GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

k-TETRANACCİ DİZİLERİ

Özge ARIBAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2015

Özge ARIBAŞ tarafından hazırlanan "K-TETRANACCİ DİZİLERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Dursun TAŞCI
Matematik, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu Onaylıyorum ..…………………

Başkan : Doç. Dr. Şerife BÜYÜKKÖSE
Matematik, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu Onaylıyorum

…………………...

Üye : Yrd. Doç. Dr. Miraç ÇETİN FİRENGİZ
Eğitim, Başkent Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu Onaylıyorum

…………………...

Tez Savunma Tarihi: 14/7/2015

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………….…….

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

…………………….…….

Özge ARIBAŞ

14/7/2015

k-TETRANACCİ DİZİLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Özge ARIBAŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2015

ÖZET

Bu tez çalışmasında, Tetranacci dizisi, k-Tetranacci dizisi biçiminde genelleştirilmiş ve geçmiş çalışmalarda bulunan eşitlikler bu genelleştirme için incelenmiştir. k-Tetranacci matrisi tanımlanmış ve bu matris yardımıyla k-Tetranacci dizisi için bazı eşitlikler bulunmuştur.

Bilim Kodu	:	204.1.025
Anahtar Kelimeler	:	Tetranacci dizisi, k-Tetranacci dizisi, indirgeme bağıntısı, k-Tetranacci matrisi
Sayfa Adedi	:	37
Danışman	:	Prof. Dr. Dursun TAŞCI

THE k-TETRANACCI SEQUENCES
(M. Sc. Thesis)

Özge ARIBAŞ

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
July 2015

ABSTRACT

In this thesis, the Tetranacci sequence was generalized as the k-Tetranacci sequence and the equations which were discovered in the past studies, were examined for this generalization. The k-Tetranacci matrix was defined and some equations were discovered with the help of this matrix.

Science Code	:	204.1.025
Key Words	:	The Tetranacci sequence, the k-Tetranacci sequences, recurrence relations, the k-Tetranacci matrix
Page Number	:	37
Supervisor	:	Prof. Dr. Dursun TAŞCI

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve tamamlanmasında değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, faydalı tavsiyelerde bulunan ve kendisinden çok şey öğrendiğim Sayın Hocam Prof. Dr. Dursun TAŞCI'ya, ayrıca bana desteklerinden dolayı aileme, tüm arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\mathbf{F_n}$	n-inci Fibonacci sayısı
$\mathbf{M_n}$	n-inci Tetranacci sayısı
$\mathbf{N_n}$	n-inci Tetranacci ilk eş sayısı
$\mathbf{S_n}$	n-inci Tetranacci ikinci eş sayısı
$\mathbf{F_{k,n}}$	n-inci k-Fibonacci sayısı
$\mathbf{M_{k,n}}$	n-inci birinci tip k-Tetranacci sayısı
$\mathbf{N_{k,n}}$	n-inci Tetranacci birinci tip eş sayısı
$\mathbf{S_{k,n}}$	n-inci Tetranacci ikinci tip eş sayısı
$\{\mathbf{F_n}\}$	Fibonacci dizisi
$\{\mathbf{M_n}\}$	Tetranacci dizisi
$\{\mathbf{N_n}\}$	Tetranacci birinci tip eş dizisi
$\{\mathbf{S_n}\}$	Tetranacci ikinci tip eş dizisi
$\{\mathbf{F_{k,n}}\}$	k-Fibonacci dizisi
$\{\mathbf{M_{k,n}}\}$	Birinci tip k-Tetranacci dizisi
$\{\mathbf{N_{k,n}}\}$	k-Tetranacci birinci tip eş dizisi
$\{\mathbf{S_{k,n}}\}$	k-Tetranacci ikinci tip eş dizisi
$\{\mathbf{G_{k,n}}\}$	İkinci tip k-Tetranacci dizisi
det A	A matrisinin determinantı
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi

Kısaltmalar	Açıklamalar
Eş.	Eşitlik

1. GİRİŞ

Vajda'nın belirttiği üzere, her bir terimi kendinden önceki iki terimin toplamı indirgeme bağıntısı ile elde edilen Fibonacci dizisi doğada çiçeklerde, ağaçlarda, arılarda ve daha pek çok yerde karşımıza çıkmaktadır [3]. Falcon ve Plaza'nın yaptığı çalışma ile Fibonacci sayılarının daha genel hali olan k-Fibonacci sayıları tanımlanmış ve bu sayıların oluşturduğu dizi ile ilgili özdeşlikler elde edilmiştir [4]. Bu çalışmanın amacı da Tetranacci sayıları için benzer bir genelleştirme yapmaktır.

Tetranacci dizisi, ilk kez 1963 yılında Feinberg tarafından tanımlanmıştır ve daha sonra Kirkpatrick, Bruce, Scheon, Hlynka yazarlarının yaptığı çalışmalarda kısaca bahsedilmiştir [12]. 1992 yılında Waddill tarafından yapılan araştırması Tetranacci dizisi için yapılan en kapsamlı çalışmadır. Bazı yazarlar, çalışmalarında dizinin Latince olan Quadranacci ismini, bazıları da Yunanca olan Tetranacci ismini tercih etmiştir. Bu çalışmada, dizinin ismi Feinberg tarafından kullanıldığı biçimde, Tetranacci olarak kullanılacaktır.

Natividad, Tetranacci gibi ikiden fazla ardışık terimin toplamı ile elde edilen diziler yüksek mertebeden Fibonacci dizileri olarak da adlandırmaktadır. Tetranacci sayıları, doğada Fibonacci sayıları kadar görülmese de içlerinden bir tanesi çok farklı yerlerde görülmektedir. Doğu dünyasında Hinduizm, Jainizm ve Budizm gibi pek çok din tarafından kutsal kabul edilen 108 sayısı, Waddill tarafından tanımlanan Tetranacci dizisinin onuncu terimidir. Bir Güneş tutulması sırasında Güneş-Dünya-Ay sisteminin oluşturduğu üçgen incelendiğinde, tabanın yüksekliğin 108 katı olduğu görülecektir [13].

McLaughlin yaptığı çalışmada Tetranacci dizisi astronomi alanında, Bode yasasına bir alternatif olarak kullanmıştır. Bode yasası, Güneş'in her bir gezegene ve asteroid kemerine ortalama uzaklığını hesaplamak için kullanılan bir sayı dizisidir. Güneş Sistemi'nin keşfinde önemli bir rol oynamıştır, ancak dizinin ilerleyen terimlerinde gerçek mesafeden çok daha büyük değerler vermektedir. McLaughlin'in yaptığı çalışma ile Tetranacci sayılarını kullanılarak elde edilen formülün gerçek mesafeye daha yakın olduğu görülmektedir. Bu çalışma sırasında Tribonacci, Pentanacci, Hexanacci sayıları da denenmiştir ama sonuca en yakın değerler veren Tetranacci sayıları olmuştur [9].

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş, ikinci bölümde gerekli bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde k-Tetranacci dizileri tanımlanmış ve bu dizi için elde edilen eşitlikler verilmiştir. Dördüncü bölümde ise k-Tetranacci sayılarının matris gösterimi tanımlanmış ve bu matrisler ile ilgili bazı eşitlikler elde edilmiştir.

2. BAZI TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Tanım

n$\geq$ 2 için başlangıç şartları F_0=0 ve $F_1=1$ olmak üzere

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{2.1}$$

ile tanımlanan diziye Fibonacci dizisi, dizinin terimlerine de Fibonacci sayıları denir ve $\{F_n\}$ ile gösterilir [3].

Çizelge 2.1. Fibonacci dizisinin ilk on iki terimi

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Aşağıda verilen Fibonacci Q-matrisi, Fibonacci dizisi için pek çok özelliğin elde edilmesini sağlar.

2.2. Teorem

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

olacak şekilde $n\geq$ 1 için

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

eşitliği sağlanır [2].

İspat

Tümevarım yöntemi ile görülebilir.

$n=1$ için

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olup doğrudur.

n= s pozitif tamsayısı için doğru olsun.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{s} = \begin{bmatrix} F_{s+1} & F_{s} \\ F_{s} & F_{s-1} \end{bmatrix}$$

O halde

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{s+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{s} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{s+1} & F_{s} \\ F_{s} & F_{s-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{s+1} + F_{s} & F_{s+1} \\ F_{s} + F_{s-1} & F_{s-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{s+2} & F_{s+1} \\ F_{s+1} & F_{s-1} \end{bmatrix}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

2.3. Teorem

A ve B aynı boyutlu iki karesel matris olsun.

$$\det(A \cdot B) = (\det A)(\det B) \tag{2.4}$$

dir [2].

2.4. Teorem

$n \geq 1$ için

$$F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_{n}^{2} = (-1)^{n} \tag{2.5}$$

eşitliği sağlanır [2].

İspat

$\det Q = -1$ ve Teorem 2.3. gereği

$$\det Q^{n} = (\det Q)^{n} \tag{2.6}$$

olduğundan, Teorem 2.2. ile verilen ifadenin her iki tarafından determinant alınırsa istenen ifade elde edilir.

Teorem 2.4 ile verilen eşitlik literatürde Cassini formülü olarak geçmektedir.

