T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KATEGORİ TEORİDE LİMİT KAVRAMI

Naci ER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2014

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KATEGORİ TEORİDE LİMİT KAVRAMI

Naci ER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2014

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KATEGORİ TEORİDE LİMİT KAVRAMI

Naci ER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 09/07/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Mustafa ALKAN
Yrd. Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ
Yrd. Doç. Dr. Sevda BARUT

ÖZET

KATEGORİ TEORİDE LİMİT KAVRAMI

Naci ER

Yüksek Lısans Tezi, Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Mustafa ALKAN
Temmuz 2014, 78 sayfa

Bu tezde kategori teorisi ve temel kavramları, temel kaynak olarak Adámek, Herrlich ve Strecker (1990), Anderson ve Fuller (1992), Lane (1998) alınarak incelenmiş ve matematiğin iyi bilinen bazı kavramlarına, kategorik olarak bakılarak bu kavramların genelleştirmesi incelenmiştir.

İkinci bölümde gerekli ön bilgiler verilmiş, vektör uzaylarındaki taban kavramı evrensellik özelliğiyle incelenmiştir.

Üçüncü bölümde, kategori tanımı verilmiş, ayrıca kümeler üzerinde tanımlanan birebir, örten fonksiyon, kartezyen çarpımı, ayrık birleşim, eşitleyici gibi kavramlar kategorik olarak incelenmiştir.

Dördüncü bölümde funktor kavramı tanıtılmış ve bazı temel özellikleri incelenmiştir. Bunun yardımıyla farklı kategoriler arasındaki ilişkiler incelenmiş, iki kategorinin izomorf olması ve denk olması kavramları incelenmiştir.

Beşinci bölümde, diyagram ve doğal dönüşüm kavramları incelenmiştir. Bunun yardımıyla farklı funktorlar arasındaki ilişkiler incelenmiş ve matematiğin önemli konularından biri olan limit kavramına kategorik olarak bakılmıştır. Üçüncü bölümde bahsedilen çarpım, eşitleyici ve modül teoride kullanılan direkt limit ve ters limit gibi kavramların, kategorik limit ve dual limitin özel halleri olduğu gösterilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Kategori Teorisi, Funktor, Direkt Limit, Ters Limit.

JÜRİ: Doç. Dr. Mustafa ALKAN (Danışman)
Yrd. Doç. Dr. Nesrin TUTAŞ
Yrd. Doç. Dr. Sevda BARUT

ABSTRACT

LIMIT IN CATEGORY THEORY

Naci ER

MSc Thesis in Mathematics
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa ALKAN
July 2014, 78 pages

In this thesis, the elementary concepts of category theory are investigated taking as reference Adámek, Herrlich and Strecker (1990), Anderson and Fuller (1992), Lane (1998). Then some well-known concepts of mathematics are considered from a categorical point of view and generalizations of these concepts are studied.

In the second section, some preliminary information concerning category theory, which will be used in this thesis frequently, is given.

In the third section, the definition of categories is given. Then, generalizations of some set-related concepts are studied.

In the fourth chapter, the concept of functors are examined with their basic properties. Using functors, we also give some relationships between different categories. Lastly, isomorphism and equivalence of two categories are studied.

In the fifth section, the concepts of diagram and natural transformations are introduced. Using natural transformations, relationships between two functors are discussed and limit, an important notion of mathematics, is studied from a categorical point of view. Then, the concepts introduced in the third section such as product and equalizer in addition to direct and inverse limit used in module theory are shown to be special cases of categorical limit and colimit.

KEYWORDS: Category Theory, Functor, Direct Limit, Inverse Limit.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Mustafa ALKAN (Supervisor)
Asst. Prof. Dr. Nesrin TUTAŞ
Asst. Prof. Dr. Sevda BARUT

ÖNSÖZ

Kategori teorisi, matematiğin anabilim dallarının ortak temel özelliklerini alarak oluşturulan ve bütün anabilim dallarına indirgenebilen, bütün anabilim dallarını kapsayan soyut bir teoridir.

Kategori teorisi, farklı matematiksel yapılar arasında ilişki kurmak ve bir alanda elde edilen sonuçların başka alanlara da taşınabilmesini sağlamak amacıyla ortak bir matematiksel dil oluşturmaya çalışır. Bunu yaparken matematiksel objelerin yapısını aralarındaki dönüşümleri inceleyerek anlamaya çalışır. Bu yüzden kategori teorisinde objelerden çok aralarındaki morfizm denen dönüşümler incelenir.

Fakat genel olarak morfizmleri dönüşümlerden ibaret görmek de doğru değildir. Mesela, sonlu boyutlu vektör uzayları arasındaki lineer dönüşümleri matrislerle ifade etmek mümkündür. Bu da morfizmlerin sadece fonksiyonlardan ibaret görülmemesinin bir sebebidir. Çünkü vektör uzayları arasındaki ilişkiler matrisler yardımıyla da incelenebilir.

Kategori teorisi, matematiksel yapıları küme, grup, vektör uzayı, topolojik uzay gibi kategorilere ayırıp her bir kategoriyi kendi içinde inceler. Bunu yaparken her bir kategoriye ait objelerin ve morfizmlerin neler olduğunu belirleyip, bu morfizmler arasında bir kompozisyon tanımlar. Daha sonra bu objeleri ve morfizmleri, kompozisyonu da bir şekilde koruyarak, başka kategorilerin başka obje ve morfizmlerine dönüştürmenin yolunu arar. Bu sayede bir kategoride çözülmesi zor olan bir problem başka bir kategoride daha kolay çözülebilir. Mesela bir matrisin tersini hesaplamak bir lineer dönüşümün tersini hesaplamaktan daha kolaydır.

Kategoriler, funktorlar ve doğal dönüşümler, Samuel Eilenberg ve Saunders MacLane tarafından 1945 yılında ortaya atılmıştır. Başlangıçta topolojide, özellikle cebirsel topolojide, geometrik ve sezgisel bir kavram olan homolojiden aksiyomatik bir yaklaşım olan homoloji teorisine geçişte önemli bir adımdır.

Hiç kuşkusuz, matematiğin en önemli konularından biri de limit kavramıdır. Bu tezde, limit kavramının, kategori teorideki karşılığı olan limit ve dual limit kavramları ve bunlar yardımı ile elde edilen bazı kavramlar incelenecektir.

Kategori teorisinde birçok kavram dualiyle tanımlanmıştır. Çoğu zaman bu kavramlar, isminin başına 'dual' ifadesi getirilerek adlandırılacaktır; dual çarpım, dual limit, dual eşitleyici gibi. Bazen de kavram kargaşasına mahal vermemek için; pullback, pushout gibi ingilizce terimleri aynen kullanacağız. Terimlerin Türkçe karşılıkları için Mucuk'u (2010) esas alacağız. Çokca kullanılan kategori adları da, standarda uyması için, ingilizce adlarının ilk birkaç harfi ile kısaltılacaktır.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Kısaltmalar

$\mathcal{A}b$	Abelyen gruplar kategorisi
$\mathcal{C}at$	Küçük kategoriler kategorisi
$\mathcal{CR}ing$	Değişmeli birimli halkalar kategorisi
$\mathcal{G}rp$	Gruplar kategorisi
$\mathcal{M}at$	Reel matrisler kategorisi
$\mathcal{P}os$	Kısmi sıralı kümeler kategorisi
$\mathcal{R}\text{-}mod$	Sol R-modüller kategorisi
$\mathcal{R}el$	Bağıntılar kategorisi
$\mathcal{R}ing$	Birimli halkalar kategorisi
$\mathcal{R}ng$	Halkalar kategorisi
$\mathcal{S}et$	Kümeler kategorisi
$\mathcal{T}op$	Topolojik uzaylar kategorisi
$\mathcal{V}ec$	Reel vektör uzayları kategorisi
$s\mathcal{V}ec$	Sonlu boyutlu, reel vektör uzayları kategorisi

Simgeler

$A \overset{\alpha}{\to} B$	A'dan B'ye α morfizmi
$A \overset{\beta}{\leftarrow} B$	B'den A'ya β morfizmi
$\alpha, \beta : A \to B$	A'dan B'ye α ve β morfizmleri
$A \to B$	A'dan B'ye mümkün olan tek morfizm
$Hom\,(A, B)$	A'dan B'ye morfizmler kümesi
Id_A	A'nın birim morfizmi
$\beta \circ \alpha$	β morfizmi ile α morfizminin kompozisyonu
$a \mid b$	a böler b
$\varinjlim A_i$	A_i'lerin direkt limiti
$\varprojlim A_i$	A_i'lerin ters limiti
$A \times B$	A ile B objelerinin çarpımı
$\mathbf{0}$	$\{0\}$
$\coprod_{i \in I} A_i$	A_i'lerin ayrık birleşimi
$a \in A$	a, A kümesinin elemanı
$\lesssim$	Yarı sıralama bağıntısı
$A \cong B$	A ile B izomorftur
$\aleph_0$	Doğal sayıların kardinalitesi

Simgeler

$\mathcal{F}:\mathcal{K}\rightarrow\mathcal{L}$	$\mathcal{K}$'dan $\mathcal{L}$'ye $\mathcal{F}$ funktoru
$\mathcal{F}\mathcal{G}$	$\mathcal{F}$ ve $\mathcal{G}$ funktorlarının bileşkesi
$\mathcal{F}\alpha$	α morfizminin $\mathcal{F}$ altındaki görüntüsü
$id_{\mathcal{K}}$	$\mathcal{K}$'dan $\mathcal{K}$'ya birim funktor
$A\otimes B$	A ile B'nin tensör çarpımı
$1_X\otimes -$	Tensör funktoru
$Hom\,(A,-)$	(Kovaryant) hom funktoru
$Hom\,(-,A)$	Kontravaryant hom funktoru
$\mathcal{K}^{op}$	$\mathcal{K}$ kategorisinin ters kategorisi
$\eta:\mathcal{F}\Rightarrow\mathcal{G}$	$\mathcal{F}$'den $\mathcal{G}$'ye η doğal dönüşümü
$\eta:\mathcal{F}\cong\mathcal{G}$	$\mathcal{F}$'den $\mathcal{G}$'ye η doğal izomorfizmi

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Kategori teorisi, farklı matematiksel yapılar arasında ilişki kurmak ve bir alanda elde edilen sonuçların başka alanlara da taşınabilmesini sağlamak amacıyla ortak bir matematiksel dil oluşturmaya çalışır. Bunu yaparken matematiksel objelerin yapısını aralarındaki dönüşümleri inceleyerek anlamaya çalışır. Bu yüzden kategori teorisinde objelerden çok aralarındaki morfizm denen dönüşümler incelenir.

Kategori teorisi, matematiksel yapıları küme, grup, vektör uzayı, topolojik uzay gibi kategorilere ayırıp her bir kategoriyi kendi içinde inceler. Bunu yaparken her bir kategoriye ait objelerin ve morfizmlerin neler olduğunu belirleyip, bu morfizmler arasında bir kompozisyon tanımlar. Daha sonra bu objeleri ve morfizmleri, kompozisyonu da bir şekilde koruyarak, başka kategorilerin başka obje ve morfizmlerine dönüştürmenin yolunu arar. Bu sayede bir kategoride çözülmesi zor olan bir problem başka bir kategoride daha kolay çözülebilir. Mesela bir matrisin tersini hesaplamak bir lineer dönüşümün tersini hesaplamaktan daha kolaydır.

Bu tezde, limit ve dual limit kavramları ve bunlar yardımı ile elde edilen bazı kavramlar kategori teorisi kullanılarak incelenecektir.

Kategori teorisinde birçok kavram dualiyle tanımlanmıştır. Çoğu zaman bu kavramlar, isminin başına 'dual' ifadesi getirilerek adlandırılacaktır; dual çarpım, dual limit, dual eşitleyici gibi. Bazen de kavram kargaşasına mahal vermemek için; pullback, pushout gibi ingilizce terimleri aynen kullanacağız. Terimlerin Türkçe karşılıkları için Mucuk'u (2010) esas alacağız. Çokca kullanılan kategori adları da, standarda uyması için, ingilizce adlarının ilk birkaç harfi ile kısaltılacaktır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tezde kullanılacak temel bilgiler, Anderson ve Fuller (1992), Dummit ve Foote (2003), Hungerford (2003), Kasch (1983), Rotman (2002) temel kaynak alınarak verilecektir.

2.1. Sıralı Kümeler

Tanım 2.1.1

(1) P boştan farklı bir küme ve $\lesssim$ de P üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer yansıma ve geçişme özelliklerini sağlarsa $(P, \lesssim)$ ikilisine yarı sıralı küme ve $\lesssim$ bağıntısına da yarı sıralama bağıntısı denir.

(2) $(P, \lesssim)$ bir yarı sıralı küme olsun. Eğer her $i, j \in P$ için $i, j \lesssim u$ olacak şekilde bir $u \in P$ varsa, $(P, \lesssim)$ ikilisine yönlendirilmiş yarı sıralı küme denir.

Örnek 2.1.2

(1) Sonlu kümeler üzerinde "A'nın eleman sayısı B'nin eleman sayısından fazla değilse $A \lesssim B$'dir" şeklinde tanımlanan $\lesssim$ bağıntısı bir yarı sıralama bağıntısıdır.

(2) R bir tamlık bölgesi olmak üzere $a, b \in R$ için $a \lesssim b \Leftrightarrow b|a$ şeklinde tanımlansın. $(R, \lesssim)$ bir yarı sıralı kümedir.

(3) (X, τ) bir topolojik uzay ve $a, b \in X$ olmak üzere, "b'nin her komşuluğu a'nın da komşuluğu oluyorsa $a \lesssim b$" şeklinde tanımlansın. $(X, \lesssim)$ bir yarı sıralı kümedir.

Tanım 2.1.3 *$(P, \leq)$ bir yarı sıralı küme olsun. Her $a, b \in P$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ iken $a = b$ oluyorsa $(P, \leq)$ ikilisine kısmi sıralı küme denir.*

Örnek 2.1.4

(1) Tam sayılar üzerindeki $\leq$ sıralama bağıntısı ile $(\mathbb{Z}, \leq)$ kısmi sıralı bir kümedir.

(2) Doğal sayılar üzerindeki bölünebilme bağıntısı bir kısmi sıralama bağıntısıdır.

2.2. Cebirsel Yapılar

Tanım 2.2.1

(1) M boştan farklı bir küme, $(\cdot) : M \times M \to M$ bir işlem olsun. Eğer $(\cdot)$ işlemi birleşme ve birimlilik özelliklerini sağlıyorsa $(M, \cdot)$ ikilisine monoid denir.

(2) $(M, *)$ birimi e_M ve $(N, \cdot)$ de birimi e_N olan iki monoid olmak üzere, her $a, b \in M$ için $f(a * b) = f(a) \cdot f(b)$ ve $f(e_M) = e_N$ özelliklerini sağlayan bir fonksiyona monoid homomorfizması denir.

Örnek 2.2.2

(1) $M = \{e\}$ kümesi üzerinde $e \cdot e = e$ şeklinde tanımlanan $(\cdot)$ işlemiyle M birimi e olan bir monoiddir.

(2) $\mathbb{N}$ *doğal sayılar kümesi toplama işlemiyle birlikte, birimi* 0 *olan bir monoiddir. Aynı zamanda çarpma işlemiyle de birimi* 1 *olan bir monoiddir.*
$\varphi(m) = 2^m$ *şeklinde tanımlı* $\varphi : (\mathbb{N}, +) \to (\mathbb{N}, \cdot)$ *fonksiyonu monoid homomorfizmasıdır.*
(3) $n \in \mathbb{Z}^+$ *olmak üzere* $M_n(\mathbb{R})$ *matrislerdeki çarpma işlemi ile birimi* I_n *birim matrisi olan bir monoiddir.*

Örnek 2.2.3 $\Sigma = \{a, b, \ldots, z\}$ *kümesi Türkçedeki 29 harf ve bu harflerle oluşturulabilecek, anlamlı ya da anlamsız, boş kelime dahil bütün kelimelerin kümesi* Σ^* *olsun.* Σ^* *kümesi kelimelerin birleştirilmesi işlemi ile bir monoiddir.*

Σ^* *daki kelimeler aslında* $(abcfg), (asd), (ak), (deniz), (li)$ *gibi sıralı kümelerdir. Bunların birleştirilmesiyle yine* Σ^* *a ait olan başka kelimeler oluşturabiliriz.*

Birleşme:

$$\begin{aligned}(ab\ldots c)((xy\ldots z)(\alpha\beta\ldots\gamma)) &= (ab\ldots c)(xy\ldots z\alpha\beta\ldots\gamma)\\ &= (ab\ldots cxy\ldots z\alpha\beta\ldots\gamma)\\ &= (ab\ldots cxy\ldots z)(\alpha\beta\ldots\gamma)\\ &= ((ab\ldots c)(xy\ldots z))(\alpha\beta\ldots\gamma)\end{aligned}$$

Birimlilik: $()$ *boş kelime olmak üzere,* $(ab\ldots c)() = (ab\ldots c) = ()(ab\ldots c)$ *olduğundan* $()$ *birimdir.*

Tanım 2.2.4 $(M, \cdot)$ *birimi* e *olan bir monoid ve* $\alpha \in M$ *olsun.*

(1) Eğer $\alpha' \cdot \alpha = e$ $(\alpha \cdot \alpha' = e)$ *olacak şekilde bir* $\alpha' \in M$ *varsa* α' *elemanına* α *elemanının sol (sağ) tersi denir.*
(2) Eğer α', α *elemanının sol ve sağ tersi ise* α' *elemanına* α *elemanının tersi denir, ve* α^{-1} *şeklinde gösterilir.*

Teorem 2.2.5 *Bir monoidde bir elemanın hem sağ hem de sol tersleri varsa eşittirler.*

İspat. $\alpha' \cdot \alpha = e = \alpha \cdot \alpha''$ olsun. Bu durumda

$$\alpha' = \alpha' \cdot e = \alpha' \cdot (\alpha \cdot \alpha'') = (\alpha' \cdot \alpha) \cdot \alpha'' = e \cdot \alpha'' = \alpha''$$

olup sol ters ile sağ ters eşittir. ■

Sonuç 2.2.6 *Bir monoidde bir elemanın tersi varsa tektir.*

İspat. α' *ve* α''*,* α*'nın iki tersi olsun. O zaman* $\alpha' \cdot \alpha = e = \alpha \cdot \alpha''$ *olur. Buradan* $\alpha' = \alpha''$ *elde edilir.* ■

Fakat bir elemanının sadece sağ ya da sadece sol tersi varsa aynı durum geçerli değildir. Örnek olarak S bir küme ve S^S de S'den S'ye tanımlı fonksiyonlar kümesi olmak üzere, $(S^S, \circ)$ monoidinde $f(x, y) = x$ şeklinde tanımalanan $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $g(x) = (x, 0)$ şeklinde tanımlanan $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ve $h(x) = (x, 1)$ şeklinde tanımlanan $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ iki ayrı sağ terstir.

Tanım 2.2.7

(1) $(G,\cdot)$ *birimi* e *olan bir monoid olmak üzere, her* $\alpha \in G$ *için* $\alpha^{-1}\cdot\alpha = e = \alpha\cdot\alpha^{-1}$ *olacak şekilde* $\alpha^{-1} \in G$ *varsa* $(G,\cdot)$*'ye grup denir.*
(2) $(G,\cdot)$ *bir grup olmak üzere, her* $\alpha,\beta \in G$ *için* $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$ *oluyorsa* $(G,\cdot)$ *grubuna değişmeli grup ya da Abel grubu denir.*

2.2.1. Modüller

M bir Abel grubu olmak üzere, $End\,(M)$ endomorfizmalar kümesi birimli bir halkadır. Dolayısıyla M'nin her endomorfizması bir halkanın elemanıdır. Diğer taraftan birimli bir R halkasının her elemanını M nin bir endomorfizması olarak düşünmek mümkün olabilir mi? Eğer bu mümkünse M'ye sol R-modül denir.

Tanım 2.2.8 *R birimi 1 olan bir halka ve M de toplamsal bir Abelyen grup olmak üzere,* $\cdot : R\times M \to M$ *çarpma işlemi her* $r,s \in R$ *ve* $a,b \in M$ *için aşağıdaki şartları sağlarsa bu çarpma işlemiyle birlikte* M*'ye bir sol R-modül denir.*

M_1*:* $r\,(a+b) = ra + rb$
M_2*:* $(r+s)\,a = ra + sa$
M_3*:* $r\,(sa) = (rs)\,a$
M_4*:* $1a = a$

Benzer şekilde sağ R-modül de çarpımın $M \times R \to M$ şeklinde gösterilmesiyle tanımlanabilir. R değişmeli ise sağ ve sol R-modül yapıları aynı olup sadece R-modül denir. Özel olarak R bir cisim ise M'ye R üzerinde vektör uzayı denir.

Örnek 2.2.9 *Birimli her R halkası aynı zamanda bir sağ ve sol R-modüldür.*

Örnek 2.2.10 *R birimli bir halka olsun.*

(1) I*, R'nin sol idealiyse* I *bir sol R-modüldür.*
(2) I*, R'nin sağ idealiyse* I *bir sağ R-modüldür.*
(3) I*, R'nin idealiyse* I *bir sol ve sağ R-modüldür.*

Örnek 2.2.11 *Her Abelyen grup bir $\mathbb{Z}$-modüldür.*

Böylece modül kavramı; vektör uzayı, Abelyen grup ve ideal kavramlarının genellemesi olarak düşünülebilir.

Tanım 2.2.12 *M bir sol R-modül ve N de onun bir alt grubu olmak üzere, N de M deki çarpmaya göre bir sol R-modül oluyorsa N'ye M'nin alt R-modülü denir.*

Teorem 2.2.13 *M bir sol R-modül ve N de onun bir alt grubu olsun. N'nin M'nin alt modülü olması için gerek ve yeter şart her $r \in R$ ve her $n \in N$ için $rn \in N$ olmasıdır.*

Tanım 2.2.14 *M, N sol R-modüller ve $\varphi : M \to N$ grup homomorfizması olmak üzere, her $r \in R$ ve her $m \in M$ için $\varphi(rm) = r\varphi(m)$ oluyorsa $\varphi : M \to N$ homomorfizmasına sol R-homomorfizma ya da sol R-modül homomorfizması denir. M den N'ye bütün sol R-homomorfizmaların kümesi $Hom_R(M, N)$ ile gösterilir.*

Teorem 2.2.15 *M, N birer sol R-modül olmak üzere, R değişmeli ise $Hom_R(M, N)$ bir sol R-modüldür.*

İspat. $Hom_R(M, N)$ nin bir Abelyen grup olduğu aşikardır. Ayrıca her $r, s \in R$ ve her $\varphi \in Hom_R(M, N)$ için $(r\varphi)(x) = \varphi(rx)$ şeklinde tanımlanan $r\varphi \in Hom_R(M, N)$ çarpımı; M_1,M_2,M_4 aksiyomlarını sağlar.

M_3: $((rs)\varphi)(x) = ((sr)\varphi)(x) = \varphi((sr)x) = \varphi(s(rx)) = (s\varphi)(rx) = (r(s\varphi))(x)$ olup R değişmeli ise $Hom_R(M, N)$ de bir sol R-modüldür.

■

Tanım 2.2.16 *M sağ, N sol R-modüller olsun.*

(1) Her $m \in M$ için $f_{1,m}(n) := f(m, n)$ şeklinde tanımlanan, $f_{1,m} : N \to X$ bir sol R-modül homomorfizması ve her $n \in N$ için $f_{2,n}(m) := f(m, n)$ şeklinde tanımlanan, $f_{2,n} : M \to X$ bir sağ R-modül homomorfizması ise $f : M \times N \to X$ fonksiyonuna bilineer dönüşüm denir.

(2) $M \times N \xrightarrow{u} T$ bilineer dönüşüm olsun. Her $M \times N \xrightarrow{f} X$ bilineer dönüşümüne karşılık $f = g \circ u$ olacak şekilde bir tek $T \xrightarrow{g} X$, R-modül homorfizması varsa T'ye M ile N'nin tensör çarpımı denir ve $M \otimes N$ ile gösterilir.

Tensör çarpımı hakkında detaylı bilgi için Anderson ve Fuller'e (1992) bakılabilir.

2.2.2. Vektör uzayları

Tanım 2.2.17 *V bir K-vektör uzayı ve $X \subseteq V$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlarsa X kümesine V'nin bir (Hamel) tabanı denir.*

Germe: *Her v vektörü, X'in sonlu lineer kombinasyonu ile ifade edilebilmelidir.*

Lineer bağımsızlık: *Her $\{v_i | i = 1, \ldots, n\} \subseteq X$ sonlu alt kümesi için, $\sum_{i=1}^{n} k_i v_i = 0$ olması ancak her $i = 1, \ldots, n$ için $k_i = 0$ olmasıyla mümkün olmalıdır.*

Yukarıdaki tanımda germe aksiyomu X kümesinin V'deki her vektörü ifade edebilecek kadar geniş olmasını ve lineer bağımsızlık da X'de gereksiz eleman bulunmamasını garanti eder. Şayet bir v_0 elemanı X'in diğer elemanlarından bazılarının sonlu bir lineer kombinasyonu olsaydı yani gereksiz olsaydı X lineer bağımlı olurdu.

Teorem 2.2.18 (Evrensellik Özelliği) *V bir vektör uzayı olsun. $X \subseteq V$'nin bir taban olması için gerek ve yeter şart; her W vektör uzayı ile $f : X \to W$ fonksiyonunun bir*

$L : V \to W$ lineer dönüşümüne tek türlü genişletilebilir olması, yani $i : X \to V$ içerme fonksiyonu olmak üzere $f = L \circ i$ olmasıdır.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & V \arrow[d, dashed, "L"] \\ & W \end{tikzcd}$$

İspat.

($\Rightarrow$) *X, V'nin bir tabanı ve $f : X \to W$ de bir fonksiyon olsun.*

Varlık: *V'nin her v vektörü $v = \sum_{j=1}^{n} k_j v_j$ şeklinde bir tek yazılışa sahip olduğundan, $L(v) = L\left(\sum_{j=1}^{n} k_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} k_j f(v_j)$ iyi tanımlı bir fonksiyondur ve her $v_j \in X$ için $L(i(v_j)) = L(v_j) = f(v_j)$ olduğundan $f = L \circ i$ dir.*

Lineerlik: *Her $\sum_{j=1}^{n} k_j v_j, \sum_{j=1}^{n} k'_j v_j \in V$ ve $k \in K$ için,*

$$\begin{aligned} L\left(\sum_{j=1}^{n} k_j v_j + k\sum_{j=1}^{n} k'_j v_j\right) &= L\left(\sum_{j=1}^{n} \left(k_j + kk'_j\right) v_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(k_j + kk'_j\right) f(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} k_j f(v_j) + k\sum_{j=1}^{n} k'_j f(v_j) \\ &= L\left(\sum_{j=1}^{n} k_j v_j\right) + kL\left(\sum_{j=1}^{n} k'_j v_j\right) \end{aligned}$$

olur.

Teklik: *Bir başka $L' : V \to W$ lineer dönüşümü için $f = L' \circ i$ olsa, her $\sum_{j=1}^{n} k_j v_j \in V$ için*

$$L'\left(\sum_{j=1}^{n} k_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} k_j L'(v_j) = \sum_{j=1}^{n} k_j f(v_j) = L\left(\sum_{j=1}^{n} k_j v_j\right)$$

olup $L' = L$ olurdu.

($\Leftarrow$) *Her $f : X \to W$ fonksiyonu $f = L \circ i$ olacak şekilde bir $L : V \to W$ lineer dönüşümüne tek türlü genişletilebilir olsun.*

Lineer bağımsızlık: *X lineer bağımlı olsaydı, $k_w \neq 0$ olmak üzere $\sum\limits_{j=1}^{n} k_j v_j = 0$ olacak şekilde $\{k_j | j = 1, \ldots, n\} \subseteq K$ var olurdu. Özel olarak $W = K$ alalım ve $f : X \to K$ fonksiyonunu da $f(v_j) = \delta_{jw}$ şeklinde seçelim. Buradan,*

$$0 = L(0) = L\left(\sum_{j=1}^{n} k_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} k_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} k_j \delta_{jw} = k_w \neq 0$$

çelişkisi bulunur. Dolayısıyla X lineer bağımsız olmalıdır.

Germe: *$X \subseteq V$ olduğundan V'nin bir A alt uzayı için $V = \langle X \rangle \oplus A$ olur. Şimdi $A = \mathbf{0}$ olduğunu gösterelim. $A \neq \mathbf{0}$ olsa bir $0 \neq v \in A$ ve $A' \subseteq A$ için $A = \langle v \rangle \oplus A'$, buradan da $V = \langle X \rangle \oplus \langle v \rangle \oplus A'$ olurdu. $L : V \to W$ lineer dönüşümünü $L\left(\sum\limits_{j=1}^{n} k_j v_j + kv + a\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} k_j f(v_j)$ şeklinde tanımlarsak $f = L \circ i$ olur. Ayrıca $0 \neq w \in W$ alalım ve $L' : V \to W$ lineer dönüşümünü $L'\left(\sum\limits_{j=1}^{n} k_j v_j + kv + a\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} k_j f(v_j) + kw$ şeklinde tanımlayalım. $f = L' \circ i$ ve $L \neq L'$ olur. Böylece $f : X \to W$'nin iki farklı genişlemesi elde edildi. Dolayısıyla $A \neq \mathbf{0}$ kabulü yanlıştır. O halde $A = \mathbf{0}$ ve $V = \langle X \rangle$ olmalıdır.*

■

Bir fonksiyonun tanım kümesi boş küme olabilir. Böyle bir fonksiyonun, uygulanacağı bir eleman olmadığından kuralı da yoktur. Bu özel fonksiyona boş fonksiyon denir.

Önerme 2.2.19 **0** *uzayının tabanı boş kümedir.*

İspat. Boş kümeden herhangi bir kümeye bir tek boş fonksiyon tanımlanabilir. Dolayısyla her W uzayı için $W^{\emptyset}$ tek elemanlı bir kümedir. Yine 0 uzayından herhangi bir W uzayına da bir tek lineer dönüşüm tanımlanabilir. Dolayısıyla $Hom(\mathbf{0}, W)$ da tek elemanlı bir kümedir. Buradan $Hom(\mathbf{0}, W) \equiv W^{\emptyset}$ olup, önceki sonuç gereği $\emptyset$, **0** uzayının tabanıdır. ■

Şimdi vektör uzayları ile tabanları arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Teorem 2.2.20 *Her vektör uzayının bir tabanı vardır.*

İspat. *V bir vektör uzayı ve $\mathcal{A}$ da V'deki bütün lineer bağımsız kümelerin ailesi olsun. $\emptyset$ lineer bağımsız olduğundan $\mathcal{A}$ boştan farklıdır. $\mathcal{C} = \{I_i \in \mathcal{A} | I_i \subseteq I_{i+1}\}_{i \in I}$ zincirini alalım. $\bigcup\limits_{i \in I} I_i$ de lineer bağımsızdır. Çünkü sonlu her $B \subseteq \bigcup\limits_{i \in I} I_i$ için $B \subseteq I_j$ olacak şekilde bir $j \in I$ vardır, ve I_j lineer bağımsız olduğundan B de lineer bağımsızdır. Böylece $\bigcup\limits_{i \in I} I_i$ da lineer bağımsızdır. Dolayısıyla $\mathcal{C}$'nin bir üst sınırı vardır. Zorn lemmadan $\mathcal{A}$ nın bir X maksimal elemanı vardır. V de X'in sonlu lineer kompozisyonu olarak yazılamayan bir*

v elemanı olsa $X \cup \{v\}$ lineer bağımsız olurdu ve bu X'in maksimal olmasıyla çelişirdi. Dolayısıyla X hem lineer bağımsız, hem de V'yi gerer, bir tabandır. ■

3. KATEGORİLER

X bir küme olsun. X'in verilen bir P özelliğine sahip bütün elemanlarından oluşan $\{x \in X \mid P(x)\}$ alt kümesi tanımlanabilir. Fakat $\{x \mid P(x)\}$ ifadesi her zaman bir küme tanımlamaz. Mesela bütün kümelerin kümesi olarak $\mathcal{U} = \{X \mid X \text{ kümedir}\}$ şeklinde bir küme tanımlanamaz. Çünkü $\mathcal{U}$ bir küme olsaydı onun $A = \{X \in \mathcal{U} \mid X \notin X\}$ şeklinde alt kümesi de olurdu ve iki durum söz konusu olurdu: $A \in A$ ya da $A \notin A$. Eğer $A \in A$ olsa A'nın tanımı gereği $A \notin A$ olmalıydı. Eğer $A \notin A$ olsa bu sefer de $A \in A$ olmalıydı. Yani $A \in A \Leftrightarrow A \notin A$ çelişkisi bulunurdu (Russel paradoksu).

Bütün kümelerin kümesi olmadığına göre, mesela bir kümeyi kuvvet kümesine dönüştüren fonksiyon nasıl tanımlanabilir? Bunun için fonksiyonların tanımlı olduğu elemanların bir kümeye ait olması gerektiği şartı kaldırılıp, yerine sınıf kavramı tanımlanmıştır.

Her grup bir küme olduğuna göre bütün gruplar sınıfı $\mathcal{U}$'nun bir alt sınıfıdır. Benzer şekilde topolojik uzaylar sınıfı, vektör uzayları sınıf vs. de $\mathcal{U}$'nun birer alt sınıfıdır ve küme değildirler. Bununla beraber her küme bir sınıftır. Küme olan sınıflara küçük sınıf denir. Bir küme teşkil edemeyen sınıflara da geniş sınıf denir. Geniş sınıflar arasında da kümeler arasındaki gibi fonksiyonlar, bağıntılar, birleşim ve kesişim gibi işlemler tanımlanabilir. Bu kavramlar için, temel kaynak olarak Adámek, Herrlich ve Strecker (1990), Anderson ve Fuller (1992), Lane (1998) alınarak incelemeye devam edelim.

Bu çalışmada terimlerin Türkçeleri için Mucuk (2010) kaynak alınmıştır.

