GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

BELİRLİ BAZI LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMLERİNİN YEREL OLMAYAN ÇÖZÜMLERİ VE ÇÖZÜMLERİN SONLU ZAMANDA PATLAMASI

Saghar NABDEL

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2015

Saghar NABDEL tarafından hazırlanan “BELİRLİ BAZI LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMLERİNİN YEREL OLMAYAN ÇÖZÜMLERİ VE ÇÖZÜMLERİN SONLU ZAMANDA PATLAMASI” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ....…………………

Başkan: Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum …………………..

Üye: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum …………………..

Tez Savunma Tarihi: 09/01/2015

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………………….
Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Saghar Nabdel

09/01/2015

BELİRLİ BAZI LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMLERİNİN YEREL OLMAYAN ÇÖZÜMLERİ VE ÇÖZÜMLERİN SONLU ZAMANDA PATLAMASI

(Yüksek Lisans Tezi)

Saghar NABDEL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2015

ÖZET

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, temel kavramlar ihtiyaç duyulan Teoremler ve kullanılan bazı eşitsizlikler verilecektir. Üçüncü bölümde lineer olmayan dalga denkleminin çözümlerinin sonlu zamanda patlaması, başlangıç ve sınır şartları altında incelenecektir. Dördüncü bölümde ise bir dalga denkleminin başlangıç ve sınır şartları altında yerel olmayan çözümleri ve bu çözümlerin sonlu zamanda patlaması verilecektir. Yerel olmayan çözümler süreklilik prensibini kullanarak ispat edilecektir. Beşinci bölümde, tezde elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Bilim Kodu : 204.1.138
Anahtar Kelimeler : Global çözüm, sönüm terimi, iç kuvvet terimi, sonlu zamanda patlama
Sayfa Adedi : 59
Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ülkü DİNLEMEZ

THE GLOBAL SOLUTIONS OF CERTAIN NONLINEAR WAVE EQUATION AND BLOW-UP OF THE SOLUTIONS IN FINITE TIME

(M. Sc. Thesis)

Saghar NABDEL

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2015

ABSTRACT

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In chapter 2 we give some basic definitions and Theorems needed in the next sections. Also we mention some inequality. In chapter 3, we give blow-up solutions for nonlinear wave equation in finite time under the initial-boundary conditions. In chapter 4, we introduce a wave equation under initial-boundary conditions and then we prove the blow-up solutions in finite time and global solutions for this equation. Global solutions will be demonstrated using the continuous principle. In the last chapter, the results obtained in the thesis have been discussed.

Science Code : 204.1.138

Key Words : Global solution, damping term, interior source term, blow up in finite time

Page Number : 59

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Ülkü DİNLEMEZ

TEŞEKKÜR

Çalışmama sundukları değerli katkılarının yanında gösterdikleri dostluk ve iyi niyetle kendimi sanki ülkemde gibi hissetmemi sağlayan Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr Ülkü DİNLEMEZ'e en içten teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim. Ayrıca kendinden uzakta kalmama katlanarak, her türlü maddi ve manevi desteğiyle eğitimime devam etmemi sağlayan sevgili Anneme var kalması dileğiyle ve canımdan çok sevdiğim babama hayatta olduğu sürece desteklerine ve hep desteği benimle olan kendisine teşekkür eder ve saygıyla anıyorum.

Tezimin her aşamasında, yardımını esirgemeyen, sevgili arkadaşlarıma tezimin Türkçe düzeltmesinde yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

Bu tezde

$$u_{tt} - u_{xx} = |u|^{p-1} u, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T) \tag{1.1}$$

denklemi

$$u(0,t) = 0, u_x(1,t) = -|u_t(1,t)|^{m-1} u_t(1,t) - u(1,t), \quad t \in (0,\mathrm{T}) \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x)$$

başlangıç-sınır şartları altında çalışılacaktır. Burada $m \geq 1$ ve $p > 1$ dir. Denklemin Eş. 1.2 şartları altında çözümün patladığı gösterilecektir.

$m \geq 1$ ve $p > 1$ için [1] nolu makalede ele alınan denklem,

$$u_{tt} - u_{xx} = |u|^{p-1} u, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T), \tag{1.3}$$

$$u(0,t) = 0,$$

$$u_x(L,t) = -|u_t(L,t)|^{m-1} u_t(L,t), \quad t \in (0,T),$$

$$u(x,0) = u^0(x), \quad u_t(x,0) = u^1(x), \quad x \in (0,L)$$

başlangıç-sınır şartlarıyla birlikte çalışmışlardır. Feng, Li ve Zhi [1] de $m \geq 1$ için yerel çözümün varlığını gösteren bir teorem vermişlerdir. $2m < p+1$ için çözümün sonlu zamanda patladığını göstermek için $E(0) < 0$ kabul etmişler ve $H(t) = -E(t)$ seçerek $H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \int_0^l u(t) u_t(t) dx$ fonksiyonu yardımıyla çözümün patladığını göstermişlerdir. Kalantarov ve Kurt [2]'de $p, m, k, b > 0$; $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $a(x) \in C^1[0,l]$ için

$$mu_{tt} + ku_{xxxx} - \left[a(x)u_x\right]_x + \gamma u_{tx} + bu_t\left|u_t\right|^p = 0 \tag{1.4}$$

denklemini

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0,$$

sınır şartları ile birlikte çalışmışlardır. Bu makalede a, b, α, β Eş. 1.4 denkleminin sıfır çözümünün global asimptotik olarak sabitliğini ve bu denklemin tüm çözümleri $t \to \infty$ gider iken sıfıra gittiğini göstermişlerdir. Ayrıca Eş. 1.4 denkleminin çözümlerinin sönüm oranın tahmini elde edilmiştir.

Hao, Li ve Zhang [3]'de [2]'deki Marina Riser denkleminde yararlanarak

$$u_{tt} + \alpha u_t + 2\beta u_{xxxx} - 2[(a(x)+b)u_x]_x + \frac{\beta}{3}(u_x^3)_{xxx} - [(a(x)+b)u_x^3]_x - \beta(u_{xx}^2 u_x)_x = f(u), \tag{1.5}$$

denklemini

$$u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \qquad t \in (0,T),$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in [0,1].$$

başlangıç-sınır şartları altında incelemişlerdir.

Bayrak ve Can [4]

$$\begin{cases} u_{tt} + \alpha u_t + 2\beta u_{xxxx} - 2[(a(x)+b)u_x]_x + \dfrac{\beta}{3}(u_x^3)_{xxx} & \\ \qquad - [(a(x)+b)u_x^3]_x - \beta(u_{xx}^2 u_x)_x = f(u), & (x,t) \in [0,1] \times (0,T), \\ u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, & t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in [0,1]. \end{cases}$$

denkleminin yerel olmayan çözümlerinin olmadığını incelemişler. Dinlemez ve Aktaş [5] başlangıç-sınır değerleriyle lineer olmayan mekanik sönüm terimli ve lineer sönüm terimli bir kiriş denkleminin yerel olamayan çözümlerini ve çözümlerinin sonlu zamanda patlamasını ispatlamışlar. Bu makalede $a, b, \alpha, \beta > 0$ ve $f(u) \in C(R)$ için ve bazı şartları altında denklemin çözümü negatif enerji ile sonlu zamanda patladığını göstermişlerdir.

Son bölümde ise, $a(x) > 0$ ve $k,\ b > 0$ için

$$u_{tt} - ku_{xx} - \left(a(x)u_x\right)_x + bu_t = f(u) \tag{1.6}$$

denklemi

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(1,t) = u_x(1,t) = 0 \qquad x \in \left[0,1\right], \quad t \geq 0 \tag{1.7}$$

$$u(x,t) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x)$$

başlangıç-sınır şartları altında çalışılacaktır. Denklemin bazı şartları altında yerel olmayan çözümünün varlığı ve çözümünün patladığı gösterilecektir.

2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanımlar

2.1.1. Tanım

$\mathbb{R}^n$ nin herhangi bir Ω bölgesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı $C(\Omega)$ ile gösterilir.

2.1.2. Tanım

$\left(\mathrm{U}, \|\ \|\right)$ bir normlu uzay olsun. Bu normlu uzaydaki her Cauchy dizisi U içinde bir limite yakınsıyorsa, bu $\left(\mathrm{U}, \|\ \|\right)$ normlu uzaya Banach uzayı denir.

2.1.3. Tanım

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$bölgesi üzerinde tanımlı olsun. n ve n ye kadar olan mertebeden türevleri sürekli olan fonksiyonların uzayı $C^n(\Omega)$ ile gösterilir.

2.1.4. Tanım

Bir Ω bölgesi üzerinde her mertebeden türevlenebilen fonksiyonların uzayı $C^\infty(\Omega)$ ile gösterilir ve

$$C^\infty(\Omega) = \left\{u : u \in C^r(\Omega), \mathrm{r} = 0,1,2,...\right\}$$

dır.

2.1.5. Tanım

$k > 0$ tamsayı $1 \le p < \infty$ olsun. Kendisi ve k. mertebeye kadar tüm genelleştirilmiş türevleri $L_p(\mathbb{R}^n)$ sınıfına ait olan fonksiyonlar uzayına Sobolev uzayı denir ve $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Yani;

$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L_p(\mathbb{R}^n) : \forall|\alpha| < k, D_\alpha(u) \in L_p(\mathbb{R}^n)\}$ dır. Sobolev uzayı üzerindeki norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{|\alpha|<k} \|D^\alpha u\|^p_{L_{p(\mathbb{R}^n)}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

İle tanımlanır.

2.1.6. Tanım

$P \geq 1$ gerçel sayı olmak üzere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$de

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \leq \infty \ , \quad x \in \Omega$$

koşulunu sağlayan, ölçülebilir u fonksiyonlarının sınıfına, $L_p(\Omega)$ uzayı denir. Bu uzay üzerindeki norm;

$$\|u\|_p = \|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

2.1.7. Tanım

Bir I aralığında $x' = f(t,x)$ denkleminin bir çözümü x olsun. $I \subset S$ olmak üzere S üzerinde bir k çözümü olsun, $t \in I$ için $\mathrm{k}(t) = x(t)$ olması şartı ile x in bir genişlemesidir denir.

2.2. Kullanılan Eşitsizlikler

2.2.1. Eşitsizlikler

Sobolev Eşitsizliği

$u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ olsun, $1 \leq p < n$, $1 \leq q \leq \dfrac{np}{n-p}$ ve c Sobolev sabiti olmak üzere,

$$\|u\|_q \leq c\|\nabla u\|_p$$

eşitsizliği sağlanır.

Poincare-Friedrichs Eşitsizliği

$1 < p < \infty$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ üzerinde Lipschitz sınırlı olsun. $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ için

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla \mathrm{u}\|_{L^p(\Omega)}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ vardır.

Young Eşitsizliği

$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. Burada $p > 1$ ve $q < \infty$ dır. Bu durumda

$$ab \leq \nu a^p + C(\nu)b^q,\ \left(a,b > 0, \nu > 0\right),\ C(\nu) = (\nu p)^{\frac{q}{p}} q^{-1}$$

eşitsizliği vardır.

Cauchy-Schwartz Eşitsizliği

$x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$$

dır. Burada (.,.), $\mathbb{R}$ üzerindeki iç çarpımdır ve $\mathbb{R}$ üzerindeki iç çarpımla tanımlanmış norm;

$\|y\| = (\mathrm{y},\mathrm{y})^{1/2}$ dir.

Hölder Eşitsizliği

$1 \le g_1,\ldots,g_m \le \infty$, $\dfrac{1}{g_1}+\dfrac{1}{g_2}+\ldots+\dfrac{1}{g_m}=1$ ve $k=1,\ldots,m$ için $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$ olsun. O halde

$$\int_{\Omega} |u_1 \ldots u_m|\, dx \le \prod_{k=1}^{m} \|u_i\|_{L^{p_k}(\Omega)}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir.

Gronwall Lemması (Türev Formu)

(i) $\omega(.)$, $[0,T]$ aralığında sürekli ve negatif olmayan bir fonksiyondur. $\phi(t)$ ve $\vartheta(t)$, $[0,T]$ aralığında integrallenebilen, negatif olmayan fonksiyonlar olmak üzere; eğer

$$\omega'(t) \le \phi(t)\omega(t) + \vartheta(t)$$

eşitsizliği yazılabilir ise, her $0 \le t \le T$ için, $\omega(t) \le e^{\int_0^t \phi(s)ds}\left[\omega(0) + \int_0^t \vartheta(s)ds\right]$

eşitsizliği vardır.

