GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

GRAFLARIN ÖZDEĞERLERİ İÇİN 2-KOMŞULUK YARDIMIYLA SINIRLAR

Nazlı Gülizar OCAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKİM 2015

Nazlı Gülizar OCAK tarafından hazırlanan “GRAFLARIN ÖZDEĞERLERİ İÇİN 2-KOMŞULUK YARDIMIYLA SINIRLAR” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç.Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ...…………………

Başkan : Prof. Dr. Dursun TAŞCI

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum …………………...

Üye : Yrd.Doç. Dr. Miraç ÇETİN FİRENGİZ

Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü ,

Matematik Eğitimi, Başkent Üniversitesi …………………...

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 15/10 /2015

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Nazlı Gülizar OCAK

15 / 10 / 2015

GRAFLARIN ÖZDEĞERLERİ İÇİN 2-KOMŞULUK YARDIMIYLA ÜST SINIRLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Nazlı Gülizar OCAK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ekim 2015

ÖZET

Bu çalışmada, basit, bağlantılı graflarda 2- komşuluk tanımı yapılarak 2- komşuluklu komşuluk matrislerinin en büyük özdeğeri için bir üst sınır bulunmuş ve k-komşuluk genellemesi ile bu üst sınırın genel sonucuna ulaşılmıştır.

Bilim Kodu	:	204.1.025
Anahtar Kelimeler	:	Graf, 2-komşuluk matrisi, özdeğer, özdeğer sınırı
Sayfa Adedi	:	39
Danışman	:	Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

BOUNDS FOR THE EIGENVALUE OF GRAPHS USING 2-ADJACENCY

(M. Sc. Thesis)

Nazlı Gülizar OCAK

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

October 2015

ABSTRACT

In this study, 2-adjacency definition is given for simple and connected graphs and an upper bound is found for the largest eigenvalue of the 2-adjacency matrix with this definition and this upper bound's general conclusion is reached with k-andjacency generalization.

Science Code	:	204.1.025
Key Words	:	Graph, 2-adjacency, eigenvalue, eigenvalue bound
Page Number	:	39
Supervisor	:	Assoc. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE

TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren ve bana her zaman destek olan, zaman ayıran Sayın hocam Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE' ye, bana bu çalışmaya başlamamda cesaret veren hocam Prof. Dr. Sema Bilge OCAK' a , çalışmam boyunca yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarım Nurşah MUTLU, Semiha BAŞDAŞ NURKAHLI ve Ayşegül ATTAR' a ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, her zaman yanımda olan eşime, anneme, ablama, kardeşime ve biricik kızıma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

RESİMLERİN LİSTESİ

Resim **Sayfa**

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbf{G}=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{E})$	Graf
V	Noktalar kümesi
E	Kenarlar kümesi
$\boldsymbol{i}\sim\boldsymbol{j}$	i ve j noktalarının komşuluğu
$\boldsymbol{d_i}$	i noktasının derecesi
$\mathbf{i}\sim_{\mathbf{2}}\mathbf{j}$	i ve j noktalarının 2-komşuluğu
$\boldsymbol{d_i}^{\sim 2}$	i noktasının 2-komşuluk derecesi
A(G)	G grafının komşuluk matrisi
$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{G})$	G grafının derece matrisi
$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{G})$	G grafının Laplacian matrisi
$\mathbf{Q}(\mathbf{G})$	G grafının işaretsiz Laplacian matrisi
$\boldsymbol{\lambda_1}$	G grafının en büyük özdeğeri
$\mathbf{N_i}$	i noktasının komşuluklar kümesi
$\mathbf{A}^{\sim 2}(\mathbf{G})$	G grafının 2-komşuluklu komşuluk matrisi
$\boldsymbol{m_i}$	i noktasının ortalama derecesi

1. GİRİŞ

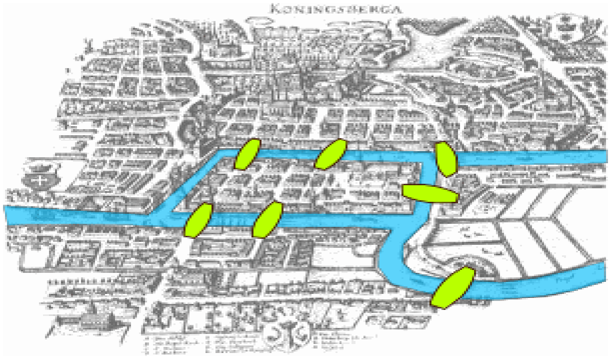
Graf teori veya Çizge Kuramı, noktalar ve aralarındaki çizgeleri (eğrileri) inceleyen matematik dalıdır. Graf, uçlar ve bu uçları birbirine bağlayan kenarlardan oluşan bir tür ağ yapısıdır.

Matematik ve bilgisayar biliminde kullanılan kuramı bir toplulukta bulunan nesneler arasındaki ilişkileri modelleyen matematiksel yapıları, grafları inceler. Bu bağlamda graf düğümlerden "köşeler" ve bu köşeleri birbirine bağlayan kenarlardan oluşur.

Graf teorinin temeli 1736'da Leonhard Euler (1707-1783) tarafından atılmıştır. Euler tarafından yazılmış bir makalenin 1736 yılında basılması tarihi graf teorinin kesin başlangıç tarihidir. O makalenin arkasındaki asıl fikir Königsberg'in yedi köprüsü olarak bilinen problemden çıkmış olmasıdır.

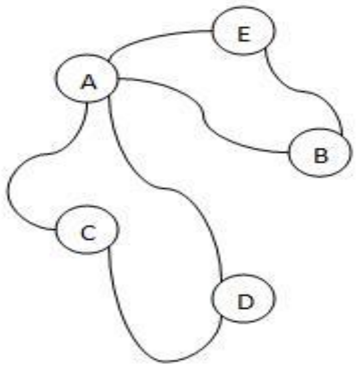
Ortaya çıkışının sebebi Königsberg adlı 4 anakaradan oluşan Prusya (Almanya) şehrinde bu 4 anakarayı birbirine bağlayan 7 köprüdür. Şehrin içinden geçen akarsu ve köprüler ilginç bir yapı oluşturmuştur.

Problem şu idi : Herhangi bir anakaradan başlayarak ve bu 7 köprü bir ve sadece bir kere kullanılarak " kapalı bir yürüme" yani tam bir tur gerçekleştirilebilir miydi ? Birçok insan bunu deneyerek yapmaya çalışsa da kimse başarılı olamamıştı. Konu üzerine kafa yoran Leonhard Euler bu problemle ilgili makalesini yayımladı."Seven Bridges of Königsberg ". Hatta bu problemi genel bir şekilde inceledi ve bunu teoremlerle kuramlaştırdı.



Resim 1.1. Köningsberg köprüsü

Euler’e göre bir graf üzerinde her köşe bir ve sadece bir kez kullanılarak kapalı bir tur yapılabilmesi için her köşenin derecesinin çift olması gerekir (köşenin derecesi, komşu köşelerle oluşturduğu kenarların sayısı anlamına gelir). Bundan dolayı bu koşulları sağlayan graflara “Euler turu ” adı verilmiştir.



Resim 1.2. Euler turu

Graf olarak çizilmiş Königsberg 7 köprü probleminde 2 köşenin derecesi tek olduğu için Euler turu olmadığı anlaşılmış ve insanlar da rahatlamıştır.

Euler bu teoremi ortaya attıktan sonra Hierholzer, Fleury gibi matematikçkler Euler turlarında manuel kapalı yürüme bulma algoritmaları geliştirmişlerdir [2].

Spektral graf teori ise herhangi bir grafın ilgili matrislerinin özdeğerleri ve özvektörlerini kullanarak grafın yapısı hakkında bilgi edinmemizi sağlar.