Tanım 3.0.21 (Kategori) *Aşağıdaki şekilde ifade edilen $(Ob, Hom, Id, \circ)$ dörtlüsüne kategori denir. Burada;*

Ob: *elemanlarına obje denen bir sınıf olmalıdır.*
Hom: *her A, B objesine karşılık, elemanlarına A'dan B'ye morfizmler denen ve*

$$(A, B) \neq (A', B') \text{ iken } Hom\,(A, B) \cap Hom\,(A', B') = \emptyset$$

olan $Hom\,(A, B)$'dir.
Id: *her A objesine karşılık birim morfizm denen $Id_A \in Hom\,(A, A)$ morfizmidir.*
$\circ$: *her A, B, C objesi ile her $\alpha \in Hom(A, B)$ ve $\beta \in Hom(B, C)$ morfizmi için $\beta \circ \alpha \in Hom(A, C)$ olacak şekilde kompozisyon denen ve aşağıdaki şartları sağlayan bir işlemdir.*

(1) her $\alpha \in Hom(A, B), \beta \in Hom(B, C), \gamma \in Hom(C, D)$ için;

$$\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$$

(2) her $\alpha \in Hom\,(A, B)$ için $Id_B \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ Id_A$

Tanım 3.0.22 *Obje sınıfı küme olan kategoriye küçük kategori denir. Obje sınıfı küme olmayan kategoriye de geniş kategori denir.*

Çoğu zaman kategoriler $(Ob, Hom, Id, \circ)$ gibi sıralı dörtlüler şeklinde değil de $\mathcal{K}$ gibi bir sembolle gösterilir. Bu durumda;

(1) $\mathcal{K}$ kategorisinin objeler sınıfı $Ob(\mathcal{K})$ şeklinde gösterilir ve $A \in Ob(\mathcal{K})$ ise A'ya

$\mathcal{K}$-obje denir.

(2) A, B birer $\mathcal{K}$-obje olmak üzere A dan B'ye morfizmler kümesi $Hom_{\mathcal{K}}(A, B)$ şeklinde gösterilir ve $\alpha \in Hom_{\mathcal{K}}(A, B)$ ise α'ya $\mathcal{K}$-morfizm denir. Bütün $\mathcal{K}$-morfizmler sınıfı da $Mor(\mathcal{K})$ ile gösterilir.

(3) Eğer karışıklık olmayacaksa $\mathcal{K}$-obje ve $\mathcal{K}$-morfizm yerine sadece obje ve morfizm, $Hom_{\mathcal{K}}(A, B)$ yerine de sadece $Hom(A, B)$ yazılabilir.

$\alpha \in Hom(A, B)$ ise α'nın A'dan B'ye bir morfizm olduğunu göstermek için genellikle, $A \overset{\alpha}{\to} B$ veya $B \overset{\alpha}{\leftarrow} A$ gösterimi kullanılır. Buradan α'nın her zaman fonksiyon olduğu düşünülmemelidir.

Teorem 3.0.23 *Her monoid tek objeli bir kategoridir.*

İspat. $(M, \cdot)$ birimi e olan bir monoid olsun.

Ob: tek objesi M'nin herhangi bir $*$ elemanı,
Hom: $Hom(*, *) = M$ kümesi,
Id: $Id_* = e$,
$\circ$: kompozisyon da $(\cdot)$ işlemi olsun.

Bu durumda $(\{*\}, M, e, \cdot)$ aşağıdaki şartları sağlar;

(1) her $\alpha, \beta, \gamma \in M$ için, $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$

(2) her $\alpha \in M$ için, $e \cdot \alpha = \alpha = \alpha \cdot e$

Dolayısıyla da $(\{*\}, M, e, \cdot)$ bir kategoridir. ■

Teorem 3.0.24 *Tek objeye sahip bir kategori monoiddir.*

İspat. $(\{*\}, Hom, Id, \circ)$ tek objeye sahip bir kategori olsun. Bu durumda, her $\alpha, \beta \in Hom(*, *)$ için, $\beta \circ \alpha \in Hom(*, *)$ olur. Buradan;

Birleşme: her $\alpha, \beta, \gamma : * \to *$ için, $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$
Birimlilik: her $\alpha : * \to *$ için, $Id_* \cdot \alpha = \alpha = \alpha \cdot Id_*$

olup $(Hom, \circ)$ birimi Id_* olan bir monoiddir.

■

Yukarıdaki iki teoremden kategorinin monoidin genellemesi olduğu söylenebilir.

Teorem 3.0.25 *Herhangi bir kategorinin objeleri üzerinde* $A \lesssim B \Leftrightarrow Hom(A, B) \neq \emptyset$ *şeklinde tanımlanan bağıntı, bir yarı sıralama bağıntısıdır.*

İspat.

Geçişme: Her A, B, C objesi için, $A \lesssim B$ ve $B \lesssim C$ ise
$Hom\,(A, B) \neq \emptyset$ ve $Hom\,(B, C) \neq \emptyset$ olup $\alpha \in Hom\,(A, B)$ ve $\beta \in Hom\,(B, C)$ vardır. Buradan $\beta \circ \alpha \in Hom\,(A, C)$ de var olup $Hom\,(A, C) \neq \emptyset$ dolayısıyla da $A \lesssim C$ olur.

Yansıma: Her A objesi için $Id_A \in Hom\,(A, A)$ olup $Hom\,(A, A) \neq \emptyset$, dolayısıyla da $A \lesssim A$ olur.

■

Örnek 3.0.26 *$(P, \lesssim)$ yarı sıralı küme olmak üzere, aşağıdaki yapılar ile, $(P, Hom, Id, \wedge)$ bir küçük kategoridir.*

Ob: *objeleri P'nin elemanları,*

Hom: *P'nin her a, b objesi için,* $Hom\,(a, b) = \begin{cases} \{a \to b\} & , a \lesssim b \\ \emptyset & , a \not\lesssim b \end{cases}$ *şeklinde en fazla bir elemana sahip küme,*

Id: *P'nin her a objesi için, $a \lesssim a$ olduğundan birim morfizm $Id_a = (a \to a)$ ve*

$\wedge$: *her $a \to b$ ve $b \to c$ için kompozisyon $(b \to c) \wedge (a \to b) = a \to c$ şeklinde tanımlansın.*

(1) her $(a \to b)\,, (b \to c)\,, (c \to d)$ için

$$(c \to d) \wedge ((b \to c) \wedge (a \to b)) = (c \to d) \wedge (a \to c) = (a \to d)$$
$$((c \to d) \wedge (b \to c)) \wedge (a \to b) = (b \to d) \wedge (a \to b) = (a \to d)$$

(2) her $a \to b$ için $(b \to b) \wedge (a \to b) = (a \to b) = (a \to b) \wedge (a \to a)$

Örnek 3.0.27 *R bir tamlık bölgesi olmak üzere, elemanları arasında Örnek 2.1.2'deki yarı sıralama bağıntısı ile $(R, Hom, Id, \wedge)$ bir kategoridir.*

Herhangi bir topolojik uzaydaki eğrileri birer morfizm olarak düşünebiliriz. Bunun için, önce kompleks uzaydaki eğri tanımını verelim.

Tanım 3.0.28 *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir kapalı aralık olmak üzere, $\gamma : I \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümüne eğri denir.*
$I = [a, b]$ ise, $\gamma\,(a)$ noktasına γ eğrisinin başlangıç, $\gamma\,(b)$ noktasına da bitiş noktası denir.

Örnek 3.0.29 *$I \subseteq \mathbb{R}$ bir kapalı aralık ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olmak üzere;*

(1) Her $x \in I$ için $\gamma\,(x) = z_0$ şeklinde tanımlı $\gamma : I \to \mathbb{C}$ sabit fonksiyonu, sürekli olduğundan bir eğridir.
(2) Her $x \in I$ için $\gamma\,(x) = x$ şeklinde tanımlı $\gamma : I \to \mathbb{C}$ birim fonksiyonu, sürekli olduğundan bir eğridir.

Şimdi de eğriler arasındaki kompozisyonu karmaşık analizdeki eğrilerin toplamı gibi tanımlayalım.

$\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{C}$ ve $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{C}$ iki eğri olsun. Reel uzayda her kapalı aralık birbirine homeomorf olduğundan, $\alpha_1 : [0,1] \to I_1$ ve $\alpha_2 : [1,2] \to I_2$ sürekli dönüşümleri vardır. $(\gamma_2 + \gamma_1) : [0,2] \to \mathbb{C}$ dönüşümünü

$$(\gamma_2 + \gamma_1)(x) := \begin{cases} (\gamma_1 \circ \alpha_1)(x) & , x \in [0,1] \\ (\gamma_2 \circ \alpha_2)(x) & , x \in (1,2] \end{cases}$$

şeklinde tanımayalım.

İki sürekli dönüşümün bileşkesi de sürekli olduğundan, bu dönüşümün sürekli olup bir eğri tanımlayabilmesi için 1 noktasında sürekli olması yeterlidir. Bunun için de $(\gamma_1 \circ \alpha_1)(1) = (\gamma_2 \circ \alpha_2)(1)$ yani $\gamma_1(\alpha_1(1)) = \gamma_2(\alpha_2(1))$ olmalıdır. Eğer γ_1 eğrisinin bitiş ve γ_2 eğrisinin başlangıç noktaları ortak olarak seçilirse $(\gamma_2 + \gamma_1) : [0,2] \to \mathbb{C}$ dönüşümü de sürekli olur ve böylece bir eğri belirtir.

Benzer şekilde $\gamma_3 : I_3 \to \mathbb{C}$ eğrisi için, I_3 ile $[2,3]$ de homeomorf olduğundan, $\alpha_3 : [2,3] \to I_3$ sürekli dönüşümü vardır. Dolayısıyla $(\gamma_3 + \gamma_2) : [1,3] \to \mathbb{C}$ dönüşümü;

$$(\gamma_3 + \gamma_2)(x) := \begin{cases} (\gamma_2 \circ \alpha_2)(x) & , x \in [1,2] \\ (\gamma_3 \circ \alpha_3)(x) & , x \in (2,3] \end{cases}$$

şeklinde tanımlanabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
(\gamma_3 + (\gamma_2 + \gamma_1))(x) &= \begin{cases} (\gamma_2 + \gamma_1)(x) & , x \in [0,2] \\ (\gamma_3 \circ \alpha_3)(x) & , x \in (2,3] \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\gamma_1 \circ \alpha_1)(x) & , x \in [0,1) \\ (\gamma_2 \circ \alpha_2)(x) & , x \in [1,2) \\ (\gamma_3 \circ \alpha_3)(x) & , x \in [2,3] \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\gamma_1 \circ \alpha_1)(x) & , x \in [0,1) \\ (\gamma_3 + \gamma_2)(x) & , x \in [1,3] \end{cases} \\
&= ((\gamma_3 + \gamma_2) + \gamma_1)(x)
\end{aligned}$$

olup $\gamma_3 + (\gamma_2 + \gamma_1) = (\gamma_3 + \gamma_2) + \gamma_1$ özelliği vardır.

Son olarak I bir kapalı aralık olmak üzere, her $z_0 \in \mathbb{C}$ için $Id_{z_0}(x) = z_0$ şeklinde tanımlı $Id_{z_0} : I \to \mathbb{C}$ sabit fonksiyonunu görüntüsü $\{z_0\}$ tek nokta kümesi olan bir eğridir. Böylece aşağıdaki örnekte verilen kompleks eğriler kategorisini oluşturabiliriz.

Örnek 3.0.30 *Aşağıdaki yapılarla birlikte, $(\mathbb{C}, Hom, Id, +)$ bir kategoridir.*

Hom: *her z_0, z_1 noktası için $Hom(z_0, z_1)$, z_0 noktasını z_1 noktasına bağlayan eğriler,*

Id: *her z_0 noktası için birim morfizm olarak görüntüsü $\{z_0\}$ şeklinde tek noktadan oluşan Id_{z_0} eğrisi,*

$\circ$: *her $\alpha \in Hom(z_0, z_1), \beta \in Hom(z_1, z_2)$ eğrisi için, bu eğrilerin uç uca eklenmesiyle oluşturulan $\beta + \alpha$ eğrisi*

aşağıdaki özellikleri sağlar, dolayısıyla $(\mathbb{C}, Hom, Id, +)$ bir küçük kategoridir.

(1) her $\alpha \in Hom(z_0, z_1), \beta \in Hom(z_1, z_2), \gamma \in Hom(z_2, z_3)$ *eğrisi için*

$$\gamma + (\beta + \alpha) = (\gamma + \beta) + \alpha$$

(2) her $\alpha \in Hom(z_0, z_1)$ *eğrisi için* $Id_{z_1} + \alpha = \alpha = \alpha + Id_{z_0}$

Örnek 3.0.31 ($\mathcal{M}at$) *Aşağıdaki yapılarla birlikte,* $\mathcal{M}at = (\mathbb{Z}^+, Hom, I, \cdot)$ *bir küçük kategoridir.*

Hom: *her* m, n *pozitif tamsayısı için* $Hom(m, n) = M_{nxm}(\mathbb{R})$ *kümesi,*
Id: *her* $m \in \mathbb{Z}^+$ *için* I_m *birim matrisi birim morfizm ve*
$\circ$: *kompozisyon da matrislerdeki çarpma işlemi olan* $\cdot$ *işlemi.*

Bir kategoride herhangi iki obje arasında morfizm olmak zorunda değildir. Fakat her objeden kendisine en az bir morfizm (birim morfizm) vardır. Böylece verilen bir objeler sınıfı üzerinde kurulabilecek en basit kategori, birim morfizmlerden başka morfizmi olmayan kategoridir.

Örnek 3.0.32 $\mathcal{X}$ *herhangi bir sınıf olmak üzere, objeleri* $\mathcal{X}$*'in elemanları ve morfizmleri de sadece birim morfizmler olan* $\mathcal{C}(\mathcal{X})$ *kategorisini oluşturabiliriz.*

Özel olarak $\mathcal{X} = \emptyset$ *alınırsa* $\mathcal{C}(\emptyset)$ *kategorisine boş kategori denir ve* $\mathcal{X} = \{\emptyset\}$ *alınırsa* $\mathcal{C}(\{\emptyset\})$ *kategorisine de bitiş kategorisi denir ve* **1** *şeklinde gösterilir.*

3.1. Kümeler Üzerinde Tanımlı Kategoriler

Çoğu matematiksel yapı bir küme üzerine inşa edilir. Dolayısıyla objeleri kümelerden ve morfizmleri de fonksiyonlardan oluşan kategoriler, daha alışkın olduğumuz yapılardır. Şimdi bu kategorileri inceleyeceğiz.

Örnek 3.1.1 ($\mathcal{S}et$) *Aşağıdaki yapılarla birlikte,* $(\mathcal{U}, Hom, Id, \circ)$ *dörtlüsü kategori özelliklerini sağlar. Bu kategoriye kümeler kategorisi denir.*

Ob: $\mathcal{U}$ *bütün kümeler sınıfı,*
Hom: $Hom(A, B)$ *tanım kümesi A, değer kümesi B olan fonksiyonlar kümesi,*
Id: $Id_A : A \to A$ *birim fonksiyon ve*
$\circ$: *fonksiyonlar arasındaki* $\circ$ *(bileşke) işlemi, her* $A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C \overset{\gamma}{\to} D$ *için şu özellikleri sağlar.*

(1) $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$

(2) $Id_B \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ Id_A$

Her fonksiyonun bir tek tanım kümesi ve bir tek değer kümesi vardır. Mesela, $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ile bunun $\mathbb{R}$'ye kısıtlanışı olan $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ve $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu farklı üç morfizmdir. Bu sayede kategori tanımındaki

$$(A, B) \neq (A', B') \text{ iken } Hom(A, B) \cap Hom(A', B') = \emptyset$$

şartı yerine gelmiş olur.

$\mathcal{S}et$ kategorisine benzer şekilde, objeleri kümelerden ve morfizmleri de fonksiyonlardan oluşan başka kategoriler tanımlamak mümkündür. Fonksiyonların bileşkesi her zaman birleşmeli olduğundan, birim fonksiyon ve iki morfizmin bileşkesi her zaman o kategoride bir morfizm oluyorsa, sadece objeler sınıfı ve morfizmler sınıfı verilerek kategori tanımlanabilir.

Örnek 3.1.2 ($\mathcal{G}rp$) *Aşağıdaki yapılarla birlikte, $(\mathcal{G}, Hom, Id, \circ)$ dörtlüsü bir kategoridir. Bu kategoriye gruplar kategorisi denir*

Ob: *$\mathcal{G}$ bütün gruplar sınıfı,*
Hom: *her G ve H grubu için $Hom\,(G, H)$ de G'den H'ye grup homomorfizmaları kümesi,*
Id: *$Id_G : G \to G$ birim fonksiyonu,*
$\circ$: *İki grup homomorfizmasının bileşkesi de grup homomorfizması olduğundan fonksiyonlardaki bileşke işlemidir.*

Benzer şekilde aşağıdaki yapıların da birer kategori olduğu görülebilir.

Örnek 3.1.3 ($\mathcal{A}b$) *Objeleri Abel grupları ve morfizmleri de grup homomorfizmaları olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye Abel gruplar kategorisi denir ve $\mathcal{A}b$ şeklinde gösterilir.*

Örnek 3.1.4 ($\mathcal{R}ng$) *Objeleri halkalar, morfizmleri halka homomorfizmaları olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye halkalar kategorisi denir ve $\mathcal{R}ng$ şeklinde gösterilir.*

Genel olarak birimli halkalar arasındaki her halka homomorfizması, birimi korumaz. Mesela $\varphi\,(m) = 3\bar{m}$ şeklinde tanımlı $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$ fonksiyonu birimli iki halka arasında bir homomorfizma olduğu halde $\varphi\,(1) = \bar{3} \neq \bar{1}$ olur. Fakat bu homomorfizmalardan, sadece birimi koruyanları alarak farklı bir kategori elde edebiliriz. Bu kategori ile $\mathcal{R}ng$ kategorisi arasındaki farkı vurgulamak için bu kategori $\mathcal{R}ing$ diye isimlendirilmektedir.

Örnek 3.1.5 ($\mathcal{R}ing$) *Objeleri birimli halkalar, morfizmleri birimi koruyan halka homomorfizmaları olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye birimli halkalar kategorisi denir ve $\mathcal{R}ing$ şeklinde gösterilir.*

Örnek 3.1.6 ($\mathcal{CR}ing$) *Objeleri birimli ve değişmeli halkalar, morfizmleri birimi koruyan halka homomorfizmaları olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye değişmeli birimli halkalar kategorisi denir ve $\mathcal{CR}ing$ şeklinde gösterilir.*

Örnek 3.1.7 ($\mathcal{V}ec$) *Objeleri reel vektör uzayları ve morfizmleri lineer dönüşümler olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye vektör uzayları kategorisi denir ve $\mathcal{V}ec$ şeklinde gösterilir.*

Örnek 3.1.8 ($\mathcal{R}$-Mod) *$\mathcal{R}$ birimli bir halka olmak üzere objeleri sol $\mathcal{R}$-modüller ve morfizmleri sol $\mathcal{R}$-modül homomorfizmaları olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye sol $\mathcal{R}$-mo düller kategorisi denir ve $\mathcal{R}$-Mod şeklinde gösterilir.*

Örnek 3.1.9 ($\mathcal{T}op$) *Objeleri topolojik uzaylar ve morfizmleri sürekli dönüşümler olan yapı bir kategoridir. Bu kategoriye topolojik uzaylar kategorisi denir ve $\mathcal{T}op$ şeklinde gösterilir.*

Örnek 3.1.10 ($\mathcal{R}el$) *X, Y birer küme, β, X üzerinde ve β' de X' üzerinde birer bağıntı olmak üzere, objeleri (X, β) şeklinde ikililer ve morfizmleri de $f : (X, \beta) \to (X', \beta')$ şeklindeki bağıntı koruyan yani $x\beta y$ iken $f(x)\,\beta' f(y)$ olan fonksiyonlar olsun.*

Birim fonksiyon ve bağıntı koruyan iki fonksiyonun bileşkesi de bağıntı koruduğundan bu yapı bir kategoridir. Bu kategoriye bağıntılar kategorisi denir ve $\mathcal{R}el$ şeklinde gösterilir.

Örnek 3.1.11 ($\mathcal{P}os$) *Objeleri kısmi sıralı kümeler ve morfizmleri $x \leq y$ iken $f(x) \leq f(y)$ olan fonksiyonlar olan yapı, bir kategoridir. Bu kategoriye kısmi sıralı kümeler kategorisi denir ve $\mathcal{P}os$ şeklinde gösterilir.*

Yukarıdaki $\mathcal{S}et, \mathcal{G}rp, \mathcal{A}b, \mathcal{R}ng, \mathcal{R}ing, \mathcal{V}ec, \mathcal{R}\text{-}\mathcal{M}od, \mathcal{R}el$ ve $\mathcal{P}os$ kategorileri birer geniş kategoridir.

Bu bülümün devamında, bir kategorideki özel objeler ve morfizmleri inceleyeceğiz. Tanım ve teoremlerde geçen, bütün obje ve morfizmler aynı kategorinin obje ve morfizmleri olacaktır.

3.2. Objelerin Denkliği

Tanım 3.2.1 *$A \overset{\alpha}{\to} B$ bir morfizm olsun. $\beta \circ \alpha = Id_A$ ve $\alpha \circ \beta = Id_B$ olacak şekilde bir $B \overset{\beta}{\to} A$ morfizmi varsa, α morfizmine izomorfizm ve β morfizmine de α morfizminin tersi denir ve α^{-1} şeklinde gösterilir. A ile B arasında bir izomorfizm varsa A ile B izomorftur denir ve $A \cong B$ şeklinde gösterilir.*

Örnek 3.2.2

(1) $\mathcal{S}et$ kategorisindeki izomorfizmler birebir ve örten fonksiyonlardır. Dolayısıyla iki kümenin birbirine izomorf olması demek kardinalitelerinin aynı olması demektir.
(2) $\mathcal{T}op$ kategorisinde izomorfizmalar homeomorfizmalardır. Sürekli dönüşümün birebir ve örten olması yeterli değil, aynı zamanda tersinin de sürekli dönüşüm olması gerekir.
(3) $\mathcal{G}rp, \mathcal{A}b, \mathcal{R}ing, \mathcal{R}ng, \mathcal{V}ec, \mathcal{R}\text{-}\mathcal{M}od$ kategorilerindeki izomorfizmalar birebir örten homomorfizmalar olup bu cebirdeki alışılmış tanıma denktir. Çünkü bir homomorfizmanın tersi varsa o da homomorfizmadır.
(4) $(\mathbb{Z}^+, Hom, I, \cdot)$ kategorisinde izomorfizmler determinantı sıfırdan farklı kare matrislerdir.
(5) $(M, \cdot)$ bir monoid olmak üzere herhangi bir $*$ elemanıyla oluşturulan $(\{*\}, M, e, \cdot)$ kategorisinin izomorfizmleri monoidin terslenebilen elemanlarıdır. Dolayısıyla $(M, \cdot)$ bir grupsa $(\{*\}, M, e, \cdot)$ kategorisinin her morfizmi izomorfizmdir.
(6) Kompleks eğrilerle oluşturulan $(\mathbb{C}, Hom, Id, +)$ kategorisin her morfizmi bir izomorfizmdir.

Örnek 3.2.3 *$(P, \lesssim)$ bir yarı sıralı küme ve $a, b \in P$ olmak üzere, $(P, Hom, Id, \wedge)$ kategorisinde a ile b'nin izomorf olması için $a \lesssim b$ ve $b \lesssim a$ olması yeterlidir.*

Herhangi iki obje arasında en fazla bir morfizm bulunduğundan, $a \lesssim b$ ve $b \lesssim a$ ise $(a \to b) \wedge (b \to a) \in Hom\,(b, b) = \{Id_b\}$ ve $(b \to a) \wedge (a \to b) \in Hom\,(a, a) = \{Id_a\}$ olup $(a \to b) \wedge (b \to a) = Id_b$ ve $(b \to a) \wedge (a \to b) = Id_a$ olur. Böylece $a \to b$ bir izomorfizma olur. Eğer $\lesssim$ kısmi sıralama ise antisimetri özelliği gereği P'nin her elemanı sadece kendisine izomorf olur. Eğer $\lesssim$ denklik bağıntısı ise simetri özelliği gereği her morfizm izomorfizmdir.

Teorem 3.2.4 *$\alpha : A \to B$ ve $\beta, \gamma : B \to A$ birer morfizm olmak üzere $\beta \circ \alpha = Id_A$ ve $\alpha \circ \gamma = Id_B$ ise $\beta = \gamma$*

İspat. $\beta = \beta \circ Id_B = \beta \circ (\alpha \circ \gamma) = (\beta \circ \alpha) \circ \gamma = Id_A \circ \gamma = \gamma$. ■

Sonuç 3.2.5 *Bir morfizmin hem sağ hem de sol tersi varsa izomorfizmdir.*

İspat. Bir morfizmin varsa sağ ve sol tersleri eşit olduğundan izomorfizm olma şartlarını sağlar. ■

Sonuç 3.2.6 *Bir izomorfizmin tersi varsa tektir.*

İspat. Bir izomorfizmin sol tersi ile sağ tersi eşit olduklarından, iki ayrı sol ters olsa bunlar sağ terse eşit olup buradan da birbirlerine eşittirler. ■

Teorem 3.2.7

(1) Birim morfizm bir izomorfizmdir.
(2) Bir izomorfizmin tersi de bir izomorfizmdir.
(3) İki izomorfizmin bileşkesi de bir izomorfizmdir.

İspat.

(1) Her A objesi için $Id_A = Id_A \circ Id_A$ olduğundan Id_A bir izomorfizmdir.
(2) $A \xrightarrow{\alpha} B$ bir izomorfizm ve $\alpha^{-1} : B \to A$ da tersi olmak üzere, $\alpha \circ \alpha^{-1} = Id_B$ ve $\alpha^{-1} \circ \alpha = Id_A$ olup α^{-1} de bir izomorfizmdir.
(3) $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ iki izomorfizm olmak üzere;

$$\left(\alpha^{-1} \circ \beta^{-1}\right) \circ (\beta \circ \alpha) = \alpha^{-1} \circ \left(\beta^{-1} \circ \beta\right) \circ \alpha = \alpha^{-1} \circ Id_B \circ \alpha = \alpha^{-1} \circ \alpha = Id_A$$
$$(\beta \circ \alpha) \circ \left(\alpha^{-1} \circ \beta^{-1}\right) = \beta \circ \left(\alpha \circ \alpha^{-1}\right) \circ \beta^{-1} = \beta \circ Id_A \circ \beta^{-1} = \beta \circ \beta^{-1} = Id_B$$

olup $\beta \circ \alpha$ da izomorfizmdir.

■

Sonuç 3.2.8 *Bir kategorinin objeler sınıfı üzerindeki izomorf olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.*

İspat.

Yansıma: Her A objesi için $Id_A : A \to A$ izomorfizma olduğundan, A ile A izomorftur.
Geçişme: Her A, B, C objesi için A ile B izomorf ise bir $A \overset{\alpha}{\to} B$ izomorfizması vardır. B ile C izomorf ise de $B \overset{\beta}{\to} C$ izomorfizması vardır. İki izomorfizmanın bileşkesi de izomorfizma olduğundan $\beta \circ \alpha : A \to C$ de izomorfizma olup A ile C de izomorftur.
Simetri: Her A, B objesi için A ile B izomorf ise bir $A \overset{\alpha}{\to} B$ izomorfizması vardır. Her izomorfizmanın tersi de izomorfizma olduğundan, $\alpha^{-1} : B \to A$ da izomorfizma olup B ile A da izomorftur.

■

3.3. Bitiş ve Başlangıç Objeleri

$\mathbb{Z}$ halkasından birimli bir R halkasına birimi koruyan tek homomorfizma olduğu iyi biliniyor. Şimdi bu kavramın kategori teorisindeki genellemesini inceleyeceğiz.

Tanım 3.3.1

(1) T bir obje olmak üzere, her X objesinden T objesine bir tek morfizm varsa T objesine bitiş objesi denir.
(2) Bir I objesinden her X objesine bir tek morfizm varsa I objesine başlangıç objesi denir.
(3) Hem bitiş hem de başlangıç objesi olan objeye sıfır objesi denir ve 0 ile gösterilir. 0 objeye sahip bir kategoride her X ve Y objesi için $X \to 0 \to Y$ şeklinde morfizm var ve tektir. Bu morfizme sıfır morfizm denir.

T'nin bitiş objesi olmasıyla her X objesi için $Hom\,(X, T)$'nin tek elemanlı bir küme olması denktir. Bu tek morfizm $X \to T$ şeklinde gösterilebilir. Benzer şekilde I'nın başlangıç objesi olmasıyla $Hom\,(I, X)$'in tek elemanlı bir küme olması denktir. Bu tek morfizm $I \to X$ şeklinde gösterilebilir.

Örnek 3.3.2

(1) $\mathcal{S}et$ kategorisindeki tek başlangıç objesi boş kümedir. Boş kümeden herhangi bir kümeye fonksiyon tanımlanabilir ve aşikâr olarak bu fonksiyon tektir. Bu fonksiyona boş fonksiyon denir.
(2) $\mathcal{S}et$ kategorisindeki tek elemanlı kümeler bitiş objeleridir. Çünkü boştan farklı bir kümeden tek elemanlı bir kümeye sabit fonksiyon vardır ve bu fonksiyon tektir. Ayrıca boş küme başlangıç olduğundan, boş kümeden boş kümeye de bir tek fonksiyon vardır.
(3) $\mathcal{G}rp$ kategorisinde birim grup sıfır objedir. Benzer şekilde $\mathcal{V}ec$ kategorisinde **0** *uzayı sıfır objedir.*
(4) $\mathcal{R}ing$ kategorisinde $\mathbb{Z}$ başlangıç objesidir. Çünkü her R birimli halkası için birimi koruyan $\varphi : \mathbb{Z} \to R$ homomorfizması $\varphi\,(m) = \varphi\,(m1) = m\varphi\,(1) = m1_R$ şeklinde vardır ve tektir.

(5) $(P, \lesssim)$ bir yarı sıralı küme olmak üzere en büyük elemanı varsa bitiş objesidir. Benzer şekilde en küçük elemanı varsa başlangıç objesidir.
(6) Tamsayılar üzerinde $a \to b \Leftrightarrow b|a$ şeklinde bölünebilme bağıntısı ile oluşturulan kategoride bitiş objeleri ± 1 ve başlangıç objesi de 0 tamsayısıdır.

Teorem 3.3.3

(1) T bir bitiş objesi olmak üzere, bir T' objesinin de bitiş objesi olması için gerek ve yeter şart T ile izomorf olmasıdır.
(2) I bir başlangıç objesi olmak üzere, bir I' objesinin de başlangıç objesi olması için gerek ve yeter şart I ile izomorf olmasıdır.

İspat.

(1) T ve T' bitiş objeleri olsun.
Bu durumda $Hom\,(T', T) = \{\alpha'\}$ ve $Hom\,(T, T') = \{\alpha\}$ olacak şekilde α' ve α vardır. T' bitiş objesi olduğundan

$$\alpha' \circ \alpha \in Hom\,(T', T') = \{Id_{T'}\}$$

ve $\alpha' \circ \alpha = Id_{T'}$ elde edilir.
Benzer şekilde T bitiş objesi olduğundan $\alpha \circ \alpha' \in Hom\,(T, T) = \{Id_T\}$ olup $\alpha \circ \alpha' = Id_T$ olur. Böylece α izomorfizma olup T ile T' izomorftur.
Tersine T bitiş objesi ve $k : T' \to T$ izomorfizm olsun. T bitiş objesi olduğundan, her X objesi için $Hom\,(X, T) = \{x\}$ olacak şekilde bir x vardır. Böylece $x' := k^{-1} \circ x \in Hom\,(X, T')$ morfizmi vardır. Ayrıca $x'' \in Hom\,(X, T')$ morfizmi için $k \circ x'' \in Hom\,(X, T) = \{x\}$ olduğundan $k \circ x'' = x$ elde edilir. Dolayısıyla

$$x' = k^{-1} \circ x = k^{-1} \circ (k \circ x'') = \left(k^{-1} \circ k\right) \circ x'' = Id_{T'} \circ x'' = x''$$

olduğundan da $Hom\,(X, T') = \{x'\}$ olup T' de bitiş objesidir.
(2) I ve I' başlangıç objeleri olsun.
Bu durumda $Hom\,(I, I') = \{\alpha'\}$ ve $Hom\,(I', I) = \{\alpha\}$ olacak şekilde α' ve α vardır. I başlangıç objesi olduğundan

$$\alpha \circ \alpha' \in Hom\,(I, I) = \{Id_I\}$$

ve $\alpha \circ \alpha' = Id_I$ elde edilir.
Benzer şekilde I' başlangıç objesi olduğundan $\alpha' \circ \alpha \in Hom\,(I', I') = \{Id_{I'}\}$ olup $\alpha' \circ \alpha = Id_{I'}$ olur. Böylece α izomorfizma olup I' ile I izomorftur.
Tersine I bitiş objesi ve $k : I \to I'$ izomorfizm olsun. I başlangıç objesi olduğundan, her X objesi için $Hom\,(I, X) = \{x\}$ olacak şekilde bir x vardır. Böylece $x' := x \circ k^{-1} \in Hom\,(I', X)$ morfizmi vardır. Ayrıca $x'' \in Hom\,(I', X)$ morfizmi için $x'' \circ k \in Hom\,(I, X) = \{x\}$ olduğundan $x'' \circ k = x$ elde edilir. Dolayısıyla

$$x' = x \circ k^{-1} = (x'' \circ k) \circ k^{-1} = x'' \circ \left(k \circ k^{-1}\right) = x'' \circ Id_{I'} = x''$$

olduğundan da $Hom\,(I', X) = \{x'\}$ olup I' de başlangıç objesidir.

■

Yukarıdaki teoremden önceki örneklerden de anlaşılacağı gibi bir kategoride bitiş objesi veya başlangıç objesi tek olmayabilir. Fakat varsa izomorfizma farkıyla tektir. Bu yüzden bir tane bitiş objesi ve bir tane başlangıç objesi, varsa, bulmak yeterlidir. Mesela $\mathcal{S}et$ kategorisindeki bitiş objeleri tek elemanlı kümelerden ibarettir.