(ii) Eğer $[0,T]$ üzerinde $\omega' \le \phi\omega$ ve $\omega(0)=0$ ise $[0,T]$ aralığında $\omega \equiv 0$ olur.

Teorem (Çözümün Sürekliliği)

f, $Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ de sürekli bir fonksiyondur. x, $[a,b)$ aralığı üzerinde $x' = f(t,x)$ diferansiyel denklemin bir çözümü olsun. $\{t_k\}$, v ye yakınsayan ve artan bir dizi ve

$\lim_{k\to\infty} x(t_k) = x_0$ olduğu kabul edilsin. Ayrıca $Q \cap \{(t,x): 0 < \upsilon - t < \alpha, \|x - x_0\| \leq \beta\}$ üzerinde $\|f(t,x)\| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ sabitleri vardır. Bu durumda $f(v, x_0)$, $Q \cup \{(b, x_0)\}$ üzerinde sürekli olarak tanımlanabilir ise o halde x, $[a,b]$ üzerinde bir çözüm olarak genişletilebilirdir.

<u>Teorem</u>

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge, $Vol(\Omega) = \int_\Omega 1dx < \infty$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L^q(\Omega)$ ise $u \in L^p(\Omega)$ ve $\|u\|_p \leq (vol(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_q$ eşitsizliği vardır. Böylece $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ dır.

3. LİNEER OLMAYAN BİR DALGA DENKLEMİNİN VERİLEN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER ŞARTLARIYLA BİRLİKTE ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

3.1. Çözümlerin Patlaması

Bu bölümde $m \geq 1$ ve $p > 1$ olmak üzere

$$y_{tt} - y_{xx} = |y|^{p-1} y, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,T), \tag{3.1}$$

$$y(0,t) = 0, \tag{3.2}$$

$$y_x(L,t) = -|y_t(L,t)|^{m-1} y_t(L,t), \quad t \in (0,T), \tag{3.3}$$

$$y(x,0) = y^0(x), \quad y_t(x,0) = y^1(x), \quad x \in (0,L), \tag{3.4}$$

başlangıç-sınır değer probleminin yerel çözümleri ve çözümlerinin sonlu zamanda patlaması incelenmiştir.

Şimdi Eş. 3.1 denkleminin Eş. 3.2 ve Eş. 3.3 sınır şartlarına uygun enerji denklemi elde edilsin. Eş. 3.1. in her iki tarafı y_t ile $L_2(0,\mathrm{L})$ anlamında iç çarpılırsa

$$(y_{tt}, y_t) - (y_{xx}, y_t) - (|y|^{p-1} y, y_t) = 0 \tag{3.5}$$

elde edilir. Eş 3.5 deki ilk terim

$$(y_{tt}, y_t) = -\int_0^L y_{tt} y_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L (y_t)^2 dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y_t\|^2 \tag{3.6}$$

olarak bulunur. Eş. 3.6 nın ikinci terimine kısmi integrasyon uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
-\int_0^L y_{xx} y_t dx &= -\int_0^L \left(y_x y_t\right)_x dx + \int_0^L y_x y_{tx} dx \\
&= -y_x\left(L,t\right) y_t\left(L,t\right) - y_x\left(0,t\right) y_t\left(0,t\right) + \int_0^L y_x y_{tx} dx
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

bulunur. Eş. 3.7 de Eş. 3.2 ve Eş. 3.3 sınır-değer şartları uygulanırsa;

$$
-\int_0^L y_{xx} y_t dx = \left|y_t\left(L,t\right)\right|^{m+1} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|y_x\right\|^2 \tag{3.8}
$$

elde edilir.

Ayrıca

$$
\int_0^L |y|^{p-1} y y_t = \frac{1}{p+1}\frac{d}{dt}\|y\|_{p+1}^{p+1} \tag{3.9}
$$

dır. Burada Eş. 3.6, Eş. 3.8 ve Eş. 3.9; Eş. 3.5 de yerine yazılırsa

$$
\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|y_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|y_x\|_2^2 - \frac{1}{1+p}\|y\|_{p+1}^{p+1}\right\} + \left|y_t\left(L,t\right)\right|^{m+1} = 0 \tag{3.10}
$$

bulunur. Eş. 3.10 dan

$$
E(t) = \frac{1}{2}\|y_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|y_x(t)\|_2^2 - \frac{1}{1+p}\|y(t)\|_{p+1}^{p+1} \tag{3.11}
$$

olur. $0 \le t \le T$ için

$$
\frac{d}{dt}E(t) = -\left|y_t(L,\mathrm{t})\right|^{m+1} \tag{3.12}
$$

elde edilir.

Eş. 3.1- Eş. 3.3 sisteminin yerel çözümünün varlığı aşağıdaki teoremle verilmiştir.

3.1.1. Teorem (Yerel Çözüm)

$(y^0, y^1) \in H^1_{left}(0,L) \times L^2(0,L)$ olmak üzere, Eş 3.1 in bir tek y yerel çözümü vardır ve $T > 0$ için

$$y(x,t) \in C\left(0,T;H^1_{left}(0,L)\right), \quad y_t(x,t) \in C\left(0,T;L^2(0,L)\right), \quad y_t(L,t) \in L^{m+1}(0,T) \qquad (3.13)$$

sağlanır [6]. Burada

$$H^1_{Left}(0,L) = \{u \in H^1(0,L) : u(0) = 0\}$$

olacak şekilde vardır.

Şimdi aşağıdaki Teoremler yardımıyla verilen Eş. 3.1- Eş. 3.3 denklem sisteminin çözümlerinin bazı şartlar altında patladığı gösterilecektir

3.1.2. Teorem

Eş. 3.1 in bir çözümü $y(x,t)$ olsun. $E(0) < 0$ ve $2m < p+1$ olmak üzere, Eş. 3.1 in çözümü sonlu zamanda patlar.

3.1.2 Teoreminin ispatını yapabilmek için ilk önce aşağıdaki eşitsizlikler ve lemmalar verilecektir.

Eş. 3.12 den $E(t)$ fonksiyonunun azalan bir fonksiyon olduğu görülmektedir. 3.1.2 Teoremin hipotezinden $E(0) < 0$ dır. Bu durumda $E(t) \le E(0) < 0$ olur. $t \in [0,+\infty)$ için, Eş. 3.11 den

$$\frac{1}{2}\|y_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|y_x(t)\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|y(t)\|_{p+1}^{P+1} \le 0,$$

olur. Böylece

$$\|y_t(t)\|_2^2 + \|y_x(t)\|_2^2 \le \|y(t)\|_{p+1}^{P+1}$$

elde edilir.

$$H(t) = -E(t) \tag{3.14}$$

olsun.

Eş. 3.14 ve $E(t) < 0$ olmasından dolayı $H(t) \geq H(0) > 0$ olduğu görülür. Bu durumda

$$H(t) = \frac{1}{2}\|y_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|y_x\|_2^2 - \frac{1}{p+1}\|y\|_{p+1}^{p+1} < 0,$$

$$H(t) \leq \frac{1}{p+1}\|y\|_{p+1}^{p+1} \leq \frac{2}{p+1}\|y\|_{p+1}^{p+1}. \tag{3.15}$$

olur.

3.1.1. Lemma: Eş. 3.1 in bir çözümü $y(x,t)$ olsun. $E(0) < 0$ ve $2 \leq s \leq p+1$ olmak üzere

$$\|y\|_{p+1}^{s} \leq C\|y\|_{p+1}^{p+1} \tag{3.16}$$

eşitliğini sağlayan bir $C > 0$ sabiti vardır.

İspat

Şimdi $\|y\|_{p+1} \geq 1$ olsun , Bu durumda $2 \leq s \leq p+1$ olduğundan

$$\|y\|_{p+1}^{s} \leq \|y\|_{p+1}^{p+1} \quad . \tag{3.17}$$

eşitsizliği elde edilir.

$\|y\|_{p+1} < 1$ olarak kabul edildiğinde

$$\|y\|_{p+1}^{s} \leq \|y\|_{p+1}^{2}$$

bulunur.

Sobolev gömme teoreminden

$$\|y\|_{p+1}^{s} \le \|y\|_{p+1}^{2} \le C_1 \|y_x\|_2^2 \tag{3.18}$$

elde edilir. Burada C_1 sıfırdan büyük pozitif sabittir.

$E(t) \le E(t) < 0$ olduğundan ve Eş. 3.11 den

$$\frac{1}{2}\|y_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|y_x(t)\|_2^2 - \frac{1}{1+p}\|y(t)\|_{p+1}^{p+1} < 0$$

yazılır. Buradan

$$\frac{1}{2}\|y_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|y_x(t)\|_2^2 < \frac{1}{1+p}\|y(t)\|_{p+1}^{p+1},$$
$$\frac{1}{2}\|y_x(t)\|_2^2 < \frac{1}{1+p}\|y(t)\|_{p+1}^{p+1},$$

$$C_1 \|y_x(t)\|_2^2 < C\|y(t)\|_{p+1}^{p+1} \tag{3.19}$$

elde edilir. Burada $\dfrac{2C_1}{p+1} = C$ dir.

Böylece Eş. 3.18 ve Eş. 3.19 dan

$$\|y\|_{p+1}^{s} \le C\|y\|_{p+1}^{P+1} \tag{3.20}$$

bulunur.

$m \ge 1$, $p > 1$ ve $2m < p+1$ olmak üzere

$$0 < \max\left\{\frac{2}{p+1}, \frac{m}{p+1-m}\right\} < r < 1 \tag{3.21}$$

olacak şekilde bir r vardır, Buradan

$$2 \leq m+1,\ m\frac{r+1}{2},\ \frac{p+1}{2}(1+r) < \mathrm{p}+1 \tag{3.22}$$

sonucuna varılır.

3.1.2. Lemma: Eş. 3.1 in bir çözümü $y(x,t)$ olsun. $E(0) < 0$ olmak üzere $\forall t \in [0,\infty)$ için

$$\left|y(L,t)\right|^{m+1} \leq C_5\left[\|y(t)\|_{p+1}^{m+1} + \|y(t)\|_{p+1}^{m\frac{r+1}{r}} + \|y(t)\|_{p+1}^{\frac{p+1}{2}(1+r)}\right] \tag{3.23}$$

eşitliğini sağlayan $C_5 > 0$ pozitif sabiti vardır.

İspat

$\int_0^L x'|y|^{m+1}\,dx$ integralinde kısmi integrasyon uygulanır ve Eş. 3.2 başlangıç şartı uygulanırsa

$$\int_0^L x'|y|^{m+1}\,dx = L|y(L,t)|^{m+1} - (m+1)\int_0^L x|y|^{m-1}y.y_x dx \tag{3.24}$$

elde edilir.

Eş. 3.24'den $L|y(L,t)|^{m+1}$ çekilir ve son eşitliğe mutlak değer uygulanırsa

$$\begin{aligned} L|y(L,t)|^{m+1} &= \int_0^L |y|^{m+1}\,dx + (m+1)\int_0^L x|y|^{m-1}\,y.y_x dx \\ &\leq \int_0^L |y|^{m+1} dx + (m+1)\int_0^L |x||y|^m\,|y_x|\,dx \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $C = \max\left\{\frac{1}{L}, m+1\right\}$ olarak alınırsa

$$|y(L,t)|^{m+1} \le \frac{1}{L}\|y\|_{m+1}^{m+1} + (m+1)\int_0^L |y|^m |y_x| dx$$

elde edilir.

$$|y(L,t)|^{m+1} \le C\left\{\|y\|_{m+1}^{m+1} + \int_0^L |y|^m |y_x| dx\right\} \tag{3.25}$$

bulunur. Şimdi Eş. 3.25 de yer alan integral için bir eşitsizlik elde edilsin. İntegrale $s = 1+r, q = \frac{r+1}{r}$ olmak üzere Young eşitsizliği uygulanırsa $mq = m\frac{r+1}{r} < p+1$ olduğundan

$$\int_0^L |y|^m |y_x| dx \le \frac{r}{r+1}\int_0^L |y|^{m\frac{r+1}{r}} dx + \frac{1}{1+r}\int_0^L |y_x|^{1+r} dx$$

elde edilir. $C_1 = \max\left\{\frac{r}{1+r}, \frac{1}{r+1}\right\}$ olmak üzere

$$\int_0^L |y|^m |y_x| dx \le C_1\left(\|y\|_{m\frac{r+1}{r}}^{m\frac{r+1}{r}} + \|y_x\|_{1+r}^{1+r}\right) \tag{3.26}$$

eşitsizliği elde edilir.

