GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

TRİBONACCİ BENZERİ TAMLAYICI İNDİRGEME BAĞINTILARI

Simge ODABAŞ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2014

SİMGE ODABAŞ tarafından hazırlanan “TRİBONACCİ BENZERİ TAMLAYICI İNDİRGEME BAĞINTILARI ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ……………………..

Başkan : Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

Matematik, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ……………………

Üye : Prof. Dr. Ayşe Çiğdem ÖZCAN

Matematik, Hacettepe Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ……………………...

Üye : Doç. Dr. Naim TUĞLU

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ……………………

Üye : Doç. Dr. Ercan ALTINIŞIK

Matematik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ……………………

Tez Savunma Tarihi: 25 /07 / 2014

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……………………………

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Simge Odabaş
06.08.2014

TRİBONACCİ BENZERİ TAMLAYICI İNDİRGEME BAĞINTILARI

(Doktora Tezi)

Simge ODABAŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2014

ÖZET

Bu çalışmada aritmetik diziler ve bazı dizilerin tamlayıcı dizileri ile bu tamlayıcı dizilerin özellikleri araştırılmıştır. Pozitif tamsayıların tamlayıcı sistemleri incelenmiştir. Ayrıca elde edilen bu sonuçlar yardımıyla Tribonacci-benzeri dizilerinin tamlayıcı dizileri elde edilmiştir.

Bilim Kodu	:	204. 1. 025
Anahtar Kelimeler	:	Fibonacci dizileri, indirgeme bağıntıları, tamlayıcı diziler, kapalı formlar
Sayfa Adedi	:	57
Danışman	:	Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

COMPLEMENTARY RECURRENCE RELATIONS OF TRIBONACCI-LIKE SEQUENCES

(Ph. D. Thesis)

Simge ODABAŞ

GAZI UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2014

ABSTRACT

In this study, complementary sequences of arithmetic and some specific sequences and these complementary sequences of properties are shown. Complementary systems of positive integers are examined. Finally, by using these results, complementary sequences of Tribonacci-like sequences are obtained.

Science Code	:	204. 1. 025
Key Words	:	Fibonacci sequences, recurrences, complementary sequences,closed forms
Page Number	:	57
Supervisor	:	Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında tecrübelerinden faydalandığım, bu süreçte her türlü yardımını esirgemeyen, yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren saygı değer hocam Prof. Dr. Dursun TAŞÇI' ya, hayat boyu her türlü sıkıntımda yanımda olan ve bu süreçte bana anlayış gösteren sevgili aile fertlerime en içten saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT.................... v

TEŞEKKÜR.................... vi

İÇİNDEKİLER vii

ÇİZELGELERİN LİSTESİ.................... viii

ÇİZELGELERİN LİSTESİ.................... ix

SİMGELER VE KISALTMALAR.................... x

1. GİRİŞ.................... 1

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖNERMELER 3

2.1. Bazı Dizilerin Tamlayıcı Dizileri ve Özellikleri 3

3. TAMLAYICI FİBONACCİ DİZİLERİ.................... 11

3.1. Giriş 11

3. 1. 1. $a_1 \equiv a_2 \equiv 0 \pmod{3}$ için sonuçlar.................... 12

3. 1. 2. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 0 \pmod{3}$ için sonuçlar.................... 13

4. TRİBONACCİ BENZERİ TAMLAYICI İNDİRGEME BAĞINTILARI 23

4.1. Tamlayıcı Tribonacci Dizileri.................... 23

4. 1. 1. $a_1 \equiv a_2 \equiv 3 \pmod{4}$ için sonuçlar.................... 23

4. 1. 2. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3 \pmod{4}$ için sonuçlar.................... 26

4. 1. 3. Özel durumlar.................... 52

5. SONUÇ VE ÖNERİLER.................... 53

KAYNAKLAR 55

ÖZGEÇMİŞ 57

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 2.1. $f^{*}(n)$ dizisinin ilk dokuz değeri 4

Çizelge 2.2. $F(n)$ ve $G(n)$ tamlayıcı dizilerinin ilk dokuz değeri 6

Çizelge 2.3. $F(n)$ ve $G(n)$ tamlayıcı dizilerinin ilk yedi değeri 7

Çizelge 2.4. $G_1(n)$, $G_2(n)$ ve $G_3(n)$ tamlayıcı dizilerinin değerleri 9

Çizelge 3.1. $r=1$ durumu 14

Çizelge 3.2. $r=2$ durumu 14

Çizelge 3.3. $\Delta_x=3$ ile belirlenen 3 fark değerleri 15

Çizelge 3.4. $\Delta_x=4$ ile belirlenen $\Delta_i=2$, 3, ve 4 fark değerleri 16

Çizelge 3.5. $\Delta_x=5$ ile belirlenen $\Delta_i=2$, 3, ve 4 fark değerleri 17

Çizelge 3.6. $r=1$ durumu için sıra dışı farklar 18

Çizelge 3.7. $r=2$ durumu için sıra dışı farklar 18

Çizelge 3.8. $a_1=a_2=$ 1, 2 ve 4 için ilk sıra dışı farklar 21

Çizelge 4.1. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r=0$ için c_i, a_i ve Δ_i' nin değerleri 31

Çizelge 4.2. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r=1$ için c_i, a_i ve Δ_i' nin değerleri 35

Çizelge 4.3. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r=2$ için c_i, a_i ve Δ_i' nin değerleri 39

Çizelge 4.4. $\Delta_x=4$ ile belirlenen 4 farkları 40

Çizelge 4.5. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $\Delta_x=5$ ile belirlenen 3, 4 ve 5 farkları 41

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 4.6. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $\Delta_x = 6$ ile belirlenen 3, 4 ve 5 farkları 42

Çizelge 4.7. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r = 0$ için $\Delta_i = 5$ ile belirlenen 3, 4 ve 5 farkları 43

Çizelge 4.8. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r = 0$ için $\Delta_i = 6$ ile belirlenen 3, 4 ve 5 farkları 44

Çizelge 4.9. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r = 1$ için $\Delta_i = 5$ ile belirlenen 3, 4 ve 5 farkları 45

Çizelge 4.10. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r = 1$ için $\Delta_i = 6$ ile belirlenen 3, 4 ve 5 farkları 46

Çizelge 4.11. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r = 2$ için $\Delta_i = 5$ ile belirlenen 3, 4 ve 5 farkları 47

Çizelge 4.12. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r = 2$ için $\Delta_i = 6$ ile belirlenen 3, 4 ve 5 farkları 48

Çizelge 4.13. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r = 0$ için sıra dışı farklar 49

Çizelge 4.14. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r = 1$ için sıra dışı farklar 49

Çizelge 4.15. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r = 2$ için sıra dışı farklar 49

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur:

Simgeler	**Açıklamalar**
$\lfloor x \rfloor$	Taban fonksiyonu
Δ_i	Ardışık fark
$f^*(n)$	$f(k) < n$ eşitsizliği için en büyük pozitif k tamsayısı
$F_k(n)$	$k = 0,1,2,\ldots$ için tamsayıların bir dizisi
$Cf(n)$	$f(n)$ dizisinin tamlayıcı dizisi
$f(k)$	$f(k)$: $\mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ şeklinde tanımlı fonksiyon

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	Pozitif tamsayılar kümesi

1. GİRİŞ

Problem Durumu/ Konunun Tanımı

Fibonacci, Tribonacci, aritmetik diziler ve bu dizilerin tamlayıcı dizileri ilginç bir araştırma alanıdır.

Tamlayıcı indirgeme bağıntıları, tamlayıcı diziler ve bu dizilerin uygulamaları hakkında geçmişten günümüze kadar çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Tamlayıcı diziler hakkında ilk çalışma "Beatty Problemi" ismi ile 1926 yılında Samuel Beatty tarafından yapılmıştır (Beatty, 1926). Lambek ve Moser "Doğal sayıların tamlayıcı dizilerini ve bu tamlayıcı dizilerin terslerini" göstermişlerdir (Lambek ve Moser, 1954). Fraenkel ise; "Pozitif tamsayıların tamlayıcı sistemlerini" göstermiştir (Fraenkel, 1977). Daha sonra Spickerman ve Joyner "Tamlayıcı dizilerin genel terimi" hakkında bilgi vermiştir (Spickerman ve Joyner, 1989). Gargano ve Quintas' ın "Tamlayıcı aritmetik diziler" üstüne çalışmaları vardır (Gargano ve Quintas, 2003).

Bazı dizilerin tamlayıcı dizileri ve pozitif tamsayıların tamlayıcı sistemleri hakkında da önemli çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar şunlardır: "Tamlayıcı Fibonacci dizileri" Bode, Harborth ve Kimberling (2007), "Tamlayıcı denklemler" (Kimberling, 2007) "Tamlayıcı denklemler ve Wythoff dizileri" (Kimberling, 2008) ve "Beatty ve Wythoff dizileri" (Kimberling, 2011). şeklindedir.

Araştırmanın Amacı

Araştırmadaki amacımız, pozitif tamsayıların tamlayıcı sistemleri ve tamlayıcı Fibonacci dizilerinin özelliklerinden yararlanarak Tribonacci benzeri dizilerin tamlayıcı dizileri ve bu dizilerin özelliklerini göstermektir.

Araştırmanın Önemi

Yapılan bu çalışmada, elemanları pozitif tamsayılardan oluşan herhangi bir dizinin, ilk iki terimi ya da dizi için başlangıç koşulu verildiğinde Tribonacci-benzeri indirgeme bağıntısı tanımlanarak, tamlayıcı dizisi elde edilmiştir. Her iki dizinin elemanları birbirinden farklı olup, tüm pozitif tamsayıları oluşturur. Farklı indirgeme bağıntıları tanımlanarak ya da herhangi iki dizinin elemanları birbirinden farklı olacak şekilde genel terimleri belirlenerek, birbirlerinin tamlayıcı dizisi olduğu gösterilebilir. Bu dizilerin en önemli noktası ise, tamsayıları oluşturmasıdır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖNERMELER

Bu bölümde, çalışma boyunca kullanılacak bazı temel tanımlar ve önermeler verilmiştir.

2.1. Bazı Dizilerin Tamlayıcı Dizileri ve Özellikleri

2.1.1. Tanım

Hiçbir ortak elemanı olmayan ve elemanlarının birleşimi tüm pozitif tamsayıların kümesini oluşturan dizilere tamlayıcı dizi denir.

Örnek

1. Rastgele seçilen $\{1, 5, 6, 8, 11, 15, 16, 18, 20, 22, \ldots\}$ dizisinin tamlayıcı dizisi $\{2, 3, 4, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 17, 19, \ldots\}$ şeklindedir.

2. n∈$\mathbb{Z}^+$ olmak üzere $F(n) = (2n-1)$ şeklinde tek tamsayılardan oluşan $(F(n))$ dizisinin tamlayıcı dizisi, $G(n) = (2n)$ şeklinde çift tamsayılardan oluşan $(G(n))$ dizisidir (Bkz. Tanım 2.1.3).

2.1.2. Tanım

x∈ℝ, m∈ℤ olmak üzere $\lfloor x \rfloor$= max{m∈ℤ: m≤x} şeklinde tanımlanan fonksiyona taban fonksiyonu denir. Bu çalışmada kullandığımız taban fonksiyonunun özellikleri:

a) $\lfloor x \rfloor = m \Leftrightarrow x-1 < m \leq x$

b) $\lfloor x \rfloor = m \Leftrightarrow m \leq x < m+1$

c) n∈ℤ olmak üzere $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

d) $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

şeklindedir.

2.1.3. Tanım

Sonlu veya sonsuz herhangi $(F(n))$ ve $(G(n))$ dizilerinin genel terimleriyle birlikte tanımlanmasına bu dizilerin kapalı formları denir. Örneğin; $(F(n))=(2,4,6,8,10,\ldots)$ dizisinin kapalı formu $F(n)=(2n)$, $(G(n))=(3,5,7,9,11,\ldots)$ dizisinin kapalı formu $G(n)=(2n+1)$ şeklindedir.

