olsun. $x_0 \in X$ ve $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ ise Cov($\tilde{X}$ / X)$\cong N_G\left(p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))\right)/\,p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$ dir. Burada $G=\pi_1(X,x_0)$ dır.

6.5. Sonuç [2]:

X yerel eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve ($\tilde{X}$, p), X ’in regüler bir örtü uzayı olsun. $x_0 \in X$ ve $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ ise Cov($\tilde{X}$ / X)$\cong \pi_1(X,x_0)/\; p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$ dır.

6.6. Sonuç [2]:

X yerel eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay, ($\tilde{X}$, p), X ’in evrensel örtü uzayı ve $x_0 \in X$ olsun. Cov($\tilde{X}$ / X)$\cong \pi_1(X,x_0)$ dır.

Sonuç 6.6 yardımıyla yerel eğrisel irtibatlı olan ve evrensel örtü uzayı bulunan bir topolojik uzayın esas grubu örtü dönüşümleri grubu yardımıyla bulunabilir.

Örnek:

Örnek 1’deki ($\mathbb{R}, p$), S^1 uzayının bir evrensel örtü uzayıdır. Ayrıca S^1 uzayı yerel eğrisel irtibatlıdır. $h \in$Cov($\mathbb{R}/S^1$) alalım. $p \circ h = p$ ve $p(t)=(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ olduğundan

$$p(t)=(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)=(\cos 2\pi\, h(t),\sin 2\pi\, h(t))=p(h(t))$$

olup bu son eşitlikten $h(t)=t+n$ elde edilir. Yani Cov($\mathbb{R}/S^1$) grubunun her bir elemanı bir n tamsayısı için $h(t)=t+n$ biçimindedir. Cov($\mathbb{R}/S^1$) grubu

$g(t) = t + 1$ tarafından üretilir. Gerçekten; $h \in$ Cov($\mathbb{R} / S^1$) ise $h(t) = t + n = g^n(t)$ dir. Cov($\mathbb{R} / S^1$) grubu devirli ve sonsuz elemanlı olduğundan $\mathbb{Z}$'ye izomorftur. Cov($\mathbb{R} / S^1$)$\cong \mathbb{Z}$ ve Sonuç 6.6'dan Cov($\mathbb{R} / S^1$)$\cong \pi_1(S^1)$ olduğundan $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ dir.

7. ÖRTÜ DÖNÜŞÜMLERİ GRUPLARI

Bu bölümde Bölüm 6'da tanımı verilen örtü dönüşümleri gruplarının bazı özellikleri ifade edilecek ve bu grupların ilgili topolojik uzaylar üzerine etki etmesi durumu ele alınacaktır.

7.1. Tanım:

X bir topolojik uzay, G bir grup ve G grubu X üzerine etki etsin. Her $x \in X$ için x'in bir U açık komşuluğu, $g \neq e$ olacak biçimdeki her $g \in G$ için $U \cap g \cdot U = \varnothing$ şartını sağlayacak biçimde bulunabiliyorsa G, X üzerine düzgün süreksiz olarak etki eder denir. Eğer $g \neq e$ olacak biçimdeki her $g \in G$ için $x \neq g \cdot x$ oluyorsa G, X üzerine sabit noktası olmadan etki eder denir.

X bir topolojik uzay ve G, X'den X'e tanımlı homeomorfizmlerin bir grubu olsun. Açık olarak

$G \times X \to X$, $(g,x) \to g \cdot x = g(x)$

olarak tanımlanan fonksiyon yardımıyla G grubu X üzerine etki eder. Tanım 7.1'e göre her $x \in X$ için x'in bir U açık komşuluğu, $g \neq e$ olacak biçimdeki her $g \in G$ için $U \cap g(U) = \varnothing$ şartını sağlayacak biçimde bulunabiliyorsa G, X üzerine düzgün süreksiz olarak etki eder denir. Benzer şekilde, $g \neq e$ olacak biçimdeki her $g \in G$ için $x \neq g(x)$ oluyorsa G, X üzerine sabit noktası olmadan etki eder denir.

7.2. Tanım:

X bir topolojik uzay, G bir grup ve G grubu X üzerine etki etsin. $x, y \in X$ için

$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G \ni y = g \cdot x$

biçiminde tanımlanan bağıntı X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntının X üzerinde oluşturduğu denklik sınıflarının kümesini X/G ile gösterelim.

$p : X \to X/G$, $p(x) = o(x) = \{g \cdot x : g \in G\}$

şeklinde tanımlanan p fonksiyonu yardımıyla X/G üzerinde oluşturulan topolojik uzay X ’in bir bölüm uzayıdır. Bu uzaya X ’in yörünge uzayı ve p fonksiyonuna doğal dönüşüm ya da yörünge dönüşümü denir.

7.3. Lemma [11]:

X bir topolojik uzay, G bir grup ve G grubu X üzerine etki etsin. $p: X \to X/G$ doğal dönüşümü sürekli, örten ve açıktır.

7.4. Teorem [5]:

$\tilde{X}$ irtibatlı bir topolojik uzay ve $(\tilde{X}, p)$, X ’in bir örtü uzayı olsun. Cov$(\tilde{X}/X)$ grubu $\tilde{X}$ üzerine düzgün süreksiz olarak ve sabit noktası olmadan etki eder.