Eş. 3.26; Eş. 3.25 de yerine yazılırsa

$$|y(L,t)|^{m+1} \le C\left[\|y(t)\|_{m+1}^{m+1} + C_1\left(\|y\|_{m\frac{r+1}{r}}^{m\frac{r+1}{r}} + \|y_x\|_{1+r}^{1+r}\right)\right]$$

bulunur. Eş. 3.22 den $m\frac{r+1}{r} < p+1$ olduğu görülür. Sobolev eşitsizliği uygulanırsa

$$|y(L,t)|^{m+1} \le C_2 \left[\|y(t)\|_{p+1}^{m+1} + \|y(t)\|_{p+1}^{m\frac{r+1}{r}} + \|y_x(t)\|_{1+r}^{1+r} \right] \tag{3.27}$$

bulunur. Burada $C_2 = C.C_1$ dir. $0 < r < 1$ olduğu göz önüne alınır, Eş. 3.19 ve Eş. 3.22 kullanılırsa;

$$\|y_x(t)\|_{1+r}^{1+r} \le C_3 \|y_x(t)\|_2^{1+r} \le C_4 \|y(t)\|_{p+1}^{\frac{p+1}{2}(1+r)} \tag{3.28}$$

eşitsizliği elde edilir. Eş. 3.28; Eş. 3.27 de kullanılırsa

$$|y(L,t)|^{m+1} \le C_5 \left[\|y(t)\|_{p+1}^{m+1} + \|y(t)\|_{p+1}^{m\frac{r+1}{r}} + \|y(t)\|_{p+1}^{\frac{p+1}{2}(1+r)} \right]$$

elde edilir. Burada $C_5 = C_2.C_4$ dür.

Şimdi $L(t)$ fonksiyonu ε küçük sayı olmak üzere

$$L(t) = H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \int_0^L y(t) y_t(t) dx, \tag{3.29}$$

tanımlanırsa $0 < r < 1$ olduğundan

$$\frac{p-1}{2(P+1)}, \frac{p-m}{m(p+1)}, \frac{1}{m} - \frac{1+r}{r(p+1)}, \frac{1}{m} - \frac{1+r}{2m} > 0$$

eşitsizliği vardır. Bu durumda

$$0 < \sigma < \min\left\{ \frac{p-1}{2(p+1)}, \frac{p-m}{m(p+1)}, \frac{1}{m} - \frac{1+r}{r(p+1)}, \frac{1}{m} - \frac{1+r}{2m} \right\} \tag{3.30}$$

olacak şekilde bir σ vardır.

3.1.3. Lemma: Eş. 3.1 in bir çözümü $y(x,t)$ olsun. $E(0) < 0$ ve $2m < p+1$ olmak üzere bir C pozitif sabit sayısı $t \in [0,\infty)$ için,

$$H^{\sigma m}(t)\left|y(L,t)\right|^{m+1} \le C\left\|y(t)\right\|_{p+1}^{p+1} \tag{3.31}$$

olacak şekilde vardır.

İspat

Eş. 3.15 ve Lemma 3.1.2 den

$$H^{\sigma m}(t)\left|y(L,t)\right|^{m+1} \le \left(\frac{2}{p+1}\right)^{\sigma m}\left\|y(t)\right\|_{p+1}^{\sigma m(p+1)} C_5\left\{\left\|y(t)\right\|_{p+1}^{m+1} + \left\|y(t)\right\|_{p+1}^{m\frac{r+1}{r}} + \left\|y(t)\right\|_{p+1}^{\frac{p+1}{2}(1+r)}\right\},$$

$$H^{\sigma m}(t)\left|y(L,t)\right|^{m+1} \le C_6\left\{\left\|y(t)\right\|_{p+1}^{\sigma m(p+1)+m+1} + \left\|y(t)\right\|_{p+1}^{\sigma m(p+1)+m\frac{r+1}{r}} + \left\|y(t)\right\|_{p+1}^{\sigma m(p+1)+\frac{p+1}{2}(1+r)}\right\}, \tag{3.32}$$

elde edilir. Burada $C_6 = C_5\left(\frac{2}{p+1}\right)^{\delta m}$ dir.

Eş. 3.30 da alınan σ sayısı, Eş. 3.22 de kullanılırsa

$$2 < \sigma m(p+1) + m + 1, \sigma m(p+1) + m\frac{r+1}{r}, \sigma m(p+1) + \frac{p+1}{2}(1+r) \le p+1 \tag{3.33}$$

bulunur.

Lemma 3.1.1, Eş. 3.30 kullanarak ve $2 \le s \le p+1$ olduğundan

$$H^{\sigma m}(t)\left|y(L,t)\right|^{m+1} \le C\left\|y(t)\right\|_{p+1}^{p+1}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi 3.1.2 Teorem'i ispatlansın

İspat

Eş. 3.29 t'ye göre türev alınırsa ve Eş. 3.12 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(t) &= (1-\sigma)H^{-\sigma}H'(t)+\varepsilon\left(\int_0^L |y_t|^2\,dx+\int_0^L yy_{tt}dx\right)\\ &= (1-\sigma)H^{-\sigma}\left|y_t(L,t)\right|^{m+1}+\varepsilon\|y_t\|_2^2+\varepsilon\int_0^L yy_{tt}dx\end{aligned} \tag{3.34}$$

elde edilir.

Eş. 3.34 deki integralde Eş. 3.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\varepsilon\int_0^L yy_{tt}dx &= \varepsilon\int_0^L y\left(|y|^{p-1}y+y_{xx}\right)dx,\\ &= \varepsilon\|y\|_{p+1}^{p+1}+\varepsilon\int_0^L yy_{xx}dx,\end{aligned} \tag{3.35}$$

bulunur.

Eş. 3.35 deki $\int_0^L yy_{xx}dx$ integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\varepsilon\int_0^L yy_{xx}dx = \varepsilon\int_0^L (yy_x)_x dx-\varepsilon\int_0^L y_x^2 dx$$

elde edilir

Eş. 3.2, Eş. 3.3 sınır şartları kullanılırsa

$$\begin{aligned}\varepsilon\int_0^L (yy_x)_x dx-\varepsilon\int_0^L y_x^2 dx &= \varepsilon\left[y(L,t)y_x(L,t)-y(0,t)y_x(0,t)\right]-\varepsilon\|y_x\|^2,\\ \varepsilon\int_0^L (yy_x)_x dx-\varepsilon\int_0^L y_x^2 dx &= -\varepsilon y(L,t)\left|y_t(L,t)\right|^m-\varepsilon\|y_x\|^2,\end{aligned} \tag{3.36}$$

bulunur. Eş. 3.35, Eş. 3.36; Eş.3.34 de yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt}L(t)=(1-\sigma)H^{-\sigma}(t)\left|y_t(L,t)\right|^{m+1}+\varepsilon\left\|y_t\right\|^2+\varepsilon\left\|y\right\|_{p+1}^{P+1}-\varepsilon y(L,t)\left|y_t(L,t)\right|^m-\varepsilon\left\|y_x\right\|^2 \tag{3.37}$$

bulunur. $H(t)$ nin tanımı kullanılıp ε ile çarpılırsa

$$2\varepsilon H(t)=-\varepsilon\left\|y_t\right\|^2-\varepsilon\left\|y_x\right\|^2+\frac{2\varepsilon}{p+1}\left\|y\right\|_{p+1}^{p+1} \tag{3.38}$$

elde edilir. Eş. 3.37 tekrar yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(t)&=(1-\sigma)H^{-\sigma}(t)\left|y_t(L,t)\right|^{m+1}+2\varepsilon\left\|y_t\right\|^2+\varepsilon\left(\frac{p-1}{p+1}+\frac{2}{p+1}\right)\left\|y\right\|_{p+1}^{P+1}-\varepsilon\left\|y_x\right\|^2\\&\quad-\varepsilon y(L,t)\left|y_t(L,t)\right|^m-\varepsilon\left\|y_t\right\|^2\end{aligned} \tag{3.39}$$

elde edilmiş olur. Eş. 3.39, Eş. 3.38 kullanılarak tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(t)&=(1-\sigma)H^{-\sigma}(t)\left|y_t(L,t)\right|^{m+1}+2\varepsilon\left\|y_t\right\|^2+\varepsilon\frac{p-1}{p+1}\left\|y\right\|_{p+1}^{P+1}+2\varepsilon H(t)\\&\quad-\varepsilon y(L,t)\left|y_t(L,t)\right|^m\end{aligned} \tag{3.40}$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{d}{dt}L(t)\geq(1-\sigma)H^{-\sigma}(t)\left|y_t(L,t)\right|^{m+1}+2\varepsilon\left\|y_t\right\|^2+\varepsilon\frac{p-1}{p+1}\left\|y\right\|_{p+1}^{P+1}-\varepsilon\left|y(L,t)\right|\left|y_t(L,t)\right|^m \tag{3.41}$$

yazılabilir.

Burada $\left|y(L,t)\right|\left|y_t(L,t)\right|^m$ terimine Young eşitsizliğini $p=\dfrac{m+1}{m}, q=m+1$ olmak üzere uygulanırsa;

$$\left|y_t(L,t)\right|^m\left|y(L,t)\right|\leq\gamma\left(\left|y_t(L,t)\right|^m\right)^{\frac{m+1}{m}}+\left(\gamma\frac{m+1}{m}\right)^{-m}(m+1)^{-1}\left|y(L,t)\right|^{m+1},$$

$$\left|y_t(L,t)\right|^m \left|y(L,t)\right| \le \gamma \left|y_t(L,t)\right|^{m+1} + \frac{m^m}{\gamma^m \left(m+1\right)^{m+1}} \left|y(L,t)\right|^{m+1}, \tag{3.42}$$

bulunur. $\gamma = \delta^{-\frac{m+1}{m}} \frac{m}{m+1}$ olarak alınır ve Eş. 3.42 de yerine yazılırsa

$$\left|y_t(L,t)\right|^m \left|y(L,t)\right| \le \frac{m\delta^{-\frac{m+1}{m}}}{m+1} \left|y_t(L,t)\right|^{m+1} + \frac{m^m}{\left(\delta^{-\frac{m+1}{m}}\right)^m \left(\frac{m}{m+1}\right)^m \left(m+1\right)^{m+1}} \left|y(L,t)\right|^{m+1},$$

$$\left|y_t(L,t)\right|^m \left|y(L,t)\right| \le \frac{m}{m+1} \delta^{-\frac{m+1}{m}} \left|y_t(L,t)\right|^{m+1} + \frac{1}{m+1} \delta^{m+1} \left|y(L,t)\right|^{m+1} \tag{3.43}$$

elde edilir.

Eş. 3.43; Eş. 3.41 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(t) \ge (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) \left|y_t(L,t)\right|^{m+1} + 2\varepsilon \left\|y_t\right\|^2 + \varepsilon \frac{p-1}{p+1} \left\|y\right\|_{p+1}^{P+1} \\ - \frac{m\varepsilon}{m+1} \delta^{\frac{-m+1}{m}} \left|y_t(L,t)\right|^{m+1} - \frac{\varepsilon}{m+1} \delta^{m+1} \left|y(L,t)\right|^{m+1} \end{aligned} \tag{3.44}$$

elde edilmiş olur.

$k > 0$ olmak üzere $\delta^{m+1} = k^{-m} H^{\sigma m}$ seçilir ve Eş. 3.44 de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(t) \ge \left(1 - \sigma - \frac{k\varepsilon m}{m+1}\right) H^{-\sigma} \left|y_t(L,t)\right|^{m+1} + 2\varepsilon \left\|y_t(t)\right\|_2^2 - \frac{\varepsilon k^{-m}}{m+1} H^{\sigma m} \left|y(L,t)\right|^{m+1} \\ + \varepsilon \frac{p-1}{p+1} \left\|y\right\|_{p+1}^{P+1} \end{aligned} \tag{3.45}$$

olduğu görülür. Burada

$$H^{\sigma m}(t)\left|y(L,t)\right|^{m+1} \leq C\left\|y(t)\right\|_{p+1}^{p+1}$$

eşitsizliği var olduğundan

$$\frac{-\varepsilon k^{-m}}{m+1}H^{\sigma m}(t)\left|y(L,t)\right|^{m+1} \geq \frac{-C\varepsilon k^{-m}}{m+1}\left\|y(t)\right\|_{p+1}^{p+1} \qquad (3.46)$$

yazılabilir.