Günümüzde fen bilimleri, veri tabanları, elektronik devreler gibi birçok alanda kullanılan spektral graf teorinin temeli, 1950’li yıllara dayandığı düşünülmesine rağmen birçok kaynak daha önce ortaya çıktığına dair izler taşımaktadır. 1931 yılında Hückel’in kuantum kimyasında yaptığı bir çalışmada elektron enerji seviyelerini temsil etmekte grafların özdeğerlerini kullandığı bilinmektedir [11]. Ayrıca iyi bilinen Matris-Ağaç teoreminin spektral graf teorinin bir sonucu olduğu 1940’lı yıllarda ispatlanmıştır.

1957 yılında Collatz ve Sinogowitz’in yaptığı çalışma ile spektral graf teori matematik literatüründe sık kullanılan bir hal almıştır [6]. Daha sonra spektral graf teori alanında çeşitli kaynaklar yayınlanmıştır.

Grafın spektrumu yani özdeğerlerinin çalışılması matematik ve diğer alanlarda önemli bir yere sahiptir. Diferansiyel geometri, graf teori, kombinatorik teori gibi matematiğin pek çok alanında spektrum ve spektrum tekniklerinin kullanıldığı bilinmektedir. Ayrıca kimyada molekül kararlılığını temsil etmede, teorik fizik ve kuantum mekaniğinde Hamilton sistemlerinin enerjilerini en aza indirme probleminde ve iletişim ağlarındaki çeşitli problemlerin çözümünde grafın spektrumu kavramının önemli bir yeri vardır.

Grafın özdeğerlerinin hesaplanması her zaman kolay olmayabilir. Özellikle ağırlıklı graflar yüksek mertebeden blok matrislere sahip olduklarından bu matrislerin özdeğerlerini hesaplamak çok daha zor, hatta mümkün olmayabilir. Bu durumda özdeğerler için sınır belirlemek işimizi kolaylaştıracaktır.

Buraya kadar verdiğimiz bilgiler ışığında bu çalışmada basit ve bağlantılı graflar için 2-komşuluk tanımı verilerek 2-komşuluklu grafların komşuluk matrislerinin en büyük özdeğeri için bir üst sınır bulunmuş, daha sonra bulunan sınır yardımı ile graflar için sonuçlar elde edilmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde çalışmada kullanılacak lineer cebir ve graf teori ile ilgili bazı temel tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde çalışmamızın temeli olan grafların komşuluk matrisi özdeğerleri için literatürde var olan sınırlara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde yeni bir tanım olan 2-komşuluklu komşuluk matrisi tanımı ve özellikleri verilerek grafların 2- komşuluklu grafın komşuluk matrisinin en büyük özdeğeri için bir üst sınır elde edilmiş ve örnekler verilmiştir.

Beşinci bölümde elde edilen üst sınır yardımı ile ulaşılan sonuca yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE ÖZELLİKLERİ

2.1. Genel Bilgiler

2.1.1. Tanım

F bir cisim, $A \in M_n(F)$ ve $x \neq 0$, $n \times 1$ tipinde bir sütun vektörü olmak üzere,

$$Ax = \lambda x \tag{2.1}$$

olacak biçimde $\lambda \in F$ skaleri olsun. Eş. 2.1, I $n \times n$ tipinde birim matris olmak üzere,

$$(A- \lambda I)x = 0 \tag{2.2}$$

şeklinde yazılabilir. (A- λI) matrisine A nın karakteristik matrisi denir ve bu matrisin determinantının hesaplanması sonucu λ ya bağlı n - inci dereceden monik bir polinom elde edilir. Bu polinoma A matrisinin karakteristik polinomu denir ve $K_A(\lambda)$ şeklinde gösterilir. Yani,

$$K_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) \tag{2.3}$$

dir. $K_A(\lambda)=0$ denklemine A matrisinin karakteristik denklemi ve bu karakteristik denklemin köklerine de A nın özdeğerleri denir.

$K_A(\lambda)= 0$ n- inci dereceden bir denklem olduğundan tam olarak n tane köke sahiptir ve bunların hepsi birbirinden farklı olmak zorunda değildir.

$$Ax = \lambda x \text{ veya } (A-\lambda I)x = 0 \tag{2.4}$$

denkleminde sıfır olmayan x çözümlerine A matrisinin λ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri denir. Bu tanımlar doğrultusunda özdeğer ve özvektörler için

$$Ax_i = \lambda x_i \quad (1,2,...,n) \tag{2.5}$$

temel formülü elde edilir [16].

2.1.2. Tanım

A ve B n×n tipinde iki matris olmak üzere

$$B = P^{-1}AP \tag{2.6}$$

olacak şekilde tekil olmayan (yani $detP \neq 0$) bir P matrisi varsa, o zaman A ve B matrislerine benzerdir denir.

Benzer matrisler denk matrislerin bir özel halidir ve determinantları aynıdır. Benzer matrisler aynı karakteristik polinoma sahiptir ve dolayısıyla aynı özdeğerlere sahiptir [16].

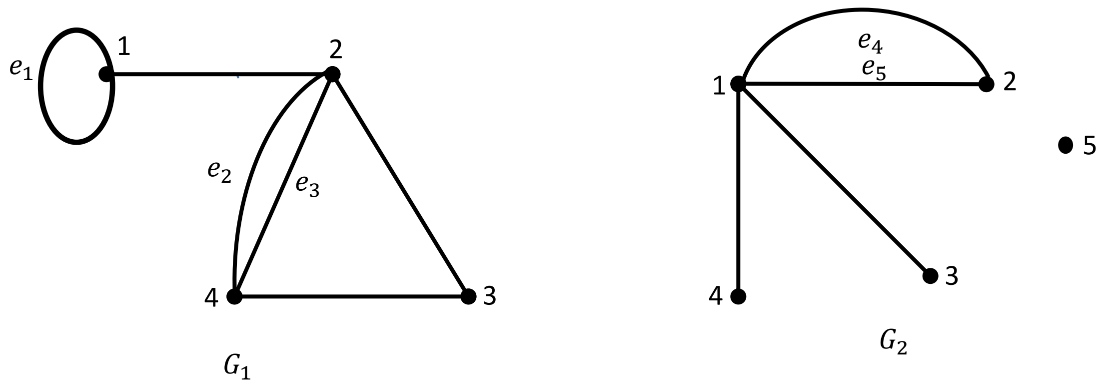
2.2. Graf Kavramı ve Graf Çeşitleri

2.2.1. Tanım

Graf, elemanları nokta olarak adlandırılan sonlu, boş olmayan V noktalar kümesi ve elemanları kenar olarak adlandırılan sonlu E kenarlar kümesinden oluşan G = (V,E) ikili yapısına denir. Burada E kenarlar kümesi V nin iki elemanlı alt kümelerinden oluşan bir kümedir. Yani,

$$E = \{\{i,j\} : i,j \in V\}$$

dir. Ayrıca her $i,j \in$ V için E nin her bir kenarı e_i veya $\{i,j\}$ şeklinde gösterilir [8].



Şekil 2.1. Graf örnekleri

Şekil 2.1 ile verilen G_1ve G_2 grafları sırasıyla 4 nokta 6 kenar ve 5 nokta 4 kenar içerir.

2.2.2. Tanım

Bir grafın i ve j noktaları arasında en az bir kenar bulunuyorsa i ve j noktalarına komşudur denir ve $i \sim j$ ile gösterilir. Bir i noktasına komşu olan noktaların kümesine i nin komşuluklar kümesi denir ve N_i ile gösterilir [17].

Örnek

Şekil 2.1 ile verilen G_1 grafı için $N_2(G_1) = \{1,3,4\}$ ve $N_3(G_1) = \{2,4\}$ dir.

2.2.3. Tanım

Bir grafın herhangi bir i noktasına bağlı kenar sayısına i nin derecesi denir ve d_i ile gösterilir [8].