İspat:

Teorem 6.3’ün bir sonucu olarak Cov$(\tilde{X}/X)$ grubu $\tilde{X}$ üzerine sabit noktası olmadan etki eder. $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ alalım. p örten olduğundan $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ olacak biçimde $x_0 \in X$ vardır. $(\tilde{X}, p)$, X ’in örtü uzayı olduğundan x_0 ’ın bir U elemanter komşuluğu vardır. Dolayısıyla $p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$ ve $\forall i \in I$ için $p|_{U_I} : U_i \to U$ bir homeomorfizm olacak biçimde ayrık ve $\tilde{X}$ ’da açık U_i alt kümeleri vardır. $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(U)$ olduğundan $\tilde{x}_0 \in U_j$ olacak biçimde bir tek $j \in I$ vardır. $g \in$ Cov$(\tilde{X}/X)$ için $U_j \cap g(U_j) \neq \varnothing$ olsun. Bu durumda en az bir $\tilde{x} \in U_j \cap g(U_j)$ vardır. $\tilde{x} \in g(U_j)$ olduğundan $\tilde{x} = g(\tilde{y})$ olacak biçimde bir $\tilde{y} \in U_j$ vardır. $g \in$ Cov$(\tilde{X}/X)$ olduğundan $p \circ g = p$ olup

$p(\tilde{x}) = p(g(\tilde{y})) = (p \circ g)(\tilde{y}) = p(\tilde{y})$

elde edilir. $\tilde{x}, \tilde{y} \in U_j$ ve $p|_{U_j}$ bir homeomorfizm olduğundan

$p(\tilde{x}) = p(\tilde{y}) \Rightarrow \tilde{x} = \tilde{y} = g(\tilde{y})$

elde edilir. $\tilde{y} = g(\tilde{y})$ olduğundan Teorem 6.3'den $g = 1_{\tilde{X}}$ olup Cov($\tilde{X}$ / X) grubu $\tilde{X}$ üzerine düzgün süreksiz olarak etki eder.

Teorem 7.4'e göre $\tilde{X}$ irtibatlı bir topolojik uzay, ($\tilde{X}$, p) X topolojik uzayının bir örtü uzayı ve G, ($\tilde{X}$, p)'nin örtü dönüşümleri grubu olmak üzere G, $\tilde{X}$ üzerine düzgün süreksiz olarak etki eder. Şimdi tersine; X bir topolojik uzay ve G, X 'den X 'e tanımlı homeomorfizmlerin bir grubu olmak üzere G 'nin yardımıyla hangi şartlar altında bir örtü uzayı bulunabileceğini açıklayan teoremi ifade edelim.

7.5. Teorem [5]:

X irtibatlı ve yerel eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve G, X 'den X 'e tanımlı homeomorfizmlerin bir grubu olsun. G grubu X üzerine düzgün süreksiz olarak etki ediyorsa, $p : X \rightarrow X/G$ doğal dönüşümü bir örtü dönüşümüdür ve (X, p), X/G 'nin bir regüler örtü uzayıdır. Üstelik $\mathrm{Cov}\left(X/(X/G)\right) = G$ dir.

İspat:

X irtibatlı ve yerel eğrisel irtibatlı olduğundan Teorem 2.1.3'ten eğrisel irtibatlıdır. Lemma 7.3'ten $p : X \rightarrow X/G$ fonksiyonu sürekli ve örtendir. $\tilde{x} \in X/G$ alalım. p örten olduğundan $\tilde{x} = p(x)$ olacak biçimde $x \in X$ vardır. G grubu X üzerine düzgün süreksiz olarak etki ettiğinden x 'in bir U açık komşuluğu vardır öyle ki $g_1 \neq g_2$ olacak biçimdeki $\forall g_1, g_2 \in G$ için $g_1(U) \cap g_2(U) = \emptyset$ dir. $\tilde{x} = p(x) \in p(U)$

ve Lemma 7.3'ten $p: X \to X/G$ fonksiyonu açık olduğundan $p(U)$, $\tilde{x}$'nın bir açık komşuluğudur.

$p^{-1}\left(p(U)\right) = \bigcup\{g(U) : g \in G\}$ dir. Gerçekten;

$$
\begin{aligned}
x \in p^{-1}\left(p(U)\right) &\Leftrightarrow\ p(x) \in p(U) \\
&\Leftrightarrow\ \exists u \in U \ \ni\ p(x) = p(u) \\
&\Leftrightarrow\ \exists u \in U \ \ni\ o(x) = o(u) \\
&\Leftrightarrow\ \exists u \in U,\ \exists g \in G \ \ni\ x = g(u) \\
&\Leftrightarrow\ \exists g \in G \ \ni\ x \in g(U) \\
&\Leftrightarrow\ x \in \bigcup\{g(U) : g \in G\}
\end{aligned}
$$

Her $g \in G$ için g bir homeomorfizm olduğundan $g(U)$, X'de açıktır. Üstelik $g_1 \neq g_2$ olacak biçimdeki $\forall g_1, g_2 \in G$ için $g_1(U) \cap g_2(U) = \varnothing$ olduğundan $\{g(U) : g \in G\}$ ailesinin elemanları ayrıktır. Şimdi Her $g \in G$ için $p|_{g(U)} : g(U) \to p(\mathrm{U})$ fonksiyonunun bir homeomorfizm olduğunu gösterelim. p sürekli olduğundan $p|_{g(U)}$ süreklidir. Ayrıca p açık ve $g(U)$, X'de açık olduğundan $p|_{g(U)}$ açıktır. Dolayısıyla $p|_{g(U)}$ nun homeomorfizm olduğunu göstermemiz için birebir ve örten olduğunu göstermemiz yeterlidir. $y \in p(U)$ alalım. $\exists u \in U \ \ni\ y = p(u)$ dur. $o(u) = o(g(u))$ olduğundan $p(u) = p(g(u))$ olup $y = p(g(u))$ olacak biçimde bir $g(u) \in g(U)$ olduğundan $p|_{g(U)}$ örtendir.