Eş. 3.46; Eş. 3.45 de yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt}L(t) \geq \left(1-\sigma-\frac{k\varepsilon m}{m+1}\right)H^{-\sigma}(t)\left|y_t(L,t)\right|^{m+1} + 2\varepsilon\left\|y_t(t)\right\|_2^2 + \left[\varepsilon\frac{p-1}{p+1} - \frac{Ck^{-m}\varepsilon}{m+1}\right]\left\|y(t)\right\|_{p+1}^{p+1} \qquad (3.47)$$

k, yeterince büyük alınırsa ve $\phi = \min\left\{2, \dfrac{p-1}{p+1} - \dfrac{Ck^{-m}\varepsilon}{m+1}\right\} > 0$ seçilirse

$$\frac{d}{dt}L(t) \geq \left(1-\sigma-\frac{k\varepsilon m}{m+1}\right)H^{-\sigma}(t)\left|y_t(L,t)\right|^{m+1} + \varepsilon\phi\left[\left\|y_t(t)\right\|_2^2 + \left\|y(t)\right\|_{p+1}^{p+1}\right] \qquad (3.48)$$

elde edilir. Burada

$$1-\sigma-\frac{km\varepsilon}{m+1} \geq 0$$

olacak şekilde, ε sayısı k seçimine göre yeterince küçük seçilir.

Böylece Eş. 3.48

$$\frac{d}{dt}L(t) \geq \varepsilon\phi\left[\left\|y_t(t)\right\|_2^2 + \left\|y(t)\right\|_{p+1}^{p+1}\right] \qquad (3.49)$$

yazılabilir. Buradan da görülür ki $t \geq 0$ için $L(t) \geq L(0) > 0$ dır..

Şimdi Hölder eşitsizliğinden

$$\left|\int_0^L y(t)y_t(t)dx\right| \le \|y(t)\|_2 \, \|y_t(t)\|_2 \tag{3.50}$$

elde edilir.

$L_2 \hookrightarrow L_{p+1}$ olduğundan

$$\|u\|_2 \le C\|u\|_{p+1} \tag{3.51}$$

olacak şekilde bir C sabiti vardır.

Eş. 3.51; Eş. 3.50 de kullanılırsa

$$\left|\int_0^L y(t)y_t(t)dx\right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \le C^{\frac{1}{1-\sigma}} \|y(t)\|_{p+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} \|y_t(t)\|_2^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{3.52}$$

elde edilir.

Eş. 3.52 nin sağ tarafına Young eşitsizliği uygulanırsa $p=\dfrac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}, q=2(1-\sigma)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} C^{\frac{1}{1-\sigma}} \|y(t)\|_{p+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} \|y_t(t)\|_2^{\frac{1}{1-\sigma}} &\le C^{\frac{1}{1-\sigma}} \left\{ \frac{1}{\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}} \left(\|y(t)\|_{p+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} \right)^{\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \left(\|y_t(t)\|_2^{\frac{1}{1-\sigma}} \right)^{2(1-\sigma)} \right\} \\ &\le C^{\frac{1}{1-\sigma}} \left\{ \frac{(1-2\sigma)}{2(1-\sigma)} \|y(t)\|_{p+1}^{\frac{2}{1-2\sigma}} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \|y_t(t)\|_2^2 \right\} \end{aligned} \tag{3.53}$$

ayrıca

$C_1 = \max\left\{ \dfrac{C^{\frac{1}{1-\sigma}}(1-2\sigma)}{2(1-\sigma)}, \dfrac{C^{\frac{1}{1-\sigma}}}{2(1-\sigma)} \right\}$ olmak üzere,

$$C^{\frac{1}{1-\sigma}} \|y(t)\|_{p+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} \|y_t(t)\|_2^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C_1 \left(\|y(t)\|_{p+1}^{\frac{2}{1-2\sigma}} + \|y_t(t)\|_2^2 \right) \tag{3.54}$$

bulunur.

Eş. 3.54; Eş. 3.52 de yerine yazılırsa

$$\left| \int_0^L y(t) y_t(t) dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C_1 \left[\|y(t)\|_{p+1}^{\mu} + \|y_t(t)\|_2^2 \right] \tag{3.55}$$

elde edilmiş olur. Burada $\mu = \dfrac{2}{(1-2\sigma)}$ alınırsa Eş. 3.30 dan $2 < \mu < p+1$ olduğu görülür. Bu eşitsizlik Eş. 3.55 de kullanılırsa

$$\left| \int_0^L y(t) y_t(t) dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C_1 \left[\|y(t)\|_{p+1}^{p+1} + \|y_t(t)\|_2^2 \right] \tag{3.56}$$

elde edilir.

Eş. 3.29 ün $\dfrac{1}{1-\sigma}$ derecesi alınır ve $a, b > 0$, $p > 1$ olmak üzere $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$ eşitsizliği kullanılırsa

$$L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) = \left[H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \int_0^L y(t) y_t(t) dx \right]^{\frac{1}{1-\sigma}},$$

$$L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \leq 2^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \left[H(t) + \left(\varepsilon \int_0^L y(t) y_t(t) dx \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \right] \tag{3.57}$$

elde edilir.

Eş. 3.15 ve Eş. 3.56 dan $C_2 = \max\left\{\dfrac{2}{p+1}, C_1\right\}$ ve $C_3 = 2^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} C_2$ olacak şekilde alınırlarsa

$$
\begin{aligned}
L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) &\le 2^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \left\{ \frac{2}{p+1} \|y(t)\|_{p+1}^{p+1} + C_1 \left[+ \|y(t)\|_{p+1}^{p+1} + \|y_t(t)\|_2^2 \right] \right\} \\
&\le C_3 \left[\|y(t)\|_{p+1}^{p+1} + \|y_t(t)\|_2^2 \right]
\end{aligned}
$$

$$
L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \le C_3 \left[\|y(t)\|_{p+1}^{p+1} + \|y_t(t)\|_2^2 \right] \tag{3.58}
$$

bulunur.

Eş. 3.49 ve Eş. 3.58 den

$$
\begin{aligned}
\frac{\varepsilon\phi}{C_3} L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) &\le \varepsilon\phi \left[\|y(t)\|_{p+1}^{p+1} + \|y_t(t)\|_2^2 \right] \\
&\le \frac{d}{dt} L(t)
\end{aligned}
$$

yazılır. Buradan $\dfrac{C_3}{\varepsilon\phi} = \Gamma$ denirse $t \ge 0$, için

$$
\Gamma L^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \le \frac{d}{dt} L(t) \tag{3.59}
$$

elde edilir.

Eş. 3.59 diferansiyel eşitsizliği çözülürse ve $0 < \sigma < 1$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
&\Gamma t \le \frac{\sigma - 1}{\sigma} \left\{ L^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(t) - L^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(0) \right\} \\
&L^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(t) - L^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(0) \le \frac{\sigma}{\sigma - 1} \Gamma t
\end{aligned} \tag{3.60}
$$

yazılır.

$$L^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(t) \leq \frac{\sigma}{\sigma-1}\Gamma t + L^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(0) \tag{3.61}$$

elde edilir.

$$L^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) \geq \frac{1}{L^{\frac{-\sigma}{(1-\sigma)}}(0) - \frac{\Gamma t\sigma}{1-\sigma}} \ . \tag{3.62}$$

bulunur.

Bu eşitsizlikten $L(t)$ nin sonlu zamanda çözümlerinin sonsuza gittiği görülür ve T

$$T^{*} = \frac{1-\sigma}{\Gamma\sigma\left[L(0)\right]^{\sigma/(1-\sigma)}} \ . \tag{3.63}$$

aralığındadır.

3.1.3. Teorem

Eş. 3.1 in bir çözümü $y(x,t)$ olsun. $E(0) < 0$, $2m \geq p+1$ ve

$$L > \frac{4p}{(p-1)(p+1)} \tag{3.64}$$

olmak üzere, çözüm sonlu zamanda patlar.

Bu bölümde $2m \geq p+1$ için teoremin ispatı verilecektir. Eş. 3.64 den

$$\frac{L(p+1)}{2p} > \frac{2}{p-1}$$

yazılır.

Şimdi $G(t)$, $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$G(t) = -E(t) + \varepsilon\int_0^L xy_x(t)y_t(t)dx + \rho\varepsilon\int_0^L y_t(t)y(t)dx, \qquad \rho \in \left(\frac{2}{p-1}, \frac{L(p+1)}{2p}\right), \tag{3.65}$$

tanımlansın.

$$G(0) = -E(0) + \varepsilon\int_0^L xy_x^{\,0}y^1 dx + \rho\varepsilon\int_0^L y^1 y^0 dx > 0\,. \tag{3.66}$$

eşitliği sağlanacak şekilde ε yeterince büyük seçilsin.

3.1.3 Teoreminin ispatına yardımcı olması için aşağıdaki lemma verilsin.

3.1.4. Lemma: Eş. 3.1 in bir çözümü $y(x,t)$ olsun. $E(0) < 0$, $2m \geq p+1$ ve $L > \dfrac{4p}{(p-1)(p+1)}$ olsun. $t \geq 0$ için $G(t) > 0$ dır ve $\eta > 0$ bir pozitif sabit olmak üzere

$$\frac{d}{dt}G(t) \geq \eta\left[\left|y_t(L,t)\right|^{2m} + \left|y_t(L,t)\right|^2 + \left|y(L,t)\right|^{p+1}\right]. \tag{3.67}$$

eşitsizliği vardır.

İspat

$$\varphi(t) := \int_0^L xy_x(t)y_t(t)dx \tag{3.68}$$

olsun. Eş. 3.68 t ye göre türev alınır ve Eş. 3.2 ve Eş. 3.3 sınır-değer şartları kullanılırsa

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \int_0^L xy_t y_{xt} dx + \int_0^L xy_x y_{tt} dx \tag{3.69}$$

elde edilir.

Eş. 3.69 ün ikinci integralinde Eş. 3.1 yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\int_0^L xy_x y_{tt}dx &= \int_0^L xy_x(|y|^{p-1}\, y + y_{xx})dx \\
&= \int_0^L xyy_x\, |y|^{p-1}\, dx + \int_0^L xy_x y_{xx} dx
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

elde edilir. Eşitliğin ilk integralinde kısmi integrasyon uygulanıp sınır şartı kullanılırsa

$$
\int_0^L xy|y|^{p-1}\, y_x dx = \frac{1}{p+1}\int_0^L \left(x|y|^{p+1}\right)_x dx - \frac{1}{p+1}\int_0^L |y|^{p+1}\, dx \tag{3.71}
$$

elde edilir. Buradan

$$
\int_0^L xyy_x\,|y|^{p-1}\, dx = \frac{L}{p+1}|y(L,t)|^{p+1} - \frac{1}{p+1}\|y\|_{p+1}^{p+1} \tag{3.72}
$$

bulunur.

Şimdi Eş. 3.70 in ikinci integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$
2\int_0^L xy_x y_{xx} dx = \int_0^L \left(xy_x^2\right)_x dx - \int_0^L y_x^2 dx
$$

$$
\int_0^L xy_x y_{xx} dx = \frac{1}{2}\int_0^L (xy_x^2)_x\, dx - \frac{1}{2}\|y_x\|^2 \tag{3.73}
$$

elde edilmiş olur. Burada Eş. 3.3 sınır şartı kullanılırsa

$$
\frac{1}{2}\int_0^L (xy_x^2)_x\, dx - \frac{1}{2}\|y_x\|^2 = \frac{L}{2}|y_t(L,t)|^{2m} - \frac{1}{2}\|y_x\|^2 \tag{3.74}
$$

elde edilir.