Sonuç 3.3.4 0 *bir sıfır obje olmak üzere, bir objenin sıfır objesi olması için gerek ve yeter şart* 0 *ile izomorf olmasıdır.*

3.4. Objelerin Çarpımı

Bir kategorideki özel obje ve morfizmler genelde değişmeli diyagramlarla tanımlanır. Bir A objesinden bir B objesine morfizmi A'dan B'ye bir ok ile gösterip, kompozisyonu da bu okların birbirine eklenmesiyle gösterebiliriz. Kategori aksiyomlarındaki morfizmlerin birleşme özelliği sayesinde ikiden fazla okun uç uca eklenmesi de mümkün olur. Bu şekilde bir gösterimde, özellikle gerekmedikçe, birim morfizmler gösterilmez. Çünkü her A objesi için bir tek Id_A morfizmi her zaman vardır. Benzer şekilde iki morfizmin kompozisyonu da, gerekmedikçe, gösterilmez.

Bir diyagramdaki her A objesinden her B objesine var olan okların kompozisyonu eşitse bu diyagrama değişmeli diyagram denir. Değişmeli diyagramı aşağıdaki tanımla daha açık olarak verelim.

Tanım 3.4.1 $A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C, A \overset{\alpha'}{\to} B' \overset{\beta'}{\to} C$ *ve* $A \overset{\gamma}{\to} C$ *morfizmler olsun.*

(1) Eğer $\beta \circ \alpha = \beta' \circ \alpha'$ *oluyorsa aşağıdaki diyagram değişmelidir denir.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha'"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ B' \arrow[r, "\beta'"'] & C \end{tikzcd}$$

(2) Eğer $\beta \circ \alpha = \gamma$ *oluyorsa aşağıdaki diyagram değişmelidir denir.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Doğal sayılardaki çarpma ile toplama işlemleri ve kümelerdeki kartezyen çarpımı ile ayrık birleşim arasında benzerlik vardır. Aslında kategorik olarak bunlar aynı kavramlardır. Kategori teorisinde bu kavramlar çarpım ve dual çarpım olarak genellenir.

Tanım 3.4.2 *A, B iki obje olmak üzere;*

(1) Her X objesi ile her $\left(A \overset{f}{\leftarrow} X \overset{g}{\rightarrow} B\right)$ morfizmleri için, aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde bir tek $\theta : X \rightarrow P$ morfizmi varsa $\left(A \overset{\pi_A}{\leftarrow} P \overset{\pi_B}{\rightarrow} B\right)$ 'ye A ile B objelerinin çarpımı, P'ye de A ile B'nin çarpım objesi denir.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\theta"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & P \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

(2) Her X objesi ile her $\left(A \overset{f}{\rightarrow} X \overset{g}{\leftarrow} B\right)$ morfizmleri için, aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde bir tek $\theta : Q \rightarrow X$ morfizmi varsa $\left(A \overset{i_A}{\rightarrow} Q \overset{i_B}{\leftarrow} B\right)$ 'ye dual çarpım, Q'ya da A ile B'nin dual çarpım objesi denir.

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "i_A"'] & Q \arrow[u, dashed, "\theta"'] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "i_B"]
\end{tikzcd}$$

Tanım 3.4.3

(1) Bir kategoride herhangi iki objenin çarpım objesi her zaman varsa, o kategori ikili çarpımlara sahiptir denir. Eğer ikili çarpımlara sahip bir kategori bitiş objeye de sahipse sonlu çarpımlara sahiptir denir.

(2) Bir kategoride herhangi iki objenin dual çarpım objesi her zaman varsa, o kategori ikili dual çarpımlara sahiptir denir. Eğer ikili dual çarpımlara sahip bir kategori başlangıç objeye de sahipse sonlu dual çarpımlara sahiptir denir.

Örnek 3.4.4 *$\mathcal{S}et$ kategorisi sonlu çarpımlara sahiptir.*

A, B iki küme olsun. $A \times B$ kartezyen çarpımı ile $\pi_A(a, b) = a$ ve $\pi_B(a, b) = b$ şeklinde tanımlı $\left(A \overset{\pi_A}{\leftarrow} A \times B \overset{\pi_B}{\rightarrow} B\right)$ fonksiyonlarının çarpım olduğunu gösterelim.

Her $\left(A \overset{f}{\leftarrow} X \overset{g}{\rightarrow} B\right)$ fonksiyonları için $\theta(x) = (f(x), g(x))$ şeklinde tanımlı $\theta : X \rightarrow A \times B$ fonksiyonu, her $x \in X$ için;

$$(\pi_A \circ \theta)(x) = \pi_A(\theta(x)) = \pi_A(f(x), g(x)) = f(x)$$
$$(\pi_B \circ \theta)(x) = \pi_B(\theta(x)) = \pi_B(f(x), g(x)) = g(x)$$

eşitliklerinden $\pi_A \circ \theta = f$ ve $\pi_B \circ \theta = g$ olup çarpım diyagramı değişmelidir.

Ayrıca bir başka $\theta' : X \to A \times B$ fonksiyonu için $\pi_A \circ \theta' = f$ ve $\pi_B \circ \theta' = g$ ise, her $x \in X$ için

$$\theta'(x) = (\pi_A(\theta'(x)), \pi_B(\theta'(x))) = (f(x), g(x)) = \theta(x)$$

elde edilir ve θ'nın tek olduğu görülür.

Dolayısıyla $\mathcal{S}et$ kategorisi ikili çarpımlara sahiptir. Ayrıca tek elemanlı kümeler bitiş objesi olduğundan $\mathcal{S}et$ kategorisi sonlu çarpımlara sahiptir.

Örnek 3.4.5 *$\mathcal{S}et$ kategorisi sonlu dual çarpımlara sahiptir.*

A, B iki küme olsun.

$$A \sqcup B = \{(a,0), (b,1) \in (A \cup B) \times \{0,1\} : a \in A, b \in B\}$$

şeklinde tanımlı ayrık toplam ile $i_A(a) = (a,0)$ ve $i_B(b) = (b,0)$ şeklinde tanımlı $\left(A \overset{i_A}{\to} A \sqcup B \overset{i_B}{\leftarrow} B\right)$ fonksiyonlarının dual çarpım olduğunu gösterelim.

Her $\left(A \overset{f}{\to} X \overset{g}{\leftarrow} B\right)$ fonksiyonları için $\theta(x,y) = \begin{cases} f(x) & ,y=0 \\ g(x) & ,y=1 \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $\theta : A \sqcup B \to X$ fonksiyonu $\theta \circ i_A = f$ ve $\theta \circ i_B = g$ özelliğini sağlar ve bu özellikte tek fonksiyondur.

Ayrıca boş küme başlangıç objesi olduğundan $\mathcal{S}et$ kategorisi sonlu dual çarpımlara sahiptir.

Örnek 3.4.6

(1) $\mathcal{R}ing$ kategorisinde bitiş obje olmadığından, $\mathcal{R}ing$ kategorisi sonlu çarpımlara sahip değildir. Fakat ikili çarpımlara ve sonlu dual çarpımlara sahiptir.

(2) $\mathcal{G}rp$ kategorisi sonlu çarpım ve dual çarpıma sahiptir.

Örnek 3.4.7 *Bir tamlık bölgesinde Örnek 2.1.2'deki gibi bölünebilme bağıntısı ile oluşturulan kategoride;*

(1) çarpım objesi okektir.

(2) dual çarpım objesi obebtir.

$a, b \in R$ olmak üzere;

(1) $k := okek(a,b)$ olsun. $a|k$ ve $b|k$ olduğundan $(a \leftarrow k \to b)$ morfizmleri vardır. Verilen her $(a \leftarrow x \to b)$ morfizmleri için $a|x$ ve $b|x$ olduğundan, okek tanımı gereği $k|x$ olur. Buradan $x \to k$ morfizmi vardır. Ayrıca bu kategoride herhangi iki obje arasında morfizm varsa tek olduğundan $x \to k$ morfizmi de tektir. Dolayısıyla $(a \leftarrow k \to b)$ çarpım ve $okek(a,b)$ da çarpım objesidir.

(2) $d := obeb\,(a,b)$ *olsun.* $d|a$ *ve* $d|b$ *olduğundan* $(a \to d \leftarrow b)$ *morfizmleri vardır. Verilen her* $(a \to x \leftarrow b)$ *morfizmleri için* $x|a$ *ve* $x|b$ *olduğundan, obeb tanımı gereği* $x|d$ *olur. Buradan* $d \to x$ *morfizmi vardır. Ayrıca bu kategoride herhangi iki obje arasında morfizm varsa tek olduğundan* $d \to x$ *morfizmi de tektir. Dolayısıyla* $(a \to d \leftarrow b)$ *dual çarpım ve* $obeb\,(a,b)$ *da dual çarpım objesidir.*

Örnek 3.4.8 *Objeleri* A, B, C *ve morfizmleri de sadece* $(A \leftarrow B \to C)$ *olan kategoride* A *ile* C*'nin çarpımı* B*'dir. Fakat* A *ile* B*'nin çarpımı yoktur. Çünkü çarpım objesinden* A *ve* B *objesine birer morfizm bulunması gerekir. Fakat böyle bir morfizm bu kategoride yoktur. Dolayısıyla bu kategori ikili çarpımlara sahip değildir.*

Yukarıdaki örnekte olduğu gibi, bir kategoride verilen her A, B objesi için çarpım objesi var ve tek olmayabilir. Fakat varsa izomorfizm farkıyla tektir. Mesela kümeler kategorisinde iki kümenin çarpımı kartezyen çarpımı olmak zorunda değildir. Aslında sonlu iki kümenin çarpım objesi eleman sayısı A ile B'nin eleman sayılarının çarpımına eşit olan herhangi bir kümedir. Aşağıdaki teorem bunun ispatıdır.

Teorem 3.4.9 A, B *iki obje olmak üzere,*

(1) A *ile* B*'nin çarpım objesi, varsa, izomorfizm farkıyla tektir.*
(2) A *ile* B*'nin dual çarpım objesi, varsa, izomorfizm farkıyla tektir.*

İspat.

(1) A ile B'nin iki çarpım objesi P ile P' olsun. Bu durumda;

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[ddl, bend right, "\pi_A"'] \arrow[ddr, bend left, "\pi_B"] \arrow[d, dashed, "\theta'"] & \\
 & P' \arrow[dl, "\pi'_A"'] \arrow[dr, "\pi'_B"] \arrow[d, dashed, "\theta"] & \\
A & P \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, bend right, "\pi_A"'] \arrow[dr, bend left, "\pi_B"] \arrow[d, dashed, "Id_P"] & \\
A & P \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

P çarpım objesi olduğundan soldaki diyagramın alt tarafı değişmeli olacak şekilde bir tek $\theta : P' \to P$ morfizmi vardır.
P' çarpım objesi olduğundan da diyagramın üst tarafı değişmeli olacak şekilde bir tek $\theta' : P \to P'$ morfizmi vardır.

$$
\begin{aligned}
\pi_A \circ (\theta \circ \theta') &= (\pi_A \circ \theta) \circ \theta' = \pi'_A \circ \theta' = \pi_A \\
\pi_B \circ (\theta \circ \theta') &= (\pi_B \circ \theta) \circ \theta' = \pi'_B \circ \theta' = \pi_B
\end{aligned}
$$

olduğundan dıştaki diyagram da değişmelidir.
Aynı zamanda $\pi_A = \pi_A \circ id_P$ ve $\pi_B = \pi_B \circ id_P$ olduğundan ve tanımdaki teklikten $\theta \circ \theta' = id_P$ olur.

Benzer şekilde de $\theta' \circ \theta = id_{P'}$ olduğu görülebilir. Buradan da $\theta : P' \to P$ bir izomorfizmdir ve P ile P' de izomorftur.
Tersine P çarpım objesi ve $k : P' \to P$ izomorfizm olsun. P çarpım objesi olduğundan, her $\left(A \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} B\right)$ morfizmleri için $\pi_A \circ \theta = f$ ve $\pi_B \circ \theta = g$ olacak şekilde bir tek $\theta : X \to P$ morfizmi vardır. Buradan $\pi'_A := \pi_A \circ k, \pi'_B := \pi_B \circ k$ ve $\theta' := k^{-1} \circ \theta$ şeklinde tanımlansın. O halde,

$$\pi'_A \circ \theta' = (\pi_A \circ k) \circ \left(k^{-1} \circ \theta\right) = \pi_A \circ id_P \circ \theta = \pi_A \circ \theta = f$$
$$\pi'_B \circ \theta' = (\pi_B \circ k) \circ \left(k^{-1} \circ \theta\right) = \pi_B \circ id_P \circ \theta = \pi_B \circ \theta = g$$

olup aşağıdaki diyagramın dışı değişmelidir.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dashed, "\theta"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
 & P \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
A & P' \arrow[l, "\pi'_A"] \arrow[r, "\pi'_B"'] \arrow[u, "k"'] & B
\end{tikzcd}$$

Bir başka θ'' morfizmi için $\pi'_A \circ \theta'' = f$ ve $\pi'_B \circ \theta'' = g$ olsun.

$$\pi_A \circ (k \circ \theta'') = (\pi_A \circ k) \circ \theta'' = \pi'_A \circ \theta'' = f$$
$$\pi_B \circ (k \circ \theta'') = (\pi_B \circ k) \circ \theta'' = \pi'_B \circ \theta'' = g$$

olup θ morfizminin tekliğinden $k \circ \theta'' = \theta$ olur. Buradan

$$\theta'' = id_{P'} \circ \theta'' = \left(k^{-1} \circ k\right) \circ \theta'' = k^{-1} \circ (k \circ \theta'') = k^{-1} \circ \theta = \theta'$$

olduğundan θ' tektir. O halde P' de çarpım objesidir.

(2) A ile B'nin iki dual çarpım objesi Q ile Q' olsun. Bu durumda;

$$\begin{tikzcd}
 & Q & \\
 & Q' \arrow[u, dashed, "\theta'"] & \\
A \arrow[r, "i_A"'] \arrow[ur, "i'_A"] \arrow[uur, bend left, "i_A"] & Q \arrow[u, dashed, "\theta"] & B \arrow[l, "i_B"] \arrow[ul, "i'_B"'] \arrow[uul, bend right, "i_B"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Q & \\
A \arrow[r, "i_A"'] \arrow[ur, bend left, "i_A"] & Q \arrow[u, dashed, "Id_Q"] & B \arrow[l, "i_B"] \arrow[ul, bend right, "i_B"']
\end{tikzcd}$$

Q dual çarpım objesi olduğundan soldaki diyagramın alt tarafı değişmeli olacak şekilde bir tek $\theta : Q \to Q'$ morfizmi vardır. Q' dual çarpım objesi olduğundan da diyagramın üst tarafı değişmeli olacak şekilde bir tek $\theta' : Q \to Q'$ morfizmi vardır.

$$(\theta' \circ \theta) \circ i_A = \theta' \circ (\theta \circ i_A) = \theta' \circ i'_A = i_A$$
$$(\theta' \circ \theta) \circ i_B = \theta' \circ (\theta \circ i_B) = \theta' \circ i'_B = i_B$$

olup aşağıdaki diyagramın dışı değişmelidir.
Aynı zamanda $i_A = id_A \circ i_A$ ve $i_B = id_B \circ i_B$ olduğundan ve tanımdaki teklikten $\theta' \circ \theta = id_Q$ olur.
Benzer şekilde de $\theta' \circ \theta = id_{Q'}$ olduğu görülebilir. Buradan da $\theta : Q' \to Q$ bir izomorfizmdir ve Q ile Q' de izomorftur.
Tersine Q dual çarpım objesi ve $k : Q \to Q'$ izomorfizm olsun. Q dual çarpım objesi olduğundan, her $\left(A \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} B\right)$ morfizmleri için $\theta \circ i_A = f$ ve $\theta \circ i_B = g$ olacak şekilde bir tek $\theta : Q \to X$ morfizmi vardır. Buradan $i'_A := k \circ i_A, i'_B := k \circ i_B$ ve $\theta' := \theta \circ k^{-1}$ şeklinde tanımlansın. O halde,

$$\theta' \circ i'_A = \left(\theta \circ k^{-1}\right) \circ (k \circ i_A) = \theta \circ \left(k^{-1} \circ k\right) \circ i_A = \theta \circ id_Q \circ i_A = \theta \circ i_A = f$$
$$\theta' \circ i'_B = \left(\theta \circ k^{-1}\right) \circ (k \circ i_B) = \theta \circ \left(k^{-1} \circ k\right) \circ i_B = \theta \circ id_Q \circ i_B = \theta \circ i_B = g$$

eşitliğinden aşağıdaki diyagramın dışı değişmeli olduğu görülür.

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
 & Q \arrow[u, dashed, "\theta"'] \arrow[d, "k"] & \\
A \arrow[r, "i'_A"'] \arrow[ur, "i_A"] \arrow[uur, bend left, "f"] & Q' & B \arrow[l, "i'_B"] \arrow[ul, "i_B"'] \arrow[uul, bend right, "g"']
\end{tikzcd}$$

Bir başka θ'' morfizmi için $\theta'' \circ i'_A = f$ ve $\theta'' \circ i'_B = g$ olsa,

$$(\theta'' \circ k) \circ i_A = \theta'' \circ (k \circ i_A) = \theta'' \circ i'_A = f$$
$$(\theta'' \circ k) \circ i_B = \theta'' \circ (k \circ i_B) = \theta'' \circ i'_B = g$$

olup θ morfizminin tekliğinden $\theta'' \circ k = \theta$ olur. Buradan

$$\theta'' = \theta'' \circ id_{Q'} = \theta'' \circ \left(k \circ k^{-1}\right) = (\theta'' \circ k) \circ k^{-1} = \theta \circ k^{-1} = \theta'$$

olduğundan θ' tektir. O halde Q' de dual çarpım objesidir.

■

3.5. Ayırıcı Objeler

Tanım 3.5.1 *Her farklı $r, s : X \to Y$ morfizm çifti için;*

(1) $r \circ h \neq s \circ h$ olacak şekilde bir $S \xrightarrow{h} X$ morfizmi varsa S objesine ayırıcı denir.
(2) $h \circ r \neq h \circ s$ olacak şekilde bir $Y \xrightarrow{h} C$ morfizmi varsa C objesine dual ayırıcı denir.

Teorem 3.5.2

(1) Bir kategoride başlangıç obje, ayırıcı olamaz.
(2) Bir kategoride bitiş obje, dual ayırıcı olamaz.

İspat.

(1) $I \xrightarrow{h} X$ ve I başlangıç obje olmak üzere, $r, s : X \to Y$ farklı morfizmler olsun. $r \circ h, s \circ h \in Hom(I, Y)$ ve $Hom(I, Y)$ tek elemanlı olduğundan $r \circ h \neq s \circ h$ olamaz. Dolayısıyla I ayırıcı obje değildir.
(2) $Y \xrightarrow{h} T$ ve T bitiş obje olmak üzere, $r, s : X \to Y$ farklı morfizmler olun. $h \circ r, h \circ s \in Hom(X, T)$ ve $Hom(X, T)$ tek elemanlı olduğundan $h \circ r \neq h \circ s$ olamaz. Dolayısıyla T dual ayırıcı obje değildir.

■

Örnek 3.5.3 *$\mathcal{S}et$ kategorisindeki ayırıcı objeler boştan farklı kümelerden ibarettir.*

İddiayı, kümenin eleman sayısına göre iki kısımda inceleyeceğiz;

(1) Boş küme başlangıç objesi olduğundan Teorem 3.5.2'den ayırıcı obje değildir.
(2) Her farklı $r, s : X \to Y$ fonksiyon çifti için, $r(x) \neq s(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. Boştan farklı bir S kümesinden bu X kümesine $h(a) = x$ şeklinde $h : S \to X$ sabit fonksiyonu tanımlansın. Böylece

$$(r \circ h)(a) = r(h(a)) = r(x) \neq s(x) = s(h(a)) = (s \circ h)(a)$$

olduğundan $r \circ h \neq s \circ h$ elde edilir. Bu da boştan farklı her S kümesinin ayırıcı obje olduğunu gösterir.

Örnek 3.5.4 *$\mathcal{S}et$ kategorisindeki dual ayırıcı objeler en az iki elemanlı kümelerden ibarettir.*

İddiayı, kümenin eleman sayısına göre üç kısımda inceleyeceğiz;

(1) Boş kümeye sadece boş kümeden fonksiyon tanımlanabileceğinden boş küme dual ayırıcı değildir.
(2) Tek elemanlı her küme bitiş obje olduğundan Teorem 3.5.2'den dual ayırıcı olamaz.

(3) *C en az iki elemanlı bir küme ve $a \neq b$ olmak üzere $a, b \in C$ olsun.*
Farklı $r, s : Y \to X$ morfizm çifti için $r(y) \neq s(y)$ olacak şekilde bir $y \in Y$ vardır. $h : X \to C$ morfizmi $h(x) = \begin{cases} a & , x = r(y) \\ b & , x \neq r(y) \end{cases}$ şeklinde tanımlansın. O halde;

$$(h \circ r)(y) = h(r(y)) = a \neq b = h(s(y)) = (h \circ s)(y)$$

olduğundan $h \circ r \neq h \circ s$ elde edilir.
Dolayısıyla en az iki elemanlı her küme dual ayırıcı objedir.

Örnek 3.5.5 *$\mathcal{V}ec$ kategorisinde ayırıcı ve dual ayırıcı objeler **0** uzayından farklı uzaylardır.*

İddiayı, iki kısımda inceleyeceğiz;

(1) ***0** bitiş ve başlangıç objesi olduğundan ayırıcı veya dual ayırıcı olamaz.*
(2) *$V \neq \mathbf{0}$ ve $\beta = \{\beta_i\}_{i \in I}$ da V'nin bir tabanı olsun. Her farklı $r, s : X \to Y$ lineer dönüşümü için, $r(x) \neq s(x)$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır ve*

$$0 \neq r(x) - s(x) = (r - s)(x)$$

olur.
Her $i \in I$ için $h(\beta_i) = x$ şeklinde tanımlansın.

$$r(h(\beta_i)) - s(h(\beta_i)) = (r - s)(h(\beta_i)) = (r - s)(x) \neq 0$$

olduğundan $r \circ h \neq s \circ h$ olup V ayırıcı objedir.
$(r - s)(x) \neq 0$ olduğundan $h'((r - s)(x)) \neq 0$ olacak şekilde $h' : Y \to V$ lineer dönüşümü vardır. Buradan,

$$0 \neq h'((r - s)(x)) = h'(r(x) - s(x)) = h'(r(x)) - h'(s(x))$$

ve $h'(r(x)) \neq h'(s(x))$ olup $h' \circ r \neq h' \circ s$ bulunur. Dolayısıyla V dual ayırıcı objedir.

3.6. Monmorfizm ve Epimorfizmler

Bu bölümde, fonksiyonlardaki birebirlik ve örtenlik kavramlarının kategori teorisindeki genellemesi olan monomorfizmler ve epimorfizmler incelenecektir.

Tanım 3.6.1 *$A \xrightarrow{\alpha} B$ bir morfizm olmak üzere;*

(1) *her $r, s : X \to A$ morfizm çifti için $\alpha \circ r = \alpha \circ s$ iken $r = s$ oluyorsa (yani α soldan sadeleşebiliyorsa) α morfizmine monomorfizm denir.*
(2) *her $r, s : B \to X$ morfizm çifti için $r \circ \alpha = s \circ \alpha$ iken $r = s$ oluyorsa (yani α sağdan sadeleşebiliyorsa) α morfizmine epimorfizm denir.*

Örnek 3.6.2 *$\mathcal{S}et$ kategorisinde;*

(1) *monomorfizmler birebir fonksiyonlardan ibarettir.*
(2) *epimorfizmler de örten fonksiyonlardan ibarettir.*

$\alpha : A \to B$ *bir fonksiyon olmak üzere;*

(1) α *monomorfizm ve* $\alpha(a) = \alpha(b)$ *olsun. Her* $x \in X$ *için* $r(x) = a$ *ve* $s(x) = b$ *şeklinde* $r, s : X \to A$ *sabit fonksiyonları vardır. Ayrıca*

$$\alpha(r(x)) = \alpha(a) = \alpha(b) = \alpha(s(x))$$

olduğundan $\alpha \circ r = \alpha \circ s$ *olur.* α *monomorfizm olduğundan* $r = s$, *buradan da* $a = b$ *olup* α *birebir fonksiyondur.*
Tersine α *birebir ve* $r, s : X \to A$ *morfizm çifti için* $\alpha \circ r = \alpha \circ s$ *olsun. Buradan her* $x \in X$ *için* $\alpha(r(x)) = \alpha(s(x))$ *olur.* α *birebir olduğundan* $r(x) = s(x)$, *buradan da* $r = s$ *bulunur. Dolayısıyla* α *monomorfizmdir.*

(2) α *epimorfizm olsun. Kabul edelim ki* α *örten olmasın. Yani bir* $b \in B$ *için* $\alpha(a) = b$ *olacak şekilde* $a \in A$ *bulunmasın. Bu durumda* $r(x) = \begin{cases} 0 & x \neq b \\ 1 & x = b \end{cases}$ *ve* $s(x) = \begin{cases} 0 & x \neq b \\ 2 & x = b \end{cases}$ *şeklinde* $r, s : B \to \mathbb{Z}$ *fonksiyonları tanımlanabilir. Buradan her* $a \in A$ *için* $\alpha(a) \neq b$ *olduğundan,* $r(\alpha(a)) = 0 = s(\alpha(a))$ *olur. Fakat* $r \neq s$ *olduğundan bu* α*'nın epimorfizm olmasıyla çelişir. Dolayısıyla* α *örten fonksiyondur.*
Tersine α *örten ve* $r, s : B \to X$ *morfizm çifti için* $r \circ \alpha = s \circ \alpha$ *olsun.* $r \neq s$ *olduğunu kabul edelim. Yani bir* $b \in B$ *için* $r(b) \neq s(b)$ *olsun.* α *örten olduğundan* $\alpha(a) = b$ *olacak şekilde bir* $a \in A$ *vardır.* $r \circ \alpha = s \circ \alpha$ *olduğundan* $r(b) = r(\alpha(a)) = s(\alpha(a)) = s(b)$ *elde edilir. Ancak,* $r(b) \neq s(b)$ *olduğunu kabul etmiştik. Dolayısıyla* α *epimorfizmdir.*

Örnek 3.6.3 $\mathcal{G}rp, \mathcal{A}b, \mathcal{R}ng, \mathcal{V}ec, \mathcal{R}$*-Mod,*$\mathcal{T}op, \mathcal{R}el$ *kategorisindeki monomorfizmler birebir fonksiyon olan morfizmler ve epimorfizmler de örten fonksiyon olan morfizmlerdir.*

Örnek 3.6.4 *Cisimler kategorisindeki her morfizm monomorfizmdir.*

$\alpha : F_1 \to F_2$ *bir homomorfizma olmak üzere her* $r, s : F_0 \to F_1$ *homomorfizmaları için* $\alpha(r(x)) = \alpha(s(x))$ *olsun. O halde* $0 = \alpha(r(x)) - \alpha(s(x)) = \alpha(r(x) - s(x))$ *olduğundan* $r(x) - s(x) \in Ker(\alpha) = \{0\}$ *elde edilir. Buradan* $r(x) = s(x)$ *olduğundan* $r = s$ *dolayısıyla da* α *monomorfizmdir.*

$\mathcal{R}ing$ kategorisinde her halka epimorfizması bir epimorfizmdir. Fakat aşağıdaki örnekte görüleceği gibi bunun tersi doğru değildir.

Örnek 3.6.5 $\mathcal{R}ing$ *kategorisinde* $\varphi(m) = m$ *şeklinde tanımlanan* $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ *epimorfizmdir. Çünkü her* R *birimli halkası ve* $r, s : \mathbb{Q} \to R$ *birimi koruyan homomorfizmaları için* $r \circ \varphi = s \circ \varphi$ *ise, her* $m/n \in \mathbb{Q}$ *için*

$$\begin{aligned} r(m/n) &= r(\varphi(m)/\varphi(n)) = r(\varphi(m))(r(\varphi(n)))^{-1} \\ &= s(\varphi(m))(s(\varphi(n)))^{-1} = s(\varphi(m)/\varphi(n)) = s(m/n) \end{aligned}$$

olur. Buradan $r = s$ olur. Dolayısıyla $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ epimorfizmdir. Fakat φ örten olmadığından halka epimorfizması değildir.

Teorem 3.6.6 *$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ morfizmler olmak üzere;*

(1) $\beta \circ \alpha$ monomorfizm ise α da bir monomorfizmdir.
(2) $\beta \circ \alpha$ epimorfzm ise β da bir epimorfizmdir.

İspat.

(1) $r, s : X \to A$ morfizm çifti için $\alpha \circ r = \alpha \circ s$ olsun. O halde

$$(\beta \circ \alpha) \circ r = \beta \circ (\alpha \circ r) = \beta \circ (\alpha \circ s) = (\beta \circ \alpha) \circ s$$

olur. $\beta \circ \alpha$ monomorfizm olduğundan $r = s$ olur. Böylece α da bir monomorfizmdir.

(2) $r, s : A \to X$ morfizm çifti için $r \circ \beta = s \circ \beta$ olsun. O halde

$$s \circ (\beta \circ \alpha) = (s \circ \beta) \circ \alpha = (r \circ \beta) \circ \alpha = r \circ (\beta \circ \alpha)$$

olur. $\beta \circ \alpha$ epimorfzm olduğundan $r = s$ olur. Böylece β da bir epimorfizmdir.

■

Teorem 3.6.7 *$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ morfizmler olmak üzere;*

(1) α ve β monomorfizma ise $\beta \circ \alpha$ da monomorfizmdir.
(2) α ve β epimorfzma ise $\beta \circ \alpha$ da epimorfizmdir.

İspat.

(1) $r, s : X \to A$ morfizm çifti için $(\beta \circ \alpha) \circ r = (\beta \circ \alpha) \circ s$ olsun. O halde $\beta \circ (\alpha \circ r) = \beta \circ (\alpha \circ s)$ olur. β ve α monomorfizm olduklarından, $\alpha \circ r = \alpha \circ s$ ve $r = s$ elde edilir. Böylece $\beta \circ \alpha$ da monomorfizmadır.

(2) $r, s : C \to X$ morfizm çifti için $r \circ (\beta \circ \alpha) = s \circ (\beta \circ \alpha)$ olsun. O halde $(r \circ \beta) \circ \alpha = (s \circ \beta) \circ \alpha$ olur. α ve β epimorfizm olduklarından, $r \circ \alpha = s \circ \alpha$ ve $r = s$ elde edilir. Böylece $\beta \circ \alpha$ da epimorfizmdir.

■

3.6.1. Ekstremal morfizmler

Genel olarak bir morfizmin hem monomorfizm hem de epimorfizm olması izomorfizm olmasını gerektirmez. Örnek 3.6.5'teki epimorfizm monomorfizmdir, fakat izomorfizm değildir. Buna rağmen bazı özel durumlarda bir monomorfizmin epimorfizm olması, izomorfizm olması için yeterli olur. Şimdi bu özel morfizmleri inceleyeceğiz.

$f \circ e$ monomorfizm ise e de monomorfizmdir. Genel olarak e'nin aynı zamanda epimorfizm olması izomorfizm olmasını gerektirmez.

Tanım 3.6.8 *$A \xrightarrow{\alpha} B$ bir morfizm olmak üzere;*

(1) α monomorfizm olsun. $\alpha = f \circ e$ ve e epimorfizm iken e izomorfizm oluyorsa α morfizmine ekstremal monomorfizm denir.
(2) α epimorfizm olsun. $\alpha = e \circ f$ ve e monomorfizm iken e izomorfizm oluyorsa α morfizmine ekstremal epimorfizm denir.

Teorem 3.6.9 *$A \xrightarrow{\alpha} B$ bir monomorfizm olmak üzere ;*

(1) α epimorfizm ve ekstremal monomorfizm ise izomorfizmdir.
(2) α monomorfizm ve ekstremal epimorfizm ise izomorfizmdir.

İspat.

(1) $\alpha = Id_B \circ \alpha$ olduğundan $Id_B \circ \alpha$ ekstremal monomorfizm ve α epimorfizm olduğundan ekstremal monomorfizm tanımı gereği α izomorfizmdir.
(2) $\alpha = \alpha \circ Id_A$ olduğundan $\alpha \circ Id_A$ ekstremal epimorfizm ve α monomorfizm olduğundan ekstremal epimorfizm tanımı gereği α izomorfizmdir.

■

Teorem 3.6.10 *$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ morfizmler olmak üzere;*

(1) $\beta \circ \alpha$ ekstremal monomorfizm ise α da ekstremal monomorfizmdir.
(2) $\beta \circ \alpha$ ekstremal epimorfzm ise β da ekstremal epimorfizmdir.

İspat.

(1) $\alpha = f \circ e$ ve e epimorfizm olsun. Bu durumda $\beta \circ \alpha = \beta \circ (f \circ e) = (\beta \circ f) \circ e$ olur. Buradan $\beta \circ \alpha$ ekstremal monomorfizma olduğundan e izomorfizma, dolayısıyla α da ekstremal monomorfizmadır.
(2) $\beta = e \circ f$ ve e monomorfizm olsun. Bu durumda $\beta \circ \alpha = (e \circ f) \circ \alpha = e \circ (f \circ \alpha)$ olur. Buradan $\beta \circ \alpha$ ekstremal epimorfizm olduğundan e izomorfizma, dolayısıyla β da ekstremal epimorfizmdir.

■

Teorem 3.6.11 *Bir A objesi için, Id_A ekstremal monomorfizm ve ekstremal epimorfizmdir.*

İspat.

(1) $r, s : X \to A$ morfizm çifti için $Id_A \circ r = Id_A \circ s$ ise $r = Id_A \circ r = Id_A \circ s = s$ olduğundan, Id_A monomorfizmdir.
Ayrıca $Id_A = f \circ e$ ve e epimorfizm ise $Id_B \circ e = e = e \circ Id_A = e \circ (f \circ e) = (e \circ f) \circ e$ elde edilir. e epimorfizm olduğundan $Id_B = e \circ f$ olur ve e izomorfizm olduğu görülür. Dolayısıyla da Id_A ekstremal monomorfizmdir.

(2) $r, s : A \to X$ morfizm çifti için $r \circ Id_A = s \circ Id_A$ ise $r = r \circ Id_A = s \circ Id_A = s$ olduğundan, Id_A epimorfizmdir.
Ayrıca $Id_A = e \circ f$ ve e monomorfizma ise $e \circ Id_B = e = Id_A \circ e = (e \circ f) \circ e = e \circ (f \circ e)$ elde edilir. e monomorfizm olduğundan $Id_B = f \circ e$ olur ve e izomorfizm olduğu görülür. Dolayısıyla da Id_A ekstremal epimorfizmdir.

