GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

Uğur KADAK

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2015

Uğur KADAK tarafından hazırlanan “NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Hakan EFE
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

İkinci Danışman: Prof. Dr. Feyzi BAŞAR
Matematik Anabilim Dalı, Fatih Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Başkan : Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Matmetik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye : Prof. Dr. Nurhayat İSPİR
Matmetik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye : Doç. Dr. Erdal GÜNER
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye : Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK
Matmetik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye : Doç. Dr. Hatice İNCE İLARSLAN
Matmetik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Tez Savunma Tarihi: 28 / 01 / 2015

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

....
Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Uğur KADAK
28 / 01 / 2015

NEWTONYEN OLMAYAN ANALİZ VE ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI

(Doktora Tezi)

Uğur KADAK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2015

ÖZET

1967-1970 yılları arasında M. Grossman ve R. Katz, doğurucu fonksiyonlarla, klasikte bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile çıkarma ve bölme işlemlerinin birebir rollerini değiştirip türevi ve integrali yeniden yorumlayarak çarpımsal hesap adlı bir hesap tarzı geliştirdiler. Sonrasında bu doğurucu fonksiyonların seçimine bağlı olarak elde edilen tüm hesap tarzlarını, Newtonyen olmayan hesap adı altında birleştirdiler. Bu tez çalışmasında Newtonyen olmayan hesabın temel özellikleri ve bu yapının klasik hesaplama tarzıyla olan ilişkileri incelenmektedir. İlk olarak tek bir üretece bağlı olan hesaplama tarzı kullanılarak fonksiyonel analizin önemli bazı önemli eşitsizlikleri verilmektedir. Ayrıca farklı üreteçler seçilerek bu yapıda bazı uygulamalar ele alınmaktadır. Newtonyen olmayan hesaplamalardan biri olan ve yıldız aritmetik adı verilen hesaplama tarzı kullanılarak kompleks cisim üzerinde tanımlı bazı dizi uzayları ve dualleri tanımlanmaktadır. Bunun yanında sonsuz matris yapısı inşa edilerek tanımlanan dizi uzayları arasındaki bazı matris dönüşümlerinin sınıflandırması yapılmaktadır. Vektör uzay ve iç çarpım uzaylarının Newtonyen olmayan manada karşılıkları inşa edilip bazı geometrik özellikler gösterilmektedir. Özellikle klasik analizde iyi bilinen ağırlıklı ortalama kavramları genelleştirilerek farklı üreteçlere bağlı olarak yeni türde ağırlıklı ortalamalar elde edilmektedir.

Bilim Kodu	:	204.1.132
Anahtar Kelimeler	:	Newtonyen olmayan hesaplama, dizi uzayları, matris dönüşümleri
Sayfa Adedi	:	89
Danışman	:	Doç. Dr. Hakan EFE
İkinci Danışman	:	Prof. Dr. Feyzi BAŞAR

NON-NEWTONIAN ANALYSIS AND ITS APPLICATIONS

(Ph. D. Thesis)

Uğur KADAK

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
January 2015

ABSTRACT

In the period from 1967 to 1970 M. Grossman and R. Katz gave the definitions of a new kind of derivative and integral, moving the roles of subtraction and addition to division and multiplication, and thus established a new calculus, called multiplicative calculus. Later, the family of the calculi which is depending on the choice of generating functions were combined under the name of non-Newtonian calculus. In this thesis the basic properties of non-Newtonian calculus and the relationship between its and classical calculus are examined. First of all by using only one generator some important inequalities of functional analysis are given. Moreover, some applications are introduced in this type calculus. By using the *-calculus which is a branch of the non-Newtonian calculi certain sequence spaces over the complex field and its duals are defined. Further the notion of infinite matrices are established and the characterizations of matrix transformations between these sequence spaces are presented. Besides this the concepts of vector space and inner product space in the sense of non-Newtonian mean are constructed and some geometric properties are shown. In particular depending on the choice of different generator functions the well-known notions i.e. weighted mean are generalized and a new kind of weighted means are obtained.

Science Code	:	204.1.132
Key Words	:	Non-Newtonian calculus, sequence spaces, matrix transformations
Page Number	:	89
Supervisor	:	Assoc. Prof. Dr. Hakan EFE
Co-Supervisor	:	Prof. Dr. Feyzi BAŞAR

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunun belirlenmesi ve çalışılması sürecinde akademik bilgi, deneyim ve tavsiyelerinden istifade ettiğim ve gerek yazımı gerekse de konu seçiminde bana kıymetli zamanlarını ayırarak desteklerini esirgemeyen kıymetli Hocalarım Sayın Doç. Dr. Hakan EFE'ye ve Sayın Prof. Dr. Feyzi BAŞAR'a sonsuz teşekkür ederim. Bu vesileyle bu zorlu çalışma sürecinde hayatta olmasa da varlığını her zaman yanımda hissettiğim babam Cahit KADAK'a, en sıkıntılı zamanlarımda dahi beni ümitlendiren ve tezin bitmesi adına bana güç katan kıymetli eşim Gamze KADAK'a ve yakın dostluğunu daima hissettiğim, kişiliği ve mütevazi şahsiyetiyle bana örnek teşkil eden Muharrem ÖZLÜK'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{R}_{\boldsymbol{\alpha}}$	α-reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{\boldsymbol{\beta}}$	β-reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{\alpha}}$	α-tam sayılar kümesi
$(\mathbf{X}, \mathbf{d}_{\boldsymbol{\alpha}})$	α-metrik uzay
$\boldsymbol{\omega}_{\boldsymbol{\alpha}}$	α-dizi uzay
${}_{\alpha}\sum$	α-toplam
$\mathbb{R}_{\mathbf{exp}}$	exp-reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_{\mathbf{q}}$	q-reel sayılar kümesi
$\lvert \cdot \rvert_{\boldsymbol{\alpha}}$	α-mutlak değer
$\lVert \cdot \rVert_{\boldsymbol{\alpha}}$	α-norm
${}^{\boldsymbol{\alpha}}\lim$	α-limit
$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}}$	α-aritmetik ortalama
$\mathbf{G}_{\boldsymbol{\alpha}}$	α-geometrik ortalama
$\mathbf{H}_{\boldsymbol{\alpha}}$	α-harmonik ortalama
$\tilde{\mathbf{A}}_{\boldsymbol{\alpha}}$	α-ağırlıklı aritmetik ortalama
$\tilde{\mathbf{G}}_{\boldsymbol{\alpha}}$	α-ağırlıklı geometrik ortalama
$\tilde{\mathbf{H}}_{\boldsymbol{\alpha}}$	α-ağırlıklı harmonik ortalama
$\mathbb{C}^{*}$	Yıldız kompleks sayılar kümesi
$\boldsymbol{\omega}_{*}$	Yıldız dizi uzay
${}_{*}\sum$	Yıldız toplam
${}^{*}\lim$	Yıldız limit
$\mathbf{V}^{*}$	Yıldız vektör uzay
$\dot{|}\dot{|} \cdot \dot{|}\dot{|}$	Yıldız norm
$<$	Lineer alt uzay