Eş. 3.69 ün ilk integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^L xy_t y_{tx} dx = \frac{1}{2}\int_0^L (xy_t^2)_x dx - \frac{1}{2}\|y_t\|^2 \tag{3.75}$$

bulunur. Eş. 3.75 de Eş. 3.3 sınır şartı uygulanırsa

$$\int_0^L xy_t y_{tx} dx = \frac{L}{2}|y_t(L,t)|^2 - \frac{1}{2}\|y_t\|^2 \tag{3.76}$$

elde edilir. Şimdi Eş. 3.72, Eş. 3.74 ve Eş. 3.76; Eş. 3.69 de yerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{L}{2}|y_t(L,t)|^2 - \frac{1}{2}\|y_t\|^2 + \frac{L}{p+1}|y(L,t)|^{p+1} - \frac{1}{p+1}\|y\|_{p+1}^{p+1} + \frac{L}{2}|y_t(L,t)|^{2m} - \frac{1}{2}\|y_x\|^2 \tag{3.77}$$

elde edilir. Burada Eş. 3.1 denkleminin enerji denklemini kullanarak tekrar yazılırsa

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{L}{2}|y_t(L,t)|^{2m} + \frac{L}{2}|y_t(L,t)|^2 + \frac{L}{p+1}|y(L,t)|^{p+1} - E(t) - \frac{2}{p+1}\|y\|_{p+1}^{p+1} \tag{3.78}$$

bulunur.

Şimdi Eş. 3.67 türev alınırsa

$$\frac{d}{dt}\left(G(t) + E(t) - \rho\varepsilon\int_0^L y_t(t)y(t)dx \right) = \varepsilon\frac{d}{dt}\varphi(t) \tag{3.79}$$

yazılabilir.

Eş. 3.79 daki integral t' ye göre türev alınırsa ve Eş. 3.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \rho\varepsilon\frac{d}{dt}\int_0^L y_t y dx &= \rho\varepsilon\left(\int_0^L |y_t|^2 dx + \int_0^L y_{tt} y dx \right) \\ &= \rho\varepsilon\|y_t\|_2^2 + \rho\varepsilon\|y\|_{p+1}^{p+1} + \int_0^L yy_{xx} dx \end{aligned} \tag{3.80}$$

elde edilir.

Şimdi Eş. 3.80 nin integralinde kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\rho\varepsilon\int_0^L yy_{xx}dx = \rho\varepsilon\int_0^L \left(yy_x\right)_x dx - \rho\varepsilon\int_0^L y_x^2 dx \tag{3.81}$$

yazılır. Sınır şartından

$$\rho\varepsilon\int_0^L yy_{xx}dx = \rho\varepsilon y(L,t)y_t(L,t)\left|y_t(L,t)\right|^{m-1} - \rho\varepsilon\left\|y_x\right\|_2^2, \tag{3.82}$$

elde edilir.

Eş. 3.82; Eş. 3.80 yerine yazılırsa

$$-\rho\varepsilon\frac{d}{dt}\int_0^L y_t y dx = -\rho\varepsilon\left\|y_t\right\|_2^2 - \rho\varepsilon\left\|y\right\|_{p+1}^{p+1} - \rho\varepsilon y(L,t)y_t(L,t)\left|y_t(L,t)\right|^{m-1} + \rho\varepsilon\left\|y_x\right\|_2^2 \tag{3.83}$$

bulunur. Eş. 3.1 in enerji denklemi $\rho\varepsilon$ ile çarpılırsa

$$2\rho\varepsilon E(t) = \rho\varepsilon\left\|y_t\right\|^2 + \rho\varepsilon\left\|y_x\right\|^2 - \frac{2\rho\varepsilon}{p+1}\left\|y\right\|_{p+1}^{p+1} \tag{3.84}$$

elde edilmiş olur.

Eş. 3.12, Eş. 3.78 ve Eş. 3.83; Eş. 3.79 da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}G(t) = {} & \left|y_t(L,t)\right|^{m+1} + \rho\varepsilon y(L,t)y_t(L,t)\left|y_t(L,t)\right|^{m-1} - \rho\varepsilon\left\|y_x\right\|^2 + \rho\varepsilon\left\|y\right\|_{p+1}^{p+1} \\ & + \frac{L}{2}\varepsilon\left|y_t(L,t)\right|^2 + \frac{L}{2}\varepsilon\left|y_t(L,t)\right|^{2m} + \frac{L}{p+1}\varepsilon\left|y(L,t)\right|^{p+1} - \varepsilon E(t) \\ & + \rho\varepsilon\left\|y_t\right\|_2^2 - \frac{2\varepsilon}{p+1}\left\|y\right\|_{p+1}^{p+1}\end{aligned} \tag{3.85}$$

bulunur. Bu eşitlik Eş. 3.84 den dolayı tekrar düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(t) &= \left|y_t(L,t)\right|^{m+1} + \rho\varepsilon y(L,t)y_t(L,t)\left|y_t(L,t)\right|^{m-1} - \left[\varepsilon + 2\rho\varepsilon\right]E(t) \\
&\quad + \varepsilon\left(\frac{p-1}{p+1}\rho - \frac{2}{p+1}\right)\|y\|_{p+1}^{p+1} + \frac{L}{2}\varepsilon\left|y_t(L,t)\right|^2 + \frac{L}{2}\varepsilon\left|y_t(L,t)\right|^{2m} \\
&\quad + \frac{L}{p+1}\varepsilon\left|y(L,t)\right|^{p+1} + 2\rho\varepsilon\|y_t(t)\|_2^2
\end{aligned}
\tag{3.86}
$$

yazılır.

Eş. 3.86 da yer alan $y(L,t)y_t(L,t)\left|y_t(L,t)\right|^{m-1}$ için bir eşitsizlik bulmak için $\gamma = \frac{p+1}{p}$, $\lambda = p+1$ olmak üzere Young eşitsizliği kullanılırsa

$$
y(L,t)y_t(L,t)\left|y_t(L,t)\right|^{m-1} \le \left|y(L,t)\right|\left|y_t(L,t)\right|^{m} \le \frac{1}{p+1}\left|y(L,t)\right|^{p+1} + \frac{p}{p+1}\left|y_t(L,t)\right|^{m\frac{p+1}{p}} \tag{3.87}
$$

bulunur. Bu eşitsizlik Eş. 3.86 da yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}G(t) &\ge \frac{L}{2}\varepsilon\left|y_t(L,t)\right|^2 + \frac{L}{2}\varepsilon\left|y_t(L,t)\right|^{2m} + \frac{L}{p+1}\varepsilon\left|y(L,t)\right|^{p+1} \\
&\quad + \frac{p\rho\varepsilon}{p+1}\left|y_t(L,t)\right|^{m\frac{p+1}{p}} + \frac{\varepsilon\rho}{p+1}\left|y(L,t)\right|^{p+1}
\end{aligned}
\tag{3.88}
$$

elde edilir.

$2m \ge p+1$ olduğundan $m\frac{p+1}{p} - 2 \ge \frac{(p+1)^2 - 4p}{2p} = \frac{(p-1)^2}{2p} > 0$ olur. Buradan da

$2 < m\frac{(p+1)}{2} < 2m$ olduğu görülür.

Şimdi $\left|y_t(L,t)\right| < 1$ olsun.

$\left|y_t(L,t)\right|^{2m} < \left|y_t(L,t)\right|^{m\frac{(p+1)}{2}} < \left|y_t(L,t)\right|^2,$

$$\left|y_t(L,t)\right|^{m\frac{(p+1)}{2}} < \left|y_t(L,t)\right|^2 + \left|y_t(L,t)\right|^{2m},$$

$$\frac{-p\rho\varepsilon}{p+1}\left\{\left|y_t(L,t)\right|^2 + \left|y_t(L,t)\right|^{2m}\right\} < \frac{-p\rho\varepsilon}{p+1}\left|y_t(L,t)\right|^{m\frac{(p+1)}{2}}$$

elde edilir.

Şimdi de $\left|y_t(L,t)\right| \geq 1$ olsun. Bu durumda

$$\left|y_t(L,t)\right|^2 < \left|y_t(L,t)\right|^{m\frac{(p+1)}{2}} < \left|y_t(L,t)\right|^{2m}$$

olur. Buradan

$$\frac{-p\rho\varepsilon}{p+1}\left\{\left|y_t(L,t)\right|^2 + \left|y_t(L,t)\right|^{2m}\right\} < \frac{-p\rho\varepsilon}{p+1}\left|y_t(L,t)\right|^{m\frac{(p+1)}{2}} \tag{3.89}$$

olduğu görülür.

Şimdi Eş. 3.88 de Eş. 3.89 kullanılırsa

$$\frac{d}{dt}G(t) \geq \left[\frac{L\varepsilon}{2} - \frac{p\rho\varepsilon}{p+1}\right]\left[\left|y_t(L,t)\right|^2 + \left|y_t(L,t)\right|^{2m}\right] + \left[\frac{L\varepsilon}{p+1} - \frac{\rho\varepsilon}{p+1}\right]\left|y_t(L,t)\right|^{p+1} \tag{3.90}$$

elde edilir.

$\frac{L\varepsilon}{2} - \frac{p\rho\varepsilon}{p+1} > 0,\ \frac{L\varepsilon}{p+1} - \frac{\rho\varepsilon}{p+1} > 0$ olduğundan

$$\frac{d}{dt}G(t) \geq \eta\left[\left|y_t(L,t)\right|^2 + \left|y_t(L,t)\right|^{2m} + \left|y(L,t)\right|^{p+1}\right] \tag{3.91}$$

yazılabilir. Buradan $\eta = \min\left\{\frac{L\varepsilon}{2} - \frac{p\rho\varepsilon}{p+1}, \frac{L\varepsilon}{p+1} - \frac{\rho\varepsilon}{p+1}\right\}$ dir.

Şimdi 3.1.3 Teoremin ispatı verilsin;

İspat

$\alpha = \dfrac{p-1}{2(p+1)}$ olmak üzere

$$F(t) := G^{1-\alpha}(t) + \theta \int_0^L y_t(t) y(t) dx, \tag{3.92}$$

olarak tanımlansın.

Eş. 3.92'i t'ye göre türev alıp, Eş. 3.1 kullanılırsa

$$\frac{d}{dt} F(t) = (1-\alpha) G^{-\alpha}(t) G'(t) + \frac{d}{dt} \theta \int_0^L y_t y dx$$

$$\frac{d}{dt} F(t) = (1-\alpha) G^{-\alpha}(t) G'(t) + \theta \|y_t\|^2 + \theta \int_0^L |y|^{p+1} dx + \theta \int_0^L y y_{xx} dx \tag{3.93}$$

elde edilir.

Eş. 3.93 ün ikinci integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\theta \int_0^L y y_{xx} dx = \theta \int_0^L \left(y y_x \right)_x dx - \theta \int_0^L y_x^2 dx \tag{3.94}$$

bulunur.

Eş. 3.3 sınır şartını kullanarak

$$\theta \int_0^L y y_{xx} dx = = \theta y(L,t) \left| y_t(L,t) \right|^{m-1} y_t(L,t) - \theta \|y_x\|^2 \tag{3.95}$$

yazılır.

$E(t)$ nin tanımını kullanıp θ ile çarpılırsa

$$2\theta E(t) = \theta \|y_t\|_2^2 + \theta \|y_x\|_2^2 - \frac{2\theta}{p+1}\|y(t)\|_{p+1}^{p+1} \tag{3.96}$$

elde edilir.

Eş. 3.95 ve lemma 3.1.4, Eş. 3.93 yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(t) &\geq (1-\alpha)G^{-\alpha}(t)\eta\left[|y_t(L,t)|^{2m} + |y_t(L,t)|^2 + |y(L,t)|^{p+1}\right] + \theta\|y_t\|_2^2 \\ &\quad - \theta|y(L,t)||y_t(L,t)|^m - \theta\|y_x\|_2^2 + \theta\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\|y\|_{p+1}^{p+1} + \frac{2\theta}{p+1}\|y\|_{p+1}^{p+1}\end{aligned} \tag{3.97}$$

bulunur.

Bu eşitsizlik, Eş. 3.96 kullanarak tekrar yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(t) &\geq (1-\alpha)G^{-\alpha}(t)\eta\left[|y_t(L,t)|^{2m} + |y_t(L,t)|^2 + |y(L,t)|^{p+1}\right] - 2\theta E(t) + 2\theta\|y_t\|_2^2 \\ &\quad - \theta|y(L,t)||y_t(L,t)|^m + \theta\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\|y\|_{p+1}^{p+1}\end{aligned} \tag{3.98}$$

elde edilmiş olur.