2.5. Teorem

Aşağıda verilen

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{2.7}$$

karesel eşitliğinin pozitif kökü a, negatif kökü b olsun. n$\geq$ 1 için

$$F_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} \tag{2.8}$$

ile verilen eşitliğe Fibonacci dizisi için Binet formülü denir [2].

2.6. Tanım

k$\geq$ 1 olacak şekilde herhangi bir tamsayı ve n$\geq$ 1 için, başlangıç şartları $F_{k,0}=0$ ve $F_{k,1}=1$ olmak üzere

$$F_{k,n+1} = k \cdot F_{k,n} + F_{k,n-1} \tag{2.9}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan diziye k-Fibonacci dizisi denir ve $\{F_{k,n}\}_{n\in N}$ şeklinde gösterilir. k-Fibonacci dizisinin her bir elemanına k-Fibonacci sayısı denir [4].

Çizelge 2.2. k-Fibonacci dizisinin ilk altı terimi

n	0	1	2	3	4	5	6
$F_{k,n}$	0	1	k	k^2+1	k^3+2k	k^4+3k^2+1	k^5+4k^3+3k

2.7. Tanım

$n\geq$ 4 için başlangıç şartları $M_0 = M_1 = 0$ ve $M_2 = M_3 = 1$ olmak üzere

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-2} + M_{n-3} + M_{n-4} \tag{2.10}$$

ile tanımlanan diziye Tetranacci dizisi denir ve $\{M_n\}$ ile gösterilir. Tetranacci dizisinin her bir elemanına, Tetranacci sayısı denir [1].

Aşağıda tanımı verilen diziler Waddill tarafından Tetranacci dizisinin eş dizileri olarak adlandırılmıştır.

2.8. Tanım

i) $n \geq 4$ için başlangıç şartları $N_0 = N_2 = 0$ ve $N_1 = N_3 = 1$ olmak üzere

$$N_n = N_{n-1} + N_{n-2} + N_{n-3} + N_{n-4} \tag{2.11}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan dizi $\{N_n\}$ ile gösterilir [1].

ii) $n \geq 4$ için başlangıç şartları $S_0 = S_3 = 1$, $S_1 = S_2 = 0$ olmak üzere

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3} + S_{n-4} \tag{2.12}$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlanan dizi $\{S_n\}$ ile gösterilir [1].

2.9. Teorem

Tetranacci ve eş dizileri arasında

i) $n \geq 3$ için

$$N_n = M_{n-1} + M_{n-2} + M_{n-3} \tag{2.13}$$

ii) $n \geq 2$ için

$$S_n = M_{n-1} + M_{n-2} \tag{2.14}$$

şeklinde bir ilişki vardır [1].

Çizelge 2.3. Tetranacci ve eş dizilerinin ilk sekiz terimi

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
M_n	0	0	1	1	2	4	8	15	29
N_n	0	1	0	1	2	4	7	14	27
S_n	1	0	0	1	2	3	6	12	23

2.10. Tanım

$n \geq 4$ için μ_0, μ_1, μ_2, μ_3 başlangıç şartları keyfi tamsayılar olmak üzere

$$\mu_n = \mu_{n-1} + \mu_{n-2} + \mu_{n-3} + \mu_{n-4} \tag{2.15}$$

ile tanımlanan diziye genelleştirmiş Tetranacci dizisi denir ve $\{\mu_n\}$ ile gösterilir [1].

Genelleştirilmiş Tetranacci dizisi, bazı yazarlar tarafından Tetranacci-Benzeri dizi olarak da adlandırılmıştır [6].

Tetranacci dizisi için Teorem 2.2 ile verilen Q-Matrisine denk bir matris, aşağıdaki gibi tanımlanmıştır ve T matrisi olarak isimlendirilmiştir. Bu matris, Waddill'in yaptığı araştırmada Tetranacci dizisine ait pek çok özelliğin bulunmasında kullanılmıştır [1].

2.11. Tanım

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

şeklindedir [1].

Not: Tanım 2.7 ile verilen indirgeme bağıntısı kullanılarak $n < 0$ için

$$M_n = M_{n+4} - M_{n+3} - M_{n+2} - M_{n+1} \tag{2.17}$$

olduğu görülür [1].

2.12. Teorem

i) $\{M_n\}$ dizisinin elemanları için

$$\begin{bmatrix} M_n \\ M_{n-1} \\ M_{n-2} \\ M_{n-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-3} \cdot \begin{bmatrix} M_3 \\ M_2 \\ M_1 \\ M_0 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

ii) $\{\mu_n\}$ dizisinin elemanları için

$$\begin{bmatrix} \mu_n \\ \mu_{n-1} \\ \mu_{n-2} \\ \mu_{n-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-3} . \begin{bmatrix} \mu_3 \\ \mu_2 \\ \mu_1 \\ \mu_0 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

iii) T matrisi için

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} M_{n+2} & N_{n+2} & S_{n+2} & M_{n+1} \\ M_{n+1} & N_{n+1} & S_{n+1} & M_n \\ M_n & N_n & S_n & M_{n-1} \\ M_{n-1} & N_{n-1} & S_{n-1} & M_{n-2} \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

eşitlikleri sağlanır [1].

Aşağıda verilen genelleştirme ile genelleştirilmiş Tetranacci dizisinin terimlerini hesaplamak için alternatif bir yol verilmiştir.

2.13. Teorem

$$\mu_n = M_{n-1}\mu_3 + N_{n-1}\mu_2 + S_{n-1}\mu_1 + M_{n-2}\mu_0 \tag{2.21}$$

dir [1].

Tetranacci dizisinin çoğu özelliği, Fibonacci dizisinin özellikleri kadar kolay bulunamamaktadır [1]. Teorem 2.5 ile aşağıda Tetranacci dizisi için verilen Binet formülü bu durumlardan biri görülebilir.

2.14. Teorem

Tetranacci dizisinin Binet formülü

$$M_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n + A_3 r_3^n + A_4 r_4^n \tag{2.22}$$

şeklindedir. Burada A_i ler sabit, r_i ler

$$x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0 \tag{2.23}$$

karakteristik denkleminin dört farklı köküdür. A_i ler ve r_i ler hesaplandığında ortaya çıkan formül oldukça uzun ve ağır olduğundan açık hali yazılmamıştır μ_n için Binet formülü yukardaki ifade ile aynıdır, tek fark A_i lerin $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ lere bağlı birer fonksiyon olmasıdır [1].

2.15. Tanım

$a_0, a_1, a_2, \ldots$ bir reel sayı dizisi olsun.

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{2.24}$$

ifadesine $\{a_n\}$ dizisinin *üreteç fonksiyonu* denir [2].

3. k-TETRANACCİ DİZİLERİ İÇİN TEMEL ÖZELLİKLER

Bu bölümde, bir önceki bölümde özellikleri verilen Tetranacci dizileri genelleştirilecektir.

3.1. Tanım

$k \geq 1$ olacak şekilde herhangi bir tamsayı ve n$\geq$ 4 için

$$M_{k,n} = k \cdot M_{k,n-1} + M_{k,n-2} + M_{k,n-3} + M_{k,n-4} \tag{3.1}$$

indirgeme bağıntısı ve $M_{k,0} = M_{k,1}=0$, $M_{k,2} = M_{k,3} = 1$ başlangıç koşulları ile tanımlanan diziye birinci tip k-Tetranacci dizisi denir ve $\left\{M_{k,n}\right\}_{n\in N}$ şeklinde gösterilir.

k-Tetranacci dizisi, Tetranacci dizisinin bir genelleştirmesi olup her bir farklı k$\geq$ 1 tamsayı değeri için farklı diziler elde edilecektir. Eğer Eş. 3.1 de k =1 alınırsa Eş. 2.10 elde edilir.

Aşağıda *k*-Tetranacci dizisi için iki eş dizisi tanımlanmıştır.

3.2. Tanım

$k \geq 1$ olacak şekilde herhangi bir tamsayı ve n$\geq$ 4 için

$$N_{k,n} = k \cdot N_{k,n-1} + N_{k,n-2} + N_{k,n-3} + N_{k,n-4} \tag{3.2}$$

indirgeme bağıntısı ve $N_{k,0} = N_{k,2} = 0$, $N_{k,1} = N_{k,3} = 1$ başlangıç koşulları ile tanımlanan k-Tetranacci dizisinin birinci eş dizisi denir ve $\left\{N_{k,n}\right\}_{n\in N}$ şeklinde gösterilir.

k-Tetranacci dizisinin birinci eş dizisi, Tanım 2.8 i) ile verilen Tetranacci dizisinin eş dizisinin bir genelleştirmesi olup her bir farklı k$\geq$ 1 tamsayı değeri için farklı diziler elde edilecektir. Eğer Eş. 3.2. de k =1 alınırsa Eş. 2.11 elde edilir.

3.3. Tanım

$k \geq 1$ olacak şekilde herhangi bir tamsayı ve n$\geq$ 4 için

$$S_{k,n} = k \cdot S_{k,n-1} + S_{k,n-2} + S_{k,n-3} + S_{k,n-4} \tag{3.3}$$

indirgeme bağıntısı ve $S_{k,0} = S_{k,3} = 1$, $S_{k,1} = S_{k,2} = 0$ başlangıç koşulları ile tanımlanan k-Tetranacci dizisinin ikinci eş dizisi denir ve $\{S_{k,n}\}_{n\in N}$ şeklinde gösterilir.

k-Tetranacci dizisinin ikinci eş dizisi, Tanım 2.8 ii) ile verilen Tetranacci dizisinin eş bir genelleştirmesi olup her bir farklı k$\geq$ 1 tamsayı değeri için farklı diziler elde edilecektir. Eğer Eş. 3.3 te k =1 alınırsa Eş. 2.12 elde edilir.