Şekil 2.1 ile verilen G_1 grafı için d_1= 3, d_2= 4, d_3= 2, d_4= 3 ve G_2 grafı için d_1= 4, d_2= 2, d_3= 1, d_4= 1, d_5= 0 dir.

2.2.4. Tanım

Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan kenara ilmek (loop) denir [8].

Şekil 2.1 ile verilen G_1 grafı için e_1 bir ilmektir.

2.2.5. Tanım

Bir grafın herhangi iki noktası arasında birden fazla kenar bulunuyorsa bu kenarlara paralel kenar (katlı kenar) denir [17].

Şekil 2.1 ile verilen G_1 grafı için e_2 ve e_3, G_2grafı için e_4 ve e_5 kenarları paralel kenarlardır.

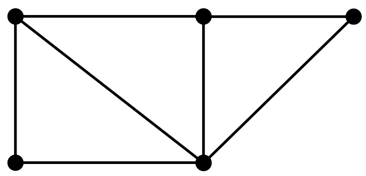
2.2.6. Tanım

Herhangi bir noktayla bağlantısı bulunmayan, yani derecesi 0 olan noktalara izole nokta denir [17].

Şekil 2.1 ile verilen G_2 grafı için 5 noktası izole noktadır.

2.2.7. Tanım

Paralel kenar ve ilmek içermeyen grafa basit graf denir [17].



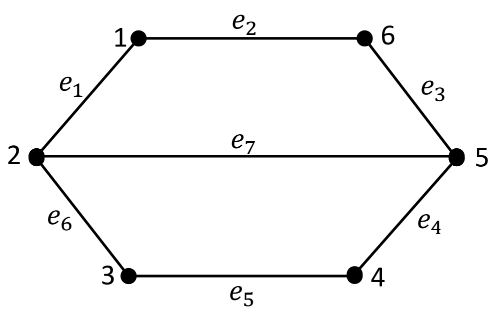
G

Şekil 2.2. Basit graf

Şekil 2.2 ile verilen G grafı herhangi iki noktası arasında birden fazla kenar bulunmayan ve ilmek içermeyen bir graf olduğundan basit bir graftır.

2.2.8. Tanım

Bir grafın sonlu sayıda, birbiriyle bağlantılı noktalarından ve kenarlarından oluşan dizisine yürüme denir ve W ile gösterilir. Her bir kenarın ve noktanın sadece bir kez kullanıldığı yürümeye yol denir. Özel olarak başlangıç ve bitiş noktası aynı olan yola kapalı yol denir [17].



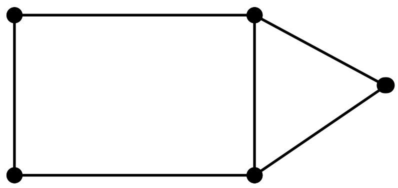
G

Şekil 2.3. Yol ve yürüme

Şekil 2.3 ile verilen G grafı için $1e_1 2e_6 3e_5 4e_4 5e_3 6e_2 1e_1 2e_7 5$ bir yürüme, $1e_1 2e_6 3e_5 4e_4 5e_3 6e_2$ bir yol ve $1e_1 2e_6 3e_5 4e_4 5e_3 6e_2 1$ bir kapalı yoldur.

2.2.9. Tanım

Herhangi iki noktası arasında bir yol bulunan grafa bağlantılı graf denir [8].



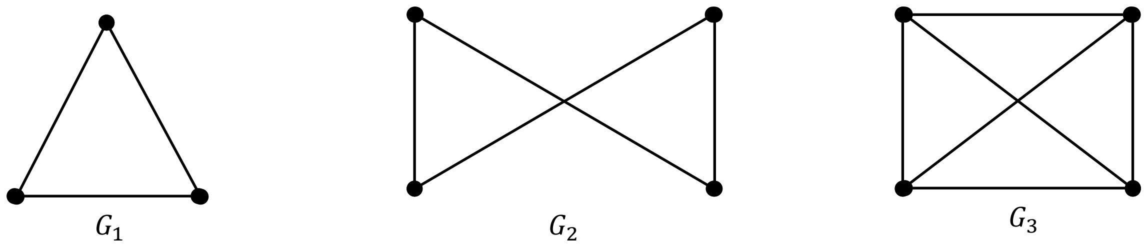
G

Şekil 2.4. Bağlantılı graf

Şekil 2.4 ile verilen G grafında herhangi iki noktası arasında bir yol bulunduğundan G grafı bağlantılı graftır.

2.2.10. Tanım

Her bir noktası aynı dereceye sahip olan grafa regüler graf denir. Özel olarak her bir noktasının derecesi r olan grafa r-dereceli regüler graf denir [17].

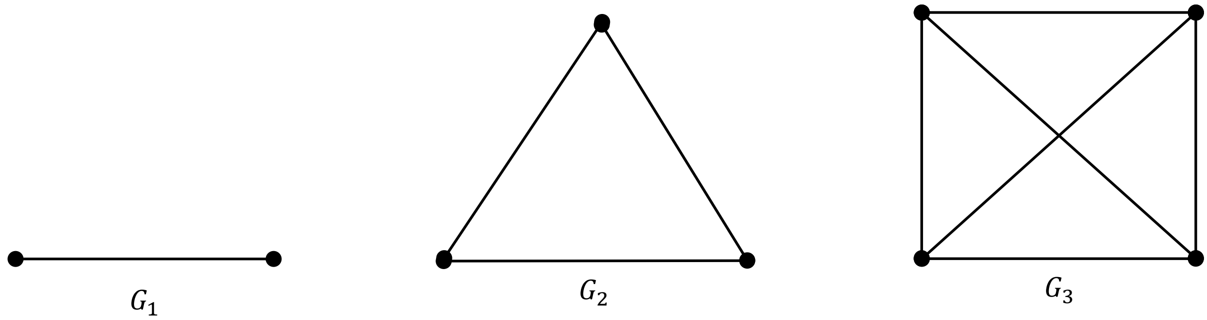


Şekil 2.5. Regüler graf

Şekil 2.5 ile verilen G_1 ve G_2 graflarına ait her bir noktanın derecesi 2 olduğundan G_1 ve G_2 grafları 2-dereceli regüler graf, G_3 grafına ait her bir noktanın derecesi 3 olduğundan G_3 grafı 3-dereceli regüler graftır.

2.2.11. Tanım

Her bir noktası graftaki diğer tüm noktalarla komşu olan basit grafa tam graf denir ve n noktalı bir tam graf K_n ile gösterilir [17].

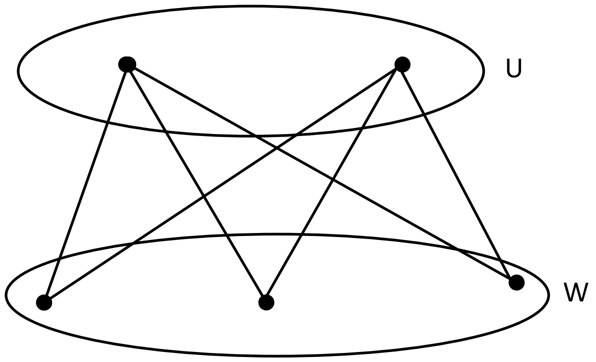


Şekil 2.6. Tam graf

Şekil 2.6 ile verilen G_1, G_2 ve G_3 graflarında her bir nokta graftaki diğer tüm noktalarla komşu olduğundan tam graftır ve $G_1 = K_2$, $G_2 = K_3$, $G_3 = K_4$ olarak gösterilir.

2.2.12. Tanım

Grafın noktalar kümesi, her bir noktası aynı kümedeki diğer noktalar ile komşu olmayacak şekilde U ve W gibi iki ayrık kümeye bölünebiliyorsa grafa iki parçalı graf denir.
$U \cap W = \emptyset$ ve $U \cup W = V$ olmak üzere G=(U, W, E) şeklinde gösterilir [8].