1. GİRİŞ

1600-1700 arası matematikte önemli gelişmelerin olduğu yıllardır. Bu asrın en önemli gelişmelerinden biri de Newton (1643-1727) ve Leibniz (1646-1716) tarafından birbirlerinden bağımsız olarak, türev ile integral arasındaki ilişkinin bulunmasıdır. Bunun bir sonucu olarak, " İntegral Kalkülüs" kavramı önem kazanmıştır. Bu gelişmelerde o güne kadar kullanım alanı oldukça sınırlı olan matematiğin önünü açmış ve matematiği evrensel bir bilim konumuna getirmiştir. Ayrıca, kalkülüsün ilerlemesi ile beraber fizik ve mühendislik gibi bilimlerde ciddi anlamda mesafe almıştır. Bu ilerleme özellikle türevin, diferensiyel denklemlerle olan ilişkisinin belirlenmesi sürecine uzanmış ve çoğu bilim dalında karşılık bulmuştur. Özellikle astronomideki gelişmeler matematiği başka bir düzeye ve adeta yeni bir döneme taşımıştır.

Kalkülüsün gelişim dönemlerinde Newton ve Leibniz sonsuz küçükler olarak adlandırılan nicelikleri kullanmışlardır. 18. yüzyılın başlarında, B. Fontenelle, sonsuz tane doğal sayı olduğuna göre sonlu sayıların mevcudiyeti ne kadar doğruysa sonsuz bir sayının mevcudiyetinin de o kadar doğru olacağını ve sonsuzluğun karşıtının bir sonsuz küçük olduğunu ileri sürdü. Bu dönemlerde yoğunca tartışılan asıl konu ise limit yani bir çeşit sonsuzluk kavramıydı. Aslında bu bakış açısı sonsuzluğa olan içsel çelişkinin üstesinden gelme adına ortaya çıkan bir olguydu. Bu çaba, matematikçilerin kalkülüsü basitçe kabul etmeye artık yanaşmadıkları 19. yüzyılda özellikle çok yaygındı. Diğer yandan diferensiyel hesapla, çeşitli derecelerden sonsuz ölçüde küçük büyüklüklerin varlığı ön koşul olarak kabul edilmiş ve işin içine "limit" kavramını katarak, en azından gerçek bir sonsuzluğun gerekmediği izlenimini oluşturulmuştu. Asıl niyet sonsuzluk fikrinin öznel olduğunu göstermek böylelikle nesnelliğini bir nevi ikinci plana atmaktı.

Bu tartışmalar George Cantor(1845-1918) tarafından ortaya atılan ve modern matematik için çok önemli bir yeri olan sonlu-ötesi sayılar aritmetiğine kadar devam etmiştir. Cantor'a göre sonsuz tek başına manalı bir söz değildir; manalı olan sonsuz küme kavramıdır; sonsuz kümeler ise var olan nesnelerdir. Burada sonsuz küme deyimi, bölünmez bir terim olarak anlaşılmalıdır. O halde önce kümeler sonlu-sonsuz diye ikiye ayrılacak; sonra da sonsuz kümeler, kendi aralarında, sonsuzluklarına göre, çeşitli sınıflara ayrılacaktır. Böylelikle ortaya sayısız sonsuz küme sınıfları çıkacaktır. Bu da çok çeşitli sonsuzluğun olduğu manasına gelmektedir. Cantor'un bu sonsuz anlayışı, Kronecker ve Poincare gibi birçok ünlü matematikçi tarafından tepki ile karşılanmış ve bunun sonucu olarak da, matematikçiler, sonsuzu Cantor gibi anlayanlar ve Aristo gibi anlayanlar olmak üzere, iki gruba ayrılmışlardır.

Newtonyen Olmayan Hesap Literatürü

1967-1970 yılları arasında Grossman ve Katz [1] klasik hesap tarzına bir alternatif olarak yeni bir hesap tarzı (kalkülüs) inşa ettiler. İlerleyen yıllarda Grossman bu yapıları genişleterek [2, 3] geometrik, kuadratik ve harmonik hesap sınıflarını elde etmiştir. Bu ilerleme sürecinde çarpımsal(multiplikatif) hesaplama adı verilen, klasikte bilinen toplama ve çarpma işlemlerinin; çıkarma ve bölme işlemleri ile birebir rollerinin değişmesi esasına dayanan bir hesaplama tarzı ortaya çıkmıştır. Bu sınıfların tümünü içine alan yapıya ise Newtonyen olmayan hesap tarzı (non-Newtonian kalkülüs) ismini vermiştir. Klasik hesapta kullanılan tüm kavramların Newtonyen olmayan hesap sınıfının her bir üyesi içinde karşılığı vardır. Bu ise bize günlük hayatta karşılaşılan bazı problemlere bakış açısını geliştirme adına yeni fikirler verecektir.

