GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

YILDIZ-SAYILABİLİR UZAYLARIN BAZI KARDİNAL GENİŞLEMELERİ

Servet SOYARSLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2014

Servet SOYARSLAN tarafından hazırlanan "YILDIZ-SAYILABİLİR UZAYLARIN BAZI KARDİNAL GENİŞLEMELERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Çetin VURAL

MATEMATİK, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu Onaylıyorum ..…………………

Başkan : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

MATEMATİK, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu Onaylıyorum …………………...

Üye : Doç. Dr. Selma ÖZÇAĞ

MATEMATİK, Hacettepe Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu Onaylıyorum …………………...

Tez Savunma Tarihi: 23/6/2014

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………….…….

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

……………………………

Servet SOYARSLAN

23/6/2014

YILDIZ-SAYILABİLİR UZAYLARIN BAZI KARDİNAL GENİŞLEMELERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Servet SOYARSLAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2014

ÖZET

Bu çalışmada, topolojik uzaylarda yıldız sayılabilirlik ile bazı kompaktlık türleri arasındaki ilişkilere değinilmiş ve “On the Extent of Star Countable Spaces” , “A Survey on Star Covering Properties” isimli makalelerdeki bazı teoremlerin kardinal genişlemeleri elde edilmiştir. Bu kardinal genişlemelerden biri “X bir T_1- uzayı ve zayıf (m^+,m)- metaLindelöf uzay olmak üzere X in yıldız-≤m olması için gerek ve yeter şart ext(X)≤m olmasıdır.” biçimdedir.

Bilim Kodu	:	204.1.132
Anahtar Kelimeler	:	Kompakt uzaylar, Sayılabilir kompakt uzaylar, Yıldız-kompakt, Lindelöf uzaylar, Yıldız, Yıldız-Lindelöf, Merkezlenmiş kompakt
Sayfa Adedi	:	77
Danışman	:	Doç. Dr. Çetin VURAL

SOME CARDINAL EXTENSIONS OF THE STAR-COUNTABLE SPACES

(M. Sc. Thesis)

Servet SOYARSLAN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2014

ABSTRACT

In this study, relations between star countability and some compactness types in the topological spaces are mentioned and cardinal extensions of some theorems which are in the articles named “On the Extent of Star Countable Spaces” and “A Survey on Star Covering Properties” are obtained. One of the cardinal extensions is “If a space X is a T_1-space and a weakly (m^+,m)-metaLindelöf space, then X is star-≤m if and only if ext(X)≤m.”

Science Code : 204.1.132

Key Words : Compact spaces, Countable compact sapaces, Star-compact, Lindelöf spaces, Star, Star-Lindelöf, Centered-compact

Page Number : 77

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Çetin VURAL

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli zamanını bana ayırıp önemli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren kıymetli hocam Doç. Dr. Çetin VURAL’ a, başta annem olmak üzere aileme ve eşime teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve bir kısaltma, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\|A\|$	A kümesinin kardinalitesi
$\tilde{A}$	A kümesinin yığılma noktalarının kümesi
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
$\overset{o}{A}$	A kümesinin iç noktalarının kümesi
AxB	A ve B kümelerinin Kartezyen çarpımı
$\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$	$\mathcal{U}$ ailesi $\mathcal{V}$ ailesinin incelmişidir
ω ya da ω_0	İlk sayılabilir sonsuz kardinal ve ordinal
ω_1	ilk sayılamaz kardinal ve ordinal
κ^+	κ kardinal sayısının ardılı
A^c	A kümesinin tümleyeni
$\psi(x,X)$	X uzayının x noktasındaki sözde karakteri
$\chi(x,X)$	X uzayının x noktasındaki karakteri
$l(X)$	Lindelöflük sayısı
w(X)	X topolojik uzayının ağırlığı
$\psi(X)$	X uzayının sözde karakteri
$\chi(X)$	X uzayının karakteri
$A \underset{\neq}{\subset} B$	A kümesi B kümesinin öz altkümesidir.

Kısaltma	Açıklama
Kapaçık	kapalı ve açık

1. GİRİŞ

Topolojik uzayların önemli sınıflarından biri kompakt uzaylardır. Her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüye sahip olduğu uzaylara kompakt uzay denildiği iyi bilinir. Kompaktlığın bu genel tanımında biraz değişiklik yapılırsa, sayılabilir kompaktlık, Lindelöflük gibi kavramlar elde edilir. Bununla birlikte, λ ve κ sonsuz kardinaller olmak üzere kompakt uzayın tanımında geçen "her açık örtü" sözcükleri yerine "kardinalitesi en fazla λ olan örtü" veya "sonlu alt örtüsü vardır" yerine "kardinalitesi κdan küçük olan alt örtüsü vardır" ya da "kardinalitesi en fazla κ kadar olan alt örtüsü vardır" gibi koşullar alınarak $\lambda-$Lindelöf, $\lambda-$ kompakt, $(\lambda,\kappa)-$Lindelöf , $(\lambda,\kappa)-$kompakt, $(\infty,\kappa)-$ kompakt gibi uzaylar elde edilir. İşi daha da ileriye götürüp kompaktlık tanımındaki örtü ve alt örtü kavramları yerine kapalı ayrık alt küme veya genişleme kavramları getirildiğinde zayıf λ-metaLindelöf, zayıf $(\lambda,\kappa)-$ metaLindelöf, zayıf λ-yığınsal Hausdorff gibi uzaylar elde edilir.

Bu çalışmanın 2. bölümünde ileriki bölümlerde kullanılacağından kompaktlık kavramının bir nevi kardinal genişlemeleri olan yukarda bahsedilen tanımlar verilmiş ve bu tanımlar için gerekli olan kümeler teorisinin kardinal ve ordinal kavramlarına değinilmiştir.

X bir küme, $\mathcal{A}$, X in alt kümelerinin bir ailesi ve Y, X in bir alt kümesi olmak üzere $st(Y,\mathcal{A})=\bigcup\{A\in\mathcal{A}: A\cap Y\neq\phi\}$ kümesine Y nin $\mathcal{A}$ ailesi içindeki yıldızı denir. X bir topolojik uzay ve **Ö** bir özellik olmak üzere X uzayının her $\mathcal{O}$ açık örtüsü için X in st(Y, $\mathcal{O}$)=X olacak biçimde **Ö** özelliğini sağlayan bir Y alt kümesi varsa X uzayına yıldız-**Ö** denir. Bu kavramlar [1] de verilmiştir. Bu kavramlar ilk olarak S. Ikenega tarafından 1990 yılında *"Topological concepts between 'Lindelöf' and 'Pseudo-Lindelöf' "* adlı makalede tanımlanmıştır. Daha sonra 1998 yılında M.V. Matveev tarafından [2] de Yıldız-**Ö** uzaylarının üzerine yapılan kapsamlı araştırmalar sunulmuştur. [5] te **Ö** özelliğinin Lindelöf, σ−kompakt veya sayılabilir olması durumunda yıldız-**Ö** uzayının Lidelöflük benzeri kavramlar ile ilişkisi araştırılmıştır. [1] de yıldız-sayılabilir ve yıldız-Lindelöf uzaylar incelenmiş ve P-uzay olarak adlandırılan, sayılabilir sayıda açığın arakesitinin açık olduğu topolojik uzaylarda bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmanın 3. bölümünde [1], [2] ve [5] te yukarıda bahsedilen bu sonuçlardan bazıları sunulmuştur.

Her T_1-uzayı yıldız-(kapalı, ayrık) tır. Topolojik uzaylar için T_1 uzayı olmak gibi çok genel bir özelliğin yıldız- (kapalı, ayrık) olmayı gerektirmesi hayli ilgi çekicidir. Bununla birlikte parakompaktlık, normallik, metriklenebilme, sayılabilir kompaktlık, bağlantılılık gibi çoğu topolojik özellikler yıldız-**Ö** kavramı ya da yıldız yoluyla karakterize edilebilir. Bu karakterizasyonlar 3. bölümde verilmiştir.

Bu çalışmanın 4. bölümünde, 3. bölümde değinilen sonuçların bazı kardinal genişlemeleri elde edilmiştir. Bu genişlemeler yapılırken 2. bölümde bahsedilen uzaylara ihtiyaç duyulmuştur. Örneğin P-uzaylarında geçerli olan bir sonucun kardinal genişlemesini yapabilmek için P-uzayı yetmemekte (yani sayılabilir sayıda açığın arakesitinin açık olması yetmemekte) bir sonsuz κ kardinali için κ çoklukta açığın arakesiti açık olduğu uzaylara ihtiyaç duyulmaktadır.

2. BAZI TANIM VE TEOREMLER

İki alt başlıktan oluşan bu bölüm ileriki bölümlerde gereksinim duyulan tanım ve teoremleri içermektedir.

Bu bölümün birinci kısmı kümeler kuramı ile ilgilidir. Bu başlıkta kardinal, ordinal kavramları ve bu kavramlarla ilgili, ileriki bölümlerde kullanılacak, temel özellikler verilmiştir. Bunlar ortalama bir kümeler teorisi kitabında ya da [4] te bulunabilir.

Bu bölümün ikinci kısmı örtü özellikleri ile ilgili temel tanım ve teoremlerden oluşmaktadır.

2.1. Kümeler Kuramı ile İlgili Temel Tanım ve Teoremler

Burada ordinal ve kardinal kavramları ve bu kavramlarla ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1.1. Tanım

X bir küme ve “< ” X üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer “< ” bağıntısı X in her x, y, z elemanı için

i) $x < y$ ve $y < z$ ise $x < z$ dir.

ii) $x < y$ iken $y < x$ doğru değildir.

şartlarını sağlıyorsa “< ” bağıntısına X üzerinde bir sıralama bağıntısı denir. Bu durumda (X,<) ikilisine de bir sıralı küme denir.

(X,<) sıralı bir küme olmak üzere eğer “$x \neq y$ biçimindeki her $x, y \in X$ için $y<x$ veya $x<y$” şartı sağlanıyorsa (X,<) ikilisine bir tam sıralı ya da lineer sıralı küme denir.

(X,<) sıralı bir küme olmak üzere eğer “X in boştan farklı her alt kümesinin bir en küçük elemanı vardır” şartı sağlanıyorsa (X,<) ikilisine bir iyi sıralı küme denir.

2.1.2. Tanım

Her elemanı öz alt kümesi olan kümeye geçişli bir küme denir.

2.1.3. Tanım

Eleman olma "$\in$" bağıntısına göre iyi sıralı olan geçişli her kümeye bir ordinal veya ordinal sayı denir.

İlk sonsuz ordinal sayı ω veya ω_0 ile, ilk sayılamaz ordinal sayı ω_1 ile gösterilir. ♦

Şimdi de kardinal kavramını verelim.

2.1.4. Tanım

Kendisinden küçük ordinaller ile birebir eşlenemeyen ordinallere bir kardinal ya da kardinal sayı denir.

m bir kardinal olmak üzere, m den büyük olan en küçük kardinal sayıya m kardinalinin ardılı denir ve m^+ ile gösterilir.

2.1.5. Tanım

X bir küme ve κ bir kardinal olmak üzere X kümesi ile κ arasında birebir örten dönüşüm varsa X kümesinin kardinalitesi κ dır denir ve $|X| = \kappa$ ile gösterilir.♦

Ordinaller ve kardinaller ile ilgili aşağıda ispatsız olarak verilecek teoremin ispatı ortalama bir kümeler teorisi kitabında veya özel olarak [4] te bulunabilir.

2.1.6. Teorem [4]

m sonsuz bir kardinal olsun. Eğer her $i \in I$ için $|A_i| \le m$ ve $|I| \le m$ ise $|\bigcup\{A_i : i \in I\}| \le m$ dir.

2.1.7. Sonuç

m sonsuz bir kardinal olsun. A ve B kümeleri için $|A| \leq m < |B|$ ise $m < |B - A|$ dır.

2.1.8. Sonuç

m ve n sonsuz kardinaller olmak üzere m<n olsun. $f : n \to m$ bir fonksiyon ise m nin en az bir x elemanı için $\{y \in n : f(y) = x\}$ kümesinin kardinalitesi m den büyüktür.

2.1.9. Teorem

m sonsuz bir kardinal olsun. $A \subseteq m^+$ ve $|A| < m^+$ ise sup $A < m^+$ dir.♦

Uyarı: Teorem 2.1.9, m bir sonsuz kardinal , $A \subseteq m$ ve $|A| < m$ ise sup A<m biçiminde ifade edilemez. Örneğin: $m = \omega_\omega$, $A = \{\omega_i : i \in \omega\}$ alınırsa $A \subseteq m$ ve $|A| = \omega < m$ olup sup A $= m = \omega_\omega$ olur.

2.2. Bazı Topolojik Tanım ve Teoremler

Bu alt bölümde bu çalışmanın 3. ve 4. bölümlerinde kullanılacak temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.2.1.Tanım

X bir küme ve X üzerindeki topoloji $\tau = \{A : A \subseteq X\}$ ise (X, τ) topolojik uzayına ayrık topolojik uzay denir.

2.2.2. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $\tau_A = \{A \cap O : O \in \tau\}$ olsun. (A, τ_A) topolojik uzayına X topoljik uzayının bir alt uzayıdır (ya da kısaca A, X topolojik uzayının bir alt uzayıdır) denir.♦

Aşağıdaki lemmanın ispatı açıktır.

2.2.3. Lemma

X bir topoljik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A kümesinin her a elemanı için $U_a \cap A = \{a\}$ olacak biçimde bir $U_a \subseteq X$ açığı varsa (A, τ_A) topolojik uzayı X in bir ayrık alt uzayıdır. (Bu durumda kısaca $A \subseteq X$ ayrıktır denir.)

2.2.4. Tanım

X bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun. $x \in U$ olacak biçimdeki her $U \subseteq X$ açığı için $(U - \{x\}) \cap A \neq \phi$ ise x elemanına A nın bir yığılma noktası veya bir limit noktası denir. A nın tüm yığılma noktalarının kümesi $\tilde{A}$ ile gösterilir.

2.2.5. Tanım

Bir X topolojik uzayının kapalı ve açık olan alt kümelerine (İngilizce clopen teriminden esinlenerek) kısaca kapaçık kümeler diyeceğiz.

2.2.6. Teorem

X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere $\tilde{A} = \phi$ olması için gerek ve yeter şart A nın kapalı ve ayrık olmasıdır.

İspat

$\tilde{A} = \phi$ olsun.

$\overline{A} = A \cup \tilde{A}$ olduğundan $\overline{A} = A \cup \phi$ =A olur. Böylece A kapalıdır.

A kümesinin ayrık olduğunu görmek için keyfi bir $x \in A$ alalım. $\tilde{A} = \phi$ olduğundan $x \notin \tilde{A}$ dır. O halde $x \in U$ ve $(U - \{x\}) \cap A = \phi$ olacak biçimde açık bir $U \subseteq X$ vardır. O halde $U \cap A = \{x\}$ olup A ayrıktır.

A kapalı ve ayrık olsun.

$\widetilde{A} \neq \phi$ olduğunu varsayalım. Bir $x \in \widetilde{A}$ alalım. A kapalı olduğundan $\overline{A} = A$ dır. $A \cup \widetilde{A} = \overline{A}$ olduğundan $\widetilde{A} \subseteq A$ dır. Böylece $x \in A$ dır. A ayrık olduğundan $x \in U$ ve $U \cap A = \{x\}$olacak biçimde açık bir $U \subseteq X$ vardır. $U \cap A = \{x\}$olması ile $x \in \widetilde{A}$ olması çelişir. O halde varsayım yanlış olup $\widetilde{A} = \phi$ dir.♦

Şimdi bir topolojik uzayın karakteri, sözde karakteri ve ağırlığı kavramları verilecek. Fakat önce bir topolojik uzayın tabanı ve bir noktanın komşuluğu kavramlarına değinmek yerinde olacaktır.

2.2.7. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun.

1) $\mathcal{B} \subseteq \tau$ olmak üzere, eğer τ topolojisinin her bir elemanı $\mathcal{B}$ nin bazı elemanlarının birleşimi olarak yazılabiliyorsa $\mathcal{B}$ ye τ topolojisinin bir tabanı denir.
2) X uzayının bir x elemanı ve bu x elemanını içeren bir $N \subseteq X$ için: $x \in V \subseteq N$ olacak biçimde bir $V \subseteq X$ açık alt kümesi varsa N ye x elemanının bir komşuluğu denir. Eğer N açık ise N ye x elemanının bir açık komşuluğu denir.
3) $x \in X$ olsun. $\mathcal{B}(x)$, x in açık komşuluklarından oluşan bir aile olsun. Eğer her N komşuluğu için $x \in B \subseteq N$ olacak biçimde bir $B \in \mathcal{B}(x)$ varsa $\mathcal{B}(x)$ ailesine x noktasının bir komşuluklar tabanı veya X uzayının $x \in X$ noktasında bir tabanıdır denir. ♦

(X, τ) bir topolojik uzay ve $\mathcal{B}$ ailesi τ topolojisinin bir tabanı olmak üzere herhangi bir $x \in X$ noktasının bir komşuluklar tabanı $\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$ olduğu yukarıdaki tanımdan açıktır. Böylece $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$ olur.

O halde bir (X, τ) topolojik uzayındaki her bir $x \in X$ noktasının $\mathcal{B}(x)$ komşuluklar tabanı verildiğinde bu uzayın τ topolojisi üretilebilir. Bir uzaydaki topolojinin doğrudan yazılması yerine, bu uzaydaki noktaların komşuluklar tabanı kullanılarak topoljinin üretilmesi daha kolay olduğu durumlarda, uzayın topolojisini yazmak için bu yol tercih edilebilir. Örnek 4.1.9 ve Örnek 4.1.10 için gerekli olan topolojiler bu biçimde üretilmiştir.

2.2.8. Tanım

X bir topolojik uzay olsun.

1) X uzayının bir $x \in X$ noktasındaki sözde-karakteri $\psi(x, X)=\min\{|\mathcal{O}| : \mathcal{O}$, X uzayının açık alt kümelerinin bir ailesi ve $\bigcap \mathcal{O} = \{x\}$ } olmak üzere; X uzayının sözde-karakteri $\psi(X)=\sup\{\psi(x, X) : x \in X\}$ biçiminde tanımlanır.
2) X uzayının bir x noktasındaki karakteri $\chi(x, X)=\min\{|\mathcal{B}(x)| : \mathcal{B}(x)$ x elemanının bir komşuluklar tabanı} olmak üzere; X uzayının karakteri $\chi(X)=\sup\{\chi(x, X) : x \in X\}$ biçiminde tanımlanır.
3) X uzayının ağırlığı w(X) =min{$|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ X uzayının bir tabanı} biçiminde tanımlanır.
4) ext(X)=sup {$|A| : A \subseteq X$, A kapalı ve ayrık} biçiminde tanımlanır.♦

2.2.9. Tanım

X bir topolojik uzay olmak üzere $\mathcal{A}$, X in alt kümelerinin bir ailesi ve κ sonsuz bir kardinal olsun.

1) Eğer her $x \in X$ için $\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \phi\}$ ailesi sonlu (sayılabilir) olacak biçimde x in açık bir U komşuluğu varsa $\mathcal{A}$ ailesine bir yerel sonlu (yerel sayılabilir) aile denir.
2) Eğer her $x \in X$ için $|\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \phi\}| \leq \kappa$ ($|\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \phi\}| < \kappa$) olacak biçimde x in açık bir U komşuluğu varsa $\mathcal{A}$ ailesine bir yerel-$\leq \kappa$ (yerel -$< \kappa$) aile denir.
3) Eğer her $x \in X$ için $|\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \phi\}| \leq 1$ olacak biçimde x in açık bir U komşuluğu varsa $\mathcal{A}$ ailesine bir ayrık aile denir.

4) Eğer $\mathcal{A}$ ailesinin her A elemanı için $\{B \in \mathcal{A} : A \cap B \neq \phi\}$ sonlu (sayılabilir) ise $\mathcal{A}$ ailesine bir yıldız sonlu aile (yıldız sayılabilir aile) denir.

5) Eğer $\mathcal{A}$ ailesinin her A elemanı için $|\{B \in \mathcal{A} : A \cap B \neq \phi\}| \leq \kappa$ ($|\{U \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \phi\}| < \kappa$) ise $\mathcal{A}$ ailesine bir yıldız-$\leq \kappa$ (yıldız-$< \kappa$) aile denir.

6) Eğer her $x \in X$ için $\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ ailesi sonlu (sayılabilir) ise $\mathcal{A}$ ailesine bir nokta sonlu aile (nokta sayılabilir aile) denir ♦

Şimdi 3. bölümün temelini oluşturacak olan “bir kümenin bir aile içindeki yıldızı” kavramı verilecek.

2.2.10. Tanım

X bir küme $\mathcal{A}$, X in alt kümelerinin bir ailesi ve $Y \subseteq X$ olmak üzere $st(Y, \mathcal{A}) = \bigcup\{A \in \mathcal{A} : A \cap Y \neq \phi\}$ kümesine Y nin $\mathcal{A}$ ailesi içindeki yıldızı denir.

Özel olarak Y={x} ise $st(\{x\}, \mathcal{A})$ yerine $st(x, \mathcal{A})$ yazılır.

2.2.11. Tanım

1) $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$ bir X kümesinin alt kümelerinin aileleri olmak üzere, eğer $\mathcal{U}$ nun her U elemanı için $U \subseteq V$ olacak biçimde $\mathcal{V}$ nin bir V elemanı var ve $\bigcup\mathcal{U} = \bigcup\mathcal{V}$ ise $\mathcal{U}$ ailesine $\mathcal{V}$ ailesinin bir incelmişi denir ve $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ ile gösterilir.

2) $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$ bir X kümesinin alt kümelerinin aileleri olmak üzere eğer $\{st(U, \mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}$ ailesi $\mathcal{V}$ ailesinin bir incelmişi ise $\mathcal{U}$ ya $\mathcal{V}$ nin yıldız incelmişi denir ve $\mathcal{U} \prec^* \mathcal{V}$ ile gösterilir.