3.4. Tanım

$k \geq 1$ olacak şekilde herhangi bir tamsayı ve n$\geq$ 4 için

$$G_{k,n} = k \cdot G_{k,n-1} + G_{k,n-2} + G_{k,n-3} + G_{k,n-4} \tag{3.4}$$

indirgeme bağıntısı ve $G_{k,0} = G_{k,1} = G_{k,2} = 0$, $G_{k,3} = 1$ başlangıç koşulları ile tanımlanan ikinci tip k-Tetranacci dizisi denir ve $\{G_{k,n}\}_{n\in N}$ şeklinde gösterilir.

Eğer Eş 3.4 de k =1 alınırsa Tanım 2.7 ve Eş. 2.17 den $G_{1,0} = M_{-1} = 0$, $G_{2,0} = M_0 = 0$, $G_{3,0} = M_2 = 1$ ve $G_{4,0} = M_3 = 1$ olduğu görülür.

Çizelge 3.1. Birinci ve ikinci tip k-Tetranacci dizileri ile eş dizilerinin ilk altı terimi

n	0	1	2	3	4	5	6
$M_{k,n}$	0	0	1	1	$k+1$	k^2+k+2	k^3+k^2+3k+3
$N_{k,n}$	0	1	0	1	$k+1$	k^2+k+2	k^3+k^2+3k+2
$S_{k,n}$	1	0	0	1	$k+1$	k^2+k+1	k^3+k^2+2k+2
$G_{k,n}$	0	0	0	1	k	k^2+1	k^3+2k+1

3.5. Tanım

k$\geq$ 1 olacak şekilde herhangi bir tamsayı ve n$\geq$ 4 için

$$\mu_{k,n} = k \cdot \mu_{k,n-1} + \mu_{k,n-2} + \mu_{k,n-3} + \mu_{k,n-4} \tag{3.5}$$

indirgeme bağıntısı ve başlangıç koşulları $\mu_{k,0}, \mu_{k,1}, \mu_{k,2}, \mu_{k,3}$ keyfi tamsayıları ile tanımlanan diziye genelleştirilmiş k-Tetranacci dizisi denir ve $\left\{\mu_{k,n}\right\}_{n\in N}$ şeklinde gösterilir.

Genelleştirilmiş k-Tetranacci dizisi, genelleştirilmiş Tetranacci dizisinin bir genelleştirmesi olup her bir farklı $k\geq 1$ tamsayı değeri için farklı diziler elde edilecektir. Eğer Eş. 3.5 te k=1 alınırsa Eş. 2.15 elde edilir.

Not: $\left\{M_{k,n}\right\}_{n\in N}$, $\left\{N_{k,n}\right\}_{n\in N}$, $\left\{S_{k,n}\right\}_{n\in N}$ ve $\left\{G_{k,n}\right\}_{n\in N}$ ile verilen dizilerin $\left\{\mu_{k,n}\right\}_{n\in N}$ genelleştirilmiş *k*-Tetranacci dizisinin özel bir hali oldukları görülmektedir. Dolayısıyla $\left\{\mu_{k,n}\right\}_{n\in N}$ genelleştirilmiş *k*-Tetranacci dizisi için verilen her bir özellik aslında bu dizilerin her biri için geçerlidir.

3.6. Teorem

$k\geq 1$ ve $n\geq 4$ için $\left\{M_{k,n}\right\}_{n\in N}$ birinci tip k-Tetranacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$M(x)=\frac{x^2\cdot[1+x(1-k)]}{1-kx-x^2-x^3-x^4} \tag{3.6}$$

şeklindedir.

İspat

Tanım 2.15 ten k-Tetranacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$M(x)=\sum_{n=0}^{\infty}M_{k,n}x^n=M_{k,0}+M_{k,1}x+M_{k,2}x^2+M_{k,3}x^3+M_{k,4}x^4+\ldots+M_{k,n}x^n+\ldots$$

şeklindedir. O halde

$$kxM(x)=\sum_{n=0}^{\infty}kM_{k,n}x^{n+1}$$

şeklindedir.

$$kxM(x)=kM_{k,0}x+kM_{k,1}x^2+kM_{k,2}x^3+kM_{k,3}x^4+kM_{k,4}x^5+\ldots+kM_{k,n-1}x^n+\ldots$$

eşitliği elde edilecektir. Benzer düzenleme aşağıdaki eşitliklerde yapılırsa

$$x^2M(x)=M_{k,0}x^2+M_{k,1}x^3+M_{k,2}x^4+M_{k,3}x^5+M_{k,4}x^6+\ldots+M_{k,n-2}x^n+\ldots$$

$$x^3M(x)=M_{k,0}x^3+M_{k,1}x^4+M_{k,2}x^5+M_{k,3}x^6+M_{k,4}x^7+\ldots+M_{k,n-3}x^n+\ldots$$

$$x^4M(x)=M_{k,0}x^4+M_{k,1}x^5+M_{k,2}x^6+M_{k,3}x^7+M_{k,4}x^8+\ldots+M_{k,n-4}x^n+\ldots$$

olacaktır. Bulunan bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılarak

$$\begin{aligned}M(x)-kxM(x)-x^2M(x)-x^3M(x)-x^4M(x)=&M_{k,0}+(M_{k,1}-kM_{k,0})x+(M_{k,2}-kM_{k,1}-M_{k,0})x^2\\&+(M_{k,3}-kM_{k,2}-M_{k,1}-M_{k,0})x^3\\&+(M_{k,4}-kM_{k,3}-M_{k,2}-M_{k,1}-M_{k,0})x^4\\&+(M_{k,5}-kM_{k,4}-M_{k,3}-M_{k,2}-M_{k,1})x^5+\ldots\end{aligned}$$

olduğu görülür. k-Tetranacci dizisinin tanımı gereği ve dizinin başlangıç şartları $M_{k,0}=M_{k,1}=0$ ve $M_{k,2}=M_{k,3}=1$ olduğundan

$$\begin{aligned}M(x)\cdot(1-kx-x^2-x^3-x^4)&=0+0\cdot x+(1-k\cdot 0-0)\cdot x^2+(1-k\cdot 1-0-0)\cdot x^3\\&=x^2+(1-k)x^3\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla k-Tetranacci dizisi için üreteç fonksiyonu

$$M(x)=\frac{x^2+(1-k)\cdot x^3}{1-kx-x^2-x^3-x^4}$$

şeklinde elde edilir.

3.7. Teorem

$k\geq 1$ ve $n\geq 4$ olmak üzere

i) İkinci tip k-Tetranacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G(x)=\frac{x^3}{1-kx-x^2-x^3-x^4} \tag{3.7}$$

ii) $\{N_{k,n}\}_{n\in N}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$N(x)=\frac{x(1-k)}{1-kx-x^2-x^3-x^4} \tag{3.8}$$

iii) $\{S_{k,n}\}_{n\in N}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$S(x)=\frac{1-kx-x^2}{1-kx-x^2-x^3-x^4} \tag{3.9}$$

şeklindedir.

İspat

Bu teoremin ispatı, Teorem 3.6 nın ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Eş. 3.6, Eş. 3.7, Eş. 3.8 ve Eş. 3.9 gözönüne alınarak aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

3.8. Teorem

$k \geq 1$ ve $n \geq 4$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i) $M(x) = \dfrac{G(x) \cdot [1 + x(1-k)]}{x}$ (3.10)

ii) $N(x) = \dfrac{M(x) - G(x)}{x^2}$ (3.11)

iii) $N(x) = \dfrac{G(x) \cdot [1 - kx]}{x^2}$ (3.12)

iv) $S(x) = \dfrac{N(x) - G(x)}{x}$ (3.13)

v) $S(x) = \dfrac{G(x) \cdot [1 - kx - x^2]}{x^3}$ (3.14)

3.9. Teorem

Aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i) $n \geq 3$ için

$M_{k,n} = G_{k,n} + G_{k,n-1} + G_{k,n-2} + G_{k,n-3}$ (3.15)

ii) $n \geq 2$ için

$N_{k,n} = G_{k,n} + G_{k,n-1} + G_{k,n-2}$ (3.16)

iii) $n \geq 1$ için

$S_{k,n} = G_{k,n} + G_{k,n-1}$ (3.17)

iv) $n \geq 1$ için

$M_{k,n} = N_{k,n} + N_{k,n-1} - S_{k,n-1}$ (3.18)

v) $n \geq 2$ için

$M_{k,n} = S_{k,n} + S_{k,n-2}$ (3.19)

İspat

i) Eş. 3.10 da $M(x)=\sum_{n=0}^{\infty} M_{k,n}x^n$ ve $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty} G_{k,n}x^n$ olarak alındığında