Eş. 3.98 deki $|y(L,t)||y_t(L,t)|^m$ için bir eşitsizlik bulunsun. Burada $p = \dfrac{1}{1-\alpha}, q = \dfrac{1}{\alpha}$ olmak üzere Young eşitsizliği kullanılırsa,

$$|y(L,t)||y_t(L,t)|^m \leq (1-\alpha)\left\{\frac{|y_t(L,t)|^m\,|y(L,t)|}{\delta}\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}} + \alpha\delta^{\frac{1}{\alpha}} \tag{3.99}$$

bulunur.

Eş. 3.98 de; Eş. 3.99 yazılırsa

$$\frac{d}{dt}F(t) \geq (1-\alpha)G^{-\alpha}(t)\eta\left[\left|y_t(L,t)\right|^{2m} + \left|y_t(L,t)\right|^2 + \left|y(L,t)\right|^{p+1}\right] - 2\theta E(t) + 2\theta\left\|y_t\right\|_2^2$$
$$-\theta\left[\left(1-\alpha\right)\delta^{\frac{-1}{1-\alpha}}\left(\left|y_t(L,t)\right|^{\frac{m}{1-\alpha}}\left|y(L,t)\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right) + \alpha\delta^{\frac{1}{\alpha}}\right] + \theta\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\left\|y\right\|_{p+1}^{p+1} \tag{3.100}$$

elde edilir. Burada $k \geq 0$ ve $\delta > 0$ için $\delta^{1/\alpha} = K^{-1/\alpha}.G^{1-\alpha}(t)$ dir.

Bu eşitlik göz önüne alınıp Eş. 3.100 den

$$\frac{d}{dt}F(t) \geq (1-\alpha)G^{-\alpha}(t)\eta\left[\left|y_t(L,t)\right|^{2m} + \left|y_t(L,t)\right|^2 + \left|y(L,t)\right|^{p+1}\right] - 2\theta E(t) + 2\theta\left\|y_t\right\|_2^2$$
$$-\theta\left[(1-\alpha)K^{\frac{1}{1-\alpha}}.G^{-\alpha}(t)\left|y_t(L,t)\right|^{\frac{m}{1-\alpha}}\left|y(L,t)\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} + \alpha K^{\frac{-1}{\alpha}}.G^{1-\alpha}(t)\right] \tag{3.101}$$
$$+\theta\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\left\|y\right\|_{p+1}^{p+1}$$

bulunur.

Eş. 3.101 tekrar yazılırsa

$$\frac{d}{dt}F(t) \geq (1-\alpha)G^{-\alpha}(t)\left[\eta(\left|y_t(L,t)\right|^{2m} + \left|y_t(L,t)\right|^2 + \left|y(L,t)\right|^{p+1})\right]$$
$$+(1-\alpha)G^{-\alpha}(t)\left[-\theta K^{\frac{1}{1-\alpha}}\left|y_t(L,t)\right|^{\frac{m}{1-\alpha}}\left|y(L,t)\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right] - 2\theta E(t) + 2\theta\left\|y_t\right\|_2^2 \tag{3.102}$$
$$-\theta\alpha K^{-1/\alpha}.G^{1-\alpha}(t) + +\theta\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\left\|y\right\|_{p+1}^{p+1}$$

$\left|y_t(L,t)\right|^{\frac{m}{1-\alpha}}\left|y(L,t)\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}$ çarpımına Young eşitsizliği $s = \dfrac{2(1-\alpha)}{1-2\alpha}$, $\varpi = 2(1-\alpha)$ olmak üzere uygulanırsa;

$$\left|y_t(L,t)\right|^{\frac{m}{1-\alpha}}\left|y(L,t)\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \frac{1}{2(1-\alpha)}\left(\left|y_t(L,t)\right|^{\frac{m}{1-\alpha}}\right)^{2(1-\alpha)} + \frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)}\left(\left|y(L,t)\right|^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\frac{2(1-\alpha)}{1-2\alpha}}$$
$$\leq \frac{1}{2(1-\alpha)}\left|y_t(L,t)\right|^{2m} + \frac{(1-2\alpha)}{2(1-\alpha)}\left|y(L,t)\right|^{\frac{2}{1-2\alpha}} \tag{3.103}$$

olur.

Eş. 3.102 de Eş. 3.103 yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) &\geq (1-\alpha)G^{-\alpha}(t)\left[\eta\left[\left|y_t(L,t)\right|^{2m}+\left|y_t(L,t)\right|^{2}+\left|y(L,t)\right|^{p+1}\right]\right] \\
&+(1-\alpha)G^{-\alpha}(t)\left[-\theta K^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{1}{2(1-\alpha)}\left|y_t(L,t)\right|^{2m}+\frac{(1-2\alpha)}{2(1-\alpha)}\left|y(L,t)\right|^{\frac{2}{1-2\alpha}}\right)\right] \\
&-2\theta E(t)+2\theta\left\|y_t\right\|_2^2-\theta\alpha K^{\frac{-1}{\alpha}}.G^{1-\alpha}(t)+\theta\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\left\|y\right\|_{p+1}^{p+1}
\end{aligned}
\tag{3.104}
$$

bulunur.

Eş. 3.104, $C=\dfrac{1}{2(1-\alpha)}$ olmak üzere tekrar yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F(t) &\geq (1-\alpha)G^{-\alpha}(t)\left(\eta-\theta C K^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)\left[\left|y_t(L,t)\right|^{2m}+\left|y_t(L,t)\right|^{2}+\left|y(L,t)\right|^{p+1}\right]-2\theta E(t) \\
&+2\theta\left\|y_t\right\|_2^2-\theta\alpha K^{\frac{-1}{\alpha}}.G^{1-\alpha}(t)+\theta\left(\frac{p-1}{p+1}\right)\left\|y\right\|_{p+1}^{p+1}
\end{aligned}
\tag{3.105}
$$

yazılır.

Eş. 3.66 da Cauchy-Schwart eşitsizliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
G(t) &\leq -E(t)+\int_0^L \left|y_x(t)\right|\left|y_t(t)\right|dx+\rho\varepsilon\int_0^L\left|y(t)\right|\left|y_t(t)\right|dx \\
&\leq -E(t)+L\varepsilon\left\|y_x(t)\right\|_2\left\|y_t(t)\right\|_2+\rho\varepsilon\left\|y(t)\right\|_2\left\|y_t(t)\right\|_2
\end{aligned}
\tag{3.106}
$$

elde edilir.

Burada Young eşitsizliği $p=2,\ q=2$ için kullanılırsa

$$L\varepsilon\|y_x(t)\|_2\,\|y_t(t)\|_2+\rho\varepsilon\|y(t)\|_2\,\|y_t(t)\|_2=L\varepsilon\left(\frac{1}{2}\|y_x(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|y_t(t)\|_2^2\right)+\rho\varepsilon\left(\frac{1}{2}\|y(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|y_t(t)\|_2^2\right)$$
$$=\frac{L\varepsilon}{2}\|y_x(t)\|_2^2+\frac{L\varepsilon}{2}\|y_t(t)\|_2^2+\frac{\rho\varepsilon}{2}\|y(t)\|_2^2+\frac{\rho\varepsilon}{2}\|y_t(t)\|_2^2$$

yazılır.

Burada Sobolev gömme Teoreminden

$$L\varepsilon\|y_x(t)\|_2\,\|y_t(t)\|_2+\rho\varepsilon\|y(t)\|_2\,\|y_t(t)\|_2\le\frac{L\varepsilon}{2}\|y_x(t)\|_2^2+\frac{L\varepsilon}{2}\|y_t(t)\|_2^2+\frac{\rho\varepsilon C}{2}\|y_x(t)\|_2^2+\frac{\rho\varepsilon}{2}\|y_t(t)\|_2^2 \tag{3.107}$$

olur.

Eş. 3.106 da Eş. 3.107 kullanılırsa ve $E(t)$ yerine yazılırsa

$$G(t)\le\left(\frac{L\varepsilon}{2}+\frac{\rho\varepsilon}{2}-\frac{1}{2}\right)\|y_t(t)\|_2^2+\left(\frac{L\varepsilon}{2}+\frac{\rho\varepsilon C}{2}-\frac{1}{2}\right)\|y_x(t)\|_2^2+\frac{1}{p+1}\|y(t)\|_{p+1}^{p+1} \tag{3.108}$$

elde edilir.

$C_1=\max\left\{\frac{L\varepsilon}{2}+\frac{\rho\varepsilon}{2}-\frac{1}{2},\frac{L\varepsilon}{2}+\frac{\rho\varepsilon C}{2}-\frac{1}{2},\frac{1}{p+1}\right\}$ olarak alınırsa

$$G(t)\le C_1\left\{\|y_t\|_2^2+\|y_x\|_2^2+\|y\|_{p+1}^{p+1}\right\} \tag{3.109}$$

bulunur. $E(t)<E(0)<0$ olduğundan ve $E(t)$ nin tanımından

$$G(t)\le C_1\|y\|_{p+1}^{p+1} \tag{3.110}$$

olur.

$\alpha=\frac{p-1}{2(p+1)}$, $(1-\alpha)(p+1)<p+1$ olmak üzere ve Eş. 3.110 dan

$$G(t)^{1-\alpha} \leq C_1 \left\| y(t) \right\|_{p+1}^{(1-\alpha)(p+1)} \leq C_1 \left\| y(t) \right\|_{p+1}^{p+1} \tag{3.111}$$

bulunur.

Bu eşitsizlik, Eş. 3.105 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(t) &\geq (1-\alpha)G^{-\alpha}(t)(\eta - \theta C K^{\frac{1}{1-\alpha}})\left[\left| y_t(L,t) \right|^{2m} + \left| y_t(L,t) \right|^2 + \left| y(L,t) \right|^{p+1} \right] \\ &+ 2\theta \left\| y_t \right\|_2^2 + \left[\theta \frac{p-1}{p+1} - \theta \alpha C_1 K^{\frac{-1}{\alpha}} \right] \left\| y(t) \right\|_{p+1}^{p+1} \end{aligned} \tag{3.112}$$

yazılır. $\frac{p-1}{p+1} - \alpha C_1 K^{\frac{-1}{\alpha}} > 0$ olsun. Eş. 3.112, $\beta = \min\left\{ 2, \frac{p-1}{p+1} - \alpha C_1 K^{\frac{-1}{\alpha}} \right\}$ olmak üzere tekrar yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(t) &\geq (1-\alpha)G^{-\alpha}(t)(\eta - \theta C K^{\frac{1}{1-\alpha}})\left[\left| y_t(L,t) \right|^{2m} + \left| y_t(L,t) \right|^2 + \left| y(L,t) \right|^{p+1} \right] \\ &+ \theta\beta \left[\left\| y_t(t) \right\|_2^2 + \left\| y(t) \right\|_{p+1}^{p+1} \right] \end{aligned} \tag{3.113}$$

elde edilmiş olur. $\eta - \theta C K^{\frac{1}{1-\alpha}} > 0$ olacak şekilde θ yeterince küçük seçilirse

$$\frac{d}{dt}F(t) \geq \theta\beta \left[\left\| y_t(t) \right\|_2^2 + \left\| y(t) \right\|_{p+1}^{p+1} \right] \tag{3.114}$$

elde edilir. Şimdi $F(t)$ için bir üst eşitsizlik bulmak için $F(t)$ nin Eş. 3.92 tanımında Eş. 3.56 ve Eş. 3.110 leri kullanılırsa

$$\begin{aligned} F(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} &= \left[G(t)^{1-\alpha} + \theta \int_0^L y y_t dx \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left[\left(G(t)^{1-\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} + \left| \varepsilon \int_0^L y y_t dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \right] \\ &\leq C_2 . 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left\| y(t) \right\|_{p+1}^{p+1} \\ &+ 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} . \varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}} C_1 \left[\left\| y_t(t) \right\|_2^2 + \left\| y(t) \right\|_{p+1}^{p+1} \right] \end{aligned} \tag{3.115}$$

elde edilir.

$C_3 = \max\left\{C_2.2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}, \varepsilon^{\frac{1}{1-\alpha}}.C_1.2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right\}$ olmak üzere

$$F(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} \le C_3\left[\|y_t(t)\|_2^2 + \|y(t)\|_{p+1}^{p+1}\right] \tag{3.116}$$

bulunur.