3) n>0 bir tam sayı, X bir küme, $A \subseteq X$ ve $\mathcal{U}$, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. $st^1(A, \mathcal{U}) = st(A, \mathcal{U})$ olmak üzere $st^{n+1}(A, \mathcal{U}) = st(st^n(A, \mathcal{U}), \mathcal{U})$ biçiminde tanımlanır.

4) n>0 bir tam sayı, X bir küme, $\mathcal{U}$ X in alt kümelerinin bir ailesi ve $x \in X$ olsun.

$st^{\infty}(x,\mathcal{U}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} st^{n}(x,\mathcal{U})$ dir.

2.2.12. Tanım

X bir küme, $\mathcal{A}$, X in alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere $\bigcup \mathcal{A}$=X ise $\mathcal{A}$ ailesine X in bir örtüsü denir.

Eğer X bir topolojik uzay ise her elemanı açık (kapalı) olan X in bir örtüsüne bir açık (kapalı) örtü denir.

2.2.13. Tanım

X bir topolojik uzay ve m bir sonsuz kardinal sayı olsun. X uzayının her açık örtüsünün, kardinalitesi en fazla m olan bir açık incelmişi varsa bu m kardinal sayısına, X uzayının Lindelöflük sayısı denir ve $\ell(X)$=m yazılır.♦

Şimdi P_κ-uzayı tanımlanıp bu uzaya örnekler verilecek.

2.2.14. Tanım

X bir topolojik uzay ve κ bir sonsuz kardinal sayı olmak üzere X in açık alt kümelerinin $|\mathcal{O}| \leq \kappa$ olacak biçimdeki her $\mathcal{O}$ ailesi için $\bigcap \mathcal{O} = \bigcap_{O \in \mathcal{O}} O$ kümesi açık oluyorsa X uzayına bir P_κ-uzayı denir.

Özel olarak P_{ω_0} yerine P-uzayı yazılır.

Not: Bundan sonra " X bir P_κ-uzayıdır" denildiğinde yazılmasa dahi κ bir sonsuz kardinal kabul edilecektir.

2.2.15. *Örnek*

κ bir sonsuz kardinal olsun. X kümesi $\tau = \{A \subseteq X : |A^c| \leq \kappa \text{ veya } A = \phi\}$ topolojisi ile bir P_κ-uzayıdır.

2.2.16. *Örnek*

X bir küme ve $Y \subseteq X$ olmak üzere $\tau_Y = \{A \subseteq X : A \cap Y = \phi \text{ veya } A = X\}$ topolojisi ile X bir P_κ-uzayıdır.♦

Şimdi "bir kümenin açık genişlemesi" kavramı tanımlanıp genişleme çeşitleri verilecek.

2.2.17. Tanım

X bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesinin her a elemanı için $a \in V_a$ ve $V_a \subseteq X$ açık olmak üzere $\mathcal{V} = \{V_a : a \in A\}$ ailesine A kümesinin bir açık genişlemesi denir.

2.2.18. Tanım

X bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve $\mathcal{V} = \{V_a : a \in A\}$ ailesi A kümesinin bir açık genişlemesi olsun.

1) X in her x elemanı için $|\{a \in A : x \in V_a\}| \leq \omega_0$ oluyorsa $\mathcal{V}$ ailesine A kümesinin nokta-sayılabilir bir açık genişlemesi denir.
2) $a \neq b$ biçimindeki her $a, b \in A$ için $V_a \cap V_b = \phi$ olacak biçimdeki $\mathcal{V} = \{V_a : a \in A\}$ açık genişlemesine A kümesinin ikişerli ayrık bir açık genişlemesi denir. ♦

Verilen bu tanımın kardinal genişlemesi olan aşağıdaki tanımı verelim.

2.2.19. Tanım

X bir topolojik uzay, $A \subseteq X$, $\mathcal{V}=\{V_a : a \in A\}$ ailesi A kümesinin bir açık genişlemesi, κ bir kardinal olsun. X in her x elemanı için $|\{a \in A : x \in V_a\}| \leq \kappa$ ($|\{a \in A : x \in V_a\}| < \kappa$) oluyorsa $\mathcal{V}$ ailesine A kümesinin nokta-$\leq \kappa$ (nokta-$< \kappa$) açık genişlemesi denir.♦

İyi bilinir ki, her açık örtüsünün, sonlu bir alt örtüsünün var olduğu uzaylara kompakt uzay, sayılabilir bir alt örtüsünün var olduğu uzaylara da Lindelöf uzay denir. Aşağıdaki tanım bu iki kavramın bir bakıma kardinal genişlemesidir.

2.2.20. Tanım

X bir topolojik uzay , κ ve λ sonsuz kardinaller olmak üzere;

1) X in kardinalitesi en fazla λ olan her $\mathcal{O}$ açık örtüsünün sayılabilir (sonlu) bir $\mathcal{V}$ alt örtüsü varsa X uzayına $\lambda-$Lindelöf uzay ($\lambda-$ kompakt uzay) denir.
2) X in kardinalitesi en fazla λ olan her $\mathcal{O}$ açık örtüsünün kardinalitesi en fazla κ olan (κ dan küçük olan) bir $\mathcal{V}$ alt örtüsü varsa X uzayına $(\lambda,\kappa)-$Lindelöf ($(\lambda,\kappa)-$kompakt) uzay denir.
3) X in her $\mathcal{O}$ açık örtüsünün kardinalitesi κ dan küçük olan (en fazla κ olan) bir $\mathcal{V}$ alt örtüsü varsa X uzayına $(\infty,\kappa)-$kompakt uzay ($(\infty,\kappa)-$Lindelöf uzay) denir.
4) X in her $\mathcal{O}$ açık örtüsü için st(D,$\mathcal{O}$)=X olacak biçimde kardinalitesi en fazla κ olan (κ dan küçük olan) bir $D \subseteq X$ varsa X uzayına yıldız-$\leq \kappa$ (yıldız-$< \kappa$) denir.♦

Her açık örtüsünün nokta-sonlu (nokta-sayılabilir) bir açık incelmişi var olan topolojik uzaya, bir metakompakt uzay (metaLindelöf uzay) denir. Ayrıca bir topolojik uzayın kapalı ayrık her alt kümenin ikişerli ayrık açık bir genişlemesi varsa bu uzaya yığınsal Hausdorff uzay denir.

Metakompakt uzay, metaLindelöf uzay ve yığınsal hausdorf uzay kavramlarının bir çeşit kardinal genişlemeleri aşağıdaki tanımda verilmiştir.

2.2.21. Tanım

X bir topolojik uzay ve λ, μ sonsuz kardinaller olsun.

1) X uzayının kapalı, ayrık her D alt kümesi için X in $|D| = |E|$ olacak biçimde nokta–sayılabilir (ikişerli ayrık) açık genişlemesi bulunan bir $E \subseteq D$ alt kümesi varsa X uzayına zayıf metaLindelöf uzay (zayıf yığınsal Hausdorff uzay) denir.
2) X uzayının kardinalitesi λ olan kapalı, ayrık her D alt kümesi için X in $|D| = |E|$ olacak biçimde nokta sayılabilir açık genişlemesi bulunan bir $E \subseteq D$ alt kümesi varsa X uzayına zayıf λ-metaLindelöf uzay denir.
3) X uzayının kardinalitesi λ olan kapalı, ayrık her D alt kümesi için X in $|D| = |E|$ olacak şekilde nokta-≤μ açık genişlemesi bulunan bir $E \subseteq D$ alt kümesi varsa X uzayına zayıf (λ,μ)-metaLindelöf uzay denir.
4) X uzayının kardinalitesi λ olan kapalı, ayrık her D alt kümesi için X in $|D| = |E|$ olacak biçimde ikişerli ayrık açık genişlemesi bulunan bir $E \subseteq D$ alt kümesi varsa X uzayına zayıf λ-yığınsal Hausdorff uzay denir.

2.2.22. Sonuç

X bir topolojik uzay ve λ, μ sonsuz kardinaller olsun. Aşağıdakiler doğrudur.

1) Zayıf λ-yığınsal Hausdorff her uzay zayıf λ-metaLindelöftür.

2) Zayıf λ-yığınsal Hausdorff her uzay zayıf (λ,μ)-metaLindelöftür.

İspat

1) İkişerli ayrık açık bir genişleme, nokta sayılabilir açık bir genişleme olduğu için tanımdan açıktır.

2) İkişerli ayrık açık bir genişleme, nokta-≤μ açık bir genişleme olduğu için tanımdan açıktır. ♦

Aşağıdaki tanım sonlu arakesit özelliğine farklı bir bakıştır.

2.2.23. Tanım

$\mathcal{A}$ kümelerin bir ailesi ve n bir kardinal sayı olsun.

1) $\mathcal{A}$ nın boş olmayan $|\mathcal{B}| \leq n$ biçimindeki her $\mathcal{B}$ alt ailesi için $\bigcap \mathcal{B} \neq \phi$ oluyorsa $\mathcal{A}$ ya n-bağlı bir aile denir.

2) $\mathcal{A}$ nın boş olmayan $|\mathcal{B}| < \omega$ biçimindeki her $\mathcal{B}$ alt ailesi için $\bigcap \mathcal{B} \neq \phi$ oluyorsa $\mathcal{A}$ ya merkezlenmiş bir aile (ya da sonlu arakesit özelliğine sahip bir aile) denir.♦

Şimdi yukarıdaki tanımı kullanarak kompaktlık kavramı ile ilgili bir tanım daha verelim.

Aşağıdaki tanımın bir kardinal genişlemesi Tanım 4.1.5 te yapılmıştır.

2.2.24. Tanım

X bir topolojik uzay, n bir kardinal sayı olmak üzere X in her açık örtüsünün merkezlenmiş (n- bağlı) ailelerin sonlu sayıda birleşiminden oluşan bir alt örtüsü varsa X uzayına bir merkezlenmiş kompakt (n-bağlı kompakt) uzay denir.♦

Şimdi de “kapanışın korunması” kavramını verelim.

2.2.25. Tanım

X bir topolojik uzay $\mathcal{A}$, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer her $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ için $\overline{\bigcup \mathcal{B}} = \bigcup \overline{\mathcal{B}}$ oluyorsa $\mathcal{A}$ ailesine kapanışı koruyan bir aile denir.

(Burada $\overline{\bigcup \mathcal{B}} = \overline{\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B}$ ve $\bigcup \overline{\mathcal{B}} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}$ dır) ♦

Bir topolojik uzayda sonlu sayıda kapalı kümenin birleşimi bir kapalı küme olduğundan sonlu bir aile kapanışı korur. Fakat sonsuz bir aile kapanışı korumayabilir. Buna bir örnek aşağıdaki teoremin sonunda verilmiştir. Yerel sonlu her aile kapanışı korur. Aşağıdaki teoremde bu ispatlanmıştır.

2.2.26. Teorem

Yerel sonlu her aile kapanışı korur.

İspat

X bir topolojik uzay ve $\mathcal{A}$, X in alt kümelerinin yerel sonlu bir ailesi olmak üzere, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ olsun.

Her $B \in \mathcal{B}$ için $B \subseteq \bigcup \mathcal{B}$ olduğundan $\overline{B} \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{B}}$ olup $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \overline{B} \subseteq \overline{\bigcup \mathcal{B}}$ dır.

Kapsamanın diğer tarafı için herhangi bir $x \in \overline{\bigcup \mathcal{B}}$ elemanını alalım.

$\mathcal{A}$, X in alt kümelerinin yerel sonlu bir ailesi olduğundan $\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \phi\}$ ailesi sonlu olacak biçimde x in açık bir U komşuluğu vardır. O halde $\{A \in \mathcal{B} : A \cap U \neq \phi\}$ $\subset \{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \phi\}$ olduğundan $\mathbb{S} = \{A \in \mathcal{B} : A \cap U \neq \phi\}$ ailesi sonludur. $x \in U$ olduğundan $x \notin \overline{\bigcup_{B \in \mathcal{B}-\mathbb{S}} B}$ dir. $\mathbb{S}$ sonlu olduğundan $\overline{\bigcup_{B \in \mathbb{S}} B} = \bigcup_{B \in \mathbb{S}} \overline{B}$ dır. Böylece $x \in \overline{\bigcup_{B \in \mathbb{S}} B} = \bigcup_{B \in \mathbb{S}} \overline{B} \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}$ dir. O halde $\overline{\bigcup \mathcal{B}} \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}$ olup $\overline{\bigcup \mathcal{B}} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \overline{B}$ elde edilir. Böylece $\mathcal{A}$ ailesi kapanışı koruyan bir ailedir. ♦

Yerel sonlu olmayan bir aile kapanışı korumayabilir.

Örneğin: $\mathbb{R}$, alışılmış topolojisi ile reel sayılar kümesi ve Q, rasyonel sayılar kümesi olmak üzere $\{\{q\} : q \in Q\}$ ailesi $\mathbb{R}$ nin tek nokta alt kümelerinin (yani kapalı alt kümelerinin) bir ailesidir.

$\{\{q\} : q \in Q\}$ ailesi yerel sonlu değildir.

Şöyle ki: Bir $x \in \mathbb{R}$, ve x i içeren keyfi bir $U \subseteq \mathbb{R}$ açık alt kümesini alalım. $x \in (y,z) \subseteq U$ olacak biçimde bir (y,z) açık aralığı vardır. Bu aralıkta sonsuz çoklukta rasyonel sayı olduğundan $\{\{q\} \cap U \neq \phi : q \in Q\}$ sonsuz elemanlı olup $\{\{q\} : q \in Q\}$ ailesi bir yerel sonlu aile değildir.

$\{\{q\} : q \in Q\}$ ailesi kapanışı korumaz.

Şöyle ki; $\overline{\bigcup_{a \in Q}\{a\}} = \overline{Q} = \mathbb{R}$ olup $\bigcup_{q \in Q}\overline{\{q\}} = \bigcup_{q \in Q} q = Q$ olduğundan $\overline{\bigcup_{q \in Q}\{q\}} \neq \bigcup_{q \in Q}\overline{\{q\}}$ dir.

Böylece $\{\{q\} : q \in Q\}$ ailesi kapanışı korumaz.♦

Teorem 2.2.26 dan hemen aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

2.2.27. Sonuç

X bir topolojik uzay olmak üzere X in kapalı kümelerinden oluşan yerel sonlu bir ailenin birleşimi kapalıdır.♦

İçerisinde “yerel sonlu aile” kavramı geçen bir teoremin kardinal genişlemesi yapıldığında “yerel sonlu aile” kavramı yerine “yerel-$\leq \kappa$ aile” kavramını kullanıyoruz. Yerel sonlu aileler için geçerli olan Teorem 2.2.26 da verilen “kapanışı koruma” özelliğine bu çalışmanın 4. bölümünde (Sonuç 4.1.20) yerel-$\leq \kappa$ aileler için ihtiyaç duyuldu. Bu yüzden burada Teorem 2.2.26 nın bir kardinal genişlemesi yapılacak. Fakat önce aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

2.2.28. Lemma

$|S| \leq \kappa$ ve her $i \in S$ için $A_i \subseteq X$ olmak üzere eğer X bir P_κ-uzayı ise $\overline{\bigcup_{i \in S} A_i} = \bigcup_{i \in S}\overline{A_i}$

dir.

İspat

Her $i \in S$ için $A_i \subseteq \bigcup_{i \in S} A_i$ olduğundan her $i \in S$ için $\overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in S} A_i}$ olup $\bigcup_{i \in S} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in S} A_i}$ elde edilir.

Her $i \in S$ için $A_i \subseteq \overline{A_i}$ olduğundan $\bigcup_{i \in S} A_i \subseteq \bigcup_{i \in S} \overline{A_i}$ dır. Burada X bir P_κ-uzayı ve $|S| \leq \kappa$ olduğundan $\bigcup_{i \in S} \overline{A_i}$ kümesi kapalı olup $\overline{\bigcup_{i \in S} \overline{A_i}} = \bigcup_{i \in S} \overline{A_i}$ dır. Böylece $\overline{\bigcup_{i \in S} A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in S} \overline{A_i}} = \bigcup_{i \in S} \overline{A_i}$ olur. O halde $\overline{\bigcup_{i \in S} A_i} \subseteq \bigcup_{i \in S} \overline{A_i}$ elde edilir.

Böylece $\overline{\bigcup_{i \in S} A_i} = \bigcup_{i \in S} \overline{A_i}$ dır.♦

Aşağıdaki teorem, Teorem 2.2.26 nın bir kardinal genişlemesidir.

2.2.29. Teorem

X bir P_κ-uzayı olmak üzere X uzayının alt kümelerinden oluşan yerel-$\leq \kappa$ her aile kapanışı korur.

İspat

X bir P_κ-uzayı ve $\mathcal{A}$, X in alt kümelerinin yerel-$\leq \kappa$ bir ailesi olsun. m bir kardinal sayı olmak üzere $\mathcal{B} = \{A_i : i \in m\} \subseteq \mathcal{A}$ olsun.

Her $i \in m$ için $A_i \subseteq \bigcup_{i \in m} A_i$ olduğundan her $i \in m$ için $\overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in m} A_i}$ olup $\bigcup_{i \in m} \overline{A_i} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in m} A_i}$ dir.

Kapsamanın diğer tarafı için herhangi bir $x \in \overline{\bigcup_{i \in m} A_i}$ alalım.

$\mathcal{A}$, X in alt kümelerinin yerel-≤κ bir ailesi olduğundan $|\{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \phi\}| \leq \kappa$ olacak biçimde x in açık bir U komşuluğu vardır. O halde $\{A_i \in \mathcal{B} : A_i \cap U \neq \phi\}$ $\subset \{A \in \mathcal{A} : A \cap U \neq \phi\}$ olduğundan $|\{A_i \in \mathcal{B} : A_i \cap U \neq \phi\}| \leq \kappa$ ve buradan S= $\{i \in m : A_i \cap U \neq \phi\}$ olmak üzere $|S| \leq \kappa$ olur. Buradan her $i \in m - S$ için $A_i \cap U = \phi$ olup $(\bigcup_{i \in m-S} A_i) \cap U = \phi$ olur ki, $x \in U$ olduğundan, $x \notin \overline{\bigcup_{i \in m-S} A_i}$ dir. Aynı zamanda $\overline{\bigcup_{i \in m} A_i} = \overline{\bigcup_{i \in m-S} A_i} \cup \overline{\bigcup_{i \in S} A_i}$ olduğundan $x \in \overline{\bigcup_{i \in S} A_i}$ olur. $|S| \leq \kappa$ ve X, P_κ-uzayı olduğundan Lemma 2.2.28 gereği $\overline{\bigcup_{i \in S} A_i} = \bigcup_{i \in S} \overline{A_i}$ dır. Bu durumda $x \in \overline{\bigcup_{i \in S} A_i} = \bigcup_{i \in S} \overline{A_i} \subseteq \bigcup_{i \in m} \overline{A_i}$ olur. Yani $x \in \overline{\bigcup_{i \in m} A_i}$ için $x \in \bigcup_{i \in m} \overline{A_i}$ dır. O halde $\overline{\bigcup_{i \in m} A_i} \subseteq \bigcup_{i \in m} \overline{A_i}$ olur.

Böylece $\overline{\bigcup_{i \in m} A_i} = \bigcup_{i \in m} \overline{A_i}$ olup $\mathcal{A}$ kümesi kapanışı koruyan bir ailedir. ♦

Bu teoremden hemen aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

2.2.30. Sonuç

X bir P_κ-uzayı olmak üzere X uzayının kapalı alt kümelerinden oluşan yerel-≤κ her ailenin birleşimi kapalıdır.

3. YILDIZ-Ö

X bir topolojik uzay ve **Ö** bir özellik olmak üzere X uzayının her $\mathcal{O}$ açık örtüsü için X in st(Y,$\mathcal{O}$)=X olacak biçimde **Ö** özelliğini sağlayan bir Y alt kümesi varsa X uzayına yıldız-**Ö** denilir. Burada **Ö** özelliği bir küme ile ilgili herhangi bir özellik olabileceği gibi topolojik bir özellik de olabilir.

Topolojik uzayların yıldız-**Ö** olan bu sınıfı ilk olarak S. Ikenega tarafından 1990 yılında *“Topological concepts between ‘Lindelöf’ and ‘Pseudo-Lindelöf’ ”* adlı makalede tanımlanmıştır. Çok geçmeden yıldız-**Ö** üzerine farklı Matematikçiler tarafından birçok çalışma yapılmıştır. M.V. Matveev, yapılan bu çalışmaların bir kısmını ve kendi çalışmalarını 1998 yılında “A survey on star covering properties” isimli makalede sunmuştur. Bu bölümde de bu makaleden oldukça yararlanılmıştır.

3.1. Yıldız ve Yıldız-Ö

Bu bölümde genel olarak [1], [2] ve [5] de elde edilmiş olan bazı sonuçlar verilecektir. Bu sonuçların kardinal genişlemeleri bir sonraki bölümde verilecektir. Bu bölümde verilecek olan sonuçlar 4. bölümdekilerin $\kappa = \omega_0$ veya $\kappa = \omega_1$ için özel durumları olduğundan bu bölümdeki teoremler ispatsız olarak verilmiştir.

Parakompaktlık, normallik, metriklenebilme, sayılabilir kompaktlık, bağlantılılık gibi çoğu topolojik özellikler yıldız-**Ö** yada yıldız kavramları yardımıyla ifade edilebilmektedir. Bu bölümde bunlarla ilgili örnekler verilecektir.

Topolojik uzaylar için T_1 uzayı olmak gibi çok genel bir özelliğin yıldız- (kapalı, ayrık) olmayı gerektirmesi hayli ilgi çekicidir. Bu bölümde ilk olarak bunun (her T_1 uzayının yıldız-(kapalı, ayrık) olmasının) ispatı verilecektir.

3.1.1. Teorem

Her T_1-uzayı yıldız-(kapalı, ayrıktır).

İspat

X bir T_1-uzayı ve $\mathcal{U}$, X in keyfi bir açık örtüsü olsun. st(D,$\mathcal{U}$)=X olacak biçimde, X in kapalı ve ayrık bir D alt uzayının var olduğunu görmeliyiz.