$x, y \in g(U)$ alalım. $\exists u, v \in U \ \ni\ x = g(u), y = g(v)$ dir.

$$
\begin{aligned}
p(x) = p(y) \;&\Rightarrow\; o(x) = o(y) \\
&\Rightarrow\; \exists h \in G \;\ni\; y = h(x) \\
&\Rightarrow\; y = h(x) = g(v) = h(g(u)) \in g(U) \cap h(g(U)) \\
&\Rightarrow\; g(U) \cap h(g(U)) \neq \varnothing \\
&\Rightarrow\; g(U) \cap (h \circ g)(U) \neq \varnothing \\
&\Rightarrow\; g = h \circ g \\
&\Rightarrow\; h = 1_X \\
&\Rightarrow\; y = x \\
&\Rightarrow\; p\big|_{g(U)} \text{ birebirdir.}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{Cov}\big(X/(X/G)\big) = G$ olduğunu gösterelim. $g \in G$ alalım. Her $x \in X$ için $o(x) = o(g(x))$ olduğundan $p(x) = p(g(x))$ olup $p = p \circ g$ dir. $g : X \to X$ bir homeomorfizm ve $p = p \circ g$ olduğundan $g \in \mathrm{Cov}\big(X/(X/G)\big)$ dir. Dolayısıyla $G \subset \mathrm{Cov}\big(X/(X/G)\big)$ dir. $g \in \mathrm{Cov}\big(X/(X/G)\big)$ alalım. $p = p \circ g$ ve $g : X \to X$ bir homeomorfizmdir. $p = p \circ g$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
x \in X \;&\Rightarrow\; p(x) = p(g(x)) \\
&\Rightarrow\; o(g(x)) = o(x) \\
&\Rightarrow\; \exists h \in G \;\ni\; g(x) = h(x) \\
&\Rightarrow\; \exists h \in \mathrm{Cov}(\tilde{X}/X) \;\ni\; g(x) = h(x)
\end{aligned}
$$

dir. Teorem 6.3’ten $g = h$ olup $h \in G$ olduğundan $g \in G$ dir. Dolayısıyla $\mathrm{Cov}\big(X/(X/G)\big) \subset G$ dir.

(X, p)’nin X/G’nin regüler örtü uzayı olduğunu gösterelim. $y \in X/G$ alalım. Tanım 6.1’den $\mathrm{Cov}\big(X/(X/G)\big)$ grubu $p^{-1}(y)$ kümesi üzerine etki eder. Şimdi bu etkinin geçişli olduğunu gösterelim.

$$u,v \in p^{-1}(y) \;\Rightarrow\; p(u)=p(v)=y$$
$$\Rightarrow\; o(u)=o(v)$$
$$\Rightarrow\; \exists g \in G=\mathrm{Cov}\big(X/(X/G)\big) \;\ni\; v=g(u)$$
$$\Rightarrow\; \mathrm{Cov}\big(X/(X/G)\big) \text{ grubu } p^{-1}(y) \text{ üzerine geçişli olarak etki eder.}$$

Her $y \in X/G$ için $\mathrm{Cov}\big(X/(X/G)\big)$ grubu $p^{-1}(y)$ üzerine geçişli olarak etki ettiğinden Teorem 6.2'den (X, p), X/G'nin regüler örtü uzayıdır.

7.6. Sonuç [5]:

X basit irtibatlı ve yerel eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve G, X'den X'e tanımlı homeomorfizmlerin bir grubu olsun. G grubu X üzerine düzgün süreksiz olarak etki ediyorsa her $x \in X$ için $\pi_1\big(X/G, p(x)\big) \cong G$ dir.

İspat:

X basit irtibatlı olduğundan irtibatlıdır ve Teorem 7.5'ten (X, p), X/G'nin bir örtü uzayıdır ve $\mathrm{Cov}\big(X/(X/G)\big)=G$ dir. Diğer taraftan X basit irtibatlı ve (X, p), X/G'nin regüler örtü uzayı olduğundan Sonuç 6.5'ten $\mathrm{Cov}\big(X/(X/G)\big)=G \cong \pi_1\big(X/G, p(x)\big)$ dir.

7.7. Tanım:

X bir topolojik uzay ve G, X'den X'e tanımlı homeomorfizmlerin bir grubu olsun. X'in her kompakt C altkümesi için $G[C]=\{g \in G:\; C \cap g(C) \neq \varnothing\}$ kümesi sonlu oluyor ise G grubu Sperner Şartı'nı sağlar denir.

Şimdi çalışmamızın ana teoremi olan S.Kinoshita [1] teoremini ispatlamak için gerekli olan dört lemmayı ifade edelim.

7.8. Lemma [1]:

K Hausdorff uzayı ve ($\tilde{K}$, p), K 'nın bir örtü uzayı olsun. $a \in K$ alalım. W, a'nın bir elemanter komşuluğu olsun. $p^{-1}(W) = \bigcup_{i \in I} W_i$ ve her $i \in I$ için $p|_{W_i} : W_i \to W$ bir homeomorfizm olacak biçimde ayrık ve $\tilde{K}$ 'da açık W_i alt kümeleri vardır. $\overline{U} \subset W$ olacak biçimde, a'nın bir U komşuluğunu alalım. her $i \in I$ için bir tek $b_i \in W_i \cap p^{-1}(U)$ seçelim. $B = \{b_i : i \in I\}$ diyelim. Bu durumda B kümesinin yığılma noktası yoktur.

İspat:

Kabul edelim ki B 'nin bir yığılma noktası b var olsun. V, $p(b)$ 'nin bir komşuluğu olsun. p sürekli olduğundan b'nin bir V_1 komşuluğu vardır öyle ki $p(V_1) \subset V$ dir. b noktası B kümesinin bir yığılma noktası olduğundan $(V_1 \setminus \{b\}) \cap B \neq \varnothing$ dır. Dolayısıyla $\exists j \in I \ni b_j \in (V_1 \setminus \{b\}) \cap B$ dir.