Şekil 2.7. İki parçalı graf

Şekil 2.7 ile verilen G grafı ayrık nokta kümeleri U ve W olan iki parçalı bir graftır.

2.2.13. Tanım

G=(U, W, E) iki parçalı graf olmak üzere U kümesine ait her bir noktanın derecesi d_1 ve W kümesine ait her bir noktanın derecesid_2 ise bu grafa iki parçalı yarı regüler graf denir. ve $(d_1, d_2$)-yarı regüler şeklinde gösterilir. Özel olarak $d_1 = d_2$ ise grafa iki parçalı regüler graf denir.

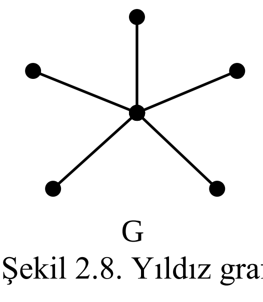
Şekil 2.7 ile verilen G grafı (3, 2)_yarı regüler graftır.

İki parçalı tam graflarda $|U| =$ m, $|W| =$ n olmak üzere $K_{m,n}$ şeklinde gösterilir.

Şekil 2.7 ile verilen G grafı $K_{3,2}$ iki parçalı tam grafıdır.

2.2.14. Tanım

n noktalı iki parçalı $K_{1,n-1}$ tam grafına yıldız graf denir [17].

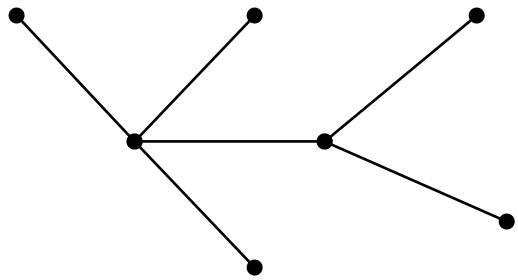


Şekil 2.8. Yıldız graf

Şekil 2.8 ile verilen G grafı $K_{1,5}$ yıldız grafıdır.

2.2.15. Tanım

Herhangi iki köşesi yalnız bir yol ile bağlı yönsüz graflara ağaç denir [17].

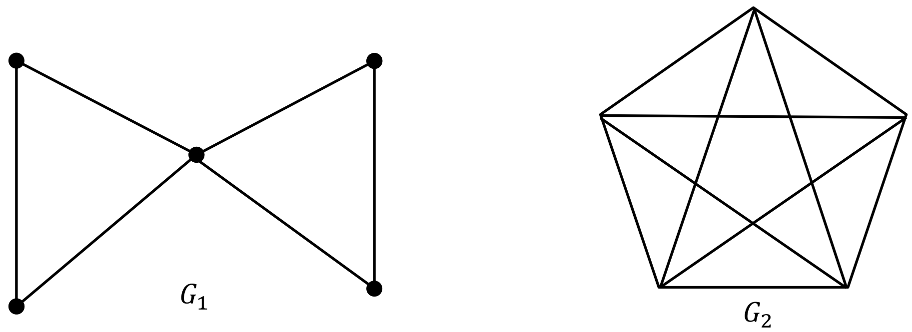


Şekil 2.9. Ağaç Graf

Şekil 2.9 ile verilen G grafının herhangi iki köşesini bağlayan tek bir yol olduğundan G grafı ağaç graftır.

2.2.16. Tanım

Herhangi iki kenarı birbirini kesmeyecek şekilde çizilebilen graflara planar graf denir [17].



Şekil 2.10. Planar graf

Şekil 2.10 ile verilen G_1 grafı kenarları birbirini kesmeyecek şekilde çizilebildiğinden planar graf, G_2 grafı kenarları birbirini kesmeyecek şekilde çizilemediğinden planar olmayan graftır.

2.3. Graf ile İlgili Bazı Matrisler

2.3.1. Tanım

G, n noktalı bir graf olsun.G nin komşuluk matrisi A(G)= $(a_{ij})_{n\times n}$ ile gösterilir ve elemanları

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i \sim j \; ise \\ 0 & , \quad aksi \; durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Komşuluk matrisi simetriktir yani her i ve j için $a_{ij} = a_{ji}$ dir. Komşuluk matrisi reel, simetrik bir matris olduğundan tüm özdeğerleri reeldir. Komşuluk matrisinin mutlak değerce en büyük özdeğerine grafın spektral yarıçapı denir.

Graf ilmek içermiyorsa komşuluk matrisinin esas köşegen elemanları daima 0 dır. Eğer ilmek içeriyorsa ilgili sütunun köşegen elemanı 1 e eşittir.

Basit grafların komşuluk matrisinin her bir satır ve sütunundaki elemanların toplamı o satır ve sütuna karşılık gelen noktanın derecesini verir.

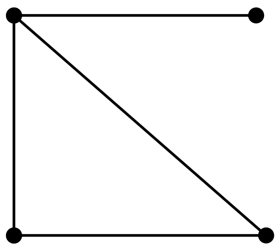
A komşuluk matrisi olmak üzere A^m matrisinin (i, j). elemanı v_i noktasından v_j noktasına m uzunluğundaki yolların sayısına eşittir.

G grafı v_1,v_2,…,v_n noktalarına sahip ve A matrisi G grafının komşuluk matrisi olsun. B matrisi

$$B = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{n-1}$$

olarak tanımlansın. Eğer B matrisinin esas köşegeni üzerinde 0 elemanı yoksa G grafı bağlantılı graftır. Bu sonuç bir grafın bağlantılılığının kontrol edilmesinde komşuluk matrisinin kullanılabileceğini belirtir [3].

Örnek



G

Şekil 2.11.Basit, bağlantılı graf

Şekil 2.11 ile verilen G grafı için komşuluk matrisi,

$$A(G)= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.Ayrıca d_1= 3, d_2= 1, d_3= 2, d_4= 2 dir. Her i, j için $a_{ij} = a_{ji}$ olduğundan A(G) simetriktir.

G basit graf olduğundan esas köşegen üzerindeki elemanlar 0 dır.

1.satır ve 1. sütun elemanları toplamı 3 olup d_1’e, 2.satır ve 1. sütun elemanları toplamı 3 olup d_2’e, 3.satır ve 3. sütun elemanları toplamı 2 olup d_3’e, 4.satır ve 4. sütun elemanları toplamı 2 olup d_4’e eşittir.

$$A^2= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

olup bu matrisin (i,j). elemanı i noktasından j noktasına olan 2 uzunluğundaki yolların sayısını verir. Örneğin (3,2). eleman 1’ e eşittir. Yani, 3 noktasından 2 noktasına 2 uzunluğundaki yolların sayısı 1 dir. Gerçekten 3 noktasından 2 noktasına 2 uzunluğundaki tek yol 312 dir.

A(G) matrisinin özdeğerleri λ_1= 2,17, λ_2= 0,3111, λ_3= -1, λ_4= -1,4811 olup A(G) matrisi reel ve simetrik olduğundan özdeğerleri reeldir. Ayrıca $|\lambda_1| = 2{,}17$ değeri G grafının spektral yarıçapıdır.

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

olup B matrisi

$$\mathrm{B} = A + A^2 + A^3 = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

dir. B matrisinin esas köşegen elemanları 0'dan farklı olduğundan G grafı bağlantılıdır.

2.3.2. Tanım

G , *n* noktalı bir graf olsun. *G* ye ait her bir noktanın derecesinin oluşturduğu köşegen matrise *G* nin derece matrisi denir ve D(G) = köş(d_1, d_2, d_3, ..., d_n) ile gösterilir [3].