Eş. 3.114 ve Eş. 3.116 dan $\forall t \ge 0$ için

$$\frac{d}{dt}F(t) \ge \Gamma_1 F^{1/1-\alpha}(t) \tag{3.117}$$

elde edilir. Burada $\Gamma_1 = \dfrac{\theta\beta}{C_3} > 0$ dir.

Eş. 3.117 diferansiyel eşitsizliği çözülürse

$$(\frac{1}{\alpha-1}+1)^{-1}\left\{F^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t) - F^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(0)\right\} \ge \Gamma_1 t \tag{3.118}$$

olur. Buradan

$$F^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(t) - F^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(0) \le \frac{\alpha}{\alpha-1}\Gamma_1 t \tag{3.119}$$

yazılır. Buradan

$$\frac{1}{F^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}(0) - \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\Gamma_1 t} \le F^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t) \tag{3.120}$$

elde edilir. Böylece istenilen sonuç elde edilmiş olur.

4. VERİLEN BAŞLANGIÇ VE SINIR ŞARTLARIYLA BİRLİKTE BİR DALGA DENKLEMİNİN YEREL OLMAYAN ÇÖZÜMLERİ VE ÇÖZÜMLERİNİN SONLU ZAMANDA PATLAMASI

4.1. Yerel Olmayan Çözümlerin Bulunması

Bu bölümde,

$$u_{tt} - ku_{xx} - \left(a(x)u_x\right)_x + bu_t = f(u), \qquad (x,t) \in \left[0,1\right] \times (0,T) \tag{4.1}$$

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(1,t) = u_x(1,t) = 0 \qquad t \in \left(0,T\right), \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \left[0,1\right] \tag{4.3}$$

denkleminin yerel olmayan çözümleri, süreklilik prensibinden verilmiştir. $a(x) \in C^1\left[0,1\right]$ olmak üzere $a(x) > 0$, $k,\ b > 0$ ve $f(s) \in C(\mathbb{R})$dir.

Şimdi Eş. 4.1 in enerjisini bulunsun. Eş. 4.1 in her iki tarafı da u_t ile $L_2\left[0,1\right]$ anlamında iç çarpılırsa

$$(u_{tt},u_t) + (ku_{xx},u_t) - (\left[a(x)u_x\right]_x,u_t) + b(u_t,u_t) = \left(f(u),u_t\right) \tag{4.4}$$

elde edilir.

Eş. 4.4 ün birinci iç çarpımından

$$(u_{tt},u_t) = \int_0^l u_{tt}u_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_t\right\|_2^2 \tag{4.5}$$

elde edilir.

İkinci iç çarpımda kısmi integrasyon kullanılırsa

$$\int_0^1 k u_{xx} u_t dx = k\int_0^1 \left(u_x u_t\right)_x dx + k\int_0^1 u_x u_{tx} dx \tag{4.6}$$

bulunur. Eş. 4.2 den

$$\begin{aligned}\int_0^1 k u_{xx} u_t dx &= k u_x(1,t) u_t(1,t) - k u_x(0,t) u_t(0,t) + k\int_0^l u_x u_{tx} dx \\ &= \frac{k}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|_2^2\end{aligned} \tag{4.7}$$

elde edilir. Ve aynı şekilde 3. üncü iç çarpımdan

$$\begin{aligned}-\int_0^l (a(x)u_x)_x u_t dx &= -\left(\int_0^l \left(a(x)u_x u_t\right)_x dx - \int_0^l a(x)u_x u_{tx} dx\right) \\ &= -\int_0^l \left(a(x)u_x u_t\right)_x dx + \int_0^l a(x)u_x u_{tx} dx\end{aligned} \tag{4.8}$$

bulunur. Eş. 4.2 den

$$-\int_0^l (a(x)u_x)_x u_t dx = \int_0^l a(x)u_x u_{tx} dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^l a(x)u_x^2 dx\right) \tag{4.9}$$

yazılır. Ayrıca

$$b\int_0^1 u_t u_t dx = b\int_0^1 u_t^2 dx \tag{4.10}$$

elde edilir.

$F(u) = \int_0^{u(t)} f(\zeta)d\zeta$ olarak alındığında

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}F(u)dx = \int_0^1 f(u)u_t dx \tag{4.11}$$

olduğu görülür.

Şimdi Eş. 4.5, Eş. 4.7, Eş. 4.9, Eş. 4.10 ve Eş.4.11; Eş. 4.4 de yerlerine yazılırsa

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{k}{2}\|u_x\|_2^2+\frac{1}{2}\int_0^1 a(x)u_x^2dx-\int_0^1 F(u)dx\right]=-b\int_0^1 u_t^2dx \tag{4.12}$$

sonucuna varılır. Bu eşitlikten

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{k}{2}\|u_x\|^2+\frac{1}{2}\int_0^1 a(x)u_x^2dx-\int_0^1 F(u)dx, \tag{4.13}$$

Eş. 4.1 in enerji denklemi bulunur.

Buradan Eş. 4.12 den

$$\frac{d}{dt}E(t)=-b\|u_t\|_2^2 \tag{4.14}$$

olduğu açıktır.

Şimdi Eş. 4.1 denkleminin yerel olmayan çözümünü vermek için aşağıdaki teorem verilsin.

4.1.1. Teorem

$u(x,t)$, Eş. 4.1 in bir çözümü olsun. $a(x)>0,\ k>\dfrac{b^2}{2\lambda}$ ve $k\in\mathbb{R}$ bir $s\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f(s)$ fonksiyonun,

$$f^2(s)\le AF(s), \tag{4.15}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir A pozitif sayısı var ise , $u(x,t)$, Eş. 4.1-Eş. 4.3 başlangıç ve sınır-değer probleminin yerel olmayan çözümüdür.

İspat

$$G(t) = E(t) + 2\int_0^1 F(u)dx \tag{4.16}$$

olsun, Eş. 4.16 nın türevi alınıp ve Eş. 4.14 kullanılırsa

$$G'(t) = -b\|u_t\|_2^2 + 2\int_0^1 f(u)u_t dx, \tag{4.17}$$

$$G'(t) \leq 2\int_0^1 f(u)u_t dx \tag{4.18}$$

elde edilir.

Eş. 4.18 in sağ tarafına Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılırsa;

$$|G'(t)| \leq 2\left|\int_0^1 f(u)u_t dx\right| \leq 2\int_0^1 |f(u)u_t|dx \leq 2\left(\|f(u)\|_2 \|u_t\|_2\right) \tag{4.19}$$

olur. Ayrıca bu eşitsizlikte Young eşitsizliği uygulanırsa, $\eta > 0$ ve $p = q = 2$ için,

$$\mathrm{G}'(\mathrm{t}) \leq \frac{1}{2\eta}\|f(u)\|_2^2 + 2\eta\|u_t\|_2^2 \tag{4.20}$$

$$G'(t) \leq \frac{1}{2\eta}\int_0^1 f^2(u)dx + \eta\|u_t\|_2^2 \tag{4.21}$$

elde edilir.

Burada Eş. 4.15 kullanılırsa

$$|G'(t)| \leq \frac{A}{2\eta}\int_0^1 F(u)dx + 2\eta\|u_t\|_2^2 \tag{4.22}$$

bulunur. Eş. 4.16 dan

$$2G(t)=\|u_t\|_2^2+k\|u_x\|^2+\int_0^1 a(x)u_x^2dx+2\int_0^1 F(u)dx \tag{4.23}$$

yazılır. Böylece

$$\|u_t\|_2^2+2\int_0^1 F(u)dx\le 2G(t) \tag{4.24}$$

olduğu görülür.

Eş. 4.22 den, $\beta=\max\left\{\dfrac{A}{4\eta},2\eta\right\}$ olmak üzere

$$|G'(t)|\le\beta\left\{\|u_t\|_2^2+2\int_0^1 F(u)dx\right\}$$

bulunur. Buradan

$$|G'(t)|\le 2\beta G(t) \tag{4.25}$$

elde edilir.

Burada Grownwall lemması kullanılırsa

$$0\le G(t)\le G(0)e^{2\beta t} \tag{4.26}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Böylece $G(t)$ nin tanımı ve süreklilik prensibinden 4.1.1 Teoreminin ispatı tamamlanmış olur.

4.2. Çözümlerin Patlaması

4.2.1. Teorem

Eş. 4.1 in bir çözümü $u(x,t)$ olsun. Eğer

(i) $f(s)$ fonksiyonu

$$sf(s) \geq 4F(s),\ for\ s \in \mathbb{R} \tag{4.27}$$

sağlıyorsa,

(ii) Başlangıç şartları

$$E(0) \leq 0,\ 0 < \int_0^1 u_0(x)u_1(x)dx, \tag{4.28}$$

sağlıyorsa,

(iii) $u(x,t)$, $\|u\| < 1$ (4.29)

sağlıyorsa,

$u(x,t)$, sonlu zamanda patlar ve

$$T_{\max} \leq \frac{1-\gamma}{\alpha\gamma L^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}(0)} \tag{4.30}$$

olur. Burada $\alpha > 0$ ve $0 < \gamma < \frac{1}{4}$ olarak alınan reel sayılardır.

İspat

$$H(t) := -E(t) \tag{4.31}$$

ve

$$L(t) := H^{1-\gamma}(t) + \varepsilon \int_0^1 u u_t dx \tag{4.32}$$

olsun. Eş. 4.14, Eş. 4.28 ve Eş. 4.31 den

$$\frac{d}{dt} H(t) = b \|u_t\|_2^2 \geq 0 \tag{4.33}$$

elde edilir. Ayrıca $H(t)$ artan bir fonksiyon olduğundan

$$t \geq 0 \text{ için, } H(t) \geq H(0) \geq 0 \tag{4.34}$$

olduğu görür.

Eş. 4.32 ün türevi alınıp, Eş. 4.33 kullanılırsa

$$\frac{d}{dt} L(t) = (1-\gamma) H^{-\gamma}(t) b \|u_t\|_2^2 + \varepsilon \|u_t\|_2^2 + \varepsilon \int_0^1 u u_{tt} dx \tag{4.35}$$

olur.

Burada u_{tt} terimi Eş. 4.1 den

$$u_{tt} = k u_{xx} + \left(a(x) u_x\right)_x - b u_t + f(u) \tag{4.36}$$

şeklinde yazılır.

Burada Eş. 4.35 in son terimini bulmak için, Eş. 4.36 u ile $L_2(0,1)$ anlamında iç çarpılırsa

$$(u_{tt},u)=(ku_{xx},u)+((a(x)u_x)_x,u)-(bu_t,u)+(f(u),u) \tag{4.37}$$

elde edilir.

Bu eşitliğin sağındaki ilk iç çarpımda kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_0^l ku_{xx}u\,dx=k\int_0^l (u_x u)_x\,dx-k\int_0^l u_x u_x\,dx \tag{4.38}$$

yazılır.

Eş. 4.2 sınır şartlarından

$$\begin{aligned}\int_0^l ku_{xx}u\,dx&=ku_x(1,t)u(1,t)-ku_x(0,t)u(0,t)-k\int_0^l u_x u_x\,dx\\ &=-k\left\|u_x\right\|^2\end{aligned} \tag{4.39}$$

elde edilmiş olur.

Eş. 4.37 nin sağındaki ikinci iç çarpımda aynı şekilde kısmi integrasyon uygulanıp daha sonra Eş. 4.2 sınır şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^l \left(a(x)u_x\right)_x u\,dx&=\int_0^l \left(a(x)u_x u\right)_x dx-\int_0^l a(x)u_x u_x\,dx\\ &=-\int_0^l a(x)u_x^2\,dx\end{aligned} \tag{4.40}$$

bulunur.

Eş. 4.39, Eş. 4.40; Eş. 4.35 da yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(t)&=\left(1-\gamma\right)H^{-\gamma}(t)b\left\|u_t\right\|_2^2+\varepsilon\left\|u_t\right\|_2^2-k\varepsilon\left\|u_x\right\|_2^2-\varepsilon\int_0^1 a(x)u_x^2\,dx-b\varepsilon\int_0^1 uu_t\,dx\\ &\quad+\varepsilon\int_0^1 f(u)u\,dx\end{aligned} \tag{4.41}$$

elde edilir.

$E(t)$ ve $H(t)$ nin tanımından

$$4\varepsilon H(t) = -2\varepsilon \|u_t\|_2^2 - 2\varepsilon k \|u_x\|_2^2 - 2\varepsilon \int_0^1 a(x) u_x^2 dx + 4\varepsilon \int_0^1 F(u) dx \tag{4.42}$$

yazılabilir.