$x_0 \in X$ alalım.

Eğer $st(x_0,\mathcal{U}) = X$ ise D=$\{x_0\}$ kümesi X in kapalı ayrık alt kümesi ve $st(D,\mathcal{U}) = X$ tir.

Eğer $st(x_0,\mathcal{U}) \underset{\neq}{\subset} X$ ise bir $x_1 \in X - st(x_0,\mathcal{U})$ seçelim. Eğer $st(\{x_0, x_1\},\mathcal{U}) = X$ ise D= $\{x_0, x_1\}$ dir. Değilse bir $x_2 \in X - st(\{x_0, x_1\},\mathcal{U})$ seçelim. Bu seçme işlemine seçemez oluncaya kadar devam edelim. Öyleyse her $\alpha < \kappa$ için $x_\alpha \notin st(\{x_\beta : \beta < \alpha\},\mathcal{U})$ ve $X = st(\{x_\alpha : \alpha < \kappa\},\mathcal{U})$ olacak biçimde bir κ ordinali vardır.

$D = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ olsun. D nin kapalı ve ayrık olduğunu görelim. Bunun için $\widetilde{D} = \phi$ olduğunu görmeliyiz.

Önce her $U \in \mathcal{U}$ için $|D \cap U| \leq 1$ olduğunu görelim. $\mathcal{U}$ nun herhangi bir U_0 elemanını alalım. $\alpha \neq \beta$ olmak üzere $x_\alpha, x_\beta \in D \cap U_0$ olsun.

Eğer $\alpha < \beta$ ise $x_\beta \notin st(\{x_\rho : \rho < \beta\},\mathcal{U})$ olduğundan $U \cap \{x_\rho : \rho < \beta\} \neq \phi$ biçimindeki her $U \in \mathcal{U}$ için $x_\beta \notin U$ olup $x_\beta \notin U_0$ dır.

Eğer $\beta < \alpha$ ise $x_\alpha \notin st(\{x_\rho : \rho < \alpha\},\mathcal{U})$ olduğundan $U \cap \{x_\rho : \rho < \alpha\} \neq \phi$ biçimindeki her $U \in \mathcal{U}$ için $x_\alpha \notin U$ olup $x_\alpha \notin U_0$ dır. O halde her $U \in \mathcal{U}$ için $|D \cap U| \leq 1$

Herhangi bir $x \in X$ alalım. $\mathcal{U}$ ailesi X için bir örtü olduğundan $x \in U$ olacak biçimde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır.

Eğer $x \in D$ ise, $|D \cap U| \leq 1$ olduğundan $U \cap D = \{x\}$ olmak zorundadır. Bu halde $x \notin \tilde{D}$ dır

Eğer $x \notin D$ ise iki durum vardır.

1. Durum: $|D \cap U| = 1$ ise; bu durumda $x_{\alpha_0} \neq x$ olacak biçimde bir $x_{\alpha_0} \in U \cap D$ vardır. Böylece $(U - \{x_{\alpha_0}\}) \cap D = \phi$ dir. Yani $x \notin \tilde{D}$ dır.

2. Durum: $|D \cap U| = 0$ ise; U, x in bir açık komşuluğu ve $U \cap D = \phi$ olduğundan $x \notin \tilde{D}$ dır.

Sonuç olarak herhangi bir $x \in X$ için $x \notin \tilde{D}$ olduğundan D, X in kapalı ve ayrık alt uzayı olup X T_1-uzayı yıldız-(kapalı, ayrık) olur.♦

Şimdi parakompaktlık, normallik, metriklenebilme, bağlantılılık, sayılabilir kompaktlık gibi topolojik uzayların yıldız-**Ö** yada yıldız kavramları yardımı ile ifade edilebilir olduğunu görelim.

X bir Hausdorff uzay olmak üzere eğer X in her açık örtüsünün yerel sonlu bir açık incelmişi varsa X uzayına parakompakt uzay denir. Aşağıdaki teorem T_3-uzaylarda parakompaktlığı karakterize eder.

3.1.2. Teorem [2].

Bir T_3-uzayın parakompakt olması için gerek ve yeter şart bu uzaydaki her açık örtünün bir açık yıldız incelmişinin var olmasıdır.♦

Aşağıdaki teorem T_3-uzaylarda normalliği karakterize eder.

3.1.3. Teorem [2].

Bir T_3-uzayın normal olması için gerek ve yeter şart bu uzaydaki iki elemandan oluşan her açık örtünün en az bir açık yıldız incelmişinin var olmasıdır♦

(X,τ) bir topolojik uzay olmak üzere eğer τ topolojisini üretecek biçimde X üzerinde bir metrik tanımlanabiliyorsa X topolojik uzayına metriklenebilir uzay denir. Şimdi de bir topolojik uzayın metriklenebilir olmasının yıldız kavramı ile nasıl karakterize edileceğini görelim. Bunu yapabilmek için önce bir topolojik uzayın güçlü açınımını tanımlamalıyız.

$\{\mathcal{W}_n : n \in \omega\}$ ailesi X topolojik uzayının açık örtülerinin bir dizisi olmak üzere X in her x elemanı için $\{st(V, \mathcal{W}_n) : n \in \omega$ ve V, x in bir komşuluğu$\}$ ailesi x elemanın komşuluklar tabanı ise $\{\mathcal{W}_n : n \in \omega\}$ dizisine X uzayı için bir kuvvetli açınım (strong development) denir.

Moore teoremi olarak bilinen aşağıdaki teorem metriklenebilmeyi yıldız kavramı ile karakterize eder.

3.1.4. Teorem (Moore) [3].

Bir topolojik uzayın metriklenebilir olması için gerek ve yeter şart o uzayın T_0 uzayı olması ve en az bir kuvvetli açınımının var olmasıdır.♦

Şimdi bir topolojik uzayın bağlantılı olması tanımını verip bağlantılılığın yıldız kavramı ile karakterize edilebileceğini göreceğiz.

X bir topolojik uzay olsun. $X = A \cup B$ olacak biçimde X in boştan farklı her A ve B açık alt kümeleri için $A \cap B \neq \phi$ oluyorsa X topolojik uzayına bağlantılı bir uzay denir.

Aşağıdaki teorem bağlantılılığı yıldız kavramı ile karakterize eder.

3.1.5. Teorem [2].

Bir X uzayının bağlantılı olması için gerek ve yeter şart bu uzaydaki her x elemanı ve her $\mathcal{U}$ açık örtüsü için $st^{\infty}(x,\mathcal{U}) = X$ olmasıdır.♦

Şimdi sayılabilir kompaktlığı tanımlayıp, [3] te ispatı bulunabilecek bir teorem verelim. Sonra sayılabilir kompaktlığı yıldız-**Ö** kavramı ile karakterize edelim.

3.1.6. Tanım

X bir topolojik uzay olmak üzere X uzayının sayılabilir her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa X uzayına sayılabilir kompakt uzay denir.♦

Sayılabilir kompakt uzayları karakterize eden aşağıdaki teoremin sonsuz bir κ kardinali için genişlemesi 4. bölümde (Teorem 4.1.3) yapılmıştır..

3.1.7. Teorem [6], [3]

X bir T_1-uzayı olsun. X uzayının sayılabilir kompakt olması için gerek ve yeter şart sonsuz her alt kümesinin en az bir yığılma noktasının var olmasıdır.♦

Aşağıdaki teorem Hausdorff uzaylarda sayılabilir kompaktlığın yıldız-sonlu olmaya denk olduğunu verir.

3.1.8. Teorem [2].

X bir Hausdorff uzay olmak üzere aşağıdakiler denktir.

a) X sayılabilir kompakttır.

b) X yıldız-sonlu dur.

c) X merkezlenmiş kompakttır.

d) X n-bağlı kompakttır.

e) X 2-bağlı kompaktır.

Bu bölümün asıl amacı 4. bölümde kardinal genişlemeleri verilecek bazı sonuçları burada paylaşmaktı. Bu sonuçlardan bir tanesi yukarıdaki bu teoremdir. Burada sayılabilir kompaktlık ve yıldız-sonluluk kavramları dikkat çekmektedir. Belirli olan bu kardinal sayılar yerine keyfi bir κ kardinal sayısı alınarak (4. Bölümde) ispatlanan Teorem 4.1.6 yukardaki Teorem 3.1.8 için bir kardinal genişlemedir.

Aşağıda kardinal genişlemesi yapılacak bir başka teorem vardır.

3.1.9. Teorem [1].

X topolojik uzayının kapalı ve ayrık bir D alt uzayı için, D uzayının nokta sayılabilir açık bir genişlemeye sahip olan sayılamaz bir E alt kümesi varsa X uzayı yıldız-sayılabilir değildir.♦

Yukardaki teoremin bir kardinal genişlemesi Teorem 4.1.11 de yapılmıştır. Teorem 4.1.11 de $\mu=\omega$ alınırsa doğrudan bu teorem elde edilir.

Bu teoremin üç sonucu aşağıda verilmiştir. Her bir sonucun kardinal genişlemesi 4. bölümde yapılmıştır.

3.1.10. Sonuç [1].

X bir zayıf ω_1-metaLindelöf uzay olmak üzere aşağıdakiler denktir.

1) X yıldız-sayılabilirdir.

2) $ext(X) \leq \omega$ dır.♦

Yukardaki sonucun bir kardinal genişlemesi Sonuç 4.1.12 de yapılmıştır. Sonuç 4.1.12 de κ yerine ω alınırsa doğrudan bu sonuç elde edilir.

3.1.11. Sonuç [1].

X bir zayıf ω_1-yığınsal Hausdorff uzay olmak üzere aşağıdakiler denktir.

1) X yıldız sayılabilirdir.

2) ext(X) ≤ ω dir.

İspat

Sonuç 2.2.22 den zayıf ω_1-yığınsal Hausdorff bir X uzayı zayıf ω_1- metaLindelöf uzayı olduğundan sonuç 3.1.10 dan denklikler sağlanır.♦

Yukardaki sonucun kardinal genişlemesi Sonuç 4.1.13 te yapılmıştır.

3.1.12. Sonuç [1].

X bir T_3-uzayı olsun. Eğer X bir P-uzayı ise aşağıdakiler denktir.

1) X yıldız-sayılabilirdir.

2) ext(X) ≤ ω dır.♦

Yukardaki sonucun bir kardinal genişlemesi Sonuç 4.1.17 de yapılmıştır. Sonuç 4.1.17 de κ yerine ω alınırsa bu sonuç elde edilir.

3.1.13. Teorem [5]

X bir yıldız-Lindelöf uzay olmak üzere X in boş olmayan açık alt kümelerinin yerel sonlu her ailesi sayılabilirdir.♦

Yukardaki teoremin bir kardinal genişlemesinin yapıldığı Teorem 4.1.19 da κ yerine ω alınırsa bu teorem elde edilir. Yani Teorem 4.1.19 un ispatı bu teorem içinde geçerlidir.♦

3.1.14. Teorem [1]

X bir normal P-uzayı olsun. Aşağıdakiler denktir.

1) X yıldız-sayılabilirdir.

2) X yıldız-Lindelöftür.

3) X in boş olmayan açık alt kümelerinin her ayrık ailesi sayılabilirdir.(Bu özellik yani bir uzayda boş olmayan açık alt kümelerinin her ayrık ailesinin sayılabilir olma özelliği kısaca DCCC ile gösterilir.)

4) $ext(X) \leq \omega$ dır.♦

Yukardaki teoremin bir kardinal genişlemesi Teorem 4.1.21 de yapılmıştır. Bu teoremin (Teorem 3.1.14) ispatı için Teorem 4.1.21 e bakılabilir.

3.1.15. Önerme [1]

X bir T_3-uzayı ve P-uzayı olmak üzere DCCC özelliğine sahip olsun. $\psi(x, X) \leq \omega_1$ olacak biçimdeki her $x \in X$ için $\chi(x, X) \leq \omega_1$ dir.♦

Yukardaki önermenin bir kardinal genişlemesi Önerme 4.1.22 de yapılmıştır. Önerme 4.1.22 de κ yerine ω alınırsa yukardaki önerme elde edilir.

3.1.16. Önerme [1]

X bir T_3-uzayı ve P-uzayı olmak üzere DCCC özelliğine sahip olsun. Eğer $l(X) \leq \omega_1$ ise X Lindelöftür.♦

Yukardaki önermenin bir kardinal genişlemesi Önerme 4.1.23 te yapılmıştır. Önerme 4.1.23 te κ yerine ω alınırsa yukardaki önerme elde edilir.

Şimdi 4. bölümde kardinal genişlemesi yapılacak olan bir önermeyi daha vermeden önce bu önerme de kullanılacak olan “topolojik grup” ve “P-grup” kavramlarını tanımlayalım.

3.1.17. Tanım

(G, Δ) bir grup, (G,τ) bir topolojik uzay olsun. G grubundaki m:GxG$\to$G, m(a,b)=aΔb ve n: G$\to$G, n(a)=a^{-1} fonksiyonları sürekli ise G ye bir topolojik grup denir.

3.1.18. Tanım

G bir topolojik grup ve bir P-uzayı (P_κ-uzayı) ise G ye bir P-gruptur (P_κ-gruptur) denir.

3.1.19. Önerme [1]

G bir P-grup ve DCCC özelliğine sahip olsun. Eğer $\psi(G) \le \omega_1$ ise w(G)≤ω_1 ve G Lindelöftür.♦

Yukardaki önermenin bir kardinal genişlemesi Önerme 4.1.28 de yapılmıştır.

4. KARDİNAL GENİŞLEMELER

Kardinal genişleme kavramı ile genellikle kast edilen, belirli bir kardinal sayı için ispatlanmış bir teoremin herhangi bir sonsuz kardinal sayı için doğruluğunun ispatlanmasıdır. Bir teoeremin kardinal genişlemesi yapılabildiği gibi gerekirse bir tanımında kardinal genişlemesi yapılabilir.

4.1. Bazı Kardinal Genişlemeler

Bu bölümde bir önceki bölümde yer verilen [1], [2] ve [5] te elde edilmiş olan sonuçların kardinal genişlemeleri verilecektir.

İlk olarak ilerideki teoremlerde kullanılmak üzere "Bir uzayın sayılabilir kompakt olması için gerek ve yeter şart bu uzayın sonsuz her alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır" biçimindeki Teorem 3.1.7 nin kardinal genişlemesi yapılacaktır. (ω,ω)-kompaktlığın sayılabilir kompaktlığa denk olduğu göz önüne alınarak bu sonucu tekrar ifade edecek olursak " Bir uzayın (ω,ω)-kompakt olması için gerek ve yeter şart bu uzayın kardinalitesi en az ω olan her alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır" ifadesini elde ederiz. Burada ki ω kardinali sınırlaması sonsuz bir κ kardinaline genişletilebilir mi? Aşağıdaki lemma bu sorunun bir kısmına cevap vermektedir.

4.1.1. Lemma

X bir topolojik uzay ve κ sonsuz bir kardinal olmak üzere, X uzayı (κ,κ)-kompakt ise X in kardinalitesi en az κ olan her alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır.

İspat

$Y \subseteq X$ olmak üzere $|Y| \geq \kappa$ olsun. $\widetilde{Y} = \phi$ olduğunu kabul edelim. $A \subseteq Y$ olmak üzere $|A| = \kappa$ olsun. $\widetilde{A} = \phi$ dir. Bu durumda A, X in kapalı bir alt uzayıdır ve her $x \in X$ için $x \in U_x$ ve $(U_x - \{x\}) \cap A = \phi$ olacak biçimde bir $U_x \subseteq X$ açık alt kümesi vardır. A kapalı olduğundan $\mathcal{O}=\{A^c\}\cup\{U_x : x\in A\}$ ailesi X in bir açık örtüsü olur. X (κ,κ)-kompakt ve $|\mathcal{O}|\leq\kappa$ olduğundan $|B|<\kappa$ ve $\mathcal{V}=\{A^c\}\cup\{U_x : x\in B\}$ ailesi $\mathcal{O}$ nun bir alt örtüsü olacak biçimde bir $B\subseteq A$ alt kümesi vardır. $|A|=\kappa$, $|B|<\kappa$ ve $B\subseteq A$ olduğundan $a\notin B$ olacak biçimde bir $a\in A$ vardır. $\mathcal{V}$, X için bir örtü ve $a\in A$ olduğundan $a\in U_x$ olacak biçimde bir $x\in B$ vardır. Bu durumda a≠x olup $a\in(U_x-\{x\})\cap A$ olur ki bu $(U_x-\{x\})\cap A=\phi$ olması ile çelişir.♦

4.1.2. Tanım

X bir topolojik uzay ve κ sonsuz bir kardinal olmak üzere X in açık alt kümelerinin $|\mathcal{O}|<\kappa$ olacak biçimdeki her $\mathcal{O}$ ailesi için $\bigcap\mathcal{O}=\bigcap_{O\in\mathcal{O}}O$ kümesi açık oluyorsa X uzayına bir $P_{<\kappa}-$uzayı denir.♦

Yukarıdaki lemma, bir X topolojik uzayının kardinalitesi en az κ olan her alt kümesinin en az bir yığılma noktası varsa X (κ,κ)-kompakt mıdır? Sorusuna cevap vermediğinden Teorem 3.1.7 nin bir kardinal genişlemesi olamaz. Fakat aşağıdaki teorem, Teorem 3.1.7 nin ω kardinalinden herhangi bir sonsuz κ kardinaline genişlemesidir.

4.1.3. Teorem

κ sonsuz bir kardinal, X bir T_1-uzayı ve $P_{<\kappa}-$uzayı olmak üzere aşağıdakiler denktir.

i) X (κ,κ)-kompakttır.

ii) X in kardinalitesi en az κ olan her alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır.

İspat

i)$\Rightarrow$ii) Lemma 4.1.1 den açık.

ii) $\Rightarrow$ i) Kabul edelim ki X uzayı (κ,κ)-kompakt olmasın. $|S| = \kappa$ ve $\widetilde{S} = \phi$ olacak biçimde bir $S \subseteq X$ alt kümesinin var olduğunu görelim.

X uzayı (κ,κ)-kompakt değil ise X uzayının öyle bir $\mathcal{O}=\{O_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ açık örtüsü vardır ki $\mathcal{O}$ nun kardinalitesi κ dan küçük olan bir alt örtüsü yoktur. $\{O_0\}$, $\mathcal{O}$ nun bir alt örtüsü olmadığından bir $x_0 \in X - O_0$ elemanı vardır. Bu durumda aşağıdakiler ispat edilebilir.

Bir $x_1 \in (X-(O_0 \cup O_1)) - \{x_0\}$ vardır. Benzer biçimde bir $x_2 \in (X-(O_0 \cup O_1 \cup O_2)) - \{x_0, x_1\}$ vardır. Üstelik bu biçimde devam edilerek her $\alpha \in \kappa$ için bir $x_\alpha \in (X - \bigcup_{i\le\alpha}\{O_i\}) - \bigcup_{i<\alpha}\{x_i\}$ elemanı vardır. Şöyle ki; her $\alpha \in \kappa$ için bir $\left|(X - \bigcup_{i\le\alpha}\{O_i\}) - \bigcup_{i<\alpha}\{x_i\}\right| \ge \kappa$ olduğunu görelim. Bir $\alpha \in \kappa$ için $\left|(X - \bigcup_{i\le\alpha}\{O_i\}) - \bigcup_{i<\alpha}\{x_i\}\right| < \kappa$ olsun. O halde $(X - \bigcup_{i\le\alpha}\{O_i\}) - \bigcup_{i<\alpha}\{x_i\} = \{y_j : j \in \beta\}$ olacak biçimde bir $\beta < \kappa$ vardır. $\mathcal{O}$ bir örtü olduğundan, her $j \in \beta$ için $y_j \in O_{y_j}$ ve her $i \in \alpha$ için $x_i \in O_{x_i}$ olacak biçimde $O_{x_i}, O_{y_j} \in \mathcal{O}$ vardır. O halde $\bigcup_{i\le\alpha}\{O_i\} \cup \bigcup_{i<\alpha}\{O_{x_i}\} \cup \bigcup_{j\in\beta}\{O_{y_j}\} = X$ olup $\{O_i : i \le \alpha\} \cup \{O_{x_i} : i \in \alpha\} \cup \{O_{y_j} : j \in \beta\}$ ailesi $\mathcal{O}$ nun kardinalitesi κ dan küçük bir alt örtüsüdür. Bu çelişkiden her $\alpha \in \kappa$ için $\left|(X - \bigcup_{i\le\alpha}\{O_i\}) - \bigcup_{i<\alpha}\{x_i\}\right| \ge \kappa$ elde edilir. Bu takdirde her $\alpha \in \kappa$ için bir $x_\alpha \in (X - \bigcup_{i\le\alpha}\{O_i\}) - \bigcup_{i<\alpha}\{x_i\}$ elemanı vardır.

Her $\alpha \in \kappa$ için bu biçimdeki $x_\alpha \in X$ noktalarından oluşan $S=\{x_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ kümesini alalım. Şimdi $\widetilde{S} = \phi$ olduğunu görelim. $x \in X$ olsun. $\mathcal{O}$ bir örtü olduğundan $x \in O_\theta$ olacak biçimde bir $\theta \in \kappa$ vardır. $T = O_\theta - (\{x_\beta : \beta \le \theta\} - \{x\})$ alınırsa $x \in T$ olur. Ayrıca T, X in bir açık alt kümesidir. Şöyle ki; X bir T_1-uzayı olduğundan

$\{\{x_\beta\}:\beta\leq\theta\}$ kapalılar ailesi olup $|\{\{x_\beta\}:\beta\leq\theta\}|=|\{x_\beta:\beta\leq\theta\}|=|\theta|<\kappa$ dir. X bir $P_{<\kappa}-$uzayı olduğundan $\bigcup_{\beta\leq\theta}\{x_\beta\}=\{x_\beta:\beta\leq\theta\}$ kapalıdır. O halde $T=O_\theta-(\{x_\beta:\beta\leq\theta\}-\{x\})$ bir açık kümedir. Bu durumda T, x elemanının bir açık komşuluğudur.