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{k,n}x^n = \frac{1}{x}\cdot \sum_{n=0}^{\infty} G_{k,n}x^n + (1-k)\cdot \sum_{n=0}^{\infty} G_{k,n}x^n$$

bulunur. Son eşitliğin her iki yanı x ile çarpılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{k,n}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_{k,n}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (1-k)G_{k,n}x^{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_{k,n}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} G_{k,n}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (1-k)G_{k,n}x^{n+1}$$

$$M_{k,0}x + M_{k,1}x^2 + \ldots + M_{k,n-1}x^n + \ldots = G_{k,0} + G_{k,1}x + \ldots + G_{k,n}x^n + \ldots + (1-k)G_{k,0}x$$
$$+(1-k)G_{k,1}x^2 + \ldots + (1-k)G_{k,n}x^n + \ldots$$

veya

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_{k,n-1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} G_{k,n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (1-k)G_{k,n-1}x^n$$

$$= G_{k,0}x + \sum_{n=1}^{\infty} G_{k,n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (1-k)G_{k,n-1}x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ G_{k,n} + (1-k)G_{k,n-1} \right\} x^n$$

elde edilir, buradan da n$\geq$ 1 olmak üzere $M_{k,n-1} = G_{k,n} + (1-k)G_{k,n-1}$ olduğu kolayca görülür. Tanım 3.4 gereği, n$\geq$ 4 için

$$M_{k,n-1} = G_{k,n-1} + G_{k,n-2} + G_{k,n-3} + G_{k,n-4}$$

bulunur. $n \to n+1$ alınırsa istenen ifade elde edilir.

ii) Eş. 3.12 de

$$N(x)=\sum_{n=0}^{\infty} N_{k,n}x^n \text{ ve } G(x)=\sum_{n=0}^{\infty} G_{k,n}x^n$$

olarak alındığında istenen ifade elde edilir.

iii) Eş. 3.14 te

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} S_{k,n}x^n \text{ ve } G(x)=\sum_{n=0}^{\infty} G_{k,n}x^n$$

olarak alındığında istenen ifade elde edilir.

iv) Eş. 3.15, Eş. 3.16 ve Eş. 3.17 ifadeleri göz önüne alınarak kolayca görülür.

v) Eş. 3.15 ve Eş. 3.17 ifadeleri göz önüne alınarak yine istenilen kolayca elde edilir.

Genelleştirilmiş k-Tetranacci dizileri için bazı toplam formülleri aşağıdaki teoremle verilebilir:

3.10. Teorem

i) $n \geq 2$ için

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_{k,i} = \frac{1}{k+2} \cdot \left[(k+1)\mu_{k,0} + k\mu_{k,1} + (k-1)\mu_{k,2} - \mu_{k,3} + \mu_{k,n-2} + 2\mu_{k,n-1} + 3\mu_{k,n} + \mu_{k,n+1} \right] \tag{3.20}$$

ii) $n \geq 1$ için

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_{k,2i} = \frac{1}{k(k+2)} \cdot [(k+1)^2 \mu_{k,0} - k\mu_{k,1} + (k^2+k+1)\mu_{k,2} - (k+1)\mu_{k,3} - \mu_{k,2n-2} + k\mu_{k,2n-1} + (k-1)\mu_{k,2n} + (k+1)\mu_{k,2n+1}] \tag{3.21}$$

iii) $n \geq 1$ için

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_{k,2i+1} = \frac{1}{k(k+2)} \cdot [-(k+1)\mu_{k,0} + k(k+1)\mu_{k,1} - (2k+1)\mu_{k,2} + \mu_{k,3} - \mu_{k,2n-1} + k\mu_{k,2n} + (k-1)\mu_{k,2n+1} + (k+1)\mu_{k,2n+2}] \tag{3.22}$$

iv) $n \geq 1$ için

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_{k,3i} = \frac{1}{(k+2)\cdot(k^2+k+1)} \cdot [(k^3+2k^2+k+1)\mu_{k,0} - (k^2+2k+2)\mu_{k,1} - (k^2+k+1)\mu_{k,2} + (k+1)\mu_{k,3} - (k+1)\mu_{k,3n-1} + k(k+1)\mu_{k,3n} + (k^2+k+1)\mu_{k,3n+1} + \mu_{k,3n+2}] \tag{3.23}$$

v) $n \geq 0$ için

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_{k,3i+1} = \frac{1}{(k+2)\cdot(k^2+k+1)} \cdot [(k+1)\mu_{k,0} - (k^3+2k^2+2k+2)\mu_{k,1} - (k^2+k+1)\mu_{k,2} + \mu_{k,3n} - k\mu_{k,3n+1} + (k^2+k+1)\mu_{k,3n+2} + (k^2+2k+1)\mu_{k,3n+3}] \tag{3.24}$$

vi) $n \geq 0$ için

$$\sum_{i=0}^{n} \mu_{k,3i+2} = \frac{1}{(k+2)\cdot(k^2+k+1)} \cdot [-\mu_{k,0} - k\mu_{k,1} - (k^3+2k^2+2k+1)\mu_{k,2} - (k^2+2k+1)\mu_{k,3} + \mu_{k,3n} - k\mu_{k,3n+1} + (k^2+k+1)\mu_{k,3n+2} + (k^2+2k+1)\mu_{k,3n+3}] \tag{3.25}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

i) Tanım 3.5 ile verilen $\left\{\mu_{k,n}\right\}_{n\in N}$ dizisinin tanımından aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$\mu_{k,4} = k\cdot\mu_{k,3} + \mu_{k,2} + \mu_{k,1} + \mu_{k,0}$

$\mu_{k,5} = k\cdot\mu_{k,4} + \mu_{k,3} + \mu_{k,2} + \mu_{k,1}$

$\mu_{k,6} = k\cdot\mu_{k,5} + \mu_{k,4} + \mu_{k,3} + \mu_{k,2}$

…

$\mu_{k,n+1} = k\cdot\mu_{k,n} + \mu_{k,n-1} + \mu_{k,n-2} + \mu_{k,n-3}$

Bu eşitlikler taraf tarafa toplandığında

$$\sum_{i=0}^{n}\mu_{k,i} - \mu_{k,0} - \mu_{k,1} - \mu_{k,2} - \mu_{k,3} + \mu_{k,n+1} = k\left(\sum_{i=0}^{n}\mu_{k,i} - \mu_{k,0} - \mu_{k,1} - \mu_{k,2}\right) + \sum_{i=0}^{n}\mu_{k,i} - \mu_{k,0}$$
$$-\mu_{k,1} - \mu_{k,n} + \sum_{i=0}^{n}\mu_{k,i} - \mu_{k,0} - \mu_{k,n-1} - \mu_{k,n}$$
$$+\sum_{i=0}^{n}\mu_{k,i} - \mu_{k,0} - \mu_{k,n-2} - \mu_{k,n-1} - \mu_{k,n}$$

bulunur ve düzenlenirse

$$(k+2)\sum_{i=0}^{n}\mu_{k,i} = (k+1)\mu_{k,0} + k\mu_{k,1} + (k-1)\mu_{k,2} - \mu_{k,3} + \mu_{k,n-2} + 2\mu_{k,n-1} + 3\mu_{k,n} + \mu_{k,n+1}$$

elde edilir. $k \geq 1$ olduğundan $(k+2)$ ifadesi hiçbir k değeri için sıfır olamaz, bu durumda

$$\sum_{i=0}^{n}\mu_{k,i} = \frac{1}{k+2}\cdot\left[(k+1)\mu_{k,0} + k\mu_{k,1} + (k-1)\mu_{k,2} - \mu_{k,3} + \mu_{k,n-2} + 2\mu_{k,n-1} + 3\mu_{k,n} + \mu_{k,n+1}\right]$$

eşitliği elde edilir.

Eşitliklerin geri kalanı tümevarım yöntemi ile de ispatlanabilir.

ii) $n=1$ için

$$\sum_{i=0}^{1}\mu_{k,2i} = \frac{1}{k(k+2)}\cdot[(k+1)^2\mu_{k,0} - k\mu_{k,1} + (k^2+k+1)\mu_{k,2} - (k+1)\mu_{k,3} - \mu_{k,0} + k\mu_{k,1}$$
$$+(k-1)\mu_{k,2} + (k+1)\mu_{k,3}]$$
$$= \frac{1}{k(k+2)}\cdot[(k^2+2k)\mu_{k,0} + (k^2+2k)\mu_{k,2}] = \mu_{k,0} + \mu_{k,2}$$

olup doğrudur.

n= s pozitif tamsayısı için doğru olsun.

$$\sum_{i=0}^{s} \mu_{k,2i} = \frac{1}{k(k+2)} \cdot [(k+1)^2 \mu_{k,0} - k\mu_{k,1} + (k^2+k+1)\mu_{k,2} - (k+1)\mu_{k,3} - \mu_{k,2s-2} + k\mu_{k,2s-1}$$
$$+(k-1)\mu_{k,2s} + (k+1)\mu_{k,2s+1}]$$

O halde

$$k(k+2)\mu_{k,2s+2} + \sum_{i=0}^{s} \mu_{k,2i} = \frac{1}{k(k+2)} \cdot [(k+1)^2 \mu_{k,0} - k\mu_{k,1} + (k^2+k+1)\mu_{k,2} - (k+1)\mu_{k,3}$$
$$-\mu_{k,2s-2} + k\mu_{k,2s-1} + (k-1)\mu_{k,2s} + (k+1)\mu_{k,2s+1} + k(k+2)\mu_{k,2s+2}]$$

Tanım 3.5 gereği $\left\{\mu_{k,n}\right\}_{n\in N}$ dizisinin tanımı gereği

$$k(k+2)\mu_{k,2s+2} + \sum_{i=0}^{s} \mu_{k,2i} = \frac{1}{k(k+2)} \cdot [(k+1)^2 \mu_{k,0} - k\mu_{k,1} + (k^2+k+1)\mu_{k,2} - (k+1)\mu_{k,3}$$
$$-\mu_{k,2s} + k\mu_{k,2s+1} + (k-1)\mu_{k,2s+2} + (k+1)\mu_{k,2s+3}]$$

$$k(k+2)\mu_{k,2s+2} + \sum_{i=0}^{s} \mu_{k,2i} = \sum_{i=0}^{s+1} \mu_{k,2i}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

4. k-TETRANACCİ DİZİLERİNİN MATRİS GÖSTERİMİ VE BAZI ÖZELLİKLERİ

4.1. Tanım

k-Tetranacci dizisinin matrisi T_k ile gösterilir ve

$$T_k = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $k = 1$ için Eş. 2.16 da verilen T matrisinin elde edildiğini hatırlatalım.