■

Sonuç 3.6.12 *Her izomorfizm ekstremal monomorfizm ve epimorfizmdir.*

İspat. α izomorfizm ve $Id_A = \beta \circ \alpha$ ve $Id_B = \alpha \circ \beta$ olsun.

(1) $\beta \circ \alpha = Id_A$ ekstremal monomorfizm olduğundan α da ekstremal monomorfizmdir.
(2) $\alpha \circ \beta = Id_B$ ekstremal epimorfizm olduğundan α da ekstremal epimorfizmdir.

■

3.6.2. Düzenli morfizmler

Tanım 3.6.13 $\alpha, \alpha' : A \to B$ *birer morfizm olmak üzere,*

(1) Aşağıdaki iki şartı sağlayan $e : E \to A$ morfizmine α, α' morfizm çiftinin eşitleyicisi denir.

Doğallık: $\alpha \circ e = \alpha' \circ e$

Evrensellik: $\alpha \circ f = \alpha' \circ f$ *olan her $X \xrightarrow{f} A$ morfizmi için, aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde bir tek $\theta : X \to E$ morfizmi vardır.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "\theta"'] \arrow[dr, "f"] & & \\
E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\alpha'"'] & B
\end{tikzcd}$$

(2) Aşağıdaki iki şartı sağlayan $e : A \to Q$ morfizmine α, α' morfizm çiftinin dual eşitleyicisi denir.

Doğallık: $e \circ \alpha = e \circ \alpha'$

Evrensellik: $f \circ \alpha = f \circ \alpha'$ *olan her $f : A \to X$ morfizmi için, aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde bir tek $\theta : Q \to X$ morfizmi vardır.*

$$\begin{tikzcd}
X & & \\
Q \arrow[u, dashed, "\theta"] & A \arrow[l, "e"] \arrow[ul, "f"'] & B \arrow[l, shift right, "\alpha"'] \arrow[l, shift left, "\alpha'"]
\end{tikzcd}$$

Örnek 3.6.14 *$\mathcal{S}et$ kategorisindeki iki $\alpha, \alpha' : A \to B$ fonksiyonu için*

$$E = \{a \in A : \alpha(a) = \alpha'(a)\}$$

olmak üzere $i : E \to A$ içerme fonksiyonu eşitleyicidir.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "f'"'] \arrow[dr, "f"] & & \\
E \arrow[r, "i"'] & A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\alpha'"'] & B
\end{tikzcd}$$

$\alpha \circ f = \alpha' \circ f$ olan her $X \xrightarrow{f} A$ fonksiyonuna karşılık, $f' : X \to E$ fonksiyonu $f'(x) := f(x)$ şeklinde tanımlansın. Her $x \in X$ için

$$\alpha(f'(x)) = \alpha(f(x)) = (\alpha \circ f)(x) = (\alpha' \circ f)(x) = \alpha'(f(x)) = \alpha'(f'(x))$$

olduğundan $f'(x) \in E$ olup $f' : X \to E$ fonksiyonu iyi tanımlıdır ve $i \circ f' = f$ olur.

Ayrıca bir başka $\theta : X \to E$ morfizmi içinde $f = i \circ \theta$ olsa her $x \in X$ için $f'(x) = f(x) = (i \circ \theta)(x) = i(\theta(x)) = \theta(x)$ olduğundan $f' = \theta$ olurdu. Dolayısıyla bu $f' : X \to E$ tek olup $i : E \to A$ içerme fonksiyonu eşitleyicidir.

Örnek 3.6.15 *Benzer şekilde $\mathcal{G}rp, \mathcal{A}b, \mathcal{R}ng, \mathcal{V}ec, \mathcal{R}$-Mod,$\mathcal{T}op$ kategorilerinde de iki $\alpha, \alpha' : A \to B$ morfizminin eşitleyicisi, $E = \{a \in A : \alpha(a) = \alpha'(a)\}$ olmak üzere $i : E \to A$ içerme fonksiyonudur.*

Teorem 3.6.16

(1) *$e : E \to A$ bir $\alpha, \alpha' : A \to B$ morfizm çiftinin eşitleyicisi olmak üzere, $e' : E' \to A$ de eşitleyici olması için gerek ve yeter şart $e' = e \circ \theta$ olacak şekilde bir $\theta : E' \to E$ izomorfizminin var olmasıdır.*

(2) *$e : A \to E$ bir $\alpha, \alpha' : B \to A$ morfizm çiftinin dual eşitleyicisi olmak üzere, $e' : A \to E'$ de dual eşitleyici olması için gerek ve yeter şart $e' = \theta \circ e$ olacak şekilde bir $\theta : E \to E'$ izomorfizmi var olmasıdır.*

İspat.

(1) $e : E \to A$ eşitleyici olduğundan, soldaki diyagramın altı değişmeli olacak şekilde bir tek $\theta : E' \to E$ morfizmi vardır. $e' : E' \to A$ da eşitleyici olduğundan, aşağıda soldaki diyagramın üstü değişmeli olacak şekilde bir tek $\theta' : E \to E'$ morfizmi

vardır.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[d, dashed, "\theta'"'] \arrow[ddr, bend left, "e"] & & \\
E' \arrow[d, dashed, "\theta"'] \arrow[dr, "e'"] & & \\
E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\alpha'"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E \arrow[dd, dashed, "Id_E"'] \arrow[ddr, bend left, "e"] & & \\
& & \\
E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\alpha'"'] & B
\end{tikzcd}
$$

$e \circ (\theta \circ \theta') = (e \circ \theta) \circ \theta' = e' \circ \theta' = e$ olduğundan diyagramın dışı da değişmelidir. Ayrıca $e \circ Id_E = e$ ve $e : E \to A$ eşitleyici olduğundan, Id_E'nin tekliğinden $\theta \circ \theta' = Id_E$ elde edilir.
Benzer şekilde sağdaki diyagramdan da $\theta' \circ \theta = Id_{E'}$ olduğu gösterilir. Buradan $\theta : E' \to E$ bir izomorfizm ve $e' = e \circ \theta$ olur.
Tersine $e : E \to A$ eşitleyici ve $k : E' \to E$ da $e' = e \circ k$ şeklinde izomorfizm olsun. Bu durumda $\alpha \circ f = \alpha' \circ f$ olan her $X \xrightarrow{f} A$ morfizmi için $\theta' := k^{-1} \circ \theta$ olmak üzere,

$$e' \circ \theta' = e' \circ \left(k^{-1} \circ \theta\right) = \left(e' \circ k^{-1}\right) \circ \theta = e \circ \theta = f$$

elde edilir. O halde diyagramın dışı değişmelidir ve

$$\alpha \circ e' = \alpha \circ (e \circ k) = (\alpha \circ e) \circ k = (\alpha' \circ e) \circ k = \alpha' \circ (e \circ k) = \alpha' \circ e'.$$

Şimdi θ' morfizminin tekliğini gösterelim. Bir θ'' morfizmi için $e' \circ \theta'' = f$ olsun,

$$e \circ (k \circ \theta'') = (e \circ k) \circ \theta'' = e' \circ \theta'' = f$$

elde edilir. θ'nın tekliğinden de $k \circ \theta'' = \theta$ olur. Buradan

$$\theta'' = id_{P'} \circ \theta'' = \left(k^{-1} \circ k\right) \circ \theta'' = k^{-1} \circ (k \circ \theta'') = k^{-1} \circ \theta = \theta'$$

olur ve $e' : E' \to A$ morfizmi de eşitleyici olduğu elde edilir.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "\theta"'] \arrow[ddr, bend left, "f"] & & \\
E \arrow[dr, "e"] & & \\
E' \arrow[u, "k"] \arrow[r, "e'"'] & A \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\alpha'"'] & B
\end{tikzcd}
$$

(2) $e : A \to E$ dual eşitleyici olduğundan, aşağıda soldaki diyagramın altı değişmeli olacak şekilde bir tek $\theta : E \to E'$ morfizmi vardır. $e' : A \to E'$ da dual eşitleyici

olduğundan, aşağıda soldaki diyagramın üstü değişmeli olacak şekilde bir tek $\theta' : E' \to E$ morfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd}
E & & \\
E' \arrow[u, dashed, "\theta'"] & & \\
E \arrow[u, dashed, "\theta"] & A \arrow[l, "e"] \arrow[ul, "e'"'] \arrow[uul, bend right, "e"'] & B \arrow[l, shift left, "\alpha"'] \arrow[l, shift right, "\alpha'"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E & & \\
E \arrow[u, dashed, "\theta'"] & & \\
E' \arrow[u, dashed, "\theta"] & A \arrow[l, "e'"] \arrow[ul, "e"'] \arrow[uul, bend right, "e"'] & B \arrow[l, shift left, "\alpha"'] \arrow[l, shift right, "\alpha'"]
\end{tikzcd}$$

$(\theta' \circ \theta) \circ e = \theta \circ (\theta' \circ e) = \theta \circ e' = e$ olduğundan diyagramın dışı da değişmelidir. Ayrıca $Id_E \circ e = e$ ve $e : E \to A$ dual eşitleyici olduğundan Id_E'nin tekliğinden $\theta' \circ \theta = Id_E$ elde edilir.
Benzer şekilde sağdaki diyagramdan da $\theta \circ \theta' = Id_{E'}$ elde edilir ve $e' = \theta \circ e$ olur. Tersine $e : A \to E$ dual eşitleyici ve $k : E \to E'$ da $e' = k \circ e$ şeklinde izomorfizm olsun. Bu durumda $f \circ \alpha = f \circ \alpha'$ olan her $f : A \to X$ morfizmi için $\theta' := \theta \circ k^{-1}$ olmak üzere,

$$\theta' \circ e' = \left(\theta \circ k^{-1}\right) \circ e' = \theta \circ \left(k^{-1} \circ e'\right) = \theta \circ e = f$$

elde edilir. O halde diyagramın dışı değişmelidir.

$$e' \circ \alpha = (\theta \circ e) \circ \alpha = \theta \circ (e \circ \alpha) = \theta \circ (e \circ \alpha') = (\theta \circ e) \circ \alpha' = e' \circ \alpha'.$$

Şimdi θ' morfizminin tekliğini gösterelim. Bir θ'' morfizmi için $\theta'' \circ e' = f$ olsun,

$$(\theta'' \circ k) \circ e = \theta'' \circ (k \circ e) = \theta'' \circ e' = f$$

elde edilir. θ'nın tekliğinden de $\theta'' \circ k = \theta$ olur. Buradan

$$\theta'' = \theta'' \circ id_{P'} = \theta'' \circ \left(k \circ k^{-1}\right) = (\theta'' \circ k) \circ k^{-1} = \theta \circ k^{-1} = \theta'$$

olur ve $e' : E' \to A$ morfizmi de dual eşitleyici olduğu elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
X & & \\
E \arrow[u, dashed, "\theta"] \arrow[d, "\beta"'] & & \\
E' & A \arrow[l, "e'"] \arrow[ul, "e"'] \arrow[uul, bend right, "f"'] & B \arrow[l, shift left, "\alpha"'] \arrow[l, shift right, "\alpha'"]
\end{tikzcd}$$

■

Teorem 3.6.17

(1) Bir morfizm çiftinin eşitleyicisi olan morfizm monomorfizmdir.
(2) Bir morfizm çiftinin dual eşitleyicisi olan morfizm epimorfizmdir.

İspat.

(1) $e : E \to A$ bir $\alpha, \alpha' : A \to B$ morfizm çiftinin eşitleyicisi olsun. e'nin monomorfizm olduğunu gösterelim. $r, s : X \to E$ morfizm çifti için $e \circ r = e \circ s$ olduğunu kabul edelim. O halde $\alpha \circ (e \circ r) = (\alpha \circ e) \circ r = (\alpha' \circ e) \circ r = \alpha' \circ (e \circ r)$ olur. Buradan, $e \circ r = e \circ \theta$ olacak şekilde bir tek $\theta : X \to E$ vardır. Buradan $r = \theta$ olur. Ayrıca $e \circ s = e \circ r = e \circ \theta$ olduğundan $s = \theta = r$ elde edilir. Böylece e monomorfizmdir

(2) $e : A \to E$ bir $\alpha, \alpha' : B \to A$ morfizm çiftinin dual eşitleyicisi olsun. e'nin epimorfizm olduğunu gösterelim. $r, s : E \to X$ morfizm çifti için $r \circ e = s \circ e$ olduğunu kabul edelim. O halde $(r \circ e) \circ \alpha = r \circ (e \circ \alpha) = r \circ (e \circ \alpha') = (r \circ e) \circ \alpha'$ olur. Buradan, $r \circ e = \theta \circ e$ olacak şekilde bir tek $\theta : E \to X$ vardır. Buradan $r = \theta$ olur. Ayrıca $s \circ e = r \circ e = \theta \circ e$ olduğundan $s = \theta = r$ elde edilir. Böylece e epimorfizmdir.

■

Yukarıdaki teoremden bir $\alpha, \alpha' : A \to B$ morfizm çiftinin eşitleyicisinin her zaman monomorfizm ve dual eşitleyicisinin de epimorfizm olduğunu gördük. Fakat bunun tersi her zaman doğru değildir. Yani bir morfizm çiftinin eşitleyicisi veya dual eşitleyicisi olmayan morfizmler de vardır. Mesela Örnek 3.6.5'teki $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ epimorfizmi dual eşitleyici olamaz. Çünkü $Id : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ morfizmi için $Id = \theta \circ \varphi$ olacak şekilde $\theta : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ homomorfizması yoktur.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} & & \\
\mathbb{Q} \arrow[u, dashed, "\theta"] & \mathbb{Z} \arrow[l, "\varphi"] \arrow[ul, "Id"'] & B \arrow[l, shift right, "\alpha"'] \arrow[l, shift left, "\alpha'"]
\end{tikzcd}$$

Tanım 3.6.18

(1) Bir morfizm çiftinin eşitleyicisi olan morfizme düzenli monomorfizm denir.
(2) Bir morfizm çiftinin dual eşitleyicisi olan morfizme düzenli epimorfizm denir.

Teorem 3.6.19 $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ *morfizmler olmak üzere;*

(1) β düzenli ve α ekstremal monomorfizmler ise $\beta \circ \alpha$ da ekstremal monomorfizmdir.
(2) α düzenli ve β ekstremal epimorfizmler ise $\beta \circ \alpha$ da ekstremal epimorfizmdir.

İspat.

(1) β bir $r, s : C \to X$ morfizm çiftinin eşitleyicisi ve e epimorfizm olmak üzere $\beta \circ \alpha = h \circ e$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}(r \circ h) \circ e &= r \circ (h \circ e) \\ &= r \circ (\beta \circ \alpha) = (r \circ \beta) \circ \alpha \\ &= (s \circ \beta) \circ \alpha = s \circ (\beta \circ \alpha) \\ &= s \circ (h \circ e) = (s \circ h) \circ e\end{aligned}$$

buradan e epimorfizm olduğundan $r \circ h = s \circ h$ olur. β morfizmi r, s ikilisinin eşitleyicisi olduğundan $h = \beta \circ k$ olacak şekilde bir tek k morfizmi vardır. Buradan $\beta \circ (k \circ e) = (\beta \circ k) \circ e = h \circ e = \beta \circ \alpha$ ve β monomorfizm olduğundan $k \circ e = \alpha$ olur. Ayrıca α ekstremal olduğundan da e izomorfizmadır.

(2) α bir $r, s : X \to A$ morfizm çiftinin dual eşitleyicisi ve e monomorfizma olmak üzere $\beta \circ \alpha = e \circ h$ olsun.

$$\begin{aligned}e \circ (h \circ r) &= (e \circ h) \circ r \\ &= (\beta \circ \alpha) \circ r = \beta \circ (\alpha \circ r) \\ &= \beta \circ (\alpha \circ s) = (\beta \circ \alpha) \circ s \\ &= e \circ (h \circ s) = e \circ (h \circ s)\end{aligned}$$

buradan e monomorfizma olduğundan $h \circ r = h \circ s$ olur. α morfizmi r, s ikilisinin dual eşitleyicisi olduğundan $h = k \circ \alpha$ olacak şekilde bir tek k morfizmi vardır. Buradan $(e \circ k) \circ \alpha = e \circ (k \circ \alpha) = e \circ h = \beta \circ \alpha$ ve α epimorfizm olduğundan $e \circ k = \beta$ olur. Ayrıca β ekstremal olduğundan da e izomorfizmadır.

■

Sonuç 3.6.20

(1) Her düzenli monomorfizm ekstremal monomorfizmdir
(2) Her düzenli epimorfizm ekstremal epimorfizmdir.

İspat. $A \xrightarrow{\alpha} B$ morfizm olmak üzere;

(1) α düzenli monomorfizma olsun. Id_A ekstremal monomorfizma olduğundan $\alpha = \alpha \circ Id_A$ ekstremal monomorfizmadır.
(2) α düzenli epimorfizm olsun. Id_B ekstremal epimorfizm olduğundan $\alpha = Id_B \circ \alpha$ ekstremal epimorfizmdir.

■

Sonuç 3.6.21

(1) $A \xrightarrow{\alpha} B$ epimorfizm ve düzenli monomorfizm ise izomorfizmdir.
(2) $A \xrightarrow{\alpha} B$ monomorfizm ve düzenli epimorfizm ise izomorfizmdir.

Teorem 3.6.22 $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ *morfizmleri için;*

(1) β bir monomorfizm ve $\beta\circ\alpha$ düzenli monomorfizm ise α da düzenli monomorfizmdir.
(2) α bir epimorfizm ve $\beta\circ\alpha$ düzenli epimorfizm ise β da düzenli epimorfizmdir.

İspat.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "\theta"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[drr, bend left, "\beta\circ f"] & & & \\
A \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\beta"'] & C \arrow[r, shift left, "r"] \arrow[r, shift right, "s"'] & D
\end{tikzcd}$$

(1) $\beta\circ\alpha$ düzenli monomorfizm olsun. Bu durumda $\beta\circ\alpha$, bir $r, s : C \to D$ morfizm çiftinin eşitleyicisidir. Buradan $(r\circ\beta)\circ\alpha = r\circ(\beta\circ\alpha) = s\circ(\beta\circ\alpha) = (s\circ\beta)\circ\alpha$ olur. Ayrıca her $X \xrightarrow{f} B$ morfizmi için $(r\circ\beta)\circ f = (s\circ\beta)\circ f$ ise $r\circ(\beta\circ f) = s\circ(\beta\circ f)$ olup $\beta\circ\alpha$ morfizmi r, s morfizmlerinin eşitleyicisi olduğundan $\beta\circ f = (\beta\circ\alpha)\circ k$ olacak şekilde bir tek k morfizmi vardır. Buradan $\beta\circ f = \beta\circ(\alpha\circ k)$ ve β monomorfizm olduğundan $f = \alpha\circ k$ olur.
Bir başka k' için $f = \alpha\circ k'$ olsa $\beta\circ f = \beta\circ(\alpha\circ k') = (\beta\circ\alpha)\circ k'$ olup $k = k'$ elde edilir. Yani k tek dolayısıyla da α morfizmi $r\circ\beta$ ve $s\circ\beta$ morfizmlerinin eşitleyicisi, dolayısıyla da düzenli monomorfizmdir.
(2) $\beta\circ\alpha$ düzenli epimorfizm olsun. Bu durumda $\beta\circ\alpha$, bir $r, s : D \to C$ morfizm çiftinin dual eşitleyicisidir. Buradan $\beta\circ(\alpha\circ r) = (\beta\circ\alpha)\circ r = (\beta\circ\alpha)\circ s = \beta\circ(\alpha\circ s)$ olur. Ayrıca her $B \xrightarrow{f} X$ morfizmi için $f\circ(\alpha\circ r) = f\circ(\alpha\circ s)$ ise $(f\circ\alpha)\circ r = (f\circ\alpha)\circ s$ olup $\beta\circ\alpha$ morfizmi r, s morfizmlerinin dual eşitleyicisi olduğundan $f\circ\alpha = k\circ(\beta\circ\alpha)$ olacak şekilde bir tek k morfizmi vardır. Buradan $f\circ\alpha = (k\circ\beta)\circ\alpha$ ve α epimorfizm olduğundan $f = k\circ\beta$ olur.
Bir başka k' için $f = k'\circ\beta$ olsa $f\circ\alpha = (k'\circ\beta)\circ\alpha = k'\circ(\beta\circ\alpha)$ olup $k = k'$ elde edilir. Yani k tek dolayısıyla da β morfizmi $\alpha\circ r$ ve $\alpha\circ s$ morfizmlerinin eşitleyicisi, dolayısıyla da düzenli epimorfizmdir.

■

Tanım 3.6.23 *$A \xrightarrow{\alpha} B$ bir morfizm olmak üzere;*

(1) α ile $A \to 0 \to B$ morfizminin eşitleyicisine α morfizminin çekirdeği denir. Bir morfizmin çekirdeği olan morfizme normal monomorfizma denir.
(2) α ile $A \to 0 \to B$ morfizminin dual eşitleyicisine α morfizminin dual çekirdeği denir. Bir morfizmin dual çekirdeği olan morfizme normal epimorfizm denir.

3.6.3. Parçalanış morfizmleri

Modül teoride, bir $0 \to A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} B \to 0$ kısa tam dizisi için, M'nin A ile B'nin direkt toplamı olarak yazılabilmesi için gerek ve yeter şart $f'\circ f = Id_A$ olacak şekilde $M \xrightarrow{f'} A$ homomorfizmasının ya da buna denk olarak $g\circ g' = Id_B$ olacak şekilde $B \xrightarrow{g'} M$ homomorfizmasının bulunmasıdır. Kategori teoride de bu tanım, sol ters veya sağ tersin varlığı şeklinde genellenir.

Tanım 3.6.24 *$A \xrightarrow{\alpha} B$ ve $B \xrightarrow{\beta} A$ iki morfizm olmak üzere, $\beta \circ \alpha = Id_A$ ise, yani aşağıdaki diyagram değişmeli ise;*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "Id"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\ A & B \arrow[l, "\beta"] \end{tikzcd}$$

(1) α morfizmine β morfizminin kesiti denir.
(2) β morfizmine α morfizminin dual kesiti ve A objesine de B objesinin retraktı denir.

Bir morfizmin kesit olması sol terslenebilir (veya sağ ters) olması demektir. Sağ ters yerine kesit teriminin kullanılmasının sebebi bir morfizmin kesitinin her zaman tek olmamasıdır. Mesela $\mathcal{S}et$ kategorisinde, $f_a(x) = (x, a)$ şeklinde tanımlı $f_a : X \to X \times Y$ fonksiyonu ile $f_b(x) = (x, b)$ şeklinde tanımlı $f_b : X \to X \times Y$ fonksiyonu $h(x, y) = x$ şeklinde tanımlı $h : X \times Y \to X$ fonksiyonu için iki ayrı kesittir. Aynı şekilde dual kesit de tek olmak zorunda değildir.

Örnek 3.6.25 *(1) $\mathcal{S}et$ kategorisindeki kesitler boş fonksiyon haricindeki birebir fonksiyonlar ve dual kesitler de örten fonksiyonlardır.*
(2) $\mathcal{A}b$ kategorisindeki kesitler, görüntüsü değer kümesinin direkt toplananı olan monomorfizmler ve dual kesitler de bir projeksiyon dönüşümü ile bir izomorfizmanın bileşkesi olarak ifade edilebilen homomorfizmlerdir.

Teorem 3.6.26 *$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ morfizmleri için;*

(1) $\beta \circ \alpha : A \to C$ bir kesit ise $\alpha : A \to B$ da bir kesittir.
(2) $\alpha \circ \beta : C \to A$ bir dual kesit ise $\alpha : B \to A$ da bir dual kesittir.

İspat.

(1) Bir $C \xrightarrow{\gamma} A$ morfizmi için, $Id_A = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$ ise $Id_A = \gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ olup α bir kesittir.
(2) Bir $A \xrightarrow{\gamma} C$ morfizmi için, $Id_A = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$ ise $Id_A = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$ olup α bir dual kesittir.

■

Teorem 3.6.27

(1) İki kesitin bileşkesi de bir kesittir.
(2) İki dual kesitin bileşkesi de bir dual kesittir.

İspat.

(1) $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ iki kesit olsun, bu durumda $\alpha' \circ \alpha = Id_A$ ve $\beta' \circ \beta = Id_B$ olacak şekilde $\alpha' : B \to A$ ve $\beta' : C \to B$ morfizmleri vardır. Buradan

$$(\alpha' \circ \beta') \circ (\beta \circ \alpha) = \alpha' \circ (\beta' \circ \beta) \circ \alpha = \alpha' \circ Id_B \circ \alpha = \alpha' \circ \alpha = Id_A$$

olup $\beta \circ \alpha$ bir kesittir.

(2) $\alpha : B \to A$ ve $\beta : C \to B$ iki dual kesit olsun, bu durumda $\alpha \circ \alpha' = Id_A$ ve $\beta \circ \beta' = Id_B$ olacak şekilde $\alpha' : A \to B$ ve $\beta' : B \to C$ morfizmleri vardır. Buradan

$$(\alpha \circ \beta) \circ (\beta' \circ \alpha') = \alpha \circ (\beta \circ \beta') \circ \alpha' = \alpha \circ Id_A \circ \alpha' = \alpha \circ \alpha' = Id_A$$

■

Teorem 3.6.28

(1) Her kesit bir düzenli monomorfizmdir.
(2) Her dual kesit bir düzenli epimorfizmdir.

İspat.

(1) $A \xrightarrow{\alpha} B$ kesit olsun. Bu durumda $\beta \circ \alpha = Id_A$ olacak şekilde $B \xrightarrow{\beta} A$ morfizmi vardır. Şimdi α'nın $\alpha \circ \beta$ ile Id_B morfizmlerinin eşitleyicisi olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "\theta"'] \arrow[dr, "f"] & & \\
A \arrow[r, "\alpha"'] & B \arrow[r, shift left, "\alpha \circ \beta"] \arrow[r, shift right, "Id_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Doğallık: $(\alpha \circ \beta) \circ \alpha = \alpha \circ (\beta \circ \alpha) = \alpha \circ Id_A = Id_B \circ \alpha$

Evrensellik: $X \xrightarrow{f} B$ *morfizmi için* $(\alpha \circ \beta) \circ f = Id_B \circ f$ *olsun. Bu durumda* $\alpha \circ (\beta \circ f) = f$ *olduğundan* $\theta : X \to A$ *morfizmini* $\theta = \beta \circ f$ *şeklinde tanımlanırsa,* $\alpha \circ \theta = f$ *olur.*

Ayrıca başka bir $\theta' : X \to A$ morfizmi için de $f = \alpha \circ \theta'$ olsa,

$$\theta = \beta \circ f = \beta \circ (\alpha \circ \theta') = (\beta \circ \alpha) \circ \theta' = Id_A \circ \theta' = \theta'$$

elde edilir. Dolayısıyla θ tektir. Böylece α düzenli monomorfizmdir.

(2) $A \xrightarrow{\alpha} B$ dual kesit olsun. Bu durumda $\alpha \circ \beta = Id_B$ olacak şekilde $B \xrightarrow{\beta} A$ morfizmi vardır. Şimdi α'nın $\alpha \circ \beta$ ile Id_B morfizmlerinin dual eşitleyicisi olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "\beta \circ \alpha"] \arrow[r, shift right, "Id_A"'] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, dashed, "\theta"] \\
& & X
\end{tikzcd}$$

Doğallık: $\alpha \circ (\beta \circ \alpha) = (\alpha \circ \beta) \circ \alpha = Id_B \circ \alpha = \alpha \circ Id_A$

Evrensellik: $f : A \to X$ *morfizmi için* $f \circ (\beta \circ \alpha) = f \circ Id_A$ *olsun. Bu durumda* $(f \circ \beta) \circ \alpha = f$ *olduğundan* $\theta : B \to X$ *morfizmini* $\theta = f \circ \beta$ *şeklinde tanımlarsak* $\theta \circ \alpha = f$ *olur.*

Ayrıca başka bir $\theta' : B \to X$ *morfizmi için de* $f = \theta' \circ \alpha$ *olsa,*

$$\theta = f \circ \beta = (\theta' \circ \alpha) \circ \beta = \theta' \circ (\alpha \circ \beta) = \theta' Id_B = \theta'$$

elde edilir. Dolayısıyla θ *tektir. Böylece* α *düzenli epimorfizmdir.*

■

Sonuç 3.6.29

(1) $A \overset{\alpha}{\to} B$ *epimorfizm ve kesit ise izomorfizmdir.*
(2) $A \overset{\alpha}{\to} B$ *monomorfizm ve dual kesit ise izomorfizmdir.*

İspat.

(1) $A \overset{\alpha}{\to} B$ kesit olduğundan düzenli monomorfizm, dolayısıyla da ekstremal monomorfizmdir. Ayrıca epimorfizm olduğundan, Teorem 3.6.9'den izomorfizmdir.
(2) $A \overset{\alpha}{\to} B$ dual kesit olduğundan düzenli epimorfizm, dolayısıyla da ekstremal epimorfizmdir. Ayrıca monomorfizm olduğundan, Teorem 3.6.9'den izomorfizmdir.

■

Sonuç 3.6.30 $A \overset{\alpha}{\to} B$ *izomorfizm olması için gerek ve yeter şart kesit ve dual kesit olmasıdır.*

İspat. $A \overset{\alpha}{\to} B$ izomorfizm ise kesit ve dual kesittir. Tersine her kesit monomorfizm olduğundan önceki sonuç gereği izomorfizmdir. ■

Teorem 3.6.31 $A \overset{\alpha}{\to} B$ *izomorfizm olması için gerek ve yeter şart;*

(1) monomorfizm ve ekstremal epimorfizm olmasıdır.
(2) epimorfizm ve ekstremal monomorfizm olmasıdır.

İspat. *Her izomorfizm dual kesit ve kesittir.*

(1) Her kesit monomorfizm ve her dual kesit de ekstremal epimorfizmdir. Dolayısıyla $A \overset{\alpha}{\to} B$ *izomorfizm ise monomorfizm ve ekstremal epimorfizmdir.*
Tersine Teorem 3.6.9'den $A \overset{\alpha}{\to} B$ *monomorfizm ve ekstremal epimorfizm ise izomorfizmdir.*
(2) Her dual kesit epimorfizm ve her kesit de ekstremal monomorfizmdir. Dolayısıyla $A \overset{\alpha}{\to} B$ *izomorfizm ise epimorfizm ve ekstremal monomorfizmdir.*
Tersine Teorem 3.6.9'den $A \overset{\alpha}{\to} B$ *epimorfizm ve ekstremal monomorfizm ise izomorfizmdir.*

■

Yukarıdaki teorem bir monomorfizmin izomorfizm olması için gerek ve yeter şartı verir.

Sonuç olarak bir epimorfizmin izomorfizm olması için, monomorfizm olmasının her zaman yeterli olmadığını daha önce gördük. Fakat bir epimorfizmin (monomorfizmin) izomorfizm olması için kesit (dual kesit), düzenli veya ekstremal monomorfizm (epimorfizm) olması yeterlidir. Özetle, aşağıdaki çizelge özel monomorfizmler ve epimorfizmler arasındaki kapsama bağıntısıdır.

Çizelge 3.1. Özel monomorfizmler ve epimorfizmler arasındaki kapsama bağıntısı

$$\begin{tikzcd}
 & izomorfizm \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
kesit \arrow[d] & & dual\ kesit \arrow[d] \\
düzenli\ monomorfizm \arrow[d] & & düzenli\ epimorfizm \arrow[d] \\
ekstremal\ monomorfizm \arrow[d] & & ekstremal\ epimorfizm \arrow[d] \\
monomorfizm & & epimorfizm
\end{tikzcd}$$

3.7. İnjektif Objeler

Bir fonksiyonun tanım kümesinin, yapısını koruyarak genişletilebilmesi, matematikteki önemli problemlerden biridir. Bunun modül teorideki karşılığı injektiflik kavramıdır. Şimdi injektifliğin kategori teorisindeki genellemesini inceleyelim.

$h : A \to B$ bir morfizm olmak üzere, her $g : B \to X$ morfizmi için kompozisyon iyi tanımlı olduğundan $h^*(g) = g \circ h$ şeklinde bir $h^* : Hom(B, X) \to Hom(A, X)$ fonksiyonu vardır.

Bir X objesi ile $h : A \to B$ morfizmi için bu $h^* : Hom(B, X) \to Hom(A, X)$ fonksiyonu örten ise her $f : A \to X$ morfizmi, h morfizmi üzerinden $f = g \circ h$ şeklinde bir $g : B \to X$ morfizmine genişletilebilir demektir. Eğer her $f : A \to X$ morfizmi her $h : A \to B$ monomorfizmi üzerinden genişletilebiliyorsa X objesine injektif obje denir. Şimdi injektif obje tanımını daha açık verelim.

Tanım 3.7.1 *$\mathcal{H} \subseteq Mor(\mathcal{K})$ ve A bir obje olsun.*
Her $X \xrightarrow{f} A$ morfizmi ile her $(h : X \to Y) \in \mathcal{H}$ morfizmi için aşağıdaki diyagram değiş-

meli olacak şekilde bir $g : Y \to A$ morfizmi varsa A objesine $\mathcal{H}$-injektif denir.

$$\begin{tikzcd}
A & \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "h \in \mathcal{H}"'] & Y \arrow[ul, dashed, "g"']
\end{tikzcd}$$

Özel olarak $\mathcal{H}$ bütün monomorfizmler olarak alınırsa $\mathcal{H}$-injektif yerine sadece injektif obje denir.