2.1.4. Tanım

$f(n)$: $\mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ şeklinde tanımlı fonksiyon olsun. $f(k)<n$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde en büyük k pozitif tamsayısı "$f^*(n)$" şeklinde tanımlanır. Eğer bu şartı sağlayan k pozitif tamsayısı yoksa $f^*(n)=0$ dır (Gargano ve Quintas, 2003).

Örnek

Rastgele verilen $f(n)$ fonksiyonunun değerleri için;

Çizelge 2.1. $f^*(n)$ dizisinin ilk dokuz değeri

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$	2	4	7	7	8	11	13	16	20
$f^*(n)$	0	0	1	1	2	2	2	4	5

şeklindedir (Gargano ve Quintas, 2003).

2.1.1. Teorem

$f(n)$: $\mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ şeklinde tanımlı fonksiyon ise; bu durumda $(F(n))=(f(n)+n)$ ve $(G(n))=(f^*(n)+n)$ tamlayıcı dizilerdir. Tersine $(F(n))$ ve $(G(n))$ tamlayıcı diziler olduğunda öyle bir azalmayan $f(n)$ fonksiyonu vardır ki; $(F(n))=(f(n)+n)$ ve $(G(n))=(f^*(n)+n)$ dir (Gargano ve Quintas, 2003).

İspat

İlk olarak gerek şartı ispatlayalım.

$f(n)$ azalmayan fonksiyon olduğundan $f^*(n)$ fonksiyonu artan olup, $(F(n))$ ve $(G(n))$ dizileri kesinlikle artandır.

Kabul edelim ki; $m \geq 1$ ve m ilk dizi olan $(F(n))$ dizisinde bulunmasın. O halde $m = f(s)+s$ eşitliğini sağlayan hiçbir s yoktur. m' nin ikinci dizi olan $(G(n))$ dizisinde bulunduğunu gösterelim. Eğer $m \leq f(0)+0 = f(0)$ ise $f^*(m)=0$ olup, $m = f^*(m)+m$ eşitliği yazılabilir. Böylece m ikinci dizi olan $(G(n))$ dizisinde bulunmuş olur. Eğer $m > f(0)+0$ ise; $f(l) < f(m-l) \leq f(l+1)$ eşitsizliğini sağlayan öyle bir l vardır ki $f(l)+l < m \leq f(l+1)+(l+1)$ dir. Bu eşitsizlikte $l=0$ ise, $f(0) < m \leq f(1)$ olur. Buradan $f^*(m)=0$ ve $m = f^*(m)+m$ olduğundan m ikinci dizi olan $(G(n))$ dizisinde bulunur. Eğer $l \geq 1$ ise, $l = f^*(m-l)$ şeklindedir. Ayrıca $0 \leq f(l) < m-l$ olduğundan $m-l \geq l$ ifadesi görülür. $m = l+(m-l) = f^*(m-l)+(m-l)$ değeri de ikinci dizi olan $(G(n))$ de bulunur.

Karşıt olarak, $m \geq 1$ ve m ikinci dizi olan $(G(n))$ de ise, m' nin ilk dizi olan $(F(n))$ dizisinde bulunmadığını gösterelim. $m, r \geq 1$ ve $m = f^*(r)+r$ olsun. Buradan $m-r = f^*(r)$ dir.

Eğer $m=r$ ise, $0 = f^*(r) = f^*(m)$ olur. $f(k) < m$ eşitsizliğini sağlayıp $k \geq 1$ olan hiçbir tamsayı yoktur. f azalmayan fonksiyonu için her $s \geq 1$ olduğunda $f(s)+s > m$ olduğu açıktır. $f(1) \geq m$ ve m ilk dizi olan $(F(n))$ dizisinde bulunmadığı görülür. Eğer $(m-r) \geq 1$ ise,

$$f(m-r) < r \leq f(m-r+1)$$
$$f(m-r)+(m-r) < r+(m-r) \leq f(m-r+1)+(m-r)$$
$$f(m-r)+(m-r) < m < f(m-r+1)+(m-r+1)$$

dir. Her $k=(m-r) \geq 1$ için; $f(k)+k < m \leq f(k+1)+(k+1)$ olup, m ilk dizi olan $(F(n))$ dizisinde bulunmaz.

Örnek

Rastgele verilen $f(n)$ fonksiyonunun değerleri için;

Çizelge 2.2. $F(n)$ ve $G(n)$ tamlayıcı dizilerinin ilk dokuz değeri

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$	2	4	7	7	8	11	13	16	20
$f^*(n)$	0	0	1	1	2	2	2	4	5
$F(n)$	3	6	10	11	13	17	20	24	29
$G(n)$	1	2	4	5	7	8	9	12	14

şeklindedir (Gargano ve Quintas, 2003).

2.1.2. Teorem

X herhangi pozitif irrasyonel sayı ve $Y = X^{-1} = \dfrac{1}{X}$ olsun. $F(n) = \lfloor n \cdot (1+X) \rfloor$ ve $G(n) = \lfloor n \cdot (1+Y) \rfloor$ tamlayıcı dizilerdir (Gargano ve Quintas, 2003).

İspat

X, Y irrasyonel sayılar olup $F(n)$, $G(n)$ dizilerinin her bir terimi $(n \cdot (1+X))$ ve $(n \cdot (1+Y))$ şeklindedir. n' den küçük olan $(1+X)$ çarpanlarının sayısı $\lfloor n/(1+X) \rfloor$, benzer şekilde n' den küçük olan $(1+Y)$ çarpanlarının sayısı $\lfloor n/(1+Y) \rfloor$ olsun. 1 ile n arasında olan $\lfloor n/(1+X) \rfloor$ + $\lfloor n/(1+Y) \rfloor$ terimleri bu dizilerde bulunur.

$(n/(1+X))$ ve $(n/(1+Y))$ tamsayı olmadıklarından ve $(1/(1+X)) + (1/(1+Y)) = (1/(1+X)) + (X/(1+X)) = 1$ olduğundan

$$(n/(1+X)) - 1 < \lfloor n/(1+X) \rfloor < (n/(1+X))$$

$$(n/(1+Y)) - 1 < \lfloor n/(1+Y) \rfloor < (n/(1+Y))$$

$$n - 2 < \lfloor n/(1+X) \rfloor + \lfloor n/(1+Y) \rfloor < n$$

dir. $\lfloor n/(1+X) \rfloor + \lfloor n/(1+Y) \rfloor$ tamsayı olduğundan bu toplam n-1 olmalıdır. Bu dizilerde n den küçük n-1 terimleri vardır, buna benzer n+1 den küçük olan n terimleri vardır. n

sayısını 1 artırarak bu şekilde devam edilir. Böylece $F(n)=\lfloor n\cdot(1+X)\rfloor$ ve $G(n)=\lfloor n\cdot(1+Y)\rfloor$ tamlayıcılardır.

Örnek

$X=\sqrt{2}=1,414\ldots$ ve $Y=\dfrac{1}{X}=0,707\ldots$ değerleri için;

Çizelge 2.3. $F(n)$ve $G(n)$ tamlayıcı dizilerinin ilk yedi değeri

n	1	2	3	4	5	6	7
$n\cdot(1+X)\cong$	2,4	4,8	7,2	9,6	12	14,4	16,8
$F(n)$	2	4	7	9	12	14	16
$n\cdot(1+Y)\cong$	1,7	3,4	5,1	6,8	8,5	10,2	11,9
$G(n)$	1	3	5	6	8	10	11

şeklindedir (Gargano ve Quintas, 2003).

2.1.3. Teorem

a) $(F(n))=(n^2)$ ve $(G(n))=$ $(\lfloor\sqrt{n}\rfloor+n)$ tamlayıcı dizilerdir (Honsberger, 1973).

b) $(F(n))=\left(\dfrac{n^2+n}{2}\right)$ ve $(G(n))=(\lfloor\sqrt{2n}\rfloor+n)$ tamlayıcı dizilerdir (Honsberger, 1973).

İspat

a) $(F(n))=(n^2)$ olmak üzere $(F(n))=(1,4,9,16,25,36,49,64,81,100,\ldots)$ dür. Teorem 2.1.1 kullanılarak bu dizinin tamlayıcı dizisinin kapalı formu bulunacaktır. $(F(n))=(n^2)$ olduğundan Teorem 2.1.1 den $f(n)=F(n)-n=n^2-n$ dir. Tanım 2.1.4 den $(k^2-k+0.25)<n$ olduğundan $f(k)=(k^2-k)<n$ dir. Böylece $(k-0.5)^2<n$ eşitsizliğinden $k<\lfloor(\sqrt{n}+0.5)\rfloor$ olduğu görülür. Buradan $f^*(n)=(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)$ bulunmuş olur.

Teorem 2.1.1 den $(F(n))$ dizisinin tamlayıcı dizisi $(G(n))$ olup, kapalı formu $(G(n)) = \left(f^*(n)+n\right) = (\lfloor\sqrt{n}\rfloor + n)$ şeklindedir.

b) $(F(n)) = \left(\dfrac{n^2+n}{2}\right)$ olmak üzere $(F(n)) = (1,3,6,10,15,21,28,36,45,55,\ldots)$ dir. Teorem 2.1.1 kullanılarak $(G(n))$ dizisinin tamlayıcı dizisinin kapalı formu gösterilecektir. $(F(n)) = \left(\dfrac{n^2+n}{2}\right)$ olduğundan Teorem 2.1.1 den $f(n) = F(n) - n = \left(\dfrac{n^2+n}{2}\right) - n$ dir. Tanım 2.1.4 den $f^*(k) = \left(k^2 - k/2\right) < n \Rightarrow k^2 - k + 0.25 < 2n \Rightarrow (k-0.5)^2 < 2n \Rightarrow$ $k < \lfloor\sqrt{2n} + 0.5\rfloor$ dur. Buradan $f^*(n) = (\lfloor\sqrt{2n}\rfloor)$ olduğu görülür. Teorem 2.1.1 den $(F(n))$ dizisinin tamlayıcı dizisi $(G(n))$ olup, kapalı formu $(G(n)) = \left(f^*(n)+n\right) = (\lfloor\sqrt{2n}\rfloor + n)$ şeklindedir.

2.1.4. Teorem

$(F(n)) = (dn + a)$ (d > 1; $n \in \mathbb{Z}$; a, d $\in \mathbb{Z}$ sabitler) tamsayıların aritmetik dizisi ise; bu dizinin tamlayıcı dizisi $(G(n)) = \left(\left\lfloor \dfrac{(dn-a-1)}{(d-1)} \right\rfloor\right)$ şeklindedir (Gargano ve Quintas, 2003).

İspat

Tanım 2.1.4 den $f_k(n) = F(k) - k < n$ olduğundan $(d-1)k + a < n$ yazılabilir. $f_k(n)$ fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{Z}$ olmasından $f^*(n) = \left\lfloor (n-a-1)/(d-1) \right\rfloor$ dir. Teorem 2.1.1 den $(G(n)) = \left(f^*(n)+n\right)$ olduğu için $(G(n)) = \left(\left\lfloor (dn-a-1)/(d-1) \right\rfloor\right)$ dir. Böylece $(F(n))$ ve $(G(n))$ tamlayıcı dizi çiftidir.

Örnek

$F_1(n)$, $F_2(n)$ ve $F_3(n)$ aritmetik dizileri için;

Çizelge 2.4. $G_1(n)$, $G_2(n)$ ve $G_3(n)$ tamlayıcı dizilerinin değerleri

n	$\dots$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	$\dots$
$F_1(n)$	$\dots$	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10	13	$\dots$
$F_2(n)$	$\dots$	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	$\dots$
$F_3(n)$	$\dots$	-25	-20	-15	-10	-5	0	5	10	15	$\dots$
$G_1(n)$	$\dots$	-7	-6	-4	-3	-1	0	2	3	5	$\dots$
$G_2(n)$	$\dots$	-12	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	$\dots$
$G_3(n)$	$\dots$	-4	-3	-2	-1	1	2	3	4	6	$\dots$

$(F_1(n)) = (3n+1)$ için $(G_1(n)) = \left(\left\lfloor \frac{(3n-2)}{(3-1)} \right\rfloor\right) = \left(\left\lfloor \frac{(3n-2)}{2} \right\rfloor\right)$

$(F_2(n)) = (2n+3)$ için $(G_2(n)) = \left(\left\lfloor \frac{(2n-4)}{(2-1)} \right\rfloor\right) = (2n-4)$

$(F_3(n)) = (5n-5)$ için $(G_3(n)) = \left(\left\lfloor \frac{(5n+4)}{(5-1)} \right\rfloor\right) = \left(\left\lfloor \frac{(5n+4)}{4} \right\rfloor\right)$

şeklindedir (Gargano ve Quintas, 2003).