Şekil 2.11 ile verilen G grafının derece matrisi,

$$\mathrm{D(G)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{dir.}$$

2.3.3. Tanım

G , *n* noktalı bir graf olsun. *G* nin Laplacian matrisi L(G) $= (l_{ij})_{n\times n}$ ile gösterilir ve elemanları

$$l_{ij} = \begin{cases} d_i & ; \quad i = j \ ise \\ -1 & ; \quad i \sim j \ ise \\ 0 & ; \quad aksi \ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $\mu_1, \mu_{2,} \dots, \mu_n$ özdeğerleri için $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_n$ eşitsizliği vardır ve μ_n özdeğerine, en büyük Laplacian özdeğer denir. Ayrıca bu matrisin her bir satır ve sütunundaki elemanların toplamı 0 dır. Laplacian matrisi için

$$\mathrm{L(G)} = D(G) - A(G) \tag{2.7}$$

eşitliği vardır [3].

Şekil 2.11 ile verilen G grafının Laplacian matrisi

$$\mathrm{L(G)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

dir.

2.3.4. Tanım

G , *n* noktalı bir graf olsun. *G* nin işaretsiz Laplacian matrisi $Q(G) = (q_{ij})_{n \times n}$ ile gösterilir ve elemanları

$$q_{ij} = \begin{cases} d_i & ; \quad i = j \ ise \\ 1 & ; \quad i \sim j \ ise \\ 0 & ; \quad aksi \ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. İşaretsiz Laplacian matrisi reel, simetrik bir matris olduğundan tüm özdeğerleri reeldir. Bu matrisin $q_{1,}$ q_2, …, q_n özdeğerleri için $q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_n$ eşitsizliği vardır ve q_1 özdeğerine, en büyük işaretsiz Laplacian özdeğer denir. Ayrıca işaretsiz Laplacian mtarisi için

$$\mathrm{Q(G)} = \mathrm{D(G)} + \mathrm{A(G)} \tag{2.8}$$

eşitliği vardır [3].

Şekil 2.11 ile verilen G grafının işaretsiz Laplacian matrisi,

$$Q(G)=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

dir.

3. YARDIMCI TEOREMLER

Bu bölümde grafların komşuluk matrisinin özdeğerleri için literatürde var olan üst sınırları vereceğiz.

3.1. Teorem

G, m kenar ve n noktadan oluşan basit ve bağlantılı graf olsun. G grafının λ_1(G) spektral yarıçapı

$$\lambda_1(G) \leq \sqrt{2m-n+1} \tag{3.1}$$

eşitsizliğini sağlar ve eşitlik durumu ancak ve ancak G, $K_{1,n-1}$ yıldızı veya K_n tam grafına izomorf olduğunda sağlanır [18].

3.2. Teorem

G, m kenarlı bir graf olmak üzere G grafının λ_1(G) spektral yarıçapı m= $\binom{k}{2}$ olmak üzere

$$\lambda_1(G) \leq k-1 \tag{3.2}$$

eşitsizliğini sağlar [4].

3.3. Teorem

G, basit ve planar grafının kenar sayısı m ve nokta sayısı n≥3 olsun. G grafının spektral yarıçapı λ_1(G)

$$\lambda_1(G) \leq \sqrt{5n-11} \tag{3.3}$$

eşitsizliğini sağlar [18].

3.4. Teorem

G, n noktalı basit bir graf olsun. G grafının spektral yarıçapı λ_1(G)

$$\sum_{i=2}^{n} {\lambda_i}^2(G) \geq \text{n-1} \tag{3.4}$$

eşitsizliğini sağlar ve eşitlik durumu ancak ve ancak G grafı $K_{1,n-1}$ yıldızına veya K_n tam grafı olduğunda gerçekleşir [18].

3.5. Teorem

G, e kenarlı bir graf olsun. G grafının spektral yarıçapı λ_1(G)

$$\lambda_1(G) \leq \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+8e}\right) \tag{3.5}$$

eşitsizliğini sağlar. Eşitlik durumu ancak ve ancak e = $\binom{k}{2}$ olmak üzere G grafı K_k tam grafı ve izole noktaların ayrık bileşimi olduğunda gerçekleşir [15].

3.6. Teorem

G, basit ve bağlantılı grafında m kenar sayısı, n nokta sayısı, Δ maksimum derece, δ minimum derece sayısı olsun. G grafının spektral yarıçapı λ_1(G)

$$\lambda_1(G) \leq \frac{\delta-1+\sqrt{(\delta+1)^2+4(2m-8n)}}{2} \tag{3.6}$$

eşitsizliğini sağlar. Eşitlik durumu ancak ve ancak G nin regüler graf veya her bir noktasının derecesi δ veya n-1 olan graf olması durumunda gerçekleşir [14].

3.7. Teorem

n noktalı G basit grafı için dereceler $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ olsun. G grafının spektral yarıçapı λ_1(G) her bir $1 \leq i \leq n$ için

$$\lambda_1(\mathrm{G}) \leq \frac{d_i - 1 + \sqrt{(d_i+1)^2 + 4(i-1)(d_1 - d_i)}}{2} \tag{3.7}$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca i=1 ise eşitlik durumu ancak ve ancak G grafı regüler graf iken gerçekleşir. Eğer $2 \leq i \leq n$ ise eşitlik durumu ancak ve ancak G regüler graf veya $d_1 = d_2 = \cdots = d_{i-1} = n-1$ ve $d_i = d_{i+1} = \cdots = d_n = \delta$ olan graf iken gerçekleşir [14].

3.8. Teorem

G, basit ve bağlantılı grafında dereceler $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = \delta$ eşitsizliğini sağlasın.G grafının spektral yarıçapı $\lambda_1(G)$

$$\lambda_1(\mathrm{G}) \leq \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \frac{d_i - 1 + \sqrt{(d_i+1)^2 + 4(i-1)(d_1 - d_i)}}{2} \right\} \tag{3.8}$$

eşitsizliğini sağlar [14].

3.9. Teorem

G, planar grafının nokta sayısı $n \geq 3$ olsun. G grafının spektral yarıçapı $\lambda_1(\mathrm{G})$

$$\lambda_1(\mathrm{G}) \leq 4 + \sqrt{3(n-3)} \tag{3.9}$$

eşitsizliğini sağlar [5].

3.10. Teorem

G, n noktalı , bağlantılı bir graf olsun. G grafının spektral yarıçapı $\lambda_1(\mathrm{G})$

$$\lambda_1(\mathrm{G}) \leq \lambda_1(K_n) = n-1 \tag{3.10}$$

eşitsizliğini sağlar ve eşitlik durumu G grafının ancak ve ancak K_n tam grafı olması durumunda gerçekleşir [6].

3.11. Teorem

G, n noktalı bir ağaç olsun. G grafının spektral yarıçapı λ_1(G)

$$\lambda_1(\mathrm{G}) \leq \lambda_1(K_{1,n-1}) = \sqrt{n-1} \qquad (3.11)$$

eşitsizliğini sağlar ve eşitlik durumu ancak ve ancak G grafının $K_{1,n-1}$ yıldızı olması durumunda gerçekleşir [6].

3.12. Teorem

G bağlantılı grafının spektral yarıçapı λ_1(G)

$$\lambda_1(\mathrm{G}) \leq \max\left\{\sqrt{d_i d_j} : 1 \leq i, j \leq n\,,\; v_i v_j \in E\right\} \qquad (3.12)$$

eşitsizliğini sağlar ve eşitlik durumu ancak ve ancak G grafının regüler veya iki parçalı yarı regüler graf olması durumunda gerçekleşir [1].

3.13. Teorem

G, izole nokta içermeyen bir graf ise G grafının spektral yarıçapı λ_1(G), m_i , i noktasına komşu olan noktaların derecelerinin ortalaması olmak üzere

$$\lambda_1(\mathrm{G}) \leq \max\{m_i : v_i \in V\} \qquad (3.13)$$

eşitsizliğini sağlar [10].

3.14. Teorem

G herhangi bir graf, m_i, i noktasına komşu olan noktaların derecelerinin ortalaması olmak üzere G grafının spektral yarıçapı λ_1(G)

$$\lambda_1(\mathrm{G}) \leq \max\{d_i m_i : v_i \in V\} \qquad (3.14)$$

eşitsizliğini sağlar [10].