4.2. Teorem

n$\geq$ 3 için

$$\begin{bmatrix} M_{k,n} \\ M_{k,n-1} \\ M_{k,n-2} \\ M_{k,n-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-3} \cdot \begin{bmatrix} M_{k,3} \\ M_{k,2} \\ M_{k,1} \\ M_{k,0} \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

k değeri sabit tutularak n üzerinde tümevarım yapılarak görülür.

$n = 3$ için

$$\begin{bmatrix} M_{k,3} \\ M_{k,2} \\ M_{k,1} \\ M_{k,0} \end{bmatrix} = I \cdot \begin{bmatrix} M_{k,3} \\ M_{k,2} \\ M_{k,1} \\ M_{k,0} \end{bmatrix}$$

olup sağlandığı açıktır.

$n = 4$ için

$$\begin{bmatrix} M_{k,4} \\ M_{k,3} \\ M_{k,2} \\ M_{k,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} M_{k,3} \\ M_{k,2} \\ M_{k,1} \\ M_{k,0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} kM_{k,3} + M_{k,2} + M_{k,1} + M_{k,0} \\ M_{k,3} \\ M_{k,2} \\ M_{k,1} \end{bmatrix}$$

dır ve Tanım 3.1 gereği eşitlik sağlanır.

$n = t$ için doğruluğu kabul edildiğinde aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} M_{k,t} \\ M_{k,t-1} \\ M_{k,t-2} \\ M_{k,t-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{t-3} . \begin{bmatrix} M_{k,3} \\ M_{k,2} \\ M_{k,1} \\ M_{k,0} \end{bmatrix}$$

Bu matris eşitliği sol taraftan T_k matrisi ile genişletildiğinde, Tanım 3.1. gereği aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{bmatrix} M_{k,t+1} \\ M_{k,t} \\ M_{k,t-1} \\ M_{k,t-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{t-2} . \begin{bmatrix} M_{k,3} \\ M_{k,2} \\ M_{k,1} \\ M_{k,0} \end{bmatrix}$$

Bu da eşitliğin $n = t + 1$ için doğru olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2 ile verilen eşitlikte $k = 1$ için Teorem 2.12 i) ile verilen ifade elde edilmektedir. Ayrıca Teorem 4.2 ile verilen eşitliğin başlangıç koşullarından bağımsız olması, bu ifadenin genelleştirilmiş *k*-Tetranacci dizisi için de yazılabilmesini sağlar.

4.3. Teorem

n$\geq$ 3 için aşağıdaki matris eşitliği sağlanır.

$$\begin{bmatrix} \mu_{k,n} \\ \mu_{k,n-1} \\ \mu_{k,n-2} \\ \mu_{k,n-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-3} . \begin{bmatrix} \mu_{k,3} \\ \mu_{k,2} \\ \mu_{k,1} \\ \mu_{k,0} \end{bmatrix} \qquad (4.3)$$

İspat

k değeri sabit tutularak n üzerinde tümevarım yapılarak ispat kolayca görülür.

Teorem 4.3 ile verilen eşitlikte $k=1$ için Teorem 2.12 ii) ile verilen eşitlik elde edilmektedir.

4.4. Teorem

n$\geq$ 1 için

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} G_{k,n+3} & N_{k,n+2} & S_{k,n+2} & G_{k,n+2} \\ G_{k,n+2} & N_{k,n+1} & S_{k,n+1} & G_{k,n+1} \\ G_{k,n+1} & N_{k,n} & S_{k,n} & G_{k,n} \\ G_{k,n} & N_{k,n-1} & S_{k,n-1} & G_{k,n-1} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Yine ispat n üzerinde tümevarımla yapılabilir.

Teorem 3.9 ile verilen ifadeler kullanılarak Teorem 4.4 eşitliğinin sağ tarafının düzenlenmesi ile aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

4.5. Teorem

Aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i) n$\geq$ 2 için

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} M_{k,n+3}-N_{k,n+2} & N_{k,n+2} & S_{k,n+2} & M_{k,n+2}-N_{k,n+1} \\ M_{k,n+2}-N_{k,n+1} & N_{k,n+1} & S_{k,n+1} & M_{k,n+1}-N_{k,n} \\ M_{k,n+1}-N_{k,n} & N_{k,n} & S_{k,n} & M_{k,n}-N_{k,n-1} \\ M_{k,n}-N_{k,n-1} & N_{k,n-1} & S_{k,n-1} & M_{k,n-1}-N_{k,n-2} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

ii) n$\geq$ 1 için

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} M_{k,n+6}-N_{k,n+6} & N_{k,n+2} & S_{k,n+2} & M_{k,n+5}-N_{k,n+5} \\ M_{k,n+5}-N_{k,n+5} & N_{k,n+1} & S_{k,n+1} & M_{k,n+4}-N_{k,n+4} \\ M_{k,n+4}-N_{k,n+4} & N_{k,n} & S_{k,n} & M_{k,n+3}-N_{k,n+3} \\ M_{k,n+3}-N_{k,n+3} & N_{k,n-1} & S_{k,n-1} & M_{k,n+2}-N_{k,n+2} \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

iii) $n \geq 2$ için

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} N_{k,n+3}-S_{k,n+2} & N_{k,n+2} & S_{k,n+2} & N_{k,n+2}-S_{k,n+1} \\ N_{k,n+2}-S_{k,n+1} & N_{k,n+1} & S_{k,n+1} & N_{k,n+1}-S_{k,n} \\ N_{k,n+1}-S_{k,n} & N_{k,n} & S_{k,n} & N_{k,n}-S_{k,n-1} \\ N_{k,n}-S_{k,n-1} & N_{k,n-1} & S_{k,n-1} & N_{k,n-1}-S_{k,n-2} \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

iv) $n \geq 1$ için

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} N_{k,n+5}-S_{k,n+5} & N_{k,n+2} & S_{k,n+2} & N_{k,n+4}-S_{k,n+4} \\ N_{k,n+4}-S_{k,n+4} & N_{k,n+1} & S_{k,n+1} & N_{k,n+3}-S_{k,n+3} \\ N_{k,n+3}-S_{k,n+3} & N_{k,n} & S_{k,n} & N_{k,n+2}-S_{k,n+2} \\ N_{k,n+2}-S_{k,n+2} & N_{k,n-1} & S_{k,n-1} & N_{k,n+1}-S_{k,n+1} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

v) $n \geq 3$ için

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} S_{k,n+3}-N_{k,n+2}+S_{k,n+1} & N_{k,n+2} & S_{k,n+2} & S_{k,n+2}-N_{k,n+1}+S_{k,n} \\ S_{k,n+2}-N_{k,n+1}+S_{k,n} & N_{k,n+1} & S_{k,n+1} & S_{k,n+1}-N_{k,n}+S_{k,n-1} \\ S_{k,n+1}-N_{k,n}+S_{k,n-1} & N_{k,n} & S_{k,n} & S_{k,n}-N_{k,n-1}+S_{k,n-2} \\ S_{k,n}-N_{k,n-1}+S_{k,n-2} & N_{k,n-1} & S_{k,n-1} & S_{k,n-1}-N_{k,n}+S_{k,n-3} \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

İspat

k değeri sabit tutularak n üzerinde tümevarım yapılarak görülür.

4.6. Teorem

$n \geq 1$ ve $p \geq 3$ olacak şekilde keyfi bir p tamsayısı için

$$\mu_{k,n+p} = G_{k,n+3}\mu_{k,p} + N_{k,n+2}\mu_{k,p-1} + S_{k,n+2}\mu_{k,p-2} + G_{k,n+2}\mu_{k,p-3} \tag{4.10}$$

ve $n \geq 1$ için

$$\mu_{k,n} = G_{k,n}\mu_{k,3} + N_{k,n-1}\mu_{k,2} + S_{k,n-1}\mu_{k,1} + G_{k,n-1}\mu_{k,0} \tag{4.11}$$

dir.

