GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

k- LUCAS HİPERBOLİK, YARI-HİPERBOLİK TRIBONACCI VE YARI-HİPERBOLİK TRIBONACCI-LUCAS FONKSİYONLARI

Huriye AZMAN

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2014

Huriye AZMAN tarafından hazırlanan "k- LUCAS HİPERBOLİK, YARI-HİPERBOLİK TRIBONACCI VE YARI-HİPERBOLİK TRIBONACCI-LUCAS FONKSİYONLARI " adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ / OY ÇOKLUĞU ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum …………………..

Başkan : Unvanı Adı SOYADI

AnabilimDalı, ÜniversiteAdı

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ……………………

Üye : Unvanı Adı SOYADI

AnabilimDalı,ÜniversiteAdı

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum …………………...

Üye : Unvanı Adı SOYADI

AnabilimDalı,ÜniversiteAdı

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ……………………

Üye : Unvanı Adı SOYADI

AnabilimDalı,ÜniversiteAdı

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ……………………

TezSavunmaTarihi: ..../……./……

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………….…….

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Huriye AZMAN
25.07.2014

k - LUCAS HİPERBOLİK,
YARI-HİPERBOLİK TRIBONACCI VE
YARI-HİPERBOLİK TRIBONACCI-LUCAS FONKSİYONLARI
(Doktora Tezi)

Huriye AZMAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2014

ÖZET

Bu çalışmada *k*- Lucas hiperbolik fonksiyonları tanımlanarak, bu fonksiyonların *k*- Lucas sayılarıyla olan ilişkisi ve bazı hiperbolik özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, *k*- Lucas hiperbolik fonksiyonları ile *k*-Fibonacci hiperbolik fonksiyonları arasındaki bağıntılar incelenmiştir. Yarı-sinüs *k*- Lucas fonksiyonlarından ve *k*- Lucas hiperbolik fonksiyonları için üç boyutlu eğri ve yüzeylerden bahsedilmiştir. Son olarak, yarı-hiperbolik Tribonacci ve yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas fonksiyonlarının tanımları verilmiş ve bu fonksiyonların bazı rekürans ve hiperbolik özellikleri incelenmiştir.

BilimKodu	:	204. 1. 025
AnahtarKelimeler	:	Hiperbolik fonksiyonlar, Fibonacci sayıları, Lucas sayıları, Tribonacci sayıları, Tribonacci-Lucas sayıları, Binet formulü
SayfaAdedi	:	80
Danışman	:	Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

THE k - LUCAS HYPERBOLIC,
QUASI-HYPERBOLIC TRIBONACCI AND
QUASI-HYPERBOLIC TRIBONACCI-LUCAS FUNCTIONS
(Ph. D. Thesis)

Huriye AZMAN

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
July 2014

ABSTRACT

In this study, we define *k*-Lucas hyperbolic functions and study their hyperbolic and recurrence properties, and investigate the relations between this new *k*-Lucas hyperbolic functions and the *k*-Fibonacci hyperbolic functions. We study the quasi-sine Lucas functions. Also, we define 3D curves and surfaces for the *k*-Lucas hyperbolic functions. Finally, we define quasi-hyperbolic Tribonacci and quasi-hyperbolic Tribonacci-Lucas functions, likewise, study recurrence and hyperbolic properties of these new functions.

ScienceCode	:	204. 1. 025
KeyWords	:	Hiperbolik functions, Fibonacci numbers, Lucas numbers, Tribonacci numbers, Tribonacci-Lucas numbers, Binet formulas
PageNumber	:	80
Supervisor	:	Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken beni yönlendiren, kaynaklarla destekleyen, fikirleriyle yol gösteren, değerli zamanlarını bana ayıran ve bana her zaman bir baba şefkatiyle yaklaşan saygıdeğer hocam Prof. Dr. Dursun TAŞÇI' ya ve yine tecrübelerinden yararlandığım değerli hocam Doç. Dr. Naim TUĞLU' ya teşekkürü borç bilirim. Ayrıca beni maddi ve manevi destekleriyle hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
F_n	n-inci Fibonacci sayısı
L_n	n-inci Lucas sayısı
sF(x)	Hiperbolik Fibonacci sinüs fonksiyonu
cF(x)	Hiperbolik Fibonacci kosinüs fonksiyonu
sL(x)	Hiperbolik Lucas sinüs fonksiyonu
cL(x)	Hiperbolik Lucas kosinüs fonksiyonu
sFs(x)	Simetrik Fibonacci sinüs fonksiyonu
cFs(x)	Simetrik Fibonacci kosinüs fonksiyonu
sLs(x)	Simetrik Lucas sinüs fonksiyonu
cLs(x)	Simetrik Lucas kosinüs fonksiyonu
$F_{k,n}$	n-inci $k-$Fibonacci sayısı
$sF_kh(x)$	$k-$ Fibonacci hiperbolik sinüs fonksiyonu
$cF_kh(x)$	$k-$ Fibonacci hiperbolik kosinüs fonksiyonu
$FF_k(x)$	Yarı-sinüs $k-$ Fibonacci fonksiyonu
$CFF_k(x)$	Üç-boyutlu $k-$ Fibonacci spirali
$L_{k,n}$	n-inci $k-$Lucas sayısı
$sL_kh(x)$	$k-$ Lucas hiperbolik sinüs fonksiyonu
$cL_kh(x)$	$k-$ Lucas hiperbolik kosinüs fonksiyonu
$LL_k(x)$	Yarı-sinüs $k-$ Lucas fonksiyonu
$CLL_k(x)$	Üç-boyutlu $k-$ Lucas spirali
U_n	n -inci Tribonacci sayısı

Simgeler	Açıklamalar
V_n	n -inci Tribonacci-Lucas sayısı
sTh(x)	Yarı-hiperbolik Tribonacci sinüs fonksiyonu
cTh(x)	Yarı-hiperbolik Tribonacci kosinüs fonksiyonu
sTLh(x)	Yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas sinüs fonksiyonu
cTLh(x)	Yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas kosinüs fonksiyonu

1.GİRİŞ

Problem Durumu/ Konunun Tanımı

1993 yılında Stakhov ve Tkachenko hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları olarak adlandırdıkları yeni bir hiperbolik fonksiyon tanımladılar [1]. Sonra, 2005 ve 2007 yıllarında Stakhov ve Rozin simetrik hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonlarının tanımlarını verdiler [2, 7]. 2005 yılında da "Golden Shofar" tanımını yaptılar [4]. Ardından, aynı yazarlar 2006 yılında Fibonacci ve Lucas sayılarının genelleştirilmişi olan Fibonacci ve Lucas p- sayılarını tanımladılar [6]. 2006 yılında, Stakhov simetrik hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonlarının genellemesi olan hiperbolik Fibonacci ve Lucas m- fonksiyonlarını tanımladı [8]. Sonra, 2008 yılında Falcon ve Plaza k- Fibonacci hiperbolik fonksiyonlarını tanımladılar [11]. Daha sonra da, yine 2008 yılında Koçer, Tuğlu ve Stakhov ikinci mertebeden rekürans dizilerine ait hiperbolik fonksiyonları tanımladılar [13].

Biz de bu çalışmada, k- Lucas hiperbolik fonksiyonları tanımlayıp bu fonksiyonların bazı rekürans ve hiperbolik özelliklerinden, yarı- sinüs k- Lucas fonksiyonlarından ve k-Lucas hiperbolik fonksiyonları için 3 boyutlu eğri ve yüzeylerden bahsedeceğiz. Daha sonra, hiperbolik fonksiyon tanımını üçüncü mertebeden rekürans dizilerine genişletmeye çalışacağız. Yarı- hiperbolik Tribonacci ve yarı- hiperbolik Tribonacci- Lucas fonksiyonlarının tanımlarını verip, benzer şekilde, bu fonksiyonların rekürans ve hiperbolik özelliklerinden bahsedeceğiz.

Araştırmanın Amacı

Araştırmanın amacı, şimdiye kadar ikinci mertebeden rekürans dizileri için tanımlanmış olan hiperbolik fonksiyonları önce, özel olarak, k- Lucas fonksiyonları için tanımlayıp, daha sonra da üçüncü mertebeden rekürans dizilerine genişleterek bu sayede bu dizilerin sürekli birer versiyonlarını elde etmektir.

Araştırmanın Önemi

Yaptığımız bu araştırma sayesinde üçüncü mertebeden rekürans dizilerinin sürekli versiyonları elde edilmiş oldu.

2. HİPERBOLİK FIBONACCI VE LUCAS FONKSİYONLARI

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas dizilerine ait bazı ön bilgiler verilecektir. Sonra A. Stakhov ve B. Rozin'in "On a new class of hyperbolic functions" [2] adlı çalışmada tanımlamış oldukları hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonlarının tanımları verilip bu fonksiyonların rekürans ve hiperbolik özelliklerinden bahsedilecektir.

2.1. Fibonacci ve Lucas Sayıları

Başlangıç şartları

$F_0 = 0, F_1 = 1$ olmak üzere

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ , n \geq 2 \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanan rekürans bağıntısından elde edilen sayılara Fibonacci sayıları denir. Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine Fibonacci dizisi denir. Burada F_n, n-inci Fibonacci sayısını göstermektedir. Dizinin bazı terimleri aşağıdaki gibidir:

$$\{F_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots\}.$$

Başlangıç şartları

$L_0 = 2, L_1 = 1$ olmak üzere

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}\ , n \geq 2 \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanan rekürans bağıntısından elde edilen sayılara Lucas sayıları denir. Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine Lucas dizisi denir. Burada L_n, n-inci Lucas sayısını göstermektedir. Lucas dizisinin bazı terimleri aşağıda verilmiştir:

$$\{L_n\} = \{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots\}.$$

$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ olmak üzere $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$ şeklinde tanımlanan Fibonacci rekürans bağıntısını ele alalım. Bu rekürans bağıntısının bir çözümünün, x sıfırdan farklı bir sayı olmak üzere, $F_n = x^n$ şeklinde olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} x^n = x^{n-1} + x^{n-2} &\Rightarrow x^{n-2}x^2 = x^{n-2}x + x^{n-2} \\ &\Rightarrow x^{n-2}x^2 = x^{n-2}(x+1) \\ &\Rightarrow x^2 = x+1 \\ &\Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \end{aligned}$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{2.3}$$

dir.

F_n, n -inci Fibonacci sayısı ve $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.4}$$

eşitliği geçerli olup, buna Fibonacci sayıları için Binet formülü denir.

Benzer şekilde, L_n n -inci Lucas sayısı ve $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \tag{2.5}$$

eşitliği geçerlidir. Bu ifadeye de, Lucas sayıları için Binet formülü denir.

$\beta = -\frac{1}{\alpha}$ eşitliği göz önüne alınarak, (2.4) ve (2.5) Binet formülleri yerlerine, sırasıyla

$$F_n = \frac{\alpha^n - (-1)^n \alpha^{-n}}{\alpha + \alpha^{-1}} \ , \tag{2.6}$$

$$L_n = \alpha^n + (-1)^n \alpha^{-n} \tag{2.7}$$

eşitlikleri yazılabilir.

2.2. Hiperbolik Fibonacci ve Lucas Fonksiyonları

F_n, n -inci Fibonacci sayısı ve L_n , n -inci Lucas sayısı ve k bir tamsayı olmak üzere

$n = 2k$ için $F_{2k} = -F_{-2k}$, $L_{2k} = L_{-2k}$,

$n = 2k+1$ için $F_{2k+1} = F_{-2k-1}$, $L_{2k+1} = -L_{-2k-1}$

dır. Gerçekten, n in bazı değerlerine karşılık gelen Fibonacci ve Lucas sayıları aşağıdaki tablodaki gibidir:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76
L_{-n}	2	-1	3	-4	7	-11	18	-29	47	-76

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve k bir tamsayı olmak üzere Fibonacci ve Lucas fonksiyonlarını

$$F_n = \begin{cases} \frac{\alpha^{2k+1} + \alpha^{-(2k+1)}}{\sqrt{5}}, & n = 2k+1 \text{ ise} \\ \frac{\alpha^{2k} - \alpha^{-2k}}{\sqrt{5}}, & n = 2k \text{ ise} \end{cases} \quad , \quad L_n = \begin{cases} \alpha^{2k} + \alpha^{-2k}, & n = 2k \text{ ise} \\ \alpha^{2k+1} - \alpha^{-(2k+1)}, & n = 2k+1 \text{ ise} \end{cases} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlayabiliriz [2].

(2.8) deki ayrık değişken *k* yerine sürekli değişken *x* reel sayısının alınmasıyla aşağıdaki sürekli fonksiyonlar tanımlanmıştır [2]:

Hiperbolik Fibonacci sinüs fonksiyonu:

$$sF(x) = \frac{\alpha^{2x} - \alpha^{-2x}}{\sqrt{5}} \tag{2.9}$$

Hiperbolik Fibonacci kosinüs fonksiyonu:

$$cF(x) = \frac{\alpha^{2x+1} + \alpha^{-(2x+1)}}{\sqrt{5}} \tag{2.10}$$

Hiperbolik Lucas sinüs fonksiyonu:

$$sL(x) = \alpha^{2x+1} - \alpha^{-(2x+1)} \tag{2.11}$$

Hiperbolik Lucas kosinüs fonksiyonu:

$$cL(x) = \alpha^{2x} + \alpha^{-2x}\,. \tag{2.12}$$

Daha sonra Fibonacci ve Lucas sayları için bilinen Binet formülleri, ve klasik hiperbolik fonksiyonlardan hareketle

Simetrik Fibonacci sinüs fonksiyonu:

$$sFs(x) = \frac{\alpha^{x} - \alpha^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{2.13}$$

Simetrik Fibonacci kosinüs fonksiyonu:

$$cFs(x) = \frac{\alpha^{x} + \alpha^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{2.14}$$

Simetrik Lucas sinüs fonksiyonu:

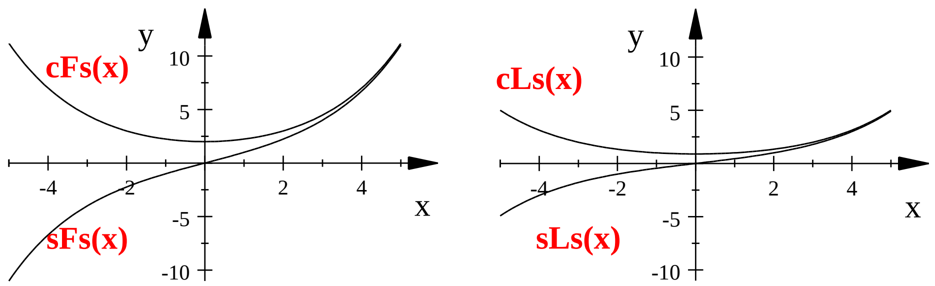
$$sLs(x) = \alpha^{x} - \alpha^{-x} \tag{2.15}$$

Simetrik Lucas kosinüs fonksiyonu:

$$cLs(x) = \alpha^{x} + \alpha^{-x} \tag{2.16}$$

tanımlarını vermişlerdir [2].

Bu fonksiyonların grafiklerine bakıldığında; simetrik Fibonacci kosinüs ve simetrik Lucas kosinüs fonksiyonlarının y-eksenine, simetrik Fibonacci sinüs ve simetrik Lucas sinüs fonksiyonlarının ise orjine göre simetrik oldukları görülmektedir.



Şekil 2.1. Simetrik hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları

<u>Simetrik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları ile klasik Fibonacci ve Lucas sayıları</u>

Simetrik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları için indirgeme bağıntılarını aşağıdaki teoremle ifade edebiliriz [2]:

2.2.1. Teorem

Simetrik hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları için

$i)\ sFs(x+2)=cFs(x+1)+sFs(x)$
$ii)\ cFs(x+2)=sFs(x+1)+cFs(x)$
$iii)\ sLs(x+2)=cLs(x+1)+sLs(x)$
$iv)\ cLs(x+2)=sLs(x+1)+cLs(x)$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

$$
\begin{aligned}
i)\ cFs(x+1)+sFs(x) &= \frac{\alpha^{x+1}+\alpha^{-x-1}}{\sqrt{5}}+\frac{\alpha^{x}-\alpha^{-x}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\alpha^{x}(\alpha+1)-\alpha^{-x}(1-\alpha^{-1})}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\alpha^{x}\alpha^{2}-\alpha^{-x}\alpha^{-2}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\alpha^{x+2}-\alpha^{-x-2}}{\sqrt{5}} \\
&= sFs(x+2).
\end{aligned}
$$

Diğer eşitliklerin ispatları da benzer şekilde kolayca görülür.

Klasik Fibonacci sayıları için var olan

$$F_n^{\ 2}-F_{n+1}F_{n-1}=\left(-1\right)^{n+1}$$

Cassini eşitliğine benzer olarak, simetrik hiperbolik Fibonacci fonksiyonları için de aşağıdaki eşitlikler verilebilir [2]:

2.2.2. Teorem

$i)\ \left[sFs(x)\right]^2-cFs(x+1)cFs(x-1)=-1$
$ii)\ \left[cFs(x)\right]^2-sFs(x+1)sFs(x-1)=1$

dir.

İspat

İlk eşitliğin ispatını verelim. İkinci eşitlik de benzer düşünce ile yapılır.

$$
\begin{aligned}
i)\ \left[sFs(x)\right]^2 - cFs(x+1)cFs(x-1) &= \left[\frac{\alpha^{x}-\alpha^{-x}}{\sqrt{5}}\right]^2 - \left(\frac{\alpha^{x+1}+\alpha^{-x-1}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^{x-1}+\alpha^{-x+1}}{\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{\alpha^{2x}-2+\alpha^{-2x}-(\alpha^{2x}+\alpha^{2}+\alpha^{-2}+\alpha^{-2x})}{5} \\
&= \frac{-(2+\alpha^{2}+\alpha^{-2})}{5} \\
&= \frac{-(2+\alpha+1+2-\alpha)}{5} \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

Klasik Lucas sayıları için var olan

$$L_n^{\ 2} - 2\left(-1\right)^n = L_{2n}$$

eşitliğine benzer olarak, simetrik hiperbolik Lucas fonksiyonları için de aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [2]:

2.2.3. Teorem

$$i)\ \left[sLs(x)\right]^2 + 2 = cLs(2x)$$

$$ii)\ \left[cLs(x)\right]^2 - 2 = cLs(2x)$$

eşitlikleri vardır.

Klasik Fibonacci ve Lucas sayılarındaki

$$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$$

eşitliğine benzer olarak aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz [2]:

2.2.4. Teorem

$$i)\ cFs(x+1)+cFs(x-1)=cLs(x)$$
$$ii)\ sFs(x+1)+sFs(x-1)=sLs(x)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Klasik Fibonacci ve Lucas sayılarındaki

$$F_n+L_n=2F_{n+1}$$

eşitliğine benzer olarak aşağıdaki eşitlikler verilebilir [2]:

2.2.5. Teorem

$$i)\ cFs(x)+sLs(x)=2sFs(x+1)$$
$$ii)\ sFs(x)+cLs(x)=2cFs(x+1)$$

eşitlikleri vardır.

<u>Simetrik Fibonacci ve Lucas fonksiyonlarının hiperbolik özellikleri</u>

Bilindiği üzere klasik hiperbolik fonksiyonlar için

$$\left[ch(x)\right]^2-\left[sh(x)\right]^2=1$$

eşitliği geçerlidir. Buradan hareketle aşağıdaki teoremi verebiliriz [2]:

2.2.6. Teorem

$$\left[cFs(x)\right]^2-\left[sFs(x)\right]^2=\frac{4}{5}$$

eşitliği doğrudur.