$p(b_j) \in p(V_1) \subset V$ olduğundan $p(b_j) \in V$ dir. Ayrıca $b_j \in W_j \cap p^{-1}(U)$ olduğundan $p(b_j) \in U$ olup $p(b_j) \in U \cap V$ olduğundan $U \cap V \neq \varnothing$ dır. Sonuçta $p(b)$ 'nin her V komşuluğu için $U \cap V \neq \varnothing$ olduğundan $p(b) \in \overline{U}$ dır. $\overline{U} \subset W$ olduğundan

$$p(b) \in \overline{U} \subset W \Rightarrow b \in p^{-1}(U) \subset p^{-1}(W) = \bigcup_{i \in I} W_i$$

$$\Rightarrow b \in W_\alpha \text{ olacak biçimde bir tek } \alpha \in I \text{ vardır.}$$

$b \in W_\alpha$ ve W_α açık olduğundan W_α, b 'nin bir komşuluğudur. b noktası B kümesinin bir yığılma noktası olduğundan $(W_\alpha \setminus \{b\}) \cap B \neq \varnothing$ dır. Dolayısıyla $\exists b_\alpha \in W_\alpha \ni b_\alpha \neq b$ ve $b_\alpha \in B$ dir. $b_\alpha \in B$ olduğundan $b_\alpha \in W_i \cap p^{-1}(U)$ olacak biçimde $i \in I$ vardır. Ancak $b_\alpha \in W_\alpha$ ve $b_\alpha \in W_i$ olup W_j altkümeleri ayrık olduklarından $i = \alpha$ dır. Sonuç olarak $\exists b_\alpha \in W_\alpha \ni b_\alpha \neq b$ dir.

K bir Hausdorff uzayı olduğundan Lemma 3.3'ten $\tilde{K}$ da bir Hausdorff uzayıdır. $\tilde{K}$ bir Hausdorff uzayı ve $b_\alpha \neq b$ olduğundan $b_\alpha \in U, b \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde $\tilde{K}$'da açık olan U, V altkümeleri vardır. $T = V \cap W_\alpha$ kümesi b'nin bir komşuluğudur ve $(\mathrm{T} \setminus \{b\}) \cap B = \emptyset$ tur. Kabul edelim ki $(\mathrm{T} \setminus \{b\}) \cap B \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $\exists b_\gamma \in B \ni b_\gamma \neq b$ ve $b_\gamma \in T$ dir. $T = V \cap W_\alpha$ ve $b_\gamma \in T$ olduğundan $b_\gamma \in W_\alpha$ dır. Ancak B kümesi içinde W_α kümesinden seçilen tek eleman b_α olduğundan $b_\alpha = b_\gamma$ olmalıdır. $b_\gamma \in T$ olduğundan $b_\alpha \in T$ olup $b_\alpha \in U$ olduğundan $U \cap T \neq \emptyset$ dır. Bu ise $U \cap T = (U \cap V \cap W_\alpha) \subset U \cap V = \emptyset$ olmasıyla çelişir.

Sonuç olarak $T = V \cap W_\alpha$ kümesi b'nin bir komşuluğudur ve $(\mathrm{T} \setminus \{b\}) \cap B = \emptyset$ tur. Bu ise b noktasının B kümesinin bir yığılma noktası olmasıyla çelişir. Dolayısıyla B kümesinin yığılma noktası yoktur.

7.9. Lemma [1]:

K regüler bir topolojik uzay ve $(\tilde{K}, p)$, K'nın irtibatlı bir örtü uzayı olsun. $G = \mathrm{Cov}(\tilde{K}/K)$ grubu Sperner Şartı'nı sağlar.

İspat:

Kabul edelim ki $G = \mathrm{Cov}(\tilde{K}/K)$ grubu Sperner Şartı'nı sağlamasın. Bu durumda $\tilde{K}$ nın bir C kompakt altkümesi için $G[C] = \{g \in G : C \cap g(C) \neq \emptyset\}$ kümesi sonlu değildir. $G[C] = \{g_i : i \in I\}$ diyelim. Her $i \in I$ için $C \cap g_i(C) \neq \emptyset$ olduğundan her bir $i \in I$ için bir tek $b_i \in C \cap g_i(C)$ seçelim. Her $i \in I$ için $b_i \in C$ dir ve $b_i = g_i(a_i)$ olacak biçimde $a_i \in C$ vardır. $\tilde{K}$ irtibatlı bir topolojik uzay olduğundan Teorem 6.3'ten $i, j \in I$ ve $i \neq j$ ise $a_i = g_i^{-1}(b_i) \neq g_j^{-1}(b_j) = a_j$ dir. Dolayısıyla $A = \{a_i : i \in I\}$ kümesi sonsuz elemanlıdır. Her $i \in I$ için $a_i \in C$ olduğundan $A \subset C$ dir.

K regüler olduğundan Lemma 3.3'ten $\tilde{K}$ da regülerdir. Ayrıca $\tilde{K}$ regüler ve $C \subset \tilde{K}$ olduğundan Teorem 2.1.7'den C de regülerdir. Diğer taraftan C regüler olduğundan Teorem 2.1.7'den C bir Hausdorff uzayıdır. C kompakt ve $A = \{a_i : i \in I\}$ kümesi sonsuz elemanlı olduğundan Teorem 2.1.11'den A kümesinin bir yığılma noktası a vardır. $a \in C$ dir. C bir Hausdorff uzayı, $A \subset C$ ve a noktası A kümesinin bir yığılma noktası olduğundan Teorem 2.1.8'den a noktasının her komşuluğu A kümesine ait sonsuz çoklukta nokta içerir. Sonuç olarak a noktasının her V komşuluğu için $\{g_i \in G[C] : b_i = g_i(a_i)\ ,\ a_i \in V\}$ kümesi sonsuz elemanlıdır.