2.1.5. Tanım

a) $F_0(n) = n$ ve $k > 0$ için; $F_k(n) = n + F(F_{k-1}(n))$ şeklinde tanımlanır (Fraenkel, 1977).

b) Tanım 2.1.4 den $f(k) < n$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde en büyük k pozitif tamsayısı "$f^*(n)$" olmak üzere $CF(n) = n + f^*(n)$ şeklinde tanımlanır (Fraenkel, 1977).

2.1.5. Teorem

$CF(n) = \lim_{k\to\infty} F_k(n)$ dir (Moser ve Lambek, 1954).

İspat

İlk olarak $F_{k+1}(n) \geq F_k(n)$ olduğunu tümevarım yoluyla gösterelim. $k=0$ için doğruluğu açıktır. Kabul edelim ki $k>0$ ve $F_k(n) \geq F_{k-1}(n)$ için doğru olsun. Tanım 2.1.5 den $F_{k+1}(n) = n + F^*(F_k(n)) \geq n + F^*(F_{k-1}(n)) = F_k(n)$ olup $k+1$ için de doğrudur. Kabulümüzden F^* azalmayandır. Şimdi ise $F_k(n) \leq CF(n)$ olduğunu gösterelim. Genelliği bozmadan $CF(n)$ sonlu olarak kabul edilebilir. Farz edelim ki $F_{k-1}(n) \leq CF(n)$ olsun. Tanım 2.1.5 ve ileri sürülen hipoteze göre $F_k(n) = n + F^*(F_{k-1}(n)) \leq n + F^*(CF(n)) = CF(n)$ dir. Buradan $G(n) = \lim_{k\to\infty} F_k(n) \leq CF(n)$ yazabiliriz. Aynı şekilde genelliği bozmadan $G(n)$ sonlu kabul edilebilir. Yeterince büyük k için $G(n) = F_{k-1}(n) = F_k(n) = n + F^*(F_{k-1}(n)) = n + F^*(G(n))$ olup $n = G(n) - F^*(G(n))$ dir. Tanım 2.1.5 yardımıyla n , CF ' in $G(n)$' i aşmayan eleman sayısıdır. Yani n , $CF(m) \leq G(n)$ eşitsizliğini sağlayan m değerlerinin sayısıdır. $CF(n) \leq G(n)$ ve $G(n) \leq CF(n)$ olduğundan $G(n) = CF(n) = \lim_{k\to\infty} F_k(n)$ dir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

3. TAMLAYICI FİBONACCİ DİZİLERİ

Bu bölümde "Tamlayıcı Fibonacci dizileri" (Bode ve diğerleri, 2007) çalışması incelenmiştir.

3.1. Giriş

Verilen a_1, a_2 değerleri için (a_i) dizisinin Fibonacci-benzeri indirgeme bağıntısı ile $a_i = c_{i-1} + c_{i-2}$ şeklinde (c_i) dizisinden üretilir. Burada (c_i) dizisi (a_i) dizisinin bir tamlayıcısıdır.

Pozitif tamsayılardan oluşan bir dizinin tamlayıcı dizisi, verilen dizide olmayan bütün pozitif tamsayıların kesinlikle artan dizisidir. Dizilerin tamlayıcıları örneğin [3-4]'de tartışılmıştır. Burada, (c_i) dizisinin (a_i) dizisinin tamlayıcısı olduğu ve (a_i) dizisinin (c_i) dizisinden Fibonacci-benzeri indirgeme bağıntısı ile belirlendiği, (a_i) ve (c_i) dizilerinden oluşan dizi çifleri dikkate alınmıştır. Şöyle ki, $a_1 \le a_2$ olmak üzere verilen a_1, a_2 için (a_i) ve (c_i) dizileri aşağıdaki gibi belirlenir:

$$
\begin{aligned}
&a_i = c_{i-1} + c_{i-2} \quad i \ge 3, \\
&c_1 = a_1\ ,\ a_2 \text{ 'den farklı en küçük pozitif tamsayı,} \qquad (3.1) \\
&c_i = a_1, a_2, \ldots, a_i, c_1, c_2, \ldots, c_{i-1} \quad i \ge 2 \text{ 'den farklı en küçük pozitif tamsayı.}
\end{aligned}
$$

$a_i > c_{i-1}$ ve (c_i) kesinlikle artan dizi olduğu için, (c_i) dizisinin (a_i) dizisinin tamlayıcısı olduğuna dikkat edilmiştir. (a_i) dizisi de en az $i \ge 3$ için kesinlikle artacaktır.

Örnek

$a_1 = 2$, $a_2 = 5$ seçildiğinde;

$(a_i) = (2, 5, 4, 9, 13, 15, 18, 21, 23, \dots)$,

$(c_i) = (1, 3, 6, 7, 8, 10, 11, 12, \dots)$.

dir.

3.1.1. $a_1 \equiv a_2 \equiv 0 \pmod 3$ için sonuçlar

Bu durumda (a_i) dizisi 3 fark ile artan aritmetik dizidir.

3.1.1. Teorem

$a_1 \equiv a_2 \equiv 0 \pmod 3$ olmak üzere $a_i = 3i - 6 :\ i \geq 3$ şeklinde tanımlanan (a_i) dizisinin tamlayıcı dizisi $c_i = \left\lfloor \frac{3i-1}{2} \right\rfloor :\ i \geq 1$ şeklinde tanımlanan (c_i) dizisidir Bode, Harborth ve Kimberling (2007).

İspat

İddia edilen dizilerin Eş. 3.1 eşitliğinde verilmiş olan üç eşitliğin koşullarını sağlaması gerekmektedir.

$$
\begin{aligned}
a_i &= c_{i-1} + c_{i-2} \\
&= \left\lfloor \frac{3i-4}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3i-7}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6i-11}{2} \right\rfloor = 3i - 6 \quad :\ i \geq 3
\end{aligned}
$$

dür.

$a_2 \geq a_1 \geq 3$ olduğundan, iddia edildiği gibi $c_1 = 1$ olur. Eş. 3.1 eşitliğinde verilen üçüncü eşitlik için $c_i \not\equiv 0 \pmod 3$ olduğundan $j \geq 1$ için $c_i \neq a_j$ elde edilmiştir. (c_i) dizisi monoton artan olduğundan $j < i$ için $c_i \neq c_j$ dir. Çift i değerleri için en küçük olası değer $c_i = c_{i-1} + 1$ şeklindedir. Tek i değerleri için de, $i \geq 3$ için $a_i = 3i - 6 > \frac{3i-5}{2} = c_{i-1}$

$c_{i-1}+1\equiv 0\pmod 3$ olduğundan ve $j\le i$ için $c_{i-1}+1$ bir a_j olduğundan, $c_i=c_{i-1}+2$ değeri elde edilmiştir.

3.1.2. $a_1\equiv a_2\not\equiv 0\pmod 3$ için sonuçlar

(a_i) dizisinin ardışık değerleri için farklar $\Delta_i=a_{i+1}-a_i$, $i\ge 3$ bir önceki durumdaki gibi daima 3 olarak bulunmaz. Burada üstel olarak artan indislerde 2 ve 4 farkları ve bir kez de 5 farkı ortaya çıkmıştır.

3.1.2. Teorem

$a_1=a_2=3j+r\ge 5$, $r=1$ veya $r=2$ için aşağıdaki indisler hariç $i\ge 3$ için $\Delta_i=3$ ve $a_3=3$ dür.

$$i=f_4(n,v,j,r)$$
$$=(2j+1)4^n+1+(v-2)\left(\frac{(v+r-4)(v+r-3)4^n}{2}+\frac{4^n-1}{3}\right)$$

$v=1,\,2,\,3$ ve $n=0,\,1,\,2,\,\ldots$ için $\Delta_i=\begin{cases}4, & i\ne 2j+2 \;ise,\\ 5, & i=2j+2\;ise.\end{cases}$

ve

$$i=f_2(n,v,j,r)$$
$$=(4j+2)4^n+v-1+2(v-2)\left(\frac{(v+r-4)(v+r-3)4^n}{2}+\frac{4^n-1}{3}\right)$$

$v=1,\,2,\,3$ ve $n=0,\,1,\,2,\,\ldots$ için $\Delta_i=2$

(Bode ve diğerleri (2007)).

İspat

$a_1 = a_2 \geq 5$ olduğundan Eş. 3.1 eşitliğinde $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ olduğu görülür. Böylece $a_3 = 3$ 'dür. Teorem 3.1.2 de $a_1 = a_2 = 3j + r$ olduğundan, Eş. 3.1 ve Teorem 3.1.1 yardımıyla $3 \leq i < 2j + r$ için $c_i = \left\lfloor \frac{3i-1}{2} \right\rfloor$ ve $\Delta_i = 3$ dür. Yani, $i = 2j + r$ indisi Teorem 3.1.1 deki $c_i = \left\lfloor \frac{3i-1}{2} \right\rfloor$ değerinden farklı c_i değerini belirlemiştir. $a_1 = a_2 \geq 5$ ve $i = 2j + r - 1$, $2j + r$, $2j + r + 1$ değerleri için sırası ile $r = 1$ ve $r = 2$ değerleri için c_i, a_i ve Δ_i değerleri Çizelge 3.1. ve Çizelge 3.2.' de verilmiştir.

Çizelge 3.1. $r = 1$ durumu

i	c_i	a_i	Δ_i
$2j$	$3j-1$	$6j-6$	3
$2j+1$	$3j+2$	$6j-3$	4
$2j+2$	$3j+4$	$6j+1$	5

Çizelge 3.2. $r = 2$ durumu

i	c_i	a_i	Δ_i
$2j+1$	$3j+1$	$6j-3$	3
$2j+2$	$3j+4$	$6j$	5
$2j+3$	$3j+5$	$6j+5$	4

$n = 0$ ve $v = 1, 2, 3$ değerleri için iddia edildiği gibi $\Delta_i = 4$ veya $\Delta_i = 5$ şeklinde sıra dışı farklar mevcuttur. $i = 2j + 2$ indisinin iki kez ortaya çıkardığı bir $\Delta_i = 5$ farkı aşağıdaki gibi gösterilmiştir:

$$2j + 2 = f_4(0, 2, j, 1) = f_4(0, 3, j, 1) \ ,$$
$$2j + 2 = f_4(0, 1, j, 2) = f_4(0, 2, j, 2). \qquad (3.2)$$

Aşağıda, (a_i) dizisindeki $\Delta_x = 3, 4$ ve 5 farklarının, $\Delta_x - 1$ ardışık farkları $\Delta_i = 2$ veya 3 şeklinde olan (c_i) dizisindeki $\Delta_x - 1$ ardışık sayılarını belirlediği görülecektir. $\Delta_i = 2$ farkları yalnızca $\Delta_x = 4$ ve 5 farklarından ortaya çıkmaktadır ve her bir $\Delta_j = 4$ farkına neden olmaktadır. Böylece bu durumlar tamamen $(\Delta_i)'$ yi belirler. Eş. 3.1 eşitliği kullanılarak $\Delta_x = 3$ için Çizelge 3.3' de olduğu gibi iki fark 3 elde edilir.