İspat

$$\begin{aligned}
\left[cFs(x)\right]^2-\left[sFs(x)\right]^2 &= \left(\frac{\alpha^x+\alpha^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{\alpha^x-\alpha^{-x}}{\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{\alpha^{2x}+2+\alpha^{-2x}-\alpha^{2x}+2-\alpha^{-2x}}{5} \\
&= \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Klasik hiperbolik fonksiyonlarda var olan

$$ch(x\pm y)=ch(x)ch(y)\pm sh(x)sh(y)$$
$$sh(x\pm y)=sh(x)ch(y)\pm ch(x)sh(y)$$

toplam-fark eşitliklerine benzer olarak, simetrik hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonları için de aşağıdaki teoremi ifade ediyoruz [2]:

2.2.7. Teorem

$i)$ $\dfrac{2}{\sqrt{5}}cFs(x\pm y)=cFs(x)cFs(y)\pm sFs(x)sFs(y)$

$ii)$ $\dfrac{2}{\sqrt{5}}sFs(x\pm y)=sFs(x)cFs(y)\pm cFs(x)sFs(y)$

dır.

İspat

$$\begin{aligned}
i)\ cFs(x)cFs(y)+sFs(x)sFs(y) &= \left(\frac{\alpha^x+\alpha^{-x}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^y+\alpha^{-y}}{\sqrt{5}}\right)+\left(\frac{\alpha^x-\alpha^{-x}}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\alpha^y-\alpha^{-y}}{\sqrt{5}}\right) \\
&= \frac{\alpha^{x+y}+\alpha^{x-y}+\alpha^{-x+y}+\alpha^{-x-y}+\alpha^{x+y}-\alpha^{x-y}-\alpha^{-x+y}+\alpha^{-x-y}}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2(\alpha^{x+y} + \alpha^{-x-y})}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{5}} cFs(x+y).$$

Diğer eşitliğin ispatı da benzer şekilde görülebilir.

Klasik hiperbolik fonksiyonlar için var olan

$$\left[ch(x)\right]^{(n)} = \begin{cases} sh(x), & n = 2k+1 \text{ ise} \\ ch(x), & n = 2k \text{ ise} \end{cases} \quad , \quad \left[sh(x)\right]^{(n)} = \begin{cases} ch(x), & n = 2k+1 \text{ ise} \\ sh(x), & n = 2k \text{ ise} \end{cases}$$

eşitliklerinden hareketle aşağıdaki teoremi verelim [2]:

2.2.8. Teorem

$$i) \ \left[cFs(x)\right]^{(n)} = \begin{cases} (\ln(\alpha))^n sFs(x), & n = 2k+1 \text{ ise} \\ (\ln(\alpha))^n cFs(x), & n = 2k \text{ ise} \end{cases}$$
$$ii) \ \left[sFs(x)\right]^{(n)} = \begin{cases} (\ln(\alpha))^n cFs(x), & n = 2k+1 \text{ ise} \\ (\ln(\alpha))^n sFs(x), & n = 2k \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

İspat

$$i) \ \left[cFs(x)\right]' = \left(\frac{\alpha^x + \alpha^{-x}}{\sqrt{5}}\right)' = \frac{\alpha^x \ln(\alpha) - \alpha^{-x} \ln(\alpha)}{\sqrt{5}} = \ln(\alpha) sFs(x)$$
$$\left[cFs(x)\right]'' = (\ln(\alpha) sFs(x))' = \ln(\alpha)\left(\frac{\alpha^x - \alpha^{-x}}{\sqrt{5}}\right)' = \left[\ln(\alpha)\right]^2 cFs(x)$$
$$\vdots$$
$$\left[cFs(x)\right]^{(n)} = \begin{cases} (\ln(\alpha))^n sFs(x), & n = 2k+1 \\ (\ln(\alpha))^n cFs(x), & n = 2k \end{cases}$$

$$ii)\ \left[sFs(x)\right]' = \left(\frac{\alpha^x - \alpha^{-x}}{\sqrt{5}}\right)' = \frac{\alpha^x \ln(\alpha) + \alpha^{-x}\ln(\alpha)}{\sqrt{5}} = \ln(\alpha)cFs(x)$$

$$\left[sFs(x)\right]'' = (\ln(\alpha)cFs(x))' = \ln(\alpha)\left(\frac{\alpha^x + \alpha^{-x}}{\sqrt{5}}\right)' = \left[\ln(\alpha)\right]^2 sFs(x)$$

$$\vdots$$

$$\left[sFs(x)\right]^{(n)} = \begin{cases} (\ln(\alpha))^n cFs(x), & n = 2k+1 \\ (\ln(\alpha))^n sFs(x), & n = 2k \end{cases}$$

elde edilir.

2.2.9. Teorem

$$i)\ \left[cFs(x) \pm sFs(x)\right]^n = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n-1} \left[cFs(nx) \pm sFs(nx)\right]$$

$$ii)\ \left[cLs(x) \pm sLs(x)\right]^n = 2^{n-1}\left[cFs(nx) \pm sFs(nx)\right]$$

eşitlikleri vardır [2].

İspat

Bu teoremin ispatı Teorem 2.2.6 nın ispatına benzer şekilde yapılabilir.

3. *k*-FIBONACCI HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

3.1 . *k*- Fibonacci Sayıları

Herhangi bir pozitif k reel sayısı ve $n \geq 1$ tamsayısı için

$$F_{k,\,n+1} = k.F_{k,\,n} + F_{k,\,n-1}\ ,$$
$$F_{k,\,0} = 0,\ \ F_{k,\,1} = 1 \qquad (3.\ 1)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı ile tanımlanan sayılara $k-$Fibonacci sayıları denir [11]. Bu sayıların oluşturduğu diziye $k-$Fibonacci dizisi denir ve $\left\{F_{k,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ile gösterilir. Bazı $k-$ Fibonacci sayıları:

$$F_{k,\,0} = 0$$
$$F_{k,\,1} = 1$$
$$F_{k,\,2} = k$$
$$F_{k,\,3} = k^2 + 1$$
$$F_{k,\,4} = k^3 + 2k$$
$$F_{k,\,5} = k^4 + 3k^2 + 1$$
$$F_{k,\,6} = k^5 + 4k^3 + 3k$$

şeklindedir.

Özel olarak, $k = 1$ için

$$F_0 = 0,\ \ F_1 = 1,\ \ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}\ ,\ \ n \geq 1$$

rekürans bağıntısıyla tanımlı $0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ ...$ şeklinde klasik Fibonacci sayıları elde edilir.

$k = 2$ için

$$P_0 = 0,\ P_1 = 1,\ P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}\ ,\ n \geq 1$$

rekürans bağıntısıyla tanımlı $0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ ...$ şeklinde Pell sayıları elde edilir.

$k-$Fibonacci sayılarının rekürans bağıntısı için karakteristik denklem:

$$\sigma^2 = k\sigma + 1 \tag{3. 2}$$

şeklindedir.

Bu karakteristik denklem aşağıdaki iki reel köke sahiptir:

$$\sigma_1 = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2},\ \sigma_2 = \frac{k - \sqrt{k^2 + 4}}{2}. \tag{3. 3}$$

σ_1, σ_2, (3. 2) karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere, $k-$Fibonacci sayıları için Binet formülü :

$$F_{k,\,n} = \frac{\sigma_1^n - \sigma_2^n}{\sigma_1 - \sigma_2} \tag{3. 4}$$

şeklindedir.

$\sigma_2 = -\frac{1}{\sigma_1}$ eşitliğini kullanarak, bu Binet formülünü aşağıdaki gibi de yazabiliriz:

$$F_{k,\,n} = \frac{\sigma_1^n - (-1)^n \sigma_1^{-n}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}}. \tag{3. 5}$$

3.2. *k*- Fibonacci Hiperbolik Fonksiyonları

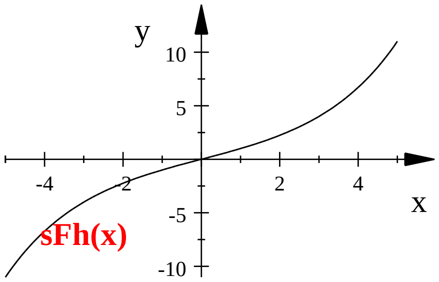
Bilindiği gibi klasik hiperbolik fonksiyonlar, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

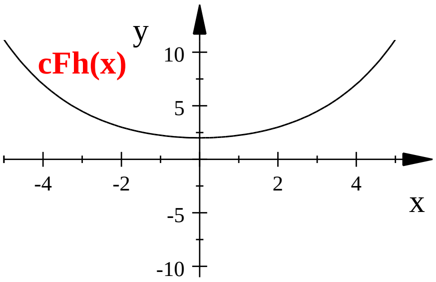
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

olarak; Fibonacci hiperbolik sinüs ve Fibonacci hiperbolik kosinüs fonksiyonları da, sırasıyla, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere

$$sFh(x) = \frac{\alpha^{2x} - \alpha^{-2x+1}}{\sqrt{5}}$$
$$cFh(x) = \frac{\alpha^{2x+1} + \alpha^{-(2x+1)}}{\sqrt{5}}$$

şeklinde tanımlanmıştır [2]. Bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibidir:





Şekil 3.1. Fibonacci hiperbolik fonksiyonları: $sFh(x)$ ve $cFh(x)$

Şimdi, tanımlanmış olan bu fonksiyonları, $k-$Fibonacci hiperbolik fonksiyonlarına aşağıdaki gibi genişletebiliriz [11]:

$\sigma_1 = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, (3. 2) karakteristik denkleminin pozitif kökü olmak üzere

$$sF_k h(x) = \frac{\sigma_1^{2x} - \sigma_1^{-2x}}{\sqrt{k^2+4}}$$
$$cF_k h(x) = \frac{\sigma_1^{2x+1} + \sigma_1^{-(2x+1)}}{\sqrt{k^2+4}} \qquad (3.\ 6)$$

sırasıyla, $k-$Fibonacci hiperbolik sinüs ve $k-$Fibonacci hiperbolik kosinüs fonksiyonları olarak adlandırılan eşitlikler yazılır.

$sF_k h(x)$ fonksiyonu tek fonksiyon olduğundan, grafiği orjine göre simetrik iken; $cF_k h(x)$ bir çift fonksiyon olup onun grafiği de $x=-\frac{1}{2}$ doğrusuna göre simetriktir. Burada $2x+1=t$ değişken değiştirmesi yaparsak, $cF_k h(x)$ fonksiyonu $t=0$ eksenine göre simetrik olur. Bu yüzden, bundan böyle, $k-$Fibonacci hiperbolik sinüs ve $k-$Fibonacci hiperbolik kosinüs fonksiyonlarını, sırasıyla, $\sigma_1+\sigma_1^{-1}=\sqrt{k^2+4}$ olmak üzere

$$sF_k h(x)=\frac{\sigma_1^x-\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}$$

$$cF_k h(x)=\frac{\sigma_1^x+\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}} \tag{3. 7}$$

şeklinde tanımlayacağız [11]. (3.6) da, özel olarak $k=1$ alınırsa, bu fonksiyonların grafikleri Şekil 3.1 deki gibi olur.

Burada, eğer $x=2n$ şeklinde bir çift sayı ise $sF_k h(x)=F_{k,2n}$; eğer $x=2n+1$ şeklinde bir tek sayı ise $cF_k h(x)=F_{k,2n+1}$ eşitlikleri sağlanmaktadır. Yani, $k-$Fibonacci sayıları ile $k-$Fibonacci hiperbolik fonksiyonları arasında aşağıdaki eşitlik vardır [11]:

$$cF_k h(2n+1)=F_{k,\,2n+1}$$
$$sF_k h(2n)=F_{k,\,2n}.$$

$k-$Fibonacci hiperbolik fonksiyonları ile klasik hiperbolik fonksiyonları arasında da

$$sF_k h(x)=\frac{2}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\sinh(x\ln\sigma_1)$$

$$cF_k h(x)=\frac{2}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\cosh(x\ln\sigma_1)$$

eşitlikleri bulunmaktadır [11].

k-Fibonacci hiperbolik fonksiyonlarının hiperbolik özellikleri

Şimdi, $k-$Fibonacci hiperbolik fonksiyonlarının klasik hiperbolik fonksiyonlara ait bazı özellikleri ile benzerlik gösteren özelliklerinden bahsedeceğiz.

3.2.1. Teorem

$k-$Fibonacci hiperbolik fonksiyonları için

$$\left[cF_kh(x)\right]^2-\left[sF_kh(x)\right]^2=\frac{4}{k^2+4}$$

eşitliği sağlanır [11].

İspat

$$\begin{aligned}\left[cF_kh(x)\right]^2-\left[sF_kh(x)\right]^2 &= (\frac{\sigma_1^x+\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}})^2-(\frac{\sigma_1^x-\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}})^2\\ &= \frac{\sigma_1^{2x}+2+\sigma_1^{-2x}-\sigma_1^{2x}+2-\sigma_1^{-2x}}{\left(\sigma_1+\sigma_1^{-1}\right)^2}\\ &= \frac{4}{k^2+4}.\end{aligned}$$

3.2.2. Teorem

$k-$Fibonacci hiperbolik fonksiyonları için aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz [11]:

$$i)\ \ cF_kh(x+y)=\frac{\sqrt{k^2+4}}{2}\left[cF_kh(x)cF_kh(y)+sF_kh(x)sF_kh(y)\right]$$

$$ii)\ \ cF_kh(x-y)=\frac{\sqrt{k^2+4}}{2}\left[cF_kh(x)cF_kh(y)-sF_kh(x)sF_kh(y)\right]$$

$$iii)\ \ sF_kh(x+y)=\frac{\sqrt{k^2+4}}{2}\left[sF_kh(x)cF_kh(y)+cF_kh(x)sF_kh(y)\right]$$
$$iv)\ \ sF_kh(x-y)=\frac{\sqrt{k^2+4}}{2}\left[sF_kh(x)cF_kh(y)-cF_kh(x)sF_kh(y)\right].$$

İspat

$$\begin{aligned} i)\ \ cF_kh(x)cF_kh(y)+sF_kh(x)sF_kh(y) &= \left(\frac{\sigma_1^x+\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right)\left(\frac{\sigma_1^y+\sigma_1^{-y}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right)+\left(\frac{\sigma_1^x-\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right)\left(\frac{\sigma_1^y-\sigma_1^{-y}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right) \\ &= \frac{\sigma_1^{x+y}+\sigma_1^{x-y}+\sigma_1^{-x+y}+\sigma_1^{-x-y}+\sigma_1^{x+y}-\sigma_1^{x-y}-\sigma_1^{-x+y}+\sigma_1^{-x-y}}{\left(\sigma_1+\sigma_1^{-1}\right)^2} \\ &= \left(\frac{2}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right)\left(\frac{\sigma_1^{x+y}+\sigma_1^{-(x+y)}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{k^2+4}}cF_kh(x+y). \end{aligned}$$

Diğer eşitliklerin ispatları da benzer şekilde görülebilir.

Bu teoremde, (*i*) ve (*iii*) eşitliklerinde $y=x$ alınmasıyla

$$cF_kh(2x)=\frac{\sqrt{k^2+4}}{2}\left[(cF_kh(x))^2+(sF_kh(x))^2\right]$$
$$sF_kh(2x)=\sqrt{k^2+4}sF_kh(x)cF_kh(x)$$

eşitlikleri elde edilir.

3.2.3. Teorem

$$i)\ \ (cF_kh(x))^{(n)}=\begin{cases}(\ln\sigma_1)^{(n)}sF_k(x), & n=2m+1 \text{ ise}\\ (\ln\sigma_1)^{(n)}cF_k(x), & n=2m \text{ ise}\end{cases}$$

$$ii)\ \ (sF_k h(x))^{(n)} = \begin{cases} (\ln\sigma_1)^{(n)} cF_k(x), & n = 2m+1 \text{ ise} \\ (\ln\sigma_1)^{(n)} sF_k(x), & n = 2m \text{ ise} \end{cases}$$

eşitlikleri vardır [11].

<u>*k*-Fibonacci hiperbolik fonksiyonları ve *k*-Fibonacci sayıları</u>

Şimdi, $k-$Fibonacci hiperbolik fonksiyonlarının $k-$Fibonacci sayılarına ait özellikleriyle benzerlik gösteren bazı özellikleri vereceğiz.

$k-$Fibonacci hiperbolik fonksiyonlarının indirgeme bağıntılarını aşağıdaki teoremle ifade edebiliriz [11]:

3.2.4. Teorem

$$i)\ \ sF_k h(x+1) = kcF_k h(x) + sF_k h(x-1)$$
$$ii)\ \ cF_k h(x+1) = ksF_k h(x) + cF_k h(x-1)$$

dir .

İspat

$i)$ $\sigma_1^2 = k\sigma_1 + 1$ eşitliği vardır.

Eşitliğin her iki tarafı σ_1^{x-1} ile çarpılırsa $\sigma_1^{x+1} = k\sigma_1^x + \sigma_1^{x-1}$ eşitliği, eşitliğin her iki yanı σ_1^{-x-1} ile çarpılırsa da $\sigma_1^{-(x-1)} = k\sigma_1^{-x} + \sigma_1^{-(x+1)}$, ve $k\sigma_1^{-x} - \sigma_1^{-(x-1)} = -\sigma_1^{-(x+1)}$ eşitliği elde edilir. Bunlardan faydalanarak

$$\begin{aligned} kcF_k h(x) + sF_k h(x-1) &= k\left(\frac{\sigma_1^x + \sigma_1^{-x}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}}\right) + \left(\frac{\sigma_1^{x-1} + \sigma_1^{-(x-1)}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}}\right) \\ &= \frac{k\sigma_1^x + k\sigma_1^{-x} + \sigma_1^{x-1} + \sigma_1^{-x+1}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(k\sigma_1^{x} + \sigma_1^{x-1}) + (k\sigma_1^{-x} + \sigma_1^{-x+1})}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}} \\
&= \frac{\sigma_1^{x+1} - \sigma_1^{-(x+1)}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}} \\
&= sF_k h(x+1)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Benzer şekilde ikinci eşitlik de ispatlanabilir.

3.2.5. Teorem

$k-$Fibonacci hiperbolik fonksiyonları için

$$
\begin{aligned}
i)\ & cF_k h(x-r) cF_k h(x+r) - (cF_k h(x))^2 = (sF_k h(r))^2 \\
ii)\ & cF_k h(x-r) cF_k h(x+r) - (sF_k h(x))^2 = (cF_k h(r))^2 \\
iii)\ & sF_k h(x-r) sF_k h(x+r) - (sF_k h(x))^2 = -(sF_k h(r))^2 \\
iv)\ & sF_k h(x-r) sF_k h(x+r) - (cF_k h(x))^2 = -(cF_k h(r))^2
\end{aligned}
$$

eşitlikleri yazılabilir [11].

İspat

$$
\begin{aligned}
iii)\ sF_k h(x-r) sF_k h(x+r) - (sF_k h(x))^2 &= \left(\frac{\sigma_1^{x-r} - \sigma_1^{-(x-r)}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}}\right)\left(\frac{\sigma_1^{x+r} - \sigma_1^{-(x+r)}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}}\right) - \left(\frac{\sigma_1^{x} - \sigma_1^{-x}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\sigma_1^{x-r} - \sigma_1^{-x+r}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}}\right)\left(\frac{\sigma_1^{x+r} - \sigma_1^{-x-r}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}}\right) - \frac{\sigma_1^{2x} - 2 + \sigma_1^{-2x}}{\left(\sigma_1 + \sigma_1^{-1}\right)^2} \\
&= \frac{\sigma_1^{2x} - \sigma_1^{-2r} - \sigma_1^{2r} + \sigma_1^{-2x} - \sigma_1^{2x} + 2 - \sigma_1^{-2x}}{\left(\sigma_1 + \sigma_1^{-1}\right)^2} \\
&= -\frac{\sigma_1^{2r} - 2 + \sigma_1^{-2r}}{\left(\sigma_1 + \sigma_1^{-1}\right)^2} \\
&= -\left(\frac{\sigma_1^{r} - \sigma_1^{-r}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$= -(sF_k h(r))^2.$$

Diğer eşitliklerin ispatları da benzer şekilde yapılabilir.

Bu teoremde, özel olarak, $r = 1$ alınmasıyla

$$cF_k h(x-1)cF_k h(x+1) - (sF_k h(x))^2 = 1$$
$$sF_k h(x-1)sF_k h(x+1) - (cF_k h(x))^2 = -1$$

eşitlikleri ortaya çıkar [11].