17. yy. ikinci yarısında, Newton ve Leibnitz matematik tarihinde önemli bir yeri olan diferansiyel ve integral hesaplamaları üzerine yoğun çalışmalar yaptı. Euler ise fonksiyon kavramına merkezi bir yer vererek günümüzde kullanılan hesaplama yöntemlerinin temelini attı. Türev ve integral, analiz ve hesaplama için temel teşkil eder. Gerçekten de bu iki işlem, toplama ve çıkarmanın sonsuz versiyonları gibidir. Çarpımsal hesap, Newton ve Leibniz'in klasik hesabına nispeten bazı kısıtlayıcı alanlara ve karmaşık bir yapıyasahiptir. Bu yüzden genel bir alanda ve her ayrıntısına kadar irdelenmiş bir hesaplama tarzını kullanmak dururken, neden daha kısıtlayıcı bir hesaplama tekniğini kullanmaya ihtiyaç olabileceği sorusunun cevabı, matematikçilerin gerçek eksende kartezyen koordinat sistemi dururken neden kutupsal koordinat sistemini kullandıkları sorusuna verilecek cevapla aynı olsa gerektir.

Filip ve Piatecki [4] numaralı çalışmasında, "neoklasik (Slow-Swan) dış kaynaklı ekonomik büyüme" modellerini Newtonyen olmayan hesap ile elde etmişlerdir. Ayrıca Filip ve Piatecki [5] çalışmasında, 15. yy. da Luca Pocioli tarafından ortaya atılan çift kayıt sistemi ile muhasebe tutma modelini bu hesap tarzıyla ele almışlardır. Ayrıca F. Cordova-Lepe and M. Pinto [6, 7], ekonomide önemli bir yeri olan esneklik teorisini, bigeometrik türev ile ele almışlardır.

P. Perrone tarafından [8] numaralı çalışmada, kuantum fiziğine teorik bir yaklaşım için çarpımsal hesap kullanılmıştır. Ayrıca R. G. Hohlfeld ve arkadaşları [9], atmosfer sıcaklığı üzerine yaptıkları çalışmada optik ölçme teorisi ve ters transfer teorisi için Newtonyen olmayan hesabı kullanmışlardır.

Meginnis tarafından yapılan [10] numaralı çalışmada, insan davranışları ve karar verme mekanizması hakkında bir istatistiki teori inşa etmek için Newtonyen olmayan hesap kullanılmıştır. Martin Ostoja-Starzewski [11], fraktal materyallerin mekaniği için çarpımsal hesaplama modelini kullanmıştır.

Z. Avazzadeh ve arkadaşları tarafından [12] numaralı çalışmada, lineer olmayan Volterra integral denklemlerinin sayısal çözümlerinde Newtonyen olmayan hesap kullanılmıştır. A. M. Atto ve arkadaşları [13], çarpımsal cebirsel işlemleri kullanarak geometrik dalga analizleri üzerine incelemeler yapmışlardır.

Florack ve van Assen [14], biyomedikal görüntü analizinde klasik hesaba alternatif olarak çarpmaya dayanan hesap kullandılar. Bu çalışmada çarpmaya dayalı hesabın, pozitif görüntü ve pozitifliği koruyan operatörler ihtiva eden problemlerle tabii bir iskelet çatısı meydana getirdiği görülmüştür. [15] numaralı çalışmanın amacı da çarpmaya dayalı hesabın pozitif tanımlı matris cebirlerinin regülerizasyonuna uygulanabilirliğini göstermektir.

Özyapıcı ve Bilgehan [16] çarpmaya dayalı hesabı temel alarak, sinyallerin gösterimi üzerine çalıştılar. Bu çalışmada, çarpmaya dayalı hesap gösterimlerinin üstel tipli sinyallerin gösterimine son derece uygun bir metot olduğunu görülmüştür. Buna ek olarak çarpmaya dayalı en küçük kareler metodunu, bir alternatif seri açılımı ile sunmuşlardır. Bashirov, Rıza, Tandoğdu, Mısırlı, Gürefe ve Özyapıcı; Kompleks Analiz, Diferensiyel Denklemler, Sonlu Farklar ve Çok Değişkenli Fonksiyonlarla ilgili çalışmalar yapmışlardır; [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25].

Uzer [26] kompleks değişkenli, kompleks değerli fonksiyonlar için çarpmaya dayalı hesabı geliştirdi. Devamında [27] çalışmasında bu geliştirilen hesap kullanılarak elektromanyetik dalga problemlerine bir takım seri çözümlemeler elde etti. Türkmen ve Başar [28], çarpmaya dayalı hesabı kullanarak fonksiyonel analiz metotları elde etmeye çalışıp dizi uzayları üzerine yeni teoriler geliştirmişlerdir. Ayrıca Çakmak ve Başar [29], en genel halde Newtonyen olmayan hesabı kullanarak fonksiyonel analiz metotlarını ele alıp klasik dizi uzayları olarak bilinene sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak dizi uzaylarının birer Banach uzayı teşkil ettiklerini göstermişlerdir.

Aniszewska ve Rybaczuk [30], çarpmaya dayalı dinamik sistemlerde kaos üzerine çalıştılar. Bu çalışmada, bütün klasik kaos davranışlarını ilgilendiren şartların bu hesaba dayalı karşılığı elde edildi. Örnek olarak bir boyutlu lojistik denklemin çarpmaya dayalı karşılığı, çok boyutlu non-lineer dinamik sistemlerin bigeometrik türev yardımıyla tanımlanması gibi konular tartışılmaktadır. Ayrıca Rybaczuk ve Stoppel [31], bigeometrik hesabı fraktallar ile malzeme bilimlerinde kullanmışlardır.