$(T-\{x\})\cap S=\phi$ olduğunu görmek için bir $x_\alpha\in S$ alalım. Eğer $\alpha\leq\theta$ ise $x_\alpha\in\{x_\beta:\beta\leq\theta\}$ olup $x_\alpha\notin(T-\{x\})$ dir. Eğer $\theta<\alpha$ ise $x_\alpha\in(X-\bigcup_{i\leq\alpha}\{O_i\})-\bigcup_{i<\alpha}\{x_i\}$ olduğundan $x_\alpha\notin O_\theta$ olup $x_\alpha\notin(T-\{x\})$ tir. O halde $x_\alpha\notin(T-\{x\})$ dir. Böylece $(T-\{x\})\cap S=\phi$ dir. Buradan $x\notin\tilde{S}$ olup $\tilde{S}=\phi$ dir. ♦

3. bölümde verilen sonuçların kardinal genişlemeleri yapmaya devam edilecek. Şimdi Teorem 3.1.8 in bir kardinal genişlemesi verilecek. Fakat bunun için önce bir lemma, sonra sonlu arakesit özelliğine farklı bir bakış olan Tanım 2.2.24 ün bir kardinal genişlemesi olan bir tanım yapmak gerekmektedir.

4.1.4. Lemma

κ bir sonsuz kardinal, X bir Hausdorff uzayı ve $P_{<\kappa}-$uzayı (P_κ-uzayı) olsun. Keyfi bir $\alpha\in\kappa$ $(\alpha\leq\kappa)$ için $A=\{x_\beta\in X:\beta\in\alpha\}$ biçiminde tanımlı A kümesinin ikişerli ayrık açık bir genişlemesi vardır.

İspat

$\alpha\in\kappa$ $(\alpha\leq\kappa)$ için $A=\{x_\beta\in X:\beta\in\alpha\}$ olsun. X bir Hausdorff uzay olduğundan $\theta\neq\beta$ olmak üzere her $\theta,\beta\in\alpha$ için $x_\theta\in U_\beta^\theta$, $x_\beta\in U_\theta^\beta$ ve $U_\beta^\theta\cap U_\theta^\beta=\phi$ olacak biçimde X uzayının U_β^θ, U_θ^β açık alt kümeleri vardır. $\beta\in\alpha$ için $V_\beta=\bigcap_{\theta\in\alpha-\{\beta\}}U_\theta^\beta$ alalım.

Bu biçimde tanımlı V_β lardan oluşan $\{V_\beta:\beta\in\alpha\}$ ailesinin A nın, ikişerli ayrık bir açık genişlemesi olduğunu görelim.

Önce $\{V_\beta : \beta \in \alpha\}$ ailesinin açıklardan oluştuğunu görelim.

X uzayı bir $P_{<\kappa}$ $-$uzayı (P_κ-uzayı), $\alpha \in \kappa$ $(\alpha \leq \kappa)$ olduğundan her $\beta \in \alpha$ için $V_\beta = \bigcap_{\theta\in\alpha-\{\beta\}} U_\theta^\beta$ açık bir kümedir. Böylece $\{V_\beta : \beta \in \alpha\}$ ailesi açıklardan oluşur.

Şimdi $\{V_\beta : \beta \in \alpha\}$ A nın ikişerli ayrık bir genişlemesi olduğunu görelim.

$x_{\theta_0} \in A$ alalım. Her $\beta \in \alpha - \{\theta_0\}$ için $x_{\theta_0} \in U_\beta^{\theta_0}$ olduğunda $x_{\theta_0} \in \bigcap_{\beta\in\alpha-\{\theta_0\}} U_\beta^{\theta_0}$ olur.

A kümesinin x_{θ_0} ve x_{β_0} farklı iki elemanı olsun. $V_{\theta_0} \cap V_{\beta_0} = (\bigcap_{\beta\in\alpha-\{\theta_0\}} U_\beta^{\theta_0}) \cap (\bigcap_{\beta\in\alpha-\{\beta_0\}} U_\beta^{\beta_0})$

$\subseteq U_{\beta_0}^{\theta_0} \cap U_{\theta_0}^{\beta_0} = \phi$ dir.

Böylece $\{V_\beta : \beta \in \alpha\}$ ailesi A nın ikişerli ayrık açık bir genişlemesidir. ♦

Şimdi Tanım 2.2.24 ün bir kardinal genişlemesi olan aşağıdaki tanımı verelim.

4.1.5. Tanım

X bir topolojik uzay, μ ve λ birer kardinal sayı olsun.

a) $\mathcal{O}$, X in keyfi bir açık örtüsü olsun. Her bir $n \leq \alpha$ için $\mathcal{V}_n$ ailesi λ-bağlı olmak üzere eğer $\bigcup_{n\leq\alpha} \mathcal{V}_n$ ailesi $\mathcal{O}$ nun bir alt örtüsü olacak biçimde, bir $\alpha < \mu$ ordinali varsa X e bir ((λ, μ)-bağlı)- kompakt uzay denir.

b) $\mathcal{O}$, X in keyfi bir açık örtüsü olsun. Her $n \leq \mu$ için $\mathcal{V}_n$ ailesi λ-bağlı olmak üzere eğer $\mathcal{O}$ nun $\bigcup_{n\leq\mu} \mathcal{V}_n$ biçiminde bir alt örtüsü varsa X e bir ((λ, μ)-bağlı)- Lindelöf uzay denir.

c) $\mathcal{O}$, X in keyfi bir açık örtüsü olsun. Her $m < \lambda$ ve $n \leq \alpha$ için her bir $\mathcal{V}_n$ ailesi m-bağlı olmak üzere eğer $\bigcup_{n \leq \alpha} \mathcal{V}_n$ ailesi $\mathcal{O}$ nun bir alt örtüsü olacak biçimde, bir $\alpha < \mu$ ordinali varsa X e bir ((λ, μ)-merkezlenmiş)- kompakt uzay denir.

d) $\mathcal{O}$, X in keyfi bir açık örtüsü olsun. Her $m < \lambda$ ve n≤μ için her bir $\mathcal{V}_n$ ailesi m-bağlı olmak üzere eğer $\mathcal{O}$ nun $\bigcup_{n \leq \mu} \mathcal{V}_n$ biçiminde bir alt örtüsü varsa X e bir ((λ, μ)-merkezlenmiş)- Lindelöf uzay denir.

e) $\mathcal{O}$, X in keyfi bir açık örtüsü olsun. Her $n \leq \alpha$ için $\bigcap \mathcal{V}_n \neq \phi$ olmak üzere eğer $\bigcup_{n \leq \alpha} \mathcal{V}_n$ ailesi $\mathcal{O}$ nun bir alt örtüsü olacak biçimde, bir $\alpha < \mu$ ordinali varsa X e bir ((∞,μ)-bağlı)- kompakt uzay denir.

f) $\mathcal{O}$, X in keyfi bir açık örtüsü olsun. Her $n \leq \mu$ için $\bigcap \mathcal{V}_n \neq \phi$ olmak üzere eğer $\mathcal{O}$ nun $\bigcup_{n \leq \mu} \mathcal{V}_n$ biçiminde bir alt örtüsü varsa X e bir ((∞,μ)-bağlı)- Lindelöf uzay denir.♦

Bu tanıma göre merkezlenmiş kompakt ve n-bağlı kompakt kavramları sırasıyla ((ω,ω)-merkezlenmiş)- kompakt, ((n,ω)-bağlı)- kompakt kavramlarına denktir.

Aşağıdaki teorem, Teorem 3.1.8 in bir kardinal genişlemesidir.

4.1.6. Teorem

X bir Hausdorff uzay ve bir P_κ-uzayı olmak üzere aşağıdakiler denktir.

a) X (κ, κ)-kompakttır.

b) X yıldız -$<\kappa$ dır.

c) X ((∞, κ)-bağlı)- kompakttır.

d) X ((κ, κ)-merkezlenmiş) kompakttır.

e) $2 \leq n < \kappa$ bir kardinal olmak üzere, X, ((n,κ)-bağlı)-kompakttır.

f) X ($(2,\kappa)$-bağlı) kompakttır.

İspat

a)$\Rightarrow$b) Kabul edelim ki; X uzayı yıldız -$<\kappa$ olmasın. Öylese X uzayının öyle bir $\mathcal{U}$ açık örtüsü vardır ki; $|A| < \kappa$ olan her $A \subseteq X$ alt kümesi için st(A,$\mathcal{U}$) ≠ X tir.

$x_0 \in X$ alalım. $A_{(1)} = \{x_0\}$ için $|A_{(1)}| = 1 < \kappa$ olduğundan st($A_{(1)}$,$\mathcal{U}$) ≠ X olup $x_1 \notin st(A_{(1)},\mathcal{U})$ olacak biçimde bir $x_1 \in X$ vardır. $A_{(2)} = \{x_0, x_1\}$ için $|A_{(2)}| = 2 < \kappa$ olduğundan st($A_{(2)}$,$\mathcal{U}$) ≠ X olup $x_2 \notin st(A_{(2)},\mathcal{U})$ olacak biçimde bir $x_2 \in X$ vardır. Böyle devam edildiğinde her $m \in \kappa - \{0\}$ için $A_{(m)} = \{x_\alpha \in X : \alpha \in m\}$ için $|A_{(m)}| \leq m < \kappa$ olduğundan $x_m \notin st(A_{(m)},\mathcal{U})$ olacak biçimde bir $x_m \in X$ vardır.

Bu biçimdeki $x_m \in X$ noktalarından oluşan $D = \{x_m \in X : m \in \kappa\}$ kümesi için $|D| = \kappa$ dır. Eğer $\widetilde{D} = \phi$ olduğu görülürse Lemma 4.1.1 gereği X uzayı (κ,κ)-kompakt olamaz.

O halde $\widetilde{D} = \phi$ olduğunu görmemiz yeterli olacaktır.

Önce her $U \in \mathcal{U}$ için $|D \cap U| \leq 1$ olduğunu görelim. $\mathcal{U}$ nun herhangi bir U_0 elemanını alalım. $\alpha \neq \beta$ olmak üzere $x_\alpha, x_\beta \in D \cap U_0$ olduğunu varsayalım.

Eğer $\alpha < \beta$ ise $x_\beta \notin st(\{x_\rho : \rho < \beta\},\mathcal{U})$ olduğundan $U \cap \{x_\rho : \rho < \beta\} \neq \phi$ biçimindeki her $U \in \mathcal{U}$ için $x_\beta \notin U$ olup $x_\beta \notin U_0$ dır. Bu durumda çelişki elde edilir.

Eğer $\beta < \alpha$ ise $x_\alpha \notin st(\{x_\rho : \rho < \alpha\},\mathcal{U})$ olduğundan $U \cap \{x_\rho : \rho < \alpha\} \neq \phi$ biçimindeki her $U \in \mathcal{U}$ için $x_\alpha \notin U$ olup $x_\alpha \notin U_0$ dır. Bu durumda da çelişki elde edilir.

Böylece her $U \in \mathcal{U}$ için $|D \cap U| \leq 1$ dir.

Şimdi $x \notin \tilde{D}$ olduğunu görmek için herhangi bir $x \in X$ alalım. $\mathcal{U}$ ailesi X için bir örtü olduğundan $x \in U$ olacak biçimde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır.

Eğer $x \in D$ ise, $|D \cap U| \leq 1$ olduğundan $U \cap D = \{x\}$ olmak zorundadır. Bu halde $x \notin \tilde{D}$ dır.

Eğer $x \notin D$ ise iki durum vardır.

1. Durum: $|D \cap U| = 1$ ise; bu halde $x_{\alpha_0} \neq x$ olacak biçimde bir $x_{\alpha_0} \in U \cap D$ vardır. Böylece $(U - \{x_{\alpha_0}\}) \cap D = \phi$ olup $x \notin \tilde{D}$ dır.

2. Durum: $|D \cap U| = 0$ ise: U, x in bir açık komşuluğu ve $U \cap D = \phi$ dir. Bu halde $x \notin \tilde{D}$ dır.

O halde $\tilde{D} = \phi$ tur. Lemma 4.1.1 gereği X uzayı (κ, κ)-kompakt değildir.

Böylece X yıldız -< κ değil ise X uzayı (κ, κ)-kompakt değildir.

b)$\Rightarrow$c) $\mathcal{O}$, X in keyfi bir açık örtüsü olsun. X yıldız -< κ olduğundan $|A| = \mu < \kappa$ ve st(A,$\mathcal{O}$)=X olacak biçimde X in bir A alt kümesi vardır. $A = \{x_\alpha \in X : \alpha \in \mu\}$ olsun. Her $x_\alpha \in A$ için $\mathcal{O}_\alpha = \{O \in \mathcal{O} : x_\alpha \in O\}$ alınırsa $\{x_\alpha\} \subseteq \bigcap \mathcal{O}_\alpha \neq \phi$ olur. X= st(A,$\mathcal{O}$) = $\bigcup \{O \in \mathcal{O} : A \cap O \neq \phi\} = \bigcup (\bigcup_{\alpha \in \mu} \mathcal{O}_\alpha)$ dır. Böylece her $\alpha < \mu$ için $\bigcap \mathcal{O}_\alpha \neq \phi$ olacak biçimde $\mathcal{O}$ nun $\bigcup_{\alpha \in \mu} \mathcal{O}_\alpha$ biçiminde bir alt örtüsü vardır. O halde X, $((\infty, \kappa)$-bağlı))-kompakttır.

c)$\Rightarrow$d) $\Rightarrow$e) $\Rightarrow$f) Açık

Dikkat edilecek olursa buraya kadar X in bir Hausdorff ve P_κ-uzayı olması özellilkleri kullanılmadı. X in sadece T_1 uzayı olması yeterli oldu.

f)$\Rightarrow$a) X uzayının (κ,κ)-kompakt olmadığını varsayalım. Teorem 4.1.3 gereği $|A|=\kappa$ ve $\widetilde{A}=\phi$ olacak biçimde bir $A\subseteq X$ alt kümesi vardır. X bir Hausdorff uzay ve bir P_κ-uzayı olduğundan Lemma 4.1.4 gereği A nın $\{V_a : a\in A\}$ biçiminde ikişerli ayrık açık bir genişlemesi vardır. A kapalı olduğundan $\mathcal{V}=\{A^c\}\cup\{V_a : a\in A\}$ ailesi X in bir açık örtüsüdür.

Hipotez gereği μ<κ ve $\mathcal{V}_n$ aileleri 2-bağlı olmak üzere, $\mathcal{V}$ nin $\bigcup\{\mathcal{V}_n\subseteq\mathcal{V} : n\in\mu\}$

biçiminde bir alt örtüsü vardır.

$\mathcal{V}$ örtüsünde A nın bir a elemanını içeren sadece V_a olduğundan her $a\in A$ için $V_a\in\bigcup\{\mathcal{V}_n\subseteq\mathcal{V} : n\in\mu\}$ dır. O halde $|A|=\kappa$ olduğundan $\left|\bigcup\{\mathcal{V}_n\subseteq\mathcal{V} : n\in\mu\}\right|=\kappa$ dır. Burada μ<κ ve $\left|\bigcup\{\mathcal{V}_n\subseteq\mathcal{V} : n\in\mu\}\right|=\kappa$ olması bir $n_0\in\mu$ için$\left|\mathcal{V}_{n_0}\right|=\kappa$ olmasını gerektirir. Bu durumda $\{V_a : a\in A\}$ ikişerli ayrık ailesinden çok sayıda küme $\mathcal{V}_{n_0}$ ailesindedir. O halde $\mathcal{V}_{n_0}$ ailesi 2-bağlı olamaz. Böylece X bir ($(2,\kappa)$-bağlı) kompakt uzay değildir.♦

Yukardaki teoremin ispatında sadece “f)$\Rightarrow$a)” kısmında X in bir Hausdorff uzayı ve bir P_κ- uzayı olması kullanıldı. Diğer kısımlarda X in T_1-uzayı olması yeterli oldu. Gerçekten bu teoremde X in T_1-uzayı olması yetersiz midir? Bu soruya bir cevap olarak iki örnek verilecek. Bu örneklerin çözümünde kullanılacak bazı teoremlere ihtiyaç var. Bu teoremler, birbirinden bağımsız olmasına rağmen kısalık için aşağıda bir Lemma içerisinde sıralandı.

4.1.7. Tanım

(X,<) bir tam sıralı küme ve $a,b \in X$ olmak üzere $(\leftarrow,a)=\{x \in X : x < a\}$, $(a,b)=\{x \in X : a < x < b\}$ ve $(a,\rightarrow)=\{x \in X : a < x\}$ biçiminde tanımlanır.

(X,<) tam sıralı kümesinin üzerinde tabanı $\{(\leftarrow,a),(b,\rightarrow),(a,b) : a,b \in X\}$ olan topolojiye doğrusal sıralama topolojisi veya X üzerindeki sıralamadan gelen topoloji denir.

Aksi belirtilmedikçe her bir ordinal sayı üzerindeki topoloji doğrusal sıralama topolojisi olarak kabul edilecek.

4.1.8. Lemma

Aşağıdaki iddialar doğrudur.

1) Kompakt uzayların kapalı alt uzayları kompakttır.

2) $[0,\omega_1]$ bir kompakt uzaydır.

3) $[0,\omega_1)=\omega_1$ sayılabilir kompakt bir uzaydır.

4) X bir sayılabilir kompakt uzay ve Y bir kompakt uzay olmak üzere XxY sayılabilir kompakttır. [3]

Burada τ_X X üzerindeki topoloji, τ_Y Y üzerindeki topoloji olmak üzere XxY üzerindeki topoloji $\{AxB : A \in \tau_X,\ B \in \tau_Y\}$ ailesi taban olarak alındığında elde edilen topolojidir. (Çarpım topolojsidir.)

İspat

1) (X,τ) bir kompakt uzay ve $F \subseteq X$ kapalı bir alt uzay olsun.

$\mathcal{V}=\{V_U=F\cap U : U\in\tau\}$ ailesi F nin keyfi bir açık örtüsü olsun. F kapalı olduğundan $\{U : V_U\in\mathcal{V}\}\cup\{X-F\}$ ailesi X in bir açık örtüsü olup X bir kompakt uzay olduğundan sonlu bir alt örtüsü vardır. Yani $S\subseteq\mathcal{V}$ sonlu olmak üzere X= $\bigcup\{U : V_U\in S\}\cup\{X-F\}$ dir. Böylece $F\subseteq X$ olduğundan $F\subseteq\bigcup\{U : V_U\in S\}$ dir. O halde $\{V_U=F\cap U : V_U\in S\}$ ailesi $\mathcal{V}$ nin sonlu alt örtüsü olup F kompakttır.

2) $\mathcal{O}$ alesi $[0,\omega_1]$ in herhangi bir açık örtüsü olsun.

$A=\{\alpha\in[0,\omega_1] :\ [0,\alpha]\ ,\ \mathcal{O}$ nun sonlu bir alt ailesi ile örtülebilir.$\}$ biçiminde tanımlanan bir A kümesini alalım. A=$[0,\omega_1]$ ise ispat biter. $A\underset{\neq}{\subset}[0,\omega_1]$ ise $([0,\omega_1]-A)\neq\phi$ dir. $\min([0,\omega_1]-A)=\alpha_0$ olsun. $\alpha_0\in[0,\omega_1]=\bigcup\mathcal{O}$ olur. Buradan $\alpha_0\in O_0$ olacak biçimde bir $O_0\in\mathcal{O}$ açık kümesi vardır. O halde bir $\beta<\alpha_0$ için $(\beta,\alpha_0+1)\subseteq O_0$ dır. $\min([0,\omega_1]-A)=\alpha_0$ olduğundan $\beta\in A$ olup $[0,\beta]\subseteq\bigcup\mathcal{U}$ olacak biçimde sonlu bir $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{O}$ alt ailesi vardır. $(\beta,\alpha_0+1)=(\beta,\alpha_0]$ olduğundan $[0,\alpha_0]\subseteq\ \bigcup\{O_0\}\cup\mathcal{U}$ dur. $\{O_0\}\cup\mathcal{U}$ sonlu olduğundan $\alpha_0\in A$ olur. Oysa $\min([0,\omega_1]-A)=\alpha_0$ idi. Bu çelişkiden A=$[0,\omega_1]$ dır. Böylece $[0,\omega_1]$ bir kompakt uzaydır.

3) $[0,\omega_1)$ in sonlu bir alt örtüsü olmayan bir örtüsü $\{O_n : n\in\omega\}$ olsun.

Her $n\in\omega$ için $\bigcup_{i\leq n}O_n\underset{\neq}{\subset}[0,\omega_1)$ olmalıdır. O halde her $n\in\omega$ için $\alpha_n\notin\bigcup_{i\leq n}O_n$ olacak biçimde bir $\alpha_n\in[0,\omega_1)$ vardır. $\{\alpha_n : n\in\omega\}\subseteq[0,\omega_1)$ olup Teorem 2.1.9 gereği $\sup\{\alpha_n : n\in\omega\}=m<\omega_1$ dir. $m<\omega_1$ olup $[0,m]\subseteq[0,\omega_1]$ dır. Bu lemmanın 2. maddesi gereği $[0,\omega_1]$ bir kompakt uzay ve 1. maddesi gereği $[0,m]\subseteq[0,\omega_1]$ kapalı alt uzayı kompakttır. O halde bir $S\subseteq\omega$ sonlu alt kümesi için $[0,m]\subseteq\bigcup_{n\in S}O_n$ dir. Bu durumda $\{\alpha_n : n\in\omega\}\subseteq\bigcup_{n\in S}O_n$ olur. Sonuç 2.1.8 gereği her $n\in N$ için $\alpha_n\in O_{j_0}$ olacak biçimde bir $j_0\in S$ ve sayılabilir sonsuz bir $N\subseteq\omega$ alt kümesi vardır. Burada her $n \in N$ için $\alpha_n \notin \bigcup_{i \le n} O_n$ ve $\alpha_n \in O_{j_0}$ olduğundan her $n \in N$ için n $\le j_0$ olup bu durum N nin sayılabilir sonsuz olması ile çelişir.♦

Şimdi Teorem 4.1.6 daki denkliklerin elde edilmesi için X in bir $T_1 -$uzayı olması koşulunun yeterli olmadığını görelim.