3.2.6. Teorem

$i)$ $cF_k h(x).cF_k h(y+r) - sF_k h(x+r).sF_k h(y) = cF_k h(r).cF_k h(x-y)$

$ii)$ $cF_k h(x).sF_k h(y+r) - cF_k h(x+r).sF_k h(y) = sF_k h(r).cF_k h(x-y)$

eşitlikleri geçerlidir [11].

İspat

$i)$ $$cF_k h(x).cF_k h(y+r) - sF_k h(x+r).sF_k h(y) = \frac{\left(\sigma_1^x + \sigma_1^{-x}\right)\left(\sigma_1^{y+r} + \sigma_1^{-y-r}\right) - \left(\sigma_1^{x+r} - \sigma_1^{-x-r}\right)\left(\sigma_1^y - \sigma_1^{-y}\right)}{\left(\sigma_1 + \sigma_1^{-1}\right)^2}$$

$$= \frac{\sigma_1^{x-y-r} + \sigma_1^{-x+y+r} + \sigma_1^{x-y+r} + \sigma_1^{-x+y-r}}{\left(\sigma_1 + \sigma_1^{-1}\right)^2}$$

$$= \frac{\sigma_1^{-r}\left(\sigma_1^{x-y} + \sigma_1^{-(x-y)}\right) + \sigma_1^{r}\left(\sigma_1^{x-y} + \sigma_1^{-(x-y)}\right)}{\left(\sigma_1 + \sigma_1^{-1}\right)^2}$$

$$= \left(\frac{\sigma_1^r - \sigma_1^{-r}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}}\right)\left(\frac{\sigma_1^{x-y} + \sigma_1^{-(x-y)}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}}\right)$$

$$= cF_k h(r).cF_k h(x-y).$$

elde edilir.

Diğer eşitlik de kolayca görülebilir.

Bu teoremde, (*i*) eşitliğinde $r=1$ alınmasıyla

$$cF_k h(x).cF_k h(y+1)-sF_k h(x+1).sF_k h(y)=cF_k h(x-y)$$

eşitliği elde edilir.

3.3. Yarı-sinüs *k*-Fibonacci fonksiyonu

σ_1, (3. 2) karakteristik denkleminin pozitif kökü olmak üzere, $k-$Fibonacci dizisi için Binet formülü

$$F_{k,\,n}=\frac{\sigma_1^n-(-1)^n\sigma_1^{-n}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}$$

şeklindedir.

Diğer taraftan, $k-$Fibonacci hiperbolik sinüs fonksiyonunu

$$sF_k h(x)=\frac{\sigma_1^x-\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}$$

olarak tanımlamıştık.

Bu eşitlikte, eğer $x=2n$ şeklinde bir çift tam sayı olarak aldığımızda, biliyoruz ki $sF_k h(x)=F_{k,2n}$ dir.

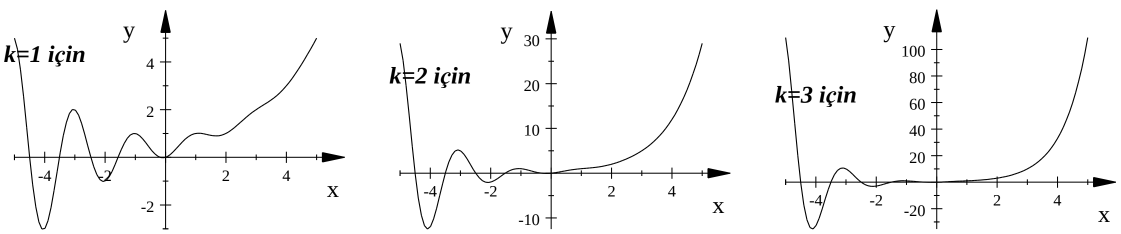
Bunlarla birlikte, $\cos(n\pi)=(-1)^n$ eşitliğini de kullanarak, aşağıdaki tanımı verebiliriz [11]:

3.3.1. Tanım

$$FF_k(x) = \frac{\sigma_1^x - \cos(\pi x)\sigma_1^{-x}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}} \tag{3. 8}$$

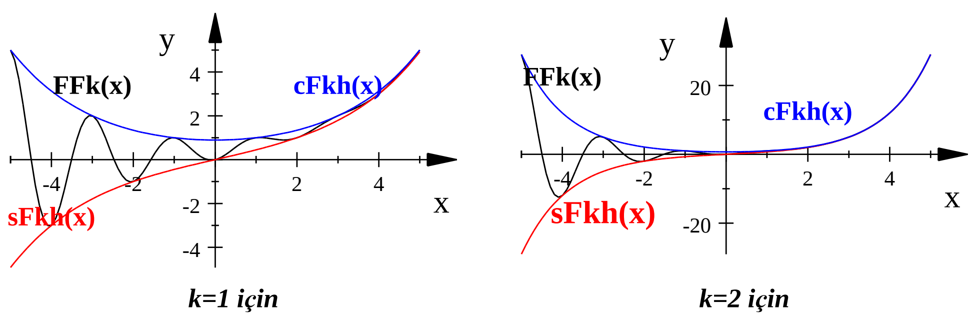
şeklinde tanımlanan fonksiyona, yarı-sinüs $k-$Fibonacci fonksiyonu denir. Burada, her n tamsayısı için $FF_k(n) = F_{k,\,n}$ dır.

$k = 1,2,3$ için $FF_k(x)$ fonksiyonlarının grafikleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.2. $k = 1,2,3$ için yarı-sinüs k -Fibonacci fonksiyonları: $FF_1(x),\ FF_2(x),\ FF_3(x)$

$k = 1,2$ için $FF_k(x)$ fonksiyonlarının grafikleri, $k-$ Fibonacci hiperbolik kosinüs ve $k-$ Fibonacci hiperbolik sinüs fonksiyonlarına eşit olan teğet eğrileriyle birlikte Şekil 3.3 te verilmiştir.



Şekil 3.3. $k = 1,2$ için $FF_k(x)$ fonksiyonları ile $k-$Fibonacci hiperbolik kosinüs ve $k-$ Fibonacci hiperbolik sinüs fonksiyonlarına eşit olan teğet eğrileri

Yarı-sinüs *k*-Fibonacci fonksiyonları ve *k*-Fibonacci sayıları

Bu kısımda, $k-$Fibonacci sayıları ile benzerlik gösteren, yarı-sinüs $k-$Fibonacci fonksiyonlarına ait bazı özelliklerden bahsedeceğiz.

Yarı-sinüs $k-$Fibonacci fonksiyonları için aşağıdaki indirgeme bağıntısı geçerlidir [11]:

3.3.2. Teorem

$$FF_k(x+2) = kFF_k(x+1) + FF_k(x).$$

İspat

$$\begin{aligned}
kFF_k(x+1) + FF_k(x) &= k\left[\frac{\sigma_1^{x+1} - \cos\pi(x+1)\sigma_1^{-x-1}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}}\right] + \left[\frac{\sigma_1^{x} - \cos(\pi x)\sigma_1^{-x}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}}\right] \\
&= k\left[\frac{\sigma_1^{x+1} + \cos(\pi x)\sigma_1^{-x-1}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}}\right] + \left[\frac{\sigma_1^{x} - \cos(\pi x)\sigma_1^{-x}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}}\right] \\
&= \frac{k\sigma_1^{x+1} + k\cos(\pi x)\sigma_1^{-x-1} + \sigma_1^{x} - \cos(\pi x)\sigma_1^{-x}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}} \\
&= \frac{\sigma_1^{x}(k\sigma_1 + 1) + \cos(\pi x)\sigma_1^{-x-2}(k\sigma_1 - \sigma_1^{2})}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}} \\
&= \frac{\sigma_1^{x}\sigma_1^{2} + \cos(\pi x)\sigma_1^{-x-2}(-1)}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}} \\
&= \frac{\sigma_1^{x+2} + \cos(\pi x + 2\pi)\sigma_1^{-x-2}(-1)}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}} \\
&= \frac{\sigma_1^{x+2} - \cos\pi(x+2)\sigma_1^{-(x+2)}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}} \\
&= FF_k(x+2)
\end{aligned}$$

şeklinde ispatlanır.

3.3.3. Teorem

Yarı-sinüs $k-$Fibonacci fonksiyonları için

$$FF_k(x-r)FF_k(x+r)-(FF_k(x))^2=(-1)^{r+1}\cos(\pi x)(FF_k(r))^2$$

eşitliği geçerlidir [11].

İspat

$$\begin{aligned}
FF_k(x-r)FF_k(x+r)-(FF_k(x))^2 &= \left[\frac{\sigma_1^{x-r}-\cos\pi(x-r)\sigma_1^{-x+r}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right]\left[\frac{\sigma_1^{x+r}-\cos\pi(x+r)\sigma_1^{-x-r}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right]\\
&\quad-\left[\frac{\sigma_1^{x}-\cos(\pi x)\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right]^2\\
&=\left[\frac{\sigma_1^{x-r}-(-1)^r\cos(\pi x)\sigma_1^{-x+r}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right]\left[\frac{\sigma_1^{x+r}-(-1)^r\cos(\pi x)\sigma_1^{-x-r}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right]\\
&\quad-[\frac{\sigma_1^{2x}-2\cos(\pi x)+\cos^2(\pi x)\sigma_1^{-2x}}{(\sigma_1+\sigma_1^{-1})^2}]\\
&=\left[\frac{\sigma_1^{2x}-(-1)^r\cos(\pi x)\sigma_1^{-2r}-(-1)^r\cos(\pi x)\sigma_1^{2r}+(-1)^{2r}\cos^2(\pi x)\sigma_1^{-2x}}{(\sigma_1+\sigma_1^{-1})^2}\right]\\
&\quad-\left[\frac{\sigma_1^{2x}-2\cos(\pi x)+\cos^2(\pi x)\sigma_1^{-2x}}{(\sigma_1+\sigma_1^{-1})^2}\right]\\
&=\frac{(-1)^{r+1}\cos(\pi x)\sigma_1^{2r}+2\cos(\pi x)+(-1)^r\cos(\pi x)\sigma_1^{-2r}}{(\sigma_1+\sigma_1^{-1})^2}\\
&=(-1)^{r+1}\cos(\pi x)[\frac{\sigma_1^{r}-\cos(\pi r)\sigma_1^{-r}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}]^2\\
&=(-1)^{r+1}\cos(\pi x)(FF_k(r))^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ifade ispatlanmış olur.

3.3.4. Teorem

Herhangi bir r tamsayısı için

$$\lim_{x\to\infty}\frac{FF_k(x+r)}{FF_k(x)}=\sigma_1^r$$

dır [11].

İspat

$$\lim_{x\to\infty}\frac{FF_k(x+r)}{FF_k(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sigma_1^{x+r}-\cos\pi(x+r)\sigma_1^{-x-r}}{\sigma_1^{x}-\cos(\pi x)\sigma_1^{-x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sigma_1^{x}\left(\sigma_1^{r}-\cos\pi(x+r)\sigma_1^{-2x-r}\right)}{\sigma_1^{x}\left(1-\cos(\pi x)\sigma_1^{-2x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sigma_1^{r}-(-1)^r\cos(\pi x)\frac{1}{\sigma_1^{2x+r}}}{1-\cos(\pi x)\frac{1}{\sigma_1^{2x}}}$$
$$=\sigma_1^{r}.$$

Bu teoremde, özel olarak $k=r=1$ alınırsa, $\sigma_1=\alpha$ ve $\lim_{x\to\infty}\frac{FF_k(x+1)}{FF_k(x)}=\alpha$ eşitlikleri elde edilir.

3.4. *k*- Fibonacci hiperbolik fonksiyonları için üç boyutlu eğri ve yüzeyler

3.4.1. Tanım

σ_1, (3. 2) karakteristik denkleminin pozitif kökü olmak üzere, kompleks değerli

$$CFF_k(x)=\frac{\sigma_1^{x}-\cos(\pi x)\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}+i\frac{\sin(\pi x)\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}} \qquad (3.\ 9)$$

fonksiyonuna, üç-boyutlu $k-$Fibonacci spirali denir [11].

Burada, $\mathrm{Re}(CFF_k(x))=FF_k(x)$; yani üç-boyutlu $k-$Fibonacci spiralinin reel kısmı, yarı-sinüs $k-$Fibonacci fonksiyonuna eşittir.

$CFF_k(x)$ fonksiyonunu, ayrıca, $CFF_k(x)=\dfrac{\sigma_1^{x}+ie^{i\pi(\frac{1}{2}-x)}\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}$ şeklinde de yazabiliriz.

$CFF_k(x)$ fonksiyonu için:

Eğer $k=1$ olarak alınırsa; $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (altın oran) olmak üzere,

$$CFF_1(x)=\frac{\alpha^x+ie^{i\pi(\frac{1}{2}-x)}\alpha^{-x}}{\sqrt{5}}$$ dır.

Eğer x bir tamsayı ise; $CFF_k(x)$ nın sanal kısmı 0 olur. Dolayısıyla, $CFF_k(n)$, $k-$Fibonacci dizisinin Binet formulüne eşit olur.

Ayrıca, $CFF_k(0)=0$ ve $CFF_k(1)=1$ dir.

Üç-boyutlu $k-$Fibonacci spirali için aşağıdaki indirgeme bağıntısı yazılabilir [11]:

3.4.2. Teorem

$$CFF_k(x+2)=kCFF_k(x+1)+CFF_k(x)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat

$\sigma_1^2-k\sigma_1-1=0$ eşitliği vardır. Buradan $k\sigma_1+1=\sigma_1^2$ yazılır.

Ve $\sigma_1>1$ olmak üzere, $\sigma_1^2-k\sigma_1-1=0$ eşitliğinin her iki tarafı σ_1 ile bölünürse $\sigma_1-k=\frac{1}{\sigma_1}$ eşitliği elde edilir.

Ayrıca $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi$ eşitliğini de kullanarak

$$kCFF_k(x+1)+CFF_k(x)=k\left[\frac{\sigma_1^{x+1}+ie^{i\pi(\frac{1}{2}-x-1)}\sigma_1^{-x-1}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right]+\left[\frac{\sigma_1^{x}+ie^{i\pi(\frac{1}{2}-x)}\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right]$$

$$=\frac{k\sigma_1^{x+1}+kie^{i\pi(\frac{1}{2}-x-1)}\sigma_1^{-x-1}+\sigma_1^{x}+e^{i\pi(\frac{1}{2}-x-1)}\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}$$

$$=\frac{\sigma_1^{x}(k\sigma_1+1)+ie^{-i\pi x}\sigma_1^{-x-1}(ke^{-i\frac{\pi}{2}}+\sigma_1e^{i\frac{\pi}{2}})}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}$$

$$=\frac{\sigma_1^{x+2}+ie^{-i\pi x}\sigma_1^{-x-1}(-k+\sigma_1)i}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}$$

$$=\frac{\sigma_1^{x+2}+ie^{i\pi\left(\frac{1}{2}-(x+2)\right)}\sigma_1^{-(x+2)}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}$$

$$=CFF_k(x+2)$$

olduğu görülür.

3.4.3. Teorem

Eğer r bir tamsayı ise, bu durumda

$$CFF_k(x-r)CFF_k(x+r)-(CFF_k(x))^2=(-1)^{r+1}(CFF_k(r))^2$$

dır [11].

İspat

$$CFF_k(x-r)CFF_k(x+r)-(CFF_k(x))^2=\left[\frac{\sigma_1^{x-r}+e^{i\pi(\frac{1}{2}-x+r)}\sigma_1^{-x+r}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right]\left[\frac{\sigma_1^{x+r}+e^{i\pi(\frac{1}{2}-x-r)}\sigma_1^{-x-r}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right]$$

$$-\left[\frac{\sigma_1^{x}+e^{i\pi(\frac{1}{2}-x)}\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right]^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(\sigma_1^{x-r} + (-1)^{r+1} e^{-i\pi x} \sigma_1^{-x+r})(\sigma_1^{x+r} + (-1)^{r+1} e^{-i\pi x} \sigma_1^{-x-r})}{\left(\sigma_1 + \sigma_1^{-1}\right)^2} \\
&\quad - \frac{(\sigma_1^{2x} - 2e^{-i\pi x} + e^{-i2\pi x} \sigma_1^{-2x})}{\left(\sigma_1 + \sigma_1^{-1}\right)^2} \\
&= \frac{\sigma_1^{2x} + (-1)^{r+1} e^{-i\pi x} \sigma_1^{-2r} + (-1)^{r+1} e^{-i\pi x} \sigma_1^{2r} + e^{-i2\pi x} \sigma_1^{-2x}}{\left(\sigma_1 + \sigma_1^{-1}\right)^2} \\
&\quad - \frac{\sigma_1^{2x} - 2e^{-i\pi x} + e^{-i2\pi x} \sigma_1^{-2x}}{\left(\sigma_1 + \sigma_1^{-1}\right)^2} \\
&= (-1)^{r+1} \frac{e^{i\pi x} [\sigma_1^{2r} + 2(-1)^r + \sigma_1^{-2r}]}{\left(\sigma_1 + \sigma_1^{-1}\right)^2} \\
&= (-1)^{r+1} (CFF_k(r))^2.
\end{aligned}
$$

Ayrıca, bu eşitlikte, $r = 1$ alınmasıyla, aşağıdaki eşitliği elde ederiz [11]:

$$CFF_k(x-1)CFF_k(x+1) - (CFF_k(x))^2 = 1.$$

<u>Metalik Shofarlar (Metalik Boynuzlar)</u>

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Re}(CFF_k(x)) = \frac{\sigma_1^{x} - \cos(\pi x)\sigma_1^{-x}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}} = y(x) \ , \\
&\mathrm{Im}(CFF_k(x)) = \frac{\sin(\pi x)\sigma_1^{-x}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}} = z(x)
\end{aligned}
\tag{3. 10}
$$

fonksiyonları, sırasıyla, üç-boyutlu $k-$Fibonacci spiralinin reel ve sanal kısımlarıdır [11]. Bu eşitlikleri

$$
\begin{aligned}
y(x) - \frac{\sigma_1^{x}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}} &= -\frac{\cos(\pi x)\sigma_1^{-x}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}} \\
z(x) &= \frac{\sin(\pi x)\sigma_1^{-x}}{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}}
\end{aligned}
\tag{3. 11}
$$

şeklinde düzenleyebiliriz. Elde edilen bu eşitliklerin kareleri alınıp, taraf tarafa toplanırsa

$$(y(x)-\frac{\sigma_1^{x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}})^2+(z(x))^2=(\frac{\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}})^2 \tag{3. 12}$$

eşitliği elde edilir [11].

Eş. 3.12 yi

$$\begin{aligned}(z(x))^2&=\left[\frac{\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right]^2-\left[y(x)-\frac{\sigma_1^{x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right]^2\\&=\left[\frac{\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}-y(x)+\frac{\sigma_1^{x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right]\left[\frac{\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}+y(x)-\frac{\sigma_1^{x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right]\\&=\left[\frac{\sigma_1^{x}+\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}-y(x)\right]\left[y(x)-\frac{\sigma_1^{x}-\sigma_1^{-x}}{\sigma_1+\sigma_1^{-1}}\right]\\&=[cF_kh(x)-y(x)][y(x)-sF_kh(x)]\end{aligned}$$

şeklinde düzenleyerek aşağıdaki gibi de verebiliriz [11]:

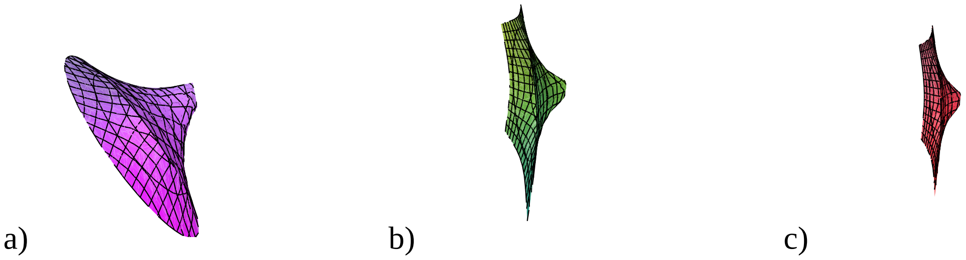
$$[cF_kh(x)-y][y-sF_kh(x)]=z^2. \tag{3. 13}$$

Eğer (3.12) de, özel olarak $k=1$ alınırsa, $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ altın oran olmak üzere, $(y-\frac{\alpha^x}{\sqrt{5}})^2+z^2=\frac{1}{5\alpha^{2x}}$ denklemiyle tanımlı *Altın Shofar* elde edilir [11].