Ağırlaştırılmış Newtonyen olmayan hesap [32] numaralı çalışmada, Liu ve Guo tarafından eğrileri düzleştirme için kullanılmıştır. Aynı hesap tarzı ile, Baqaee [33]'de zamanlar arası kararın aksiyomatik temelleri hakkındaki bir çalışmada kullanılmıştır. Sınırlı ve sürekli fonksiyon uzaylarının yapısını Çakır [34], çarpmaya dayalı kompleks cisim üzerinde ele almıştır.

Tekin ve Başar [35], klasik dizi uzaylarını Newtonyen olmayan kompleks cisim üzerine genişlettiler. Ayrıca Kadak [36] numaralı çalışmasında, klasik dizi uzaylarının duallerini Newtonyen olmayan kompleks cisim üzerine inşa etti. Ardından Kadak ve Efe [37, 38] çalışmalarında, bazı bilinen dizi uzayları arasındaki matris dönüşümlerini ve iç çarpım uzaylarını ele aldılar.

Uygulama alanında ise Kadak ve Özlük tarafından yapılan [39] numaralı çalışmada, diferensiyel denklem çözümlerinde önemli bir yeri olan Runge-Kutta sayısal metodunu, iki üretece bağlı olarak genelleştirerek yöntemin bu denklemlerin sayısal çözümleri üzerindeki etkilerinden söz etmişlerdir.

Özavşar ve Çevikel [40] numaralı çalışmada, çarpmaya dayalı metrik uzay ve daralma dönüşüm prensibini ele almışlardır. Ayrıca Çakmak ve Başar [41] numaralı çalışmada kompleks cisim üzerinde Newtonyen olmayan manada sürekli fonksiyon uzaylarını tanımladılar.

M. Sarwar ve arkadaşları [42], çarpımsal metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerini incelemiştir. Son olarak aynı alanda M. Abbas ve arkadaşları [43], çarpımsal metrik uzaylarda bazı büzülme teoremlerini incelemişlerdir.

2. α-ARİTMETİK

Aritmetik, tanım kümesi reel sayıların bir alt kümesi olan tam sıralı bir cisimdir. Aritmetik sistem ise bu cisim üzerinde tanımlı cebirsel işlemlerle elde edilen yapıya denir. Aslında bu cisim, reel sayı cisminin farklı bir yorumu olarak da düşünülebilir öyle ki sayılabilir sayıda sonsuz tam sıralı cisim oluşturulabilir ve bu yapılar birbiriyle denk ya da izomorfiktir.

Aritmetik sistemleri oluşturmaya yarayan üreteç(doğurucu) fonksiyonu, tanım kümesi reel sayılar ve değer kümesi reel sayıların bir alt kümesi olan bire-bir ve örten (bijektif) bir dönüşümdür. I birim fonksiyonu ve e^x fonksiyonu üreteç fonksiyonuna birer örnektir. Her bir üreteç tek bir aritmetik ürettiği gibi her aritmetikte tek bir üreteç yardımıyla üretilebilir.

Şimdi farklı üreteç fonksiyonları yardımıyla yukarıda bahsi geçen aritmetik sistemler oluşturarak matematik analizin temel kavramlarının bu sistemlerdeki karşılıklarını araştıracağız.

2.1. Temel Kavramlar

Bu kısımda Newtonyen olmayan hesap türlerinden biri olan ve tek bir doğurucu fonksiyon kullanılarak elde edilen yapılar tarif edilmektedir. Özellikle metrik ve normlu uzay gibi matematik analizin temel konularının bu yapıdaki karşılıkları incelenmektedir. Ayrıca klasik hesapta önemli bir yer tutan türev ve integral kavramlarına, farklı doğurucu fonksiyonlarının nasıl bir etkisi olduğu araştırılarak bazı uygulamalar yapılmaktadır.

Şimdi α, tanım kümesi $A \subseteq \mathbb{R}$ ve değer kümesi $\mathbb{R}_\alpha = \{\alpha(x) : x \in \mathbb{R}\}$ olan bir üreteç(doğurucu) olsun. $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde tanımlı $\dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}$ ve $\dot{/}$ işlemleri ve $\dot{<}$ sıralama bağıntısı aşağıdaki gibi olan aritmetiğe bir α-aritmetik denir. Bütün $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$'lar için;

$$
\begin{array}{lccl}
\alpha - \text{toplam} & x\dot{+}y & = & \alpha\{\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)\} \\
\alpha - \text{fark} & x\dot{-}y & = & \alpha\{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)\} \\
\alpha - \text{çarpım} & x\dot{\times}y & = & \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)\} \\
\alpha - \text{oran} & x\dot{/}y, \frac{x}{y}. & = & \alpha\{\alpha^{-1}(x) \div \alpha^{-1}(y)\} \\
\alpha - \text{sıralama} & x\dot{<}y & \Leftrightarrow & \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y).
\end{array}
$$

Bu işlemler altında $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{\times}, \dot{<})$ tam sıralı bir cisimdir yani bir aritmetiktir. Bu aritmetiği α fonksiyonu ürettiği için buna α-aritmetik denir. Her bir üreteç fonksiyonu yalnız bir aritmetik üretir ya da herbir aritmetik yalnız bir üreteç vasıtasıyla üretilir.