İspat

Teorem 4.3 göz önüne alınarak

$$\begin{bmatrix} \mu_{k,n+p} \\ \mu_{k,n+p-1} \\ \mu_{k,n+p-2} \\ \mu_{k,n+p-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+p-3} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{k,3} \\ \mu_{k,2} \\ \mu_{k,1} \\ \mu_{k,0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n} \cdot \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{p-3} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{k,3} \\ \mu_{k,2} \\ \mu_{k,1} \\ \mu_{k,0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G_{k,n+3} & N_{k,n+2} & S_{k,n+2} & G_{k,n+2} \\ G_{k,n+2} & N_{k,n+1} & S_{k,n+1} & G_{k,n+1} \\ G_{k,n+1} & N_{k,n} & S_{k,n} & G_{k,n} \\ G_{k,n} & N_{k,n-1} & S_{k,n-1} & G_{k,n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{k,p} \\ \mu_{k,p-1} \\ \mu_{k,p-2} \\ \mu_{k,p-3} \end{bmatrix}$$

yazılır. Bu matris eşitliğinin 1. satırları göz önüne alındığında $p \geq 3$ için

$$\mu_{k,n+p} = G_{k,n+3}\mu_{k,p} + N_{k,n+2}\mu_{k,p-1} + S_{k,n+2}\mu_{k,p-2} + G_{k,n+2}\mu_{k,p-3}$$

olduğu görülür.

Aynı eşitlikte 4. satırlar göz önüne alındığında $p \geq 3$ için

$$\mu_{k,n+p-3} = G_{k,n}\mu_{k,p} + N_{k,n-1}\mu_{k,p-1} + S_{k,n-1}\mu_{k,p-2} + G_{k,n-1}\mu_{k,p-3}$$

olacaktır. Son eşitlikte p=3 alınırsa

$$\mu_{k,n} = G_{k,n} \cdot \mu_{k,3} + N_{k,n-1} \cdot \mu_{k,2} + S_{k,n-1} \cdot \mu_{k,1} + G_{k,n-1} \cdot \mu_{k,0}$$

bulunur.

Bulunan bu son eşitlik yardımıyla herhangi bir n tamsayısı için $\mu_{k,n}$ ifadesi $\mu_{k,0}$, $\mu_{k,1}$, $\mu_{k,2}$, $\mu_{k,3}$ cinsinden ifade edilebilecektir.

4.7. Teorem

$n \geq 3$ ve $p \geq 1$ olacak şekilde, keyfi bir p tamsayı için

$$\mu_{k,n+p} = G_{k,p+3}\mu_{k,n} + N_{k,p+2}\mu_{k,n-1} + S_{k,p+2}\mu_{k,n-2} + G_{k,p+2}\mu_{k,n-3} \tag{4.12}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Teorem 4.6 ile benzer şekilde ispatlanabilir.

Not: Teorem 4.7 deki eşitlikte p=1 alındığında n$\geq$ 3 için

$$\mu_{k,n+1} = G_{k,4}\mu_{k,n} + N_{k,3}\mu_{k,n-1} + S_{k,3}\mu_{k,n-2} + G_{k,3}\mu_{k,n-3} \tag{4.13}$$

eşitliği sağlanır.

4.8. Teorem

n$\geq$ 1 için

$$\begin{vmatrix} G_{k,n+3} & N_{k,n+2} & S_{k,n+2} & G_{k,n+2} \\ G_{k,n+2} & N_{k,n+1} & S_{k,n+1} & G_{k,n+1} \\ G_{k,n+1} & N_{k,n} & S_{k,n} & G_{k,n} \\ G_{k,n} & N_{k,n-1} & S_{k,n-1} & G_{k,n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n \tag{4.14}$$

dir.

İspat

Teorem 4.4 te verilen eşitliğin her iki yanında determinant alınırsa

$$\det T_k^{\,n} = \begin{vmatrix} G_{k,n+3} & N_{k,n+2} & S_{k,n+2} & G_{k,n+2} \\ G_{k,n+2} & N_{k,n+1} & S_{k,n+1} & G_{k,n+1} \\ G_{k,n+1} & N_{k,n} & S_{k,n} & G_{k,n} \\ G_{k,n} & N_{k,n-1} & S_{k,n-1} & G_{k,n-1} \end{vmatrix}$$

bulunur. Ayrıca Tanım 4.1 den T_k matrisinin determinantı alındığında

$$\det T_k = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

elde edilir. Teorem 2.3 gereği $\det T_k^n = (-1)^n$ bulunur. Bu durumda istenen eşitlik elde edilir.

4.9. Teorem

n≥ 4 için

$$\begin{bmatrix} \mu_{k,n+2} & \mu_{k,n+1} & \mu_{k,n} & \mu_{k,n-1} \\ \mu_{k,n+1} & \mu_{k,n} & \mu_{k,n-1} & \mu_{k,n-2} \\ \mu_{k,n} & \mu_{k,n-1} & \mu_{k,n-2} & \mu_{k,n-3} \\ \mu_{k,n-1} & \mu_{k,n-2} & \mu_{k,n-3} & \mu_{k,n-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-4} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{k,6} & \mu_{k,5} & \mu_{k,4} & \mu_{k,3} \\ \mu_{k,5} & \mu_{k,4} & \mu_{k,3} & \mu_{k,2} \\ \mu_{k,4} & \mu_{k,3} & \mu_{k,2} & \mu_{k,1} \\ \mu_{k,3} & \mu_{k,2} & \mu_{k,1} & \mu_{k,0} \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

n üzerinde tümevarımla yapılabilir.

4.10. Teorem

n≥ 4 için

$$\begin{vmatrix} \mu_{k,n+2} & \mu_{k,n+1} & \mu_{k,n} & \mu_{k,n-1} \\ \mu_{k,n+1} & \mu_{k,n} & \mu_{k,n-1} & \mu_{k,n-2} \\ \mu_{k,n} & \mu_{k,n-1} & \mu_{k,n-2} & \mu_{k,n-3} \\ \mu_{k,n-1} & \mu_{k,n-2} & \mu_{k,n-3} & \mu_{k,n-4} \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} \mu_{k,6} & \mu_{k,5} & \mu_{k,4} & \mu_{k,3} \\ \mu_{k,5} & \mu_{k,4} & \mu_{k,3} & \mu_{k,2} \\ \mu_{k,4} & \mu_{k,3} & \mu_{k,2} & \mu_{k,1} \\ \mu_{k,3} & \mu_{k,2} & \mu_{k,1} & \mu_{k,0} \end{vmatrix} \tag{4.16}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

Teorem 4.9 da determinant alınıp Teorem 4.8 den yararlanarak istenen ifade elde edilir.

4.1. Sonuç

n≥ 4 olmak üzere

i) Birinci tip k-Tetranacci dizisi için

$$\begin{vmatrix} M_{k,n+2} & M_{k,n+1} & M_{k,n} & M_{k,n-1} \\ M_{k,n+1} & M_{k,n} & M_{k,n-1} & M_{k,n-2} \\ M_{k,n} & M_{k,n-1} & M_{k,n-2} & M_{k,n-3} \\ M_{k,n-1} & M_{k,n-2} & M_{k,n-3} & M_{k,n-4} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \cdot k(k^2+2k+2) \tag{4.17}$$

ii) İkinci tip k-Tetranacci dizisi için

$$\begin{vmatrix} G_{k,n+2} & G_{k,n+1} & G_{k,n} & G_{k,n-1} \\ G_{k,n+1} & G_{k,n} & G_{k,n-1} & G_{k,n-2} \\ G_{k,n} & G_{k,n-1} & G_{k,n-2} & G_{k,n-3} \\ G_{k,n-1} & G_{k,n-2} & G_{k,n-3} & G_{k,n-4} \end{vmatrix} = (-1)^n \tag{4.18}$$

şeklinde verilen eşitlikler sağlanır.

İspat

i) $\{M_{k,n}\}_{n\in N}$ dizisi, $\{\mu_{k,n}\}_{n\in N}$ dizisinin özel bir hali olduğundan Teorem 4.10 ve Sonuç 4.1 ile verilen ifadelerin $\{M_{k,n}\}_{n\in N}$ dizisi için de geçerli olduğu açıktır. Dolayısıyla $n \geq 4$ için

$$\begin{vmatrix} M_{k,n+2} & M_{k,n+1} & M_{k,n} & M_{k,n-1} \\ M_{k,n+1} & M_{k,n} & M_{k,n-1} & M_{k,n-2} \\ M_{k,n} & M_{k,n-1} & M_{k,n-2} & M_{k,n-3} \\ M_{k,n-1} & M_{k,n-2} & M_{k,n-3} & M_{k,n-4} \end{vmatrix} = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} M_{k,6} & M_{k,5} & M_{k,4} & M_{k,3} \\ M_{k,5} & M_{k,4} & M_{k,3} & M_{k,2} \\ M_{k,4} & M_{k,3} & M_{k,2} & M_{k,1} \\ M_{k,3} & M_{k,2} & M_{k,1} & M_{k,0} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} k^3+k^2+3k+3 & k^2+k+2 & k+1 & 1 \\ k^2+k+2 & k+1 & 1 & 1 \\ k+1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1} \cdot k(k^2+2k+2)$$

elde edilir.

ii) Benzer şekilde yapılır.

Not: Eş. 4.17 ve Eş. 4.18 de determinant değerleri açık halde yazıldığında, bu eşitlikler Teorem 2.4 de verilen Cassini formülüne benzerdir.