3.15. Teorem

G, basit bağlantılı bir graf olsun. m_i, i noktasına komşu olan noktaların derecelerinin ortalaması olmak üzere G grafının spektral yarıçapı λ_1(G)

$$\lambda_1(\mathrm{G}) \leq \max\left\{\sqrt{m_i m_j} :\ 1 \leq i, j \leq n\ ,\ v_i v_j \in E\right\} \tag{3.15}$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca eşitlik durumu ancak ve ancak G grafının tüm noktaları ortalama dereceye eşit dereceye sahip veya aynı kümelerdeki noktalar aynı ortalama dereceye sahip iki parçalı bir graf olduğunda gerçekleşir [7].

3.16. Teorem

G, n noktalı, e kenarlı, basit, bağlantılı bir graf olsun. G grafındaki noktaların maksimum derecesi d_1, minimum derecesi d_n olsun. G grafının spektral yarıçapı λ_1(G)

$$\lambda_1(\mathrm{G}) \leq \sqrt{2e - (n-1)d_n + (d_n - 1)d_1} \tag{3.16}$$

eşitsizliğini sağlar ve eşitlik durumu ancak ve ancak G grafı regüler graf veya yıldız graf olduğunda gerçekleşir [7].

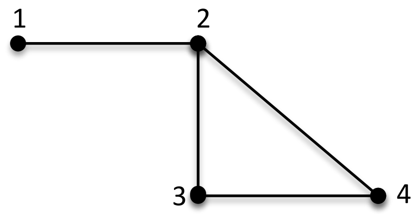
4. 2-KOMŞULUKLU GRAFLAR İÇİN KOMŞULUK MATRİSİ

Bu bölümde 2- komşuluk tanımını yaparak bu tanıma bağlı olarak 2-komşuluklu komşuluk matrisi tanımlayacağız. Ayrıca tanımladığımız 2-komşuluklu graflarda komşuluk matrisinin en büyük özdeğeri için bir üst sınır elde edeceğiz.

4.1. Tanım

Bir grafın i ve j noktaları arasında 2 uzunluğunda bir yol varsa i ve j noktalarına 2-komşudur denir ve $i \sim_2 j$ ile gösterilir.

Örnek



G

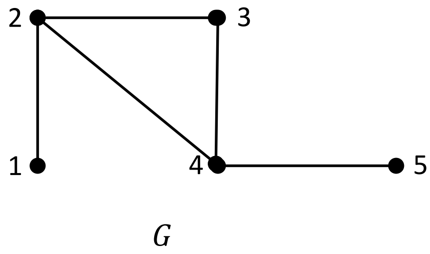
Şekil 4.1. G grafı

Şekil 4.1 ile verilen G grafında 1 noktasının 3 ve 4 noktasına 2 uzunluğunda bir yol olduğundan yani aralarında 2 kenar olduğundan $1 \sim_2 3$ ve $1 \sim_2 4$ yazılır. 2 noktasının 3 ve 4 noktalarıyla aralarında 2 kenar olduğundan $2 \sim_2 3$ ve $2 \sim_2 3$ yazılır. 3 noktasının 1,2 ve 4 noktalarıyla arasında 2 kenar bulunduğundan $3 \sim_2 1$, $3 \sim_2 2, 3 \sim_2 4$ yazılır.

4.2. Tanım

Bir grafın herhangi bir i noktasının 2-komşuluklarının sayısına i noktasının 2-inci derecesi denir ve $d_i^{\sim 2}$ ile gösterilir.

Örnek



Şekil 4.2. G grafı

Şekil 4.2 ile verilen G grafı için $d_1^{\sim 2} = 2$, $d_2^{\sim 2} = 3$, $d_3^{\sim 2} = 4$, $d_4^{\sim 2} = 3$ dür.

2-komşuluk kavramını daha da genelleştirerek k-komşuluk kavramını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

4.3. Tanım

Bir grafın i ve j noktaları arasında k uzunluğunda bir yol bulunuyorsa i ve j noktalarına k-komşudur denir ve $i \sim_k j$ ile gösterilir.

4.4. Tanım

Bir grafın herhangi bir i noktasının k-komşuluklarının sayısına i noktasının k-ıncı derecesi denir ve $d_i^{\sim k}$ ile gösterilir.

Örnek

Şekil 4.2 ile verilen G grafında 1 noktasından 4 noktasına 3 uzunluğunda bir yol olduğundan $1 \sim_3 4$, 1 noktasından 5 noktasına 4 uzunluğunda bir yol olduğundan $1 \sim_4 5$ yazılır ve 1 noktasıyla aralarında 3 kenar olan noktalar 2, 3, 4 ve 5 noktaları olduğundan $d_1^{\sim 3} = 4$ olarak gösterilir.

4.5. Tanım

G, n noktalı bir graf olsun. G nin 2-komşuluklu komşuluk matrisi $A^{\sim 2}(G) = (a_{ij}^{\sim 2})_{n \times n}$ gösterilir ve elemanları

$$\left(a_{ij}^{\sim 2}\right) = \begin{cases} 1 & ; \quad i \sim_2 j \\ 0 & ; \quad aksi\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

2-komşuluklu komşuluk matrisi reel, simetrik bir matris olduğundan tüm özdeğerleri reeldir. Bu matrisin $\lambda_1^{\sim 2}, \lambda_2^{\sim 2}, \ldots, \lambda_n^{\sim 2}$ özdeğerleri için $\lambda_1^{\sim 2} \geq \lambda_2^{\sim 2} \geq \cdots \geq \lambda_n^{\sim 2}$ eşitsizliği vardır. Burada $\lambda_1^{\sim 2}$ özdeğerine, en büyük özdeğer ve $i = 1,2, \ldots, n$ olmak üzere $|\lambda_i^{\sim 2}|$ değerine de spektral yarıçap denir.

4.6. Tanım

G, n noktalı bir graf olsun. G ye ait her bir noktanın 2-komşuluklu derecesinin oluşturduğu köşegen matrise G nin 2-komşuluklu derece matrisi denir ve $D^{\sim 2}(G) = k\ddot{o}ş(d_1^{\sim 2}, d_2^{\sim 2}, \ldots, d_n^{\sim 2})$ ile gösterilir.

4.7. Tanım

G, n noktalı bir graf olsun. G nin 2-komşuluklu Laplacian matrisi $L^{\sim 2}(G) = (l_{ij}^{\sim 2})_{n \times n}$ ile gösterilir ve elemanları

$$\left(l_{ij}^{\sim 2}\right) = \begin{cases} d_i^{\sim 2} & ; \quad i = j \\ -1 & ; \quad i \sim_2 j \\ 0 & ; \quad diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

2-komşuluklu Laplacian matrisi reel, simetrik bir matris olduğundan tüm özdeğerleri reeldir. Bu matrisin $\mu_1^{\sim 2}, \mu_2^{\sim 2}, \ldots, \mu_n^{\sim 2}$ özdeğerleri için $0 = \mu_n^{\sim 2} \leq \cdots \leq \mu_2^{\sim 2} \leq \mu_1^{\sim 2}$ eşitsizliği vardır ve $\mu_1^{\sim 2}$ özdeğerine, en büyük 2- komşuluklu Laplacian özdeğer denir. Ayrıca bu matrisin her bir satır ve sütunundaki elemanların toplamı 0 dır. 2- komşuluklu Laplacian matrisi için

$$L^{\sim 2}(G) = D^{\sim 2}(G) - A^{\sim 2}(G) \tag{4.1}$$

eşitliği vardır.