Teorem 3.7.2 *$\mathcal{H} \subseteq Mor\,(\mathcal{K})$ olmak üzere, her bitiş objesi $\mathcal{H}$-injektif objedir.*

İspat. *T bitiş objesi ve $A \xrightarrow{h} B \in \mathcal{H}$, $A \xrightarrow{f} T$ olsun. T bitiş objesi olduğundan $Hom\,(A,T)$ ve $Hom\,(B,T)$ birer elemanlıdır. Buradan $Hom\,(A,T) = \{f\}$ olur. Ayrıca $Hom\,(B,T) = \{g\}$ olsun. $g \circ h \in Hom\,(A,T) = \{f\}$ olduğundan $f = g \circ h$ olur. Böylece T objesi $\mathcal{H}$-injektif objedir.* ■

Teorem 3.7.3 *$\mathcal{H}$-injektif bir objenin her retraktı da $\mathcal{H}$-injektiftir.*

İspat. *A, $\mathcal{H}$-injektif ve $A \xrightarrow{r} B$ bir dual kesit olsun. Bu durumda $r \circ s = Id_B$ olacak şekilde bir $B \xrightarrow{s} A$ vardır. Her $X \xrightarrow{f} B$ morfizmi ile $\left(X \xrightarrow{h} Y\right) \in \mathcal{H}$ için $s \circ f : X \to A$ ve A, $\mathcal{H}$-injektif olduğundan $s \circ f = g \circ h$ olacak şekilde $Y \xrightarrow{g} A$ morfizmi vardır. Buradan*

$$f = Id_B \circ f = (r \circ s) \circ f = r \circ (s \circ f) = r \circ (g \circ h) = (r \circ g) \circ h$$

olur. Dolayısıyla B de $\mathcal{H}$-injektiftir. ■

Teorem 3.7.4 *$\mathcal{H}$ bir $\mathcal{K}$ kategorisindeki bütün kesitler sınıfı olsun. Bu durumda her $\mathcal{K}$-obje $\mathcal{H}$-injektiftir.*

İspat. Her $X \xrightarrow{f} A$ morfizmi ve $X \xrightarrow{h} Y$ kesiti için, $k \circ h = Id_X$ olacak şekilde bir $Y \xrightarrow{k} X$ morfizmi vardır. Buradan $g := f \circ k$ alınırsa $f = f \circ (k \circ h) = (f \circ k) \circ h = g \circ k$ olur. Böylece $A, \mathcal{H}$-injektiftir. ■

Yukarıdaki teoremden dolayı bir objenin injektif olduğunu göstermek için, kesit olmayan monomorfizmler sınıfına bakmak yeterlidir.

Örnek 3.7.5 *$\mathcal{A}b$ kategorisinde injektif objeler bölünebilir Abel gruplarıdır.*

A bölünebilir Abel grubu olsun. Her Abel grubu bir $\mathbb{Z}$-modüldür. Dolayısıyla modüller için injektiflik kriteri olan Baer kriterini uygulayalım. $n \in \mathbb{Z}$ için, $f : n\mathbb{Z} \to A$ homomorfizma olsun. $A = nA$ olduğundan $f\,(n) = nb$ olacak şekilde $b \in A$ vardır. Buradan $\tilde{f} : \mathbb{Z} \to A$ homomorfizması $\tilde{f}\,(1) = b$ şeklinde tanımlanabilir ve her $na \in n\mathbb{Z}$ için,

$\tilde{f}(i(na)) = \tilde{f}(na) = nab = f(na)$ olur. Böylece $\mathbb{Z}$'nin her idealinden A'ya tanımlı her homomorfizma $\mathbb{Z}$'den A'ya bir homomorfizmaya genişletilmiş oldu. Dolayısıyla A injektif objedir.

Örnek 3.7.6 *Örnek 3.1.2'deki $\mathcal{G}rp$ kategorisinde tek injektif obje bitiş objesi olan birim gruptur.*

A'nın birimden farklı, injektif bir grup olduğunu kabul edelim. Bu durumda birimden farklı bir $w \in A$ vardır ve $f(m) = w^m$ şeklinde bir $f : \mathbb{Z} \to A$ homomorfizması tanımlanabilir. $\kappa \geq \aleph_0$ bir kardinal sayı ve A_κ da kardinalitesi κ olan kümenin sonlu alterne grubu olmak üzere, $h : \mathbb{Z} \to A_\kappa$ monomorfizması için A injektif olduğundan $f = g \circ h$ olacak şekilde bir $g : A_\kappa \to A$ homomorfizması vardır. Buradan $e \neq w = f(1) = g(h(1))$ olup $h(1) \notin Ker(g)$ olur. Galois teoreminden A_κ basit grup, $Ker(g) \trianglelefteq A_\kappa$ ve $Ker(g) \neq A_\kappa$ olduğundan $Ker(g) = \{e\}$ olur. Böylece $g : A_\kappa \to A$ monomorfizma olur ve buradan da $Kard(A_\kappa) \leq Kard(A)$ dır. Halbuki $\kappa > Kard(A)$ seçilirse $Kard(A_\kappa) \geq \kappa > Kard(A)$ çelişkisi oluşur. Bu çelişki A'nın birimden farklı, injektif bir grup olduğu kabulünden çıktığına göre böyle bir grup olamaz.

Modül teorideki geniş alt modül kavramının genellemesi olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.7.7 *$\mathcal{H} \subseteq Mor(\mathcal{K})$ ve $\left(A \xrightarrow{\alpha} B\right) \in \mathcal{H}$ olsun. Her $\beta : B \to X$ morfizmi için $\beta \circ \alpha \in \mathcal{H}$ iken $\beta \in \mathcal{H}$ oluyorsa α morfizmine $\mathcal{H}-$geniş morfizm denir. Özel olarak $\mathcal{H}$ monomorfizmler sınıfı alınırsa $\mathcal{H}-$geniş yerine geniş morfizm denir.*

Teorem 3.7.8 *$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ birer $\mathcal{H}$-geniş morfizm ise $\beta \circ \alpha$ da $\mathcal{H}$-geniş morfizmdir.*

İspat. $C \xrightarrow{\gamma} D$ morfizmi için $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha \in \mathcal{H}$ olsun. Buradan α ve β sırasıyla $\mathcal{H}$-geniş olduklarından $\gamma \circ \beta \in \mathcal{H}$ ve $\gamma \in \mathcal{H}$ elde edilir. Böylece $\beta \circ \alpha$ da $\mathcal{H}$-geniş morfizmdir. ■

Teorem 3.7.9 *$A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ birer morfizm olsun. $\beta \circ \alpha$ geniş ise β da geniş morfizmdir.*

İspat. *$C \xrightarrow{\gamma} D$ morfizmi için $\gamma \circ \beta$ monomorfizm olsun. $\beta \circ \alpha$ geniş olduğundan monomorfizm olur. Böylece α da monomorfizm olur. Buradan $(\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha)$ da monomorfizmdir. $\beta \circ \alpha$ geniş olduğundan γ monomorfizm olur. Böylece β da geniş morfizm olur.* ■

Teorem 3.7.10 *Her izomorfizm geniş morfizmdir.*

İspat. $A \xrightarrow{\alpha} B$ izomorfizm, $\beta \circ \alpha$ monomorfizm ve $\beta \circ r = \beta \circ s$ olsun. Bu durumda $(\beta \circ \alpha) \circ (\alpha^{-1} \circ r) = (\beta \circ \alpha) \circ (\alpha^{-1} \circ s)$ olur. $\beta \circ \alpha$ monomorfizm olduğundan, $\alpha^{-1} \circ r = \alpha^{-1} \circ s$, buradan da $r = s$ bulunur. Böylece β da monomorfizm olur. Dolayısıyla α geniş morfizmdir. ■

Örnek 3.7.11 *$\mathcal{V}ec$ kategorisindeki geniş morfizmler izomorfizmlerden ibarettir.*

$\alpha : V \rightarrow W$ birebir lineer dönüşüm olsun. α'nın örten olmadığını kabul edelim. O zaman bir $w \in W$ ve her $v \in V$ için $\alpha(v) \neq w$ olur. Bu durumda $W = \langle w \rangle \oplus W'$ olacak şekilde W' alt uzayı vardır.
Ayrıca $Im(\alpha) \subseteq W'$ olur. Çünkü bir $v_0 \in V$ için $\alpha(v_0) = kw \in \langle w \rangle$ olsa, $\alpha(k^{-1}v_0) = k^{-1}kw = w$ olurdu.

$\beta : W \rightarrow W$ *lineer dönüşümünü* $\beta(x) = \begin{cases} x & x \in W' \\ 0 & x \in \langle w \rangle \end{cases}$ *şeklinde tanımlayalım.*

*Buradan $Ker(\beta) = \langle w \rangle \neq$ **0**, diğer taraftan $Ker(\beta \circ \alpha) = Ker(\alpha) =$ **0** elde edilir. Dolayısıyla $\beta \circ \alpha$ monomorfizm olur. α geniş morfizm olduğundan β monomorfizm olur. Bu da w'nun seçimiyle çelişir ve α örten dolayısıyla izomorfizmadır.*

Örnek 3.7.12 *$\mathcal{S}et$ kategorisindeki geniş morfizmler birebir fonksiyonlar ve $\emptyset \rightarrow \{a\}$ şeklindeki fonksiyonlardır.*

Teorem 3.7.13 *A injektif obje olmak üzere, $A \overset{\alpha}{\rightarrow} B$ morfizmi geniş ise izomorfizmdir.*

İspat. A injektif olduğundan $Id_A = g \circ \alpha$ olacak şekilde $g : B \rightarrow A$ morfizmi vardır. Buradan α dual kesit olur. Aynı zamanda monomorfizm olduğundan izomorfizmdir. ■

Modül teorisindeki injektif hull kavramının genellemesi olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.7.14 *B injektif bir obje olmak üzere $A \overset{\alpha}{\rightarrow} B$ şeklinde bir $\mathcal{H}$-geniş morfizmine A'nın $\mathcal{H}$-injektif hull'u denir.*

Örnek 3.7.15 *$\mathcal{V}ec$ kategorisinde Id_A birim morfizmi A'nın injektif hull'udur.*

Örnek 3.7.16 *$\mathcal{A}b$ kategorisinde $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ morfizmi injektif hull'dur.*

4. FUNKTORLAR

Tanım 4.0.17 *$\mathcal{K}$ ve $\mathcal{L}$ iki kategori ve $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ da $\mathcal{K}$'nin her A, B, C objesini $\mathcal{L}$'nin $\mathcal{F}A, \mathcal{F}B, \mathcal{F}C$ şeklinde birer objesine dönüştüren ve $\mathcal{K}$'nin her $A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C$ morfizmini de;*

(1) $\mathcal{L}$'nin, $\mathcal{F}\left(A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C\right) = \mathcal{F}A \overset{\mathcal{F}\alpha}{\to} \mathcal{F}B \overset{\mathcal{F}\beta}{\to} \mathcal{F}C$ şeklinde birer morfizmine dönüştüren bir dönüşüm olmak üzere,

$F_1 : \mathcal{F}(\beta \circ \alpha) = \mathcal{F}\beta \circ \mathcal{F}\alpha$

$F_2 : \mathcal{F}Id_A = Id_{\mathcal{F}A}$

özelliklerini sağlarsa bu $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ dönüşümüne kovaryant funktor ya da kısaca funktor denir.

(2) $\mathcal{L}$'nin, $\mathcal{F}\left(A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C\right) = \mathcal{F}C \overset{\mathcal{F}\beta}{\to} \mathcal{F}B \overset{\mathcal{F}\alpha}{\to} \mathcal{F}A$ şeklinde birer morfizmine dönüştüren bir dönüşüm olmak üzere,

F_1': $\mathcal{F}(\beta \circ \alpha) = \mathcal{F}\alpha \circ \mathcal{F}\beta$

F_2: $\mathcal{F}Id_A = Id_{\mathcal{F}A}$

özelliklerini sağlarsa bu $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ dönüşümüne kontravaryant funktor denir.

Bir funktoru tanımlarken sadece morfizmleri nasıl dönüştürdüğünü bilmek yeterlidir. Çünkü her objeye karşılık birim morfizm var olduğundan objeleri nasıl dönüştürdüğü, birim morfizmi nasıl dönüştürdüğü ile tanımlanmış olur.

Teorem 4.0.18 *$\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ ile $\mathcal{G} : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ iki funktor olmak üzere $\mathcal{GF}\left(A \overset{\alpha}{\to} B\right) = \mathcal{GF}A \overset{\mathcal{GF}\alpha}{\to} \mathcal{GF}B$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{GF} : \mathcal{K} \to \mathcal{M}$ bir funktordur.*

İspat. $\mathcal{K}$'nin her $A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C$ morfizmi için,

F_1: $\mathcal{GF}(\beta \circ \alpha) = \mathcal{G}(\mathcal{F}(\beta \circ \alpha)) = \mathcal{G}(\mathcal{F}\beta \circ \mathcal{F}\alpha) = \mathcal{GF}\beta \circ \mathcal{GF}\alpha$
F_2: $\mathcal{GF}Id_A = \mathcal{G}Id_{\mathcal{F}A} = Id_{\mathcal{GF}A}$

olduğundan $\mathcal{GF} : \mathcal{K} \to \mathcal{M}$ bir funktordur. ■

Tanım 4.0.19 *Yukarıdaki gibi tanımlanan funktora bileşke funktor denir.*

İki kontravaryant funktorun bileşkesi de benzer şekilde tanımlanabilir ve bir kovaryant funktordur. Bir kovaryant funktor ile bir kontravaryant funktorun bileşkesi kontravaryant bir funktor olur.

Funktorlar bir kategorideki objeleri başka kategorideki objelere ve morfizmleri de morfizmlere taşıyan fonksiyonlardır. Fakat gerekmedikçe fonksiyonlarda olduğu gibi $\mathcal{F}(\alpha) : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(B)$ şeklinde parantezler kullanılmaz. Bunu yerine $\mathcal{F}\alpha : \mathcal{F}A \to \mathcal{F}B$ şeklinde bir gösterim daha sade ve anlaşılırdır. Benzer şekilde iki funktorun bileşkesi de $\mathcal{GF}$ şeklinde gösterilir.

Örnek 4.0.20

(1) $\mathcal{K}$ bir kategori olsun. $id_{\mathcal{K}}\left(A \xrightarrow{\alpha} B\right) = A \xrightarrow{\alpha} B$ şeklinde tanımlanan $id_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ bir funktordur.

(2) $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ iki kategori ve $X, \mathcal{L}$'nin objesi olsun. $\mathcal{X}\left(A \xrightarrow{\alpha} B\right) = X \xrightarrow{Id_X} X$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{X} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ bir funktordur.

(3) $\varphi : G \to H$ bir grup homomorfizması olsun. Eğer G ve H, Örnek 3.0.23'teki gibi birer objeli kategori olarak düşünülürse, $\varphi : G \to H$ de bir funktordur.

Örnek 4.0.21 (Unutkan funktor) *Grupları kümelere ve homomorfizmaları da bu kümeler arasındaki fonksiyonlara dönüştüren $\mathcal{U} : \mathcal{G}rp \to \mathcal{S}et$ bir funktordur. Küme üzerindeki yapıyı kaldırdığından bu funktora unutkan funktor denir. Benzer şekilde $\mathcal{R}ing, \mathcal{T}op, \mathcal{V}ec, \mathcal{R}el$ vs. kategorilerinden $\mathcal{S}et$ kategorisine unutkan funktor tanımlanabilir.*

Örnek 4.0.22 (Görüntü ve ters görüntü funktoru)

(1) $\mathcal{P}\alpha(X)$, X kümesinin α altındaki görüntüsü ve $\mathcal{P}A$ da A kümesinin kuvvet kümesi olmak üzere $\mathcal{P}\left(A \xrightarrow{\alpha} B\right) = \mathcal{P}A \xrightarrow{\mathcal{P}\alpha} \mathcal{P}B$ şeklinde tanımlı $\mathcal{P} : \mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$ dönüşümü bir funktordur.

(2) $\mathcal{Q}\alpha(X)$, X kümesinin α altındaki ters görüntüsü ve $\mathcal{Q}A$ de A kümesinin kuvvet kümesi olmak üzere $\mathcal{Q}\left(A \xrightarrow{\alpha} B\right) = \mathcal{Q}B \xrightarrow{\mathcal{Q}\alpha} \mathcal{Q}A$ şeklinde tanımlı $\mathcal{Q} : \mathcal{S}et \to \mathcal{S}et$ dönüşümü kontravaryant bir funktordur.

Örnek 4.0.23 *$[A, A]$, bir A grubunun komütatörü olmak üzere*
$\mathcal{A}\left(A \xrightarrow{f} B\right) = \mathcal{A}f : A/[A, A] \to B/[B, B]$ şeklinde tanımlanan
$\mathcal{A} : Grb \to \mathcal{A}b$ funktordur. Komütatörün görüntüsü de komütatör olduğundan
$\mathcal{A}f(a + [A, A]) = f(a) + [B, B]$ şeklinde tanımlı $\mathcal{A}f$ iyi tanımlıdır.

Örnek 4.0.24 (Tensör) *$\mathcal{R}$-Mod kategorisinde, her X objesi için $(1_X \otimes f)(x \otimes a) = x \otimes f(a)$ olmak üzere, $(1_X \otimes -)\left(A \xrightarrow{f} B\right) = 1_X \otimes f : X \otimes A \to X \otimes B$ şeklinde tanımlanan $1_X \otimes - : \mathcal{R}$-$Mod \to \mathcal{R}$-$Mod$ bir funktordur.*

Her $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ R-homomorfizmi ve her $x \otimes a \in X \otimes A$ için,

F$_1$:

$$\begin{aligned}
(1_X \otimes (g \circ f))(x \otimes a) &= x \otimes (g \circ f(a)) = x \otimes (g(f(a))) \\
&= (1_X \otimes g)(x \otimes f(a)) \\
&= (1_X \otimes g)(X \otimes f(x \otimes a)) \\
&= ((1_X \otimes g) \circ (1_X \otimes f))(x \otimes a)
\end{aligned}$$

Buradan $1_X \otimes (g \circ f) = 1_X \otimes g \circ X \otimes f$ olur.

F$_2$: $(1_X \otimes Id_A)(x \otimes a) = x \otimes Id_A(a) = x \otimes a$ *olduğundan* $1_X \otimes Id_A = Id_{X \otimes A}$ *olur.*

Bir $\mathcal{K}$ kategorisi verildiğinde, objeleri ve morfizmleri $\mathcal{K}$'nin morfizmlerinden oluşan kategoriler oluşturulabilir.

Tanım 4.0.25 *$\mathcal{K}$ bir kategori ve A da obje olmak üzere, $\mathcal{K}/A$ kategorisi şu şekilde tanımlanır.*

Ob: $Ob(\mathcal{K}/A) = Hom(-, A)$ *yani A'ya giden bütün morfizmler obje,*
Hom: *Her $X \xrightarrow{\alpha} A, Y \xrightarrow{\beta} A$ objesi için*

$$Hom\left(X \xrightarrow{\alpha} A, Y \xrightarrow{\beta} A\right) = \{f \in Hom_{\mathcal{K}}(X, Y) \mid \alpha = \beta \circ f\}$$

Id: *Birimi $\mathcal{K}$ kategorisindeki birim*
$\circ$: *Kompozisyon da $\mathcal{K}$ kategorisindeki kompozisyon.*

Örnek 4.0.26 *$\mathcal{K}/A$ kategorisinde her $X \xrightarrow{\alpha} A$ objesi için*
$\mathcal{U}\left(X \xrightarrow{\alpha} A\right) = X$ *ve $X \xrightarrow{f} Y$ morfizmi için,*
$\mathcal{U}\left(X \xrightarrow{f} Y\right) = \left(X \xrightarrow{f} Y\right)$ *şeklinde tanımlanan $\mathcal{U} : \mathcal{K}/A \to \mathcal{K}$ bir funktordur.*

Tanım 4.0.27 *$\mathcal{K}$ bir kategori ve A da obje olmak üzere, $A/\mathcal{K}$ kategorisi şu şekilde tanımlanır.*

Ob: $Ob(A/\mathcal{K}) = Hom(A, -)$ *yani A'dan tanımlı bütün morfizmler obje,*
Hom: *Her $A \xrightarrow{\alpha} X, A \xrightarrow{\beta} Y$ objesi için*

$$Hom\left(A \xrightarrow{\alpha} X, A \xrightarrow{\beta} Y\right) = \{f \in Hom_{\mathcal{K}}(X, Y) \mid f \circ \alpha = \beta\}$$

Id: *Birimi $\mathcal{K}$ kategorisindeki birim,*
$\circ$: *Kompozisyon da $\mathcal{K}$ kategorisindeki kompozisyondur.*

Örnek 4.0.28 *$\mathcal{K}$ bir kategori ve A bitiş objesi olmak üzere, her X objesi için,* $\mathcal{F}(X) = (X \to A)$ *ve her $X \xrightarrow{f} Y$ morfizmi için,* $\mathcal{F}\left(X \xrightarrow{f} Y\right) = \left(X \xrightarrow{f} Y\right)$ *şeklinde tanımlanan $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to A/\mathcal{K}$ bir funktordur.*

4.0.1. Hom funktorları

Teorem 4.0.29 *$\mathcal{K}$ bir kategori ve A da bir objesi olsun.*

(1) Her $B \overset{\beta}{\to} C$ morfizmi için,

$$Hom(A, -)\left(B \overset{\beta}{\to} C\right) = Hom(A, B) \overset{Hom(A,\beta)}{\longrightarrow} Hom(A, C)$$

şeklinde tanımlanan, $Hom(A, -) : \mathcal{K} \to \mathcal{S}et$ dönüşümü bir funktordur. Burada $Hom(A, \beta)(\alpha) := \beta \circ \alpha \in Hom(A, C)$'dir.

(2) Her $C \xrightarrow{\beta} B$ morfizmi için,

$$Hom\,(-, A)\left(C \xrightarrow{\beta} B\right) = Hom\,(B, A) \xrightarrow{Hom(\beta,A)} Hom\,(C, A)$$

şeklinde tanımlanan $Hom(-, A) : \mathcal{K} \to \mathcal{S}et$ dönüşümü kontravaryant bir funktordur. Burada $Hom\,(\beta, A)\,(\alpha) = \alpha \circ \beta \in Hom\,(C, A)$'dır.

İspat.

(1) F_1: Her $A \xrightarrow{\alpha} B$ için;

$$\begin{aligned} Hom\,(A, -)\,(\gamma \circ \beta)\,(\alpha) &= Hom\,(A, \gamma \circ \beta)\,(\alpha) \\ &= (\gamma \circ \beta) \circ \alpha = \gamma \circ (\beta \circ \alpha) \\ &= Hom\,(A, \gamma)\,(\beta \circ \alpha) \\ &= Hom\,(A, \gamma)\,(Hom\,(A, \beta)\,(\alpha)) \\ &= (Hom\,(A, -)\,(\gamma) \circ Hom\,(A, -)\,(\beta))\,(\alpha) \end{aligned}$$

olduğundan, $Hom\,(-, A)\,(\gamma \circ \beta) = Hom\,(-, A)\,(\gamma) \circ Hom\,(-, A)\,(\beta)$ olur.

F_2: Her $X \xrightarrow{\alpha} A$ için

$$Hom\,(A, -)\,Id_A\,(\alpha) = Hom\,(A, Id_A)\,(\alpha) = Id_A \circ \alpha = \alpha$$

olduğundan $Hom\,(A, -)\,Id_A = Id_{Hom(A,-)}$ olur.
Böylece $Hom(A, -) : \mathcal{K} \to \mathcal{S}et$ dönüşümü bir funktordur.

F_1': Her $B \xrightarrow{\alpha} A$ için

$$\begin{aligned} Hom\,(-, A)\,(\beta \circ \gamma)\,(\alpha) &= Hom\,(\beta \circ \gamma, A)\,(\alpha) \\ &= \alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma \\ &= Hom\,(\gamma, A)\,(\alpha \circ \beta) \\ &= Hom\,(\gamma, A)\,(Hom\,(\beta, A)\,(\alpha)) \\ &= (Hom\,(-, A)\,(\gamma) \circ Hom\,(-, A)\,(\beta))\,(\alpha) \end{aligned}$$

olduğundan, $Hom\,(-, A)\,(\beta \circ \gamma) = Hom\,(-, A)\,(\gamma) \circ Hom\,(-, A)\,(\beta)$ olur.

F_2: Her $X \xrightarrow{\alpha} A$ için

$$Hom\,(-, A)\,Id_A\,(\alpha) = Hom\,(Id_A, A)\,(\alpha) = \alpha \circ Id_A = \alpha$$

olduğundan $Hom\,(-, A)\,Id_A = Id_{Hom(-,A)}$ olur.
Böylece $Hom(-, A) : \mathcal{K} \to \mathcal{S}et$ dönüşümü kontravaryant bir funktordur.

■

Yukarıdaki teoremin uygulaması olarak, matematikte kullanılan aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 4.0.30 (Dual uzay funktoru) *$\mathcal{V}ec$ kategorisinde $\hat{A} = Hom\,(A, \mathbb{R})$ ve $\hat{\alpha}\,(\beta : A \to \mathbb{R}) = \beta \circ \alpha$ olmak üzere $(\hat{})\,(\alpha : A \leftarrow B) = \hat{\alpha} : \hat{A} \to \hat{B}$ şeklinde tanımlı $(\hat{}) : \mathcal{V}ec \to \mathcal{V}ec$ dönüşümü kontravaryant bir funktordur.*

4.0.2. Ters kategori

$A \overset{\alpha}{\to} B \overset{\beta}{\to} C$ birer morfizm olmak üzere, bu morfizmlerden, $\tilde{\alpha} : A \leftarrow B$ ve $\tilde{\beta} : B \leftarrow C$ şeklinde morfizmler elde edilebilir. Bu durumda $\widetilde{\beta \circ \alpha} : A \to C$ morfizmi de $\tilde{\alpha}; \tilde{\beta} : A \leftarrow C$ şeklinde bir morfizm olur. Böylece verilen bir kategorideki morfizmleri ve kompozisyonu ters çevirerek aynı objelerle yeni bir kategori inşa edebiliriz.

Tanım 4.0.31 (Ters kategori) *$\mathcal{K} = (Ob, Hom_{\mathcal{K}}, Id, \circ)$ bir kategori olmak üzere; $\mathcal{K}^{op} = (Ob, Hom_{\mathcal{K}^{op}}, Id, ;)$ kategorisi şu şekilde tanımlanır.*

Ob: $Ob(\mathcal{K}^{op}) = Ob(\mathcal{K})$
Hom: *her A, B ojesi için $Hom_{\mathcal{K}^{op}}(A, B) = Hom_{\mathcal{K}}(B, A)$*
Id: *birim morfizmler $\mathcal{K}$'deki birim morfizmler*
;: *her A, B, C objesi ve her $\alpha \in Hom_{\mathcal{K}^{op}}(A, B)$ ve $\beta \in Hom_{\mathcal{K}^{op}}(B, C)$ morfizmi için $\beta; \alpha = \alpha \circ \beta$*

Örnek 4.0.32 *$\mathcal{K}$ bir kategori olsun. $\mathcal{O}p_{\mathcal{K}}(\alpha : B \to A) = \alpha^{\mathcal{O}p} : A \to B$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{O}p : \mathcal{K}^{op} \to \mathcal{K}$ bir kontravaryant funktordur.*

$\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ kontravaryant bir funktor ise bu $\mathcal{F} : \mathcal{K}^{op} \to \mathcal{L}$ şeklinde kovaryant funktor olarak da düşünülebilir.

Örnek 4.0.33 *$\mathcal{S}et^{op}$ kategorisinin morfizmleri $\alpha : A \leftarrow B$ şeklinde gösterilen ama tanım kümesi A ve değer kümesi B olan fonksiyonlardır. $\beta : B \leftarrow C$ olmak üzere, her $x \in A$ için $x; \alpha; \beta = (\alpha; \beta)(x) = (\beta \circ \alpha)(x) = \beta(\alpha(x))$ olur.*

Örnek 4.0.34 *$\mathcal{P} = (P, \leq)$ bir yarı sıralı küme olmak üzere $\mathcal{P}^{op} = (P, \geq)$'dir.*

Örnek 4.0.35 *$\mathcal{M} = (M, \cdot)$ bir monoid ve $a * b = b \cdot a$ olmak üzere $\mathcal{M}^{op} = (M, *)$'dır.*

Teorem 4.0.36 *Funktorlar izomorfizmi korur.*

İspat. $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ iki kategori, $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ bir funktor ve $A \overset{\alpha}{\to} B$ de bir izomorfizm olsun. Bu durumda

$$\mathcal{F}\left(\alpha^{-1}\right) \circ \mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{F}\left(\alpha^{-1} \circ \alpha\right) = \mathcal{F}(Id_A) = Id_{\mathcal{F}(A)}$$
$$\mathcal{F}(\alpha) \circ \mathcal{F}\left(\alpha^{-1}\right) = \mathcal{F}\left(\alpha \circ \alpha^{-1}\right) = \mathcal{F}(Id_B) = Id_{\mathcal{F}(B)}$$

olup $\mathcal{F}(\alpha)$ da izomorfizmdir. ■

4.1. Kategorilerin Denkliği

Bir kategoride iki objenin denk olması aralarında terslenebilen bir morfizmin var olması şeklinde tanımlanmıştı. Benzer şekilde iki kategorinin denk olması da aralarında terslenebilen bir funktor bulunmasıyla tanımlanabilirdi. Fakat bu çok özel bir tanımlama olur. Bunun yerine iki kategorinin izomorf olması ve denk olması gibi iki farklı kavram tanımlanmıştır.

Kategorilerin izomorfluğu objelerin izomorfluğu gibi tanımlanır. Fakat denklik tanımı biraz daha geneldir.

Tanım 4.1.1 *Bir $\mathcal{G} : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ funktoru için $\mathcal{GF} = id_{\mathcal{K}}$ ve $\mathcal{FG} = id_{\mathcal{L}}$ oluyorsa $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ funktoruna izomorfizm ve $\mathcal{K}$ ile $\mathcal{L}$ ye de izomorf kategoriler denir.*

$\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ funktoru izomorfizm ise $\mathcal{GF} = id_{\mathcal{K}}$ olacak şekilde $\mathcal{G} : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ funktoru tektir. Dolayısıyla $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ şeklinde gösterilebilir.

Teorem 4.1.2 *$\mathcal{K}$ ve $\mathcal{L}$ iki kategori olmak üzere;*

(1) $id_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ izomorfizmdir.
(2) $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ izomorfizm ise $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ de izomorfizmdir.
(3) $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ ve $\mathcal{G} : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ birer izomorfizm ise $\mathcal{GF} : \mathcal{K} \to \mathcal{M}$ de izomorfizmdir.

İspat. Tanımdan kolayca elde edilir. ■

Sonuç 4.1.3 *Kategoriler arasındaki izomorf olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.*

Örnek 4.1.4 *$\mathcal{A}b$ ile $\mathbb{Z}$-mod kategorileri izomorftur.*

Örnek 4.1.5 *R-mod ile mod-R kategorileri izomorftur.*

Tanım 4.1.6 *Aşağıdaki şartları sağlayan $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ funktoruna denklik ve $\mathcal{K}$ ile $\mathcal{L}$'ye de denk kategoriler denir.*

Faithful: *Her $A, B \in Ob(\mathcal{K})$ ve her $\alpha, \alpha' \in Hom_{\mathcal{K}}(A, B)$ için $\mathcal{F}\alpha = \mathcal{F}\alpha'$ iken $\alpha = \alpha'$*
Dolu: *Her $A, B \in Ob(\mathcal{K})$ ve her $\beta \in Hom_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ için $\mathcal{F}\alpha = \beta$ olacak şekilde bir $\alpha \in Hom_{\mathcal{K}}(A, B)$ var.*
İzomorfizm yoğun: *Her $B \in Ob(\mathcal{L})$ için $\mathcal{F}A$ ile B izomorf olacak şekilde bir $A \in Ob(\mathcal{K})$ var.*

Örnek 4.1.7 *Her izomorfizm bir denkliktir.*

$\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ bir izomorfizm olsun.

Faithful: *Her $A, B \in Ob(\mathcal{K})$ ve her $\alpha, \alpha' \in Hom_{\mathcal{K}}(A, B)$ için $\mathcal{F}\alpha = \mathcal{F}\alpha'$ olsun. Bu durumda $\alpha = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\alpha = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\alpha' = \alpha'$ olur.*

Dolu: *Her* $A, B \in Ob(\mathcal{K})$ *ve her* $\beta \in Hom_{\mathcal{L}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B)$ *için* $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\beta = \beta$ *olur.*
İzomorfizm yoğun: *Her* $B \in Ob(\mathcal{L})$ *için* $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}B = B$ *olur.*

Bir $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ funktorunun dolu ve faithful olması $\mathcal{K}$'deki her A ve B objesi ile $\mathcal{L}$'deki $\mathcal{F}A \overset{\beta}{\to} \mathcal{F}B$ morfizmine karşılık $\mathcal{K}$'de $\mathcal{F}\alpha = \beta$ olacak şekilde bir tek $A \overset{\alpha}{\to} B$ morfizminin bulunmasıdır. Fakat $\mathcal{L}$'de, $\mathcal{K}$'nin hiçbir α morfizmi için $\mathcal{F}\alpha = \beta$ olmayan β morfizmi bulunabilir. $\mathcal{F}$'nin izomorfizm yoğun olması $\mathcal{L}$'nin her $C \overset{\beta}{\to} D$ morfizmi için $\varepsilon_D \circ \mathcal{F}\alpha \circ \varepsilon_C^{-1} = \beta$ olacak şekilde $\mathcal{K}$'nin bir $A \overset{\alpha}{\to} B$ morfizmi ile $\varepsilon_C : \mathcal{F}A \to C$ ve $\varepsilon_D : \mathcal{F}B \to D$ izomorfizmlerinin varlığını garanti eder.

Örnek 4.1.8 *Örnek 3.0.31'teki* $\mathcal{M}at$ *kategorisiyle sonlu boyutlu vektör uzayları kategorisi denktir.*

$s\mathcal{V}ec$ sonlu boyutlu vektör uzayları kategorisi olmak üzer $\mathcal{F} : \mathcal{M}at \to s\mathcal{V}ec$ *funktorunu* $\mathcal{F}(n) = \mathbb{R}^n$ *ve*

$$\mathcal{F}(A_{n\times m})\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = [A_{n\times m}]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım. Her lineer dönüşüme karşılık bir tek matris var olduğundan $\mathcal{F}$ *faithful ve doludur.*

Ayrıca aynı boyutlu vektör uzayları izomorf olduklarından, her V *vektör uzayı için* $\mathcal{F}(boy(V)) = \mathbb{R}^{boy(V)} \cong V$ *olur. Böylece* $\mathcal{F}$ *izomorfizm yoğundur. Fakat izomorfizm değildir. Çünkü* $\mathbb{R}^{boy(V)} \neq V$ *olabilir.*

Teorem 4.1.9 $\mathcal{K}$ *ve* $\mathcal{L}$ *iki kategori olmak üzere;*

(1) $id_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ *denkliktir.*
(2) $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ *denklik ise* $\mathcal{G} : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ *şeklinde bir denklik vardır.*
(3) $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ *ve* $\mathcal{G} : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ *birer denklik ise* $\mathcal{G}\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{M}$ *de denklik.*

İspat.