Örnek

Doğurucu fonksiyon $\alpha = \exp$ *olmak üzere*

$$\begin{array}{rccl} \alpha : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_{\exp} \subseteq \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \alpha(x) = e^x = y \end{array} \quad ve \quad \begin{array}{rccl} \alpha^{-1} : & \mathbb{R}_{\exp} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \alpha^{-1}(y) = \ln y = x \end{array}$$

şeklinde verilsin. Bütün $x, y \in \mathbb{R}^+$ *için aşağıdaki cebirsel işlemler geçerlidir.*

$$\begin{array}{llllllll} \alpha - toplam & x\dot{+}y & = & \alpha\{\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)\} & = & e^{\{\ln x + \ln y\}} & = & x \cdot y \\ \alpha - fark & x\dot{-}y & = & \alpha\{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)\} & = & e^{\{\ln x - \ln y\}} & = & x \div y, y \neq 0 \\ \alpha - çarpım & x\dot{\times}y & = & \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)\} & = & e^{\{\ln x \times \ln y\}} & = & x^{\ln y} = y^{\ln x} \\ \alpha - oran & x\dot{/}y & = & \alpha\{\alpha^{-1}(x) \div \alpha^{-1}(y)\} & = & e^{\{\ln x \div \ln w\}} & = & x^{\frac{1}{\ln y}},\ y \neq 1. \end{array}$$

Benzer olarak her x reel sayısı için $I(x) = x$ şeklinde tanımlı I birim fonksiyonu da üreteç fonksiyonuna başka bir örnektir. Özel olarak I üreteci klasik aritmetiği, exp üreteci ise geometrik aritmetiği üretir. Diğer yandan bir α üreteci ile oluşturulan $(\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{\times})$ reel cismini ele alalım ve bu cisimdeki herbir işlemin klasik yapıdaki doğal karşılılıkları üzerinde duralım:

Klasik aritmetikteki her bir işlemin doğal karşılığını α-aritmetikte bulmak mümkündür. Her $p \in \mathbb{Z}$ için $\alpha(p) = \dot{p}$ olmak üzere, $y \in \mathbb{R}_\alpha$ için $y\dot{+}\dot{0} = y$ ve $y\dot{\times}\dot{1} = y$ ise, $\dot{0}$ (α-sıfır) ve $\dot{1}$ (α-bir) sayılarına, sırasıyla toplamaya göre etkisiz ve birim eleman denir. Ayrıca $x \in \mathbb{R}_\alpha$ için eğer $\dot{0}\dot{<}x$ ise x sayısına α-pozitif sayı, eğer $x\dot{<}\dot{0}$ ise x sayısına α-negatif sayı denir.

Burada dikkat edilmesi gereken önemli bir husus; seçilen üretece bağlı olarak elde edilen sayı kümelerinin değişiklik göstereceğidir. Mesela; $\alpha = \exp$ üreteci için herhangi $r \in (0, 1)$ reel sayısı α- negatif bir reel sayıdır. Yani bu hesapta klasik yapıdaki negatif olma yapısından farklı bir durum söz konusudur. Bunu dikkate alarak α-tamsayılar kümesini oluşturalım.

Her $n \in \mathbb{Z}$ için $\dot{-}\dot{n} = \dot{0}\dot{-}\dot{n} = \alpha(-n)$ olmak üzere $\mathbb{Z}_\alpha$ tamsayılar kümesi

$$\mathbb{Z}_\alpha = \{\ldots, \dot{-}\dot{2}, \dot{-}\dot{1}, \dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \ldots\} = \{\ldots, \alpha(-2), \alpha(-1), \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \ldots\}$$

şeklinde tarif edilir. Buna göre; α-tamsayıların $\mathbb{Z}_\alpha$ kümesi,

$$\mathbb{Z}_\alpha = \{\dot{n} \mid \dot{n} = \alpha(n), n \in \mathbb{Z}\}$$

şeklindedir. Özel olarak $\alpha = \exp$ için, $\mathbb{Z}_{\exp}$ kümesi

$$\mathbb{Z}_{\exp} = \{\ldots, 1/e^2, 1/e, 1, e, e^2, \ldots\}.$$

Burada e sayısı doğal logaritmik sayıdır.

Şimdi Grossman ve Katzı [1] takip ederek $\mathbb{R}_\alpha$ reel cismi üzerinde bazı önemli eşitsizlikleri ve temel kavramları vereceğiz.

2.1.1. Tanım

Keyfi $x \in \mathbb{R}_\alpha$ sayısı için x'in α-karesi $x\dot{\times}x$ şeklindedir ve $x^{\dot{2}}$ notasyonu ile gösterilir. Keyfi negatif olmayan x, t reel sayılar olmak üzere $t = \alpha\{\sqrt{\alpha^{-1}(x)}\}$ değeri yalnız bir olup t nin α-karesi x'e eşittir ve $t^{\dot{2}} = x$'tir. Benzer mantıkla $x \in \mathbb{R}_\alpha$'nın q-uncu α-kökü ve p-inci α-kuvvetini sırasıyla $\sqrt[\dot{q}]{x}$ ve $x^{\dot{p}}$ notasyonuyla göstereceğiz. Ayrıca aşağıdaki temel işlemler her $x \in \mathbb{R}_\alpha$ için geçerlidir:

$$\begin{aligned}
x^{\dot{2}} &= x\dot{\times}x = \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(x)\} = \alpha\{[\alpha^{-1}(x)]^2\}, \\
x^{\dot{3}} &= x^{\dot{2}}\dot{\times}x = \alpha\{\alpha^{-1}\{\alpha[\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(x)]\} \times \alpha^{-1}(x)\} = \alpha\{[\alpha^{-1}(x)]^3\}, \\
&\vdots \\
x^{\dot{p}} &= x^{(p\dot{-}1)}\dot{\times}x = \alpha\{[\alpha^{-1}(x)]^p\}.
\end{aligned}$$

2.1.2. Tanım

Bir $x \in \mathbb{R}_\alpha$ sayısının $|x|_\alpha$ Newtonyen olmayan mutlak değeri,

$$|x|_\alpha = \begin{cases} x &, \ x\dot{>}\dot{0} \\ \dot{0} &, \ x = \dot{0} \\ \dot{0}\dot{-}x &, \ x\dot{<}\dot{0} \end{cases} = \alpha\{|\alpha^{-1}(x)|\}$$

olarak tanımlanır, x'in α-mutlak değeri şeklinde isimlendirilir.