4.1.9. ***Örnek*** [2]

κ sonsuz bir kardinal olmak üzere bir $T_1 -$uzayının yıldız -<κ olması (κ, κ)-kompakt olması için yeterli değildir.

Özel olarak $\kappa = \omega$ alalım.

$T_1 -$uzayı olduğu halde $T_2 -$uzayı olmayan bir X uzayı tanımlanacak. Üstelik X yıldız -<ω olup (ω,ω)- kompakt olmayacak. Yani X sayılabilir kompakt uzay olmayacak.

$N \cap \omega_1 = \phi$ olacak biçimde sayılabilir sonsuz bir N kümesi alalım.

$X = N \cup \omega_1$ olsun.

X uzayı üzerinde aşağıdaki biçimde üretilen topoloji τ olsun.

ω_1 doğrusal sıralı uzayında açık olan her küme X uzayında da açık olsun ve her $n \in N$ için $\sigma(n) = \{O(\alpha, n) = \{n\} \cup (\alpha, \omega_1) : \alpha \in \omega_1\}$ ailesi n nin komşuluklar tabanı olsun.

X aranılan topolojik uzaydır.

Önce X in bir $T_1 -$uzayı olup $T_2 -$uzayı olmadığını görelim.

$x \in X$ olsun. $\{x\}^c$ bir açık alt kümedir. Şöyle ki: $a \in \{x\}^c$ olsun

1.durum: $a \in N$ ise; eğer $x \in \omega_1$ ise $a \in \{a\} \cup (x,\omega_1) \subseteq X$ bir açık alt küme ve $(\{a\} \cup (x,\omega_1)) \cap \{x\} = \phi$ olduğundan $(\{a\} \cup (x,\omega_1)) \subseteq \{x\}^c$ dir. Böylece $a \in \overset{o}{\{x\}^c}$ dir.

Eğer $x \in N$ ise bir $\alpha \in \omega_1$ için $a \in \{a\} \cup (\alpha,\omega_1) \subseteq X$ ve $(\{a\} \cup (\alpha,\omega_1)) \cap \{x\} = \phi$ olduğundan $(\{a\} \cup (\alpha,\omega_1)) \subseteq \{x\}^c$ dir. Böylece $a \in \overset{o}{\{x\}^c}$ dir.

2.durum: $a \in \omega_1$ ise; eğer $x \in N$ ise $a \in [0,\omega_1) \subseteq X$ bir açık alt küme ve $[0,\omega_1) \cap \{x\} = \phi$ olduğundan $[0,\omega_1) \subseteq \{x\}^c$ dir. Böylece $a \in \overset{o}{\{x\}^c}$ dir.

Eğer $x \in \omega_1$ ise ya x<a ya da a<x tir. Eğer x<a ise $a \in (x,\omega_1) \subseteq X$ bir açık alt küme ve $(x,\omega_1) \cap \{x\} = \phi$ olduğundan $(x,\omega_1) \subseteq \{x\}^c$ dir. Böylece $a \in \overset{o}{\{x\}^c}$ dir. Eğer a<x ise $a \in [0,a+1) \subseteq X$ bir açık alt küme ve $[0,a+1) \cap \{x\} = \phi$ olduğundan $[0,a+1) \subseteq \{x\}^c$ dir. Böylece $a \in \overset{o}{\{x\}^c}$ dir.

Her bir $x \in X$ için $\{x\}^c \subseteq X$ açık bir alt küme olduğundan {x} kapalı olup X bir T_1 – uzayıdır.

X in bir T_2 –uzayı olmadığını görmek için $a,b \in N$ ve $a \neq b$ olacak biçimde $a,b \in X$ alalım. a ve b nin sırasıyla her U, V açık komşulukları için $\{a\} \cup (\alpha_U,\omega_1) \subseteq U$ ve $\{b\} \cup (\beta_V,\omega_1) \subseteq V$ olacak biçimde $\alpha_U, \beta_V \in \omega_1$ vardır. max{α_U, β_V}=m alınırsa $\phi \neq (m,\omega_1) \subseteq U \cap V$ elde edilir. O halde X bir T_2 –uzayı değildir.

Şimdi X in bir yıldız -<ω olduğunu görelim.

$\mathcal{V}$ ailesi X in herhangi bir açık örtüsü olsun. Bir önceki Lemma gereği ω_1 sayılabilir kompakt yani (ω,ω)-kompakt olduğundan Teorem 4.1.6 dan ω_1 , yıldız-<ω dır. O halde sonlu bir $F_0 \subseteq \omega_1$ için $\omega_1 \subseteq st(F_0,\mathcal{V})$ olur.

Her bir $n \in N \subseteq \bigcup \mathcal{V}$ için $n \in V_n$ olacak biçimde bir $V_n \in \mathcal{V}$ vardır. Bu halde her bir $n \in N$ için $n \in \{n\} \cup (\alpha_n, \omega_1) \subseteq V_n$ olacak biçimde $\alpha_n \in \omega_1$ vardır. Teorem 2.1.9 gereği $\sup\{\alpha_n : n \in N\} \in \omega_1$ dır. $\sup\{\alpha_n : n \in N\} + 1 = \alpha_0$ olsun. Bu takdirde her $n \in N$ için $\alpha_0 \in (\alpha_n, \omega_1) \subseteq V_n$ dir. Böylece her $n \in N$ için $n \in V_n$ ve $\{\alpha_0\} \cap V_n \neq \phi$ dir. O halde $N \subseteq st(\alpha_0, \mathcal{V})$ dir.

$F = F_0 \cup \{\alpha_0\}$ alınırsa F sonlu olup $X = \omega_1 \cup N \subseteq st(F, \mathcal{V})$ olduğundan X bir yıldız-<ω dır.

Şimdi X in (ω,ω) kompakt olmadığını görelim. Bunun için Lemma 4.1.1 gereği X in yığılma noktası olmayan sayılabilir sonsuz bir alt kümesini bulmak yeterlidir.

$N \subseteq X$ kapalı, ayrık bir alt kümedir. Şöyle ki: $N^c = \omega_1$ açık olduğundan N kapalıdır. $n \in N$ için $n \in \{n\} \cup (\alpha, \omega_1)$ olacak biçimde bir $\{n\} \cup (\alpha, \omega_1) \subseteq X$ açık alt kümesi vardır ve $(\{n\} \cup (\alpha, \omega_1)) \cap N = \{n\}$ olduğundan N bir ayrık alt uzaydır. N sayılabilir sonsuz olduğundan Lemma 4.1.1 gereği X bir (ω,ω)-kompakt uzay değildir. ♦

4.1.10. *Örnek* [2]

κ sonsuz bir kardinal olmak üzere bir T_1-uzayının ((κ, κ)-merkezlenmiş) kompakt olması yıldız-<κ olması için yeterli değildir.

Özel olarak $\kappa = \omega$ alalım.

T_1-uzayı olduğu halde T_2-uzayı olmayan bir X uzayı tanımlanacak. Üstelik X bir ((ω,ω)-merkezlenmiş) kompakt uzay olup yıldız-<κ olmayacak.

I =[0,1] reel sayıların bir alt kümesi, $\mathcal{F} = \{F \subseteq I : |F| < \omega\}$, $Y = I$ x ω_1 olmak üzere X= $\mathcal{F} \cup Y$ olsun.

X uzayı üzerinde aşağıdaki biçimde üretilen topoloji τ olsun.

$Y = I \times \omega_1$ çarpım uzayının açıkları X uzayında da açık ve her $F \in \mathbb{F}$ için $\sigma(F) = \{O(\alpha,F) = \{F\} \cup ((I - F)x(\alpha,\omega_1)) : \alpha \in \omega_1\}$ ailesi F nin komşuluklar tabanı olsun.

X aranılan topolojik uzaydır.

X in bir T_1-uzayı olup T_2-uzayı olmadığını görelim.

$x \in X$ olsun. $\{x\}^c$ nin açık bir küme olduğunu görmek için bir $a \in \{x\}^c$ alalım

1.durum: $a \in Y$ ise; eğer $x \in \mathbb{F}$ ise $a \in Y \subseteq X$ bir açık alt küme ve $Y \cap \{x\} = \phi$ olduğundan $Y \subseteq \{x\}^c$ dir. Böylece $a \in \overset{o}{\{x\}^c}$ dir.

Eğer $x = (x_1, x_2) \in Y$ ise $I - \{x_1\}$ bir açık küme $\omega_1 - \{x_2\}$ bir açık küme olduğundan Y-{x}=$(I - \{x_1\})x(\omega_1 - \{x_2\})$, X in bir açık alt kümesidir. Böylece $a \in (Y - \{x\}) \subseteq X$ bir açık alt küme ve $(Y - \{x\}) \cap \{x\} = \phi$ olduğundan $(Y - \{x\}) \subseteq \{x\}^c$ dir. Böylece $a \in \overset{o}{\{x\}^c}$ dir.

2.durum: $a \in \mathbb{F}$ ise; eğer $x \in \mathbb{F}$ ise a≠x olduğundan bir $\alpha \in \omega_1$ için $a \in \{a\} \cup ((I - a)x(\alpha,\omega_1))$ ve $\{x\} \cap (\{a\} \cup ((I - a)x(\alpha,\omega_1))) = \phi$ dir. Böylece $a \in \overset{o}{\{x\}^c}$ dir.

Eğer $x = (x_1, x_2) \in Y$ ise $a \in \{a\} \cup ((I - a)x(x_2,\omega_1))$ ve $\{x\} \cap (\{a\} \cup ((I - a)x(x_2,\omega_1))) = \phi$ dir. Böylece $a \in \overset{o}{\{x\}^c}$ dir.

Her bir $x \in X$ için $\{x\}^c \subseteq X$ bir açık alt küme olduğundan {x} kapalı olup X bir T_1-uzayıdır.

X in bir T_2-uzayı olmadığını görmek için a,b$\in \mathbb{F}$ ve $a \neq b$ olacak biçimde $a,b \in X$ alalım. a ve b nin sırasıyla her U, V açık komşulukları için

$\{a\}\cup\big((I-a)x(\alpha_U,\omega_1)\big)\subseteq U$ ve $\{b\}\cup\big((I-b)x(\beta_V,\omega_1)\big)\subseteq V$ olacak biçimde $\alpha_U,\beta_V\in\omega_1$ vardır. max{α_U,β_V}=m alınırsa $\phi\neq(I-(a\cup b))x(m,\omega_1)\subseteq U\cap V$ elde edilir. O halde X bir T_2 –uzayı değildir.

Şimdi X in bir ((ω,ω)-merkezlenmiş) kompakt uzay olduğunu görelim. $\mathcal{O}$, X in keyfi bir açık örtüsü olsun. I bir kompakt alt uzay, ω_1 bir sayılabilir kompakt uzay olduğundan bir önceki lemmadan Y sayılabilir kompakttır. O halde Teorem 4.1.6 gereği Y bir ((ω,ω)-merkezlenmiş) kompakttır. Böylece her $\alpha\in m$ için $\mathcal{O}_\alpha\subseteq\mathcal{O}$ merkezlenmiş aile olmak üzere $\bigcup_{\alpha\in m}\{\mathcal{O}_\alpha\}$ ailesi Y nin bir örtüsü olacak biçimde bir $m\in\omega$ vardır.

$\{O_\beta\in\mathcal{O}:O_\beta\cap\mathcal{F}\neq\phi\}$ ailesi bir merkezlenmiş ailedir. Şöyle ki: n bir sonlu kardinal sayı olmak üzere $\{O_{\beta_1},O_{\beta_2}\ldots O_{\beta_n}\}\subseteq\{O_\beta\in\mathcal{O}:O_\beta\cap\mathcal{F}\neq\phi\}$ alalım. Her bir β_i için $F_i\in\{F_i\}\cup((I-F_i)x(\alpha_i,\omega_1))\subseteq O_{\beta_i}$ olacak biçimde $F_i\in\mathcal{F}$ ve $\alpha_i\in\omega_1$ vardır. F_i ler sonlu olduğundan $(I-\bigcup_{i\leq n}F_i)\neq\phi$ dir. $k\in(I-\bigcup_{i\leq n}F_i)$ ve p= max{$\alpha_i:i\leq n$}+1 olsun. Bu durumda her bir β_i için $(k,p)\in((I-F_i)x(\alpha_i,\omega_1))\subseteq O_{\beta_i}$ olur. O halde $\{O_{\beta_1},O_{\beta_2}\ldots O_{\beta_n}\}$ ailesinin arakesiti boş küme değildir. Böylece $\{O_\beta\in\mathcal{O}:O_\beta\cap\mathcal{F}\neq\phi\}$ ailesi merkezlenmiş ailedir.

$\{O_\beta\in\mathcal{O}:O_\beta\cap\mathcal{F}\neq\phi\}=\mathcal{O}_m$ alınırsa $\mathcal{O}_m$, $\mathcal{F}$ nin bir açık örtüsü olur.

Böylece her $\alpha\leq m$ için $\mathcal{O}_\alpha\subseteq\mathcal{O}$ merkezlenmiş aile ve m sonlu olacak biçimde $\mathcal{O}$ nun bir $\bigcup_{\alpha\leq m}\{\mathcal{O}_\alpha\}$ alt örtüsü vardır. O halde X bir ((ω,ω)-merkezlenmiş) kompakttır.

Şimdi X uzayının bir yıdız-<ω olmadığını görelim.

$\mathcal{U}=\{Y\}\cup\{\{F\}\cup\big((I-F)x(\alpha,\omega_1)\big):F\in\mathcal{F}\}$ biçiminde X in bir açık örtüsünü alalım. A sonlu olmak şartıyla X in keyfi bir alt kümesi olsun.

$A \subseteq X$ sonlu olduğundan n ve m sonlu kardinal sayılar olmak üzere $A = \{(a_i, \alpha_i), F_j : i \in n, j \in m\}$ biçiminde olmalıdır. Her $j \in m$ için F_j sonlu olduğundan bir $x_0 \in (I - \bigcup_{j \in m} F_j)$ alabiliriz. Bu durumda $F = \{x_0\} \cup \{a_i : i \in n\}$ alınırsa $A \cap (\{F\} \cup ((I - F) x (\alpha, \omega_1))) = \phi$ olacağından $F \notin st(A, \mathcal{U})$ dır.

Bu durumda X yıdız -<ω değildir.♦

Aşağıdaki teorem, Teorem 3.1.9 un bir kardinal genişlemesidir. Aşağıda μ=ω alınırsa Teorem 3.1.9 elde edilir.

4.1.11. Teorem

X bir topolojik uzay, $\mu < \kappa$ olacak biçimde μ ve κ sonsuz kardinal sayılar olsun. Eğer X in bir D kapalı, ayrık alt uzayı için; kardinalitesi κ ve nokta-≤μ açık genişlemesi var olacak biçimde bir $E \subseteq D$ alt kümesi varsa, bir m kardinal sayısı için X yıldız -≤ m iken m > μ olur.

İspat

X topolojik uzayının bir D kapalı ayrık alt uzayı için, $|E| = \kappa$ ve $\{B_d : d \in E\}$ biçiminde bir nokta-≤μ açık genişlemesi olan bir $E \subseteq D$ var olup bir m kardinal sayısı için X yıldız ≤ m iken m ≤ μ olsun.

D kapalı ayrık uzay olduğundan Teorem 2.2.6 gereği $\tilde{D} = \phi$ dir. $E \subseteq D$ olduğundan $\tilde{E} = \phi$ olup yine Teorem 2.2.6 gereği E kapalı ayrıktır. E nin her bir d elemanı için $U_d \cap E = \{d\}$ olacak biçimde bir $U_d \subseteq X$ açık kümesi vardır. Her $d \in E$ için $V_d = B_d \cap U_d$ alınırsa, $U_d \cap E = \{d\}$ olduğundan $V_d \cap E = \{d\}$ olur. $\{B_d : d \in E\}$ ailesi E nin bir nokta-≤μ açık genişlemesi olduğundan $\mathcal{V} = \{V_d : d \in E\}$ ailesi de E nin bir nokta-≤μ açık genişlemesidir.

Şöyle ki; her bir $x \in X$ için $|\{d \in E : x \in V_d\}| \leq \mu$ olduğunu görelim. $\{d \in E : x \in V_d\} = \{d \in E: x \in B_d$ ve $x \in U_d\} \subseteq \{d \in E: x \in B_d\}$ ve $\{B_d : d \in E\}$ ailesi E nin nokta-≤μ açık genişlemesi olduğundan $|\{d \in E : x \in B_d\}| \leq \mu$ olur. Bu durumda $|\{d \in E : x \in V_d\}| \leq \mu$ olur.

E kapalı ve $\mathcal{V}$ açıklar ailesi olduğundan $\mathcal{U} = \{X - E\} \cup \mathcal{V}$ biçiminde tanımlı $\mathcal{U}$ ailesi X in bir açık örtüsüdür. X yıldız-≤ m olduğundan st(A,$\mathcal{U}$)=X ve $|A| \leq m$ olacak biçimde bir $A \subseteq X$ vardır.

Şimdi S= $\{V_d \in \mathcal{V}: V_d \cap A \neq \phi\}$ olsun.

$|S|$ ≤μ olduğunu görelim. A nın her x elemanı için $|\{V_d : x \in V_d\}| \leq \mu$ ve $|A| \leq m \leq \mu$ olduğundan Teorem 2.1.6 gereği $\left|\bigcup_{x \in A}\{V_d \in \mathcal{V} : x \in V_d\}\right| \leq \mu$ olur.

$\bigcup_{x \in A}\{V_d \in \mathcal{V} : x \in V_d\}$ =S olduğunu görelim.

Bir $V_d \in S$ alalım. $V_d \cap A \neq \phi$ olduğundan $x_0 \in V_d$ olacak biçimde bir $x_0 \in A$ vardır. $V_d \in \bigcup_{x \in A}\{V_d \in \mathcal{V} : x \in V_d\}$ dır. O halde $S \subseteq \bigcup_{x \in A}\{V_d \in \mathcal{V} : x \in V_d\}$ olur.

Kapsamanın diğer tarafı için bir $V_d \in \bigcup_{x \in A}\{V_d \in \mathcal{V} : x \in V_d\}$ alalım. $x_0 \in V_d$ olacak biçimde bir $x_0 \in A$ vardır. Yani $V_d \cap A \neq \phi$ dir. O halde $\bigcup_{x \in A}\{V_d \in \mathcal{V} : x \in V_d\} \subseteq S$ dir.

Böylece $\bigcup_{x \in A}\{V_d \in \mathcal{V} : x \in V_d\}$ =S dir.

$\left|\bigcup_{x \in A}\{V_d \in \mathcal{V} : X \in V_d\}\right| \leq \mu$ olduğundan $|S|$ ≤μ dür.

Öte yandan $|E| = \kappa$ ve $|E| = |\mathcal{V}|$ olduğundan $|\mathcal{V}| = \kappa$ dır. $S \subseteq \mathcal{V}$ ve $|S| \leq \mu$, $|\mathcal{V}| = \kappa$ olup hipotezden $\mu < \kappa$ olduğundan $\mathcal{V}$-S$\neq \phi$ olur. Öyleyse bir $V_{d_1} \in \mathcal{V}$ ve $V_{d_1} \notin S$ alınabilir. Burada $d_1 \in E$ ve X=st(A,$\mathcal{U}$) olduğundan bir $U_0 \in \mathcal{U}$ için $d_1 \in U_0$ ve $A \cap U_0 \neq \phi$ olur. $d_1 \in E$ olduğundan $U_0 \neq X - E$ olup $U_0 \in \mathcal{V}$ dir. $\mathcal{V}$={ $V_d : d \in E$ } olduğundan $U_0 = V_d$ olacak biçimde bir $d \in E$ vardır. $d_1 \in V_d$ ve $A \cap V_d \neq \phi$ olur. $d_1 \in E$ ve $d_1 \in V_d$ olduğundan $d_1 \in V_d \cap E = \{d\}$ olup $d_1 = d$ dir. O halde $U_0 = V_{d_1}$ ve $A \cap V_{d1} \neq \phi$ olur. Böylece S kümesinin tanımından $V_{d_1} \in S$ olur ki bu $V_{d_1} \notin S$ olması ile çelişir. Böylece varsayım yanlış olup X yıldız ≤ m iken m > μ olur.♦

Zayıf (ω_1,ω)- metaLindelöf uzayın zayıf ω_1-metaLindelöf uzaya denk olduğu göz önüne alınarak aşağıdaki sonuçta κ yerine ω alınırsa Sonuç 3.1.10 elde edilir. Böylece Sonuç 3.1.10 nun kardinal genişlemesi olan bu sonucun ispatı verildiğinde Sonuç 3.1.10 nun da ispatı verilmiş olur.

4.1.12. Sonuç

X bir T_1-uzayı olmak üzere bir zayıf (κ^+,κ)- metaLindelöf uzayı olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir.

a) X uzayı yıldız $\leq \kappa$ dır.

b) ext(X) $\leq \kappa$ dır.

İspat

a)$\Rightarrow$b) X yıldız $\leq \kappa$ olmak üzere kabul edelim ki ext(X) $> \kappa$ olsun. Bu halde $|D| > \kappa$ olacak biçimde kapalı ayrık bir $D \subseteq X$ alt kümesi vardır. X zayıf (κ^+,κ)-metaLindelöf uzay olduğundan D nin, kardinalitesi κ^+ olan ve nokta$\leq\kappa$ açık genişlemesi bulunan bir E alt kümesi vardır. Burada hipotez gereği X yıldız-$\leq\kappa$ olduğundan Teorem 4.1.11 gereği $\kappa > \kappa$ çelişkisi elde edilir.

b) $\Rightarrow$ a) $\mathcal{U}$, X uzayının keyfi bir açık örtüsü olsun. Teorem 3.1.1 den st(A,$\mathcal{U}$)=X olacak biçimde kapalı ayrık bir $A \subseteq X$ alt kümesi vardır. ext(X) $\leq \kappa$ olduğundan $|A| \leq \kappa$ dır. Böylece X yıldız -$\leq \kappa$ dır.♦

Aşağıdaki sonuç, Sonuç 3.1.11 in ω kardinalinden herhangi bir κ kardinaline genişlemesidir.