W, $p(a)$'nın bir elemanter komşuluğu olsun. $p^{-1}(W) = \bigcup_{i \in J} W_i$ ve her $i \in J$ için $p|_{W_i} : W_i \to W$ bir homeomorfizm olacak biçimde ayrık ve $\tilde{K}$'da açık W_i alt kümeleri vardır. $\overline{U} \subset W$ olacak biçimde, $p(a)$'nın bir U komşuluğunu alalım.

$$p(a) \in \overline{U} \subset W \;\Rightarrow\; a \in p^{-1}(W) = \bigcup_{i \in J} W_i$$

ve W_i alt kümeleri ayrık olduğundan $a \in W_\alpha$ olacak biçimde bir tek $\alpha \in J$ vardır. $V = W_\alpha \cap p^{-1}(U)$ kümesi a noktasının bir komşuluğudur. Dolayısıyla $\{g_i \in G[C] : b_i = g_i(a_i)\ ,\ a_i \in V\}$ kümesi sonsuz elemanlıdır. $a_i \in V$ olacak biçimdeki her a_i için

$$p(b_i) = p(g_i(a_i)) = (p \circ g_i)(a_i) = p(a_i) \in U \;\Rightarrow\; b_i \in p^{-1}(U)$$

dir. Ayrıca $p(a_i) = p(b_i) \in W$ olduğundan $b_i \in p^{-1}(W) = \bigcup_{i \in J} W_i$ olup $b_i \in W_i$ olacak biçimde bir tek $i \in J$ vardır. $\forall i \in J$ için $U_i = W_i \cap p^{-1}(U)$ diyelim. $\forall i \in J$ için $b_i \in U_i$ dir. Dolayısıyla $B = \{b_i : i \in J\} \subset C$ kümesi sonsuz elemanlıdır. Lemma 7.8'den B kümesinin yığılma noktası yoktur. Bu ise Teorem 2.1.11 ile çelişir.

7.10. Lemma [1]:

X yerel kompakt, Hausdorff uzayı ve G, X 'den X 'e tanımlı homeomorfizmlerin bir grubu olsun. G, X üzerine sabit noktası olmadan etki ediyor ve G, Sperner Şartı'nı sağlıyor ise G, X üzerine düzgün süreksiz olarak etki eder.

İspat:

$x \in X$ alalım. X yerel kompakt ve Hausdorff uzayı olduğundan Teorem 2.1.16'dan x'in bir U_1 komşuluğu vardır öyle ki $\overline{U_1}$ kompakttır. G, Sperner Şartı'nı sağladığından $G\left[\overline{U_1}\right]$ kümesi sonludur. $G\left[\overline{U_1}\right]$ sonlu olduğundan $g(x) \in \overline{U_1}$ olacak biçimde sonlu sayıda $g \in G$ vardır. Çünkü $g(x) \in \overline{U_1}$ olacak biçimde sonsuz çoklukta $g \in G$ olsaydı $x \in \overline{U_1}$ ve $x \in g^{-1}\left(\overline{U_1}\right)$ olduğundan $\overline{U_1} \cap g^{-1}\left(\overline{U_1}\right) \neq \varnothing$ olup $g^{-1} \in G\left[\overline{U_1}\right]$ olurdu. Bu ise $G\left[\overline{U_1}\right]$ in sonlu olmasıyla çelişir.

$A = \left\{g \in G : g(x) \in \overline{U_1}, g \neq e\right\} = \{g_1, g_2, ..., g_k\}$ diyelim. G, X üzerine sabit noktası olmadan etki ettiğinden her $i = 1, 2, ..., k$ için $x \neq g_i(x)$ tir. X bir Hausdorff uzayı olduğundan her $i = 1, 2, ..., k$ için $x \in S_i$, $g_i(x) \in T_i$ ve $S_i \cap T_i = \varnothing$ olacak biçimde X 'de açık olan S_i, T_i altkümeleri vardır.

$U=\bigcap_{i=1}^{k} S_i \cap U_1$ diyelim. U, x noktasının bir komşuluğu olup $U \subset U_1$ dir. Ayrıca her $i=1,2,...,k$ için $g_i(x) \notin \overline{U}$ dır. Gerçekten her $i=1,2,...,k$ için $g_i(x)$'in T_i komşuluğu için $T_i \cap U = \left(\bigcap_{j=1}^{k} T_i \cap S_j \cap U_1 \right) \subset T_i \cap S_i = \varnothing$ olduğundan $T_i \cap U = \varnothing$ olup $g_i(x) \notin \overline{U}$ dır. Dolayısıyla her $g \in G$ için $g(x) \notin \overline{U}$ dır. Çünkü $g(x) \in \overline{U}$ olsa $\overline{U} \subset \overline{U_1}$ olduğundan $g(x) \in \overline{U_1}$ olup $g = g_i$ olacak biçimde bir $1 \leq i \leq k$ vardır. Bu ise her $i=1,2,...,k$ için $g_i(x) \notin \overline{U}$ olmasıyla çelişir.

$\overline{U} \subset \overline{U_1}$ olduğundan $G\left[\overline{U}\right] \subset G\left[\overline{U_1}\right]$ olup $G\left[\overline{U_1}\right]$ sonlu olduğundan $G\left[\overline{U}\right]$ sonludur.