Örnek

Şekil 4.2'deki basit, bağlantılı G grafı için sırasıyla 2-komşuluklu komşuluk matrisi ve 2-komşuluklu Laplacian matrisi,

$$A^{\sim 2}(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

özdeğerleri $\lambda_1^{\sim 2} = 2{,}93$, $\lambda_2^{\sim 2} = 0{,}61$, $\lambda_3^{\sim 2} = -0{,}46$, $\lambda_4^{\sim 2} = -1{,}47$, $\lambda_5^{\sim 2} = -1{,}61$ olup $A^{\sim 2}(G)$ matrisinin spektral yarıçapı $\lambda_1^{\sim 2} = 2{,}93$ dir.

$$L^{\sim 2}(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olup özdeğerleri $\mu_1^{\sim 2} = 5$, $\mu_2^{\sim 2} = 4{,}41$, $\mu_3^{\sim 2} = 3$, $\mu_4^{\sim 2} = 1{,}58$, $\mu_5^{\sim 2} = -0{,}44.10^{15}$ olup L matrisinin spektral yarıçapı $\mu_1^{\sim 2} = 5$ dir.

4.1. Teorem

G, basit ve bağlantılı bir graf olmak üzere G nin 2-komşuluk grafının spektral yarıçapı

$$\lambda_1(G) \leq \max\left\{\sqrt{r_i r_j} \ : \ 1 \leq i,j \leq n\,,\ i \sim_2 j\ \right\} \tag{4.2}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $P_i = \frac{\sum_{i\sim_2 k} d_k}{d_i^{\sim 2}}$ olmak üzere $r_i = \frac{\sum_{i\sim_2 k} P_k}{d_i^{\sim 2}}$ dir.

İspat

G, basit ve bağlantılı bir graf olsun. $P_i = \frac{\sum_{i\sim_2 k} d_k}{d_i^{\sim 2}}$ olmak üzere P matrisi $\mathrm{P} = k$öş $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ olarak tanımlansın. $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $P^{-1}A^{\sim 2}P$ matrisinin $\lambda_1^{\sim 2}$ (G) özdeğerine karşılık gelen özvektörü olsun. Hatta özbileşenlerden biri 1'e eşit olsun ve diğer özbileşenlerde 1'e eşit veya 1'den küçük olsunlar. Yani $x_i = 1$
ve $\forall k,\ 0 < k \leq 1\ , x_k \leq 1$.

$x_j = \max\{x_k\ :\ i\sim_2 k\}$ olsun. Şimdi $P^{-1}A^{\sim 2}P$ nın (i,j). elemanı

$$\begin{cases} \frac{P_j}{P_i} & ; \quad i\sim_2 j \\ 0 & ; \quad aksi\ durumlarda \end{cases}$$

olacaktır. X vektörü $\lambda_1^{\sim 2}$(G) özdeğerine karşılık gelen özvektör olduğundan

$$\{P^{-1}A^{\sim 2}P\}X = \lambda_1^{\sim 2}(G)\,X \qquad (4.3)$$

elde edilir.

Eş.4.3 deki i. satır için

$$\lambda_1^{\sim 2}(G).\,x_i = \sum_k \left\{\frac{P_k x_k}{P_i}\ :\ i\sim_2 k\right\}$$

$$\lambda_1^{\sim 2}(G)\,x_i \leq r_i x_j$$

$$\lambda_1^{\sim 2}(G) \leq r_i x_j \qquad (4.4)$$

Eş.4.3 deki j. satır için

$$\lambda_1^{\sim 2}(G).\,x_j = \sum_k \left\{\frac{P_k x_k}{P_j}\ :\ j\sim_2 k\right\}$$

$\lambda_1^{\sim 2}(\text{G}).\, x_j \leq \frac{\sum_k P_k}{P_j} x_i$

$$\lambda_1^{\sim 2}(\text{G}) \leq r_j \tag{4.5}$$

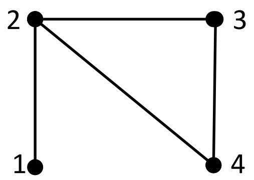
eşitsizlikleri elde edilir. Eş.4.4 ve Eş. 4.5 ten yararlanarak;

$\lambda_1^{\sim 2}(G)^2 \leq r_i r_j$

$\lambda_1^{\sim 2}(G) \leq \max\left\{\sqrt{r_i r_j} \;:\; 1 \leq i,j \leq n\,,\; i \sim_2 j\right\}$

eşitsizliği elde edilir.

Örnek



Şekil 4.3. Basit, bağlantılı graf

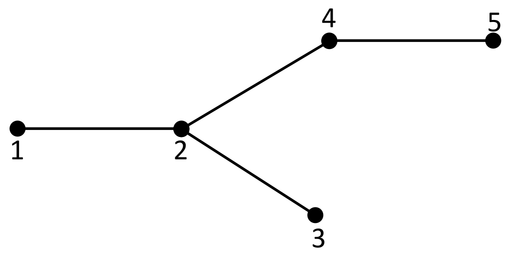
Şekil 4.3 ile verilen grafın 2-komşuluk grafının komşuluk matrisi ve spektral yarıçapı $\lambda_1^{\sim 2}(G)$

$$A^{\sim 2}(\text{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

özdeğerleri $\lambda_1^{\sim 2} = 2{,}56$, $\lambda_2^{\sim 2} = 0$, $\lambda_3^{\sim 2} = -1$, $\lambda_4^{\sim 2} = -1{,}56$ olarak hesaplanır. G nin 2-komşuluk grafının spektral yarıçapı $\lambda_1^{\sim 2}(G) = 2{,}56$ dir.

$P_1 = 3, P_2 = 3, P_3 = \frac{7}{3}, P_4 = \frac{7}{3}$ olduğundan $r_1 = \frac{14}{9}$, $r_2 = \frac{14}{9}$, $r_3 = \frac{25}{7}, r_4 = \frac{25}{7}$ dir. Teorem 4.1 ile elde edilen üst sınır $\frac{25}{7}$ dir.

Örnek



Şekil 4.4. Ağaç graf

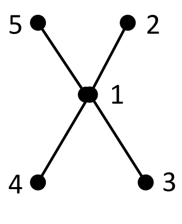
Şekil 4.4 ile verilen G ağacının 2-komşuluk grafının komşuluk matrisi ve spektral yarıçapı $\lambda_1^{\sim 2}(G)$

$$A^{\sim 2}(\mathrm{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

özdeğerleri $\lambda_1^{\sim 2} = 2, \lambda_2^{\sim 2} = 1, \lambda_3^{\sim 2} = -1, \lambda_4^{\sim 2} = -1 \;\; \lambda_5^{\sim 2} = -1$ olarak hesaplanır. G nin 2-komşuluk grafının spektral yarıçapı $\lambda_1^{\sim 2}(G) \; = 2$ dir.

$P_1 = 2, P_2 = 1, P_3 = 2, P_4 = 2, P_5 = 1$ ve $r_1 = 2, r_2 = 1, r_3 = 2, \; r_4 = 2,$ $r_5 = 1$ olduğundan Teorem 4.1 ile elde edilen üst sınır 2 dir.

Örnek



Şekil 4.5. Yıldız graf

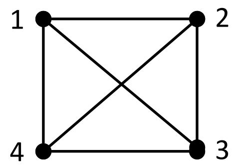
Şekil 4.5 ile verilen verilen G ağacının 2-komşuluk grafının komşuluk matrisi ve spektral yarıçapı $\lambda_1^{\sim 2}(G)$

$$A^{\sim 2}(\mathrm{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

özdeğerleri $\lambda_1^{\sim 2} = 3$, $\lambda_2^{\sim 2} = 0$, $\lambda_3^{\sim 2} = -1$, $\lambda_4^{\sim 2} = -1$, $\lambda_5^{\sim 2} = -1$ olarak hesaplanır. G nin 2-komşuluk grafının spektral yarıçapı $\lambda_1^{\sim 2}(G) = 3$ dir.

$P_1 = 0, P_2 = 3, P_3 = 3, P_4 = 3, P_5 = 3$ ve $r_1 = 0, r_2 = 3, r_3 = 3,$ $r_4 = 3,$ $r_5 = 3$ olduğundan Teorem 4.1 ile elde edilen üst sınır 3 dür.