4.1.13. Sonuç

X bir T_1 uzayı olmak üzere zayıf κ^+-yığınsal Hausdorff uzayı olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir.

a) X yıldız-$\leq \kappa$ dır.

b) ext (X) $\leq \kappa$ dır.

İspat

Sonuç 2.2.22 gereği zayıf κ^+-yığınsal Hausdorff X uzayı zayıf (κ^+,κ)-metaLindelöf uzayı olduğundan Sonuç 4.1.12 gereği denklikler sağlanır.♦

Şimdi Sonuç 3.1.12 nin bir kardinal genişlemesi yapılacak. Fakat önce bu sonucun ispatı için gerekli olan iki lemmaya ihtiyaç vardır.

4.1.14. Lemma

X bir T_3-uzayı olmak üzere κ bir sonsuz kardinal olsun. Eğer X bir P_κ-uzayı ise X in her x elemanının kapaçıklardan oluşan bir komşuluklar tabanı vardır.

İspat

Keyfi bir $x \in X$ alalım. $V \subseteq X$ kümesi x elemanın keyfi bir açık komşuluğu olsun.

X bir T_3-uzayı olduğundan 0 ordinali için $x \in U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq V$ olacak biçimde bir $U_0 \subseteq X$ açık kümesi vardır. Yine 1 ordinali için $x \in U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq V$ olacak biçimde bir $U_1 \subseteq X$ açık kümesi vardır. Bu biçimde devam edildiğinde her $\alpha \in \kappa$ için $x \in U_\alpha \subseteq \overline{U_\alpha} \subseteq ... \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq V$ olacak biçimde bir $U_\alpha \subseteq X$ açık kümesi vardır. O halde $\{x\} \subseteq \bigcap_{\alpha\in\kappa} U_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\kappa} \overline{U_\alpha} = U$ alınırsa X bir P_κ-uzayı olduğundan $\bigcap_{\alpha\in\kappa} U_\alpha$ =U açık ve $\bigcap_{\alpha\in\kappa} \overline{U_\alpha} = U$ kapalıdır. Böylece $x \in U \subseteq V$ olup, U kapaçıktır.

4.1.15. Lemma

X bir T_3-uzayı olsun. Eğer X uzayı P_κ-uzayı ise zayıf κ^+-yığınsal Hausdorff uzaydır.

İspat

X bir T_3 uzayı ve bir P_κ-uzayı olsun. $|D| = \kappa^+$ olacak biçimde kapalı ve ayrık bir D $\subseteq X$ alt kümesini alalım. D nin ikşerli ayrık açık bir genişlemesinin var olduğunu görmeliyiz.

D={$d_i : i \in \kappa^+$} diyelim. D ayrık olduğundan D nin her bir d_i elemanı için $V_{d_i} \cap D = \{d_i\}$ olacak biçimde bir $V_{d_i} \subseteq X$ açık alt kümesi vardır. Lemma 4.1.14 gereği her $i \in \kappa^+$ için $d_i \in U_{d_i} \subseteq V_{d_i}$ olacak biçimde bir kapaçık $U_{d_i} \subseteq X$ alt kümesi vardır.

Her $i \in \kappa^+$ için $W_i = U_{d_i} - \bigcup_{\beta<i} U_{d_\beta}$ biçiminde tanımlansın. X bir P_κ -uzayı ve her $i \in \kappa^+$ için $U_{d_i} \subseteq X$ kapaçık olduğundan, her $i \in \kappa^+$ için $W_i \subseteq X$ kapaçıktır. $i \neq j$ biçimindeki her $i, j \in \kappa^+$ için $W_i \cap W_j = \phi$ olduğu açıktır.

Böylece {$W_i : i \in \kappa^+$} kapaçık kümelerin ikişerli ayrık bir ailesidir.

Şimdi $\{W_i : i \in \kappa^+\}$ ailesinin D nin bir genişlemesi olduğunu görelim.

$d_i \in D$ alalım. $d_i \in U_{d_i} \subseteq V_{d_i}$ olup her $j \in \kappa^+$-{i} için $d_i \notin V_{d_j}$ olduğundan her bir $\beta < i$ için $d_i \notin V_{d_\beta}$ olur. $U_{d_\beta} \subseteq V_{d_\beta}$ olduğundan $d_i \notin U_{d_\beta}$ dır. O halde $d_i \notin \bigcup_{\beta<i} U_{d_\beta}$ olup $d_i \in U_{d_i} - \bigcup_{\beta<i} U_{d_\beta} = W_i$ bulunur. Yani her $d_i \in D$ için $d_i \in W_i$ dir. Böylece $\{W_i : i \in \kappa^+\}$ ailesi D nin bir genişlemesidir.

O halde $\{W_i : i \in \kappa^+\}$ ailesi D nin ikişerli ayrık açık bir genişlemesi olup X bir zayıf κ^+ – yığınsal Hausdorff uzaydır.♦

X in bir zayıf κ^+ – yığınsal Hausdorff uzay olduğunu görmek için kardinalitesi κ^+ olan kapalı ayrık her D alt kümesi için $|D| = |E|$ olacak biçimde ikişerli ayrık açık genişlemesi bulunan bir $E \subseteq D$ alt kümesi bulmak yeterlidir. Fakat yukardaki lemmanın ispatı yapılırken doğrudan D alt uzayının ikişerli ayrık bir açık genişlemesinin var olduğu görüldü. Bu bir sonuç olarak aşağıda verildi.

Aşağıdaki sonucun ispatı Lemma 4.1.15 in ispatından açıktır.

4.1.16. Sonuç

X bir T_3-uzayı ve bir P_κ - uzayı olsun. Eğer D, X uzayının kapalı ayrık kardinalitesi κ^+ olan bir alt kümesi ise D nin ikişerli ayrık açık genişlemesi vardır.♦

Aşağıdaki sonuç, Sonuç 3.1.12 nin ω kardinalinden herhangi bir sonsuz κ kardinaline genişlemesidir.

4.1.17. Sonuç

X bir T_3-uzayı olmak üzere, bir P_κ- uzayı olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir.

a) X uzayı yıldız-≤ κ dır.

b) ext (X) $\leq \kappa$ dır.

İspat

Lemma 4.1.15 ten T_3-uzayı olan her P_κ - uzayı, bir zayıf κ^+-yığınsal Hausdorff uzaydır. O halde istenilenler Sonuç 4.1.13 ten açıktır.♦

Teorem 3.1.13 ün bir kardinal genişlemesi yapılacaktır. Yalnız bundan önce aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

4.1.18. Lemma

κ bir sonsuz kardinal olmak üzere (∞,κ)-Lindelöf uzaylarda boş olmayan alt kümelerin yerel sonlu (veya yerel $\leq \kappa$) her ailesinin kardinalitesi en fazla κ dır.

İspat

X bir (∞,κ)-Lindelöf uzay ve $\mathcal{A} = \{A_\alpha \neq \phi : \alpha \in I\}$ ailesi X te yerel sonlu (yerel $\leq \kappa$) olsun. O halde her $x \in X$ için $I(x) = \{\alpha \in I : U_x \cap A_\alpha \neq \phi\}$ sonlu ($|I(x)| \leq \kappa$) olacak biçimde bir $U_x \subseteq X$ açık alt kümesi vardır. Buradan $\{U_x : x \in X\}$ ailesi X in bir açık örtüsüdür. X bir (∞,κ)-Lindelöf uzay olduğundan $\{U_x : x \in X\}$ açık örtüsünün kardinalitesi en fazla κ olan bir alt örtüsü vardır. Yani en az bir $\mu \leq \kappa$ kardinal sayısı için $S = \{x_n \in X : n \in \mu\}$ olmak üzere X= $\bigcup_{n\in\mu} U_{x_n}$ dir.

Şimdi $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\mu}\{A_\alpha : A_\alpha \cap U_{x_n} \neq \phi\}$ olduğunu görelim.

$\bigcup_{n\in\mu}\{A_\alpha : A_\alpha \cap U_{x_n} \neq \phi\} \subseteq \mathcal{A}$ olduğu açıktır.

Kapsamanın diğer tarafı için bir $A_\beta \in \mathcal{A}$ alalım. $A_\beta \neq \phi$ olduğundan bir $x \in A_\beta$ vardır. $x \in \bigcup_{n\in\mu} U_{x_n}$ olduğundan bir $m \in \mu$ için $x \in U_{x_m}$ dir. Bu halde $x \in U_{x_m} \cap A_\beta \neq \phi$

ve $m \in \mu$ dir. Buradan $A_\beta \in \bigcup_{n\in\mu}\{A_\alpha : A_\alpha \cap U_{x_n} \neq \phi\}$ dır. Böylece $\mathcal{A}$ $\subseteq \bigcup_{n\in\mu}\{A_\alpha : A_\alpha \cap U_{x_n} \neq \phi\}$ olur.

Böylece $\mathcal{A} = \bigcup_{n\in\mu}\{A_\alpha : A_\alpha \cap U_{x_n} \neq \phi\}$ dir.

O halde her $n \in \mu$ için $I(x_n) = \{\alpha \in I : U_{x_n} \cap A_\alpha \neq \phi\}$ kümesi için $I(x) = \{\alpha \in I : U_x \cap A_\alpha \neq \phi\}$ sonlu olduğundan (veya $|I(x)| \leq \kappa$ olduğundan) $|I(x_n)| \leq \kappa$ dır. O halde her $n \in \mu$ için $|\{A_\alpha : U_{x_n} \cap A_\alpha \neq \phi\}| \leq \kappa$ ve $\mu \leq \kappa$ olduğundan $\mathcal{A}$ ailesinin kardinalitesi en fazla κ olur.♦

Bir yıldız –((∞,ω)-Lindelöf) uzay, bir yıldız-Lindelöf uzay olduğundan aşağıdaki teorem, Teorem 3.1.13 ün ω kardinalinden sonsuz bir κ kardinaline genişlemesidir.

4.1.19. Teorem

X bir yıldız –((∞,κ)-Lindelöf) uzay ise X in boştan farklı açık alt kümelerinin yerel sonlu her ailesinin kardinalitesi en fazla κ dır.

İspat

Her $\alpha \in I$ için $\phi \neq V_\alpha \subseteq X$ açık olmak üzere $\mathcal{V}=\{V_\alpha : \alpha \in I\}$ ailesi yerel sonlu olsun. Kabul edelim ki $|I| > \kappa$ olsun.

Her $\alpha \in I$ için bir $x_\alpha \in V_\alpha$ alarak $F=\{x_\alpha : \alpha \in I\}$ ailesini oluşturalım. Her $x_\alpha \in F$ için $\mathcal{V}$ yerel sonlu olduğundan, $x_\alpha \in T_\alpha$ ve $\{\beta \in I : T_\alpha \cap V_\beta \neq \phi\}$ sonlu olacak biçimde bir $T_\alpha \subseteq X$ açığı vardır.

Her $\alpha \in I$ için $T_\alpha \cap V_\alpha = U_\alpha$ denilirse, T_α ve V_α açık olduğundan, U_α açık olup $x_\alpha \in V_\alpha$ ve $x_\alpha \in T_\alpha$ olduğundan $x_\alpha \in U_\alpha$ dır.

Ayrıca $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ yıldız sonludur. Şöyle ki; $\alpha_0 \in I$ olsun. Her $\alpha \in I$ için $T_\alpha \cap V_\alpha = U_\alpha$ olduğundan, $\{\alpha \in I : U_{\alpha_0} \cap U_\alpha \neq \phi\} \subseteq \{\alpha \in I : T_{\alpha_0} \cap V_\alpha \neq \phi\}$ dir. Aynı zamanda $\{\alpha \in I : T_{\alpha_0} \cap V_\alpha \neq \phi\}$ sonlu olduğundan $\{\alpha \in I : U_{\alpha_0} \cap U_\alpha \neq \phi\}$ sonlu olup $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ ailesi yıldız sonludur.

Şimdi $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ ailesinin yerel sonlu olduğunu görelim.

$x \in X$ olsun. $\mathcal{V}$ yerel sonlu olduğundan $x \in T$ ve $\{V_\alpha \in \mathcal{V} : T \cap V_\alpha \neq \phi\}$ sonlu olacak biçimde bir $T \subseteq X$ açığı vardır.

$\{U_\alpha : T \cap U_\alpha \neq \phi\} = \{V_\alpha \cap T_\alpha : T \cap (V_\alpha \cap T_\alpha) \neq \phi\} \subseteq \{V_\alpha \cap T_\alpha : T \cap V_\alpha \neq \phi\}$ ve $\{V_\alpha \in \mathcal{V} : T \cap V_\alpha \neq \phi\}$ sonlu olduğundan $\{V_\alpha \cap T_\alpha : T \cap V_\alpha \neq \phi\}$ ailesi sonludur. Buradan $\{U_\alpha : T \cap U_\alpha \neq \phi\}$ sonludur. O halde $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ yerel sonludur.

F=$\{x_\alpha : \alpha \in I\}$ nın kapalı olduğunu görelim. $\mathcal{V}$= $\{V_\alpha : \alpha \in I\}$ yerel sonlu olduğundan $\{\{x_\alpha\} : \alpha \in I\}$ ailesi yerel sonludur. Sonuç 2.2.27 den $\bigcup_{\alpha \in I}\{x_\alpha\} = F$ kapalıdır.

Bu durumda, $\mathcal{O}$=$\{F^c\} \cup \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ biçiminde tanımlanan $\mathcal{O}$ ailesi X uzayının bir açık örtüsüdür. X yıldız –((∞, κ)-Lindelöf) olduğundan st(L,$\mathcal{O}$)=X olacak biçimde X uzayının (∞, κ)-Lindelöf bir L alt kümesi vardır.

$\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ ailesi X içerisinde yerel sonlu olduğundan $\{U_\alpha \cap L : \alpha \in I\}$ ailesi L içerisinde yerel sonludur. Şöyle ki: L nin bir x elemanını alalım. $x \in T_x$ ve $\{\alpha \in I : U_\alpha \cap T_x \neq \phi\}$ sonlu olacak biçimde bir $T_x \subseteq X$ açık vardır. $T_x \cap L$, L içinde açık kümedir. $\{\alpha \in I : (U_\alpha \cap L) \cap (T_x \cap L) \neq \phi\} \subseteq \{\alpha \in I : U_\alpha \cap T_x \neq \phi\}$ sonlu olduğundan $\{U_\alpha \cap L : \alpha \in I\}$ ailesi L içerisinde yerel sonludur.

L, (∞,κ)-Lindelöf ve $\{U_\alpha \cap L : \alpha \in I\}$ ailesi L içerisinde yerel sonlu bir aile olduğundan Lemma 4.1.18 gereği K=$\{\alpha \in I : U_\alpha \cap L \neq \phi\}$ kümesinin kardinalitesi en fazla κ dır.

$|I| > \kappa$ kabul etmiştik ve $|K| \leq \kappa$ olduğundan Sonuç 2.1.7 gereği $|I-K| > \kappa$ olur. Bu takdirde her $\alpha \in I-K$ için, $x_\alpha \in X =$ st(L,$\mathcal{O}$) olacağından $O \cap L \neq \phi$ ve $x_\alpha \in O$ olacak biçimde bir $O \in \mathcal{O}$ vardır. $\mathcal{O}=\{F^c\} \cup \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ olduğundan ya O=F^c olacak ya da $O \in \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ olacaktır.

O=F^c olamaz. Çünkü $x_\alpha \in O$ ve $x_\alpha \in F$ olduğundan $x_\alpha \notin F^c$ dir.

O zaman $O \in \{U_\alpha : \alpha \in I\}$ olmak zorunda olup $O = U_\beta$ olacak biçimde bir $\beta \in I$ vardır. Bu halde $U_\beta \cap L \neq \phi$ ve $x_\alpha \in U_\beta$ dır. Bu durumda K=$\{\alpha \in I : U_\alpha \cap L \neq \phi\}$ olduğundan $\beta \in K$ dır. Yani her bir $\alpha \in I-K$ için $x_\alpha \in U_{\beta(\alpha)}$ olacak biçimde bir $\beta(\alpha) \in K$ vardır.

$|I-K| > \kappa$ ve $|K| \leq \kappa$ olduğundan Sonuç 2.1.8 gereği $\Lambda \subseteq I-K$ ve $|\Lambda| > \kappa$ olmak üzere her $\alpha \in \Lambda$ için $\beta(\alpha) \in \beta_0$ olacak biçimde bir $\beta_0 \in K$ vardır. Bu durumda her $\alpha \in \Lambda$ için $x_\alpha \in U_{\beta_0}$ olur. O halde her $\alpha \in \Lambda$ için $x_\alpha \in U_{\beta_0} \cap U_\alpha$ olur. $|\Lambda| > \kappa$ olduğundan $|\{U_\alpha : U_{\beta_0} \cap U_\alpha \neq \phi\}| > \kappa$ dır. Bu durum $\{U_\alpha : \alpha \in I\}$ ailesinin yıldız sonlu olması ile çelişir.♦

Yukarıdaki teorem her ne kadar bir kardinal genişleme olsa da içerisinde “yerel sonlu” kavramı bulunmaktadır. Asıl amacın kardinal genişlemeler olduğu bu bölümde “yerel sonlu” sınırlaması yerine daha genel olan “yerel-≤κ koşulunu koymak uygun olacaktır. Aşağıda ki sonuç istenilen bu kardinal genişlemedir.

4.1.20. Sonuç

X bir P_κ -uzayı olsun. Eğer X uzayı bir yıldız –((∞,κ) -Lindelöf) uzay ise X in boş olmayan açık alt kümelerinden oluşan her yerel $\leq\kappa$ ailenin kardinalitesi en fazla κ dır.♦

Şimdi Teorem 3.1.14 ün bir kardinal genişlemesi olan aşağıdaki teoremi verelim. Aşağıda κ kardinal sayısı yerine ω alınırsa Teorem 3.1.14 elde edilir.

4.1.21. Teorem

X bir normal uzay olsun. Eğer X bir P_κ -uzayı ise aşağıdakiler denktir.

1) X yıldız-$\leq\kappa$ dır.

2) X yıldız-((∞,κ)-Lindelöftür) tür.

3) X in boş olmayan açık alt kümelerinin yerel-$\leq\kappa$ her ailesinin kardinalitesi en fazla κ dır.

4) X in boş olmayan açık alt kümelerinin yerel sonlu her ailesinin kardinalitesi en fazla κ dır.

5) X in boş olmayan açık alt kümelerinin ayrık her ailesinin kardinalitesi en fazla κ dır.

6) ext(X) $\leq\kappa$

İspat

1)$\Rightarrow$2) $\mathcal{U}$, X in keyfi bir açık örtüsü olsun. X yıldız-$\leq\kappa$ olduğundan st (A,$\mathcal{U}$)=X ve $|A|\leq\kappa$ olacak biçimde bir $A\subseteq X$ vardır. $|A|\leq\kappa$ olduğundan A nın her açık örtüsünün kardinalitesi en fazla κ olan bir alt örtüsü vardır. O halde A, X in bir (∞,κ)-Lindelöf alt uzayıdır. st (A,$\mathcal{U}$)=X olduğundan X yıldız-((∞,κ)-Lindelöf) olur.

$2) \Rightarrow 3)$ Sonuç 4.1.20 den açıktır.

$3) \Rightarrow 4)$ Yerel sonlu her aile aynı zamanda yerel $-\leq \kappa$ olduğundan açıktır.

$4) \Rightarrow 5)$ Ayrık her aile aynı zamanda yerel sonlu olduğundan açıktır.

$5) \Rightarrow 6)$ X in boş olmayan açık alt kümelerinin ayrık her ailesinin kardinalitesi en fazla κ ve $ext(X) > \kappa$ olsun. O zaman X in kardinalitesi κ^{+} olan kapalı ayrık bir D alt kümesi vardır. Sonuç 4.1.16 dan D nin ikişerli ayrık açık bir genişlemesi vardır. Bu genişleme $\{U_d : d \in D\}$ olsun. X bir normal uzay ve D kapalı olduğundan $D \subseteq G \subseteq \overline{G} \subseteq \bigcup_{d \in D} U_d$ olacak biçimde bir $G \subseteq X$ açık alt kümesi vardır.

Şimdi $\{V_d = G \cap U_d : d \in D\}$ ailesinin X in boştan farklı açık alt kümelerinin bir ayrık ailesi olduğunu görelim.

Önce $\{V_d = G \cap U_d : d \in D\}$ ailesinin X in boştan farklı açık alt kümelerinden oluştuğunu görelim.

Her $d \in D$ için $d \in G$, X in açık alt kümesi ve $d \in U_d$, X in açık alt kümesi olduğundan $d \in G \cap U_d = V_d \neq \phi$ olup $V_d \subseteq$ X açık bir alt kümedir. Yani $\{V_d = G \cap U_d : d \in D\}$ ailesi boştan farklı açık kümelerin bir ailesidir.

Şimdi $\{V_d = G \cap U_d : d \in D\}$ ailesinin ayrık bir aile olduğunu görelim.

X in bir x elemanını alalım. Bu halde iki durum vardır.

1. Durum: $x \notin \overline{G}$ ise; $x \in \overline{G}^c$ açık küme ve $G \cap U_d = V_d$ olduğundan $\{V_d : V_d \cap \overline{G}^c \neq \phi\} = \phi$ dir. Bu durumda $\left|\{V_d : V_d \cap \overline{G}^c \neq \phi\}\right| = 0$ dır.