Çizelge 3.3. $\Delta_x = 3$ ile belirlenen 3 fark değerleri

i	c_i	a_i	Δ_i
x	$\vdots$	a_x	3
$\vdots$	$\vdots$	$a_x + 3$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$a_x - 1$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$a_x + 1$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$a_x + 2$	$2a_x$	3
$\vdots$	$a_x + 4$	$2a_x + 3$	3
$\vdots$	$\vdots$	$2a_x + 6$	$\vdots$

$\Delta_x = 4$ ve $a_x = 3x - d_x$ kabul ederek ve Eş. 3.1 eşitliği kullanılarak, Çizelge 3.4' de gösterildiği gibi $\Delta_y = 2$ ve $\Delta_z = 4$ sıra dışı farkları da elde edilir. Çizelge 3.4' de aynı zamanda x ve y indisleri arasında (a_i) dizisinde 2 veya 4 değerinden farklı farkların, y ve z indisleri arasında sırası ile 4 veya 2 farkına neden olduğu da görülmektedir. $a_i = 3i - d_i$ olmak üzere

$$d_{i+1} = d_i + 3 - \Delta_i \ . \tag{3.3}$$

yazarız. Çizelge 3.4' den x ve z indisleri için $\Delta_i = 4$ olduğundan $d_z = d_x$ olduğu görülür. Ardından,
$a_z = 3z - d_z = 3z - d_x = 3(4x - d_x + 2) - d_x = 12x - 4d_x + 6$ ifadesi $z = 4x - d_x + 2$ eşitliğini belirler. Buradan $a_y = 3y - dy = 6x - 2d_x + 3$ değerinden $y = 2x + 1 - (2d_x - d_y/3)$ değeri elde edilir.

Çizelge 3.4. $\Delta_x = 4$ ile belirlenen Δ_i = 2, 3 ve 4 fark değerleri

i	c_i	a_i	Δ_i
x	$\vdots$	$3x-d_x$	4
$\vdots$	$\vdots$	$3x-d_x+4$	$\vdots$
$\vdots$	$3x-d_x-1$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$3x-d_x+1$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$3x-d_x+2$	$6x-2d_x$	3
$y=2x+1-(2d_x-d_y/3)$	$3x-d_x+3$	$6x-2d_x+3$	2
$\vdots$	$3x-d_x+5$	$6x-2d_x+5$	3
$\vdots$	$\vdots$	$6x-2d_x+8$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$6x-2d_x+2$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$6x-2d_x+4$	$\vdots$	$\vdots$
$z=4x-d_x+2$	$6x-2d_x+6$	$12x-4d_x+6$	4
$\vdots$	$\vdots$	$12x-4d_x+10$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Eğer Çizelge 3.4’ e karşılık gelen $\Delta_x = 5$ ise, Çizelge 3.5’ de $\Delta_y = \Delta_{y+1} = 2$ ve $\Delta_z = \Delta_{z+1} = 4$ fark çiftleri elde edilir.

Çizelge 3.5. $\Delta_x = 5$ ile belirlenen Δ_i = 2, 3 ve 4 fark değerleri

i	c_i	a_i	Δ_i
x	$\vdots$	$3x-d_x$	5
$\vdots$	$\vdots$	$3x-d_x+5$	$\vdots$
$\vdots$	$3x-d_x-1$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$3x-d_x+1$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$3x-d_x+2$	$6x-2d_x$	3
$y=2x+1-\left(2d_x-d_y/3\right)$	$3x-d_x+3$	$6x-2d_x+3$	2
$y+1$	$3x-d_x+4$	$6x-2d_x+5$	2
$\vdots$	$3x-d_x+6$	$6x-2d_x+7$	3
$\vdots$	$\vdots$	$6x-2d_x+10$	$\vdots$
$\vdots$	$6x-2d_x+2$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$6x-2d_x+4$	$\vdots$	$\vdots$
$z=4x-d_x+2$	$6x-2d_x+6$	$12x-4d_x+6$	4
$z+1$	$6x-2d_x+8$	$12x-4d_x+10$	4
$\vdots$	$\vdots$	$12x-4d_x+14$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2 ile birlikte Çizelge 3.3 , Çizelge 3.4 ve Çizelge 3.5' in esas alınması sonucu, sırası ile $r=1$ ve $r=2$ için Çizelge 3.6 ve Çizelge 3.7' nin ilk satırlarında olduğu gibi $\Delta_i \neq 3$ sıra dışı farkları dizisi olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Teorem 3.1.2 de kabul edildiği gibi, $n>0$ ve $v=1,\ 2,\ 3$ için karşılık gelen indislerin $\Delta_i = 4$ ve $\Delta_i = 5$ için $i = f_4(n,v,j,r)$ ve $\Delta_i = 2$ için $i = f_2(n,v,j,r)$ olduğu ortaya çıkar. $\Delta_i = 5$ için Eş. 3.2 eşitliğini kontrol etmek kalır.

Çizelge 3.6. $r=1$ durumu için sıra dışı farklar

Δ_i	4	5	2	2	2	4	4	4	2	2	2	4	4	4	$\ldots$
n	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	$\ldots$
v	1	2,3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	$\ldots$
d_i	6	5	3	4	5	6	5	4	3	4	5	6	5	4	$\ldots$

Çizelge 3.7. $r=2$ durumu için sıra dışı farklar

Δ_i	5	4	2	2	2	4	4	4	2	2	2	4	4	4	$\ldots$
n	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	$\ldots$
v	1,2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	$\ldots$
d_i	6	4	3	4	5	6	5	4	3	4	5	6	5	4	$\ldots$

Çizelge 3.6 ve Çizelge 3.7' nin son satırları için; ilk sıra dışı Δ_i farkı için Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2' den $d_{2j+r}=6$ değeri elde edilmiştir. Eş. 3.3 eşitliğine göre $\Delta_i \neq 3$ için yalnızca aşağıdaki değerler değişir. Böylece şu sonuçlar ortaya çıkar:

$$\Delta_i = 4 \text{ için } d_i = 7-v \quad \text{ve}$$
$$\Delta_i = 2 \text{ için } d_i = v+2. \tag{3.4}$$

Çizelge 3.4' den elde edilen $d_x = 7-v$ ve $z = 4x - d_x + 2$ ile Teorem 3.1.2 de olduğu gibi $\Delta_x = 4$ için $x = f_4(n,v,j,r)$ den aşağıdaki adım elde edilmiştir:

$$z = f_4(n+1,v,j,r) = 4f_4(n,v,j,r) + v - 5 \ .$$

Bununla birlikte Teorem 3.1.2 de kabul edildiği gibi Çizelge 3.4' de $d_y = v + 2$ ve $y = 2x + 1 - \left(2d_x - d_y / 3\right)$ kullanılarak aşağıdaki elde edilir:

$$y = f_2(n, v, j, r) = 2 f_4(n, v, j, r) + v - 3 \ .$$

.

Çizelge 3.5' de verilen y ve z indisleri Çizelge 3.4' deki indisler ile aynı olduğundan, $\Delta_x = 5$ için aşağıdakinin kontrol edilmesi kalır.

$$f_4(1, 4 - r, j, r) = f_4(1, 3 - r, j, r) + 1 \text{ ve}$$
$$f_2(0, 4 - r, j, r) = f_4(0, 3 - r, j, r) + 1.$$

(a_i) dizisinin elemanları Eş. 3.3 eşitliğiyle birlikte Teorem 3.1.2 kullanılarak aşağıda olduğu gibi ifade edilmiştir.

3.1.3. Teorem

$a_1 = a_2 = 3j + r \geq 5$, $r = 1, 2$ ve f_2, f_4 Teorem 3.1.2 deki gibi olmak üzere

$3 \leq i < 2j + r = f_4(0,1, j, r)$ için $a_i = 3i - 6$ ve

$s < i \leq t$ için $a_i = 3i - d_t$

olur.

Burada $\Delta_s \neq 3$ ve $\Delta_t \neq 3$ durumu iki ardışık sıra dışı farktır ve

$$d_t = \begin{cases} 7 - v, & t = f_4(n, v, j, r) \; ise, \\ 2 + v, & t = f_2(n, v, j, r) \; ise. \end{cases}$$

(Bode ve diğerleri (2007)).

Eğer $a_1 = a_2 \geq 5$ olursa, sıra dışı farkların dizisinin değişken olarak üçlü $\Delta_i = 4$ ve üçlü $\Delta_i = 2$ sırasından oluştuğu bulunmuştur. (Çizelge 3.6 ve Çizelge 3.7). Eğer $a_1 = a_2 = 1$, 2, veya 4 ise, bu durumda sıra dışı farkların dizisi $\Delta_i = 4$ ve $\Delta_i = 2$ dönüşümlü değerlerinden oluşur.

3.1.4. Teorem

$a_1 = a_2 = 1$, 2, veya 4 olduğunda (a_i) dizileri $n \geq 0$ ve $i \geq 3$ için aşağıdaki gibidir.

$a_1 = a_2 = 1$:

$a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 10$,

$f_4(n) = 4^{n+1} + 1 < i \leq f_2(n) = 2 \cdot 4^{n+1} + 1$ için $a_i = 3i - 4$,

$f_2(n) = 2 \cdot 4^{n+1} + 1 < i \leq f_4(n+1) = 4^{n+2} + 1$ için $a_i = 3i - 5$.

$a_1 = a_2 = 2$:

$a_3 = 4$,

$f_4(n) = 2 \cdot 4^{n} + 1 < i \leq f_2(n) = 4^{n+1} + 1$ için $a_i = 3i - 4$,

$f_2(n) = 4^{n+1} + 1 < i \leq f_4(n+1) = 2 \cdot 4^{n+1} + 1$ için $a_i = 3i - 5$.

$a_1 = a_2 = 4$:

$a_3 = 3$, $a_4 = 7$,

$f_4(n) = 3 \cdot 4^{n} + 1 < i \leq f_2(n) = 6 \cdot 4^{n} + 1$ için $a_i = 3i - 4$,

$f_2(n) = 6 \cdot 4^{n} + 1 < i \leq f_4(n+1) = 3 \cdot 4^{n+1} + 1$ için $a_i = 3i - 5$.

(Bode ve diğerleri (2007)).

İspat

Çizelge 3.8' de sırası ile $a_1 = a_2 = 1$, 2 ve 4 durumlarında $i = f_4(0) = 5{,}3$ ve 4 için $\Delta_i = 4$

farkı bulunmuştur. Eş. 3.3 eşitliği tarafından $d_x = 5$ ve $d_y = 4$ olduğundan, kabul edilen aralıklar $x = f_4(n)$ için, Çizelge 3.4’ e göre $z = f_4(n+1) = 4 \cdot f_4(n) - 3$ ve $y = f_2(n) = 2 \cdot f_4(n) - 1$ ile tümevarımsal olarak i için takip edilir.

Çizelge 3.8. $a_1 = a_2 = 1$, 2 ve 4 için ilk sıra dışı farklar

i	c_i	a_i	Δ_i	c_i	a_i	Δ_i	c_i	a_i	Δ_i
1	2	1		1	2		1	4	
2	3	1		3	2		2	4	
3	4	5	2	5	4	**4**	5	3	4
4	6	7	3	6	8	3	6	7	**4**
5	8	10	**4**	7	11	**2**	8	11	3
6	9	14	3		13		9	14	3
7	11	17	3				10	17	**2**
8	12	20	3					19	
9	13	23	**2**						
10		25							

4. TRİBONACCİ BENZERİ TAMLAYICI İNDİRGEME BAĞINTILARI

4.1. Tamlayıcı Tribonacci Dizileri

Bu bölümde (c_i) dizisi; (a_i) dizisinin tamlayıcısı olacak şekilde, (a_i) ve (c_i) şeklinde iki diziyi göz önüne alacağız. Yine belirtmeliyiz ki (a_i) dizisi (c_i) dizisinden Tribonacci-benzeri bir indirgeme bağıntısı ile belirlenir. Yani a_1 ve a_2, $a_1 \leq a_2$ şartını sağlayan tamsayılar olmak üzere (a_i) ve (c_i) dizileri aşağıdaki şekilde belirlenir:

$$
\begin{aligned}
& a_i = c_{i-1} + c_{i-2} + c_{i-3} && (i \geq 4), \\
& c_1 = a_1\ ,\ a_2 \text{ 'den farklı en küçük pozitif tamsayı,} && \qquad (4.1) \\
& c_i = a_1, a_2, \ldots, a_i, c_1, c_2, \ldots, c_{i-1} \quad (i \geq 2) \text{ 'den farklı en küçük pozitif tamsayı,} \\
& a_3 = c_1 + c_2 .
\end{aligned}
$$

Burada, $a_i > c_{i-1}$ ve (c_i) kesinlikle artan bir dizi olduğundan (c_i) dizisinin (a_i) dizisinin bir tamlayıcısı olduğuna dikkat çekelim.