Eğer $k=2$ alınırsa, $\varphi=1+\sqrt{2}$ olmak üzere, $(y-\frac{\varphi^x}{\sqrt{8}})^2+z^2=\frac{1}{8\varphi^{2x}}$ denklemiyle tanımlı *Gümüş Shofar* elde edilir [11].

Eğer $k=3$ alınırsa, $\psi=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ olmak üzere, $(y-\frac{\psi^x}{\sqrt{13}})^2+z^2=\frac{1}{13\psi^{2x}}$ denklemiyle tanımlı *Bronz Shofar* elde edilir [11].

$k=1,2,3$ için k-Fibonacci spiralleri için Metalik Shofarları aşağıdaki gibi geometrik olarak verebiliriz:



Şekil 3.4. $k-$Fibonacci spiralleri için Metalik Shofarlar: a) Altın Shofar, b) Gümüş Shofar, c) Bronz Shofar

4. *k*- LUCAS HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

[1]'de A. Stakhov ve B. Rozin "On a new class of hyperbolic functions" adlı çalışmada, Simetrik Hiperbolik Fibonacci ve Lucas fonksiyonlarını tanımlayıp, bu fonksiyonların bazı hiperbolik ve rekürans özelliklerini vermişlerdi. Daha sonra [1]'deki bu makale, $k-$ Fibonacci sayıları [11] ve ikinci mertebeden rekürans dizileri [13] üzerine de uygulanmıştır. Biz de bu çalışmada, [1] de yapılan çalışmadan hareketle $k-$Lucas sayıları için bazı özellikler elde ettik.

4.1. *k*- Lucas Sayıları

Falcon $k-$Lucas sayılarını, herhangi bir pozitif k reel sayısı ve $n \geq 1$ için

$$L_{k,\,n+1} = k.L_{k,\,n} + L_{k,\,n-1}\ ,$$
$$L_{k,\,0} = 2,\ \ L_{k,\,1} = k \tag{4. 1}$$

şeklinde tanımlanmıştır [12]. Bazı $k-$Lucas sayılarını aşağıdaki gibi verebiliriz:

$$\begin{aligned}
L_{k,0} &= 2\\
L_{k,1} &= k\\
L_{k,2} &= k^2 + 2\\
L_{k,3} &= k^3 + 3k\\
L_{k,4} &= k^4 + 4k^2 + 2\\
L_{k,5} &= k^5 + 5k^3 + 5k\\
L_{k,6} &= k^6 + 6k^4 + 9k^2 + 2.
\end{aligned}$$

Özel olarak, $k = 1$ için

$$L_0 = 2,\ \ L_1 = 1,\ \ L_{n+1} = L_n + L_{n-1},\quad n \geq 1$$

rekürans bağıntısıyla tanımlı $2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ldots$ şeklindeki klasik Lucas sayıları elde edilir.

$k = 2$ için

$$P_0 = 2,\ P_1 = 2,\ P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1},\quad n \geq 1$$

reküns bağıntısıyla tanımlı $2,\ 2,\ 6,\ 14,\ 34,\ 82,\ 19$ şeklindeki Pell Lucas sayıları elde edilir.

$k-$Lucas sayılarının reküns bağıntısı için karakteristik denklem:

$$\sigma^2 = k\sigma + 1 \tag{4. 2}$$

dir.

Bu karakteristik denklem

$$\sigma_1 = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2},\quad \sigma_2 = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2} \tag{4. 3}$$

şeklinde iki reel köke sahiptir.

σ_1, σ_2 karakteristik denklemin kökleri olmak üzere, $k-$Lucas sayları için Binet formülü:

$$L_{k,n} = \sigma_1^n + \sigma_2^n \tag{4. 4}$$

şeklindedir.

$\sigma_2 = -\frac{1}{\sigma_1}$ eşitliğini kullanarak, (4.4) eşitliğini, aşağıdaki gibi de yazabiliriz:

$$L_{k,\,n} = \sigma_1^n + (-1)^n \sigma_1^{-n}. \tag{4. 5}$$

4.2. *k*- Lucas Hiperbolik Fonksiyonları

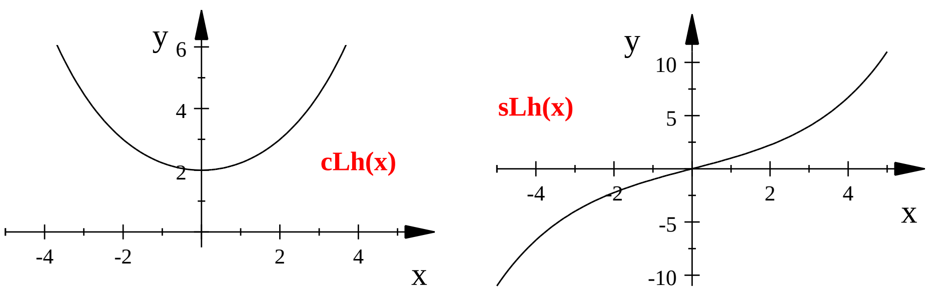
$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere klasik hiperbolik fonksiyonların

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

şeklinde; Lucas hiperbolik sinüs ve Lucas hiperbolik kosinüs fonksiyonlarının da, sırasıyla, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere

$$sLh(x) = \alpha^{2x+1} - \alpha^{-(2x+1)}$$
$$cLh(x) = \alpha^{2x} + \alpha^{-2x}$$

şeklinde olduklarını biliyoruz [2]. Bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 4.1. Lucas hiperbolik fonksiyonları: $sLh(x)$, $cLh(x)$

Biz, tanımlanmış olan bu fonksiyonları $k-$Lucas hiperbolik fonksiyonlarına aşağıdaki gibi genişletebiliriz:

$\sigma_1 = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$, (4. 2) karakteristik denkleminin pozitif kökü olmak üzere

$$sL_k h(x) = \sigma_1^{2x+1} - \sigma_1^{-(2x+1)}$$
$$cL_k h(x) = \sigma_1^{2x} + \sigma_1^{-2x} \tag{4. 6}$$

sırasıyla, $k-$ Lucas hiperbolik sinüs ve $k-$Lucas hiperbolik kosinüs fonksiyonları olarak adlandırılan eşitlikler yazılır.

$sL_kh(x)$ fonksiyonu, tek fonksiyon olduğundan, grafiği orjine göre simetrik iken; $cL_kh(x)$ çift fonksiyon olup onun grafiği de $x=0$ eksenine göre simetriktir. Bu yüzden, bundan böyle, $k-$Lucas hiperbolik sinüs ve $k-$Lucas hiperbolik kosinüs fonksiyonlarını, sırasıyla, $\sigma_1+\sigma_1^{-1}=\sqrt{k^2+4}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} sL_kh(x) &= \sigma_1^x-\sigma_1^{-x} \\ cL_kh(x) &= \sigma_1^x+\sigma_1^{-x} \end{aligned} \tag{4. 7}$$

şeklinde tanımlayacağız. (4.6) da, özel olarak $k=1$ alınırsa, bu fonksiyonların grafikleri Şekil 4.1 deki gibi olur.

$k-$Lucas sayıları ile $k-$Lucas hiperbolik fonksiyonları arasında aşağıdaki eşitlik vardır:

$$\begin{aligned} cL_kh(2n) &= L_{k,2n} \\ sL_kh(2n+1) &= L_{k,2n+1}. \end{aligned}$$

$k-$Lucas hiperbolik fonksiyonları ile klasik hiperbolik fonksiyonları arasında da

$$\begin{aligned} sL_kh(x) &= 2\sinh(x\ln\sigma_1) \\ cL_kh(x) &= 2\cosh(x\ln\sigma_1) \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir.

Ayrıca, $k-$Lucas hiperbolik fonksiyonları ile $k-$Fibonacci hiperbolik fonksiyonları arasında da aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$sF_k h(x) = \frac{sL_k h(x)}{\sqrt{k^2+4}}$$
$$cF_k h(x) = \frac{cL_k h(x)}{\sqrt{k^2+4}}.$$

k-Lucas hiperbolik fonksiyonlarının hiperbolik özellikleri

Bu kısımda, $k-$Lucas hiperbolik fonksiyonlarına ait, klasik hiperbolik fonksiyonların özellikleriyle benzerlik gösteren, bazı özelliklerinden bahsedeceğiz.

4.2.1. Teorem

$k-$Lucas hiperbolik fonksiyonları için

$$\left[cL_k h(x)\right]^2 - \left[sL_k h(x)\right]^2 = 4$$

eşitliği vardır.

İspat

$$\begin{aligned}[cL_k h(x)]^2 - [sL_k h(x)]^2 &= (\sigma_1^x + \sigma_1^{-x})^2 - (\sigma_1^x - \sigma_1^{-x})^2 \\ &= \sigma_1^{2x} + 2 + \sigma_1^{-2x} - \sigma_1^{2x} + 2 - \sigma_1^{-2x} \\ &= 4.\end{aligned}$$

4.2.2. Teorem

$k-$Lucas hiperbolik sinüs ve $k-$Lucas hiperbolik kosinüs fonksiyonları için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

i) $2cL_k h(x+y) = cL_k h(x) cL_k h(y) + sL_k h(x) sL_k h(y)$
ii) $2cL_k h(x-y) = cL_k h(x) cL_k h(y) - sL_k h(x) sL_k h(y)$

$iii)\ \ 2sL_k h(x+y) = sL_k h(x)cL_k h(y) + cL_k h(x)sL_k h(y)$
$iv)\ \ 2sL_k h(x-y) = sL_k h(x)cL_k h(y) - cL_k h(x)sL_k h(y).$

İspat

$$
\begin{aligned}
i)\ \ cL_k h(x)cL_k h(y) + sL_k h(x)sL_k h(y) &= (\sigma_1^x + \sigma_1^{-x})(\sigma_1^y + \sigma_1^{-y}) + (\sigma_1^x - \sigma_1^{-x})(\sigma_1^y - \sigma_1^{-y}) \\
&= \sigma_1^{x+y} + \sigma_1^{x-y} + \sigma_1^{-x+y} + \sigma_1^{-x-y} + \sigma_1^{x+y} - \sigma_1^{x-y} - \sigma_1^{-x+y} + \sigma_1^{-x-y} \\
&= 2(\sigma_1^{x+y} + \sigma_1^{-(x+y)}) \\
&= 2cL_k h(x+y)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

$$
\begin{aligned}
iii)\ \ sL_k h(x)cL_k h(y) + cL_k h(x)sL_k h(y) &= (\sigma_1^x - \sigma_1^{-x})(\sigma_1^y + \sigma_1^{-y}) + (\sigma_1^x + \sigma_1^{-x})(\sigma_1^y - \sigma_1^{-y}) \\
&= \sigma_1^{x+y} + \sigma_1^{x-y} - \sigma_1^{-x+y} - \sigma_1^{-x-y} + \sigma_1^{x+y} - \sigma_1^{x-y} + \sigma_1^{-x+y} - \sigma_1^{-x-y} \\
&= 2(\sigma_1^{x+y} - \sigma_1^{-(x+y)}) \\
&= 2sL_k h(x+y)
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Diğer eşitliklerin ispatları da benzer şekilde görülür.

Burada, (*i)* ve (*iii)* eşitliklerinde , $y = x$ alınmasıyla

$$cL_k h(2x) = \frac{1}{2}\left[(cL_k h(x))^2 + (sL_k h(x))^2\right]$$
$$sL_k h(2x) = sL_k h(x)cL_k h(x)$$

eşitlikleri elde edilir.

4.2.3. Teorem

$k-$Lucas hiperbolik fonksiyonları için aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$i)\ \ (cL_k h(x))^{(n)} = \begin{cases} (\ln\sigma_1)^{(n)} sL_k(x), & n = 2m+1 \text{ ise} \\ (\ln\sigma_1)^{(n)} cL_k(x), & n = 2m \text{ ise} \end{cases}$$

$$ii)\ \ (sL_k h(x))^{(n)} = \begin{cases} (\ln\sigma_1)^{(n)} cL_k(x), & n = 2m+1 \text{ ise} \\ (\ln\sigma_1)^{(n)} sL_k(x), & n = 2m \text{ ise.} \end{cases}$$

İspat

$$\begin{aligned} i)\ \ \left[cL_k h(x)\right]' &= \left(\sigma_1^x + \sigma_1^{-x}\right)' \\ &= \sigma_1^{\ x}\ln(\sigma_1) - \sigma_1^{\ -x}\ln(\sigma_1) \\ &= \ln(\sigma_1) sL_k h(x) \\ \left[cL_k h(x)\right]'' &= (\ln(\sigma_1) sL_k h(x))' \\ &= \ln(\sigma_1)\left(\sigma_1^x - \sigma_1^{-x}\right)' \\ &= \left[\ln(\alpha)\right]^2 cL_k h(x) \\ &\ \ \vdots \\ \left[cL_k h(x)\right]^{(n)} &= \begin{cases} (\ln\sigma_1)^{(n)} sL_k(x), & n = 2m+1 \\ (\ln\sigma_1)^{(n)} cL_k(x), & n = 2m \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii)\ \ \left[sL_k h(x)\right]' &= \left(\sigma_1^x - \sigma_1^{-x}\right)' \\ &= \sigma_1^{\ x}\ln(\sigma_1) + \sigma_1^{\ -x}\ln(\sigma_1) \\ &= \ln(\sigma_1) cL_k h(x) \\ \left[sL_k h(x)\right]'' &= (\ln(\sigma_1) cL_k h(x))' \\ &= \ln(\sigma_1)\left(\sigma_1^x + \sigma_1^{-x}\right)' \\ &= \left[\ln(\alpha)\right]^2 sFs(x) \\ &\ \ \vdots \\ \left[sL_k h(x)\right]^{(n)} &= \begin{cases} (\ln\sigma_1)^{(n)} cL_k(x), & n = 2m+1 \\ (\ln\sigma_1)^{(n)} sL_k(x), & n = 2m \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir.

<u>*k*-Lucas hiperbolik fonksiyonlar ve *k*-Lucas sayıları</u>

Şimdi, $k-$Lucas hiperbolik fonksiyonlarının, $k-$Lucas sayılarıyla ilişkili olan bazı özelliklerinden bahsedeceğiz.

$k-$Lucas hiperbolik fonksiyonlarının indirgeme bağıntılarını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

4.2.4. Teorem

$$i)\ \ sL_k h(x+1) = k.cL_k h(x) + sL_k h(x-1)$$

$$ii)\ \ cL_k h(x+1) = k.sL_k h(x) + cL_k h(x-1).$$

İspat

$\sigma_1^2 = k\sigma_1 + 1$ eşitliği vardır.

Eşitliğin her iki tarafı σ_1^{x-1} ile çarpılırsa $\sigma_1^{x+1} = k\sigma_1^x + \sigma_1^{x-1}$ eşitliği, eşitliğin her iki yanı σ_1^{-x-1} ile çarpılırsa da $\sigma_1^{-(x-1)} = k\sigma_1^{-x} + \sigma_1^{-(x+1)}$, ve $k\sigma_1^{-x} - \sigma_1^{-(x-1)} = -\sigma_1^{-(x+1)}$ eşitliği elde edilir. Bunlardan faydalanarak

$$
\begin{aligned}
i)\ k.cL_k h(x) + sL_k h(x-1) &= k(\sigma_1^x + \sigma_1^{-x}) + (\sigma_1^{x-1} - \sigma_1^{-(x-1)}) \\
&= k\sigma_1^x + k\sigma_1^{-x} + \sigma_1^{x-1} - \sigma_1^{-x+1} \\
&= (k\sigma_1^x + \sigma_1^{x-1}) + (k\sigma_1^{-x} - \sigma_1^{-x+1}) \\
&= \sigma_1^{x+1} + (-\sigma_1^{-(x+1)}) \\
&= sL_k h(x+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ii)\ k.sL_k h(x) + cL_k h(x-1) &= k(\sigma_1^x - \sigma_1^{-x}) + (\sigma_1^{x-1} + \sigma_1^{-(x-1)}) \\
&= k\sigma_1^x - k\sigma_1^{-x} + \sigma_1^{x-1} + \sigma_1^{-x+1} \\
&= (k\sigma_1^x + \sigma_1^{x-1}) - (k\sigma_1^{-x} - \sigma_1^{-x+1}) \\
&= \sigma_1^{x+1} - (-\sigma_1^{-(x+1)}) \\
&= cL_k h(x+1)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$k-$Lucas sayıları için var olan, $r\rangle n$ olmak üzere

$$L_{k,n-r}L_{k,n+r} - L_{k,n}{}^2 = (-1)^{n+r} L_{k,2r} + 2(-1)^{n+1}$$

eşitliğiyle verilen ve Catalan eşitliği olarak adlandırılan [12] eşitliğe benzer olarak, $k-$ Lucas hiperbolik fonksiyonları için de aşağıdaki eşitlikler verilebilir:

4.2.5. Teorem

$$\begin{aligned}
&i)\ \ cL_k h(x-r)cL_k h(x+r)-(cL_k h(x))^2=(sL_k h(r))^2\\
&ii)\ \ cL_k h(x-r)cL_k h(x+r)-(sL_k h(x))^2=(cL_k h(r))^2\\
&iii)\ \ sL_k h(x-r)sL_k h(x+r)-(sL_k h(x))^2=-(sL_k h(r))^2\\
&iv)\ \ sL_k h(x-r)sL_k h(x+r)-(cL_k h(x))^2=-(cL_k h(r))^2.
\end{aligned}$$

İspat

$$\begin{aligned}
i)\ \ cL_k h(x-r)cL_k h(x+r)-(cL_k h(x))^2 &=(\sigma_1^{x-r}+\sigma_1^{-(x-r)})(\sigma_1^{x+r}+\sigma_1^{-(x+r)})-(\sigma_1^{x}+\sigma_1^{-x})^2\\
&=(\sigma_1^{x-r}+\sigma_1^{-x+r})(\sigma_1^{x+r}+\sigma_1^{-x-r})-(\sigma_1^{2x}+2+\sigma_1^{-2x})\\
&=\sigma_1^{2x}+\sigma_1^{-2r}+\sigma_1^{2r}+\sigma_1^{-2x}-\sigma_1^{2x}-2-\sigma_1^{-2x}\\
&=\sigma_1^{2r}-2+\sigma_1^{-2r}\\
&=(sL_k h(r))^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer eşitliklerin ispatları da benzer şekilde yapılabilir.

Bu teoremde, $r=1$ alınmasıyla

$$\begin{aligned}
&cL_k h(x-1)cL_k h(x+1)-(sL_k h(x))^2=k^2+4\\
&sL_k h(x-1)sL_k h(x+1)-(cL_k h(x))^2=-(k^2+4)
\end{aligned}$$

şeklindeki ilginç eşitlikleri elde ederiz.