2.1.3. Tanım

Reel sayıların bir $\mathbb{R}_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesinden alınan keyfi x ve y sayıları için eğer $x\dot{<}y$ ise, $x\dot{\leq}c\dot{\leq}y$ olacak şekilde tüm c sayılarının kümesine α-kapalı aralığı denir ve $[\dot{x}, \dot{y}]$ ile gösterilir. Bu aralığın boyu $y\dot{-}x$'dir. Eğer bütün $c \in \mathbb{R}_\alpha$ için $x\dot{<}c\dot{<}y$ ise bu takdirde bu c değerleri, bir α-iç kümesini oluşturur.

2.1.4. Tanım

Her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k \in \mathbb{R}_\alpha$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
{}_\alpha\sum_{k=0}^{\infty} x_k &= x_0 \dot{+} x_1 \dot{+} x_2 \dot{+} \cdots \dot{+} x_k \dot{+} \cdots \\
&= \alpha\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{-1}\{x_k\} \right\}
\end{aligned}
$$

sonsuz toplamına bir α-seri denir.

Örneğin $\alpha = \exp$ seçilirse, $(x_k) \in \mathbb{R}_{\exp} \subset \mathbb{R}^+$ olmak üzere, α-seri

$$
\begin{aligned}
{}_{\exp}\sum_{k=0}^{\infty} x_k &= \exp\{\ln(x_0) + \ln(x_1) + \cdots + \ln(x_k) + \cdots\} \\
&= x_0 x_1 \ldots x_k \ldots \\
&= \prod_{k=0}^{\infty} x_k
\end{aligned}
$$

şeklinde bir sonsuz çarpıma dönüşür.

2.1.5. Tanım. [29]

X boş olmayan herhangi bir küme ve $d_\alpha : X \times X \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda; her bir $x, y, z \in X$ için,

(M1) $d_\alpha(x, y) = \dot{0} \Leftrightarrow x = y$,

(M2) $d_\alpha(x, y) = d_\alpha(y, x)$,

(M3) $d_\alpha(x, y) \dot{\leq} d_\alpha(x, z) \dot{+} d_\alpha(z, y)$.

aksiyomları sağlanırsa d_α fonksiyonuna X üzerinde bir α-metrik ve (X, d_α) ikilisine de bir α-metrik uzay denir.

Örnek olarak $\alpha = \exp$ seçilirse Tanım 2.1.5'de verilen aksiyomlar aşağıdaki gibidir:

X boş olmayan herhangi bir küme ve $d_{\exp} : X \times X \to \mathbb{R}_{\exp}$ olmak üzere her bir $x, y, z \in X$ için, (M1) $d_\alpha(x,y) = 1 \Leftrightarrow x = y$,

(M2) $d_\alpha(x,y) = d_\alpha(y,x)$,

(M3) $d_\alpha(x,y) \leq d_\alpha(x,z)d_\alpha(z,y)$.

2.1.6. Tanım. [29]

X, $\mathbb{R}_\alpha$ cismi üzerinde bir vektör uzay olsun. $\|\cdot\|_\alpha : X \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu $x, y \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}_\alpha$ için aşağıdaki norm aksiyomlarını sağlar:

(N1) $\|x\|_\alpha = \dot{0} \Leftrightarrow x = \dot{0}_\theta$, $(\dot{0}_\theta = (\dot{0}, \dot{0}, \dots))$

(N2) $\|\lambda \dot{\times} x\|_\alpha = |\lambda|_\alpha \dot{\times} \|x\|_\alpha$,

(N3) $\|x \dot{+} y\|_\alpha \dot{\leq} \|x\|_\alpha \dot{+} \|y\|_\alpha$.

Bu durumda $(X, \|\cdot\|_\alpha)$ ikilisine bir α-normlu uzay denir. Ayrıca X üzerinde tanımlı α-norm fonksiyonu

$$d_\alpha(x,y) = \|x \dot{-} y\|_\alpha; \quad (x, y \in X) \tag{2.1}$$

olacak şekilde d_α metriğini üretir ve α-normun ürettiği α-metrik diye isimlendirilir.

Şimdi, Çakmak ve Başarı [29] takip ederek α-metrik uzayların yakınsaklık ve sınırlılık özelliklerini inceleyeceğiz.

2.1.7. Tanım. [29]

Bir $X = (X, d_\alpha)$ bir α-metrik uzayında bir $(x_n) \in X$ sonsuz dizisi verilsin.

(a) Her $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısı ve $n > n_0$ olan bütün n'ler için $d_\alpha(x_n, x) \dot{<} \varepsilon$ olacak şekilde bir $n = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ pozitif sayısı varsa ve bir $x \in X$ noktası mevcut ise (x_n) dizisi, x noktasına α-yakınsaktır denir. Diğer bir ifadeyle x noktası (x_n) dizisinin bir α-limitidir denir ve ${}^{\alpha}\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir.

(b) En az bir $M \in \mathbb{R}_\alpha$ var ve $x_n \dot{\leq} M$ ise (x_n) üstten α-sınırlı, en az bir $m \in \mathbb{R}_\alpha$ var ve $x_n \dot{\geq} m$ ise (x_n) alttan α-sınırlıdır. Hem üst hem de alttan α-sınırlı dizilere α-sınırlı dizi denir.

(c) Verilen her $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ sayısı ve $m, n > n_0$ olan bütün m, n'ler için $d_\alpha(x_n, x_m) \dot{<} \varepsilon$ olacak şekilde

bir $n = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ pozitif sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine α-Cauchy dizi denir.

(d) X'deki her α-Cauchy dizisi α-yakınsak ise bu uzaya α-tam metrik uzay denir.