Örnek

$a_1 = 1$, $a_2 = 4$ değerlerini seçtiğimizde aşağıdaki (a_i) dizisi ile bunun tamlayıcısı olan (c_i) dizisini elde ederiz.

(a_i)=(1, 4, 5, 11, 16, 21, 24, 27, 31, 35, 39, 42, 46, $\ldots$),

(c_i)= (2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17, $\ldots$).

4.1.1. $a_1 \equiv a_2 \equiv 3 \pmod 4$ için sonuçlar

$a_1 \equiv a_2 \equiv 3 \pmod 4$ için (a_i) dizisi ortak farkı 4 olan aritmetik dizidir.

4.1.1. Teorem

$a_1 \equiv a_2 \equiv 3 \pmod 4$ ve $a_3 = c_1 + c_2$ olmak üzere $a_i = 4i - 9$, $(i \geq 4)$ şeklinde tanımlanan (a_i) dizisinin tamlayıcı dizisi, $c_i = \left\lfloor \frac{4i}{3} \right\rfloor$, $(i \geq 2)$ şeklinde tanımlanan (c_i) dizisidir.

İspat

Yukarıda verilen dizilerin Eş. 4.1 eşitliğinde verilmiş olan dört eşitliğin koşullarını sağladığını gösterelim. Teorem 2.1.1 yardımıyla $a_k = f(k) + k \Rightarrow$ $f(k) = a_k - k = 4k - 9 = 3k - 9$ dir. Tanım 2.1.4 deki $f^*(i)$ den; $3k - 9 < i$ ve $f^*(i) = \left\lfloor \frac{(i + 9 - 1)}{3} \right\rfloor$ elde ederiz. Teorem 2.1.1 ve Tanım 2.1.4 yardımıyla

$$\begin{aligned} c_{i+2} &= f^*(i) + i \\ &= \left\lfloor \frac{4i + 9 - 1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4i + 8}{3} \right\rfloor, \ (i \geq 0) \end{aligned}$$

olup,

$c_i = \left\lfloor \frac{4i}{3} \right\rfloor$, $(i \geq 2)$ bulunur.

$c_i = \left\lfloor \frac{4i}{3} \right\rfloor$ ifadesi Eş. 4.1 eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} a_i &= c_{i-1} + c_{i-2} + c_{i-3} \\ &= \left\lfloor \frac{4.(i-1)}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4.(i-2)}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{4.(i-3)}{3} \right\rfloor = 4i - 9, \ (i \geq 4) \end{aligned}$$

elde edilir.

$a_3 \geq a_2 \geq a_1 \geq 3$ için $c_1 = 1$ olur. Eş. 4.1 eşitliğiyle $c_i \not\equiv 3 \pmod 4$ olduğunda $j \geq 1$ için $c_i \neq a_j$ dir. Örneğin; $c_5 = 6 \not\equiv 3 \pmod 4$ olduğunda,

$j = 1$ için $c_5 \neq a_1$,

$j = 2$ için $c_5 \neq a_2$,

$j = 3$ için $c_5 \neq a_3$.

bulunur. Ayrıca $j < i$ için $c_i \neq c_j$ olduğundan (c_i) dizisi monoton artar.

4.1.1. Sonuç

a) $i = 3n$ (n∈ℤ⁺) için $c_i = c_{i-1} + 2$ olur.

$$c_{3n} = \left\lfloor \frac{4.3n}{3} \right\rfloor = 4n,$$

$$c_{3n-1} = \left\lfloor \frac{4.(3n-1)}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{12n-4}{3} \right\rfloor = 4n-2 \text{ olduğundan } c_i - c_{i-1} = 2 \text{ dir.}$$

b) $i = 3n+1$ (n∈ℤ⁺) ve $i = 3n+2$ (n∈ℤ⁺) için $c_i = c_{i-3} + 4$ olur.

$i = 3n+1$ için;

$$c_{3n+1} = \left\lfloor \frac{4.(3n+1)}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{12n+4}{3} \right\rfloor = 4n+1,$$

$$c_{3n+1-3} = c_{3n-2} = \left\lfloor \frac{4.(3n-2)}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{12n-8}{3} \right\rfloor = 4n-3 \text{ olup, } c_i - c_{i-3} = 4 \text{ dür.}$$

$i = 3n+2$ için;

$$c_{3n+2} = \left\lfloor \frac{4.(3n+2)}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{12n+8}{3} \right\rfloor = 4n+2,$$

$$c_{3n+2-3} = c_{3n-1} = \left\lfloor \frac{4.(3n-1)}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{12n-4}{3} \right\rfloor = 4n-2 \text{ olup } c_i - c_{i-3} = 4 \text{ dür.}$$

$i = 3n+1$ için $c_{i-3} + 3 \equiv 0 \pmod 4$ ve $a_i = 4i - 9 > \dfrac{4i-13}{3} = c_{i-3}$, $(i \geq 4)$ değerlerini elde ederiz.

4.1.2. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3 \pmod 4$ için sonuçlar

$a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3 \pmod 4$ olduğunda (a_i) dizisinin ardışık değerleri için farklar $\Delta_i = a_{i+1} - a_i$ $(i \geq 4)$, bir önceki durumdaki gibi her zaman 4 olarak bulunmaz. Üstel olarak artan indislerde 3 ve 5 farkları ve bir kere de 6 farkı oluşur.

4.1.2. Teorem

$a_1 = a_2 = 4j + r \geq 6$ olmak üzere $r = 0$ için;

$$i = f_5(n, v, j, r)$$
$$= (3j+1)9^n + 2 + (v-2)\left(\frac{(v+r-4)(v+r-3)9^n}{2} + \frac{9^n - 1}{4}\right)$$

$v = 1, 2, 3$ ve $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $\Delta_i = \begin{cases} 5, & i \neq 3j+2 \ ise, \\ 6, & i = 3j+2 \ ise. \end{cases}$

$r = 1$ veya $r = 2$ için;

$$i = f_5(n, v, j, r)$$
$$= (3j+1)9^n + 1 + (v-2)\left(\frac{(v+r-4)(v+r-3)9^n}{2} + \frac{9^n - 1}{4}\right)$$

$v = 1, 2, 3$ ve $n = 0, 1, 2, \ldots$ için $\Delta_i = \begin{cases} 5, & i \neq 3j+2 \ ise, \\ 6, & i = 3j+2 \ ise. \end{cases}$

ve

$r = 0$ için;

$$i = f_3(n, v, j, r)$$

$$=(3j+1)3^{2n+1}+(v-1)+(v-2)\left(\frac{(v+r-4)(v+r-3)9^n}{2}+\frac{9^n-1}{4}\right)$$

$v=1,\ 2,\ 3$ ve $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ için $\Delta_i=3$,

$r=1$ ve $r=2$ için;

$i=f_3(n,v,j,r)$

$$=(3j+1)3^{2n+1}+(v-2)+3.(v-2)\left(\frac{(v+r-4)(v+r-3)9^n}{2}+\frac{9^n-1}{4}\right)$$

$v=1,\ 2,\ 3$ ve $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ için $\Delta_i=3$ olup, verilen bu indisler hariç $a_3=3$ ve $\Delta_i=4$, $(i\geq 4)$ dür.

İspat

$a_1=a_2\geq 6$ olduğunda Eş. 4.1 eşitliğinden dolayı $c_1=1$, $c_2=2$ olup $a_3=3$ olur. (c_i) dizisi Teorem 4.1.1 deki gibi verildiğinden Eş. 4.1 eşitliği ve Teorem 4.1.1, $4\leq i<3j+r$ için $\Delta_i=4$ olduğunu belirtir. $i=3j+r$ indisi için c_i değerinin Teorem 4.1.1 deki değerinden farklı olduğu $\left\lfloor\frac{4i}{3}\right\rfloor=4j+r=a_1=a_2$ eşitliğinde belirlenmiştir. Gerçekten;

$4\leq i<3j+r$,

$16\leq 4i<12j+4r$,

$\frac{16}{3}\leq\frac{4i}{3}<\frac{12j+4r}{3}$,

$\left\lfloor\frac{16}{3}\right\rfloor\leq\left\lfloor\frac{4i}{3}\right\rfloor<\left\lfloor\frac{12j+4r}{3}\right\rfloor$,

$5\leq\left\lfloor\frac{4i}{3}\right\rfloor=4j+r$ olup

$a_1=a_2=4j+r=\left\lfloor\frac{4i}{3}\right\rfloor$ dür.

$a_1=a_2=4j+r\geq 6$ ve $i=3j+r-1$, $3j+r$, $3j+r+1$ olmak üzere c_i, a_i ve Δ_i' nin değeri Çizelge 4.1, Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3' de $r=0$, $r=1$ ve $r=2$ için gösterilmiştir. Bu durumlar:

$r=0$ için $a_1=a_2=4j\geq 6$ olup

$j=2$ için;
$(a_i)=(8,8,3,7,11,15,20,25,31,35,39,43,47,51,54,58,\ldots)$,
$(c_i)=(1,2,4,5,6,9,10,12,13,14,16,17,18,19,21,\ldots)$.

$j=3$ için;
$(a_i)=(12,12,3,7,11,15,19,23,27,32,37,43,47,51,55,59,\ldots)$,
$(c_i)=(1,2,4,5,6,8,9,10,13,14,16,17,18,20,21,\ldots)$.

şeklindedir.

$r=0$ ve $q\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}$ için (c_i) dizisinin değerleri aşağıdaki gibidir:

$$
c_i=\begin{cases}
\left\lfloor\frac{4i}{3}\right\rfloor, & 4\leq i< 3j+r \text{ ise,}\\
\left\lfloor\frac{4i}{3}\right\rfloor+1, & 3j+r\leq i\leq 3j+(r+1) \text{ ise,}\\
\left\lfloor\frac{4i}{3}\right\rfloor+2, & 3j+(r+1)< i\leq 3j+(r+2) \text{ ise,}\\
 & \vdots\\
 & \vdots\\
 & \vdots\\
\left\lfloor\frac{4i}{3}\right\rfloor+1, & 3j+r+(2q)\leq i\leq 3j+r+(2q+1) \text{ ise,}\\
\left\lfloor\frac{4i}{3}\right\rfloor+2, & 3j+r+(2q+1)< i\leq 3j+r+(2q+2) \text{ ise.}
\end{cases}
$$

$\Delta_i=a_{i+1}-a_i\ :\ (i\geq 4)$ yardımıyla Δ_{3j-1}, Δ_{3j}, Δ_{3j+1}, Δ_{3j+2}, farklarını gösterelim.

$i=3j-1$ için,

$$c_{3j-1} = \left\lfloor \frac{4.(3j-1)}{3} \right\rfloor = 4j-2$$

$j=2$ için $i=5 \Rightarrow c_5 = 6$,

$j=3$ için $i=8 \Rightarrow c_8 = 10$.

$$a_{3j-1} = 4\cdot(3j-1)-9$$

$$a_{3j-1} = 12j-13$$

$j=2$ için $i=5 \Rightarrow a_5 = 11$,

$j=3$ için $i=8 \Rightarrow a_8 = 23$.

$i=3j-2$ için,

$$c_{3j-2} = \left\lfloor \frac{4.(3j-2)}{3} \right\rfloor = 4j-3$$

$j=2$ için $i=4 \Rightarrow c_4 = 5$,

$j=3$ için $i=7 \Rightarrow c_7 = 9$.

$$a_{3j-2} = 4\cdot(3j-2)-9$$

$$a_{3j-2} = 12j-17$$

$j=2$ için $i=4 \Rightarrow a_4 = 7$,

$j=3$ için $i=7 \Rightarrow a_7 = 19$.

$i=3j$ için,

$$c_{3j} = \left\lfloor \frac{4.(3j)}{3} \right\rfloor + 1 = 4j+1$$

$j=2$ için $i=6 \Rightarrow c_6 = 9$,

$j=3$ için $i=9 \Rightarrow c_9 = 13$.

$$a_{3j} = c_{3j-1} + c_{3j-2} + c_{3j-3}$$

$a_{3j} = 4j - 2 + 4j - 3 + 4j - 4$

$a_{3j} = 12j - 9$

$j = 2$ için $i = 6 \Rightarrow a_6 = 15$,

$j = 3$ için $i = 9 \Rightarrow a_9 = 27$.