(1) $id_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ *izomorfizm olduğundan denkliktir.*
(2)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\epsilon_A"] \arrow[d, "\beta"'] & \mathcal{F}A' \arrow[d, "\mathcal{F}\alpha"] & A' \arrow[d, dashed, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\epsilon_B"'] & \mathcal{F}B' & B' \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F}$ izomorfizm yoğun olduğundan, her $A, B \in Ob(\mathcal{L})$ *için* $\mathcal{F}A'$ *ile* A *ve* $\mathcal{F}B'$ *ile* B *izomorf olacak şekilde birer* $A', B' \in Ob(\mathcal{K})$ *vardır. Bu izomorfizmleri* $A \overset{\varepsilon_A}{\to} \mathcal{F}A'$ *ve* $B \overset{\varepsilon_B}{\to} \mathcal{F}B'$ *şeklinde gösterelim.* $\mathcal{L}$*'deki her* $A \overset{\beta}{\to} B$ *morfizmi için* $\varepsilon_B \circ \beta \circ \varepsilon_A^{-1} \in$

$Hom\left(\mathcal{F}A',\mathcal{F}B'\right)$ olur. $\mathcal{F}$ dolu ve faithful olduğundan $\mathcal{F}\alpha=\varepsilon_B\circ\beta\circ\varepsilon_A^{-1}$ şeklinde bir tek $A'\overset{\alpha}{\to}B'$ morfizmi vardır. $\mathcal{G}:\mathcal{L}\to\mathcal{K}$ dönüşümünü $\mathcal{G}\left(A\overset{\beta}{\to}B\right)=A'\overset{\alpha}{\to}B'$ şeklinde tanımlayalım.
Bu bir funktordur. Çünkü, $\mathcal{F}\mathcal{G}\beta=\mathcal{F}\alpha=\varepsilon_B\circ\beta\circ\varepsilon_A^{-1}$ olduğundan;

F_1:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\mathcal{G}\left(A\overset{\alpha}{\to}B\overset{\beta}{\to}C\right)&=\varepsilon_C\circ\beta\circ\alpha\circ\varepsilon_A^{-1}=\varepsilon_C\circ\beta\circ\varepsilon_B^{-1}\circ\varepsilon_B\circ\alpha\circ\varepsilon_A^{-1}\\&=\mathcal{F}\mathcal{G}\beta\circ\mathcal{F}\mathcal{G}\alpha=\mathcal{F}\left(\mathcal{G}\beta\circ\mathcal{G}\alpha\right)\end{aligned}$$

olur. $\mathcal{F}$ faithful olduğundan $\mathcal{G}\left(\beta\circ\alpha\right)=\mathcal{G}\beta\circ\mathcal{G}\alpha$ olur.

F_2: *$\mathcal{F}\mathcal{G}Id_A=\varepsilon_A\circ Id_A\circ\varepsilon_A^{-1}=\varepsilon_A\circ\varepsilon_A^{-1}=Id_A=\mathcal{F}Id_{\mathcal{G}A}$ ve $\mathcal{F}$ faithful olduğundan $Id_A=Id_{\mathcal{G}A}$ olur.*

Ayrıca $\mathcal{G}:\mathcal{L}\to\mathcal{K}$ funktoru da bir denkliktir. Çünkü $\mathcal{G}\mathcal{F}\alpha=\mathcal{G}\left(\varepsilon_B\circ\beta\circ\varepsilon_A^{-1}\right)=\mathcal{G}\varepsilon_B\circ\mathcal{G}\beta\circ\mathcal{G}\varepsilon_A^{-1}=\mathcal{G}\varepsilon_B\circ\alpha\circ\mathcal{G}\varepsilon_A^{-1}$ olduğundan, her $A,B\in Ob\left(\mathcal{L}\right)$ ve $\mathcal{G}A\overset{\alpha}{\to}\mathcal{G}B$ için, $\mathcal{G}\mathcal{F}\alpha=\mathcal{G}\varepsilon_B\circ\alpha\circ\mathcal{G}\varepsilon_A^{-1}$ olur. Buradan da $\mathcal{G}\left(\varepsilon_B^{-1}\circ\mathcal{F}\alpha\circ\varepsilon_A\right)=\mathcal{G}\varepsilon_B^{-1}\circ\mathcal{G}\mathcal{F}\alpha\circ\mathcal{G}\varepsilon_A=\alpha$ olur. Böylece $\mathcal{G}$ doludur. Ayrıca $\mathcal{G}\beta=\alpha$ ise $\varepsilon_B\circ\beta\circ\varepsilon_A^{-1}=\mathcal{F}\mathcal{G}\beta=\mathcal{F}\alpha=\varepsilon_B\circ\varepsilon_B^{-1}\circ\mathcal{F}\alpha\circ\varepsilon_A\circ\varepsilon_A^{-1}$ olur. Buradan $\beta=\varepsilon_B^{-1}\circ\mathcal{F}\alpha\circ\varepsilon_A$ olur. Böylece $\varepsilon_B^{-1}\circ\mathcal{F}\alpha\circ\varepsilon_A$ tektir. Dolayısıyla $\mathcal{G}$ faithfuldur. Her $A'\in Ob\left(\mathcal{K}\right)$ için

(3) $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{F}$ dolu ve faithful olduğundan, her $A,B\in Ob\left(\mathcal{K}\right)$ için, her $\mathcal{G}\mathcal{F}A\overset{\gamma}{\to}\mathcal{G}\mathcal{F}B$ morfizmine karşılık bir tek $\mathcal{F}A\overset{\beta}{\to}\mathcal{F}B$ ve bir tek $A\overset{\alpha}{\to}B$ vardır. Dolayısıyla $\mathcal{G}\mathcal{F}$ de dolu ve faithful olur.
Ayrıca $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{F}$ izomorfizm yoğun olduğundan, her $C\in Ob\left(\mathcal{M}\right)$ için C ile $\mathcal{G}B$ izomorf olacak şekilde bir $B\in Ob\left(\mathcal{L}\right)$ ve B ile $\mathcal{F}A$ izomorf olacak şekilde bir $A\in Ob\left(\mathcal{K}\right)$ vardır. Dolayısıyla C ile $\mathcal{G}\mathcal{F}A$ izomorf olur. Böylece $\mathcal{G}\mathcal{F}$ de izomorfizm yoğundur.

■

Sonuç 4.1.10 *$\mathcal{K}$ ile $\mathcal{L}$ arasındaki bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır.*

5. DOĞAL DÖNÜŞÜMLER VE LİMİT

5.1. Doğal Dönüşümler

Tanım 5.1.1

(1) $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ *ve* $\mathcal{G} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ *iki funktor olsun.* $\mathcal{K}$*'nin her* $A \xrightarrow{\alpha} B$ *morfizmi için*

$$\eta_B \circ \mathcal{F}\left(A \xrightarrow{\alpha} B\right) = \mathcal{G}\left(A \xrightarrow{\alpha} B\right) \circ \eta_A$$

olmak üzere, $\left(\mathcal{F}A \xrightarrow{\eta_A} \mathcal{G}A\right)_{A \in Ob(\mathcal{K})}$ *şeklindeki* $\mathcal{L}$*-morfizmler ailesine* $\mathcal{F}$*'den* $\mathcal{G}$*'ye bir doğal dönüşüm denir ve* $\eta : \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{G}$ *şeklinde gösterilir.*

(2) Her $A \in Ob(\mathcal{K})$ *için* $\mathcal{F}A \xrightarrow{\eta_A} \mathcal{G}A$ *morfizmi izomorfizm ise* $\left(\mathcal{F}A \xrightarrow{\eta_A} \mathcal{G}A\right)_{A \in Ob(\mathcal{K})}$ *ailesine doğal izomorfizm denir ve* $\eta : \mathcal{F} \cong \mathcal{G}$ *şeklinde gösterilir.*

Örnek 5.1.2 $\mathcal{K}$ *bir kategori ve* $X \xrightarrow{f} Y$*,* $B \xrightarrow{\alpha} A$ *birer morfizmi olsun.*

$$\begin{tikzcd}
 & A & B \arrow[l, "\alpha"'] & \\
X \arrow[dd, "f"'] & Hom(A,X) \arrow[r, "Hom(\alpha,X)"] \arrow[dd, "Hom(A,f)"'] & Hom(B,X) \arrow[dd, "Hom(B,f)"] & Hom(-,X) \arrow[dd, Rightarrow, "Hom(-,f)"] \\
 & & & \\
Y & Hom(A,Y) \arrow[r, "Hom(\alpha,Y)"'] & Hom(B,Y) & Hom(-,Y) \\
 & Hom(A,-) \arrow[r, Rightarrow, "Hom(\alpha,-)"'] & Hom(B,-) &
\end{tikzcd}$$

Her $A \xrightarrow{h} X$ *morfizmi için,*

$$\begin{aligned}
Hom(B,f) \circ Hom(\alpha,X)(h) &= Hom(B,f)(h \circ \alpha) \\
&= f \circ (h \circ \alpha) = (f \circ h) \circ \alpha \\
&= Hom(\alpha,Y)(f \circ h) = Hom(\alpha,Y) \circ Hom(A,f)(h)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
Hom(\alpha,-) &: Hom(A,-) \Rightarrow Hom(B,-) \\
Hom(-,f) &: Hom(-,X) \Rightarrow Hom(-,Y)
\end{aligned}$$

birer doğal dönüşümdür.

Örnek 5.1.3 K *değişmeli halka ve* $K^* = \{k \in K \mid k^{-1} \in K\}$ *olsun.* $f : K \to K'$ *halka homomorfizması için* $f^* : K^* \to K'^*$ *grup homomorfizmasını* $f^* = f|_{K^*}$ *şeklinde tanımlayalım. Bu durumda* $(^*) : \mathcal{CR}ng \to \mathcal{G}rp$ *bir funktor olur.*

$GL_n f([a_{ij}]) = [f(a_{ij})]$ olmak üzere, $GL_n f : GL_n K \to GL_n K'$ şeklinde tanımlı $GL_n : \mathcal{CR}ng \to \mathcal{G}rp$ bir funktordur.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d, "f"'] & GL_n K \arrow[r, "det_K"] \arrow[d, "GL_n f"'] & K^* \arrow[d, "f^*"] \\ K' & GL_n K' \arrow[r, "det_{K'}"'] & K'^* \end{tikzcd}$$

$f : K \to K'$ halka homomorfizması olduğundan

$$det_{K'} \circ GL_n f([a_{ij}]) = det_{K'}([f(a_{ij})]) = f^*(det_K([a_{ij}]))$$

olur. Dolayısıyla $det_K : GL_n \Rightarrow (^*)$ bir doğal dönüşümdür.

5.2. Adjoint Funktorlar

Vektör uzayı, serbest grup, serbest modül kavramlarının kategorik olarak genellemesi, aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 5.2.1 *$\mathcal{U} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ faithful funktor olmak üzere, A, $\mathcal{K}$'nin bir objesi ve $X \xrightarrow{u} \mathcal{U}A$ bir $\mathcal{L}$ morfizm olsun. Eğer $\mathcal{K}$'nin her B objesi ile $\mathcal{L}$'nin her $X \xrightarrow{f} \mathcal{U}B$ morfizmi için $f = \mathcal{U}\tilde{f} \circ u$ olacak şekilde bir tek $A \xrightarrow{\tilde{f}} B$ morfizmi varsa A'ya X üzerinde serbest obje denir.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{U}\mathcal{A} \arrow[d, dashed, "\mathcal{U}(\tilde{f})"] & A \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\ & \mathcal{U}B & B \end{tikzcd}$$

Şimdi, aralarında bir $\mathcal{U} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ faithful funktoru olan $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{K}$ kategorileri arasında bir funktor tanımlayacağız. Bu funktor $\mathcal{L}$'nin her X ve Y objesini, $\mathcal{K}$'nin $\mathcal{F}X$ ve $\mathcal{F}Y$ ile göstereceğimiz serbest objelerine götüren dönüşüm olacaktır. Buradan $X \xrightarrow{u} \mathcal{U}\mathcal{F}X$ ve $Y \xrightarrow{v} \mathcal{U}\mathcal{F}Y$ morfizmlerini kullanarak, $\mathcal{L}$'nin her $X \xrightarrow{f} Y$ morfizmine karşılık $v \circ f : Y \to \mathcal{U}\mathcal{F}Y$ morfizmi bulunur. Serbest obje tanımından $\mathcal{L}$'nin $v \circ f$ morfizmine karşılık $\mathcal{K}$'nin bir tek $\mathcal{F}X \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{F}Y$ morfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{U}\mathcal{A} \arrow[d, dashed, "\mathcal{U}(\tilde{f})"] & A \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\ Y \arrow[r, "v"'] & \mathcal{U}B & B \end{tikzcd}$$

Teorem 5.2.2 (Serbest funktor) *Yukarıdaki gibi* $\mathcal{F}\left(X \xrightarrow{f} Y\right) = \mathcal{F}X \xrightarrow{\tilde{f}} \mathcal{F}Y$ *şeklinde tanımlanan* $\mathcal{F} : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ *bir funktordur.*

Tabanın her fonksiyonu uzayın bir lineer dönüşümü ve uzayın her lineer dönüşümü tabanın bir fonksiyonudur. Bu sayede kümeler ile vektör uzayları arasında bir ilişki kurulmuş olur. Benzer şekilde $\mathcal{G}rp, \mathcal{A}b, \mathcal{R}$-$Mod$ gibi kategorilerle kümeler arasında da serbest objeler sayesinde bu ilişki kurulmuş olur.

Bu kısımda ise bu ilişkiyi daha genel olarak inceleyeceğiz. $\mathcal{U} : \mathcal{K} \to Set$ unutkan ve $\mathcal{F} : Set \to \mathcal{K}$ serbest funktorlar olsun. A bir küme ve B de $\mathcal{K}$'nin bir objesi olmak üzere, evrensellik özelliği gereği, her $f \in Hom\,(A, \mathcal{U}B)$ morfizmine karşılık $f = \mathcal{U}(\tilde{f}) \circ u$ olacak şekilde bir tek $\tilde{f} \in Hom\,(\mathcal{F}A, B)$ morfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{U}\mathcal{F}A \arrow[d, dashed, "\mathcal{U}(\tilde{f})"] & \mathcal{F}A \arrow[d, dashed, "\tilde{f}"] \\
& \mathcal{U}B & B
\end{tikzcd}$$

Böylece $Hom\,(A, \mathcal{U}B)$ ile $Hom\,(\mathcal{F}A, B)$ arasında birebir eşleme elde edilir. Ayrıca bu eşleşme doğaldır. Yani bu eşleşmeyi $\Phi_{AB} : Hom\,(A, \mathcal{U}B) \to Hom\,(\mathcal{F}A, B)$ şeklinde birebir örten fonksiyonla gösterirsek;

A değişkenine göre doğallık: Her $A' \xrightarrow{\alpha} A$ fonksiyonu için,

$$\begin{tikzcd}
Hom(A, \mathcal{U}B) \arrow[r, "\Phi_{AB}"] \arrow[d, "Hom(\alpha, \mathcal{U}B)"'] & Hom(\mathcal{F}A, B) \arrow[d, "Hom(\mathcal{F}\alpha, B)"] \\
Hom(A', \mathcal{U}B) \arrow[r, "\Phi_{A'B}"'] & Hom(\mathcal{F}A', B)
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Çünkü $f \in Hom\,(A, \mathcal{U}B)$ için,

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{U}\mathcal{F}A' \arrow[d, "\mathcal{U}\mathcal{F}\alpha"] & \mathcal{F}A \arrow[d, "\mathcal{F}\alpha"] \\
A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & \mathcal{U}\mathcal{F}A \arrow[d, dashed, "\mathcal{U}(\Phi_{AB}(f))"] & \mathcal{F}A \arrow[d, dashed, "\Phi_{AB}(f)"] \\
& \mathcal{U}B & B
\end{tikzcd}$$

yukarıdaki diyagramdan $\Phi_{A'B}\left(f \circ \alpha\right) = \Phi_{AB}\left(f\right) \circ \mathcal{F}\alpha$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} Hom\left(\mathcal{F}\alpha, B\right) \circ \Phi_{AB}\left(f\right) &= \Phi_{AB}\left(f\right) \circ \mathcal{F}\alpha = \Phi_{A'B}\left(\alpha \circ f\right) \\ &= \Phi_{A'B}\left(Hom\left(\alpha,\mathcal{U}B\right)\left(f\right)\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan da $Hom\left(\mathcal{F}\alpha, B\right) \circ \Phi_{AB} = \Phi_{A'B} \circ Hom\left(\alpha,\mathcal{U}B\right)$ olur.

B değişkenine göre doğallık: Her $B \xrightarrow{\beta} B'$ morfizmi için,

$$\begin{tikzcd} Hom(A,\mathcal{U}B) \arrow[r, "\Phi_{AB}"] \arrow[d, "Hom(A{,}\mathcal{U}(\beta))"'] & Hom(\mathcal{F}A, B) \arrow[d, "Hom(\mathcal{F}A{,}\beta)"] \\ Hom(A,\mathcal{U}B') \arrow[r, "\Phi_{AB'}"'] & Hom(\mathcal{F}A, B') \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Çünkü $f \in Hom\left(A,\mathcal{U}B\right)$ için,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[ddr, bend right, "\mathcal{U}\beta \circ \alpha"'] & \mathcal{U}\mathcal{F}A \arrow[d, dashed, "\mathcal{U}(\Phi_{AB}(f))"] & \mathcal{F}A \arrow[d, dashed, "\Phi_{AB}(f)"] \\ & \mathcal{U}B \arrow[d, "\mathcal{U}\beta"] & B \arrow[d, "\beta"] \\ & \mathcal{U}B' & B' \end{tikzcd}$$

yukarıdaki diyagramdan $\Phi_{AB'}\left(\mathcal{U}\beta \circ \alpha\right) = \beta \circ \Phi_{AB}\left(f\right)$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} Hom\left(\mathcal{F}A, \beta\right) \circ \Phi_{AB}\left(f\right) &= \beta \circ \Phi_{AB}\left(f\right) = \Phi_{AB'}\left(\mathcal{U}\beta \circ \alpha\right) \\ &= \Phi_{AB'}\left(Hom\left(A,\mathcal{U}\beta\right)\left(f\right)\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan da $Hom\left(\mathcal{F}A, \beta\right) \circ \Phi_{AB} = \Phi_{AB'} \circ Hom\left(A,\mathcal{U}\beta\right)$ olur.

Tanım 5.2.3 *$\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ ve $\mathcal{G} : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ birer funktor olsun.*

$$\left\{Hom\left(A, \mathcal{G}B\right) \overset{\Phi_{AB}}{\longrightarrow} Hom\left(\mathcal{F}A, B\right)\right\}_{A \in Ob(\mathcal{K}), B \in Ob(\mathcal{L})}$$

fonksiyonlar ailesi

- *Her $A \in Ob\left(\mathcal{K}\right), B \in Ob\left(\mathcal{L}\right)$ için birebir ve örten ise*
- *A değişkenine göre doğal ise yani $\mathcal{K}$'deki her $\left(A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{f} \mathcal{G}B\right)$ morfizmleri için $\Phi_{A'B}\left(f \circ \alpha\right) = \Phi_{AB}\left(f\right) \circ \mathcal{F}\alpha$ ise*
- *B değişkenine göre doğal ise yani $\mathcal{L}$'deki her $\left(\mathcal{F}A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{\beta} B'\right)$ morfizmleri için $\Phi^{-1}_{AB'}\left(\beta \circ g\right) = \mathcal{G}\beta \circ \Phi^{-1}_{AB}\left(g\right)$ ise*

(1) $\mathcal{F}$ funktoru $\mathcal{G}$ funktorunun sol adjointi denir.
(2) $\mathcal{G}$ funktoru $\mathcal{F}$ funktorunun sağ adjointi ya da kısaca adjoint denir.

Örnek 5.2.4 *$\mathcal{R}$-Mod kategorisinde, her X objesi için $-\otimes 1_X : \mathcal{R}$-$Mod \to \mathcal{A}b$ funktoru $Hom\,(X,-) : \mathcal{A}b \to \mathcal{R}$-$Mod$ funktorunun sol adjointidir.*

Her $f : A \to Hom\,(X,B)$ homomorfizması için $\tilde{f}\,(a,x) = f\,(a)\,(x)$ şeklinde tanımlanan $\tilde{f} : A \times X \to B$ bilineer dönüşüm olduğundan, buna karşılık bir tek $\Phi_{AB}\,(f) : A \otimes X \to B$ grup homomorfizması vardır.

A değişkenine göre doğallık: *$\mathcal{K}$'deki her $\left(A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{f} \mathcal{G}B\right)$ morfizmleri ve $a \otimes x \in A \otimes X$ için*

$$\begin{aligned}\Phi_{AB}\,(f) \circ (\alpha \otimes 1_X)\,(a \otimes x) &= \Phi_{AB}\,(f)\,(\alpha\,(a) \otimes x) = \Phi_{A'B}\,(f\,(\alpha\,(a)\,,x))\\ &= \Phi_{A'B}\,((f \circ \alpha)\,(a,x)) = \Phi_{A'B}\,(f \circ \alpha)\,(a \otimes x)\end{aligned}$$

olur.
B değişkenine göre doğallık: *$\mathcal{L}$'deki her $\left(\mathcal{F}A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{\beta} B'\right)$ morfizmleri ve $a \in A$ için*

$$Hom\,(X,\beta) \circ \Phi_{AB}^{-1}\,(g)\,(a) = \beta \circ \left(\Phi_{AB}^{-1}\,(g)\,(a)\right) = \Phi_{AB'}^{-1}\,(\beta \circ g)\,(a)$$

olur.

Örnek 5.2.5 *$\mathcal{U} : \mathcal{A}b \to Grb$ unutkan funktoru Örnek 4.0.23'deki $\mathcal{A} : Grb \to \mathcal{A}b$ funktorunun adjointidir.*

$f : A \to \mathcal{U}B$ alalım ve $\Phi_{AB}\,(f) = \mathcal{A}A \to B$ homomorfizmini

$$\Phi_{AB}\,(f)\,(A/[A,A]) = f\,(A)$$

şeklinde tanımlayalım. $f\,([A,A]) = [f\,(A)\,, f\,(A)] \subseteq \mathcal{U}B$ olduğundan $f\,([A,A]) = \{e_A\}$ olur. Dolayısıyla $\Phi_{AB}\,(f)$ iyi tanımlıdır. Buradan $\Phi_{AB} : Hom\,(A,\mathcal{U}B) \to Hom\,(\mathcal{A}A,B)$ fonksiyonu da iyi tanımlıdır. Ayrıca $\Phi_{AB}^{-1}\,(f)\,(A) = f\,(A/[A,A])$ fonksiyonu da tersidir.

Teorem 5.2.6 *$\mathcal{G} : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ funktorunu $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ funktorunun ve $\mathcal{G}' : \mathcal{M} \to \mathcal{L}$ funktoru da $\mathcal{F}' : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ funktorunun adjointi olsun. Bu durumda $\mathcal{G}'\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}\mathcal{F}'$ funktorunun adjointidir.*

İspat. *$Hom\,(A,\mathcal{G}B) \xrightarrow{\Phi_{AB}} Hom\,(\mathcal{F}A,B)$ ve $Hom\,(A,\mathcal{G}'B) \xrightarrow{\Phi'_{AB}} Hom\,(\mathcal{F}'A,B)$ doğal izomorfizmler olsun. Bu durumda $\Phi'_{AB} \circ \Phi_{AB}$ de doğal izomorfizm olur. Dolayısıyla $\mathcal{G}'\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}\mathcal{F}'$ funktorunun adjointidir.* ■

5.3. Limit

Şimdiye kadar birçok kategorik kavramı değişmeli diyagramlarla tanımladık. Şimdi diyagramın kategorik tanımını verelim ve diyagramın değişmeli olmasını tanımlayalım.

Tanım 5.3.1

(1) $\mathcal{D} : \mathcal{I} \to \mathcal{K}$ bir funktor olmak üzere $\mathcal{D}$'ye $\mathcal{K}$ üzerinde bir diyagram, $\mathcal{I}$'ya da diyagramın şeması denir.

(2) Şemasındaki iki obje arasında en fazla bir morfizm olan diyagrama değişmeli diyagram denir.

Şema, kümelerdeki indis kümesi kavramının genellemesidir. Bu yüzden çoğu zaman i objesi için $\mathcal{D}(i)$ yerine $\mathcal{D}_i$ ve $(\mathcal{D}_i)_{i \in Ob(\mathcal{I})}$ yerine kısaca $(\mathcal{D}_i)_{i \in \mathcal{I}}$ gösterimini kullanacağız.

Tanım 5.3.2 (Limit) *$\mathcal{D} : \mathcal{I} \to \mathcal{K}$ bir diyagram olmak üzere, aşağıdaki iki özelliği sağlayan $\left(L \xrightarrow{\alpha_i} A_i\right)_{i \in \mathcal{I}}$ ailesine $\mathcal{D}$'nin limiti denir.*

Doğallık: *$\mathcal{I}$'daki her $i \xrightarrow{d} j$ morfizmi için, $\mathcal{D}\left(i \xrightarrow{d} j\right) \circ \alpha_i = \alpha_j$.*

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dashed, "\theta"] \arrow[ddl, bend right, "\theta_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\theta_j"] & \\
 & L \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[dr, "\alpha_j"] & \\
\mathcal{D}_i \arrow[rr, "\mathcal{D}d"'] & & \mathcal{D}_j
\end{tikzcd}$$

Evrensellik: *$\mathcal{D}$ için doğal olan her $\left(X \xrightarrow{\theta_i} A_i\right)_{i \in \mathcal{I}}$ ailesine karşılık her $i \in Ob(\mathcal{I})$ için $\theta_i = \alpha_i \circ \theta$ olacak şekilde bir tek $X \xrightarrow{\theta} L$ morfizmi vardır.*

Tanım 5.3.3 (Dual limit) *$\mathcal{D} : \mathcal{I} \to \mathcal{K}$ bir diyagram olmak üzere, aşağıdaki iki özelliği sağlayan $\left(A_i \xrightarrow{\alpha_i} L\right)_{i \in \mathcal{I}}$ ailesine $\mathcal{D}$'nin dual limiti denir.*

Doğallık: *$\mathcal{I}$'daki her $i \xrightarrow{d} j$ morfizmi için, $\alpha_i = \alpha_j \circ \mathcal{D}\left(i \xrightarrow{d} j\right)$.*

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
 & L \arrow[u, dashed, "\theta"] & \\
\mathcal{D}i \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[uur, bend left, "\theta_i"] & & \mathcal{D}j \arrow[ul, "\alpha_j"'] \arrow[uul, bend right, "\theta_j"'] \arrow[ll, "\mathcal{D}d"]
\end{tikzcd}$$

Evrensellik: *$\mathcal{D}$ için doğal olan her $\left(A_i \xrightarrow{\theta_i} X\right)_{i \in \mathcal{I}}$ ailesine karşılık her $i \in Ob(\mathcal{I})$ için $\theta_i = \theta \circ \alpha_i$ olacak şekilde bir tek $L \xrightarrow{\theta} X$ morfizmi vardır.*

Bir diyagram verildiğinde limitini belirleyebilmek için bu diyagrama karşılık gelen;

(1) L objesi ile diyagram için doğal olan $A_i \xrightarrow{\alpha_i} L$ morfizmlerinin

(2) ve verilen her X objesi ile $A_i \xrightarrow{\theta_i} X$ morfizmlerine karşılık evrensellik özelliğini sağlayan $L \xrightarrow{\theta} X$ morfizminin

belirlenmesi gerekir.

Limit ve dual limit tanımındaki $\mathcal{I}$'nın özel durumları alındığında daha önce de bahsettiğimiz, iyi bilinen bazı özellikler elde edilir. Bu özel durumları inceledikten sonra limit kavramına devam edeceğiz.

Örnek 5.3.4 $\mathcal{C}\,(2)$, *iki objeden oluşan ve birim morfizmlerden başka morfizmi olmayan kategori olsun. Şeması* $\mathcal{C}\,(2)$ *olan bir diyagramın limiti çarpım ve dual limiti de dual çarpımdır.*

$\mathcal{C}\,(2) = \{0, 1\}$ *olmak üzere,* $\mathcal{D}\,(0) = A_0$ *ve* $\mathcal{D}\,(1) = A_1$ *olsun.* 0 *ile* 1 *arasında morfizm olmadığından her* $\left(X \xrightarrow{\theta_i} A_i\right)_{\dot{I}=1,2}$ *ve* $\left(A_i \xrightarrow{\theta_i} X\right)_{i=1,2}$ *doğaldır. Dolayısıyla* A_0 *ile* A_1*'in çarpımı olan* $\left(P \xrightarrow{\pi_i} A_i\right)_{\dot{I}=1,2}$ *ailesi* $\mathcal{D}$*'nin limiti ve dual çarpımı olan* $\left(A_i \xrightarrow{i_A} P\right)_{i=1,2}$ *de dual limittir.*

Yukarıdaki örneğe benzer şekilde herhangi bir X sınıfı için $(A_i)_{i\in X}$ objelerinin çarpım ve dual çarpımı, şeması $\mathcal{C}\,(X)$ olan diyagramın limit ve dual limitidir.

Tanım 5.3.5

(1) Şeması $\mathcal{I} = \left(a \xrightarrow{\alpha} b \xleftarrow{\beta} c\right)$ *kategorisi olan diyagramın limitine pullback denir.*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_\alpha"] \arrow[d, "p_\beta"'] & \mathcal{D}_a \arrow[d, "\mathcal{D}\alpha"] \\
& \mathcal{D}_b \arrow[r, "\mathcal{D}\beta"'] & \mathcal{D}_c
\end{tikzcd}
$$

(2) Şeması $\mathcal{I} = \left(a \xleftarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c\right)$ *kategorisi olan diyagramın dual limitine pushout*

denir.

$$\begin{tikzcd}
X & & \\
& P \arrow[ul, dashed, "\theta"] & \mathcal{D}_a \arrow[l, "p_\alpha"'] \arrow[ull, bend right, "f"'] \\
& \mathcal{D}_b \arrow[u, "p_\beta"] \arrow[uul, bend left, "g"] & \mathcal{D}_c \arrow[l, "\mathcal{D}\beta"] \arrow[u, "\mathcal{D}\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Örnek 5.3.6 *$\mathcal{S}et$ kategorisindeki iki $\left(A \overset{\alpha}{\to} C \overset{\beta}{\leftarrow} B\right)$ fonksiyonu için,*

$$P = \{(a,b) \in A \times B : \alpha(a) = \beta(b)\}$$

ve $\pi_A : P \to A, \pi_B : P \to B$ izdüşüm fonksiyonları olmak üzere, $\left(A \overset{\alpha}{\to} C \overset{\beta}{\leftarrow} B\right)$ ni pullbacki $\left(A \overset{\pi_A}{\leftarrow} P \overset{\pi_B}{\to} B\right)$ olur.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& P \arrow[r, "\pi_A"] \arrow[d, "\pi_B"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
& B \arrow[r, "\beta"'] & C
\end{tikzcd}$$

Doğallık: *Her $(a,b) \in P$ için, $\alpha(\pi_A(a,b)) = \alpha(a) = \beta(b) = \beta(\pi_B(a,b))$ olduğundan $\left(A \overset{\pi_A}{\leftarrow} P \overset{\pi_B}{\to} B\right)$ doğaldır.*

Evrensellik: *$\alpha \circ f = \beta \circ g$ olan her $\left(A \overset{f}{\to} X \overset{g}{\leftarrow} B\right)$ fonksiyonlarına karşılık, $\theta(x) = (f(x), g(x))$ şeklinde tanımlanan $\theta : X \to P$ fonksiyonu için;*

$$\alpha(\pi_A(\theta(x))) = \alpha(f(x)) = (\alpha \circ f)(x) = (\beta \circ g)(x) = \beta(g(x)) = \beta(\pi_B(\theta(x)))$$

olur.

Ayrıca bir başka $\theta' : X \to P$ fonksiyonu için $\pi_A \circ \theta' = f$ ve $\pi_B \circ \theta' = g$ olsa her $x \in X$ için

$$\theta'(x) = (\pi_A(\theta'(x)), \pi_B(\theta'(x))) = (f(x), g(x)) = \theta(x)$$

olduğundan $\theta : X \to P$ fonksiyonu tektir.

O halde $\left(A \overset{\alpha}{\to} C \overset{\beta}{\leftarrow} B\right)$'nin pullbacki $\left(A \overset{\pi_A}{\leftarrow} P \overset{\pi_B}{\to} B\right)$ olur.

Teorem 5.3.7 *$\mathcal{D} : \mathcal{I} \to \mathcal{K}$ bir diyagram olsun.*

(1) Eğer $k, \mathcal{I}$ kategorisinin başlangıç objesi ise $(\mathcal{D}_k \longrightarrow \mathcal{D}_i)_{i \in \mathcal{I}}$ ailesi $\mathcal{D}$'nin limitidir.
(2) Eğer $k, \mathcal{I}$ kategorisinin bitiş objesi ise $(\mathcal{D}_i \longrightarrow \mathcal{D}_k)_{i \in \mathcal{I}}$ ailesi $\mathcal{D}$'nin dual limitidir.

İspat.

(1) $k, \mathcal{I}$ kategorisinin başlangıç objesi olduğundan, her $i \in Ob\,(\mathcal{I})$ için bir tek $k \xrightarrow{m_i} i$ morfizmi vardır. Dolayısıyla $\left(\mathcal{D}_k \xrightarrow{\mathcal{D}m_i} \mathcal{D}_i\right)_{i \in \mathcal{I}}$ ailesi vardır.