$D = \bigcup \left\{ g\left(\overline{U}\right) : g \in G\left[\overline{U}\right], g \neq e \right\}$ diyelim. $\overline{U_1}$ kompakt ve $\overline{U}$, $\overline{U_1}$'ın kapalı altkümesi olduğundan $\overline{U}$ kompakttır. $\forall g \in G\left[\overline{U}\right]$ için g bir homeomorfizm ve $\overline{U}$ kompakt olduğundan $g\left(\overline{U}\right)$ kompakt olup Teorem 2.1.10'dan D sonlu sayıda kompakt kümenin birleşimi olduğundan kompakttır. $x \notin D$ dir. Gerçekten

$$x \in D \;\Rightarrow\; \exists g \in G\left[\overline{U}\right] \ni x \in g\left(\overline{U}\right)$$

$$\Rightarrow\; \exists g \in G\left[\overline{U}\right] \ni g^{-1}(x) \in \overline{U}$$

olur. Bu ise her $g \in G$ için $g(x) \notin \overline{U}$ ile çelişir.

X bir Hausdorff uzayı, $D \subset X$ kompakt ve $x \notin D$ olduğundan Teorem 2.1.12'den $x \in V$, $D \subset W$ ve $V \cap W = \varnothing$ olacak biçimde X'de açık olan V, W kümeleri vardır. $V \cap W = \varnothing$ olduğundan $V \cap D = \varnothing$ tur. Ayrıca $V_1 = U \cap V$ dersek $V_1 \cap D = \varnothing$ ve $V_1 \subset U$ dur.

V_1, x'in bir komşuluğu olup $g \neq e$ ise $g(V_1) \cap V_1 = \varnothing$ dir. Gerçekten $g(V_1) \cap V_1 \neq \varnothing$ olduğunu kabul edelim. $\exists y \in g(V_1) \cap V_1$ dir. $y \in g(V_1)$ ve $y \in V_1$ olup $V_1 \subset U \subset \overline{U}$ olduğundan $y \in \overline{U}$ dır. Ayrıca $y \in g(V_1) \subset g\left(\overline{U}\right)$ olduğundan $y \in g\left(\overline{U}\right) \cap \overline{U}$ dır. $g\left(\overline{U}\right) \cap \overline{U} \neq \varnothing$ olup $g \in G\left[\overline{U}\right]$ dır. Dolayısıyla $y \in D$ dir. Bu ise $V_1 \cap D = \varnothing$ olmasıyla çelişir.

Sonuç olarak her $x \in X$ için x'in $g \neq e$ olacak biçimdeki $\forall g \in G$ için $g(V_1) \cap V_1 = \varnothing$ şartını sağlayan bir V_1 komşuluğu bulunduğundan G, X üzerine düzgün süreksiz olarak etki eder.

7.11. Lemma [1]:

X yerel kompakt, Hausdorff uzayı ve G, X'den X'e tanımlı homeomorfizmlerin bir grubu olsun. G, X üzerine sabit noktası olmadan etki ediyor ve G, Sperner Şartı'nı sağlıyor ise X/G uzayı yerel kompakt ve Hausdorff uzayıdır.

İspat:

Lemma 7.3'ten $p : X \to X/G$ doğal dönüşümü sürekli, örten ve açıktır. X yerel kompakt olduğundan Teorem 2.1.18'den X/G de yerel kompakttır.

$x_0 \neq y_0$ olacak biçimde $x_0, y_0 \in X/\mathrm{G}$ alalım. p fonksiyonu örten olduğundan $\exists x, y \in X \ni x_0 = p(x), y_0 = p(y)$ dir. $x_0 = p(x) \neq p(y) = y_0$ olduğundan her $g \in G$ için $x \neq g(y)$ ve $y \neq g(x)$ dir. Özel olarak $g = e$ alırsak $x \neq y$ dir. X yerel kompakt ve Hausdorff uzayı olduğundan x'in bir U_1 açık komşuluğu ve y'nin bir V_1 açık komşuluğu vardır öyle ki; $U_1 \cap V_1 = \varnothing$ ve $\overline{U_1}, \overline{V_1}$ kompakt altkümelerdir.

$C=\{x\}\cup\overline{V_1}$ diyelim. $\overline{V_1}$ kompakt olduğundan C de kompakttır. G, Sperner Şartı'nı sağladığından $G[C]$ kümesi sonludur. Dolayısıyla $g(x)\in C$ olacak biçimde sonlu sayıda $g\in G$ vardır. Çünkü $g(x)\in C$ olacak biçimde sonsuz çoklukta $g\in G$ olsaydı $x\in C$ ve $x\in g^{-1}(C)$ olduğundan $C\cap g^{-1}(C)\neq\varnothing$ olup $g^{-1}\in G[C]$ olurdu. Bu ise $G[C]$ kümesinin sonlu olmasıyla çelişir. $g(x)\in C=\{x\}\cup\overline{V_1}$ olacak biçimde sonlu sayıda $g\in G$ olduğundan $g(x)\in\overline{V_1}$ olacak biçimde sonlu sayıda $g\in G$ vardır.

$A=\left\{g\in G: g(x)\in\overline{V_1}, g\neq e\right\}=\{g_1,g_2,...,g_k\}$ diyelim. Her $i=1,2,...,k$ için $y\neq g_i(x)$ ve X bir Hausdorff uzayı olduğundan her $i=1,2,...,k$ için $y\in S_i, g_i(x)\in T_i$ ve $S_i\cap T_i=\varnothing$ olacak biçimde X 'de açık olan S_i, T_i altkümeleri vardır.