4.11. Teorem

$r \geq 1$, $s \geq 1$, $t \geq 1$ keyfi tamsayılar olmak üzere ve $n \geq 3$ için

$$\begin{bmatrix} \mu_{k,n+r} \\ \mu_{k,n+s} \\ \mu_{k,n+t} \\ \mu_{k,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{k,r+3} & N_{k,r+2} & S_{k,r+2} & G_{k,r+2} \\ G_{k,s+3} & N_{k,s+2} & S_{k,s+2} & G_{k,s+2} \\ G_{k,t+3} & N_{k,t+2} & S_{k,t+2} & G_{k,t+2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{k,n} \\ \mu_{k,n-1} \\ \mu_{k,n-2} \\ \mu_{k,n-3} \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

eşitliği elde edilir.

İspat

Sağ taraftaki matris çarpımı yapıldığında ilk üç satırın Teorem 4.7 gereği eşitliği sağlayacağı görülür. Son satır açıktır.

4.12. Teorem

$r \geq 1$, $s \geq 1$, $t \geq 1$ ve $m \geq 3$, $q \geq 3$ keyfi tamsayılar olmak üzere ve $n \geq 3$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{vmatrix} \mu_{k,n+m+r} & \mu_{k,n+p+r} & \mu_{k,n+q+r} & \mu_{k,n+r} \\ \mu_{k,n+m+s} & \mu_{k,n+p+s} & \mu_{k,n+q+s} & \mu_{k,n+s} \\ \mu_{k,n+m+t} & \mu_{k,n+p+t} & \mu_{k,n+q+t} & \mu_{k,n+t} \\ \mu_{k,n+m} & \mu_{k,n+p} & \mu_{k,n+q} & \mu_{k,n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} G_{k,r} & G_{k,r+1} & G_{k,r+2} \\ G_{k,s} & G_{k,s+1} & G_{k,s+2} \\ G_{k,t} & G_{k,t+1} & G_{k,t+2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mu_{k,m+3} & \mu_{k,p+3} & \mu_{k,q+3} & \mu_{k,3} \\ \mu_{k,m+2} & \mu_{k,p+2} & \mu_{k,q+2} & \mu_{k,2} \\ \mu_{k,m+1} & \mu_{k,p+1} & \mu_{k,q+1} & \mu_{k,1} \\ \mu_{k,m} & \mu_{k,p} & \mu_{k,q} & \mu_{k,0} \end{vmatrix} \tag{4.20}$$

İspat

Teorem 4.11 den aşağıdaki matris eşitliği yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} \mu_{k,n+m+r} & \mu_{k,n+p+r} & \mu_{k,n+q+r} & \mu_{k,n+r} \\ \mu_{k,n+m+s} & \mu_{k,n+p+s} & \mu_{k,n+q+s} & \mu_{k,n+s} \\ \mu_{k,n+m+t} & \mu_{k,n+p+t} & \mu_{k,n+q+t} & \mu_{k,n+t} \\ \mu_{k,n+m} & \mu_{k,n+p} & \mu_{k,n+q} & \mu_{k,n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G_{k,r+3} & N_{k,r+2} & S_{k,r+2} & G_{k,r+2} \\ G_{k,s+3} & N_{k,s+2} & S_{k,s+2} & G_{k,s+2} \\ G_{k,t+3} & N_{k,t+2} & S_{k,t+2} & G_{k,t+2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{k,n+m} & \mu_{k,n+p} & \mu_{k,n+q} & \mu_{k,n} \\ \mu_{k,n+m-1} & \mu_{k,n+p-1} & \mu_{k,n+q-1} & \mu_{k,n-1} \\ \mu_{k,n+m-2} & \mu_{k,n+p-2} & \mu_{k,n+q-2} & \mu_{k,n-2} \\ \mu_{k,n+m-3} & \mu_{k,n+p-3} & \mu_{k,n+q-3} & \mu_{k,n-3} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} G_{k,r+3} & N_{k,r+2} & S_{k,r+2} & G_{k,r+2} \\ G_{k,s+3} & N_{k,s+2} & S_{k,s+2} & G_{k,s+2} \\ G_{k,t+3} & N_{k,t+2} & S_{k,t+2} & G_{k,t+2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-3} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{k,m+3} & \mu_{k,p+3} & \mu_{k,q+3} & \mu_{k,3} \\ \mu_{k,m+2} & \mu_{k,p+2} & \mu_{k,q+2} & \mu_{k,2} \\ \mu_{k,m+1} & \mu_{k,p+1} & \mu_{k,q+1} & \mu_{k,1} \\ \mu_{k,m} & \mu_{k,p} & \mu_{k,q} & \mu_{k,0} \end{bmatrix}$$

Teorem 4.3 yardımıyla yukardaki ifade elde edilir. Her iki taraftan determinant alındığında $\det T_k^n = (-1)^n$ olduğundan

$$\begin{vmatrix} \mu_{k,n+m+r} & \mu_{k,n+p+r} & \mu_{k,n+q+r} & \mu_{k,n+r} \\ \mu_{k,n+m+s} & \mu_{k,n+p+s} & \mu_{k,n+q+s} & \mu_{k,n+s} \\ \mu_{k,n+m+t} & \mu_{k,n+p+t} & \mu_{k,n+q+t} & \mu_{k,n+t} \\ \mu_{k,n+m} & \mu_{k,n+p} & \mu_{k,n+q} & \mu_{k,n} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} G_{k,r+3} & N_{k,r+2} & S_{k,r+2} & G_{k,r+2} \\ G_{k,s+3} & N_{k,s+2} & S_{k,s+2} & G_{k,s+2} \\ G_{k,t+3} & N_{k,t+2} & S_{k,t+2} & G_{k,t+2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} \mu_{k,m+3} & \mu_{k,p+3} & \mu_{k,q+3} & \mu_{k,3} \\ \mu_{k,m+2} & \mu_{k,p+2} & \mu_{k,q+2} & \mu_{k,2} \\ \mu_{k,m+1} & \mu_{k,p+1} & \mu_{k,q+1} & \mu_{k,1} \\ \mu_{k,m} & \mu_{k,p} & \mu_{k,q} & \mu_{k,0} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} N_{k,r+2} & S_{k,r+2} & G_{k,r+2} \\ N_{k,s+2} & S_{k,s+2} & G_{k,s+2} \\ N_{k,t+2} & S_{k,t+2} & G_{k,t+2} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} \mu_{k,m+3} & \mu_{k,p+3} & \mu_{k,q+3} & \mu_{k,3} \\ \mu_{k,m+2} & \mu_{k,p+2} & \mu_{k,q+2} & \mu_{k,2} \\ \mu_{k,m+1} & \mu_{k,p+1} & \mu_{k,q+1} & \mu_{k,1} \\ \mu_{k,m} & \mu_{k,p} & \mu_{k,q} & \mu_{k,0} \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} G_{k,r+2}+G_{k,r+1}+G_{k,r} & G_{k,r+2}+G_{k,r+1} & G_{k,r+2} \\ G_{k,s+2}+G_{k,s+1}+G_{k,s} & G_{k,s+2}+G_{k,s+1} & G_{k,s+2} \\ G_{k,t+2}+G_{k,t+1}+G_{k,t} & G_{k,t+2}+G_{k,t+1} & G_{k,t+2} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} \mu_{k,m+3} & \mu_{k,p+3} & \mu_{k,q+3} & \mu_{k,3} \\ \mu_{k,m+2} & \mu_{k,p+2} & \mu_{k,q+2} & \mu_{k,2} \\ \mu_{k,m+1} & \mu_{k,p+1} & \mu_{k,q+1} & \mu_{k,1} \\ \mu_{k,m} & \mu_{k,p} & \mu_{k,q} & \mu_{k,0} \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} G_{k,r} & G_{k,r+1} & G_{k,r+2} \\ G_{k,s} & G_{k,s+1} & G_{k,s+2} \\ G_{k,t} & G_{k,t+1} & G_{k,t+2} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} \mu_{k,m+3} & \mu_{k,p+3} & \mu_{k,q+3} & \mu_{k,3} \\ \mu_{k,m+2} & \mu_{k,p+2} & \mu_{k,q+2} & \mu_{k,2} \\ \mu_{k,m+1} & \mu_{k,p+1} & \mu_{k,q+1} & \mu_{k,1} \\ \mu_{k,m} & \mu_{k,p} & \mu_{k,q} & \mu_{k,0} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n} \cdot \begin{vmatrix} G_{k,r} & G_{k,r+1} & G_{k,r+2} \\ G_{k,s} & G_{k,s+1} & G_{k,s+2} \\ G_{k,t} & G_{k,t+1} & G_{k,t+2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mu_{k,m+3} & \mu_{k,p+3} & \mu_{k,q+3} & \mu_{k,3} \\ \mu_{k,m+2} & \mu_{k,p+2} & \mu_{k,q+2} & \mu_{k,2} \\ \mu_{k,m+1} & \mu_{k,p+1} & \mu_{k,q+1} & \mu_{k,1} \\ \mu_{k,m} & \mu_{k,p} & \mu_{k,q} & \mu_{k,0} \end{vmatrix}$$

elde edilir.