$k-$Lucas sayıları için var olan, $n,r\geq 0$ olmak üzere

$$L_{k,n}L_{k,n+r}=L_{k,2n+r}+(-1)^n L_{k,r}$$

eşitliğine [12] benzer olarak, $k-$Lucas hiperbolik fonksiyonları için de aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

4.2.6. Teorem

$$
\begin{aligned}
i)\ & cL_k h(x) cL_k h(x+r) = cL_k h(2x+r) + cL_k h(r)\\
ii)\ & sL_k h(x) sL_k h(x+r) = cL_k h(2x+r) - cL_k h(r)\\
iii)\ & sL_k h(x) cL_k h(x+r) = sL_k h(2x+r) - sL_k h(r)\\
iv)\ & cL_k h(x) sL_k h(x+r) = sL_k h(2x+r) + sL_k h(r).
\end{aligned}
$$

İspat

Burada (*i)* ve *(iii)* ifadelerinin ispatını vereceğiz. Diğer ispatlar da benzer şekilde yapılabilir.

$$
\begin{aligned}
i)\ cL_k h(x) cL_k h(x+r) &= (\sigma_1^{x} + \sigma_1^{-x})(\sigma_1^{x+r} + \sigma_1^{-(x+r)})\\
&= \sigma_1^{2x+r} + \sigma_1^{-r} + \sigma_1^{r} + \sigma_1^{-2x-r}\\
&= (\sigma_1^{2x+r} + \sigma_1^{-(2x+r)}) + (\sigma_1^{r} + \sigma_1^{-r})\\
&= cL_k h(2x+r) + cL_k h(r).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
iii)\ sL_k h(x) cL_k h(x+r) &= (\sigma_1^{x} - \sigma_1^{-x})(\sigma_1^{x+r} + \sigma_1^{-(x+r)})\\
&= \sigma_1^{2x+r} + \sigma_1^{-r} - \sigma_1^{r} - \sigma_1^{-2x-r}\\
&= (\sigma_1^{2x+r} - \sigma_1^{-(2x+r)}) - (\sigma_1^{r} - \sigma_1^{-r})\\
&= sL_k h(2x+r) - sL_k h(r).
\end{aligned}
$$

Bu teoremdeki eşitliklerde $r = 0$ alınmasıyla, aşağıdaki üç eşitlik elde edilir:

$$
\begin{aligned}
(cL_k h(x))^2 &= cL_k h(2x) + 2\\
(sL_k h(x))^2 &= cL_k h(2x) - 2\\
sL_k h(x) cL_k h(x) &= sL_k h(2x).
\end{aligned}
$$

<u>*k*-Lucas hiperbolik fonksiyonları ile *k*-Fibonacci hiperbolik fonksiyonları arasındaki ilişki</u>

Şimdi, $k-$Lucas sayıları ile $k-$Fibonacci sayıları arasında var olduğunu bildiğimiz bazı bağıntılardan bahsedeceğiz.

$k-$Lucas ve $k-$Fibonacci sayıları için var olan [12]

$$L_{k,n}{}^2=(k^2+4)F_{k,n}{}^2+4\left(-1\right)^n$$

eşitliğine benzer olarak, $k-$Lucas hiperbolik ve $k-$Fibonacci hiperbolik fonksiyonları için de aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

4.2.7. Teorem

$i)$ $(sL_k h(x))^2=(k^2+4)(cF_k h(x))^2-4$
$ii)$ $(cL_k h(x))^2=(k^2+4)(sF_k h(x))^2+4.$

İspat

$$i)\ (k^2+4)(cF_k h(x))^2-4=(k^2+4)\left(\frac{\sigma_1^x+\sigma_1^{-x}}{\sqrt{k^2+4}}\right)^2-4$$
$$=\sigma_1^{2x}-2+\sigma_1^{-2x}$$
$$=(sL_k h(x))^2.$$

$$ii)\ (k^2+4)(sF_k h(x))^2+4=(k^2+4)\left(\frac{\sigma_1^x-\sigma_1^{-x}}{\sqrt{k^2+4}}\right)^2+4$$
$$=\sigma_1^{2x}+2+\sigma_1^{-2x}$$
$$=(cL_k h(x))^2.$$

$k-$Lucas ve $k-$Fibonacci sayıları için var olan [12], $n\geq 1$ için

$$L_{k,n}=F_{k,n-1}+F_{k,n+1}$$

eşitliğine benzer olarak, $k-$Lucas hiperbolik ve $k-$Fibonacci hiperbolik fonksiyonları için de aşağıdaki eşitlikleri verebiliriz:

4.2.8. Teorem

$$i)\ cL_k h(x) = cF_k h(x-1) + cF_k h(x+1)$$
$$ii)\ sL_k h(x) = sF_k h(x-1) + sF_k h(x+1).$$

İspat

$$\begin{aligned} i)\ cF_k h(x-1) + cF_k h(x+1) &= \left(\frac{\sigma_1^{x-1} + \sigma_1^{-(x-1)}}{\sqrt{k^2+4}}\right) + \left(\frac{\sigma_1^{x+1} + \sigma_1^{-(x+1)}}{\sqrt{k^2+4}}\right) \\ &= \frac{\sigma_1^{x-1} + \sigma_1^{-(x-1)} + \sigma_1^{x+1} + \sigma_1^{-(x+1)}}{\sqrt{k^2+4}} \\ &= \frac{(\sigma_1^{x-1} + \sigma_1^{x+1}) + (\sigma_1^{-(x-1)} + \sigma_1^{-(x+1)})}{\sqrt{k^2+4}} \\ &= \frac{\sigma_1^{x}(\sigma_1^{-1} + \sigma_1) + \sigma_1^{-x}(\sigma_1 + \sigma_1^{-1})}{\sqrt{k^2+4}} \\ &= cL_k h(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii)\ sF_k h(x-1) + sF_k h(x+1) &= \left(\frac{\sigma_1^{x-1} - \sigma_1^{-(x-1)}}{\sqrt{k^2+4}}\right) + \left(\frac{\sigma_1^{x+1} - \sigma_1^{-(x+1)}}{\sqrt{k^2+4}}\right) \\ &= \frac{\sigma_1^{x-1} - \sigma_1^{-(x-1)} + \sigma_1^{x+1} - \sigma_1^{-(x+1)}}{\sqrt{k^2+4}} \\ &= \frac{(\sigma_1^{x-1} + \sigma_1^{x+1}) - (\sigma_1^{-(x-1)} + \sigma_1^{-(x+1)})}{\sqrt{k^2+4}} \\ &= \frac{\sigma_1^{x}(\sigma_1^{-1} + \sigma_1) - \sigma_1^{-x}(\sigma_1 + \sigma_1^{-1})}{\sqrt{k^2+4}} \\ &= sL_k h(x). \end{aligned}$$

Böylelikle ispatımız tamamlanır.

$k-$Lucas ve $k-$Fibonacci sayıları için var olan [12]

$$L_{k,n}{}^2 + L_{k,n+1}{}^2 = (k^2+4)F_{k,2n+1}$$

eşitliğine benzer olarak, $k-$Lucas hiperbolik ve $k-$Fibonacci hiperbolik fonksiyonları için de aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

4.2.9. Teorem

$$i)\ \ (cL_k h(x))^2 + (sL_k h(x+1))^2 = (k^2+4)cF_k h(2x+1)$$
$$ii)\ \ (sL_k h(x))^2 + (cL_k h(x+1))^2 = (k^2+4)cF_k h(2x+1).$$

İspat

$$\begin{aligned}
i)\ \ (cL_k h(x))^2 + (sL_k h(x+1))^2 &= (\sigma_1^x + \sigma_1^{-x})^2 + (\sigma_1^{x+1} - \sigma_1^{-(x+1)})^2 \\
&= \sigma_1^{2x} + 2 + \sigma_1^{-2x} + \sigma_1^{2x+2} - 2 + \sigma_1^{-(2x+2)} \\
&= \sigma_1^{2x}(1+\sigma_1^2) + \sigma_1^{-2x}(1+\sigma_1^{-2}) \\
&= \sigma_1^{2x}\sigma_1(\sigma_1 + \sigma_1^{-1}) + \sigma_1^{-2x}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_1^{-1}}{\sigma_1}\right) \\
&= \sigma_1^{2x}\sigma_1\sqrt{k^2+4} + \sigma_1^{-2x}\left(\frac{\sqrt{k^2+4}}{\sigma_1}\right) \\
&= \sigma_1^{2x+1}\sqrt{k^2+4} + \sigma_1^{-2x-1}\sqrt{k^2+4} \\
&= \sqrt{k^2+4}\,(\sigma_1^{2x+1} + \sigma_1^{-(2x+1)}) \\
&= (k^2+4)\left(\frac{\sigma_1^{2x+1} + \sigma_1^{-(2x+1)}}{\sqrt{k^2+4}}\right) \\
&= (k^2+4)cF_k h(2x+1).
\end{aligned}$$

İkinci eşitliğin ispatı da benzer şekilde yapılabilir.

$k-$Lucas ve $k-$Fibonacci sayıları için geçerli olan [12], $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$L_{k,n}F_{k,n} = F_{k,2n}$$

eşitliğine benzer olarak, $k-$Lucas hiperbolik ve $k-$Fibonacci hiperbolik fonksiyonları için de aşağıdaki eşitlikler vardır:

4.2.10. Teorem

$$i) \ sL_k h(x) cF_k h(x) = sF_k h(2x)$$
$$ii) \ cL_k h(x) sF_k h(x) = sF_k h(2x).$$

İspat

$$\begin{aligned} ii) \ cL_k h(x) sF_k h(x) &= (\sigma_1^x + \sigma_1^{-x})\left(\frac{\sigma_1^x - \sigma_1^{-x}}{\sqrt{k^2+4}}\right) \\ &= \frac{\sigma_1^{2x} - \sigma_1^{-2x}}{\sqrt{k^2+4}} \\ &= sF_k h(2x) \end{aligned}$$

dır.

İlk eşitlik de benzer şekilde kolayca görülebilir.

4.3. Yarı-sinüs *k*- Lucas fonksiyonu

σ_1 , (4. 2) karakteristik denkleminin pozitif kökü olmak üzere, $k-$Lucas dizisi için Binet formülü

$$L_{k,n} = \sigma_1^n + (-1)^n \sigma_1^{-n}$$

şeklinde idi.

$k-$Lucas hiperbolik sinüs fonksiyonunu

$$sL_k h(x) = \sigma_1^x - \sigma_1^{-x}$$

olarak tanımlamıştık.

Burada, biliyoruz ki, eğer $x = 2n+1$ şeklinde bir tek sayı olarak alınırsa, $sL_k h(x) = L_{k,2n+1}$ olur.

Bunlarla birlikte, $\cos(n\pi) = (-1)^n$ eşitliğini de göz önünde bulundurarak, aşağıdaki tanımı verebiliriz:

4.3.1. Tanım

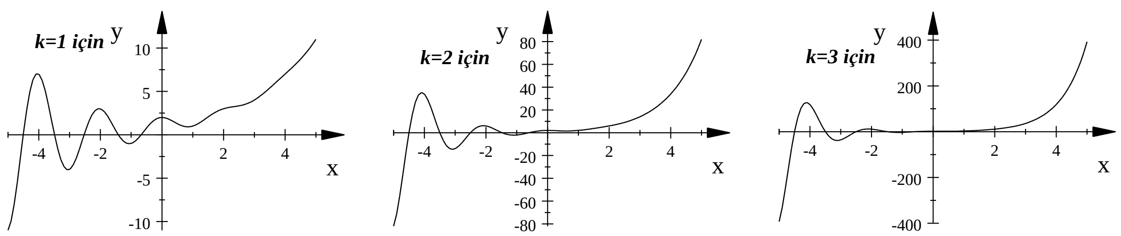
σ_1 , (4. 2) karakteristik denkleminin pozitif kökü olmak üzere

$$LL_k(x) = \sigma_1^x + \cos(\pi x)\sigma_1^{-x} \tag{4. 8}$$

şeklindeki fonksiyona, yarı-sinüs $k-$Lucas fonksiyonu denir.

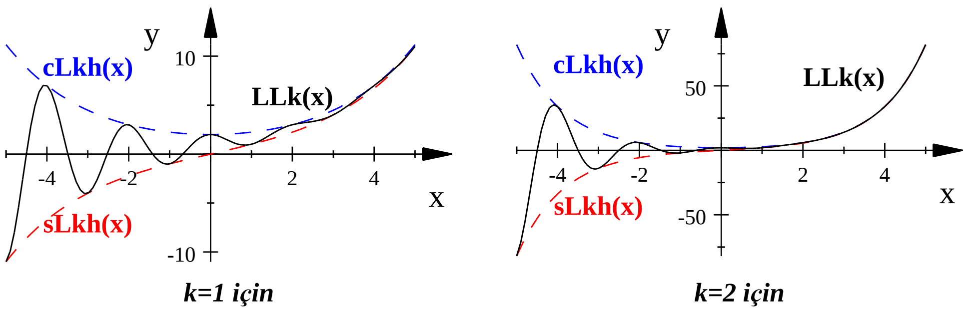
Burada, her n tamsayısı için, $LL_k(n) = L_{k,n}$ dır.

$k = 1,2,3$ için, $LL_k(x)$ nın grafiklerini aşağıdaki gibi geometrik olarak verebiliriz:



Şekil 4.2. $k = 1,2,3$ için yarı-sinüs $k-$Lucas fonksiyonları: $LL_1(x),\ LL_2(x),\ LL_3(x)$

$k = 1,2$ için $LL_k(x)$ fonksiyonlarının grafikleri, $k-$Lucas hiperbolik kosinüs ve $k-$ Lucas hiperbolik sinüs fonksiyonlarına eşit olan teğet eğrileriyle birlikte aşağıdaki gibi verilebilir:



Şekil 4.3. $k = 1,2$ için $LL_k(x)$ fonksiyonları ile $k-$Lucas hiperbolik kosinüs ve $k-$Lucas hiperbolik sinüs fonksiyonlarına eşit olan teğet eğrileri

Yarı-sinüs *k*-Lucas fonksiyonları ve *k*-Lucas sayıları

Bu kısımda, $k-$Lucas sayılarının özellikleriyle benzerlik gösteren, yarı-sinüs $k-$Lucas fonksiyonlarına ait bazı özelliklerden bahsedeceğiz.

4.3.2. Teorem

Yarı-sinüs $k-$Lucas fonksiyonları için aşağıdaki indirgeme bağıntısı sağlanır:

$$LL_k(x+2) = kLL_k(x+1) + LL_k(x).$$

İspat

Eş. 4.8 kullanılarak

$$\begin{aligned}
kLL_k(x+1) + LL_k(x) &= k\left[\sigma_1^{x+1} + \cos\pi(x+1)\sigma_1^{-x-1}\right] + \left[\sigma_1^{x} + \cos(\pi x)\sigma_1^{-x}\right] \\
&= k\left[\sigma_1^{x+1} - \cos(\pi x)\sigma_1^{-x-1}\right] + \left[\sigma_1^{x} + \cos(\pi x)\sigma_1^{-x}\right] \\
&= k\sigma_1^{x+1} - k\cos(\pi x)\sigma_1^{-x-1} + \sigma_1^{x} + \cos(\pi x)\sigma_1^{-x} \\
&= \sigma_1^{x}(k\sigma_1 + 1) - \cos(\pi x)\sigma_1^{-x-2}(k\sigma_1 - \sigma_1^2) \\
&= \sigma_1^{x}\sigma_1^{2} - \cos(\pi x)\sigma_1^{-x-2}(-1) \\
&= \sigma_1^{x+2} - \cos(\pi x + 2\pi)\sigma_1^{-x-2}(-1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma_1^{x+2} + \cos\pi(x+2)\sigma_1^{-(x+2)} \\
&= LL_k(x+2)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece istenilen gösterilmiş olur.

4.3.3. Teorem

$$LL_k(x-r)LL_k(x+r) - (LL_k(x))^2 = (-1)^r\cos(\pi x)(LL_k(r))^2 - 4\cos(\pi x)$$

eşitliği verilebilir.

İspat

$$
\begin{aligned}
LL_k(x-r)LL_k(x+r) - (LL_k(x))^2 &= \left[\sigma_1^{x-r} + \cos\pi(x-r)\sigma_1^{-x+r}\right]\left[\sigma_1^{x+r} + \cos\pi(x+r)\sigma_1^{-x-r}\right] \\
&\quad -\left[\sigma_1^{x} + \cos(\pi x)\sigma_1^{-x}\right]^2 \\
&= \left[\sigma_1^{x-r} + (-1)^r\cos(\pi x)\sigma_1^{-x+r}\right]\left[\sigma_1^{x+r} + (-1)^r\cos(\pi x)\sigma_1^{-x-r}\right] \\
&\quad -[\sigma_1^{2x} + 2\cos(\pi x) + \cos^2(\pi x)\sigma_1^{-2x}] \\
&= \sigma_1^{2x} + (-1)^r\cos(\pi x)\sigma_1^{-2r} + (-1)^r\cos(\pi x)\sigma_1^{2r} + (-1)^{2r}\cos^2(\pi x)\sigma_1^{-2x} \\
&\quad -\sigma_1^{2x} - 2\cos(\pi x) - \cos^2(\pi x)\sigma_1^{-2x} \\
&= (-1)^r\cos(\pi x)[\sigma_1^{r} + \cos(\pi r)\sigma_1^{-r}]^2 - 4\cos(\pi x) \\
&= (-1)^r\cos(\pi x)(LL_k(r))^2 - 4\cos(\pi x)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

4.3.4. Teorem

σ_1 , (4.2) denkleminin pozitif kökü olmak üzere herhangi bir r tamsayısı için

$$\lim_{x\to\infty}\frac{LL_k(x+r)}{LL_k(x)} = \sigma_1^{r}$$

dir.

İspat

$$\lim_{x\to\infty}\frac{LL_k(x+r)}{LL_k(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sigma_1^{x+r}+\cos\pi(x+r)\sigma_1^{-x-r}}{\sigma_1^{x}+\cos(\pi x)\sigma_1^{-x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sigma_1^{x+r}+(-1)^r\cos(\pi x)\sigma_1^{-x-r}}{\sigma_1^{x}+\cos(\pi x)\sigma_1^{-x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sigma_1^{x}(\sigma_1^{r}+(-1)^r\cos(\pi x)\frac{1}{\sigma_1^{2x+r}})}{\sigma_1^{x}(1+\cos(\pi x)\frac{1}{\sigma_1^{2x}})}$$
$$=\sigma_1^{r}.$$

Özel olarak, burada, $k=r=1$ alınmasıyla $\sigma_1=\alpha$ ve $\lim_{x\to\infty}\dfrac{LL_k(x+1)}{LL_k(x)}=\alpha$ eşitlikleri elde edilir.

4.4. *k*- Lucas hiperbolik fonksiyonları için üç boyutlu eğri ve yüzeyler

4.4.1. Tanım

σ_1, $k-$Lucas dizisinin $\sigma^2-k\sigma-1=0$ şeklindeki karakteristik denkleminin pozitif kökü olmak üzere

$$CLL_k(x) = \sigma_1^{x}+\cos(\pi x)\sigma_1^{-x}+i\sin(\pi x)\sigma_1^{-x} \tag{4. 9}$$

kompleks değerli fonksiyonuna, üç- boyutlu $k-$Lucas spirali denir.

Burada görülmektedir ki, üç- boyutlu $k-$Lucas spiralinin reel kısmı, yarı-sinüs $k-$Lucas fonksiyonuna eşittir.

$CLL_k(x)$ fonksiyonunu, ayrıca, $CLL_k(x)=\sigma_1^{x}+e^{i\pi x}\sigma_1^{-x}$ şeklinde de yazabiliriz.

Burada eğer $k=1$alınırsa, $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (altın oran) olmak üzere, $CLL_1(x)=\alpha^{x}+e^{i\pi x}\alpha^{-x}$

eşitliği yazılır.

Eğer x bir tamsayı ise, bu durumda $CLL_k(x)$ nın sanal kısmı 0 olur. Dolayısıyla, $CLL_k(n)$, $k-$ Lucas dizisinin genel teriminin Binet formülüne eşit olur.

Ayrıca, $CLL_k(0) = 2$ ve $CLL_k(1) = k$ olduğuna da dikkat çekelim.

4.4.2. Teorem

Üç- boyutlu $k-$Lucas spiralleri için

$$CLL_k(x+2) = kCLL_k(x+1) + CLL_k(x)$$

şeklindeki indirgeme bağıntısı geçerlidir.

İspat

$\sigma_1^2 - k\sigma_1 - 1 = 0$ eşitliği vardır. Buradan $k\sigma_1 + 1 = \sigma_1^2$ yazılır.

Ve $\sigma_1 > 1$ olmak üzere, $\sigma_1^2 - k\sigma_1 - 1 = 0$ eşitliğinin her iki tarafı σ_1 ile bölünürse $\sigma_1 - k = \frac{1}{\sigma_1}$ eşitliği elde edilir.