Doğallık: *Her $i \xrightarrow{d} j$ morfizmi için $d \circ m_i \in Hom\,(k, j) = \{m_j\}$ olduğundan $\mathcal{D}d \circ \mathcal{D}m_i = \mathcal{D}\,(d \circ m_i) = \mathcal{D}m_j$ olur. Dolayısıyla $\left(\mathcal{D}_k \xrightarrow{\mathcal{D}m_i} \mathcal{D}_i\right)_{i \in \mathcal{I}}$ doğaldır.*

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, dashed, "\theta_k"] \arrow[ddl, bend right, "\theta_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\theta_j"] & \\
 & \mathcal{D}_{i_0} \arrow[dl, "\mathcal{D}m_i"'] \arrow[dr, "\mathcal{D}m_j"] & \\
 \mathcal{D}i \arrow[rr, "\mathcal{D}d"'] & & \mathcal{D}j
\end{tikzcd}$$

Evrensellik: *$\mathcal{D}$ için doğal olan $\left(X \xrightarrow{\theta_i} \mathcal{D}_i\right)_{i \in \mathcal{I}}$ ailesi verilsin. Doğallıktan dolayı her $i \in Ob\,(\mathcal{I})$ için $\theta_i = \mathcal{D}m_i \circ \theta_k$ olur.*

Bir başka $X \xrightarrow{\theta} \mathcal{D}_k$ için de $\theta_i = \mathcal{D}m_i \circ \theta$ olsun. O zaman $k \xrightarrow{m_k} k = Id_k$ olduğundan,

$$\theta_k = \mathcal{D}m_k \circ \theta = \mathcal{D}Id_k \circ \theta = Id_{\mathcal{D}k} \circ \theta = \theta$$

olur. Böylece $X \xrightarrow{\theta_k} \mathcal{D}_k$ tektir.

(2) Benzer şekilde gösterilebilir.

■

Teorem 5.3.8 *$id_{\mathcal{K}} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ birim funktor ve $\left(L \xrightarrow{\alpha_i} A\right)_{A \in Ob(\mathcal{K})}$ ailesi doğal olsun.*

(1) $id_{\mathcal{K}}$'nin limitinin $\left(L \xrightarrow{\alpha_A} A\right)_{A \in Ob(\mathcal{K})}$ olması için gerek ve yeter şart L'nin $\mathcal{K}$ kategorisinin başlangıç objesi olmasıdır.
(2) $id_{\mathcal{K}}$'nin dual limitinin $\left(A \xrightarrow{\alpha_A} L\right)_{A \in Ob(\mathcal{K})}$ olması için gerek ve yeter şart L'nin $\mathcal{K}$ kategorisinin bitiş objesi olmasıdır.

İspat.

(1) $\left(L \xrightarrow{\alpha_A} A\right)_{A\in Ob(\mathcal{K})}$*'nin doğallığından, her* $A \in Ob(\mathcal{K})$ *için*

$$\alpha_A \circ Id_L = \alpha_A = id_{\mathcal{K}}(\alpha_A) \circ \alpha_L = \alpha_A \circ \alpha_L$$

olur. $\left(L \xrightarrow{\alpha_A} A\right)_{A\in Ob(\mathcal{K})}$ *limit olduğundan,* α_L*'nin tekliği gereği* $Id_L = \alpha_L$ *olur.* *Ayrıca her* $L \xrightarrow{f} A$ *morfizmi için de* $\alpha_A = id_{\mathcal{K}}(f) \circ \alpha_L = f \circ Id_L = f$ *bulunur.* *Böylece* $L \xrightarrow{\alpha_A} A$ *morfizmi tek olup* L *başlangıç objesidir.* *Tersine,* L *başlangıç objesi ise bir önceki teoremden* $\left(L \xrightarrow{\alpha_i} A\right)_{A\in Ob(\mathcal{K})}$ *limittir.*

(2) Benzer şekilde gösterilebilir.

■

Bir diyagramın birden fazla limiti olabilir. Bunlar arasındaki ilişkiyi inceleyebilmek için, önce aşağıdaki tanımı yapalım.

Tanım 5.3.9

(1) Her $i \in Ob(\mathcal{I})$ *için* $\alpha_i = \beta_i \circ h$ *olacak şekilde bir* $A \xrightarrow{h} B$ *izomorfizmi varsa* $\left(A \xrightarrow{\alpha_i} A_i\right)_{i\in\mathcal{I}}$ *ile* $\left(B \xrightarrow{\beta_i} A_i\right)_{i\in\mathcal{I}}$ *aileleri izomorftur denir.*

(2) Her $i \in Ob(\mathcal{I})$ *için* $\alpha_i \circ h = \beta_i$ *olacak şekilde bir* $B \xrightarrow{h} A$ *izomorfizmi varsa* $\left(A_i \xrightarrow{\alpha_i} A\right)_{i\in\mathcal{I}}$ *ile* $\left(A_i \xrightarrow{\beta_i} B\right)_{i\in\mathcal{I}}$ *aileleri izomorftur denir.*

Bir diyagramın limiti varsa izomorfizma farkıyla tektir.

Teorem 5.3.10 $\mathcal{D} : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ *bir diyagram olmak üzere;*

(1) $\left(L \xrightarrow{\alpha_i} A_i\right)_{i\in\mathcal{I}}$*,* $\mathcal{D}$*'nin limiti olsun.* $\mathcal{D}$ *için doğal olan* $\left(K \xrightarrow{\beta_i} A_i\right)_{i\in\mathcal{I}}$ *ailesinin de* $\mathcal{D}$*'nin limiti olması için gerek ve yeter şart* $\left(L \xrightarrow{\alpha_i} A_i\right)_{i\in\mathcal{I}}$ *ile izomorf olmasıdır.*

(2) $\left(A_i \xrightarrow{\alpha_i} L\right)_{i\in\mathcal{I}}$*,* $\mathcal{D}$*'nin dual limiti olsun.* $\mathcal{D}$ *için doğal olan* $\left(K \xrightarrow{\beta_i} A_i\right)_{i\in\mathcal{I}}$ *ailesinin de* $\mathcal{D}$*'nin dual limiti olması için gerek ve yeter şart* $\left(A_i \xrightarrow{\alpha_i} L\right)_{i\in\mathcal{I}}$ *ile izomorf olmasıdır.*

İspat. $\left(L \xrightarrow{\alpha_i} A_i\right)_{i\in\mathcal{I}}$ *ve* $\left(K \xrightarrow{\beta_i} A_i\right)_{i\in\mathcal{I}}$ $\mathcal{D}$*'nin limitleri olsun.* $\left(L \xrightarrow{\alpha_i} A_i\right)_{i\in\mathcal{I}}$ *limit olduğundan, her* $i \in Ob(\mathcal{I})$ *için* $\beta_i = \alpha_i \circ \theta$ *olacak şekilde bir tek* $K \xrightarrow{\theta} L$ *morfizmi vardır.* $\left(K \xrightarrow{\beta_i} A_i\right)_{i\in\mathcal{I}}$ *limit olduğundan da* $\alpha_i = \beta_i \circ \theta'$ *olacak şekilde bir tek* $L \xrightarrow{\theta'} K$ *morfizmi vardır. Buradan*

$$\beta_i \circ Id_L = \beta_i = \alpha_i \circ \theta = (\beta_i \circ \theta') \circ \theta = \beta_i \circ (\theta' \circ \theta)$$
$$\alpha_i \circ Id_K = \alpha_i = \beta_i \circ \theta' = (\alpha_i \circ \theta) \circ \theta' = \alpha_i \circ (\theta \circ \theta')$$

olur. Id_L *ve* Id_K *morfizmlerinin tekliğinden* $Id_L = \theta \circ \theta'$ *ve* $Id_K = \theta' \circ \theta$ *bulunur. Böylece* K *ile* L *izomorftur.*

Tersine $K \xrightarrow{h} L$ *izomorfizm ve* $\left(L \xrightarrow{\alpha_i} A_i\right)_{i\in\mathcal{I}}$ *limit olsun. Bu durumda doğal olan her* $\left(X \xrightarrow{f_i} A_i\right)_{i\in\mathcal{I}}$ *ailesine karşılık her* $i \in Ob\,(\mathcal{I})$ *için* $f_i = \alpha_i \circ \theta$ *olacak şekilde bir tek* $X \xrightarrow{\theta} L$ *vardır. Buradan*

$$f_i = \alpha_i \circ \theta = \alpha_i \circ Id_L \circ \theta = \alpha_i \circ \left(h \circ h^{-1}\right) \circ \theta = (\alpha_i \circ h) \circ \left(h^{-1} \circ \theta\right) = \beta_i \circ \left(h^{-1} \circ \theta\right)$$

olur. $\theta' := h^{-1} \circ \theta$ *alırsak* $f_i = \beta_i \circ \theta'$ *olacak şekilde* $\theta' : X \to K$ *morfizmi vardır.*

Bir başka θ'' *morfizmi için* $\beta_i \circ \theta'' = f_i$ *olsun. Buradan*

$$\alpha_i \circ (h \circ \theta'') = (\alpha_i \circ h) \circ \theta'' = \beta_i \circ \theta'' = f_i = \alpha_i \circ \theta$$

olup θ *morfizminin tekliğinden* $h \circ \theta'' = \theta$ *olur. Buradan da*

$$\theta'' = id_K \circ \theta'' = \left(h^{-1} \circ h\right) \circ \theta'' = h^{-1} \circ (h \circ \theta'') = h^{-1} \circ \theta = \theta'$$

olduğundan θ' *tektir. O halde* $\left(K \xrightarrow{\beta_i} A_i\right)_{i\in\mathcal{I}}$ *de limittir.* ■

Teorem 5.3.11 $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ *funktoru* $\mathcal{G} : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ *funktorunun sağ adjointi olsun. Bu durumda;*

(1) $\mathcal{D} : \mathcal{I} \to \mathcal{L}$ *diyagramının limiti* $\left(L \overset{\phi_X}{\to} \mathcal{D}\right)_{X\in Ob(\mathcal{I})}$ *ise* $\mathcal{GD} : \mathcal{I} \to \mathcal{K}$ *diyagramının limiti de* $\left(\mathcal{G}L \overset{\mathcal{G}\phi_X}{\to} \mathcal{GD}X\right)_{X\in Ob(\mathcal{I})}$ *doğal dönüşümüdür.*

(2) $\mathcal{D} : \mathcal{I} \to \mathcal{K}$ *diyagramının dual limiti* $\left(\mathcal{D} \overset{\phi_X}{\to} L\right)_{X\in Ob(\mathcal{I})}$ *ise* $\mathcal{FD} : \mathcal{I} \to \mathcal{K}$ *diyagramının dual limiti de* $\left(\mathcal{FD}X \overset{\mathcal{F}\phi_X}{\to} \mathcal{F}L\right)_{X\in Ob(\mathcal{I})}$ *doğal dönüşümüdür.*

İspat. $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{L}$ *funktoru* $\mathcal{G} : \mathcal{L} \to \mathcal{K}$ *funktorunun adjointi olduğundan,*

$$\Phi_{X,Y} : Hom\,(X, \mathcal{G}Y) \to Hom\,(\mathcal{F}X, Y)$$

doğal izomorfizması vardır.

(1)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}Z \arrow[d, dashed, "\psi"] \arrow[ddl, bend right, "\psi_X"'] \arrow[ddr, bend left, "\psi_Y"] & \\
 & L \arrow[dl, "\phi_X"'] \arrow[dr, "\phi_Y"] & \\
\mathcal{D}X \arrow[rr, "\mathcal{D}f"'] & & \mathcal{D}Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, dashed, "\theta"] \arrow[ddl, bend right, "\theta_X"'] \arrow[ddr, bend left, "\theta_Y"] & \\
 & \mathcal{G}L \arrow[dl, "\mathcal{G}\phi_X"'] \arrow[dr, "\mathcal{G}\phi_Y"] & \\
\mathcal{GD}X \arrow[rr, "\mathcal{GD}f"'] & & \mathcal{GD}Y
\end{tikzcd}$$

Doğallık: $\left(L \overset{\phi_X}{\to} \mathcal{D}\right)_{X \in Ob(\mathcal{I})}$ *doğal dönüşüm olduğundan,*

$\left(\mathcal{G}L \overset{\mathcal{G}\phi_X}{\to} \mathcal{G}\mathcal{D}X\right)_{X \in Ob(\mathcal{I})}$ *de doğal dönüşümdür.*

Evrensellik: *$\mathcal{G}\mathcal{D}$ için doğal olan bir başka* $\left(Z \overset{\theta_X}{\to} \mathcal{G}\mathcal{D}X\right)_{X \in Ob(\mathcal{I})}$ *ailesi verilsin. $\mathcal{K}$ deki her $X \overset{f}{\to} Y$ morfizmi için, $\psi_X := \Phi_{Z,\mathcal{D}X}(\theta_X)$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}\psi_Y &= \Phi_{Z,\mathcal{D}Y}(\theta_Y) = \Phi_{Z,\mathcal{D}Y}(\mathcal{G}\mathcal{D}f \circ \theta_X) \\ &= \Phi_{Z,\mathcal{D}Y}\left(\mathcal{G}\mathcal{D}f \circ \Phi^{-1}_{Z,\mathcal{D}X}(\psi_X)\right) = \Phi_{Z,\mathcal{D}Y}\left(\Phi^{-1}_{Z,\mathcal{D}Y}(\mathcal{D}f \circ \psi_X)\right) = \mathcal{D}f \circ \psi_X\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $(\psi_X : \mathcal{F}Z \to X)_{X \in Ob(\mathcal{I})}$ ailesi de $\mathcal{D}$ için doğaldır.

$\left(L \overset{\phi_X}{\to} \mathcal{D}\right)_{X \in Ob(\mathcal{I})}$ *limit olduğundan, soldaki diyagram değişmeli olacak şekilde bir tek $\psi : \mathcal{F}Z \to X$ morfizmi vardır. Buradan $\theta := \Phi^{-1}_{Z,\mathcal{D}X}(\psi)$ alınırsa,*

$$\mathcal{G}\phi_X \circ \theta = \mathcal{G}\phi_X \circ \Phi^{-1}_{Z,L}(\psi) = \Phi^{-1}_{Z,\mathcal{D}X}(\phi_X \circ \psi) = \Phi^{-1}_{Z,\mathcal{D}X}(\psi_X) = \phi_X$$

olur. Ayrıca $\Phi^{-1}_{Z,\mathcal{D}X}$ birebir ve örten ve doğal dönüşüm olduğundan, bir başka $\theta' : Z \to \mathcal{G}L$ için de $\mathcal{G}\phi_X \circ \theta' = \phi_X$ olsa o zaman $\psi' := \Phi_{Z,\mathcal{D}X}(\theta')$ için de soldaki diyagram değişmeli olurdu. ψ'nin tekliğinden dolayı θ de tektir.

(2)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{G}Z & \\
 & L \arrow[u, dashed, "\psi"'] & \\
\mathcal{D}X \arrow[ur, "\phi_X"] \arrow[uur, bend left, "\psi_X"] & & \mathcal{D}Y \arrow[ul, "\phi_Y"'] \arrow[uul, bend right, "\psi_Y"'] \arrow[ll, "\mathcal{D}f"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Z & \\
 & \mathcal{F}L \arrow[u, dashed, "\theta"'] & \\
\mathcal{F}\mathcal{D}X \arrow[ur, "\mathcal{F}\phi_X"] \arrow[uur, bend left, "\theta_X"] & & \mathcal{F}\mathcal{D}Y \arrow[ul, "\mathcal{F}\phi_Y"'] \arrow[uul, bend right, "\theta_Y"'] \arrow[ll, "\mathcal{F}\mathcal{D}f"]
\end{tikzcd}$$

Diyagram kullanılarak benzer şekilde yapılır.

■

5.4. Direkt Limit

Örnek 3.0.26'deki gibi yarı sıralı her küme bir kategori olarak düşünülebilir. Dolayısıyla her yarı sıralı her küme aslında bir diyagramdır. Bu diyagramın, varsa, dual limitine de direkt limit denir. Direkt limitin varlığını garanti etmek için önce direkt sistem tanımını verip, sonra direkt limit tanımını vereceğiz.

Tanım 5.4.1 (Direkt sistem) *$(\mathcal{I}, \precsim)$ yönlendirilmiş küme olmak üzere;* $\left\{A_i \overset{\varphi_{ij}}{\longrightarrow} A_j : i \precsim j\right\}_{i,j \in \mathcal{I}}$ *morfizmlerinin ailesine, aşağıdaki şartları sağlarsa direkt sistem denir.*

(1) Her $i, j, k \in \mathcal{I}$ için $i \precsim j \precsim k$ ise $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$
(2) Her $i \in \mathcal{I}$ için $\varphi_{ii} = Id_{A_i}$

Tanım 5.4.2 (Direkt limit) *$\mathcal{D} := \left\{ A_i \xrightarrow{\varphi_{ij}} A_j : i \precsim j \right\}_{i,j \in I}$ bir direkt sistem olmak üzere, aşağıdaki iki özelliği sağlayan $\left\{ A_i \xrightarrow{\psi_i} L \right\}_{i \in \mathcal{I}}$ ailesine $\mathcal{D}$'nin direkt limiti denir.*

$$\begin{tikzcd}
 & Y & \\
 & L \arrow[u, dashed, "\theta"] & \\
A_i \arrow[rr, "\varphi_{ij}"'] \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[uur, bend left, "\theta_i"] & & A_j \arrow[ul, "\psi_j"'] \arrow[uul, bend right, "\theta_j"']
\end{tikzcd}$$

Doğallık: *Her $i, j \in I$ için $i \precsim j$ ise $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$.*
Evrensellik: *$\mathcal{D}$ için doğal olan her $\left\{ A_i \xrightarrow{\theta_i} X \right\}_{i \in \mathcal{I}}$ ailesine karşılık her $i \in I$ için $\theta_i = \theta \circ \psi_i$ olacak şekilde bir tek $L \xrightarrow{\theta} X$ morfizmi vardır.*

$\left\{ A_i \xrightarrow{\varphi_{ij}} A_j : i \precsim j \right\}_{i,j \in I}$ direkt sisteminin direkt limiti $\left\{ A_i \xrightarrow{\psi_i} L \right\}_{i \in \mathcal{I}}$ ise $\varinjlim A_i = L$ şeklinde gösterilir.

Teorem 5.4.3 *$\mathcal{R}$-Mod kategorisinde her B objesi ile $\left\{ A_i \xrightarrow{\varphi_{ij}} A_j : i \precsim j \right\}_{i,j \in I}$ direkt sistemi için $\varinjlim (A_i \otimes B) = \left(\varinjlim A_i \right) \otimes B$*

İspat. *Örnek 5.2.4'ten tensör funktoru sol adjoint olduğunu biliyoruz. Teorem 5.3.11'den dual limiti dolayısıyla da direkt limiti korur.* ■

5.4.1. Kümelerde direkt limit

$\mathcal{S}et$ kategorisinde bir $\left\{ A_i \xrightarrow{\varphi_{ij}} A_j : i \precsim j \right\}_{i,j \in I}$ direkt sistemi verilsin. Direkt limiti belirleyebilmek için önce $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı tanımayacağız. Burada $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ kümesi $\{A_i\}_{i \in I}$ kümelerinin ayrık birleşimidir. Ayrık birleşimde her eleman bu $\{A_i\}_{i \in I}$ kümelerinden bir ve yalnız bir tanesinin elemanı olur. Bu yüzden $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ kümesinin elemanlarını belirlerken hangi A_i kümesinden geldiğini de bilmekte fayda vardır. Dolayısıyla $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ kümesinin elemanlarını $x_i \in A_i$ şeklinde seçeceğiz.

Teorem 5.4.4 *$\bigsqcup_{i \in I} A_i$ kümesi üzerinde aşağıdaki $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır:*

$$\varphi_{iu}(x_i) = \varphi_{ju}(x_j) \text{ olacak şekilde bir } u \succsim i, j \text{ varsa } x_i \sim y_j.$$

İspat. $\sim$ bağıntısının yansıma ve simetri özelliklerine sahip olduğu aşikârdır.

Geçişlilik için; $x_i \sim y_j$ ve $y_j \sim z_k$ olsun. Bu durumda $\varphi_{iu}(x_i) = \varphi_{ju}(y_j)$ olacak şekilde bir $u \gtrsim i, j$ ve $\varphi_{jv}(y_j) = \varphi_{kv}(z_k)$ olacak şekilde bir $v \gtrsim j, k$ vardır. Ayrıca I yönlendirilmiş olduğundan $w \gtrsim u, v$ olacak şekilde bir $w \in I$ vardır. Buradan,

$$\begin{aligned}\varphi_{iw}(x_i) &= \varphi_{uw} \circ \varphi_{iu}(x_i) = \varphi_{uw} \circ \varphi_{ju}(y_j) = \varphi_{jw}(y_j) \\ &= \varphi_{vw} \circ \varphi_{jv}(y_j) = \varphi_{vw} \circ \varphi_{kv}(z_k) = \varphi_{kw}(z_k)\end{aligned}$$

olur. Buradan $x_i \sim z_k$ olur.

Böylece $\sim$ bağıntısı, $\bigsqcup_{i \in I} A_i$ kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. ■

$i \precsim j$ ise $\varphi_{ij}(x_i) = Id_{A_j} \circ \varphi_{ij}(x_i) = \varphi_{jj} \circ \varphi_{ij}(x_i)$ olduğundan $x_i \sim \varphi_{ij}(x_i)$ olur. Dolayısıyla $i \precsim j$ ise $[x_i]_\sim = \left[\varphi_{ij}(x_i)\right]_\sim$ eşitliği vardır.

Teorem 5.4.5 *$\mathcal{S}et$ kategorisinde bir $\mathcal{D} := \left\{A_i \xrightarrow{\varphi_{ij}} A_j : i \precsim j\right\}_{i,j \in I}$ direkt sisteminin direkt limiti; $L = \bigsqcup_{i \in I} A_i / \sim$ ve $\psi_i(x_i) = [x_i]_\sim$ olmak üzere $\left\{A_i \xrightarrow{\psi_i} L\right\}_{i \in \mathcal{I}}$ fonksiyonlarının ailesidir.*

İspat.

Doğallık: *$i \precsim j$ olan her $i, j \in \mathcal{I}$ ve $x_i \in A_i$ için,*

$$\psi_i(x_i) = [x_i]_\sim = \left[\varphi_{ij}(x_i)\right]_\sim = \psi_j\left(\varphi_{ij}(x_i)\right)$$

olur. Dolayısıyla $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ olur.

Evrensellik: *$\mathcal{D}$ için doğal olan her $\left\{A_i \xrightarrow{\theta_i} X\right\}_{i \in \mathcal{I}}$ ailesine karşılık $\theta : L \to X$ fonksiyonunu $\theta([x_i]_\sim) = \theta_i(x_i)$ şeklinde tanımlayalım.*

İyi tanımlılık: *$[x_i]_\sim = [y_j]_\sim$ iken $\varphi_{iu}(x_i) = \varphi_{ju}(y_j)$ olacak şekilde bir $u \gtrsim i, j$ var olduğundan,*

$$\begin{aligned}\theta([x_i]_\sim) &= \theta([\varphi_{iu}(x_i)]_\sim) = \theta_u(\varphi_{iu}(x_i)) \\ &= \theta_u\left(\varphi_{ju}(y_j)\right) = \theta\left(\left[\varphi_{ju}(y_i)\right]_\sim\right) = \theta([y_i]_\sim)\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\theta : L \to X$ fonksiyonunu iyi tanımlıdır.

Ayrıca $\theta(\psi_i(x_i)) = \theta([x_i]_\sim) = \theta_i(x_i)$ olduğundan $\theta \circ \psi_i = \theta_i$ olur.

Bir başka $\theta' : L \to X$ fonksiyonunu için de $\theta' \circ \psi_i = \theta_i$ olsun. O zaman, her $[x_i]_\sim \in L$ için

$$\theta'([x_i]_\sim) = \theta'(\psi_i(x_i)) = \theta_i(x_i) = \theta([x_i]_\sim)$$

olduğundan $\theta' = \theta$ olur.

■

Örnek 5.4.6 *A bir küme ve $(A_i)_{i\in I}$ da A'nın alt kümelerinin bir ailesi olsun. I üzerinde bir yarı sıralama bağıntısını $A_i \subseteq A_j$ ise $i \precsim j$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda, $A_i \xrightarrow{\varphi_{ij}} A_j$ içerme fonksiyonu olmak üzere, $\left\{A_i \xrightarrow{\varphi_{ij}} A_j : i \precsim j\right\}_{i,j\in I}$ direkt sistemdir ve direkt limiti $L := \bigcup_{i\in I} A_i$ kümesi ve $\left\{A_i \xrightarrow{\psi_i} L\right\}_{i\in\mathcal{I}}$ fonksiyonları da yine içerme fonksiyonudur. Eğer I kümesinin en büyük elemanı u ise $L = A_u$ olur.*

5.4.2. Cebirsel yapılarda direkt limit

$\mathcal{G}rp$, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{R}ing$ gibi kategorilerde bir $\left\{A_i \xrightarrow{\varphi_{ij}} A_j : i \precsim j\right\}_{i,j\in I}$ direkt sistemi verilsin. Bu durumda her bir A_i aynı zamanda küme ve $A_i \xrightarrow{\varphi_{ij}} A_j$'ler de fonksiyon olduğundan, bu direkt sistemin $\mathcal{S}et$ kategorisinde $\left\{A_i \xrightarrow{\psi_i} L\right\}_{i\in\mathcal{I}}$ şeklinde direkt limit vardır. Burada küme üzerine kurulan diğer cebirsel yapılarda da direkt limitin benzer şekilde oluşturulacağını göstereceğiz.

Teorem 5.4.7 *$\mathcal{D} := \left\{A_i \xrightarrow{\varphi_{ij}} A_j : i \precsim j\right\}_{i,j\in I}$ direkt sisteminin direkt limiti, $\mathcal{L} := \left\{A_i \xrightarrow{\psi_i} L\right\}_{i\in\mathcal{I}}$ olmak üzere;*

(1) $\mathcal{D}$, $\mathcal{G}rp$ kategorisinde ise $\mathcal{L}$ de $\mathcal{G}rp$ kategorisindedir.
(2) $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}b$ kategorisinde ise $\mathcal{L}$ de $\mathcal{A}b$ kategorisindedir.
(3) $\mathcal{D}$, $\mathcal{R}ing$ kategorisinde ise $\mathcal{L}$ de $\mathcal{R}ing$ kategorisindedir.

İspat.

(1) Bunun için önce $[x_i], [y_j] \in L$ elemanları arasında bir grup işlemi tanımlamalıyız. I yönlendirilmiş küme olduğundan, $u \succsim i, j$ olacak şekilde bir $u \in I$ vardır. Buradan $[x_i] = [\varphi_{iu}(x_i)]$ ve $[y_j] = \left[\varphi_{ju}(y_j)\right]$ olur. Böylece $[x_i]$ ile $[y_j]$ arasındaki işlemi

$$[x_i] + [y_j] := \left[\varphi_{iu}(x_i) + \varphi_{ju}(y_j)\right]$$

şeklinde A_u'daki işlemle tanımlayabiliriz.

İyi tanımlılık: L kümesi ayrık birleşimle oluşturulduğundan, bu x_i ve y_j elemanlarının seçimi başka türlü olamaz. Fakat birden fazla $u \in I$ için $u \succsim i, j$ olabilir. Kabul edelim ki bir başka $v \in I$ için de $v \succsim i, j$ olsun. O zaman $\left[\varphi_{iu}(x_i) + \varphi_{ju}(y_j)\right] = \left[\varphi_{iv}(x_i) + \varphi_{jv}(y_j)\right]$ olduğunu yani $\varphi_{iu}(x_i) + \varphi_{ju}(y_j) \sim \varphi_{iv}(x_i) + \varphi_{jv}(y_j)$ olduğunu gösterelim. I yönlendirilmiş küme olduğundan, $w \succsim u, v$ olacak şekilde bir $w \in I$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned}\varphi_{uw}\left(\varphi_{iu}(x_i) + \varphi_{ju}(y_j)\right) &= \varphi_{uw}(\varphi_{iu}(x_i)) + \varphi_{uw}\left(\varphi_{ju}(y_j)\right) = \varphi_{iw}(x_i) + \varphi_{jw}(y_j) \\ &= \varphi_{vw}(\varphi_{iv}(x_i)) + \varphi_{vw}\left(\varphi_{jv}(y_j)\right) = \varphi_{vw}\left(\varphi_{iv}(x_i) + \varphi_{jv}(y_j)\right)\end{aligned}$$

olur. Böylece tanımladığımız $[x_i] + [y_j]$ işlemi $u \in I$ dan bağımsız olup iyi tanımlıdır.

Birleşme: Ayrıca her $[x_i], [y_j], [z_k] \in L$ için öyle $u \succsim i, j$, $v \succsim j, k$ ve $w \succsim u, v$ vardır ki;

$$\begin{aligned}([x_i] + [y_j]) + [z_j] &= \left[\varphi_{iu}(x_i) + \varphi_{ju}(y_j)\right] + [z_j] \\ &= \left[\varphi_{uw}\left(\varphi_{iu}(x_i) + \varphi_{ju}(y_j)\right) + \varphi_{kw}(z_k)\right] \\ &= \left[\varphi_{uw} \circ \varphi_{iu}(x_i) + \varphi_{uw} \circ \varphi_{ju}(y_j) + \varphi_{kw}(z_k)\right] \\ &= \left[\varphi_{iw}(x_i) + \varphi_{jw}(y_j) + \varphi_{kw}(z_k)\right] \\ &= \left[\varphi_{iw}(x_i) + \varphi_{vw} \circ \varphi_{jv}(y_j) + \varphi_{vw} \circ \varphi_{kv}(z_k)\right] \\ &= \left[\varphi_{iw}(x_i) + \varphi_{vw}\left(\varphi_{jv}(y_j) + \varphi_{kv}(z_k)\right)\right] \\ &= [x_i] + \left[\varphi_{jv}(y_j) + \varphi_{kv}(z_k)\right] \\ &= [x_i] + ([y_j] + [z_k])\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla bu işlem birleşmelidir.

Birim eleman: $e_i \in A_i$ ve $e_j \in A_j$ ait oldukları grupların birimleri ise öyle bir $u \succsim i, j$ vardır ki $\varphi_{iu}(e_i) = e_u = \varphi_{ju}(e_j)$ olur. Dolayısıyla direkt sistemdeki bütün birim elemanlar aynı denklik sınıfındadır.
e_j bir A_j grubunun birim elemanı olmak üzere, $[x_i] \in L$ için öyle bir $u \succsim i, j$ vardır ki;

$$[x_i] + [e_j] = \left[\varphi_{iu}(x_i) + \varphi_{ju}(e_j)\right] = [\varphi_{iu}(x_i) + e_u] = [\varphi_{iu}(x_i)] = [x_i]$$

olur. Dolayısıyla $[e_j]$ denklik sınıfı L'nin sağ birimidir. Benzer şekilde sol birim olduğu gösterilebilir.

Ters eleman: Her $[x_i] \in L$ için $[x_i] + \left[x_i^{-1}\right] = [e_i]$ olduğundan her elemanın tersi vardır.

Şimdi de $\psi_i(x_i) = [x_i]$ şeklinde tanımlanan $\psi_i : A_i \to L$ fonksiyonlarının grup homomorfizması olduğunu gösterelim. Her $x_i, y_i \in A_i$ için,

$$\psi_i(x_i + y_i) = [x_i + y_i] = [\varphi_{ii}(x_i) + \varphi_{ii}(y_i)] = [x_i] + [y_i] = \psi_i(x_i) + \psi_i(y_i)$$

olup $\psi_i : A_i \to L$ fonksiyonları grup homomorfizmasıdır.

(2) A_i grupları Abel grupları ise her $[x_i], [y_j] \in L$ için öyle bir $u \succsim i, j$ vardır ki,

$$[x_i] + [y_j] = \left[\varphi_{iu}(x_i) + \varphi_{ju}(y_j)\right] = \left[\varphi_{ju}(y_j) + \varphi_{iu}(x_i)\right] = [y_j] + [x_i]$$

olur. Böylece L de Abel grubudur.

(3) A_i'ler birimli birer halka ve $A_i \xrightarrow{\varphi_{ij}} A_j$'ler de birimi koruyan halka homomorfizmaları olsun. Halka işlemini de grup işlemine benzer şekilde

$$[x_i] \cdot [y_j] := \left[\varphi_{iu}(x_i) \cdot \varphi_{ju}(y_j)\right]$$

şeklinde A_u'daki halka işlemiyle tanımlayabiliriz. Bu işlemin de iyi tanımlı, birleşmeli ve birimli olduğu aynı şekilde gösterilir.

Dağılma özelliği: Her $[x_i], [y_j], [z_j] \in L$ için öyle $u \succsim i, j$, $v \succsim j, k$ ve $w \succsim u, v$ vardır ki;

$$\begin{aligned}
[x_i] \cdot ([y_j] + [z_k]) &= [x_i] \cdot ([y_j] + [z_k]) \\
&= [x_i] \cdot \left[\varphi_{jv}(y_j) + \varphi_{kv}(z_k)\right] \\
&= \left[\varphi_{iw}(x_i) \cdot \varphi_{vw}\left(\varphi_{jv}(y_j) + \varphi_{kv}(z_k)\right)\right] \\
&= \left[\varphi_{iw}(x_i) \cdot \left(\varphi_{vw} \circ \varphi_{jv}(y_j) + \varphi_{vw} \circ \varphi_{kv}(z_k)\right)\right] \\
&= \left[\varphi_{iw}(x_i) \cdot \left(\varphi_{jw}(y_j) + \varphi_{kw}(z_k)\right)\right] \\
&= \left[\varphi_{iw}(x_i) \cdot \varphi_{jw}(y_j) + \varphi_{iw}(x_i) \cdot \varphi_{kw}(z_k)\right] \\
&= \left[\varphi_{iw}(x_i) \cdot \varphi_{jw}(y_j)\right] + \left[\varphi_{iw}(x_i) \cdot \varphi_{kw}(z_k)\right] \\
&= ([x_i] \cdot [y_j]) + ([x_i] \cdot [z_k])
\end{aligned}$$

olur. Soldan dağılma da benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdi de $\psi_i(x_i) = [x_i]$ şeklinde tanımlanan $\psi_i : A_i \to L$ grup homomorfizmalarının halka homomorfizmaları olduğunu gösterelim. Her $x_i, y_i \in A_i$ için,

$$\psi_i(x_i \cdot y_i) = [x_i \cdot y_i] = [\varphi_{ii}(x_i) \circ \varphi_{ii}(y_i)] = [x_i] \cdot [y_i] = \psi_i(x_i) \cdot \psi_i(y_i)$$

olup $\psi_i : A_i \to L$ fonksiyonları halka homomorfizmasıdır. Ayrıca A_i halkasının birimi 1_i olmak üzere $[1_i]$ de L halkasının birimi ve $\psi_i(1_i) = [1_i]$ olduğundan $\psi_i : A_i \to L$'ler birimi koruyan halka homomorfizmalarıdır.