$i = 3j + 1$ için,

$$c_{3j+1} = \left\lfloor \frac{4.(3j+1)}{3} \right\rfloor + 1 = 4j + 2$$

$j = 2$ için $i = 7 \Rightarrow c_7 = 10$,

$j = 3$ için $i = 10 \Rightarrow c_{10} = 14$.

$a_{3j+1} = c_{3j} + c_{3j-1} + c_{3j-2}$

$a_{3j+1} = 4j + 1 + 4j - 2 + 4j - 3$

$a_{3j+1} = 12j - 4$

$j = 2$ için $i = 7 \Rightarrow a_7 = 20$,

$j = 3$ için $i = 10 \Rightarrow a_{10} = 32$.

$i = 3j + 2$ için,

$$c_{3j+2} = \left\lfloor \frac{4.(3j+2)}{3} \right\rfloor + 2 = 4j + 4$$

$j = 2$ için $i = 8 \Rightarrow c_8 = 12$,

$j = 3$ için $i = 11 \Rightarrow c_{11} = 16$.

$a_{3j+2} = c_{3j+1} + c_{3j} + c_{3j-1}$

$a_{3j+2} = 4j + 2 + 4j + 1 + 4j - 2$

$a_{3j+2} = 12j + 1$

$j = 2$ için $i = 8 \Rightarrow a_8 = 25$,

$j=3$ için $i=11 \Rightarrow a_{11}=37$.

1. $\Delta_{3j-1} = a_{3j} - a_{3j-1}$

$=12j-9-12j+13$

$=4$

2. $\Delta_{3j} \quad = a_{3j+1} - a_{3j}$

$=12j-4-12j+9$

$=5$

3. $\Delta_{3j+1} \quad = a_{3j+2} - a_{3j+1}$

$=12j+1-12j+4$

$=5$

4. $\Delta_{3j+2} \quad = a_{3j+3} - a_{3j+2}$

$= c_{3j+2} - c_{3j-1}$

$=4j+4-4j+2$

$=6$

Çizelge 4.1. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r=0$ için c_i, a_i ve Δ_i ‘ nin değerleri

i	c_i	a_i	Δ_i
$3j-1$	$4j-2$	$12j-13$	4
$3j$	$4j+1$	$12j-9$	5
$3j+1$	$4j+2$	$12j-4$	5
$3j+2$	$4j+4$	$12j+1$	6

$i=3j+2$ için $\Delta_i = 6$,

$i \neq 3j+2$ için $\Delta_i = 5$,

$4 \leq i < 3j$ için $\Delta_i = 4$.

olduğu görülür.

$r=1$ için $a_1 = a_2 = 4j+1 \geq 6$ olup

$j=2$ için;

$(a_i)=(9,9,3,7,11,15,19,24,30,35,39,43,47,51,55,59,\ldots)$,

$(c_i)=(1,2,4,5,6,8,10,12,13,14,16,17,18,20,21,\ldots)$.

$j=3$ için;

$(a_i)=(13,13,3,7,11,15,19,23,27,31,36,42,47,51,55,59,\ldots)$,

$(c_i)=(1,2,4,5,6,8,9,10,12,14,16,17,18,20,21,\ldots)$.

şeklindedir.

$r=1$ ve $q\in\mathbb{Z}^{+}\cup\{0\}$ için (c_i) dizisinin değerleri aşağıdaki gibidir:

$$
c_i=\begin{cases}
\left\lfloor \frac{4i}{3} \right\rfloor, & 4\le i< 3j+r \text{ ise},\\
\left\lfloor \frac{4i}{3} \right\rfloor+1, & 3j+r\le i< 3j+(r+1) \text{ ise},\\
\left\lfloor \frac{4i}{3} \right\rfloor+2, & 3j+(r+1)\le i< 3j+(r+2) \text{ ise},\\
 & \vdots\\
 & \vdots\\
 & \vdots\\
\left\lfloor \frac{4i}{3} \right\rfloor+1, & 3j+r+(2q)\le i< 3j+r+(2q+1) \text{ ise},\\
\left\lfloor \frac{4i}{3} \right\rfloor+2, & 3j+r+(2q+1)\le i< 3j+r+(2q+2) \text{ ise}.
\end{cases}
$$

$\Delta_i=a_{i+1}-a_i$: $(i\ge 4)$ yardımıyla Δ_{3j-1}, Δ_{3j}, Δ_{3j+1}, Δ_{3j+2}, farklarını gösterelim.

$i=3j$ için,

$$c_{3j}=\left\lfloor \frac{4.(3j)}{3} \right\rfloor=4j$$

$j=2$ için $i=6\Rightarrow c_6=8$,

$j=3$ için $i=9\Rightarrow c_9=12$.

$a_{3j} = 4 \cdot (3j) - 9$

$a_{3j} = 12j - 9$

$j = 2$ için $i = 6 \Rightarrow a_6 = 15$,

$j = 3$ için $i = 9 \Rightarrow a_9 = 27$.

$i = 3j - 1$ için,

$$c_{3j-1} = \left\lfloor \frac{4.(3j-1)}{3} \right\rfloor = 4j - 2$$

$j = 2$ için $i = 5 \Rightarrow c_5 = 6$,

$j = 3$ için $i = 8 \Rightarrow c_8 = 10$.

$a_{3j-1} = 4 \cdot (3j-1) - 9$

$a_{3j-1} = 12j - 13$

$j = 2$ için $i = 5 \Rightarrow a_5 = 11$,

$j = 3$ için $i = 8 \Rightarrow a_8 = 23$.

$i = 3j + 1$ için,

$$c_{3j+1} = \left\lfloor \frac{4.(3j+1)}{3} \right\rfloor + 1 = 4j + 2$$

$j = 2$ için $i = 7 \Rightarrow c_7 = 10$,

$j = 3$ için $i = 10 \Rightarrow c_{10} = 14$.

$a_{3j+1} = c_{3j} + c_{3j-1} + c_{3j-2}$

$a_{3j+1} = 4j + 4j - 2 + 4j - 3$

$a_{3j+1} = 12j - 5$

$j = 2$ için $i = 7 \Rightarrow a_7 = 19$,

$j = 3$ için $i = 10 \Rightarrow a_{10} = 31$.

$i = 3j + 2$ için,

$$c_{3j+2} = \left\lfloor \frac{4.(3j+2)}{3} \right\rfloor + 2 = 4j + 4$$

$j = 2$ için $i = 8 \Rightarrow c_8 = 12$,

$j = 3$ için $i = 11 \Rightarrow c_{11} = 16$.

$a_{3j+2} = c_{3j+1} + c_{3j} + c_{3j-1}$

$a_{3j+2} = 4j + 2 + 4j + 4j - 2$

$a_{3j+2} = 12j$

$j = 2$ için $i = 8 \Rightarrow a_8 = 24$,

$j = 3$ için $i = 11 \Rightarrow a_{11} = 36$.

1. $\Delta_{3j-1} = a_{3j} - a_{3j-1}$

$= 12j - 9 - 12j + 13$

$= 4$

2. $\Delta_{3j} = a_{3j+1} - a_{3j}$

$= 12j - 5 - 12j + 9$

$= 4$

3. $\Delta_{3j+1} = a_{3j+2} - a_{3j+1}$

$= 12j - 12j + 5$

$= 5$

4. $\Delta_{3j+2} = a_{3j+3} - a_{3j+2}$

$= c_{3j+2} - c_{3j-1}$

$= 4j + 4 - 4j + 2$

$= 6$

Çizelge 4.2. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r=1$ için c_i, a_i ve Δ_i ' nin değerleri

i	c_i	a_i	Δ_i
$3j-1$	$4j-2$	$12j-13$	4
$3j$	$4j$	$12j-9$	4
$3j+1$	$4j+1$	$12j-5$	5
$3j+2$	$4j+4$	$12j$	6

$i=3j+2$ için $\Delta_i=6$,

$i \neq 3j+2$ için $\Delta_i=5$,

$4 \leq i < 3j+1$ için $\Delta_i=4$.

olduğu görülür.

$r=2$ için $a_1=a_2=4j+2 \geq 6$ olup

$j=1$ için;

$(a_i)=(6,6,3,7,11,17,22,27,31,35,39,42,45,49,53,57,60,\ldots)$,

$(c_i)=(1,2,4,5,8,9,10,12,13,14,15,16,18,19,20,21,\ldots)$.

$j=2$ için;

$(a_i)=(10,10,3,7,11,15,19,23,29,34,39,43,47,51,55,59,\ldots)$,

$(c_i)=(1,2,4,5,6,8,9,12,13,14,16,17,18,20,21,\ldots)$.

$j=3$ için;

$(a_i)=(14,14,3,7,11,15,19,23,27,31,35,41,46,51,55,59,63\ldots)$,

$(c_i)=(1,2,4,5,6,8,9,10,12,13,16,17,18,20,21,22,\ldots)$.

şeklindedir.

$r=2$ ve $q \in \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\}$ için (c_i) dizisinin değerleri aşağıdaki gibidir:

$$c_i = \begin{cases} \left\lfloor \frac{4i}{3} \right\rfloor, & 4 \le i < 3j+r \text{ ise,} \\ \left\lfloor \frac{4i}{3} \right\rfloor + 2, & 3j+r \le i < 3j+(r+1) \text{ ise,} \\ \left\lfloor \frac{4i}{3} \right\rfloor + 1, & 3j+(r+1) \le i < 3j+(r+2) \text{ ise,} \\ & \vdots \\ & \vdots \\ & \vdots \\ \left\lfloor \frac{4i}{3} \right\rfloor + 2, & 3j+r+(2q) \le i < 3j+r+(2q+1) \text{ ise,} \\ \left\lfloor \frac{4i}{3} \right\rfloor + 1, & 3j+r+(2q+1) \le i < 3j+r+(2q+2) \text{ ise.} \end{cases}$$

$\Delta_i = a_{i+1} - a_i \ : \ (i \ge 4)$ yardımıyla Δ_{3j-1}, Δ_{3j}, Δ_{3j+1}, Δ_{3j+2}, Δ_{3j+3} farklarını gösterelim.

$i = 3j+1$ için,

$$c_{3j+1} = \left\lfloor \frac{4.(3j+1)}{3} \right\rfloor = 4j+1$$

$j=1$ için $i=4 \Rightarrow c_4 = 5$,

$j=2$ için $i=7 \Rightarrow c_7 = 9$,

$j=3$ için $i=10 \Rightarrow c_{10} = 13$.

$$a_{3j+1} = 4 \cdot (3j+1) - 9$$

$$a_{3j+1} = 12j - 5$$

$j=1$ için $i=4 \Rightarrow a_4 = 7$,

$j=2$ için $i=7 \Rightarrow a_7 = 19$,

$j=3$ için $i=10 \Rightarrow a_{10} = 31$.

$i = 3j$ için,

$$c_{3j} = \left\lfloor \frac{4.3j}{3} \right\rfloor = 4j$$

$j = 1$ için $i = 3 \Rightarrow c_3 = 4$,

$j = 2$ için $i = 6 \Rightarrow c_6 = 8$,

$j = 3$ için $i = 9 \Rightarrow c_9 = 12$.

$$a_{3j} = 4 \cdot (3j) - 9$$

$$a_{3j} = 12j - 9$$

$j = 1$ için $i = 3 \Rightarrow a_3 = 3$,

$j = 2$ için $i = 6 \Rightarrow a_6 = 15$,

$j = 3$ için $i = 9 \Rightarrow a_9 = 27$.

$i = 3j - 1$ için,

$$c_{3j-1} = \left\lfloor \frac{4.(3j-1)}{3} \right\rfloor = 4j - 2$$

$j = 1$ için $i = 2 \Rightarrow c_2 = 2$,

$j = 2$ için $i = 5 \Rightarrow c_5 = 6$,

$j = 3$ için $i = 8 \Rightarrow c_8 = 10$.

$$a_{3j-1} = 4 \cdot (3j - 1) - 9$$

$$a_{3j-1} = 12j - 13$$

$j = 2$ için $i = 5 \Rightarrow a_5 = 11$,

$j = 3$ için $i = 8 \Rightarrow a_8 = 23$.