Ayrıca $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$ eşitliğini de kullanarak

$$\begin{aligned}
kCLL_k(x+1) + CLL_k(x) &= k\left[\sigma_1^{x+1} + e^{i\pi(x+1)}\sigma_1^{-x-1}\right] + \left[\sigma_1^{x} + e^{i\pi x}\sigma_1^{-x}\right] \\
&= k\sigma_1^{x+1} + ke^{i\pi x}e^{i\pi}\sigma_1^{-x-1} + \sigma_1^{x} + e^{i\pi x}\sigma_1^{-x} \\
&= \sigma_1^{x}(k\sigma_1 + 1) + e^{i\pi x}\sigma_1^{-x-1}(ke^{i\pi} + \sigma_1) \\
&= \sigma_1^{x+2} + e^{i\pi x}\sigma_1^{-x-1}(-k + \sigma_1) \\
&= \sigma_1^{x+2} + e^{i\pi x}\sigma_1^{-(x+2)} \\
&= CLL_k(x+2)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

4.4.3. Teorem

Eğer r bir tamsayı ise, bu durumda

$$CLL_k(x-r)CLL_k(x+r)-(CLL_k(x))^2=(-1)^r(CLL_k(r))^2-4e^{i\pi x}$$

dır.

İspat

$$\begin{aligned}
CLL_k(x-r)CLL_k(x+r)-(CLL_k(x))^2 &= \left[\sigma_1^{x-r}+e^{i\pi(x-r)}\sigma_1^{-x+r}\right]\left[\sigma_1^{x+r}+e^{i\pi(x+r)}\sigma_1^{-x-r}\right] \\
&\quad -\left[\sigma_1^{x}+e^{i\pi x}\sigma_1^{-x}\right]^2 \\
&= \sigma_1^{2x}+e^{i\pi(x+r)}\sigma_1^{-2r}+e^{i\pi(x-r)}\sigma_1^{2r}+e^{i\pi(x+r)+i\pi(x-r)}\sigma_1^{-2x} \\
&\quad -\sigma_1^{2x}-2e^{i\pi x}-e^{i2\pi x}\sigma_1^{-2x} \\
&= e^{i\pi(x+r)}\sigma_1^{-2r}+e^{i\pi(x-r)}\sigma_1^{2r}-2e^{i\pi x} \\
&= e^{i\pi x}e^{i\pi r}\sigma_1^{-2r}+e^{i\pi x}e^{-i\pi r}\sigma_1^{2r}-2e^{i\pi x} \\
&= e^{i\pi x}(-1)^r\sigma_1^{-2r}+e^{i\pi x}(-1)^r\sigma_1^{2r}-2e^{i\pi x} \\
&= (-1)^r e^{i\pi x}[\sigma_1^{2r}+2(-1)^r+\sigma_1^{-2r}]-4e^{i\pi x} \\
&= (-1)^r e^{i\pi x}[\sigma_1^{2r}+2(-1)^r+\sigma_1^{-2r}]-4e^{i\pi x} \\
&= (-1)^r(CLL_k(r))^2-4e^{i\pi x}.
\end{aligned}$$

Burada, özel olarak, $r=1$ alınırsa

$$CLL_k(x-1)CLL_k(x+1)-(CLL_k(x))^2=-(k^2+4e^{i\pi x})$$

eşitliği elde edilir.

<u>*k*-Lucas Spiralleri için Metalik Shofarlar (Metalik Boynuzlar)</u>

$$\mathrm{Re}(CLL_k(x))=\sigma_1^{x}+\cos(\pi x)\sigma_1^{-x}=y(x),$$

$$\mathrm{Im}(CLL_k(x)) = \sin(\pi x)\sigma_1^{-x} = z(x) \tag{4. 10}$$

fonksiyonları, sırasıyla, üç- boyutlu $k-$Lucas spiralinin reel ve sanal kısımlarıdır. Buradan

$$\begin{aligned} y(x) - \sigma_1^{x} &= \cos(\pi x)\sigma_1^{-x} \\ z(x) &= \sin(\pi x)\sigma_1^{-x} \end{aligned} \tag{4. 11}$$

yazılır. Bu eşitliklerin kareleri alınıp, taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} (y(x) - \sigma_1^{x})^2 + (z(x))^2 &= (\cos(\pi x)\sigma_1^{-x})^2 + (\sin(\pi x)\sigma_1^{-x})^2 \\ &= \cos^2(\pi x)\sigma_1^{-2x} + \sin^2(\pi x)\sigma_1^{-2x} \\ &= \sigma_1^{-2x}(\cos^2(\pi x) + \sin^2(\pi x)) \\ &= (\sigma_1^{-x})^2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$(y(x) - \sigma_1^{x})^2 + (z(x))^2 = (\sigma_1^{-x})^2 \tag{4. 12}$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca, Eş. 4.12 den

$$\begin{aligned} (z(x))^2 &= (\sigma_1^{-x})^2 - (y(x) - \sigma_1^{x})^2 \\ &= (\sigma_1^{-x} - y(x) + \sigma_1^{x})(\sigma_1^{x} + y(x) - \sigma_1^{x}) \\ &= \left[(\sigma_1^{-x} + \sigma_1^{x}) - y(x)\right]\left[y(x) - (\sigma_1^{-x} + \sigma_1^{x})\right] \\ &= [cL_k h(x) - y(x)][y(x) - sL_k h(x)] \end{aligned}$$

eşitliği yazılır. Dolayısıyla Eş. 4.12 yerine aşağıdaki Eş. 4.13 ü verebiliriz:

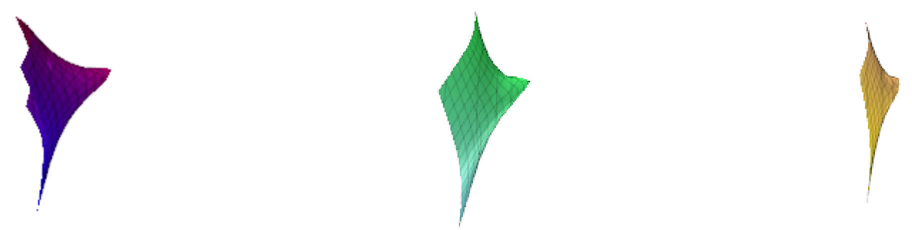
$$[cL_k h(x) - y][y - sL_k h(x)] = z^2. \tag{4. 13}$$

(4.12) de, eğer özel olarak $k = 1$ alınırsa, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere, $(y-\alpha^x)^2 + z^2 = \frac{1}{\alpha^{2x}}$ denklemi ile tanımlı *Altın Shofar* elde edilir.

Eğer $k = 2$ alınırsa , $\varphi = 1+\sqrt{2}$ olmak üzere, $(y-\varphi^x)^2 + z^2 = \frac{1}{\varphi^{2x}}$ denklemiyle tanımlı *Gümüş Shofar* elde edilir.

Eğer $k = 3$ alınırsa, $\psi = \frac{3+\sqrt{1}}{2}$ olmak üzere, $(y-\psi^x)^2 + z^2 = \frac{1}{\psi^{2x}}$ denklemiyle tanımlı *Bronz Shofar* elde edilir.

$k = 1,2,3$ değerlerine karşılık gelen k-Lucas spiralleri için Metalik Shofarlar aşağıdaki gibi geometrik olarak verilebilir:



a) b) c)

Şekil 4.4. k-Lucas spiralleri için Metalik Shofarlar: a) Altın Shofar, b) Gümüş Shofar, c) Bronz Shofar

5. YARI-HİPERBOLİK TRIBONACCI VE YARI-HİPERBOLİK TRIBONACCI-LUCAS FONKSİYONLARI

Bu bölümde, klasik hiperbolik fonksiyonların, bir bakıma, bir genişlemesini yapacağız. Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayılarının sürekli bir versiyonunu elde etmiş olacağız. W.R. Spickerman'ın [14] Tribonacci fonksiyonları için yaptığına benzer şekilde, biz de, Tribonacci-Lucas sayılarının Binet formülüne denk yeni bir bağıntı elde edeceğiz. Daha sonra, hiperbolik olmayan fakat klasik hiperbolik fonksiyonlara ait bazı özellikleri sağladığından dolayı, yarı-hiperbolik olarak adlandırdığımız yarı-hiperbolik Tribonacci ve yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas fonksiyonlarını tanımlayacağız. Son olarak, tanımlamış olduğumuz bu fonksiyonların bazı rekürans ve hiperbolik özelliklerinden bahsedeceğiz.

5.1. Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayıları

Başlangıç şartları

$U_0 = U_1 = 1, \quad U_2 = 2$ olmak üzere

$$U_{n+1} = U_n + U_{n-1} + U_{n-2}, \; n \geq 2 \tag{5. 1}$$

şeklinde tanımlanan rekürans bağıntısından elde edilen sayılara Tribonacci sayıları denir [14]. Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine de Tribonacci dizisi denir. Burada U_n, n -inci Tribonacci sayısını göstermektedir.

$\{U_n\}_{n\in \mathrm{N}} = \{1,\ 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 13,\ 24,...\}.$

$V_0 = 3, \quad V_1 = 1, \quad V_3 = 3$ olmak üzere

$$V_{n+1} = V_n + V_{n-1} + V_{n-2}, \; n \geq 2 \tag{5. 2}$$

şeklinde tanımlanan rekürans bağıntısından elde edilen sayılara Tribonacci-Lucas sayıları denir [15]. Bu rekürans bağıntısının ürettiği tamsayılar dizisine de Tribonacci-Lucas dizisi denir. Burada V_n, n -inci Tribonacci- Lucas sayısını göstermektedir.

$$\{V_n\}_{n\in\mathrm{N}} = \{3,\ 1,\ 3,\ 7,\ 11,\ 21,...\}.$$

Tribonacci ve Tribonacci-Lucas sayıları için karakteristik denklem:

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \tag{5. 3}$$

şeklindedir.

Bu karakteristik denklem biri reel, ikisi kompleks eşlenik olmak üzere, üç köke sahiptir:

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho = \frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + 1\right) \\ x_2 &= \sigma = \frac{1}{6}\left(2 - \sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} - \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + \sqrt{3}i\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} - \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right) \\ x_3 &= \omega = \overline{\sigma}. \end{aligned} \tag{5. 4}$$

ρ, σ, ω, (5. 3) karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere, Tribonacci sayıları için Binet formülü:

$$U_n = \frac{\rho^{n+2}}{(\rho-\sigma)(\rho-\omega)} + \frac{\sigma^{n+2}}{(\sigma-\rho)(\sigma-\omega)} + \frac{\omega^{n+2}}{(\omega-\rho)(\omega-\sigma)} \tag{5. 5}$$

şeklindedir [14].

W.R. Spickerman, aşağıdaki bir dizi işlem sonucunda, (5. 5) Binet formülüne denk olan yeni bir eşitlik tanımlamıştır [14].

Son iki terimin pay ve paydaları sırasıyla $(\rho-\omega)$ ve $(\rho-\sigma)$ ile çarpılırsa

$$U_n = \frac{\rho^{n+2}}{(\rho-\sigma)(\rho-\omega)} + \frac{\sigma^{n+2}\left(\rho-\omega\right)}{(\sigma-\rho)(\sigma-\omega)\left(\rho-\omega\right)} + \frac{\omega^{n+2}\left(\rho-\sigma\right)}{(\omega-\rho)(\omega-\sigma)\left(\rho-\sigma\right)} \tag{5.6}$$

eşitliği elde edilir.

Son iki terimin paydalarını yeniden düzenleyelim:

σ bir kompleks sayı olduğundan, işlem kolaylığı açısından, σ yı en genel haliyle $a,\ \mathrm{b} \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\sigma = a + ib$ şeklinde yazalım. $\omega = \overline{\sigma} = a - ib$ şeklindedir.

$$\begin{aligned}
(\sigma-\rho)(\sigma-\omega)\left(\rho-\omega\right) &= (a+ib-\rho)(a+ib-(a-ib))(\rho-(a-ib)) \\
&= (a+ib-\rho)(2ib)(\rho-a+ib)) \\
&= (a+ib-\rho)(2ib)(-(a-\rho-ib)) \\
&= -2ib(a-\rho+ib)(a-\rho-ib) \\
&= -2ib((a-\rho)^2+b^2) \\
&= -2i.\operatorname{Im}(\sigma).\left|\rho-\sigma\right|^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde ikinci terimin paydasını düzenleyelim:

$$\begin{aligned}
(\omega-\rho)(\omega-\sigma)\left(\rho-\sigma\right) &= (a-ib-\rho)(a-ib-(a+ib))(\rho-(a+ib)) \\
&= (a-\rho+ib)(-2ib)(\rho-a-ib)) \\
&= -2ib(a-\rho+ib)(-(a-\rho-ib)) \\
&= 2ib((a-\rho)^2+b^2) \\
&= 2i.\operatorname{Im}(\sigma).\left|\rho-\sigma\right|^2
\end{aligned}$$

dir.

Bunlar Eş. 5.6 da yerlerine yazıldığında

$$U_n = \frac{\rho^{n+2}}{\left|\rho-\sigma\right|^2} + \frac{\left(\rho-\omega\right)\sigma^{n+2}}{-2i.\operatorname{Im}(\sigma)\left|\rho-\sigma\right|^2} + \frac{\left(\rho-\sigma\right)\omega^{n+2}}{2i.\operatorname{Im}(\sigma)\left|\rho-\sigma\right|^2} \tag{5.7}$$

eşitliği elde edilir.

$\mathrm{Im}(\sigma)$, σ nın sanal, $\mathrm{Re}(\sigma)$ da reel kısmı olmak üzere

$$\sigma = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$
$$\sigma^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta); \quad \theta = \tan^{-1}(\mathrm{Im}(\sigma)/\mathrm{Re}(\sigma))$$

eşitlikleri (5.7) de yerlerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
U_n &= \frac{\rho^{n+2}}{|\rho-\sigma|^2} + \frac{(\rho-\omega)\sigma^{n+2}}{-2i.\mathrm{Im}(\sigma)|\rho-\sigma|^2} + \frac{(\rho-\sigma)\omega^{n+2}}{2i.\mathrm{Im}(\sigma)|\rho-\sigma|^2} \\
&= \frac{\rho^2}{|\rho-\sigma|^2}\rho^n + \frac{(\rho-\omega)\sigma^{n+2}}{-2i.r\sin\theta|\rho-\sigma|^2} + \frac{(\rho-\sigma)\omega^{n+2}}{2i.r\sin\theta.|\rho-\sigma|^2} \\
&= \frac{\rho^2}{|\rho-\sigma|^2}\rho^n + \frac{1}{2i.r\sin\theta|\rho-\sigma|^2}\left[(\rho-\sigma)\omega^{n+2} - (\rho-\omega)\sigma^{n+2}\right] \\
&= \frac{\rho^2}{|\rho-\sigma|^2}\rho^n + \frac{1}{2i.r\sin\theta|\rho-\sigma|^2}\left[(\rho - r(\cos\theta + i\sin\theta))\omega^{n+2} - (\rho - r(\cos\theta - i\sin\theta))\sigma^{n+2}\right] \\
&= \frac{\rho^2}{|\rho-\sigma|^2}\rho^n + \frac{1}{2i.r\sin\theta|\rho-\sigma|^2}\left[\left((\rho - r\cos\theta)\omega^{n+2} - i.r\sin\theta.\omega^{n+2}\right) - \left((\rho - r\cos\theta)\sigma^{n+2} - i.r\sin\theta.\sigma^{n+2}\right)\right] \\
&= \frac{\rho^2}{|\rho-\sigma|^2}\rho^n + \frac{\rho - r\cos\theta}{2i.r\sin\theta|\rho-\sigma|^2}(\omega^{n+2} - \sigma^{n+2}) - \frac{1}{2.|\rho-\sigma|^2}(\omega^{n+2} + \sigma^{n+2}) \\
&= \frac{\rho^2}{|\rho-\sigma|^2}\rho^n + \frac{\rho - r\cos\theta}{2i.r\sin\theta|\rho-\sigma|^2}\left[r^{n+2}(\cos(n+2)\theta - i\sin(n+2)\theta) - r^{n+2}(\cos(n+2)\theta + i\sin(n+2)\theta)\right] \\
&\quad - \frac{1}{2.|\rho-\sigma|^2}\left[r^{n+2}(\cos(n+2)\theta - i\sin(n+2)\theta) + r^{n+2}(\cos(n+2)\theta + i\sin(n+2)\theta)\right] \\
&= \frac{\rho^2}{|\rho-\sigma|^2}\rho^n + \frac{\rho - r\cos\theta}{2i.r\sin\theta|\rho-\sigma|^2}(-2i.\sin(n+2)\theta.r^{n+2}) - \frac{1}{2.|\rho-\sigma|^2}2.r^{n+2}.\cos(n+2)\theta \\
&= \frac{\rho^2}{|\rho-\sigma|^2}\rho^n + \frac{\rho - r\cos\theta}{\sin\theta|\rho-\sigma|^2}(-\sin(n+2)\theta.r^{n+1}) - \frac{1}{|\rho-\sigma|^2}(\cos(n+2)\theta.r^{n+2}) \\
&= \frac{\rho^2}{|\rho-\sigma|^2}\rho^n + \frac{\rho - r\cos\theta}{\sin\theta|\rho-\sigma|^2}(-r^{n+1})(\sin n\theta.\cos 2\theta + \cos n\theta.\sin 2\theta) \\
&\quad - \frac{1}{|\rho-\sigma|^2}r^{n+2}(\cos n\theta.\cos 2\theta - \sin n\theta.\sin 2\theta)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{\rho^2}{|\rho-\sigma|^2}\rho^n + \frac{\rho - r\cos\theta}{\sin\theta|\rho-\sigma|^2}(-r^{n+1})\sin n\theta.\cos 2\theta + \frac{\rho - r\cos\theta}{\sin\theta|\rho-\sigma|^2}(-r^{n+1})\cos n\theta.\sin 2\theta$$

$$-\frac{1}{|\rho-\sigma|^2}r^{n+2}.\cos n\theta.\cos 2\theta + \frac{1}{|\rho-\sigma|^2}r^{n+2}.\sin n\theta.\sin 2\theta$$

$$= \frac{\rho^2}{|\rho-\sigma|^2}\rho^n + \left(\frac{\rho - r\cos\theta}{\sin\theta|\rho-\sigma|^2}(-r^{n+1}).\cos 2\theta + \frac{1}{|\rho-\sigma|^2}r^{n+2}.\sin 2\theta\right)\sin n\theta$$

$$+\left(\frac{\rho - r\cos\theta}{\sin\theta|\rho-\sigma|^2}(-r^{n+1}).\sin 2\theta - \frac{1}{|\rho-\sigma|^2}r^{n+2}.\cos 2\theta\right)\cos n\theta$$

$$= \frac{\rho^2}{|\rho-\sigma|^2}\rho^n + \frac{r^n\sin n\theta}{|\rho-\sigma|^2}(\frac{r^2\cos\theta - r\rho\cos 2\theta}{\sin\theta}) + \frac{r^n\cos n\theta}{|\rho-\sigma|^2}(\frac{r^2\sin\theta - r\rho\sin 2\theta}{\sin\theta})$$

$$= \frac{\rho^2}{|\rho-\sigma|^2}\rho^n + \frac{r^n\sin n\theta}{|\rho-\sigma|^2}.\frac{r^2\cos\theta - r\rho(1-2\sin^2\theta)}{\sin\theta} + \frac{r^n\cos n\theta}{|\rho-\sigma|^2}.r(r-2\rho\cos\theta)$$

$$= \frac{\rho^2}{|\rho-\sigma|^2}\rho^n + \frac{r(r-2\rho\cos\theta)}{|\rho-\sigma|^2}r^n\cos n\theta + \frac{r^2\cos\theta - \rho r(1-2\sin^2\theta)}{\sin\theta|\rho-\sigma|^2}r^n\sin n\theta$$

işlemlerinin ardından

$$U_n = \frac{\rho^2}{|\rho-\sigma|^2}\rho^n + \frac{r(r-2\rho\cos\theta)}{|\rho-\sigma|^2}r^n\cos n\theta + \frac{r^2\cos\theta - \rho r(1-2\sin^2\theta)}{\sin\theta|\rho-\sigma|^2}r^n\sin n\theta \tag{5.8}$$

eşitliği yazılır.