2. Durum: $x \in \overline{G}$ ise; $\overline{G} \subseteq \bigcup_{d \in D} U_d$ olduğundan D nin en az bir e elemanı için $x \in U_e$ dir. $\{V_d : V_d \cap U_e \neq \phi\} = \{G \cap U_d : G \cap U_d \cap U_e \neq \phi\}$ olur. Burada $\{U_d : d \in D\}$ ikişerli ayrık olduğundan d≠e iken $U_d \cap U_e = \phi$ dir. Bu halde $\{G \cap U_d : G \cap U_d \cap U_e \neq \phi\} =$ $\{G \cap U_d : d = e\} = \{G \cap U_e\} = \{V_e\}$ olur. Böylece $\{V_d : V_d \cap U_e \neq \phi\} = \{V_e\}$ dir. Buradan $|\{V_d : V_d \cap U_e \neq \phi\}| = 1$ elde edilir. $\{V_d = G \cap U_d : d \in D\}$ ayrık bir ailedir.

Hipotezden X in boş olmayan açık alt kümelerinin ayrık her ailesinin kardinalitesi en fazla κ idi. Oysa $\{V_d = G \cap U_d : d \in D\}$ boş olmayan açık alt kümelerinin ayrık bir ailesi olup kardinalitesi D nin kardinalitesine eşit yani κ^+ dır. Bu ise hipotezle çelişir.

$6) \Rightarrow 1)$ Sonuç 4.1.17 den açıktır. ♦

Aşağıdaki önerme, Önerme 3.1.15 in ω kardinaliden herhangi bir sonsuz κ kardinaline genişlemesidir.

4.1.22. Önerme

X bir T_3 uzayı ve bir P_κ-uzayı olmak üzere X in boştan farklı açık alt kümelerinin ayrık her ailesinin kardinalitesi en fazla κ olsun. X in $\psi(x, X) \leq \kappa^+$ olacak biçimdeki her x elemanı için $\chi(x, X) \leq \kappa^+$ dır.

İspat

X in $\psi(x, X) \leq \kappa^+$ olacak biçimde bir x elemanını alalım. $\chi(x, X) \leq \kappa^+$ olduğu görülmelidir.

$\psi(x, X) \leq \kappa^+$ olduğundan $\bigcap \mathcal{O} = \{x\}$ ve $|\mathcal{O}| \leq \kappa^+$ olacak biçimde X uzayının açık alt kümelerinin bir $\mathcal{O}$ ailesi vardır.

1.Durum: $|\mathcal{O}| < \kappa^+$ ise; $|\mathcal{O}| \leq \kappa$ olup X bir P_κ-uzayı olduğunda $\bigcap \mathcal{O} = \{x\}$ kümesi açıktır. Bu durumda x elemanının komşuluklar tabanını $\{\{x\}\}$ alabiliriz. $|\{\{x\}\}| = 1$ olduğundan $\chi(x, X) \leq \kappa^+$ dır.

2.Durum: $|\mathcal{O}| = \kappa^+$ ise; $\mathcal{O} = \{O_i : i \in \kappa^+\}$ olsun. $\bigcap \mathcal{O} = \{x\}$ olduğundan her $i \in \kappa^+$ için $x \in O_i$ olur. Lemma 4.1.14 ten $x \in X$ noktasının kapaçıklardan oluşan bir komşuluklar tabanı vardır. O halde her $i \in \kappa^+$ için $x \in A_i \subseteq O_i$ olacak biçimde bir kapaçık A_i vardır.

Her $i \in \kappa^+$ için $U_i = \bigcap_{\beta \leq i} A_\beta$ olmak üzere aşağıdakiler ispat edilebilir.

a) Her $i \in \kappa^+$ için U_i kapaçıktır ve $j \leq i$ biçimindeki her $i,j \in \kappa^+$ için $U_i \subseteq U_j$ dir.

b) $\mathcal{U}=\{U_i : i \in \kappa^+\}$ ailesi $x \in X$ in bir komşuluklar tabanıdır.

Bu iki madde ispat edilirse $\chi(x, X) \leq |\mathcal{U}| = \kappa^+$ olacağından önerme ispatlanmış olur. Şimdi ispatlarını yapalım.

a) Keyfi bir $i \in \kappa^+$ alalım. $|i| < \kappa^+$ ve X uzayı P_κ-uzayı olduğundan $U_i = \bigcap_{\beta \leq i} A_\beta$ açıktır. Öte yandan A_i ler kapalı olduğundan $U_i = \bigcap_{\beta \leq i} A_\beta$ kapalıdır. O halde U_i kapaçıktır. Ayrıca $j \leq i$ biçimindeki her $i,j \in \kappa^+$ için $U_i \subseteq U_j$ dir.

b) x elemanın keyfi bir V açık komşuluğunu alalım. $x \in U_n \subseteq V$ olacak biçimde bir $U_n \in \mathcal{U}$ bulunmalıdır.

X uzayı T_3 – uzayı ve bir P_κ-uzayı olduğundan Lemma 4.1.14 ten $x \in U \subset V$ olacak biçimde bir U kapaçığı vardır.

İddia 1: $\mathcal{V}$={$V_i = U^c - U_i : i \in \kappa^+$} ailesi U^c nin, azalmayan, kapaçık kümelerden oluşan bir örtüsüdür.

Önce $\mathcal{V}$ ailesinin azalmayan olduğunu görelim.

Bir $i \in \kappa^+$ alalım. $U_{i+1} \subseteq U_i$ olduğundan $V_i = U^c - U_i \subseteq U^c - U_{i+1} =$ V_{i+1} elde edilir. Yani $V_i \subseteq V_{i+1}$ olup $\mathcal{V}$ ailesi azalmayandır.

Şimdi $\mathcal{V}$ ailesinin X in kapaçık alt kümelerinden oluştuğunu görelim.

Bir $i \in \kappa^+$ için U_i kapaçık ve U^c kapaçık olduğundan $V_i = U^c - U_i$ kapaçıktır. O halde $\mathcal{V}$, X in kapaçık alt kümelerinin bir ailesidir.

Şimdi de $\mathcal{V}$ ailesinin U^c için bir örtü olduğunu görelim.

U^c nin bir örtüsü olmadığını varsayalım. O halde U^c nin bir y elemanı için $y \notin \cup\mathcal{V}$ dir. Burada her $i \in \kappa^+$ için $y \notin V_i = U^c - U_i$ ve $y \in U^c$ dir. O halde her $i \in \kappa^+$ için $y \in U_i$ dir. Bu durumda $y \in \bigcap_{i\in\kappa^+} U_i \subseteq \bigcap_{i\in\kappa^+}\bigcap_{\beta\le i} A_\beta \subseteq \bigcap_{i\in\kappa^+} A_i \subseteq \bigcap_{i\in\kappa^+} O_i$ ={x} olduğundan y=x ve $y \in U^c$ ise $x \in U^c$ dir. Oysa $x \in U$ idi. Bu çelişkiden $\mathcal{V}$ ailesi U^c nin bir örtüsüdür.

Şimdi her $i \in \kappa^+$ için $W_i = V_i - \bigcup_{\beta<i} V_\beta$ olmak üzere $\{W_i : i \in \kappa^+\}$ ailesini tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki iddiayı ispatlayabiliriz.

İddia 2: $\{W_i : i \in \kappa^+\}$ ailesi, kapaçıklardan oluşur; ikişerli ayrıktır; $\mathcal{V}$ nin bir incelmişidir ve ayrıktır.

Şimdi bu iddiaları ispatlayalım.

Bu ailenin kapaçıklardan oluştuğunu görelim.

$i \in \kappa^+$ olsun. $|i| \leq \kappa$ dır. i=0 ise $W_0 = V_0$ kapaçıktır. i≠0 ise X uzayı P_κ-uzayı olduğundan ($\mathcal{V}$ bir kapaçık aile idi) $\bigcup_{\beta<i} V_\beta$ kapalıdır. Zaten topoloji gereği $\bigcup_{\beta<i} V_\beta$ açıktır. O halde $\bigcup_{\beta<i} V_\beta$ kapaçıkıtır. V_i kapaçık ve $\bigcup_{\beta<i} V_\beta$ kapaçık olduğundan $W_i = V_i - \bigcup_{\beta<i} V_\beta$ kapaçıktır.

$\{W_i : i \in \kappa^+\}$ ailesinin ikişerli ayrık bir aile olduğunu görelim.

$i, j \in \kappa^+$ için i≠j olsun. İlk olarak j<i ise $W_i = V_i - \bigcup_{\beta<i} V_\beta$ ve $W_j = V_j - \bigcup_{\beta<j} V_\beta \subseteq V_j$ olup $W_j \subseteq V_j \subseteq \bigcup_{\beta<i} V_\beta$ dir. Yani $W_i = V_i - \bigcup_{\beta<i} V_\beta$ ve $W_j \subseteq \bigcup_{\beta<i} V_\beta$ olup $W_i \cap W_j = \phi$ dir. i<j ise benzer biçimde $W_i \cap W_j = \phi$ dir. O halde her $i, j \in \kappa^+$ ve i≠j için $W_i \cap W_j = \phi$ tur. Böylece $\{W_i : i \in \kappa^+\}$ ailesi ikişerli ayrıktır.

$\{W_i : i \in \kappa^+\}$ ailesinin, $\mathcal{V}$ ailesinin bir incelmişi olduğunu görelim.

Önce $\bigcup\{W_i : i \in \kappa^+\} = \bigcup \mathcal{V}$ olduğunu görelim.

$a \in \bigcup\{V_i : i \in \kappa^+\}$ olsun. $a \in V_i$ olacak biçimde bir $i \in \kappa^+$ vardır. Bunun gereği olarak $S=\{i \in \kappa^+ : a \in V_i\} \neq \phi$ dir. Ordinaller iyi sıralı olduğundan minS=k vardır.

k=0 ise $W_0 = V_0$ ve $a \in W_0 = V_0$ dır.

k≠0 ise her i<k için $a \notin V_i$ ve $a \in V_k$ olup $a \in V_k - \bigcup_{\beta<k} V_\beta = W_k$ dır. Bu durumda da $a \in \bigcup\{W_i : i \in \kappa^+\}$ dir. Yani $\bigcup \mathcal{V} \subseteq \bigcup\{W_i : i \in \kappa^+\}$ elde edilir.

Zaten $W_0 = V_0$ ve $i \in \kappa^+ - \{0\}$ için $W_i = V_i - \bigcup_{\beta<i} V_\beta$ olduğundan her $i \in \kappa^+$ için $W_i \subseteq V_i$ olup $\bigcup\{W_i : i \in \kappa^+\} \subseteq \bigcup \mathcal{V}$ dir. Buradan $\bigcup \mathcal{V} = \bigcup\{W_i : i \in \kappa^+\}$ olur.

Her $i \in \kappa^+$ için $W_i \subseteq V_i$ idi. Böylece $\{W_i : i \in \kappa^+\}$ ailesi $\mathcal{V}$ nin bir incelmişidir. Öyleyse $\{W_i : i \in \kappa^+\}$ ailesi de U^c nin bir örtüsüdür.

$\{W_i : i \in \kappa^+\}$ ailesinin ayrık bir aile olduğunu görelim.

X in bir y elemanını alalım. Eğer $y \in U$ ise her $i \in \kappa^+$ için $W_i \subseteq V_i \subseteq U^c$ olduğundan $W_i \cap U = \phi$ olup $|\{W_i : W_i \cap U \neq \phi\}|=0$ dır. Eğer $y \notin U$ ise $y \in U^c$ olup $\{W_i : i \in \kappa^+\}$, U^c nin bir örtüsü olduğundan bir $j \in \kappa^+$ için $y \in W_j$ olur. $\{W_i : i \in \kappa^+\}$ ailesi ikişerli ayrık olduğundan $\{W_i : W_i \cap W_j \neq \phi\} = \{W_j\}$ olur. O halde $\{W_i : i \in \kappa^+\}$ ailesi ayrıktır.

Böylece U^c yi örten açıklardan oluşan bir $\{W_i : i \in \kappa^+\}$ ailesi elde edildi. U^c, X in kapaçık bir alt kümesi olduğundan $\{W_i : i \in \kappa^+\}$ ailesi açıklardan oluşan ayrık bir aile olur. Üstelik bu ailenin kardinalitesi κ^+ dır. Önermenin hipotezi gereği X in boştan farklı açıklarından oluşan ayrık her ailenin kardinalitesi en fazla κ idi. Bu durumda $\{W_i : i \in \kappa^+\}$ ailesinin en fazla κ çokluktaki elemanı boştan farklıdır. O halde S=$\{i \in \kappa^+ : W_i \neq \phi\}$ için $|S| \leq \kappa$ dır.

Böylece $U^c \subseteq \bigcup\{W_i : i \in \kappa^+\} \subseteq \bigcup_{i \in S} W_i \subseteq \bigcup_{i \in S} V_i \subseteq \bigcup_{i \in \kappa^+} V_i = U^c$ olur. O halde $\bigcup_{i \in S} V_i = U^c$ dir. Teorem 2.1.9 gereği $|S| \leq \kappa < \kappa^+$ ve $S \subseteq \kappa^+$ olduğundan SupS=n$\in \kappa^+$ olur. Bu n ordinalini alalım. $\mathcal{V}$ ailesi U^c nin örtüsü olduğundan $V_n \subseteq U^c$ olup, S nin her i elemanı için, i≤n ve $\mathcal{V}$ azalmayan olduğundan, $V_i \subseteq V_n$ olur. Buradan $\bigcup_{i \in S} V_i \subseteq V_n \subset U^c$ elde edilir. $\bigcup_{i \in S} V_i = U^c$ idi. Böylece $U^c = \bigcup_{i \in S} V_i \subseteq V_n = U^c$ olur.

Buradan $U^c \subseteq V_n = U^c - U_n = U^c$ olur. Yani $U^c - U_n = U^c$ dir. Bu ise $U_n \subseteq U$ demektir. Buradan $x \in U_n \subseteq U \subseteq V$ elde edilir.

Sonuçta $x \in X$ in keyfi bir V açık komşuluğu için $x \in U_n \subseteq V$ olacak biçimde bir $U_n \in \mathcal{U}$ var olduğu için $\mathcal{U}=\{U_i : i \in \kappa^+\}$ ailesi $x \in X$ noktasında komşuluklar tabanıdır. Böylece $\chi(x, X) \leq |\mathcal{U}| = \kappa^+$ olur. ♦

Aşağıdaki önerme, Önerme 3.1.16 nın ω kardinalinden herhangi bir sonsuz κ kardinaline genişlemesidir.

4.1.23. Önerme

X bir T_3-uzayı ve bir P_κ-uzayı olmak üzere X in boştan faklı açık alt kümelerinin, ayrık her ailesinin kardinalitesi en fazla κ olsun. Eğer $l(X) \leq \kappa^+$ ise X bir (∞, κ)-Lindelöf uzaydır.

İspat

$\mathcal{U}$, X in keyfi bir açık örtüsü olsun. $\mathcal{U}$ nun kardinalitesi en fazla κ olan bir alt örtüsünü bulalım.

Her $x \in X$ için $x \in U_x$ olacak biçimde bir $U_x \in \mathcal{U}$ vardır. Lemma 4.1.14 ten her $x \in X$ için $x \in O_x \subseteq U_x$ olacak biçimde X in kapaçık bir O_x alt kümesi vardır. O halde $\mathcal{O} = \{O_x : x \in X\}$ ailesi X uzayının kapaçıklardan oluşan bir örtüsü olup $\mathcal{O} \prec \mathcal{U}$ dir. $l(X) \leq \kappa^+$ olduğundan $|\mathcal{W}| \leq \kappa^+$ olacak biçimde $\mathcal{O}$ nun bir $\mathcal{W}$ açık incelmişi vardır.

1.Durum: $|\mathcal{W}| \leq \kappa$ olsun. $\mathcal{W} \prec \mathcal{O}$ ve $\mathcal{O} \prec \mathcal{U}$ olduğundan $\mathcal{W} \prec \mathcal{U}$ olur. Şöyleki: $\mathcal{W} \prec \mathcal{O}$ ve $\mathcal{O} \prec \mathcal{U}$ olduğundan $\bigcup \mathcal{W} = \bigcup \mathcal{O} = \bigcup \mathcal{U}$ dır. Her $W \in \mathcal{W}$ için $W \subseteq O_{(W)}$ olacak biçimde bir $O_{(W)} \in \mathcal{O}$ ve bu $O_{(W)}$ için de $O_{(W)} \subseteq U_{(O_{(W)})}$ olacak biçimde bir

$U_{(O_{(W)})} \in \mathcal{U}$ vardır. Böylece her $W \in \mathcal{W}$ için $W \subseteq U_{(W)}$ olacak biçimde bir $U_{(W)} \in \mathcal{U}$ vardır. O halde $\mathcal{W} \prec \mathcal{U}$ dır.

Her $W \in \mathcal{W}$ için $W \subseteq U_W$ olacak biçimde bir $U_W \in \mathcal{U}$ var olduğundan $X = \bigcup \mathcal{W} \subseteq \bigcup_{W \in \mathcal{W}} U_W$ olur. Bu $\{U_W : W \in \mathcal{W}\}$ ailesi, $\mathcal{U}$ nun kardinalitesi en fazla κ olan bir alt örtüsüdür.

2.Durum: $|\mathcal{W}| = \kappa^+$ olsun. $\mathcal{W}=\{W_i : i \in \kappa^+\}$ biçiminde yazalım. $\mathcal{W} \prec \mathcal{O}$ olduğundan her $i \in \kappa^+$ için $W_i \subseteq O_i$ olacak biçimde bir $O_i \in \mathcal{O}$ vardır. Bu biçimdeki $O_i \in \mathcal{O}$ kapaçıklarının $\{O_i : i \in \kappa^+\}$ biçimindeki ailesi, $\mathcal{W}$ örtü olduğundan, bir örtüdür.

Her $i \in \kappa^+$ için $V_i = O_i - \bigcup_{\beta<i} O_\beta$ olmak üzere $\{V_i : i \in \kappa^+\}$ ailesi X in bir örtüsü olup kapaçıklardan oluşan ayrık bir ailedir. Şimdi bunu ispatlayalım.

$\{V_i : i \in \kappa^+\}$ ailesinin X in bir örtüsü olduğunu görelim.

X in keyfi bir x elemanını alalım. $\{O_i : i \in \kappa^+\}$ ailesi bir örtü olduğundan $x \in O_i$ olacak biçimde bir O_i kapaçığı vardır. Bu halde $S=\{i \in \kappa^+ : x \in O_i\} \neq \phi$ dir. ordinaller kümesi iyi sıralı olduğundan minS=k vardır.

k=0 ise $x \in O_0 = V_0$ dır.

k≠0 ise her $\beta < k$ için $x \notin O_\beta$ ve $x \in O_k$ olup $x \in O_k - \bigcup_{\beta<k} O_\beta = V_k$ dır. Böylece $x \in \bigcup \{V_i : i \in \kappa^+\}$ dir. Bu halde $\{V_i : i \in \kappa^+\}$ ailesi X in bir örtüsüdür.

$\{V_i : i \in \kappa^+\}$ ailesinin kapaçıklardan oluştuğunu görelim.

$i \in \kappa^+$ olsun. i=0 ise $O_0 = V_0$ kapaçıktır. i≠0 ise $i \in \kappa^+$ olduğundan $|i| \leq \kappa$ dır. Bu durumda X uzayı P_κ-uzayı olduğundan $\bigcup_{\beta<i} O_\beta$ kapalıdır. Zaten topoloji gereği $\bigcup_{\beta<i} O_\beta$ açıktır. O halde $\bigcup_{\beta<i} O_\beta$ kapaçıktır. Bununla birlikte O_i kapaçık olduğundan $V_i = O_i - \bigcup_{\beta<i} O_\beta$ kapaçıktır. Böylece $\{V_i : i \in \kappa^+\}$ ailesi kapaçıklardan oluşur.

$\{V_i : i \in \kappa^+\}$ ailesinin ayrık olduğunu görelim.

X in bir y elemanını alalım. $\{V_i : i \in \kappa^+\}$ bir örtü olduğundan bir $j \in \kappa^+$ için $y \in V_j$ dir. $\{V_i : V_i \cap V_j \neq \phi\} = \{V_j\}$ olduğunu görelim. $\{V_j\} \subseteq \{V_i : V_i \cap V_j \neq \phi\}$ olduğu açıktır. $V_i \in \{V_i : V_i \cap V_j \neq \phi\}$ alalım. Eğer j<i ise $V_i = O_i - \bigcup_{\beta<i} O_\beta$ ve $V_j \subseteq O_j \subseteq \bigcup_{\beta<i} O_\beta$ olduğundan $V_i \cap V_j = \phi$ elde edilir. Eğer i<j ise benzer biçimde $V_i \cap V_j = \phi$ elde edilir. O halde i=j dir. Bu durumda $\{V_i : V_i \cap V_j \neq \phi\} \subseteq \{V_j\}$ olur. Böylece $\{V_i : V_i \cap V_j \neq \phi\} = \{V_j\}$ olup $\{V_i : i \in \kappa^+\}$ ailesi X i örten açıklardan oluşan bir ayrık ailedir.

$\{V_i : i \in \kappa^+\}$ ailesinin kardinalitesi κ^+ dır. Önermenin hipotezi gereği X te boştan farklı açıklardan oluşan ayrık her ailenin kardinalitesi en fazla κ olduğundan $\{V_i : i \in \kappa^+\}$ ailesinin en fazla κ çokluktaki elemanı boştan farklıdır. O halde S= $\{i \in \kappa^+ : V_i \neq \phi\}$ için $|S| \leq \kappa$ dır. Buradan $X = \bigcup\{V_i : i \in \kappa^+\} = \bigcup_{i\in S} V_i$ olur. Her $i \in \kappa^+$ için $V_i \subseteq O_i$ ve $\mathcal{O} \prec \mathcal{U}$ olduğundan $O_i \subseteq U_i$ olacak biçimde bir $U_i \in \mathcal{U}$ vardır. Böylece her $i \in \kappa^+$ için $V_i \subseteq O_i \subseteq U_i$ dir. Bu durumda $X = \bigcup\{V_i : i \in \kappa^+\} = \bigcup_{i\in S} V_i \subseteq \bigcup_{i\in S} U_i \subseteq X$ olur. $|S| \leq \kappa$ olduğundan $|\{U_i : i \in S\}| \leq \kappa$ dır. Bu halde ve $\{U_i : i \in S\}$ ailesi $\mathcal{U}$ nun kardinalitesi en fazla κ olan bir alt örtüsüdür.