$i = 3j + 2$ için,

$$c_{3j+2} = \left\lfloor \frac{4.(3j+2)}{3} \right\rfloor + 2 = 4j + 4$$

$j = 1$ için $i = 5 \Rightarrow c_5 = 8$,

$j=2$ için $i=8 \Rightarrow c_8=12$,

$j=3$ için $i=11 \Rightarrow c_{11}=14$.

$a_{3j+2}=c_{3j+1}+c_{3j}+c_{3j-1}$

$a_{3j+2}=4j+1+4j+4j-2$

$a_{3j+2}=12j-1$

$j=1$ için $i=5 \Rightarrow a_5=11$,

$j=2$ için $i=8 \Rightarrow a_8=23$,

$j=3$ için $i=11 \Rightarrow a_{11}=35$.

$i=3j+3$ için,

$$c_{3j+3}=\left\lfloor \frac{4.(3j+3)}{3} \right\rfloor +1=4j+5$$

$j=1$ için $i=6 \Rightarrow c_6=9$,

$j=2$ için $i=9 \Rightarrow c_9=13$,

$j=3$ için $i=12 \Rightarrow c_{12}=17$.

$a_{3j+3}=c_{3j+2}+c_{3j+1}+c_{3j}$

$a_{3j+3}=4j+4+4j+1+4j$

$a_{3j+3}=12j+5$

$j=1$ için $i=6 \Rightarrow a_6=17$,

$j=2$ için $i=9 \Rightarrow a_9=29$,

$j=3$ için $i=12 \Rightarrow a_{12}=41$.

1. $\Delta_{3j-1}=a_{3j}-a_{3j-1}$

$\quad =12j-9-12j+13$

$\quad =4$

2. $\Delta_{3j}=a_{3j+1}-a_{3j}$

$$= 12j - 5 - 12j + 9$$

$$= 4$$

3. $\Delta_{3j+1} = a_{3j+2} - a_{3j+1}$

$$= 12j - 1 - 12j + 5$$

$$= 4$$

4. $\Delta_{3j+2} = a_{3j+3} - a_{3j+2}$

$$= 12j + 5 - 12j + 1$$

$$= 6$$

5. $\Delta_{3j+3} = a_{3j+4} - a_{3j+5}$

$$= c_{3j+3} - c_{3j}$$

$$= 4j + 5 - 4j$$

$$= 5$$

Çizelge 4.3. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r = 2$ için c_i , a_i ve Δ_i ' nin değerleri

i	c_i	a_i	Δ_i
$3j-1$	$4j-2$	$12j-13$	4
$3j$	$4j$	$12j-9$	4
$3j+1$	$4j+1$	$12j-5$	4
$3j+2$	$4j+4$	$12j-1$	6
$3j+3$	$4j+5$	$12j+5$	5

$i = 3j + 2$ için $\Delta_i = 6$,

$i \neq 3j + 2$ için $\Delta_i = 5$,

$4 \leq i < 3j + 2$ için $\Delta_i = 4$.

olduğu görülür.

$n = 0$ ve $v = 1, 2, 3$ değerleri için iddia edildiği gibi $\Delta_i = 5$ yada $\Delta_i = 6$ sıra dışı farklar bulunur.

$\Delta_i = 6$ farkının ortaya çıkardığı $i = 3j + 2$ indisi için üç durum oluşur:

$$3j+2 = f_5(0,2,j,0) = f_5(0,3,j,0),$$
$$3j+2 = f_5(0,2,j,1) = f_5(0,3,j,1)\ ,$$
$$3j+2 = f_5(0,1,j,2) = f_5(0,2,j,2). \qquad (4.3)$$

(a_i) dizisindeki $\Delta_x = 4{,}5$ ve 6 farklarının, 3 veya 4 olan $\Delta_x - 1$' i sağlayan ardışık farkları Δ_i' yi oluşturarak (c_i) dizisindeki $\Delta_x - 1$ ardışık sayılarını belirlediğini göreceğiz. $\Delta_i = 3$ farkları sadece $\Delta_x = 5$ ve 6 farklarından ortaya çıkar ve her bir $\Delta_j = 5$ farklarına neden olmaktadır. Bütün bu durumlar (Δ_i)' yi belirler.

Çizelge 4.4. $\Delta_x = 4$ ile belirlenen 4 farkları

i	c_i	a_i	Δ_i
x	$\vdots$	a_x	4
$\vdots$	$\vdots$	$a_x + 4$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$a_x - 1$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$a_x + 1$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$a_x + 2$	$2a_x + 5$	4
$\vdots$	$a_x + 4$	$2a_x + 9$	4
$\vdots$	$\vdots$	$2a_x + 13$	$\vdots$

Çizelge 4.4' deki gibi 4 farkları iki terimin farkı $\Delta_x = 4$ için Eş. 4.1 eşitliği kullanılarak elde edilir.

Kabul edelim ki $\Delta_x = 5$ ve $a_x = 4x - d_x$ olsun. Eş. 4.1 eşitliği kullanılarak Çizelge 4.5' de gösterildiği gibi $\Delta_y = 3$ ve $\Delta_z = 5$ sıra dışı farkları elde ederiz. Ayrıca Çizelge 4.5' de x ve y indisleri arasında (a_i) dizisinde 3 veya 5 değerinden farklı farkların; y ve z indisleri arasında sırası ile farkların 5 veya 3 olmasına sebep olur. $a_i = 4i - d_i$ eşitliği kullanılarak

$$d_{i+1} = d_i + 4 - \Delta_i \tag{4.4}$$

sonucunu elde ederiz.

Çizelge 4.5' de $d_z = d_x$ dir. Ardından $a_z = 4z - d_z = 4z - d_x = 36x - 9d_x + 20$ ifadesi $z = 9x - 2d_x + 5$ eşitliğini belirler. Burada $a_y = 4y - d_y = 12x - 3d_x + 6$ eşitliğinden $y = 3x + \frac{3}{2} - \left(\frac{3d_x - d_y}{4}\right)$ değerini elde ederiz.

Çizelge 4.5. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $\Delta_x = 5$ ile belirlenen 3, 4 ve 5 farkları

i	a_i	Δ_i
x	$4x - d_x$	5
$\vdots$	$4x - d_x + 5$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y = 3x + \frac{3}{2} - \left(\frac{3d_x - d_y}{4}\right)$	$12x - 3d_x + 6$	3
$\vdots$	$12x - 3d_x + 9$	4
$\vdots$	$12x - 3d_x + 13$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$z = 9x - 2d_x + 5$	$36x - 9d_x + 20$	5
$\vdots$	$36x - 9d_x + 25$	$\vdots$

Çizelge 4.5' de $\Delta_x = 6$ ise, Çizelge 4.6' da $\Delta_y = \Delta_{y+1} = 3$ ile $\Delta_z = 5$ ve $\Delta_{z+1} = 4$ fark çifleri elde edilir.

Çizelge 4.6. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $\Delta_x = 6$ ile belirlenen 3 , 4 ve 5 farkları

i	a_i	Δ_i
x	$4x-d_x$	6
$x+1$	$4x-d_x+6$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y=3x+\frac{3}{2}-\left(\frac{3d_x-d_y}{4}\right)$	$12x-3d_x+6$	3
$y+1$	$12x-3d_x+9$	3
$\vdots$	$12x-3d_x+12$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$z=9x-2d_x+5$	$36x-9d_x+20$	5
$z+1$	$36x-9d_x+25$	$\vdots$

$a_1 = a_2 = 4j + r \geq 6$ ve $r = 0$, $r = 1$ ve $r = 2$ için Çizelge 4.5 ve Çizelge 4.6' da oluşan Δ_i farkları ve buna bağlı olarak (a_i) dizisinin terimlerini görelim:

$r = 0$ olmak üzere;

a) (a_i) dizisinde Δ_i farkının 5 olduğu ilk a_i terimi için, bu a_i teriminin 16 fazlasında $\Delta_i = 4$, 10 fazlasında $\Delta_i = 6$, 3 katının 6 fazlasında $\Delta_i = 3$ ve 9 katının 20 fazlasında $\Delta_i = 5$ olur.

Çizelge 4.7. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r=0$ için $\Delta_i = 5$ ile belirlenen $3, 4$ ve 5 farkları

i	a_i	Δ_i
x	$4x-d_x$	5
$\vdots$	$4x-d_x+5$	5
$\vdots$	$4x-d_x+10$	6
$\vdots$	$4x-d_x+16$	4
$\vdots$	$4x-d_x+20$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y=3x+\frac{3}{2}-\left(\frac{3d_x-d_y}{4}\right)$	$12x-3d_x+6$	3
$\vdots$	$12x-3d_x+9$	4
$\vdots$	$12x-3d_x+13$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$z=9x-2d_x+5$	$36x-9d_x+20$	5
$\vdots$	$36x-9d_x+25$	4
$\vdots$	$36x-9d_x+29$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

b) (a_i) dizisinde Δ_i farkının 6 olduğu ilk a_i terimi için, bu a_i teriminin 6 fazlasında $\Delta_i = 4$, 3 katının 6 fazlasında $\Delta_i = 3$ ve 9 katının 20 fazlasında $\Delta_i = 5$ olur.

Çizelge 4.8. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r=0$ için $\Delta_i = 6$ ile belirlenen 3, 4 ve 5 farkları

i	a_i	Δ_i
x	$4x-d_x$	6
$x+1$	$4x-d_x+6$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y=3x+\frac{3}{2}-\left(\frac{3d_x-d_y}{4}\right)$	$12x-3d_x+6$	3
$y+1$	$12x-3d_x+9$	3
$\vdots$	$12x-3d_x+12$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$z=9x-2d_x+5$	$36x-9d_x+20$	5
$z+1$	$36x-9d_x+25$	4
$\vdots$	$36x-9d_x+29$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$r=1$ olmak üzere;

a) (a_i) dizisinde Δ_i farkının 5 olduğu ilk a_i terimi için, bu a_i teriminin 16 fazlasında $\Delta_i = 4$, 3 katının 6 fazlasında $\Delta_i = 3$ ve 9 katının 20 fazlasında $\Delta_i = 5$ olur.

Çizelge 4.9. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r=1$ için $\Delta_i = 5$ ile belirlenen $3, 4$ ve 5 farkları

i	a_i	Δ_i
x	$4x-d_x$	5
$\vdots$	$4x-d_x+5$	6
$\vdots$	$4x-d_x+11$	5
$\vdots$	$4x-d_x+16$	4
$\vdots$	$4x-d_x+20$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y=3x+\frac{3}{2}-\left(\frac{3d_x-d_y}{4}\right)$	$12x-3d_x+6$	3
$\vdots$	$12x-3d_x+9$	4
$\vdots$	$12x-3d_x+13$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$z=9x-2d_x+5$	$36x-9d_x+20$	5
$\vdots$	$36x-9d_x+25$	4
$\vdots$	$36x-9d_x+29$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

b) (a_i) dizisinde Δ_i farkının 6 olduğu ilk a_i terimi için, bu a_i teriminin 11 fazlasında $\Delta_i = 4$, 3 katının 6 fazlasında $\Delta_i = 3$ ve 9 katının 20 fazlasında $\Delta_i = 5$ olur.

Çizelge 4.10. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3$ (mod 4) olmak üzere $r = 1$ için $\Delta_i = 6$ ile belirlenen 3, 4 ve 5 farkları

i	a_i	Δ_i
x	$4x - d_x$	6
$x+1$	$4x - d_x + 6$	5
$\vdots$	$4x - d_x + 11$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y = 3x + \frac{3}{2} - \left(\frac{3d_x - d_y}{4}\right)$	$12x - 3d_x + 6$	3
$y+1$	$12x - 3d_x + 9$	3
$\vdots$	$12x - 3d_x + 12$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$z = 9x - 2d_x + 5$	$36x - 9d_x + 20$	5
$z+1$	$36x - 9d_x + 25$	4
$\vdots$	$36x - 9d_x + 29$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$r = 2$ olmak üzere;

a) (a_i) dizisinde Δ_i farkının 5 olduğu ilk a_i terimi için, bu a_i teriminin 10 fazlasında $\Delta_i = 4$, 3 katının 6 fazlasında $\Delta_i = 3$ ve 9 katının 20 fazlasında $\Delta_i = 5$ olur.