Burada, ρ^n, $r^n\cos n\theta$ ve $r^n\sin n\theta$ nın katsayıları sırasıyla λ , ψ and γ ile gösterilirse

$\lambda = 0,\ 6184,\quad \rho = 1,\ 8393$
$r = 0,\ 7374,\quad \psi = 0,\ 3816$
$\gamma = 0,\ 0374,\quad \theta = 124,\ 69^\circ$

yaklaşık değerlerine sahip olmak üzere, (5. 5) Binet formülüne denk olan

$$U_n = \lambda\rho^n + r^n(\psi\cos n\theta + \gamma\sin n\theta) \tag{5. 9}$$

eşitliği elde edilmiş olur [14].

Benzer düşünce ile, Tribonacci-Lucas sayılarının Binet formülüne denk yeni bir formül elde edeceğiz:

ρ, σ, ω, (5.3) karakteristik denkleminin kökleri olmak üzere, Tribonacci-Lucas sayıları için Binet formülü:

$$V_n = \rho^{n+2} + \sigma^{n+2} + \omega^{n+2} \tag{5.10}$$

şeklindedir [15].

$\mathrm{Im}(\sigma)$, σ ‘nın sanal, $\mathrm{Re}(\sigma)$ da reel kısmı olmak üzere

$$\begin{aligned} \sigma &= r(\cos\theta + i\sin\theta), \\ \sigma^n &= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta); \quad \theta = \tan^{-1}(\mathrm{Im}(\sigma)/\mathrm{Re}(\sigma)) \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} V_n &= \rho^{n+2} + \sigma^{n+2} + \omega^{n+2} \\ &= \rho^2\rho^n + r^{n+2}\left[\cos(n+2)\theta + i\sin(n+2)\theta\right] + r^{n+2}\left[\cos(n+2)\theta - i\sin(n+2)\theta\right] \\ &= \rho^2\rho^n + 2.r^{n+2}.\cos(n+2)\theta \\ &= \rho^2\rho^n + r^n\left[2r^2(\cos n\theta.\cos 2\theta - \sin n\theta.\sin 2\theta)\right] \\ &= \rho^2\rho^n + r^n\left[2r^2.\cos n\theta.\cos 2\theta - 2r^2.\sin n\theta.\sin 2\theta\right] \\ &= \rho^2\rho^n + (2r^2.\cos 2\theta)(r^n.\cos n\theta) - (2r^2.\sin 2\theta)(r^n.\sin n\theta) \\ &= \rho^2\rho^n + [2r^2(1-2\sin^2\theta)]r^n\cos n\theta + [-4r^2\sin\theta\cos\theta]r^n\sin n\theta \end{aligned}$$

işlemlerinin sonucunda

$$V_n = \rho^2\rho^n + r^n\cos n\theta[2r^2(1-2\sin^2\theta)] + r^n\sin n\theta[-4r^2\sin\theta\cos\theta] \tag{5.11}$$

eşitliği elde edilir.

O halde bu bilgiler ışığında aşağıdaki tanımı verebiliriz:

5.1.1. Tanım

ρ^n, $r^n \cos n\theta$ ve $r^n \sin n\theta$ nın katsayıları sırasıyla λ', ψ' ve γ' ile gösterilirse, (5.10) Binet formülüne denk olan

$$V_n = \lambda' \rho^n + r^n(\psi' \cos n\theta + \gamma' \sin n\theta) \tag{5. 12}$$

eşitliği yazılır.

Bu eşitlikteki sabitlerin yaklaşık değerleri:

$\lambda' = 3,\ 383,\quad \rho = 1,\ 8393$
$r = 0,\ 7374,\quad \psi' = 0,\ 7353$
$\gamma' = 2,\ 0357,\quad \theta = 124,\ 69^\circ$

dir.

5.2. Yarı-hiperbolik Tribonacci fonksiyonları

5.2.1. Tanım

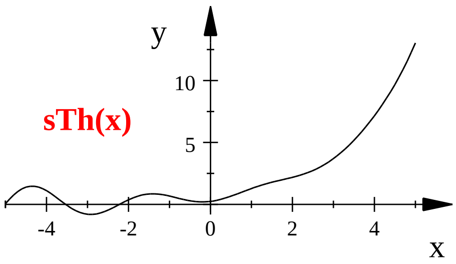
x bir reel sayı olmak üzere

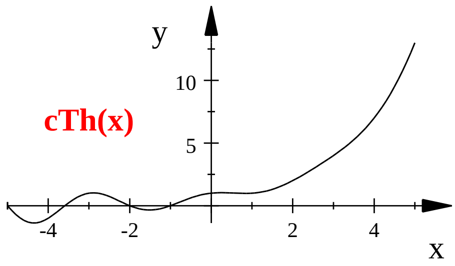
$$sTh(x) = \lambda\rho^x - r^x(\psi \cos x\theta + \gamma \sin x\theta) \tag{5.13}$$

$$cTh(x) = \lambda\rho^x + r^x(\psi \cos x\theta + \gamma \sin x\theta) \tag{5. 14}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara, sırasıyla, yarı-hiperbolik Tribonacci sinüs ve yarı-hiperbolik Tribonacci kosinüs fonksiyonları denir.

Bu fonksiyonların grafikleri aşağıdaki gibidir:





Şekil 5.1. Yarı-hiperbolik Tribonacci sinüs ve yarı-hiperbolik Tribonacci kosinüs fonksiyonları

<u>Yarı-hiperbolik Tribonacci fonksiyonlarının hiperbolik özellikleri</u>

Bu kısımda, yarı-hiperbolik Tribonacci fonksiyonlarının, klasik hiperbolik fonksiyonlara ait özelliklerle benzerlik gösteren bazı özelliklerinden bahsedeceğiz.

5.2.2. Teorem

Yarı-hiperbolik Tribonacci fonksiyonları için

$$[cTh(x)]^2 - [sTh(x)]^2 = 4\lambda(\rho r)^x[\psi\cos x\theta + \gamma\sin x\theta]$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Eş. (5.9) ve Eş. (5.10) kullanılarak

$$\begin{aligned}
[cTh(x)]^2 - [sTh(x)]^2 &= [\lambda\rho^x + r^x(\psi\cos x\theta + \gamma\sin x\theta)]^2 - [\lambda\rho^x - r^x(\psi\cos x\theta + \gamma\sin x\theta)]^2 \\
&= (\lambda\rho^x)^2 + 2(\lambda\rho^x).r^x(\psi\cos x\theta + \gamma\sin x\theta) + [r^x(\psi\cos x\theta + \gamma\sin x\theta)]^2 \\
&\quad -[(\lambda\rho^x)^2 - 2(\lambda\rho^x).r^x(\psi\cos x\theta + \gamma\sin x\theta) + [r^x(\psi\cos x\theta + \gamma\sin x\theta)]^2] \\
&= 4(\lambda\rho^x)r^x[\psi\cos x\theta + \gamma\sin x\theta] \\
&= 4\lambda(\rho r)^x[\psi\cos x\theta + \gamma\sin x\theta]
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Böylelikle teorem ispat edilmiş olur.

Yarı-hiperbolik Tribonacci fonksiyonları için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

5.2.3. Teorem

$$[cTh(x)+sTh(x)]^n=(2\lambda)^{n-1}[[cTh(nx)+sTh(nx)]$$

dır.

İspat

Eşitliğin sol tarafını göz önüne alarak

$$\begin{aligned}[cTh(x)+sTh(x)]^n &=[\lambda\rho^x+r^x(\psi\cos x\theta+\gamma\sin x\theta)+\lambda\rho^x-r^x(\psi\cos x\theta+\gamma\sin x\theta)]^n\\ &=(2\lambda\rho^x)^n\\ &=(2\lambda)^n\rho^{nx}\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

Eşitliğin sağ tarafı için de

$$\begin{aligned}(2\lambda)^{n-1}[[cTh(nx)+sTh(nx)] &=(2\lambda)^{n-1}[\lambda\rho^{nx}+r^{nx}(\psi\cos nx\theta+\gamma\sin nx\theta)+\lambda\rho^{nx}-r^{nx}(\psi\cos nx\theta+\gamma\sin nx\theta)]\\ &=(2\lambda)^{n-1}[2\lambda\rho^{nx}]\\ &=(2\lambda)^n\rho^{nx}\end{aligned}$$

yazılır. Böylece her iki eşitlikten, verilen ifade ispatlanmış olur.

5.2.4. Teorem

Yarı-hiperbolik Tribonacci kosinüs ve yarı-hiperbolik Tribonacci sinüs fonksiyonları için

$$i)\ \ 2\psi(cTh(x+y)) = cTh(x).cTh(y) + sTh(x).sTh(y) - 2r^{x+y}\sin x\theta \sin y\theta(\psi^2+\gamma^2) + 2\rho^{x+y}(\lambda\psi-\lambda^2)$$
$$ii)\ \ 2\psi(sTh(x+y)) = sTh(x).cTh(y) + cTh(x).sTh(y) + 2r^{x+y}\sin x\theta \sin y\theta(\psi^2+\gamma^2) + 2\rho^{x+y}(\lambda\psi-\lambda^2)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

$$\begin{aligned}
i)\ \ & cTh(x).cTh(y) + sTh(x).sTh(y) + 2\rho^{x+y}(\lambda\psi-\lambda^2) - 2r^{x+y}\sin x\theta \sin y\theta(\psi^2+\gamma^2) \\
&= [\lambda\rho^x + r^x(\psi\cos x\theta + \gamma\sin x\theta)][\lambda\rho^y + r^y(\psi\cos y\theta + \gamma\sin y\theta)] \\
&\quad + [\lambda\rho^x - r^x(\psi\cos x\theta + \gamma\sin x\theta)][\lambda\rho^y - r^y(\psi\cos y\theta + \gamma\sin y\theta)] \\
&\quad + 2\rho^{x+y}(\lambda\psi-\lambda^2) - 2r^{x+y}\sin x\theta\sin y\theta(\psi^2+\gamma^2) \\
&= [2\lambda^2\rho^{x+y} + 2r^{x+y}\psi^2\cos x\theta\cos y\theta + 2r^{x+y}\gamma^2\sin x\theta\sin y\theta + 2r^{x+y}\psi\gamma\sin x\theta\cos y\theta \\
&\quad + 2r^{x+y}\psi\gamma\cos x\theta\sin y\theta] + 2\rho^{x+y}(\lambda\psi-\lambda^2) - 2r^{x+y}\sin x\theta\sin y\theta(\psi^2+\gamma^2) \\
&= 2\lambda^2\rho^{x+y} + 2r^{x+y}\psi^2\cos x\theta\cos y\theta + 2r^{x+y}\gamma^2\sin x\theta\sin y\theta + 2r^{x+y}\psi\gamma\sin x\theta\cos y\theta \\
&\quad + 2r^{x+y}\psi\gamma\cos x\theta\sin y\theta + 2\rho^{x+y}\lambda\psi - 2\rho^{x+y}\lambda^2 - 2r^{x+y}\psi^2\sin x\theta\sin y\theta - 2r^{x+y}\gamma^2\sin x\theta\sin y\theta \\
&= 2\psi[\lambda\rho^{x+y} + r^{x+y}(\psi(\cos x\theta\cos y\theta - \sin x\theta\sin y\theta) + \gamma(\sin x\theta\cos y\theta + \cos x\theta\sin y\theta))] \\
&= 2\psi[\lambda\rho^{x+y} + r^{x+y}(\psi\cos(x+y)\theta + \gamma\sin(x+y)\theta)] \\
&= 2\psi(cTh(x+y)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ii)\ \ & sTh(x).cTh(y) + cTh(x).sTh(y) + 2r^{x+y}\sin x\theta\sin y\theta(\psi^2+\gamma^2) + 2\rho^{x+y}(\lambda\psi-\lambda^2) \\
&= [\lambda\rho^x - r^x(\psi\cos x\theta + \gamma\sin x\theta)][\lambda\rho^y + r^y(\psi\cos y\theta + \gamma\sin y\theta)] \\
&\quad + [\lambda\rho^x + r^x(\psi\cos x\theta + \gamma\sin x\theta)][\lambda\rho^y - r^y(\psi\cos y\theta + \gamma\sin y\theta)] \\
&\quad + 2r^{x+y}\sin x\theta\sin y\theta(\psi^2+\gamma^2) + 2\rho^{x+y}(\lambda\psi-\lambda^2) \\
&= [2\lambda^2\rho^{x+y} - 2r^{x+y}\psi^2\cos x\theta\cos y\theta - 2r^{x+y}\gamma^2\sin x\theta\sin y\theta - 2r^{x+y}\psi\gamma\sin x\theta\cos y\theta \\
&\quad - 2r^{x+y}\psi\gamma\cos x\theta\sin y\theta] + 2r^{x+y}\sin x\theta\sin y\theta(\psi^2+\gamma^2) + 2\rho^{x+y}(\lambda\psi-\lambda^2) \\
&= 2\lambda^2\rho^{x+y} - 2r^{x+y}\psi^2\cos x\theta\cos y\theta - 2r^{x+y}\gamma^2\sin x\theta\sin y\theta - 2r^{x+y}\psi\gamma\sin x\theta\cos y\theta \\
&\quad - 2r^{x+y}\psi\gamma\cos x\theta\sin y\theta + 2r^{x+y}\psi^2\sin x\theta\sin y\theta + 2r^{x+y}\gamma^2\sin x\theta\sin y\theta + 2\rho^{x+y}\lambda\psi - 2\rho^{x+y}\lambda^2 \\
&= 2\psi[\lambda\rho^{x+y} - r^{x+y}(\psi(\cos x\theta\cos y\theta - \sin x\theta\sin y\theta) + \gamma(\sin x\theta\cos y\theta + \cos x\theta\sin y\theta))] \\
&= 2\psi[\lambda\rho^{x+y} - r^{x+y}(\psi\cos(x+y)\theta + \gamma\sin(x+y)\theta)] \\
&= 2\psi(sTh(x+y))
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

5.2.5. Sonuç

Teorem 5.2.4 deki eşitliklerde $y = x$ alınmasıyla

$$2\psi(cTh(2x)) = [cTh(x)]^2 + [sTh(x)]^2 - 2r^{2x}\sin^2 x\theta(\psi^2 + \gamma^2) + 2\rho^{2x}(\lambda\psi - \lambda^2)$$
$$2\psi(sTh(2x)) = 2sTh(x).cTh(x) + 2r^{2x}\sin^2 x\theta(\psi^2 + \gamma^2) + 2\rho^{2x}(\lambda\psi - \lambda^2)$$

eşitlikleri elde edilir.

<u>Yarı-hiperbolik Tribonacci fonksiyonları ve Tribonacci sayıları</u>

Şimdi, yarı-hiperbolik Tribonacci fonksiyonlarının, Tribonacci sayılarına ait özelliklerle benzerlik gösteren bazı özelliklerine bakacağız.

Yarı-hiperbolik Tribonacci fonksiyonlarının indirgeme bağıntılarını aşağıdaki teoremle verebiliriz:

5.2.6. Teorem

$i)\;\; sTh(x+1) = sTh(x) + sTh(x-1) + sTh(x-2)$
$ii)\;\; cTh(x+1) = cTh(x) + cTh(x-1) + cTh(x-2)$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat

$i)$ Sırasıyla, eşitliğin sol ve sağ taraflarına bakarsak

$$\begin{aligned} sTh(x+1) &= \lambda\rho^{x+1} - r^{x+1}[\psi\cos(x+1)\theta + \gamma\sin(x+1)\theta] \\ &= \lambda\rho^{x+1} - r^{x+1}[\psi(\cos x\theta\cos\theta - \sin x\theta\sin\theta) + \gamma(\sin x\theta\cos\theta + \cos x\theta\sin\theta)] \\ &= \lambda\rho^{x+1} - r^{x+1}\psi\cos x\theta\cos\theta + r^{x+1}\psi\sin x\theta\sin\theta - r^{x+1}\gamma\sin x\theta\cos\theta - r^{x+1}\gamma\sin x\theta\cos\theta \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
sTh(x)+sTh(x-1)+sTh(x-2) &= [\lambda\rho^{x}-r^{x}(\psi\cos x\theta+\gamma\sin x\theta)] \\
&\quad +[\lambda\rho^{x-1}-r^{x-1}(\psi\cos(x-1)\theta+\gamma\sin(x-1)\theta)] \\
&\quad +[\lambda\rho^{x-2}-r^{x-2}(\psi\cos(x-2)\theta+\gamma\sin(x-2)\theta)] \\
&= \lambda[\rho^{x}+\rho^{x-1}+\rho^{x-2}]-r^{x}[\psi\cos x\theta+\gamma\sin x\theta] \\
&\quad -r^{x-1}[\psi(\cos x\theta\cos\theta+\sin x\theta\sin\theta)+\gamma(\sin x\theta\cos\theta-\cos x\theta\sin\theta)] \\
&\quad -r^{x-2}[\psi(\cos x\theta\cos 2\theta+\sin x\theta\sin 2\theta)+\gamma(\sin x\theta\cos 2\theta-\cos x\theta\sin 2\theta)] \\
&= \lambda\rho^{x-2}(\rho^{2}+\rho+1)-r^{x}\psi\cos x\theta(1+r^{-1}\cos\theta+r^{-2}\cos 2\theta) \\
&\quad -r^{x}\psi\sin x\theta(r^{-1}\sin\theta+r^{-2}\sin 2\theta)-r^{x}\gamma\sin x\theta(1+r^{-1}\cos\theta+r^{-2}\cos 2\theta) \\
&\quad +r^{x}\gamma\cos x\theta(r^{-1}\sin\theta+r^{-2}\sin 2\theta) \\
&= \lambda\rho^{x+1}-r^{x}\psi\cos x\theta(1+r^{-1}\cos\theta+r^{-2}\cos 2\theta) \\
&\quad -r^{x}\psi\sin x\theta(r^{-1}\sin\theta+r^{-2}\sin 2\theta)-r^{x}\gamma\sin x\theta(1+r^{-1}\cos\theta+r^{-2}\cos 2\theta) \\
&\quad +r^{x}\gamma\cos x\theta(r^{-1}\sin\theta+r^{-2}\sin 2\theta)
\end{aligned}
$$

$1+r^{-1}\cos\theta+r^{-2}\cos 2\theta = r\cos\theta$ ve $r^{-1}\sin\theta+r^{-2}\sin 2\theta=-r\sin\theta$ olduğu göz önüne alınırsa, istenilen eşitlik elde edilmiş olur.

Benzer şekilde ikinci iddianın da doğruluğu kolayca görülebilir.

5.3. Yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas fonksiyonları

5.3.1. Tanım

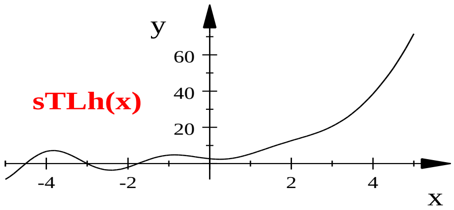
x bir reel sayı olsun.

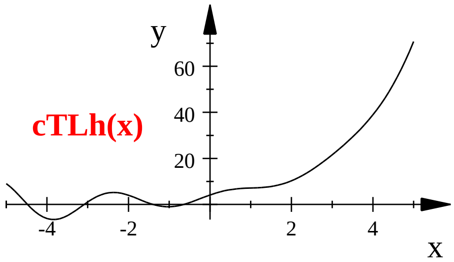
$$
sTLh(x) = \lambda'\rho^{x}-r^{x}(\psi'\cos x\theta+\gamma'\sin x\theta) \tag{5. 15}
$$

$$
cTLh(x)=\lambda'\rho^{x}+r^{x}(\psi'\cos x\theta+\gamma'\sin x\theta) \tag{5. 16}
$$

fonksiyonlarına, sırasıyla, yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas sinüs ve yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas kosinüs fonksiyonları denir.

Yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas sinüs ve yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas kosinüs fonksiyonlarının grafikleri aşağıda verilmiştir:





Şekil 5.2. Yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas sinüs ve yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas kosinüs fonksiyonları

Yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas fonksiyonlarının hiperbolik özellikleri

Şimdi, yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas fonksiyonlarının klasik hiperbolik fonksiyonlara ait özellikler ile benzerlik gösteren bazı özelliklerine bakacağız.

5.3.2. Teorem

Yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas fonksiyonları için

$$[cTLh(x)]^2 - [sTLh(x)]^2 = 4\lambda^{'}(\rho r)^x[\psi^{'}\cos x\theta + \gamma^{'}\sin x\theta]$$

eşitliği vardır.

İspat

$$\begin{aligned}
[cTLh(x)]^2 - [sTLh(x)]^2 &= [\lambda^{'}\rho^x + r^x(\psi^{'}\cos x\theta + \gamma^{'}\sin x\theta)]^2 - [\lambda^{'}\rho^x - r^x(\psi^{'}\cos x\theta + \gamma^{'}\sin x\theta)]^2 \\
&= (\lambda^{'}\rho^x)^2 + 2(\lambda^{'}\rho^x).r^x(\psi^{'}\cos x\theta + \gamma^{'}\sin x\theta) + [r^x(\psi^{'}\cos x\theta + \gamma^{'}\sin x\theta)]^2 \\
&\quad - [(\lambda^{'}\rho^x)^2 - 2(\lambda^{'}\rho^x).r^x(\psi^{'}\cos x\theta + \gamma^{'}\sin x\theta) + [r^x(\psi^{'}\cos x\theta + \gamma^{'}\sin x\theta)]^2] \\
&= 4(\lambda^{'}\rho^x)r^x[\psi^{'}\cos x\theta + \gamma^{'}\sin x\theta] \\
&= 4\lambda^{'}(\rho r)^x[\psi^{'}\cos x\theta + \gamma^{'}\sin x\theta].
\end{aligned}$$

5.3.3. Teorem

Yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas fonksiyonları için

$$[cTLh(x)+sTLh(x)]^n = (2\lambda')^{n-1}[[cTLh(nx)+sTLh(nx)].$$

eşitliği geçerlidir.

İspat

Önce eşitliğin sol tarafına bakalım:

$$\begin{aligned}[cTLh(x)+sTLh(x)]^n &= [\lambda'\rho^x + r^x(\psi'\cos x\theta+\gamma'\sin x\theta)+\lambda'\rho^x - r^x(\psi'\cos x\theta+\gamma'\sin x\theta)]^n \\ &= (2\lambda'\rho^x)^n \\ &= (2\lambda')^n\rho^{nx}.\end{aligned}$$

Daha sonra eşitliğin sağ tarafına bakarsak:

$$\begin{aligned}(2\lambda')^{n-1}[[cTLh(nx)+sTLh(nx)] &= (2\lambda')^{n-1}[\lambda'\rho^{nx}+r^{nx}(\psi'\cos nx\theta+\gamma'\sin nx\theta)+\lambda'\rho^{nx}-r^{nx}(\psi'\cos nx\theta+\gamma'\sin nx\theta)] \\ &= (2\lambda')^{n-1}[2\lambda'\rho^{nx}] \\ &= (2\lambda')^n\rho^{nx}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

5.3.4. Teorem

Yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas kosinüs ve yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas fonksiyonları için

$$\begin{aligned}&i)\ \ 2\psi'(cTLh(x+y)) = cTLh(x).cTLh(y)+sTLh(x).sTLh(y)-2r^{x+y}\sin x\theta\sin y\theta(\psi'^2+\gamma'^2)+2\rho^{x+y}(\lambda'\psi'-\lambda'^2) \\ &ii)\ \ 2\psi'(sTLh(x+y)) = sTLh(x).cTLh(y)+cTLh(x).sTLh(y)+2r'^{x+y}\sin x\theta\sin y\theta(\psi'^2+\gamma'^2)+2\rho^{x+y}(\lambda'\psi'-\lambda'^2).\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir.

İspat

$$i)\ \ cTLh(x).cTLh(y)+sTLh(x).sTLh(y)+2\rho^{x+y}(\lambda'\psi'-\lambda'^2)-2r^{x+y}\sin x\theta\sin y\theta(\psi'^2+\gamma'^2)$$
$$=[\lambda'\rho^x+r^x(\psi'\cos x\theta+\gamma'\sin x\theta)][\lambda'\rho^y+r^y(\psi'\cos y\theta+\gamma'\sin y\theta)]$$
$$+[\lambda'\rho^x-r^x(\psi'\cos x\theta+\gamma'\sin x\theta)][\lambda\rho^y-r^y(\psi'\cos y\theta+\gamma'\sin y\theta)]$$
$$+2\rho^{x+y}(\lambda'\psi'-\lambda'^2)-2r^{x+y}\sin x\theta\sin y\theta(\psi'^2+\gamma'^2)$$
$$=[2\lambda'^2\rho^{x+y}+2r^{x+y}\psi'^2\cos x\theta\cos y\theta+2r^{x+y}\gamma'^2\sin x\theta\sin y\theta+2r^{x+y}\psi'\gamma'\sin x\theta\cos y\theta$$
$$+2r^{x+y}\psi'\gamma'\cos x\theta\sin y\theta]+2\rho^{x+y}(\lambda'\psi'-\lambda'^2)-2r^{x+y}\sin x\theta\sin y\theta(\psi'^2+\gamma'^2)$$
$$=2\lambda'^2\rho^{x+y}+2r^{x+y}\psi'^2\cos x\theta\cos y\theta+2r^{x+y}\gamma'^2\sin x\theta\sin y\theta+2r^{x+y}\psi'\gamma'\sin x\theta\cos y\theta$$
$$+2r^{x+y}\psi'\gamma'\cos x\theta\sin y\theta+2\rho^{x+y}\lambda'\psi'-2\rho^{x+y}\lambda^2-2r^{x+y}\psi'^2\sin x\theta\sin y\theta-2r^{x+y}\gamma'^2\sin x\theta\sin y\theta$$
$$=2\psi'[\lambda'\rho^{x+y}+r^{x+y}(\psi'(\cos x\theta\cos y\theta-\sin x\theta\sin y\theta)+\gamma'(\sin x\theta\cos y\theta+\cos x\theta\sin y\theta))]$$
$$=2\psi'[\lambda'\rho^{x+y}+r^{x+y}(\psi'\cos(x+y)\theta+\gamma'\sin(x+y)\theta)]$$
$$=2\psi'(cTLh(x+y)).$$

$$ii)\ \ sTLh(x).cTLh(y)+cTLh(x).sTLh(y)+2r^{x+y}\sin x\theta\sin y\theta(\psi'^2+\gamma'^2)+2\rho^{x+y}(\lambda'\psi'-\lambda'^2)$$
$$=[\lambda'\rho^x-r^x(\psi'\cos x\theta+\gamma'\sin x\theta)][\lambda'\rho^y+r^y(\psi'\cos y\theta+\gamma'\sin y\theta)]$$
$$+[\lambda'\rho^x+r^x(\psi'\cos x\theta+\gamma'\sin x\theta)][\lambda'\rho^y-r^y(\psi'\cos y\theta+\gamma'\sin y\theta)]$$
$$+2r^{x+y}\sin x\theta\sin y\theta(\psi'^2+\gamma'^2)+2\rho^{x+y}(\lambda'\psi'-\lambda'^2)$$
$$=[2\lambda'^2\rho^{x+y}-2r^{x+y}\psi'^2\cos x\theta\cos y\theta-2r^{x+y}\gamma'^2\sin x\theta\sin y\theta-2r^{x+y}\psi'\gamma'\sin x\theta\cos y\theta$$
$$-2r^{x+y}\psi'\gamma'\cos x\theta\sin y\theta]+2r^{x+y}\sin x\theta\sin y\theta(\psi'^2+\gamma'^2)+2\rho^{x+y}(\lambda'\psi'-\lambda'^2)$$
$$=2\lambda'^2\rho^{x+y}-2r^{x+y}\psi'^2\cos x\theta\cos y\theta-2r^{x+y}\gamma'^2\sin x\theta\sin y\theta-2r^{x+y}\psi'\gamma'\sin x\theta\cos y\theta$$
$$-2r^{x+y}\psi'\gamma'\cos x\theta\sin y\theta+2r^{x+y}\psi'^2\sin x\theta\sin y\theta+2r^{x+y}\gamma'^2\sin x\theta\sin y\theta+2\rho^{x+y}\lambda'\psi'-2\rho^{x+y}\lambda'^2$$
$$=2\psi'[\lambda\rho^{x+y}-r^{x+y}(\psi'(\cos x\theta\cos y\theta-\sin x\theta\sin y\theta)+\gamma'(\sin x\theta\cos y\theta+\cos x\theta\sin y\theta))]$$
$$=2\psi'[\lambda'\rho^{x+y}-r^{x+y}(\psi'\cos(x+y)\theta+'\gamma\sin(x+y)\theta)]$$
$$=2\psi'(sTLh(x+y))$$

elde edilir. Böylelikle istenilen ifade ispat edilmiş olur.

5.3.5. Sonuç

Teorem 5.3.4 de $y=x$ alınmasıyla

$$2\psi'(cTLh(2x))=[cTLh(x)]^2+[sTLh(x)]^2-2r^{2x}\sin^2 x\theta(\psi'^2+\gamma'^2)+2\rho^{2x}(\lambda'\psi'-\lambda'^2)$$
$$2\psi'(sTLh(2x))=2sTLh(x).cTLh(x)+2r'^{2x}\sin^2 x\theta(\psi'^2+\gamma'^2)+2\rho^{2x}(\lambda'\psi'-\lambda'^2)$$

eşitlikleri elde edilir.

Yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas fonksiyonları ve klasik Tribonacci-Lucas sayıları

Şimdi, yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas fonksiyonlarının, klasik Tribonacci-Lucas sayılarına ait özelliklerle benzerlik gösteren bazı özelliklerinden bahsedeceğiz.

5.3.6. Teorem

Yarı-hiperbolik Tribonacci-Lucas fonksiyonları için indirgeme bağıntıları

$$\begin{aligned} i)\ & sTLh(x+1) = sTLh(x) + sTLh(x-1) + sTLh(x-2) \\ ii)\ & cTLh(x+1) = cTLh(x) + cTLh(x-1) + cTLh(x-2) \end{aligned}$$

eşitlikleriyle verilebilir.

İspat

İlk eşitliği aşağıdaki gibi ispatlayabiliriz. Diğer eşitlik de benzer biçimde ispatlanabilir.

$i)$ Eşitliğin sırasıyla sol ve sağ taraflarına bakalım:

$$\begin{aligned} sTLh(x+1) &= \lambda' \rho^{x+1} - r^{x+1}[\psi' \cos(x+1)\theta + \gamma' \sin(x+1)\theta] \\ &= \lambda' \rho^{x+1} - r^{x+1}[\psi' (\cos x\theta \cos\theta - \sin x\theta \sin\theta) + \gamma' (\sin x\theta \cos\theta + \cos x\theta \sin\theta) \\ &= \lambda' \rho^{x+1} - r^{x+1}\psi' \cos x\theta \cos\theta + r^{x+1}\psi' \sin x\theta \sin\theta - r^{x+1}\gamma' \sin x\theta \cos\theta - r^{x+1}\gamma' \sin x\theta \cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sTLh(x) + sTLh(x-1) + sTLh(x-2) &= [\lambda' \rho^{x} - r^{x}(\psi' \cos x\theta + \gamma' \sin x\theta)] \\ &\quad +[\lambda' \rho^{x-1} - r^{x-1}(\psi' \cos(x-1)\theta + \gamma' \sin(x-1)\theta)] \\ &\quad +[\lambda' \rho^{x-2} - r^{x-2}(\psi' \cos(x-2)\theta + \gamma' \sin(x-2)\theta)] \\ &= \lambda' [\rho^{x} + \rho^{x-1} + \rho^{x-2}] - r^{x}[\psi' \cos x\theta + \gamma' \sin x\theta] \\ &\quad - r^{x-1}[\psi' (\cos x\theta \cos\theta + \sin x\theta \sin\theta) + \gamma' (\sin x\theta \cos\theta - \cos x\theta \sin\theta)] \\ &\quad - r^{x-2}[\psi' (\cos x\theta \cos 2\theta + \sin x\theta \sin 2\theta) + \gamma' (\sin x\theta \cos 2\theta - \cos x\theta \sin 2\theta)] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda' \rho^{x-2}(\rho^2+\rho+1) - r^x\psi' \cos x\theta(1+r^{-1}\cos\theta + r^{-2}\cos 2\theta) \\
&\quad - r^x\psi' \sin x\theta(r^{-1}\sin\theta + r^{-2}\sin 2\theta) - r^x\gamma' \sin x\theta(1+r^{-1}\cos\theta + r^{-2}\cos 2\theta) \\
&\quad + r^x\gamma' \cos x\theta(r^{-1}\sin\theta + r^{-2}\sin 2\theta) \\
&= \lambda' \rho^{x+1} - r^x\psi' \cos x\theta(1+r^{-1}\cos\theta + r^{-2}\cos 2\theta) \\
&\quad - r^x\psi' \sin x\theta(r^{-1}\sin\theta + r^{-2}\sin 2\theta) - r^x\gamma' \sin x\theta(1+r^{-1}\cos\theta + r^{-2}\cos 2\theta) \\
&\quad + r^x\gamma' \cos x\theta(r^{-1}\sin\theta + r^{-2}\sin 2\theta)
\end{aligned}
$$

$1 + r^{-1}\cos\theta + r^{-2}\cos 2\theta = r\cos\theta$ ve $r^{-1}\sin\theta + r^{-2}\sin 2\theta = -r\sin\theta$ eşitlikleri kullanılarak, teorem ispatlanmış olur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu araştırma sayesinde, daha önce Falcon ve Plaza tarafından [9] çalışılmış olan k-Fibonacci hiperbolik fonksiyonlarına benzer olarak k-Lucas hiperbolik fonksiyonları tanımlanmıştır. k-Fibonacci sayıları ile k-Lucas sayıları arasında var olan bazı bağıntıların benzerlerinin k-Fibonacci hiperbolik fonksiyonları ile k-Lucas hiperbolik fonksiyonları arasında da var olduğu gösterilmiştir.

Ayrıca, bugüne kadar ikinci mertebeden rekürans dizileri için elde edilen hiperbolik fonksiyon tanımlamalarına benzer olarak, bu çalışmada, üçüncü mertebeden rekürans dizileri için hiperbolik fonksiyon tanımları yapılmaya çalışıldı. Dolayısıyla, üçüncü mertebeden rekürans dizilerinin sürekli birer versiyonları elde edilmiş oldu.

KAYNAKLAR

1. Stakhov, A. and Tkachenko, I. (1993). Hyperbolic Fibonacci trigonometry, ***Rep. Ukr. Acad. Sci.***, 7, 9-14.

2. Stakhov, A. (2005). On a new class of hyperbolic functions. ***Chaos, Solitons & Fractals***, 23(2), 379-389.

3. Stakhov, A. (2005). The generalized principle of the golden section and its applications in mathematics, science, and engineering. ***Chaos, Solitons & Fractals***, 26(2), 263-289.

4. Stakhov, A. and Rozin, B. (2005). The golden shofar. ***Chaos, Solitons & Fractals***, 26(3), 677-684.

5. Stakhov, A. and Rozin, B. (2005). Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas $p-$ numbers. ***Chaos, Solitons & Fractals***, 27(5), 1163-1177.

6. Stakhov, A. and Rozin, B. (2006). The continous functions for the Fibonacci and Lucas $p-$ numbers. ***Chaos, Solitons & Fractals***, 28(4), 1014-1025.

7. Stakhov, A. and Rozin, B. (2007). The "golden" hyperbolic models of Universe. ***Chaos, Solitons & Fractals***, 34(2), 159-171.

8. Stakhov, A. P. (2006). Gazale formulas, a new class of the hyperbolic Fibonacci and Lucas functions and the improved method of the “golden” crytography // ***Academy of Trinitarism***, 77-6567, publicatioon 14098, Moscow.

9. Falcon, S. and Plaza, A. (2007). On the Fibonacci $k-$ numbers. ***Chaos, Solitons & Fractals***, 32(5), 1615-1624.

10. Falcon, S. and Plaza, A. (2007). The $k-$ Fibonacci sequence and the Pascal $2-$ triangle. ***Chaos, Solitons & Fractals***, 33(1), 38-49.

11. Falcon, S. and Plaza, A. (2008). The $k-$ Fibonacci hyperbolic functions. ***Chaos, Solitons & Fractals***, 38(2), 409-420.

12. Falcon, S. (2011). On the $k-$ Lucas numbers. ***Chaos, Solitons & Fractals***, 21(6), 1039-1050.

13. Kocer, E. G., Tuglu, N. and Stakhov, A. (2008). Hyperbolic functions with second order recurrence sequences. ***ARS Combinatoria***, 88, 65-81.

14. Spickerman, W. R. (1982). Binet's formula for the Tribonacci sequence. ***Fibonacci Quarterly***, 20(2), 118-121.

15. Catalani, M. (15 Sep 2002). Identities for Tribonacci-related sequences. **arXiv:math/0209179v1 [math.CO]**.

16. Koshy, T. (2001). Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, ***New York Wiley& Sons, Interscelence.***

ÖZGEÇMİŞ

KişiselBilgiler

Soyadı,adı	:AZMAN, Huriye
Uyruğu	:T.C.
Doğumtarihiveyeri	:29.04.1985, Çayeli
Medenihali	:Bekâr
Telefon	:0(312)212 53 44
e-mail	:huriyeazman@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	**EğitimBirimi**	**Mezuniyettarihi**
Yükseklisans	GaziÜniversitesi/Fen Bilimleri Enstitüsü	2009
Lisans	Gazi Üniversitesi/Fen Edebiyat Fakültesi	2007
Lise	Rize Anadolu Lisesi	2002

İşDeneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2008-Halen	GaziÜniversitesi	Öğretim Görevlisi (Ücretli)

Verdiği lisans düzeyindeki dersler:

Dersin Kodu ve Adı:	**Dönemi:**	**Toplam Ders Saati:**
Bilimsel Hazırlık Matematik	2013-2014 Bahar	28
Bilimsel Hazırlık Matematik	2013-2014 Güz	28
Bilimsel Hazırlık Matematik	2012-2013 Bahar	21
Bilimsel Hazırlık Matematik	2012-2013 Güz	21
Bilimsel Hazırlık Matematik	2011-2012 Güz	14
Bilimsel Hazırlık Matematik	2011-2012 Bahar	21
MAT-102 Genel Matematik 2 (İ:Ö)	2011-2012 Bahar	4
MAT-201 Diferensiyel Denklemler (İ:Ö)	2011-2012 Güz	3
MAT-101 Genel Matematik 1	2011-2012 Güz	4
MAT-101 Genel Matematik 1	2010-2011 Güz	12
MAT-102 Genel Matematik 2	2009-2010 Bahar	4
MAT-101 Genel Matematik 1	2009-2010 Güz	8
MAT-102 Genel Matematik 2 (İ.Ö)	2009-2010 Bahar	8
MAT-101 Genel Matematik 1	2008-2009 Güz	4
MAT-101 Genel Matematik 1 (İ.Ö)	2008-2009 Güz	8
MAT-102 Genel Matematik 2	2008-2009 Bahar	12
MAT-102 Genel Matematik 2 (İ.Ö)	2008-2009 Bahar	4

YabancıDil

İngilizce

Yayınlar

1. Taşçı, D. and Azman, H. (2014). The *k*-Lucas hyperbolic functions. ***Communications in Mathematics and Applications,*** 1(5), 11-21.

2. Taşçı, D. and Azman, H. (2014). The quasi-hyperbolic Tribonacci and quasi-hyperbolic Tribonacci-Lucas functions. ***Communications in Mathematics and Applications,*** 1(5), 31-40.

GAZİ GELECEKTİR...