Eş. 4.42, Eş. 4.41 de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(t) = &\left(1-\gamma\right) H^{-\gamma}(t) b \|u_t\|_2^2 + \varepsilon \|u_t\|_2^2 - k\varepsilon \|u_x\|_2^2 + \varepsilon \int_0^1 a(x) u_x^2 dx - b\varepsilon \int_0^1 u u_t dx \\ &+ \varepsilon \int_0^1 f(u) u dx + 4\varepsilon H(t) + 2\varepsilon \|u_t\|_2^2 + 2\varepsilon k \|u_x\|_2^2 - 4\varepsilon \int_0^1 F(u) dx \end{aligned} \tag{4.43}$$

elde edilir.

$a(x) > 0$ olduğundan $\varepsilon \int_0^1 a(x) u_x^2 dx > 0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(t) \geq\ & b\left(1-\gamma\right) H^{-\gamma}(t) \|u_t\|_2^2 + 3\varepsilon \|u_t\|_2^2 + \varepsilon k \|u_x\|_2^2 - b\varepsilon \int_0^1 u u_t dx + \varepsilon \int_0^1 \left(f(u)u - 4F(u)\right) dx \\ &+ 4\varepsilon H(t) \end{aligned} \tag{4.44}$$

olur.

Bu eşitsizliğin 4. üncü terimine Cauchy-Schwartz ve daha sonra Young eşitsizliği kullanılırsa

$p = q = 2$ olmak üzere ve $\varepsilon = \dfrac{b}{2}$

$$\int_0^1 u u_t dx \leq \int_0^1 |u||u_t| dx \leq \|u\| \|u_t\| \leq \frac{b}{2} \|u\|_2^2 + \frac{1}{2b} \|u_t\|_2^2 \tag{4.45}$$

bulunur.

Eş. 4.45 den

$$-b\varepsilon\int_0^1 u u_t dx \geq -\frac{\varepsilon b^2}{2}\|u\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|_2^2 \tag{4.46}$$

yazılır.

Eş. 4.46; Eş. 4.44 de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(t) \geq b(1-\gamma)H^{-\gamma}(t)\|u_t\|_2^2 + 3\varepsilon\|u_t\|_2^2 + \varepsilon k\|u_x\|_2^2 - \frac{\varepsilon b^2}{2}\|u\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|_2^2 \\ + \varepsilon\int_0^1 \left(f(u)u - 4F(u)\right)dx + 4\varepsilon H(t)\end{aligned} \tag{4.47}$$

elde edilir.

$0 < \gamma \leq \frac{1}{4}$, $f(u)u \geq 4F(u)$ eşitsizlikleri Eş. 4.47 de uygulanırsa

$$\frac{d}{dt}L(t) \geq \frac{5}{2}\varepsilon\|u_t\|_2^2 + 4\varepsilon H(t) + \varepsilon k\|u_x\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2}b^2\|u\|_2^2 \tag{4.48}$$

olur.

Poincare eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(t) \geq \frac{5}{2}\varepsilon\|u_t\|_2^2 + 4\varepsilon H(t) + \varepsilon k\|u_x\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{2}b^2\|u\|_2^2 \geq \frac{5}{2}\varepsilon\|u_t\|_2^2 + 4\varepsilon H(t) \\ + \varepsilon\left(\lambda k - \frac{b^2}{2}\right)\|u\|_2^2\end{aligned} \tag{4.49}$$

yazılır.

Bu eşitsizlikten

$$\frac{d}{dt}L(t) \geq \frac{5}{2}\varepsilon \|u_t\|_2^2 + 4\varepsilon H(t) + \varepsilon\left(\lambda k - \frac{b^2}{2}\right)\|u\|_2^2 \geq 0 \tag{4.50}$$

vardır. Burada $k > \dfrac{b^2}{2\lambda}$ olacak şekilde seçilir. Eş. 4.50 den, $L(t) \geq L(0) > 0$ sonucu elde edilmiş olur.

Aşağıdaki integralde Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|\int_0^1 u u_t dx\right| \leq \int_0^1 |u u_t| dx \leq \|u\|_2 \|u_t\|_2 \tag{4.51}$$

olur.

Bu eşitsizlikten

$$\left|\int_0^1 u u_t dx\right|^{\frac{1}{1-\gamma}} \leq \left(\int_0^1 |u u_t| dx\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \leq \|u\|_2^{\frac{1}{1-\gamma}} \|u_t\|_2^{\frac{1}{1-\gamma}} \tag{4.52}$$

yazılır.

Eş. 4.52 de Young eşitsizliği $\omega = 2(1-\gamma)$ ve $\zeta = \dfrac{2(1-\gamma)}{1-2\gamma}$ için $\dfrac{1}{\omega} + \dfrac{1}{\zeta} = 1$ olmak üzere kullanılırsa

$$\left|\int_0^1 u u_t dx\right|^{\frac{1}{1-\gamma}} \leq \|u\|_2^{\frac{1}{1-\gamma}} \|u_t\|_2^{\frac{1}{1-\gamma}} \leq C\left[\|u\|_2^{\frac{2}{1-2\gamma}} + \|u_t\|_2^2\right] \tag{4.53}$$

bulunur.

Eş. 4.29 kullanılırsa, ayrıca $2 < \dfrac{2}{1-2\gamma} \leq 4$ için,

$$\left|\int_0^1 u u_t dx\right|^{\frac{1}{1-\gamma}} \le C\left[\|u\|_2^{\frac{2}{1-2\gamma}} + \|u_t\|_2^2\right] \le C\left[\|u\|_2^4 + \|u_t\|_2^2\right] \le C\left[\|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2\right] \tag{4.54}$$

olduğu görülür.

Şimdi $L^{\frac{1}{1-\gamma}}(t)$ hesaplamak için, ξ, η pozitif ve $r = \dfrac{1}{1-\gamma} > 1$ için, $(\xi+\eta)^r \le 2^{r-1}(\xi^r + \eta^r)$, olmak üzere $L(t)$ nin tanımı $t > 0$ için ve Eş. 4.54 kullanılırsa

$$L^{\frac{1}{1-\gamma}}(t) = \left(H^{1-\gamma}(t) + \varepsilon\int_0^1 u u_t dx\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$$\le 2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}\left(H(t) + \left|\int_0^1 u u_t dx\right|^{\frac{1}{1-\gamma}}\right)$$

$$L^{\frac{1}{1-\gamma}}(t) \le 2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} C\left(H(t) + \left\{\|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2\right\}\right) \tag{4.55}$$

bulunur.

Eş. 4.55 den

$$L^{\frac{1}{1-\gamma}}(t) \le \kappa\left[H(t) + \|u\|_2^2 + \|u_t\|_2^2\right] \tag{4.56}$$

olur. Burada $\kappa = 2^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} C$ dir.

Eş. 4.50 ve Eş. 4.56 den

$$L'(t) \ge \alpha L^{\frac{1}{1-\gamma}}(t) \tag{4.57}$$

elde edilir.

Burada $\alpha = \frac{\varepsilon\mu}{\kappa}$ ve $\mu = \min\left\{\frac{5}{2}, 4, \left(\lambda k - \frac{b^2}{2}\right)\right\}$ dir.

Eş. 4.57 den $(0,t)$ üzerinde integral alınırsa

$$(\frac{1}{\gamma-1}+1)^{-1}\left\{L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t) - L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(0)\right\} \geq \alpha t \tag{4.58}$$

elde edilir.

Burada eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{\gamma}{\gamma-1} < 0$ çarpılırsa eşitsizlik yön değiştirir ve

$$L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t) - L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(0) \leq \frac{\gamma}{\gamma-1}\alpha t \tag{4.59}$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma}{\gamma-1}\alpha t + L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(0) \geq L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(t), \\ &L^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}(t) \geq \frac{1}{L^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}}(0) - \frac{\gamma}{1-\gamma}\alpha t} \end{aligned} \tag{4.60}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Eş. 4.61 den, $L(t)$ nin

$$T^* = \frac{1-\gamma}{\alpha\gamma L^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}(0)} \tag{4.61}$$

zamanında patladığı gösterilmiş olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Uzun yıllardır yerel olmayan çözüm ve çözümün olmadığı yerlerle ilgili birçok çalışma yapılmıştır [7-18]. Bu çalışmalarda lineer, lineer olmayan birçok farklı denklemlerin incelendiği görülmektedir.

Bu tezde lineer olmayan denklemin verilen başlangıç-sınır değerleri için bazı şartlar altında zamana göre yerel olmayan çözümleri ve çözümlerin sonlu zamanda patlaması gösterilmiştir.

Bu konuyla ilgili birçok çalışma vardır ama buna rağmen yeni çalışmalara açıktır. Denklemlerde yeni değişiklikler yapılırsa yeni problemler ve denklemler ve yeni sonuçlar elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Feng, H., Li, S., and Zhi, X. (2012). Blow-up solutions for a nonlinear wave equation with boundary damping and interior source. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 75(4), 2273-2280.

2. Kalantarov, V. and Kurt, A. (1997). The Long-Time Behavior of Solutions of a Nonlinear Fourth Order Wave Equation, Describing the Dynamics of Marine Risers. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 77(3), 209-215.

3. Hao, J., Li, S., and Zhang, Y. (2007). Blow up and global solutions for a quasilinear riser problem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 67(3), 974-980.

4. Bayrak, V. and Can, M. (1998). Global nonexistence of solutions of the quasilinear hyperbolic equation of the vibrations of a riser. *Math. and Comp. Appl*, 2(1), 45-52.

5. Dinlemez, Ü. and Aktaş, E. (2014). Global and Blow-Up Solutions for Nonlinear Hyperbolic Equations with Initial-Boundary Conditions. *International Journal of Differential Equations*, 2014, 1-5.

6. Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., and Lasiecka, I. (2007). Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping–source interaction. *Journal of Differential Equations*, 236(2), 407-459.

7. Wu, J.-q. and Li, S.-j. (2010). Global solution and blow-up solution for a nonlinear damped beam with source term. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 25(4), 447-453.

8. Benaissa, A. and Messaoudi, S. A. (2002). Blowup of solutions of a nonlinear wave equation. *Journal of Applied Mathematics*, 2(2), 105-108.

9. Galaktionov, V. and Pohozaev, S. (2003). Blow-up and critical exponents for nonlinear hyperbolic equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 53(3), 453-466.

10. Messaoudi, S. A. (2001). Blow up in a nonlinearly damped wave equation. *Mathematische Nachrichten*, 231, 105-112.

11. Messaoudi, S. (1999). Blow up in solutions of a semilinear wave equation. *International Journal Of Applied Mathematics*, 1(6), 621-626.

12. Zhijian, Y. (2003). Global existence, asymptotic behavior and blowup of solutions for a class of nonlinear wave equations with dissipative term. *Journal of Differential Equations*, 187(2), 520-540.

13. Levine, H. A. and Serrin, J. (1997). Global nonexistence theorems for quasilinear evolution equations with dissipation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 137(4), 341-361.

14. Reddy, B. D. (1987). *Functional analysis and boundary-value problems: an introductory treatment*. John Wiley & Sons, Inc.,

15. Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations*. American Mathematical Society: American Mathematical Society,

16. Levine, H. A., Pucci, P., and Serrin, J. (1997). Some remarks on global nonexistence for nonautonomous abstract evolution equations. *Contemporary Mathematics*, 208, 253-264.

17. Kelley, W. G. and Peterson, A. C. (2010). *The Theory Of Differential Equations: Classical And Qualitative*. Springer,

18. Bayrak, V. and Can, M. (1997). Global nonexistence and numerical instabilities of the vibrations of a riser. *Math. Comput. Appl*, 2(1), 45-52.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: NABDEL, Saghar
Uyruğu	: İRAN
Doğum tarihi ve yeri	: 12.02.1985, Tabriz
Medeni hali	: Bekâr
Telefon	: 0 (539) 876 39 97
e-mail	: saghar.nabdel@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /Ş.B.P.B.	Devam Ediyor
Lisans	Tabriz Azad Üniversitesi/ Ş.B.P.B.	2008
Lise	Ferdous Lisesi	2004

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2013-2014	Dershane	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

Farsça-İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Keman, Yüzme, Kitap

GAZİ GELECEKTİR...