$V=\bigcap_{i=1}^{k}S_i\cap V_1$ diyelim. V, y noktasının bir komşuluğu ve $V\subset V_1$ dir. Ayrıca her $i=1,2,...,k$ için $g_i(x)\notin\overline{V}$ dır. Gerçekten her $i=1,2,...,k$ için $g_i(x)$ in T_i komşuluğu için $T_i\cap V=\left(\bigcap_{j=1}^{k}T_i\cap S_j\cap V_1\right)\subset T_i\cap S_i=\varnothing$ olduğundan $T_i\cap V=\varnothing$ olup $g_i(x)\notin\overline{V}$ dır. Üstelik, her $g\in G$ için $g(x)\notin\overline{V}$ dır. Çünkü $g(x)\in\overline{V}$ olsa $\overline{V}\subset\overline{V_1}$ olduğundan $g(x)\in\overline{V_1}$ olup $g=g_i$ olacak biçimde bir $1\leq i\leq k$ vardır. Bu ise her $i=1,2,...,k$ için $g_i(x)\notin\overline{V}$ olmasıyla çelişir.

$C'=\overline{V}\cup\overline{U_1}$ diyelim. $\overline{V}\subset\overline{V_1}$ ve $\overline{V_1}$ kompakt olduğundan $\overline{V}$ da kompakttır. $\overline{U_1}$ ve $\overline{V}$ kompakt ve olduğundan $C'=\overline{V}\cup\overline{U_1}$ kompakttır. G, Sperner Şartı'nı sağladığından $G[C']$ kümesi sonludur. Dolayısıyla $g\left(\overline{V}\right)\cap\overline{U_1}\neq\varnothing$ olacak biçimde sonlu sayıda $g \in G$ vardır. Çünkü, $g\left(\overline{V}\right) \cap \overline{U_1} \neq \varnothing$ olacak biçimde sonsuz çoklukta $g \in G$ olsaydı $g\left(\overline{V}\right) \subset g\left(\overline{V} \cup \overline{U_1}\right)$ ve $\overline{U_1} \subset \overline{U_1} \cup \overline{V}$ olduğundan

$$\begin{aligned} g\left(\overline{V}\right) \subset g\left(\overline{V} \cup \overline{U_1}\right) \text{ ve } \overline{U_1} \subset \overline{U_1} \cup \overline{V} &\Rightarrow \varnothing \neq g\left(\overline{V}\right) \cap \overline{U_1} \subset \left(\overline{V} \cup \overline{U_1}\right) \cap g\left(\overline{V} \cup \overline{U_1}\right) \\ &\Rightarrow \left(\overline{V} \cup \overline{U_1}\right) \cap g\left(\overline{V} \cup \overline{U_1}\right) \neq \varnothing \\ &\Rightarrow g \in G\left[C'\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $G\left[C'\right]$ kümesinin sonlu olmasıyla çelişir.

$g\left(\overline{V}\right) \cap \overline{U_1} \neq \varnothing$ olacak biçimdeki sonlu sayıdaki $g \in G$ için $x \notin g\left(\overline{V}\right)$ dır. Çünkü, $x \in g\left(\overline{V}\right)$ olsa $g^{-1}(x) \in \overline{V}$ olur ki bu her $g \in G$ için $g(x) \notin \overline{V}$ olmasıyla çelişir.

$B = \left\{g \in G : g\left(\overline{V}\right) \cap \overline{U_1} \neq \varnothing, g \neq e\right\} = \left\{h_1, h_2, ..., h_n\right\}$ diyelim. her $i = 1, 2, ..., n$ için $x \notin h_i\left(\overline{V}\right)$ dir. her $i = 1, 2, ..., n$ için h_i bir homeomorfizm ve $\overline{V}$ kompakt olduğundan $h_i\left(\overline{V}\right)$ kompakttır. Dolayısıyla $x \notin h_i\left(\overline{V}\right)$ olduğundan Teorem 2.1.12'den her $i = 1, 2, ..., n$ için $x \in W_i$, $h_i\left(\overline{V}\right) \subset A_i$ ve $A_i \cap W_i = \varnothing$ olacak biçimde X 'de açık olan A_i, W_i kümeleri vardır.

$U = \bigcap_{i=1}^{n} W_i \cap U_1$ diyelim. U, x noktasının bir komşuluğu olup her $g \in G$ için $g\left(\overline{V}\right) \cap U = \varnothing$ tur. Bunu görmek için $g\left(\overline{V}\right) \cap U \neq \varnothing$ olacak biçimde bir $g \in G$ olduğunu kabul edelim. $U \subset \overline{U} \subset \overline{U_1}$ olduğundan $g\left(\overline{V}\right) \cap \overline{U_1} \neq \varnothing$ olup $g \in B$ dir. $g = h_j$ olacak biçimde $1 \leq j \leq n$ vardır.

$$g\left(\overline{V}\right) \cap U = h_j\left(\overline{V}\right) \cap U = \left(\bigcap_{i=1}^{n} W_i \cap U_1 \cap h_j\left(\overline{V}\right)\right) \subset W_j \cap h_j\left(\overline{V}\right) = \varnothing$$

olup $g\left(\overline{V}\right) \cap U = \varnothing$ tur.

Her $g \in G$ için $g\left(\overline{V}\right) \cap U = \varnothing$ olduğundan $g\left(V\right) \cap U = \varnothing$ tur. Dolayısıyla her $g_1, g_2 \in G$ için $g_1(U) \cap g_2(V) = \varnothing$ tur. $x \in U$ olduğundan $x_0 = p(x) \in p(U)$ ve $y \in V$ olduğundan $y_0 = p(\mathrm{y}) \in p(V)$ dir. U, V açık olduğundan ve p fonksiyonu açık olduğundan $p(U), p(V)$ kümeleri açıktır. Ayrıca $p(U) \cap p(V) = \varnothing$ tur. Gerçekten $p(U) \cap p(V) \neq \varnothing$ olduğunu kabul edersek en az bir $z \in X / G$ vardır öyle ki $z \in p(U)$ ve $z \in p(V)$ dir. Dolayısıyla $\exists u_1 \in U, \exists v_1 \in V \ni z = p(u_1) = p(v_1)$ dir. $p(u_1) = p(v_1)$ olduğundan $u_1 = g(v_1)$ olacak biçimde $g \in G$ vardır. $u_1 \in g(V)$ olup $u_1 \in g(V) \cap U$ dir. Bu ise her $g \in G$ için $g\left(V\right) \cap U = \varnothing$ ile çelişir. Sonuç olarak X / G bir Hausdorff uzayıdır.