4.2. Sonuç

r≥ 1, s≥ 1, t≥ 1 ve m≥ 3, q≥ 3 keyfi tamsayılar olmak üzere, n≥ 3 için

$$\begin{vmatrix} M_{k,n+m+r} & M_{k,n+p+r} & M_{k,n+q+r} & M_{k,n+r} \\ M_{k,n+m+s} & M_{k,n+p+s} & M_{k,n+q+s} & M_{k,n+s} \\ M_{k,n+m+t} & M_{k,n+p+t} & M_{k,n+q+t} & M_{k,n+t} \\ M_{k,n+m} & M_{k,n+p} & M_{k,n+q} & M_{k,n} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} G_{k,r} & G_{k,r+1} & G_{k,r+2} \\ G_{k,s} & G_{k,s+1} & G_{k,s+2} \\ G_{k,t} & G_{k,t+1} & G_{k,t+2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M_{k,m+3} - M_{k,m+2} & M_{k,p+3} - M_{k,p+2} & M_{k,q+3} - M_{k,q+2} \\ M_{k,m+1} & M_{k,p+1} & M_{k,q+1} \\ M_{k,m} & M_{k,p} & M_{k,q} \end{vmatrix} \quad (4.21)$$

eşitliği sağlanır.

4.3. Sonuç

r≥ 1, s≥ 1, t≥ 1 ve m≥ 3, q≥ 3 keyfi tamsayılar olmak üzere ve n≥ 3 için

$$\begin{vmatrix} G_{k,n+m+r} & G_{k,n+p+r} & G_{k,n+q+r} & G_{k,n+r} \\ G_{k,n+m+s} & G_{k,n+p+s} & G_{k,n+q+s} & G_{k,n+s} \\ G_{k,n+m+t} & G_{k,n+p+t} & G_{k,n+q+t} & G_{k,n+t} \\ G_{k,n+m} & G_{k,n+p} & G_{k,n+q} & G_{k,n} \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \cdot \begin{vmatrix} G_{k,r} & G_{k,r+1} & G_{k,r+2} \\ G_{k,s} & G_{k,s+1} & G_{k,s+2} \\ G_{k,t} & G_{k,t+1} & G_{k,t+2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} G_{k,m+2} & G_{k,p+2} & G_{k,q+2} \\ G_{k,m+1} & G_{k,p+1} & G_{k,q+1} \\ G_{k,m} & G_{k,p} & G_{k,q} \end{vmatrix} \quad (4.22)$$

eşitliği sağlanır.

İkinci tip k-Tetranacci dizisi için bazı karesel ifadeler aşağıdaki teoremle verilmiştir:

4.13. Teorem

Aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i) n≥ 1 için $G_{k,2n+1} = G_{k,n+2}{}^2 + G_{k,n+1}{}^2 + G_{k,n}{}^2 + 2G_{k,n+1}(G_{k,n} + G_{k,n-1})$ (4.23)

ii) n≥ 0 için $G_{k,2n} = 2G_{k,n+2} \cdot G_{k,n+1} - k \cdot G_{k,n+1}{}^2 + G_{k,n}{}^2$ (4.24)

İspat

n≥ 1 için Teorem 3.3 ten

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n} = \begin{bmatrix} G_{k,2n+3} & N_{k,2n+2} & S_{k,n+2} & G_{k,2n+2} \\ G_{k,2n+2} & N_{k,2n+1} & S_{k,n+1} & G_{k,2n+1} \\ G_{k,2n+1} & N_{k,2n} & S_{k,n} & G_{k,2n} \\ G_{k,2n} & N_{k,2n-1} & S_{k,n-1} & G_{k,2n-1} \end{bmatrix}$$

yazılır ve

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{2n} = \begin{bmatrix} G_{k,n+3} & N_{k,n+2} & S_{k,n+2} & G_{k,n+2} \\ G_{k,n+2} & N_{k,n+1} & S_{k,n+1} & G_{k,n+1} \\ G_{k,n+1} & N_{k,n} & S_{k,n} & G_{k,n} \\ G_{k,n} & N_{k,n-1} & S_{k,n-1} & G_{k,n-1} \end{bmatrix}^{2}$$

olduğundan sol tarafları eşit olan bu matris eşitliklerinin sağ taraflarının da eşit olacağı açıktır. O halde şu eşitlik yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} G_{k,2n+3} & N_{k,2n+2} & S_{k,n+2} & G_{k,2n+2} \\ G_{k,2n+2} & N_{k,2n+1} & S_{k,n+1} & G_{k,2n+1} \\ G_{k,2n+1} & N_{k,2n} & S_{k,n} & G_{k,2n} \\ G_{k,2n} & N_{k,2n-1} & S_{k,n-1} & G_{k,2n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{k,n+3} & N_{k,n+2} & S_{k,n+2} & G_{k,n+2} \\ G_{k,n+2} & N_{k,n+1} & S_{k,n+1} & G_{k,n+1} \\ G_{k,n+1} & N_{k,n} & S_{k,n} & G_{k,n} \\ G_{k,n} & N_{k,n-1} & S_{k,n-1} & G_{k,n-1} \end{bmatrix}^{2}$$

i) Son bulunan eşitlikte her iki taraftaki matrislerin 2. satır 4. sütunlarındaki terimler eşitlenirse n$\geq$ 1 için $G_{k,2n+1} = G_{k,n+2}{}^{2} + N_{k,n+1}G_{k,n+1} + S_{k,n+1}G_{k,n} + G_{k,n+1}G_{k,n-1}$ bulunur.

Düzenlenirse i) ifadesi elde edilir.

ii) Yine aynı eşitlikte her iki taraftaki matrislerin 1. satır 4. sütunlarındaki terimler eşitlenip düzenlenirse istenen ifade elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada M. E. Waddill'in "The Tetranacci Sequence and Generalizations" isimli çalışması genelleştirilmiştir. k-Tetranacci dizisi olarak isimlendirdiğimiz bu dizinin bazı özellikleri verilmiştir. Yine k-Tetranacci dizisine benzer $\{N_{k,n}\}$, $\{S_{k,n}\}$ ve $\{G_{k,n}\}$ dizileri tanımlanmıştır. Ayrıca bu dizinin matris gösterimi verilmiştir. Bu matris yardımı ile çeşitli eşitlikler elde edilmiş olup, bu matrisin determinantı göz önüne alınarak Cassini formülüne benzer bazı eşitlikler bulunmuştur. k-Tetranacci dizisinin Binet formülü çok karmaşık bir yapıya sahip olup daha detaylı bir araştırma yapılabilir.

KAYNAKLAR

1. Waddill, M. E. (1992). The Tetranacci Sequence and Generalizations. *The Fibonacci Quarterly*, 30(1), 9-20.

2. Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*.(1). New York/Amerika: Wiley-Interscience, 16-50, 79, 215, 363, 549.

3. Vajda, S. (1989). Fibonacci And Lucas Numbers, And The Golden Section: Theory And Applications.(1). Chichester/İngiltere: E. Horwood Ltd, 9-10.

4. Falcon, S. ve Plaza, A. (2007). On The Fibonacci k-Numbers. *Chaos Solitions and Fractals*, 32(5), 1615-1624.

5. Natividad, L. R. (2013). On Solving Fibonacci-Like Sequences of Fourth, Fifth and Sixth Order. *International Journal Of Mathematics And Scientific Computing*, 3(2), 38-40.

6. Singh, B., Bhadouria, P., Sikhwal, O. ve Sisodiya K. (2014). A Formula for Tetranacci-Like Sequence. *Gen. Math. Notes*, 20(2), 136-141.

7. Feinberg, M. (1963). Fibonacci-Tribonacci. *The Fibonacci Quarterly*, 1(3), 71-74.

8. Kirkpatrick, T. B. Jr. (1977). Fibonacci Sequences and Additive Triangles of Higher Order and Degree. *The Fibonacci Quarterly*, 15(4), 319-322.

9. McLaughlin, W. I. (1979). Note On A Tetranacci Alternative To Bode's Law. *The Fibonacci Quarterly*, 17(2), 116-117.

10. Bruce, I. (1984). A Modified Tribonacci Sequence. *The Fibonacci Quarterly*, 22(3), 244-246.

11. Scheon, R. (1984). Harmonic, Geometric and Arithmetic Means in Generalized Fibonacci Sequences. *The Fibonacci Quarterly*, 22(4), 354-357.

12. Hlynka, M. ve Sajobi, T. (2008). A Markov Chain Fibonacci Model. *Missouri J. Math. Sci.*, 20(3), 186-199.

13. İnternet: Taganov, I. N., Saari, V. (Aralık, 2014). Asymmetry Of Eclipses. Calendar Cycles. *timepace.net*, Vol. 1 . URL: http://www.webcitation.org/query?url=http%3A%2F%2Ftimepace.net%2Fdocuments%2F5en1.pdf&date=2015-07-10, Son Erişim Tarihi: 10.07.2015.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : Özge, ARIBAŞ
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 23.06.1989, Ankara
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (506) 4209319
Faks : 0 (312) 3454979
E-Posta : ozge.aribas@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	**Okul/Program**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik	Devam Ediyor
Lisans	Ankara Üniversitesi/Matematik	2012
Lise	Mamak Cumhuriyet Anadolu Lisesi	2006

Hobiler

Müzik, Tiyatro