Böylece X te keyfi bir örtünün kardinalitesi en fazla κ olan bir alt örtüsünü bulduğumuzdan X bir (∞, κ)-Lindelöf uzaydır.♦

Şimdi Önerme 3.1.19 un bir kardinal genişlemesi yapılacak. Fakat önce bazı teoremlerin verilmesi gerekiyor. Aşağıda ispatsız olarak verilecek bu teoremler “Topolojik grup” konusunu içeren ortalama bir topoloji kitabında ya da özel olarak [7] de bulunabilir.

4.1.24. Teorem [7]

T_1-uzayı olan her topolojik grup bir T_3-uzayıdır.

4.1.25. Tanım [7]

(G, Δ) bir topolojik grup, $U, V \subseteq G$ alt kümeler ve $a \in G$ olsun. a nın “Δ” işlemine göre tersi a^{-1} olmak üzere;

a) $Ua = \{x \Delta a : x \in U\}$

b) $aU = \{a \Delta x : x \in U\}$

c) $UV = \{x \Delta y : x \in U, y \in V\}$

d) $U^{-1} = \{x^{-1} : x \in U\}$

biçiminde tanımlıdır.

4.1.26. Teorem [7]

G bir topolojik grup, $U \subseteq G$ bir alt küme ve $a \in G$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

a) Eğer U açık ise aU ve Ua açıktır.

b) Eğer U kapalı ise aU ve Ua kapalıdır.

c) Eğer U açık ve $V \subseteq G$ bir alt küme ise UV ve VU açıktır.

d) Eğer U açık ise U^{-1} açıktır. ♦

(G, Δ) bir grup ve $H \subseteq G$ boş olmayan bir alt küme olmak üzere (H, Δ) bir grup ise H alt kümesine G grubunun bir alt grubu denir. Aşağıdaki teoremin ispatı oldukça kolay olup [7] ye ek olarak ortalama bir cebir kitabında da bulunabilir.

4.1.27. Teorem [7]

G bir grup ve $H \subseteq G$ boş olmayan bir alt küme olsun. H ın bir alt grup olması için gerek ve yeter şart her $a,b \in H$ için $a \Delta b^{-1} \in H$ olmasıdır.♦

Önerme 3.1.19 un ω kardinalinden herhangi bir sonsuz κ kardinaline genişlemesi aşağıdaki önermedir.

4.1.28. Önerme

G topolojik grubu bir T_1-uzayı ve P_κ-uzay olmak üzere G nin boştan faklı açık alt kümelerinin her ayrık ailesinin kardinalitesi en fazla κ olsun.

$\psi(G) \le \kappa^+$ ise $w(G) \le \kappa^+$ ve G bir (∞, κ)-Lindelöf uzaydır.

İspat

G bir T_1-uzayı ve topolojik grup olduğundan Teorem 4.1.24 gereği G bir T_3-uzayıdır. $\psi(G) \le \kappa^+$ olduğundan Önerme 4.1.22 gereği $\chi(G) \le \kappa^+$ dır. O halde G nin birim elemanı olan e noktasının $\{U_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ biçiminde bir komşuluklar tabanı vardır.

Bir $\alpha \in \kappa^+$ alalım.

$T_0 = T_0^{-1}$, $T_0 T_0 \subseteq U_\alpha$ ve $e \in T_0$ olacak biçimde bir $T_0 \subseteq G$ açık alt kümesi bulunabilir. Şöyle ki: $m: GxG \to G$, m(a,b)=a∆b işlemi sürekli olduğunda $(e,e) \in GxG$ noktasında süreklidir. m(e,e)=e∆e=$e \in U_\alpha$ ve U_α açık olduğundan

$m(AxB) \subseteq U_\alpha$ olacak biçimde e nin $A \subset G$ ve $B \subset G$ açık komşulukları vardır. Böylece $m(AxB) = A.B \subseteq U_\alpha$ olur. $A \cap B = V$ diyelim. V, e nin bir açık komşuluğudur. Teorem 4.1.26 dan V^{-1} açıktır. O halde $V \cap V^{-1}$, e nin bir açık komşuluğudur.

$T_0 = V \cap V^{-1}$ olsun.

$a \in T_0$ için $a \in V$ ve $a \in V^{-1}$ dir. Buradan $a^{-1} \in V^{-1}$ ve $a^{-1} \in V$ olup $a^{-1} \in V \cap V^{-1} = T_0$ olduğundan $a^{-1} \in T_0$ dır. Böylece $a \in T_0^{-1}$ olup $T_0 \subseteq T_0^{-1}$ dir.

$a \in T_0^{-1}$ için $a^{-1} \in T_0$ dır. $a^{-1} \in V$ ve $a^{-1} \in V^{-1}$ dir. Buradan $a \in V^{-1}$ ve $a \in V$ olup $a \in V \cap V^{-1} = T_0$ dır. Buradan $T_0^{-1} \subseteq T_0$ olur. Böylece $T_0 = T_0^{-1}$ dir.

$T_0 \subseteq V \subseteq A$ ve $T_0 \subseteq V \subseteq B$ olduğundan $T_0T_0 \subseteq AB \subseteq U_\alpha$ dır.

$e \in V$ ve $e = e^{-1} \in V^{-1}$ olduğundan $e \in V \cap V^{-1} = T_0$ dır.

Böylece bir $\alpha \in \kappa^+$ için $T_0 = T_0^{-1}$, $T_0.T_0 \subseteq U_\alpha$ ve $e \in T_0$ olacak biçimde bir $T_0 \subseteq G$ açık alt kümesi vardır.

Yukarıda U_α için yapılanlar T_0 içinde yapıldığında $T_1 = T_1^{-1}$, $T_1T_1 \subseteq T_0$ ve $e \in T_1$ olacak biçimde bir $T_1 \subseteq G$ açık alt kümesi bulunabilir. Böyle devam edildiğinde her $n \in \omega$ için $T_n \subseteq \ldots \subseteq T_1 \subseteq T_0 \subseteq U_\alpha$ olacak biçimde bir $T_n \subseteq G$ açık alt kümesi vardır.

$H_\alpha = \bigcap_{n \in \omega} T_n$ olsun. Her $n \in \omega$ için $e \in T_n$ oluğundan $e \in H_\alpha$ dır. Şimdi H_α nın G nin bir kapaçık alt grubu olduğunu görelim.

H_α nın kapaçık olduğunu görelim.

Her $n \in \omega$ için T_n açık ve G bir P_κ-uzayı olduğundan $H_\alpha = \bigcap_{n \in \omega} T_n$ açıktır.

H_α nın kapalı olmadığını varsayalım. Bir $x \in (\overline{H_\alpha} - H_\alpha)$ vardır. $x \notin H_\alpha$ oluğundan bir $n_0 \in \omega$ için $x \notin T_{n_0}$ dır. Öte yandan $e \in T_{n_0+1} \subseteq T_{n_0}$ idi. O halde $x\Delta e \in xT_{n_0+1}$ olup Teorem 4.1.26 gereği x elemanının bir açık komşuluğu xT_{n_0+1} dir. $x \in \overline{H_\alpha}$ olduğundan $H_\alpha \cap xT_{n_0+1} \neq \phi$ dir. $p \in H_\alpha \cap xT_{n_0+1}$ olsun. $p \in H_\alpha$ ve $p \in xT_{n_0+1}$ dır. Bu durumda p=xΔy olacak biçimde bir $y \in T_{n_0+1}$ vardır. Buradan $p\Delta y^{-1} = x$ olur ve $p \in H_\alpha$ olduğundan $p \in T_{n_0+1}$ dir. O halde $x = p\Delta y^{-1} \in T_{n_0+1}T_{n_0+1}^{-1} = T_{n_0+1}T_{n_0+1} \subseteq T_{n_0}$ olup $x \in T_{n_0}$ elde edilir. Oysa $x \notin T_{n_0}$ idi. Bu çelişkiden H_α kapalıdır.

H_α nın, G nin bir alt grubu olduğunu görelim.

H_α nın G nin bir alt grubu olduğunu görmek için $a,b \in H_\alpha$ alalım. Bu durumda keyfi bir $n \in \omega$ için $a,b \in T_{n+1}$ dir. O halde $a \in T_{n+1}$ ve $b^{-1} \in T_{n+1}^{-1}$ olur. Böylece $a\Delta b^{-1} \in T_{n+1}T_{n+1}^{-1} = T_{n+1}T_{n+1} \subseteq T_n$ yani $a\Delta b^{-1} \in T_n$ dir. Bu halde her $n \in \omega$ için $a\Delta b^{-1} \in T_n$ elde edilir. Böylece $a\Delta b^{-1} \in \bigcap_{n\in\omega} T_n = H_\alpha$ olup Teorem 4.1.27 dan H_α, G nin bir alt grubudur.

Böylece e noktasındaki $\{U_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ komşuluklar tabanının keyfi bir U_α elemanı için $H_\alpha \subseteq U_\alpha$ olacak biçimde G nin bir kapaçık H_α alt grubu bulundu.

Şimdi her bir $\alpha \in \kappa^+$ için bulunan $H_\alpha \subseteq U_\alpha$ lar kullanılarak $\mathcal{B}_\alpha = \{xH_\alpha : x \in G\}$ biçiminde bir aile tanımlayalım. Bu aile Teorem 4.1.26 gereği kapaçıklardan oluşur ve $x = x\Delta e \in xH_\alpha$ olduğundan bu kapaçıkların hiç biri boş küme değildir.

Şimdi $\mathcal{B}_\alpha = \{xH_\alpha : x \in G\}$ nın ayrık bir aile olduğunu görelim.

$a \in G$ olsun. $a = a\Delta e \in aH_\alpha$ olduğundan $aH_\alpha \subseteq G$ alt kümesi a elemanının bir açık komşuluğudur. $yH_\alpha \in \{xH_\alpha : xH_\alpha \cap aH_\alpha \neq \phi\}$ olsun. Bir $p \in yH_\alpha \cap aH_\alpha$ elemanı alalım. p=yΔr ve p=aΔq biçiminde $q,r \in H_\alpha$ vardır. Buradan $p\Delta r^{-1} = y$ ve p=aΔq dur. O halde $r^{-1} = p^{-1}\Delta y$ ve aΔq=p olur. Bu eşitlikler birlikte düşünüldüğünde $a\Delta q\Delta r^{-1} = p\Delta p^{-1}\Delta y$ olur. $p\Delta p^{-1} = e$ olduğundan $a\Delta q\Delta r^{-1} = y$ olur. Bu halde $(a\Delta q\Delta r^{-1})H_\alpha = yH_\alpha$ dır. H_α bir alt grup olduğundan $q\Delta r^{-1} \in H_\alpha$ olup $(q\Delta r^{-1})H_\alpha = H_\alpha$ dır. O halde $aH_\alpha = yH_\alpha$ dır. Böylece $\{xH_\alpha : xH_\alpha \cap aH_\alpha \neq \phi\} \subseteq \{aH_\alpha\}$ dır. O halde $\left|\{x.H_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha : x.H_\alpha \cap a.H_\alpha \neq \phi\}\right| \leq 1$ olup $\mathcal{B}_\alpha = \{xH_\alpha : x \in G\}$ ailesi ayrık bir ailedir.

Her $\alpha \in \kappa^+$ için $\mathcal{B}_\alpha$ boş kümeden farklı açıkların ayrık bir ailesi olduğundan hipotez gereği $|\mathcal{B}_\alpha| \leq \kappa$ dır. Böylece Teorem 2.1.6 gereği $\left|\bigcup_{\alpha\in\kappa^+} \mathcal{B}_\alpha\right| \leq \kappa^+$ dır.

Şimdi $\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha\in\kappa^+} \mathcal{B}_\alpha$ nın G topolojik uzayı için bir taban olduğunu görelim.

Bir $x \in G$ ve bu x in keyfi bir A açık komşuluğunu alalım. $e = x^{-1}\Delta x \in x^{-1}A$ olup $x^{-1}A$ Teorem 4.1.26 gereği e nin bir açık komşuluğudur. $\{U_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ ailesi e noktasında komşulular tabanı olduğunda $U_\alpha \subseteq x^{-1}A$ olacak biçimde bir $\alpha \in \kappa^+$ vardır. Bu durumda $e \in H_\alpha \subseteq U_\alpha$ olacak biçimde bir H_α var olduğu görüldü. Bu halde $e \in H_\alpha \subseteq x^{-1}A$ olup $x\Delta e \subseteq (x\Delta x^{-1})A$ dır. Böylece $x \in xH_\alpha \subseteq A$ olur. Burada $xH_\alpha \in \mathcal{B}$ olduğundan $\mathcal{B}$ ailesi G topolojik uzayının bir tabanıdır.

Böylece $|\mathcal{B}| \leq \kappa^+$ olduğundan $w(G) \leq \kappa^+$ bulunur.

Şimdi G nin bir (∞, κ)-Lindelöf uzay olduğunu görelim.

Önce $l(G) \leq \kappa^+$ olduğunu görmeliyiz. $\mathcal{V}$ ailesi G nin keyfi bir açık örtüsü olsun. G nin her x elemanı için $x \in V_x$ olacak bir $V_x \in \mathcal{V}$ vardır. Bu durumda $\{V_x \in \mathcal{V} : x \in G\}$ ailesi $\mathcal{V}$ nin bir alt örtüsü olur. $\mathcal{B}$ ailesi G nin bir tabanı olduğundan $x \in B_x \subseteq V_x$ olacak biçimde bir $B_x \in \mathcal{B}$ vardır. Bu durumda $\{B_x \in \mathcal{B} : x \in G\}$ ailesi $\{V_x \in \mathcal{V} : x \in G\}$ nin bir açık incelmişi olur. O halde

$\{B_x \in \mathcal{B} : x \in G\}$ ailesi $\mathcal{V}$ nin bir açık incelmişi olup $|\mathcal{B}| \leq \kappa^+$ olduğundan $|\{B_x \in \mathcal{B} : x \in G\}| \leq \kappa^+$ dır. O halde $l(G) \leq \kappa^+$ dır. Böylece Önerme 4.1.23 gereği G bir (∞, κ)-Lindelöf uzaydır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde bu çalışmada elde edilmiş bir kaç sonuç paylaşılacak ve bunlar hakkında genel bir yorum yapılıp öneriler sunulacaktır.

1) κ sonsuz bir kardinal, X bir T_1-uzayı ve $P_{<\kappa}-$uzayı olmak üzere aşağıdakiler denktir.

i) X (κ,κ)-kompakttır.

ii) X in kardinalitesi en az κ olan her alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır.

2) X bir Hausdorff uzay ve bir P_{κ}-uzayı olmak üzere aşağıdakiler denktir.

a) X (κ,κ)-kompakttır.

b) X yıldız -$<\kappa$ dır.

3) X bir topolojik uzay, $\mu<\kappa$ biçiminde μ ve κ sonsuz kardinal sayılar olsun. Eğer X in bir D kapalı ayrık alt uzayı için, kardinalitesi κ ve nokta-≤μ açık genişlemesi olacak biçimde bir $E\subseteq D$ varsa bir m kardinal sayısı için X yıldız ≤ m iken m > μ olur.

4) X bir zayıf (κ^{+},κ)- metaLindelöf uzayı ve T_1 uzayı olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir.

a) X yıldız $\leq\kappa$

a) ext(X) $\leq\kappa$

Yukarıda dört tanesi verilen sonuçların tamamı dördüncü bölümde bulunabilir. Bu çalışmada çoğunlukla yapılan, üçüncü bölümde verilen sonuçların kardinal genişlemeleridir. Bu durumu bir örnekle açıklayalım.

Teorem 3.1.8

X bir Hausdorff uzay olmak üzere aşağıdakiler denktir.

a) X sayılabilir kompakttır.

b) X yıldız-sonlu dur.

c) X merkezlenmiş kompakttır.

d) X n-bağlı kompakttır.

e) X 2-bağlı kompakttır.

Bu teoremde X bir Hausdorff uzay olduğunda, X in sayılabilir kompakt olması yıldız sonlu olmasına denk olduğu verilmiştir. Burada gizli bir biçim de var olan sayılabilir (ω) ve sonlu kardinal sayılarını açığa çıkartalım. “sayılabilir kompakt” yerine denk olarak “(ω,ω)-kompakt” ve “yıldız sonlu” yerine denk olarak, n pozitif tamsayı olmak üzere “yıldız-≤n” alınırsa bu teorem X in “(ω,ω)-kompakt olması yıldız-≤n olmasına denk olduğunu söylüyor. Burada “ω yerine keyfi bir sonsuz κ kardinal sayısı alınabilir mi?” sorusunun cevabı araştırıldı. Fakat bu soruya bir cevap bulmak için X in bir Hausdorff uzay olması yetersiz kaldı. Hemen belirtelim; burada kesinlikle yetersizdir kastedilmiyor. Bunun için Hausdorff uzay olduğu halde bu denkliği sağlamayan bir uzay bulmak gerekiyor. Açıkçası her bir sonuç için böyle bir araştırmaya girilmeyip, ispatın ilerlemediği görüldüğünde X uzayı üzerinde değişiklik yapıldı. Özet olarak X in bir Hausdorff uzay olmasına ek olarak bir P_κ-uzayı olması kabul edilirse amaca ulaştıracağı görüldü. Fakat bu seferde M. V. Matveev tarafından [2] de yapılan merkezlenmiş kompakt n-bağlı kompakt tanımları yetersiz kaldı. O tanımlar da genişletildi. Bunlara ek olarak birkaç engelden sonra Teorem 3.1.8 in bir kardinal genişlemesi (Teorem 4.1.6) yapıldı. Burada bir kaç noktanın önemli olduğu görülüyor. Birincisi Terorem 4.1.6 aslında Teorem 3.1.8 i de içeriyor. Önemli olduğu düşünülen diğer noktalar öneri olarak aşağıda paylaşıldı.

Yukarıda bir örnekte özet olarak verilenler dördüncü bölümdeki tüm sonuçlar için yapıldı. Başka teoremlerin de benzer biçimde uygun uzaylarda kardinal genişlemeleri yapılabilir.

Birbirinden ayrı olan teoremlerin kardinal genişlemeleri yapıldığında, elde edilen yeni teoremler uygun uzaylarda birleşebilir. Örneğin Teorem 3.1.8 ile Teorem 3.1.14 ün kardinal genişlemeleri olan Teorem 4.1.6 ve Teorem 4.1.21 birleşebilir. Şöyle ki; Teorem 4.1.6 nın birbirine denk olan maddelerinde, κ yerine κ^+ alındığında bu maddelerin, normal uzay olan P_{κ^+}-uzaylarda Teorem 4.1.21 in maddelerine denk olduğu açıktır. Bu tür birleşmeler neticesinde, belki de önemli sonuçlar elde edilebilir.

Hatta bazı açık soruların uygun uzaylarda kardinal genişlemeleri yapılabilir. Buna bir örnek olarak [1] deki bazı açık soruların kardinal genişlemeleri burada verilebilir. Şöyle ki; [1] deki açık sorulardan ikisi aşağıdaki gibidir.

1) X bir tek düze monolitik (monotonically monolithic) yıldız sayılabilir uzay olsun X bir Lindelöf uzay mıdır?

2) X bir kuvvetli tek düze monolitik (strongly monotonically monolithic) yıldız sayılabilir uzay olsun X bir Lindelöf uzay mıdır?

Bu soruların aşağıdaki gibi kardinal genişlemeleri yapılabilir.

m bir sonsuz kardinal sayı olsun.

1) X bir tekdüze monolitik (monotonically monolithic) yıldız-≤m uzay olsun X bir (∞, m)-Lindelöf uzay mıdır?

2) X bir kuvvetli tekdüze monolitik (strongly monotonically monolithic) yıldız-≤m uzay olsun. X bir (∞, m)-Lindelöf uzay mıdır?

Belki bu soruları cevaplamak için X in bir tekdüze monolitik ya da kuvvetli tekdüze monolitik olması yetersiz olacak ve uygun uzaylar araştırılacaktır.

“A Note on the Extend of Two Subclasses of Star Countable Spaces” isimli makalede Zuoming Yu, bir Tychonoff kuvvetli tekdüze monolitik uzayın Lindelöf uzay olduğunu ispatlamıştır. Bu ispat, yukarıdaki kardinal genişleme olan 2. sorunun çözümüne önemli bir katkı sağlayabilir.

KAYNAKLAR

1. Alas, O. T., Junqueira, L. R., Mill, J. V., Tkachuk, V. V. and Wilson, R. G. (2011). On the Extent of Star Countable Spaces*. Cent. Eur. J. Math,* 9(3), 603-615

2. Matveev, M. V. (April 1998). A Survey on Star Covering Properties*. Topological Atlas*, Preprint No: 330.

3. Engelking, R. (1989). ***General Topology***. (Volume 6). Berlin: Helderman Verlag, 329-332,205.

4. Donald Monk, J. (1969). ***Introduction to Set Theory***, New York: Mc Graw Hill, 130-167.

5. Alas, O. T., Junqueira L. R. and Wilson, R. G. (2011). Countability and Star Covering Properties. *Topology and its Applications,* 158, 620–626.

6. Gaal, S. A. (1964). ***Point Set Topology***.(First Printing) New York and London: Academic Press, 128.

7. Mucuk, O. (2010). ***Topoloji ve Kategori****.* (2. Basım). Ankara: Nobel Yayın Dağıtım, 343-368.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: SOYARSLAN, Servet
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 26.11.1983, Bayat/ÇORUM
Medeni hali	: Evli
E-Posta	: servets19@hotmail.com

Eğitim

Derece	Okul/Program	Mezuniyet tarihi
Lisans	KTU/Matematik Öğretmenliği	2007
Lise	Hasanoğlan Atatürk Anadolu Öğretmen Lisesi	2001

İş Deneyimi

Yıl	Çalıştığı Yer	Görev
2010-Devam ediyor.	MEB	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

GAZİ GELECEKTİR...