Örnek



Şekil 4.6. Tam graf

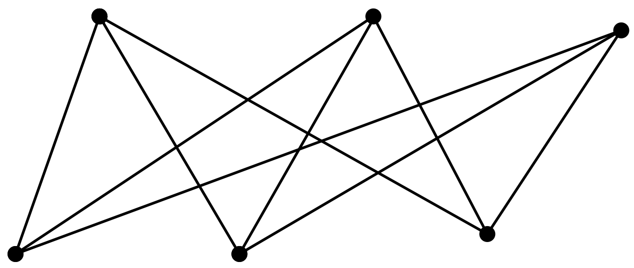
Şekil 4.6 ile verilen K_4 tam grafının verilen 2-komşuluk grafının komşuluk matrisi ve spektral yarıçapı $\lambda_1^{\sim 2}(G)$

$$A^{\sim 2}(\mathrm{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

özdeğerleri $\lambda_1^{\sim 2} = 3$, $\lambda_2^{\sim 2} = -1$, $\lambda_3^{\sim 2} = -1$, $\lambda_4^{\sim 2} = -1$ olarak hesaplanır. G nin 2-komşuluk grafının spektral yarıçapı $\lambda_1^{\sim 2}(G) = 3$ dir.

$P_1 = 3, P_2 = 3, P_3 = 3, P_4 = 3$ ve $r_1 = 3,\ r_2 = 3,\ r_3 = 3,\ r_4 = 3$ olduğundan Teorem 4.1 ile elde edilen üst sınır 3 dir.

Örnek



Şekil 4.7. Regüler graf

Şekil 4.7 ile verilen G regüler grafının 2-komşuluk grafının komşuluk matrisi ve spektral yarıçapı $\lambda_1^{\sim 2}(G)$

$$A^{\sim 2}(\mathrm{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

özdeğerleri $\lambda_1^{\sim 2} = 2,\ \lambda_2^{\sim 2} = 2,\ \lambda_3^{\sim 2} = -1,\ \lambda_4^{\sim 2} = -1\ \lambda_5^{\sim 2} = -1, \lambda_6^{\sim 2} = -1$ olarak hesaplanır. G nin 2-komşuluk grafının spektral yarıçapı $\lambda_1^{\sim 2}(G) = 2$ dir.

$P_1 = 2, P_2 = 2,\ P_3 = 2, P_4 = 2, P_5 = 2\ , P_6 = 2$ olduğundan $r_1 = 2,\ r_2 = 2,\ r_3 = 2,$ $r_4 = 2,\ r_5 = 2$ dir. Teorem 4.1 ile elde edilen üst sınır 2 dir.

5. SONUÇ

Bu çalışmada 2-komşuluk tanımı yapılarak bu tanıma bağlı olarak 2-komşuluklu komşuluk matrisi tanımlanmıştır. Ayrıca 2-komşuluklu en büyük komşuluk matrisi özdeğeri için bir üst sınır elde edilmiştir. Bu sınır doğrultusunda ispatı yapılmaksızın aşağıdaki sonuca ulaşılmıştır.

5.1. Teorem

G, basit ve bağlantılı bir graf olmak üzere G nin k-komşuluk grafının spektral yarıçapı

$$\lambda_1(G) \leq \max\left\{\sqrt{r_i r_j} \;:\; 1 \leq i,j \leq n\,,\; i \sim_k j\right\} \tag{5.1}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $P_i = \frac{\sum_{i \sim_k m} d_m}{{d_i}^{\sim k}}$ olmak üzere $r_i = \frac{\sum_{i \sim_k m} P_m}{{d_i}^{k}}$ dir.

5.1.Sonuç

Özel olarak k= 1 alındığında Sonuç 5.1, Teorem 3.15 ‘e dönüşecektir.

Bulunan sınırı daha da iyileştirmek için bu konuyla ilgili çalışmalarımız devam etmektedir.

KAYNAKLAR

1. Berman, A., Zhang, D. (2001). On the Spectral Radius of Graphs with Cut Vertices, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 83, 233-240.

2. Biggs, N., Lloyd, E. and Wilson, R. (1986). *Graph Theory,* Oxford University Press, 1736-1936.

3. Brouver, A, E. and Haemers, W. H. (2011). *Spectra of Graphs*, (Electronic edition). New York /USA: Springer, 1-3.

4. Brualdi, R. and Hoffman, A. (1985). *On the Spectral Radius of (0,1) Matrices*, Linear Algebra Application, 65, 133-146.

5. Cao, D., Vince, A. (1993). *The Spectral Radius of A Planar Graph*, Linear Algebra and It's Application , 187, 251-257.

6. Collatz, L. Sinogowitz, U. (1957). *Spektren Endlicher Grafen Abhandlungen*, Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg, 21, 63-77.

7. Das, K. C., Kumar, P. (2004). *Some New Bounds on the Spectral Radius of Graphs,* Discrete Mathematic, 281, 149-161.

8. Diestel, R. (2000). *Graph Theory, (Electronic edition)* New York / USA : Springer-verlag, 2-5, 9, 14, 25 .

9. Faudree, R. (1997). *Claw-Free Graphs,* Discrete Mathematic, 164, 87-147.

10. Favaron, D., Matheo, M., Sacle, F. (1993). *Some Eigenvalue Properties in Graphs*, Discrete Mathematic, 111, 197-220.

11. Hückel, E. (1931). *Quantentheoretische Beitrage Zum Benzolproblem*. Zeitschrift für Physikalische Chemie, 70, 204-286.

12. Kuratowski, K. (1930). *Sur le Probleme des Courbes Gauches en Topologie,* Fundamenta Mathematicae, 15, 271-283.

13. Sanjoy, D. (1999). *Learning Polytrees*. 15 th Conference on Uncertainly in Artificial İntelligence (UAI 1999), Stockholm, Sweden, July-Agust 1999, 134-141.

14. Shu, J., Wu, V. (2004). *A Sharp Upper Bound on the Spectral Radius of Graphs*, Linear Algebra and It's Application, 377, 241-248.

15. Stanley, R.P. (1987). *A Bound on the Spectral Radius of Graphs with e Edges,* Linear Algebra Application, 87, 177-183.

16. Taşcı, D. (2011). *Lineer Cebir* (4) Ankara / Türkiye: Gazi Yayınevi, 46-47, 444-445, 503-504.

17. Vasudev, C. (2006). *Graph Theory with Aplications* (1) New Delphi/İndian : New Age İnternational Publishers, 4-5, 20, 21, 56-57, 91.

18. Yuang, H. (1988). *A Bound on the Spectral Radius of Graphs*, Linear Algebra and It's application, 108, 135-139.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: OCAK, Nazlı Gülizar
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 14.07.1984, Ankara
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (506) 264 10 56
Faks	: -
e-mail	: gulizar.ocak@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Matematik Bölümü	Devam Ediyor
Lisans	Hacettepe Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2007
Lise	İncirli Lisesi	2002

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2007 – 2014	Dört Kalem Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2015 – Halen	Gazi Koleji	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Ocak, N.G., Başdaş Nurkahlı, S. ve Büyükköse, Ş. (2015, 1-3 Mayıs). *Ağırlıklı Grafların Komşuluk Matrisinin Özdeğerleri İçin Sınırlar*, II. Kadın Matematikçiler Derneği Çalıştayı, Sivas.

2. Başdaş Nurkahlı, S., Ocak, N. G. ve Büyükköse, Ş. (2015, 1-3 Mayıs). *Graf Teoride Ağırlıklı Laplacian Matrisinin Özdeğerleri için Sınırlar*, II. Kadın Matematikçiler Derneği Çalıştayı, Sivas.

Hobiler

Kitap okumak, Müzik dinlemek

GAZİ GELECEKTİR...