■

Yukarıdaki teorem $\mathcal{G}rp$, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{R}ing$ kategorilerinde verilen bir direkt sistemin direkt limitinin de o kategoride olduğunu gösterir. Ama $\mathcal{S}et$ kategorisindeki bu direkt limitin bu kategorilerde de direkt limit olduğunu göstermez.

Aşağıdaki teoremde bu direkt limitin $\mathcal{G}rp$, $\mathcal{A}b$, $\mathcal{R}ing$ kategorilerinde de direkt limit olduğunu göstereceğiz.

Teorem 5.4.8 *$\mathcal{D} := \left\{A_i \xrightarrow{\varphi_{ij}} A_j : i \precsim j\right\}_{i,j \in I}$ direkt sisteminin $\mathcal{S}et$ kategorisinde direkt limiti $\mathcal{L} := \left\{A_i \xrightarrow{\psi_i} L\right\}_{i \in \mathcal{I}}$ olmak üzere;*

(1) $\mathcal{D}$, $\mathcal{G}rp$ kategorisinde ise $\mathcal{D}$'nin direkt limiti de $\mathcal{L}$'dir.
(2) $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}b$ kategorisinde ise $\mathcal{D}$'nin direkt limiti de $\mathcal{L}$'dir.
(3) $\mathcal{D}$, $\mathcal{R}ing$ kategorisinde ise $\mathcal{D}$'nin direkt limiti de $\mathcal{L}$'dir.

İspat.

Doğallık: $\mathcal{S}et$ kategorisinde göstermiştik.
Evrensellik: $\mathcal{D}$ için doğal olan her $\left\{A_i \xrightarrow{\theta_i} X\right\}_{i \in \mathcal{I}}$ homomorfizmalar ailesine karşılık, $\theta([x_i]) = \theta_i(x_i)$ şeklinde tanımlanan $L \xrightarrow{\theta} X$ fonksiyonunun da homomorfizma olduğunu göstermek yeterlidir.

(1) Her $[x_i], [y_j] \in L$ için öyle bir $u \succsim i, j$ vardır ki;

$$\begin{aligned}\theta([x_i] + [y_j]) &= \theta\big([\varphi_{iu}(x_i) + \varphi_{ju}(y_j)]\big)\\ &= \theta_u\big(\varphi_{iu}(x_i) + \varphi_{ju}(y_j)\big)\\ &= \theta_u(\varphi_{iu}(x_i)) + \theta_u\big(\varphi_{ju}(y_j)\big)\\ &= \theta([x_i]) + \theta([y_j])\end{aligned}$$

olur. Böylece $L \xrightarrow{\theta} X$ fonksiyonu da grup homomorfizmasıdır.

(2) $L \xrightarrow{\theta} X$ fonksiyonu grup homomorfizması olduğundan, aynı zamanda Abel grup homomorfizmasıdır.

(3) Her $[x_i], [y_j] \in L$ için öyle bir $u \succsim i, j$ vardır ki;

$$\begin{aligned}\theta([x_i] \cdot [y_j]) &= \theta\big([\varphi_{iu}(x_i) \cdot \varphi_{ju}(y_j)]\big)\\ &= \theta_u\big(\varphi_{iu}(x_i) \cdot \varphi_{ju}(y_j)\big)\\ &= \theta_u(\varphi_{iu}(x_i)) \cdot \theta_u\big(\varphi_{ju}(y_j)\big)\\ &= \theta([x_i]) \cdot \theta([y_j])\end{aligned}$$

olur. Böylece $L \xrightarrow{\theta} X$ fonksiyonu da halka homomorfizmasıdır.

■

Örnek 5.4.9 (Prüfer p-grubu) *p bir asal sayı olmak üzere, $\varphi_{ij}(x + p^i\mathbb{Z}) = p^{j-i}x + p^j\mathbb{Z}$ şeklinde tanımlanan $\left\{\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_{ij}} \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} : i \leq j\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}^+}$ bir direkt sistemdir ve direkt limiti $\mathbb{Z}(p^\infty) = \left\{\frac{x}{p^k} + \mathbb{Z} : x \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^+\right\}$ kümesi ile $\psi_k\left(x + p^k\mathbb{Z}\right) = \frac{x}{p^k} + \mathbb{Z}$ şeklinde tanımlanan $\left\{\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_k} \mathbb{Z}(p^\infty)\right\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ ailesidir.*

$x + p^k\mathbb{Z}$ ile $y + p^l\mathbb{Z}$ arasında

$$x + p^k\mathbb{Z} = \varphi_{kl}\left(x + p^k\mathbb{Z}\right) = p^{k-l}y + p^l\mathbb{Z}$$

ise $x + p^k\mathbb{Z} \sim y + p^l\mathbb{Z}$ şeklinde bir bağıntı tanımlayalım. Bunun denklik sınıfları $\frac{x}{p^k} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}(p^\infty)$ elemanlarıyla temsil edilebilir. Böylece $\left\{\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_k} \mathbb{Z}(p^\infty)\right\}_{k\in\mathbb{Z}^+}$ bu $\left\{\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_{ij}} \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} : i \leq j\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}^+}$ direkt sisteminin direk limitidir.

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
& \mathbb{Z}(p^\infty) \arrow[u, dashed, "\theta"] & \\
\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[uur, bend left, "\theta_i"] \arrow[rr, "\varphi_{ij}"'] & & \mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \arrow[ul, "\psi_j"'] \arrow[uul, bend right, "\theta_j"']
\end{tikzcd}$$

5.5. Ters Limit

Direkt limitte olduğu gibi her ters sistem de aslında bir diyagramdır. Bu diyagramın limitine de ters limit denir. Ters limiti daha açık olarak şöyle ifade edebiliriz.

Tanım 5.5.1 (Ters sistem) $(\mathcal{I}, \lesssim)$ *yarı sıralı bir küme olmak üzere;* $\left\{A_j \xrightarrow{\varphi_{ji}} A_i : i \precsim j\right\}_{i,j\in\mathcal{I}}$ *morfizmlerinin bir ailesine, aşağıdaki şartları sağlarsa ters sistem denir.*

(1) Her $i, j, k \in \mathcal{I}$ için $i \precsim j \precsim k$ ise $\varphi_{ki} = \varphi_{ji} \circ \varphi_{kj}$
(2) Her $i \in \mathcal{I}$ için $\varphi_{ii} = Id_{A_i}$

Tanım 5.5.2 (Ters limit) $\mathcal{D} := \left\{A_j \xrightarrow{\varphi_{ji}} A_i : i \precsim j\right\}_{i,j\in\mathcal{I}}$ *bir ters sistem olmak üzere, aşağıdaki iki özelliği sağlayan* $\left\{L \xrightarrow{\psi_i} A_i\right\}_{i\in\mathcal{I}}$ *ailesine $\mathcal{D}$'nin ters limiti denir.*

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, dashed, "\theta"] \arrow[ddl, bend right, "\theta_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\theta_j"] & \\
 & L \arrow[dl, "\psi_i"'] \arrow[dr, "\psi_j"] & \\
A_i & & A_j \arrow[ll, "\varphi_{ij}"]
\end{tikzcd}$$

Doğallık: *Her $i, j \in \mathcal{I}$ için $i \precsim j$ ise $\psi_i = \varphi_{ji} \circ \psi_j$.*
Evrensellik: *$\mathcal{D}$ için doğal olan her $\left\{X \xrightarrow{\theta_i} A_i\right\}_{i\in\mathcal{I}}$ ailesine karşılık her $i \in I$ için $\theta_i = \psi_i \circ \theta$ olacak şekilde bir tek $X \xrightarrow{\theta} L$ morfizmi vardır.*

$\left\{A_j \xrightarrow{\varphi_{ji}} A_i : i \precsim j\right\}_{i,j\in\mathcal{I}}$ ters sisteminin ters limiti $\left\{L \xrightarrow{\psi_i} A_i\right\}_{i\in\mathcal{I}}$ ise $\varprojlim A_i = L$ şeklinde gösterilir.

5.5.1. Kümelerde ters limit

$\mathcal{S}et$ kategorisinde direkt limiti ayrık birleşimin bir bölümü olarak bulmuştuk. Şimdi de ters limitin kartezyen çarpımının bir alt kümesi olarak bulunabileceğinin gösterelim.

Bir $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ kümeler ailesi verildiğinde $p_i : \prod_{k\in\mathcal{I}} A_k \to A_i$ doğal izdüşüm fonksiyonları $p_i\left((x_k)_{k\in\mathcal{I}}\right) = x_i$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 5.5.3 *$\mathcal{S}et$ kategorisinde bir $\mathcal{D} := \left\{A_j \xrightarrow{\varphi_{ji}} A_i : i \precsim j\right\}_{i,j\in\mathcal{I}}$ ters sistemi verilsin. $\mathcal{D}$'nin ters limiti*

$$L := \left\{(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in \prod_{i\in\mathcal{I}} A_i \mid \textit{her } i \precsim j \textit{ için } x_i = \varphi_{ji}(x_j)\right\}$$

ve $p_i|_L$, p_i'nin L kümesine kısıtlanışları olmak üzere, $\left\{L \overset{p_i|_L}{\to} A_i\right\}_{i\in\mathcal{I}}$ ailesidir.

İspat.

Doğallık: *$i, j \in I$ için $i \precsim j$ olsun. Her $(x_k)_{k\in\mathcal{I}} \in L$ için,*

$$\varphi_{ji} \circ p_j|_L \left((x_k)_{k\in\mathcal{I}}\right) = \varphi_{ji}(x_j) = x_i = p_i|_L \left((x_k)_{k\in\mathcal{I}}\right)$$

olur. Böylece $\varphi_{ji} \circ p_j|_L = p_i|_L$ olur.

Evrensellik: *$\mathcal{D}$ için doğal olan her $\left\{X \xrightarrow{\theta_i} A_i\right\}_{i\in\mathcal{I}}$ ailesi için, $\theta : X \to L$ fonksiyonunu $\theta(x) = (\theta_k(x))_{k\in\mathcal{I}}$ şeklinde tanımlayalım. $i \precsim j$ ise doğallıktan, $\varphi_{ji} \circ \theta_j(x) = \theta_i(x)$ olur. Böylece $\theta(x) = (\theta_k(x))_{k\in\mathcal{I}} \in L$ olur.*

Ayrıca her $x \in X$ için, $p_i|_L \circ \theta(x) = p_i|_L \circ (\theta_k(x))_{k\in\mathcal{I}} = \theta_i(x)$ olduğundan $p_i|_L \circ \theta = \theta_i$ olur.

Teklik için, bir başka $\theta' : X \to L$ fonksiyonunun da $\mathcal{D}$ için doğal olduğunu kabul edelim. Yani her $i \in \mathcal{I}$ için $p_i|_L \circ \theta' = \theta_i$ olsun. Bu durumda $\theta(x) = (\theta_k(x))_{k\in\mathcal{I}} = (p_k|_L \circ \theta'(x))_{k\in\mathcal{I}} = \theta'(x)$ olur. Böylece $\theta : X \to L$ fonksiyonu tektir.

■

Teorem 5.5.4 *$\mathcal{S}et$ kategorisinde bir $\left\{A_j \xrightarrow{\varphi_{ji}} A_i : i \precsim j\right\}_{i,j\in I}$ ters sistemi verilsin. Bu durumda;*

(1) $\varprojlim Hom(C, A_i) = Hom\left(C, \varprojlim A_i\right)$

(2) $\varprojlim Hom(A_i, C) = Hom\left(\varinjlim A_i, C\right)$

İspat.

(1) Örnek 5.2.4'den kovaryant Hom funktoru sağ adjoint olduğundan, limiti dolayısıyla ters limiti korur.

(2)

$$\begin{tikzcd}
& C & \\
& \varinjlim A_i \arrow[u, dashed, "\theta_x"'] & \\
A_i \arrow[ur, "\psi_i"] \arrow[rr, "\varphi_{ij}"'] \arrow[uur, bend left, "\theta_{i,x}"] & & A_j \arrow[ul, "\psi_j"'] \arrow[uul, bend right, "\theta_{j,x}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, dashed, "\theta"] \arrow[ddl, bend right, "\theta_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\theta_j"] & \\
& Hom(\varinjlim A_i, C) \arrow[dl, "Hom(\psi_i, C)"'] \arrow[dr, "Hom(\psi_j, C)"] & \\
Hom(A_i, C) & & Hom(A_j, C) \arrow[ll, "Hom(\varphi_{ij}, C)"]
\end{tikzcd}$$

Doğallık: *$Hom(-, C)$ kontravaryan bir funktor olduğundan soldaki diyagramdan,*

$$Hom\left(\varphi_{ij}, C\right) \circ Hom\left(\psi_j, C\right) = Hom\left(\psi_j \circ \varphi_{ij}, C\right) = Hom\left(\psi_i, C\right)$$

olur. Böylece

$$\left\{\varprojlim Hom\left(A_i, C\right) \overset{Hom(\psi_i, C)}{\longrightarrow} Hom\left(A_i, C\right)\right\}_{i \in I}$$

ailesi $Hom(-, C)$ için doğaldır.

Evrensellik: *$Hom(-, C)$ için doğal olan $\left\{X \overset{\theta_i}{\longrightarrow} Hom\left(A_i, C\right)\right\}_{i \in I}$ ailesi verilsin. Bu durumda her $x \in X$ için, $\theta_i(x) : X_i \to C$ olur. Bu fonksiyonu $\theta_{i,x}$ şeklinde gösterelim. Soldaki diyagramdan, her $i \in I$ için $\theta_{i,x} = \theta_x \circ \psi_i$ olacak şekilde bir tek $\theta_x : \varinjlim A_i \to C$ vardır. Şimdi $\theta : X \to Hom\left(\varinjlim A_i, C\right)$ fonksiyonunu, $\theta(x) = \theta_x$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda her $x \in X$ için,*

$$\begin{aligned}\left(Hom\left(\psi_i, C\right) \circ \theta\right)(x) &= Hom\left(\psi_i, C\right)\left(\theta(x)\right) \\ &= Hom\left(\psi_i, C\right)\left(\theta_x\right) = \theta_x \circ \psi_i = \theta_{i,x} = \theta_i(x)\end{aligned}$$

olur. Böylece $Hom(\psi_i, C) \circ \theta = \theta_i$ olur. Her $x \in X$ için θ_x morfizmi tek olduğundan, θ da tektir.

■

5.5.2. Cebirsel yapılarda ters limit

Teorem 5.5.5 *$\mathcal{D} := \left\{A_j \overset{\varphi_{ji}}{\longrightarrow} A_i : i \precsim j\right\}_{i,j \in \mathcal{I}}$ ters sisteminin ters limiti $\left\{L \overset{p_i|_L}{\to} A_i\right\}_{i \in \mathcal{I}}$ olmak üzere;*

(1) $\mathcal{D}$, $\mathcal{G}rp$ kategorisinde ise $\left\{L \overset{p_i|_L}{\to} A_i\right\}_{i \in \mathcal{I}}$ de $\mathcal{G}rp$ kategorisindedir.

(2) $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}b$ kategorisinde ise $\left\{L \overset{p_i|_L}{\to} A_i\right\}_{i \in \mathcal{I}}$ de $\mathcal{A}b$ kategorisindedir.

(3) $\mathcal{D}$, $\mathcal{R}ing$ kategorisinde ise $\left\{L \overset{p_i|_L}{\to} A_i\right\}_{i \in \mathcal{I}}$ de $\mathcal{R}ing$ kategorisindedir.

İspat.

(1) Her $i \in \mathcal{I}$ için A_i grup olduğundan $\prod_{i \in \mathcal{I}} A_i$ çarpım grubudur ve işlem de $(x_i)_{i \in \mathcal{I}} + (y_i)_{i \in \mathcal{I}} = (x_i + y_i)_{i \in \mathcal{I}}$ şeklinde A_i'deki işlemle tanımlanır.
Her $i, j \in \mathcal{I}$ için $i \precsim j$ ise $\varphi_{ji}(x_j - y_j) = \varphi_{ji}(x_j) - \varphi_{ji}(y_j) = x_i - y_i$ olduğundan, her $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}, (y_i)_{i \in \mathcal{I}} \in L$ için $(x_i)_{i \in \mathcal{I}} - (y_i)_{i \in \mathcal{I}} = (x_i - y_i)_{i \in \mathcal{I}} \in L$ olur. Dolayısıyla L gruptur.
Ayrıca her $i \in \mathcal{I}$ için,

$$\begin{aligned}p_i|_L\left((x_k)_{k \in \mathcal{I}} + (y_k)_{k \in \mathcal{I}}\right) &= p_i\left((x_k)_{k \in \mathcal{I}} + (y_k)_{k \in \mathcal{I}}\right) \\ &= p_i\left((x_k + y_k)_{k \in \mathcal{I}}\right) = x_i + y_i \\ &= p_i\left((x_k)_{k \in \mathcal{I}}\right) + p_i\left((y_k)_{k \in \mathcal{I}}\right) \\ &= p_i\left((x_k)_{k \in \mathcal{I}}\right) + p_i\left((y_k)_{k \in \mathcal{I}}\right) \\ &= p_i|_L\left((x_k)_{k \in \mathcal{I}}\right) + p_i|_L\left((y_k)_{k \in \mathcal{I}}\right)\end{aligned}$$

olduğundan $p_i|_L$ grup homomorfizmasıdır.

(2) Abel grupların çarpımı ve altgrupları da Abel grubu olduğundan $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}b$ kategorisinde ise $\mathcal{L}$ de $\mathcal{A}b$ kategorisindedir.

(3) Her $i \in \mathcal{I}$ için A_i birimli halka olduğundan $\prod\limits_{i\in\mathcal{I}} A_i$ çarpım halkasıdır ve birimlidir. Halka işlemi de $(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \cdot (y_i)_{i\in\mathcal{I}} = (x_i \cdot y_i)_{i\in\mathcal{I}}$ şeklinde A_i'deki işlemle tanımlanır. Her $i, j \in \mathcal{I}$ için $i \precsim j$ ise $\varphi_{ji}(x_j \cdot y_j) = \varphi_{ji}(x_j) \cdot \varphi_{ji}(y_j) = x_i \cdot y_i$ olduğundan, her $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}, (y_i)_{i\in\mathcal{I}} \in L$ için $(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \cdot (y_i)_{i\in\mathcal{I}} = (x_i \cdot y_i)_{i\in\mathcal{I}} \in L$ olur. Dolayısıyla L halkadır ve 1_i de A_i halkasının birimi olmak üzere, birimi $(1_i)_{i\in\mathcal{I}}$ olur. Çünkü φ_{ji} birimi koruduğundan $i \precsim j$ ise $\varphi_{ji}(1_j) = 1_i$ olur. Dolayısıyla $(1_i)_{i\in\mathcal{I}} \in L$ olur. Ayrıca her $i \in \mathcal{I}$ için,

$$\begin{aligned} p_i|_L\left((x_k)_{k\in\mathcal{I}} \cdot (y_k)_{k\in\mathcal{I}}\right) &= p_i\left((x_k)_{k\in\mathcal{I}} \cdot (y_k)_{k\in\mathcal{I}}\right) \\ &= p_i\left((x_k \cdot y_k)_{k\in\mathcal{I}}\right) = x_i \cdot y_i = p_i\left((x_k)_{k\in\mathcal{I}}\right) \cdot p_i\left((y_k)_{k\in\mathcal{I}}\right) \\ &= p_i\left((x_k)_{k\in\mathcal{I}}\right) \cdot p_i\left((y_k)_{k\in\mathcal{I}}\right) \\ &= p_i|_L\left((x_k)_{k\in\mathcal{I}}\right) \cdot p_i|_L\left((y_k)_{k\in\mathcal{I}}\right) \end{aligned}$$

olduğundan $p_i|_L$ halka homomorfizmasıdır ve $p_i|_L\left((1_k)_{k\in\mathcal{I}}\right) = 1_i$ olduğundan birimi korur.

■

Teorem 5.5.6 *$\mathcal{D} := \left\{A_j \xrightarrow{\varphi_{ji}} A_i : i \precsim j\right\}_{i,j\in I}$ ters sisteminin ters limiti $\left\{L \overset{p_i|_L}{\to} A_i\right\}_{i\in\mathcal{I}}$ olmak üzere;*

(1) $\mathcal{D}$, $\mathcal{G}rp$ kategorisinde ise $\mathcal{D}$'nin ters limiti de $\left\{L \overset{p_i|_L}{\to} A_i\right\}_{i\in\mathcal{I}}$'dir.

(2) $\mathcal{D}$, $\mathcal{A}b$ kategorisinde ise $\mathcal{D}$'nin ters limiti de $\left\{L \overset{p_i|_L}{\to} A_i\right\}_{i\in\mathcal{I}}$'dir.

(3) $\mathcal{D}$, $\mathcal{R}ing$ kategorisinde ise $\mathcal{D}$'nin ters limiti de $\left\{L \overset{p_i|_L}{\to} A_i\right\}_{i\in\mathcal{I}}$'dir.

İspat.

Doğallık: $\mathcal{S}et$ kategorisinde göstermiştik.

Evrensellik: $\mathcal{D}$ için doğal olan her $\left\{X \xrightarrow{\theta_i} A_i\right\}_{i\in\mathcal{I}}$ homomorfizmalar ailesine karşılık, $\theta(x) = (\theta_k(x))_{k\in\mathcal{I}}$ şeklinde tanımlanan $X \xrightarrow{\theta} L$ fonksiyonunun da homomorfizma olduğunu göstermek yeterlidir.

(1) Her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned} \theta(x+y) = (\theta_k(x+y))_{k\in\mathcal{I}} &= (\theta_k(x) + \theta_k(y))_{k\in\mathcal{I}} \\ &= (\theta_k(x))_{k\in\mathcal{I}} + (\theta_k(y))_{k\in\mathcal{I}} = \theta(x) + \theta(y) \end{aligned}$$

Böylece $A \xrightarrow{\theta} X$ fonksiyonu da grup homomorfizmasıdır.

(2) $X \xrightarrow{\theta} L$ grup homomorfizması olduğundan Abel grup homomorfizmasıdır.

(3) Her $x, y \in X$ için

$$\begin{aligned}\theta(x \cdot y) &= (\theta_k(x \cdot y))_{k\in\mathcal{I}} = (\theta_k(x) \cdot \theta_k(y))_{k\in\mathcal{I}} \\ &= (\theta_k(x))_{k\in\mathcal{I}} \cdot (\theta_k(y))_{k\in\mathcal{I}} = \theta(x) \cdot \theta(y)\end{aligned}$$

Böylece $A \stackrel{\theta}{\longrightarrow} X$ fonksiyonu da halka homomorfizmasıdır.

■

Teorem 5.5.7 *p bir asal sayı ve $\varphi_{ji}(x + p^j\mathbb{Z}) = x + p^i\mathbb{Z}$ şeklinde tanımlanan doğal izdüşüm fonksiyonları olmak üzere $\mathcal{D} := \left\{\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z} \stackrel{\varphi_{ji}}{\longrightarrow} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} : i \leq j\right\}_{i,j\in\mathbb{Z}^+}$ bir ters sistemdir ve ters limiti $\mathbb{Z}_p = \left\{\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i p^i : 0 \leq b_i < p\right\}$ olur.*

İspat. *$\varphi_{ii} : \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} = Id_{\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}}$ ve $i, j, k \in \mathcal{I}$ için $i \precsim j \precsim k$ ise $\varphi_{ki} = \varphi_{ji} \circ \varphi_{kj}$ olduğu aşikârdır. Dolayısıyla $\mathcal{D}$ bir ters sistemdir. Her $i \in \mathcal{I}$ için $\psi_i : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ fonksiyonunu $\psi_i\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k p^k\right) = \sum\limits_{k=0}^{i-1} b_k p^k$ şeklinde tanımlayalım.*

Doğallık: *$i, j \in I$ için $i \leq j$ olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned}\varphi_{ji}\left(\psi_j\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k\right)\right) &= \varphi_{ji}\left(\sum_{k=0}^{j-1} b_k p^k\right) = \sum_{k=0}^{j-1} \varphi_{ji}\left(b_k p^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} \varphi_{ji}\left(b_k p^k\right) + \sum_{k=i}^{j-1} \varphi_{ji}\left(b_k p^k\right) = \sum_{k=0}^{i-1} b_k p^k + 0 \\ &= \sum_{k=0}^{i-1} b_k p^k = \psi_i\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k p^k\right)\end{aligned}$$

olur.

Evrensellik: *$\mathcal{D}$ için doğal olan bir $\left\{X \stackrel{\theta_i}{\longrightarrow} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} : i \leq j\right\}_{i\in\mathbb{Z}^+}$ ailesi verilsin. Her $x \in X$ için;*

- *$\varphi_{21} \circ \theta_2 = \theta_1$ olduğundan $\theta_2(x) \equiv \theta_1(x) + b_1 p \pmod{p^2}$ olacak şekilde bir $0 \leq b_1 < p$ vardır.*
- *$\varphi_{32} \circ \theta_3 = \theta_2$ olduğundan $\theta_3(x) \equiv \theta_2(x) + b_2 p^2 \equiv \theta_1(x) + b_1 p + b_2 p^2 \pmod{p^3}$ olacak şekilde bir $0 \leq b_2 < p$ vardır.*

Benzer şekilde her $k \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\theta_{k+1}(x) \equiv \theta_k(x) + b_k p^k \equiv \theta_1(x) + \sum_{i=1}^{k} b_i p^i \left(\operatorname{mod} p^{i+1}\right)$$

olacak şekilde $b_1, b_2, \ldots, b_k$ vardır.

$b_0 := \theta_1(x)$ diyelim ve $\theta : X \to \mathbb{Z}_p$ fonksiyonunu, $\theta(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i p^i$ şeklinde tanımlayalım.

$$\psi_j(\theta(x)) = \psi_j\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i\right) = \sum_{i=0}^{j-1} b_i p^i = \theta_j(x)$$

olur.
Ayrıca bir başka $\theta' : X \to \mathbb{Z}_p$ fonksiyonu için de $\psi_j \circ \theta' = \theta_j$ olduğunu fakat $\theta' \neq \theta$ kabul edelim. Bu durumda bir $j \in \mathbb{Z}^+$ için $\psi_j \circ \theta' \neq \psi_j \circ \theta$ olur. Ama her $j \in \mathbb{Z}^+$ için $\psi_j \circ \theta' = \theta_j = \psi_j \circ \theta$ olduğundan bu mümkün değildir. Dolayısıyla $\theta : X \to \mathbb{Z}_p$ tektir.

■

Teoremde bulunan ters limite p-adik tamsayılar denir.Ters limit izomorfizma farkıyla tek olduğundan Teorem 5.5.3'den

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ (x_i)_{i \in \mathbb{Z}^+} \in \prod_{i \in \mathbb{Z}^+} \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \mid \text{her } i \precsim j \text{ için } x_i = \varphi_{ji}(x_j) \right\}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

$\mathbb{Z}_p$ halkası sıfır bölenli, sonlu halkaların limitidir fakat sıfır bölensiz ve sonsuz elemanlı bir halkadır. Dolayısıyla limit kavramı ile elde edilen halkaların cebirsel özellikleri de değişmektedir.

Cebirsel özelliklerin, limit altındaki davranışını incelemek bu tez için uzun bir çalışma olduğundan, yalnızca limit kavramı ile elde ettiğimiz, $\mathbb{Z}_p$'nin bazı cebirsel özelliklerini inceleyerek, limit altında cebirsel özelliklerin nasıl değişebileceğini görelim.

Teorem 5.5.8 *Bir $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i p^i$ p-adik tamsayısının tersinin olması için gerek ve yeter şart $b_0 \neq 0$ olmasıdır.*

İspat. $b_0 = 0$ ise tersi olamaz. Çünkü bir $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i p^i$ için $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i p^i \cdot \sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i p^i = 1$ olsaydı p, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i p^i$'yi böldüğünden 1'i de bölmesi gerekirdi.

Şimdi $b_0 \neq 0$ ise $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i p^i$'nin tersinin her zaman olduğunu gösterelim.

- Bunun için önce z bir p-adik tamsayı olmak üzere, $1 - pz$, p-adik tamsayısının tersine bakalım.

$$(1-pz)\sum_{i=0}^{\infty}(pz)^i=\sum_{i=0}^{\infty}(pz)^i-pz\sum_{i=0}^{\infty}(pz)^i=\sum_{i=0}^{\infty}(pz)^i-\sum_{i=0}^{\infty}(pz)^{i+1}$$
$$=(pz)^0+\sum_{i=1}^{\infty}(pz)^i-\sum_{i=1}^{\infty}(pz)^i=(pz)^0=1$$

olduğundan $1-pz$'nin tersi vardır ve $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(pz)^i$'dir.

- $b_0=1$ ise $\sum\limits_{i=0}^{\infty}b_ip^i=1+\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_ip^i=1-\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-b_i)\,p^i=1-p\sum\limits_{i=0}^{\infty}(-b_{i+1})\,p^i$ olur. $z:=\sum\limits_{i=0}^{\infty}(-b_{i+1})\,p^i$ dersek $\sum\limits_{i=0}^{\infty}b_ip^i=1-pz$ olur. Bunun da tersi vardır.
- $b_0\neq 1$ ise $b_0\neq 0$ olduğundan $b_0b_0^{-1}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,p)$ olacak şekilde bir $b_0^{-1}\in\mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan $\sum\limits_{i=0}^{\infty}c_ip^i:=b_0^{-1}\sum\limits_{i=0}^{\infty}b_ip^i$ p-adik tamsayısı için $c_0=1$ olduğundan tersi vardır.

■

Teorem 5.5.9 *$\mathbb{Z}_p$ tamlık bölgesidir.*

İspat. Her $i\in\mathbb{Z}^+$ için $\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ birimli ve değişmeli halka olduğundan $\mathbb{Z}_p$ de birimli ve değişmeli halkadır. Sıfır bölensizlik için, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ip^i$ ve $\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_ip^i$ tersi olmayan iki p-adik tamsayı ve $b_j\neq 0$ olmak üzere $\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ip^i\right)\left(\sum\limits_{i=j}^{\infty}b_ip^i\right)=0=\sum\limits_{k=1+j}^{\infty}0p^k$ olduğunu kabul edelim.

$k=1+j$ için: $a_1b_j\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$ olur. p asal olduğundan $p|a_1$ veya $p|b_j$ olmalıdır. $b_j\neq 0$ olduğundan $a_1=0$ olur.
$k=2+j$ için: $a_2b_j\equiv a_1b_{j+1}+a_2b_j\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$ olur. Buradan $a_2=0$ olur.
$k=3+j$ için: $a_3b_j\equiv a_1b_{j+2}+a_2b_{j+1}+a_3b_j\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$ olur. Buradan da $a_3=0$ olur.

Benzer şekilde devam edilirse her $k=1+j,2+j,\ldots$ için $a_{k-j}=0$ olduğu görülür. Böylece $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_ip^i=\sum\limits_{k=1+j}^{\infty}0p^k=0$ olur. Dolayısıyla $\mathbb{Z}_p$ sıfır bölensizdir ve tamlık bölgesidir. ■

Teorem 5.5.10 *$\mathbb{Z}_p$'nin idealleri $p^n\mathbb{Z}_p$ şeklindedir ve tek maksimal ideali de $p\mathbb{Z}_p$'dir. Ayrıca $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p\cong\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$'dir.*

İspat. *$a\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p$'nin 0'dan farklı bir ideali olsun.*

$a\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$ ise $a^{-1}\in\mathbb{Z}_p$ olduğundan $a\mathbb{Z}_p=\mathbb{Z}_p$ olur.

$a\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$ ise $a=p^n$ olacak şekilde bir $n\in\mathbb{Z}^+$ vardır. Böylece $\mathbb{Z}_p$'nin kendisinden başka idealleri $p^n\mathbb{Z}_p$ şeklindedir ve $p\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p$'nin tek maksimal idealidir.

$f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ homomorfizmasını $f\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i\right) = \bar{b}_0$ şeklinde tanımlayalım. Bunun örten bir homomorfizma olduğu aşikârdır ve çekirdeği de $p\mathbb{Z}_p$ olur. Dolayısıyla homomorfizma teoreminden $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ olur. ■

6. KAYNAKLAR

Adámek, J., Herrlich, H. and Strecker, G. 1990. Abstract and concrete categories. Wiley-Interscience, USA. http://katmat.math.uni-bremen.de/acc (Son erişim tarihi: 20.5.2014).

Anderson, F.W. and Fuller, K.R. 1992. Rings and Categories of Modules (Graduate Texts in Mathematics). Springer, New York.

Lane, S.M. 1998 Categories for the Working Mathematician (Graduate Texts in Mathematics). Springer, New York.

Dummit, D.S. and Foote, R.M. 2003. Abstract Algebra, 3rd Edition. Wiley, USA.

Hungerford, T.W. 2003. Algebra (Graduate Texts in Mathematics) (v. 73). Springer, New York.

Kasch, F. 1983. Modules and Rings: A Translation of Moduln Und Ringe (London Mathematical Society Monographs). Academic Pr, London.

Mucuk, O. 2010. Topoloji ve kategori. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Rotman, J.J. 2002. Advanced Modern Algebra. Prentice Hall, New Jersey.

Sharpe 1972. Injective Modules (Cambridge Tracts in Mathematics), Cambridge University Press, Cambridge.

Tholen, W. 2008. Injectivity versus exponentiability. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, 49(3): 228-240.

Vermani, L. 2003. An Elementary Approach to Homological Algebra (Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics). CRC Press, Florida.

ÖZGEÇMİŞ

Naci Er, 1979 Bayburt doğumludur. İlk, orta ve lise öğrenimini Eskişehir'de tamamladı. 2009 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü bitirdi. 2011 yılında Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü, Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı'nda yüksek lisansa başladı. 2012 yılında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'na araştırma görevlisi olarak atandı ve yüksek lisansa burada devam etti.