Çizelge 4.11. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3 \pmod 4$ olmak üzere $r = 2$ için $\Delta_i = 5$ ile belirlenen 3, 4 ve 5 farkları

i	a_i	Δ_i
x	$4x - d_x$	5
$\vdots$	$4x - d_x + 5$	5
$\vdots$	$4x - d_x + 10$	4
$\vdots$	$4x - d_x + 14$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y = 3x + \frac{3}{2} - \left(\frac{3d_x - d_y}{4}\right)$	$12x - 3d_x + 6$	3
$\vdots$	$12x - 3d_x + 9$	4
$\vdots$	$12x - 3d_x + 13$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$z = 9x - 2d_x + 5$	$36x - 9d_x + 20$	5
$\vdots$	$36x - 9d_x + 25$	4
$\vdots$	$36x - 9d_x + 29$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

b) (a_i) dizisinde Δ_i farkının 6 olduğu ilk a_i terimi için, bu a_i teriminin 16 fazlasında $\Delta_i = 4$, 3 katının 6 fazlasında $\Delta_i = 3$ ve 9 katının 20 fazlasında $\Delta_i = 5$ olur.

Çizelge 4.12. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3 \pmod 4$ olmak üzere $r = 2$ için $\Delta_i = 6$ ile belirlenen 3, 4 ve 5 farkları

i	a_i	Δ_i
x	$4x - d_x$	6
$x+1$	$4x - d_x + 6$	5
$\vdots$	$4x - d_x + 11$	5
$\vdots$	$4x - d_x + 16$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y = 3x + \frac{3}{2} - \left(\frac{3d_x - d_y}{4}\right)$	$12x - 3d_x + 6$	3
$y+1$	$12x - 3d_x + 9$	3
$\vdots$	$12x - 3d_x + 12$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$z = 9x - 2d_x + 5$	$36x - 9d_x + 20$	5
$z+1$	$36x - 9d_x + 25$	4
$\vdots$	$36x - 9d_x + 29$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Çizelge 4.1, Çizelge 4.2 ve Çizelge 4.3 ile birlikte Çizelge 4.4, Çizelge 4.5, Çizelge 4.6' nın esas alınması sonucu, sırası ile $r = 0$, $r = 1$ ve $r = 2$ değerleri için Çizelge 4.13, Çizelge 4.14 ve Çizelge 4.15' in ilk satırlarında olduğu gibi $\Delta_i \neq 4$ sıra dışı farkları dizisi olduğu sonucuna ulaşırız. Gerçekten, $n > 0$ ve $v = 1,2,3$ karşılık gelen indislerin

$i = f_3(n, v, j, r)$ için $\Delta_i = 3$,

$i = f_5(n, v, j, r)$ için $\Delta_i = 5$.

şeklinde olduğu ortaya çıkar.

Teorem 4.1.2 de görüldüğü gibi

$i = 3j + 2 = f_5(0,2, j,0) = f_5(0,3, j,0)$,

$i = 3j + 2 = f_5(0,2, j,1) = f_5(0,3, j,1)$,

$i = 3j + 2 = f_5(0,1, j,2) = f_5(0,2, j,2)$.

durumları için $\Delta_i = 6$ dır.

Çizelge 4.13. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3 \pmod 4$ olmak üzere $r = 0$ için sıra dışı farklar

Δ_i	5	6	3	3	3	$\cdots$
n	0	0	0	0	0	$\cdots$
v	1	2, 3	1	2	3	$\cdots$
d_i	9	7	6	7	8	$\cdots$

Çizelge 4.14. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3 \pmod 4$ olmak üzere $r = 1$ için sıra dışı farklar

Δ_i	5	6	3	3	3	$\cdots$
n	0	0	0	0	0	$\cdots$
v	1	2, 3	1	2	3	$\cdots$
d_i	9	8	5	6	7	$\cdots$

Çizelge 4.15. $a_1 \equiv a_2 \not\equiv 3 \pmod 4$ olmak üzere $r = 2$ için sıra dışı farklar

Δ_i	6	5	3	3	3	$\cdots$
n	0	0	0	0	0	$\cdots$
v	1, 2	3	1	2	3	$\cdots$
d_i	9	7	5	6	7	$\cdots$

Eş. 4.4 eşitliğine göre $\Delta_i \neq 4$ için sadece aşağıda gösterilen değerler değişir. Böylece aşağıdaki sonuçlar ortaya çıkar:

$\Delta_i = 5$ için $d_i = 10 - v$ ($v = 1$ ve $v = 3$) ve,

(4.5)

$\Delta_i = 3$ için $d_i = v + 4$ ($r = 1$ ve $r = 2$), $\Delta_i = 3$ için $d_i = v + 5$ ($r = 0$).

$\Delta_i = 5$ için, $r = 0$, $r = 1$ ve $r = 2$ olması durumunda

$d_{3j+r} = d_{3j} = 9$,

$d_{3j+r} = d_{3j+1} = 9$,

$d_{3j+r} = d_{3j+2} = 9$.

bulunur.

$\Delta_x = 5$ için

Teorem 4.1.2 ve Çizelge 4.5' den $x = f_5(n,v,j,r)$ ve $z = 9x - 2d_x + 5$ ve Eş. 4.5 eşitliğinden $d_x = 10 - v$ olup aşağıdaki adımı elde ederiz:

$$
\begin{aligned}
z &= 9x - 2d_x + 5 \\
&= 9f_5(n,v,j,r) - 2(10 - v) + 5 \\
&= 9f_5(n,v,j,r) - 20 + 2v + 5 \\
&= 9f_5(n,v,j,r) + 2v + 15 = f_5(n+1,v,j,r).
\end{aligned}
$$

Bununla birlikte iddia edildiği gibi, Çizelge 4.5' de $r = 0$ için $d_y = v + 5$ ve $y = 3x + \frac{3}{2} - \left(\frac{3d_x - d_y}{4}\right)$ kullanılarak

$$
\begin{aligned}
y &= f_3(n,v,j,r) \\
&= 3f_5(n,v,j,r) + \frac{3}{2} - \left(\frac{3(10 - v) - v - 5}{4}\right) \\
&= 3f_5(n,v,j,r) + v - \frac{19}{4} \\
&.
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Çizelge 4.5' de $r = 1$ ve $r = 2$ için $d_y = v + 4$ ve $y = 3x + \frac{3}{2} - \left(\frac{3d_x - d_y}{4}\right)$ kullanılarak

$$y = f_3(n,v,j,r)$$

$$= 3f_5(n,v,j,r) + \frac{3}{2} - \left(\frac{3(10-v) - v - 4}{4}\right)$$

$$= 3f_5(n,v,j,r) + v - 5$$

elde edilir.

4.1.2. Sonuç

$a_1 = a_2 = 4j + r \geq 6$ için $r = 0$, $r = 1$, $r = 2$ ve Teorem 4.1.2 den f_3 ve f_5 ile aşağıdaki değeri elde ederiz:

$a_i = 4i - 9 \quad : \quad 4 \leq i < 3j + r = f_5(0,1,j,r)$ için

ve

$a_i = 4i - d_t \quad : \quad s \leq i < t$ için

Burada $\Delta_s \neq 4$ ve $\Delta_t \neq 4$ durumu iki ardışık sıra dışı farktır ve

$$d_t = \begin{cases} 10 - v, & t = f_5(n,v,j,r) \quad ise, \\ v + 4, & t = f_3(n,v,j,r) \quad ise, \quad (r = 1 \quad ve\; r = 2\;) \\ v + 5, & t = f_3(n,v,j,r) \quad ise. \quad (r = 0) \end{cases}$$

dir.

4.1.3. Özel durumlar

$a_1 = a_2 = 1{,}2{,}4$ ve 5 için (a_i) dizileri:

i) $a_1 = a_2 = 1$ ve $(i \geq 4)$ için; $a_i = 4i - 7$.
ii) $a_1 = a_2 = 2$ ve $(i \geq 3)$ için; Çizelge 4.5' deki durumlar oluşur.
iii) $a_1 = a_2 = 4$ ve $a_1 = a_2 = 5$ $(i \geq 4)$ için; Çizelge 4.6 ' daki durumlar oluşur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada tamlayıcı indirgeme bağıntılarından faydalanılarak Tribonacciye-benzer indirgeme bağıntısı tanımlanmış, bu bağıntının yardımıyla iki dizinin birbirinin tamlayıcı dizisi olduğu ve bu dizilerin özellikleri gösterilmiştir. İlk önce verilen herhangi bir dizinin tamlayıcı dizisi göz önüne alınmıştır. Bazı özel diziler için tamlayıcı dizileri tanımlanıp, bu dizilerin özellikleri incelenmiştir (Gargano ve Quintas, 2003). Ayrıca Fibonacci dizisinin tamlayıcı dizisi ve bu dizinin özellikleri bilinmektedir (Bode ve diğerleri, 2007).

Bu çalışmalar doğrultusunda başka rekürans bağıntıları ile belirlenen diziler ve bu dizilerin tamlayıcı dizileri çalışabilir.

KAYNAKLAR

Aitken, A. C. and Ostroski, A. (1927). Solution to Problem 3173. *The American Mathematical Monthly*, 34, 159.

Beatty, S. (1926). Problem 3173. *The American Mathematical Monthly,* 33, 159.

Bode, J. P., Harborth, H. and Kimberling, C. (2007). Complementary Fibonacci Sequences. *The Fibonacci Quaterly*, 254-264.

Fraenkel, A. S. (1977). Complementary Systems of Integers. *The American Mathematical Monthly*, 84 (2), 114-115.

Fraenkel, A. S. (1969). The Bracket Function and Complementary Sets of Integers. *Canadian Journal of Mathematics*, 21, 6-27.

Fraenkel, A. S. (1973). Complementing and Exactly Covering Sequences. *Journal of Combinatorial Theory- Series*, 14, 8-20.

Fraenkel, A. S., and Kimberling, C. (1994). Generalized Wythoff Arrays, Shuffles and Interspersions. *Discrete Mathematics*, 126, 137-149.

Fraenkel, A. S. (1985). Systems of Numeration. *The American Mathematical Monthly,* 92, 105-114.

Gargano, M. L. and Quintas, L. V. (2003). Complementary Arithmetic Sequences. *Congressus Numerantium* 192, 33-42.

Gould, H. W. (1965). Non-Fibonacci Numbers. *The Fibonacci Quarterly,* 3, 177-183.

Honsberger, R. (1973). Ingenuity in Mathematics, New Mathematical Library Series. *Mathematical Association of America*, 23.

Kimberling, C. (1981). Almost Arithmetic Sequences and Complementary Systems. *The Fibonacci Quarterly,* 19, 426-433.

Kimberling, C. (2007). Complementary Equations. *Journal of Integer Sequences,* 10, Article 07.1.4.

Kimberling, C. (2008). Complementary Equations and Wythoff Sequences. *Journal of Integer Sequences,* 11, Article 08.3.3.

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*. New York: Wiley-Interscience, 24-35.

Lambekand, J. and Moser, L. (1954). Inverse and Complementary Sequences of Natural Numbers. *The American Mathematical Monthly,* 61, 454-458.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ODABAŞ, Simge

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 19.11.1984, Zonguldak

Medeni hali : Bekâr

Telefon : 0 505 340 1933

e-mail : odabassmg@windowslive.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	2009
Lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	2006
Lise	Zonguldak Atatürk Anadolu Lisesi	2002

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2006-2008	Karacan Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2008-2009	Pi Eğitim	Matematik Öğretmeni
2009-2012	Sınav Dergisi Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2012-	SGK	Bilgisayar Programcılığı

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Tasci, D., ve Odabas, S. (2014). Complementary Tribonacci Sequences. *Journal of Algebra, Number Theory : Advances and Applications,* 11(2), 65-77.

Hobiler

Seyahat etmek, Müzik dinlemek, Sinema, Dans

GAZİ GELECEKTİR...