7.12. Teorem [1]:

K yerel kompakt, Hausdorff uzayı ve ($\tilde{K}$, p), K'nın irtibatlı bir örtü uzayı olsun. Bu durumda $G = \mathrm{Cov}(\tilde{K}/K)$ olmak üzere G grubu $\tilde{K}$ üzerine sabit noktası olmadan etki eder ve G, Sperner Şartı'nı sağlar. Tersine; X irtibatlı, yerel kompakt, Hausdorff uzayı ve G, X'den X'e tanımlı homeomorfizmlerin bir grubu olsun. Eğer; G, X üzerine sabit noktası olmadan etki ediyor ve G Sperner Şartı'nı sağlıyor ise $p: X \to X / G$ doğal dönüşümü bir örtü dönüşümüdür ve X / G yerel kompakt, Hausdorff uzayıdır. Ayrıca $\mathrm{Cov}\left(\mathrm{X}/(X / G)\right) = G$ dir.

İspat:

K yerel kompakt, Hausdorff uzayı ve ($\tilde{K}$, p), K'nın irtibatlı bir örtü uzayı olsun. Teorem 7.4'ten $G = \mathrm{Cov}(\tilde{K}/K)$ grubu $\tilde{K}$ üzerine sabit noktası olmadan etki eder. Ayrıca Teorem 2.1.17'den K yerel kompakt, Hausdorff uzayı olduğundan regüler uzaydır. Lemma 7.9'dan $G = \mathrm{Cov}(\tilde{K}/K)$, Sperner Şartı'nı sağlar.

Tersine; X irtibatlı, yerel kompakt, Hausdorff uzayı ve G, X ’den X ’e tanımlı homeomorfizmlerin bir grubu olsun. G, X üzerine sabit noktası olmadan etki etsin ve G, Sperner Şartı’nı sağlasın. Lemma 7.10’dan G grubu X üzerine düzgün süreksiz olarak etki eder. Teorem 7.5’ten $p : X \to X / G$ doğal dönüşümü bir örtü dönüşümüdür ve $\mathrm{Cov}\big(\mathrm{X}/\,(X / G)\big) = G$ dir. Ayrıca Lemma 7.11 den X / G uzayı yerel kompakt ve Hausdorff uzayıdır.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Örtü uzayları konusu sadece Cebirsel Topoloji'de değil Diferensiyel Geometri, Lie Grupları ve Riemann Yüzeyleri gibi alanlarda da önemli bir yer teşkil etmektedir.

Bu çalışmada [1] incelenerek örtü dönüşümleri grupları, düzgün süreksiz grup etkileri ve Sperner Şartı'nı sağlayan grup etkileri araştırılmış ve bu konular arasındaki ilişkiler açıklanmıştır.

Örtü uzayları, Cebirsel Topoloji'nin önemli bir konusu olan Lifleme Teorisi'ne temel oluşturmaktadır. Dolayısıyla çalışmamız temel alınarak Lifleme Teorisi alanında araştırma yapılabilir. Bunun için [2] ve [5] incelenebilir.

Son yıllarda dallanmış Riemann yüzeylerinin bir genelleştirilmesi olan çatallı örtü uzayları ile ilgili çalışmalar yapılmaktadır. Dolayısıyla çalışmamızın ileri aşamalarında çatallı örtü uzayları konusunda araştırma yapılabilir.

KAYNAKLAR

1. Kinoshita, S., “Notes on Covering Transformation Groups”, ***Proc. Amer.Math. Soc.,*** 19: 421-424 (1968).

2. Rotman, J.J. , “An Introduction to Algebraic Topology”, ***Springer-Verlag,*** New York, 272-312, 14-30, 39-56 (1988).

3. Massey, W.S., “A Basic Course in Algebraic Topology”, ***Springer-Verlag,*** New York, 117-146 (1991).

4. Hatcher, A., “Algebraic Topology”, ***Cambridge University Press***, Cambridge, 25-40, 56-83 (1994).

5. Spainer, E., “Algebraic Topology”, ***Springer-Verlag,*** New York, 87-88 (1966)

6. Munkres, J.R., “Topology 2nd ed.”, ***Prentice Hall,*** Upper Saddle River, 166, 326-327 (2000)

7. Bülbül, A., “Genel Topoloji”, ***Hacettepe Üniversitesi Yayınları***, Ankara, 160-206, 223-245 (2004).

8. Yıldız, C., “Genel Topoloji”, ***Gazi Kitabevi***, Ankara, 187-197 (2005).

9. Bayraktar, M., “Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi”, ***Gazi Kitabevi***, Ankara, 127-132, 167-168 (2006)

10. Hungerford, T.W., “Algebra”, ***Springer-Verlag,*** New York, 41-46, 88-92 (1974)

11. Bredon, G.E., “Introduction to Compact Transformation Groups”, ***Academic Press,*** Orlando, 37-38 (1972)

12. Yüksel, Ş., “Genel Topoloji”, ***Eğitim Kitabevi Yayınları,*** Konya, 263, 374-375 (2006)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: MUTLU, Gökhan
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 07.01.1988, Ankara
E-mail	: gmutlu@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birim	Mezuniyet tarihi
Lisans	Ankara Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2010
Lise	Mehmetçik Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi	2006

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2011- Halen	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Kitap okumak, müzik dinlemek, film ve sahne sanatlarını izlemek, basketbol ve tenis oynamak.