Şimdi klasik hesabın temel kavramlarından olan limit, süreklilik, türev ve integral kavramlarını α-aritmetik ile yeniden yorumlayacağız.

2.2. Süreklilik, Eğim ve Türev

Bu kısımda klasik hesaplama tarzında önemli bir yeri olan eğim, gradyant ve türev kavramlarını, α-üreteç kullanarak yeniden yorumlayacağız.

2.2.1. Tanım. [29]

Aşağıdaki tanımlar geçerlidir.

(a) $x_0 \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $r \dot{>} \dot{0}$ olsun. Bu durumda; $\dot{0} \dot{<} |x \dot{-} x_0|_\alpha \dot{<} r$'yi sağlayan $x \in \mathbb{R}_\alpha$'ların kümesine x_0 noktasının delinmiş r-komşuluğu denir.

(b) $X, Y \subset \mathbb{R}_\alpha$ ve $f : X \to Y$ olsun. Bu durumda, istendiği kadar küçük seçilebilen her $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ ve $x_0 \in X$ noktasının delinmiş δ-komşuluğundaki tüm x noktaları için $|f(x) \dot{-} y_0|_\alpha \dot{<} \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı ve bir $y_0 \in Y$ noktası mevcut ise o zaman "f fonksiyonun x_0 civarındaki α-limiti y_0'dır" denir ve ${}^{\alpha}\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle

$$ {}^{\alpha}\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon \dot{>} \dot{0}, \exists \delta \dot{>} \dot{0} \ni |f(x) \dot{-} y_0|_\alpha \dot{<} \varepsilon, \ \forall\, x \in X, |x \dot{-} x_0|_\alpha \dot{<} \delta. \tag{2.2} $$

(c) $f : X \to Y$ fonksiyonu için ${}^{\alpha}\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ olması durumunda f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında α-süreklidir denir. f, X'nın her noktasında α-sürekli ise o zaman f, X üzerinde α-süreklidir denir.

(d) X kümesinden alınan bir fonksiyon α-sürekli ve ve eşit α-uzunluklu iki α-aralıkta aynı değişime sahip ise bu fonksiyona α-lineer fonksiyon denir.

Bir $[\dot{a}, \dot{b}]$ aralığından α-sürekli f_1 ve f_2 fonksiyonlarının $f_1 \dot{+} f_2$ ve $\lambda \dot{\times} f_1$ skalarla çarpımının da α-sürekli olduğu kolayca gösterilebileceğinden bu aralıkta α-sürekli fonksiyonlar kümesi bir vektör uzay teşkil eder. Bu vektör uzaylara birer örnek verelim.

Örnek

$\mathbb{R}_\alpha$ terimli tüm dizilerin kümesi $\omega_\alpha := \{x = (x_k) \mid x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_\alpha\}$ şeklinde tanımlansın. $\mathbb{R}_\alpha$ cismi üzerinde $\ell_\infty(N)$, $c(N)$, $c_0(N)$ ve $\ell_p(N)$ dizi uzayları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$
\begin{aligned}
\ell_\infty(N) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega_\alpha : \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|_\alpha < \infty \right\}, \\
c(N) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega_\alpha : \exists l \in \mathbb{R}_\alpha \ni {}^{\alpha}\!\lim_{k\to\infty} |x_k \dot{-} l|_\alpha = \dot{0} \right\}, \\
c_0(N) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega_\alpha : {}^{\alpha}\!\lim_{k\to\infty} |x_k|_\alpha = \dot{0} \right\}, \\
\ell_p(N) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega_\alpha : {}_{\alpha}\!\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|_\alpha^{\dot{p}} < \infty \right\}, \quad (1 \le p < \infty).
\end{aligned}
$$

Açıkça görülür ki $\ell_\infty(N)$, $c(N)$, $c_0(N)$ ve $\ell_p(N)$ kümeleri, α-aritmetiğin cebirsel işlemleri $(\dot{+})$ ve $(\dot{\times})$ ile birer vektör uzay teşkil ederler ve bu uzaylar reel cisim üzerinde çok iyi bilinen ℓ_∞, c, c_0 ve ℓ_p klasik dizi uzaylarının birer genellemesidir.

2.2.2. Tanım

(α-gradyant) $f : [\dot{r}, \dot{s}] \to \mathbb{R}_\alpha$ 'ya α-doğrusal bir fonksiyon olsun. Bu durumda f'nin α-gradyantı $\boldsymbol{G_\alpha}^{s,r}$ sayısı, $(r, f(r))$ ve $(s, f(s))$ noktaları ve $s \neq r$ için

$$
\boldsymbol{G_\alpha}^{s,r} = \frac{f(s)\dot{-}f(r)}{s\dot{-}r}. \quad \textit{veya} \quad \left\{ f(s)\dot{-}f(r) \,\dot{/}\, s\dot{-}r \right\} \qquad (2.3)
$$

şeklinde hesaplanır. Açıktır ki (2.3) eşitliğinde herhangi α-üreteci için

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G_\alpha}^{s,r} &= \frac{\alpha\{\alpha^{-1}\{f(s)\} - \alpha^{-1}\{f(r)\}\}}{\alpha\{\alpha^{-1}(s) - \alpha^{-1}(r)\}}. \\
&= \alpha\left\{ \frac{\alpha^{-1}\{f(s)\} - \alpha^{-1}\{f(r)\}}{\alpha^{-1}(s) - \alpha^{-1}(r)} \right\}.
\end{aligned}
$$

Özel olarak $\alpha = \exp$ alınırsa;

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G_{\exp}}^{s,r} &= \exp\left\{ \frac{\ln\{f(s)\} - \ln\{f(r)\}}{\ln(s) - \ln(r)} \right\} \\
&= \left(\frac{f(s)}{f(r)} \right)^{\frac{1}{\ln(s)-\ln(r)}}.
\end{aligned}
$$

2.2.3. Tanım. [39]

(α-türev) Açık bir $(r,s) \subset \mathbb{R}_\alpha$ aralığında $f : (r,s) \to \mathbb{R}_\alpha$'ya tanımlı bir fonksiyon olsun. $x, x_0 \in (r,s)$ olmak üzere

$$^{\alpha}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\dot{-}f(x_0)}{x\dot{-}x_0}. \tag{2.4}$$

olacak şekilde α-limiti varsa, bu değere f fonksiyonunun x_0 noktasındaki α-türevi denir ve f_α^* ile gösterilir.

Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında α-türevlenebilir ise f aynı noktada α-diferensiyellenebilirdir. Ayrıca bu limit değeri α-üreteci yardımıyla

$$\begin{aligned}
f_\alpha^*(x_0) &= {}^{\alpha}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\dot{-}f(x_0)}{x\dot{-}x_0}. \\
&= \lim_{x\to x_0} \alpha\left\{\frac{\alpha^{-1}\{f(x)\} - \alpha^{-1}\{f(x_0)\}}{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(x_0)}\right\} \\
&= \lim_{x\to x_0} \alpha\left\{\frac{\alpha^{-1}\{f(x)\} - \alpha^{-1}\{f(x_0)\}}{x - x_0}\frac{x - x_0}{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(x_0)}\right\} \\
&= \alpha\left\{\lim_{x\to x_0} \frac{(\alpha^{-1}f)(x) - (\alpha^{-1}f)(x_0)}{x - x_0}\lim_{x\to x_0}\frac{x - x_0}{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(x_0)}\right\} \\
&= \alpha\left\{\frac{(\alpha^{-1}\circ f)'(x_0)}{(\alpha^{-1})'(x_0)}\right\} \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Burada f' notasyonu fonksiyonun klasik türevi için kullanılmıştır.

Örnek

$f : (r,s) \to \mathbb{R}_\alpha$ olmak üzere $f(x) = x^2$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun x_0 noktasındaki

α-türevi

$$
\begin{aligned}
f_\alpha^*(x_0) &= \alpha\left\{\frac{(\alpha^{-1}\circ f)'(x_0)}{(\alpha^{-1})'(x_0)}\right\}\\
&= \alpha\left\{\frac{(\alpha^{-1}\alpha\{(\alpha^{-1}(x))^2\})'(x_0)}{(\alpha^{-1})'(x_0)}\right\}\\
&= \alpha\left\{\frac{2(\alpha^{-1}(x_0))(\alpha^{-1})'(x_0)}{(\alpha^{-1})'(x_0)}\right\}\\
&= \alpha\{2\alpha^{-1}(x_0)\} = \dot{2}\dot{\times}x_0.
\end{aligned}
$$

Özel olarak $\alpha = \exp$ *alınırsa,* $f(x) = x^{\dot{2}} = x^{\ln x}$ *olmak üzere*

$f_\alpha^*(x) = (x^{\ln x})_\alpha^* = \exp\{2\ln(x)\} = x^2.$

2.2.4. Tanım

Bir $f : (r, s) \to \mathbb{R}_\alpha$ *fonksiyonu,* $E \subset (r, s)$ *kümesinin her noktasında α-türevlenebilir ise* $y = f(x)$ *fonksiyonu E üzerinde α-türevlenebilirdir denir. Diğer yandan* $f : [r, s] \to \mathbb{R}_\alpha$ *için* $x, x_0 \in (r, s)$ *olmak üzere*

$$f_\alpha^*(x_0^+) = {}^\alpha\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)\dot{-}f(x_0)}{x\dot{-}x_0}. \quad ve \quad f_\alpha^*(x_0^-) = {}^\alpha\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)\dot{-}f(x_0)}{x\dot{-}x_0}.$$

α-limitleri mevcut ise, bu limtlere sırası ile f fonksiyonunun x_0 noktasındaki sağ ve sol taraflı α-türevleri denir.

Bu tanım ışığında akla gelen en önemli soru klasik türev ile α-türev arasında nasıl bir ilişki olduğudur. Eğer verilen bir noktada f'nin ikinci α-türevi varsa bu durumda

$$f_\alpha^{**}(x_0) = \alpha\left\{\left(\frac{(\alpha^{-1}\circ f)'(x_0)}{(\alpha^{-1})'(x_0)}\right)'\frac{1}{(\alpha^{-1})'(x_0)}\right\} = \alpha\left\{\frac{(\alpha^{-1}\{f_\alpha'(x_0)\})'}{(\alpha^{-1})'(x_0)}\right\} \tag{2.6}$$

elde edilir. Bu işlem n kere tekrarlanırsa, verilen noktada n. mertebeden α-türev elde edilir. O halde $f_\alpha^{(*n)}(a)$ varsa

$$f_\alpha^{(*n)}(x_0) = \alpha\left\{\frac{(\alpha^{-1}\circ f_\alpha^{*(n-1)})'(x_0)}{(\alpha^{-1})'(x_0)}\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2.7}$$

yazılabilir.

Uyarı. [1]

f_α^* türev operatörü doğrusal (lineer) bir operatördür. $c \in \mathbb{R}_\alpha$ sabit olmak üzere

$$f_\alpha^*(g \dot{+} h) = f_\alpha^* g \dot{+} f_\alpha^* h \quad ve \quad f_\alpha^*(c \dot{\times} g) = c \dot{\times} f_\alpha^* g$$

eşitlikleri geçerlidir.

Riemann integrali

Şimdi klasikte iyi bilinen ve pek çok alanda uygulaması olan Riemann integral kavramını α-hesap kullanarak genişleteceğiz. Açıktır ki üreteç fonksiyonu birim fonksiyon seçilirse elde edilen yapı klasik Riemann toplamıdır. Diğer yandan doğal logaritma üreteci için klasik yapıdan daha farklı yapılara ulaşmak mümkündür. Birden fazla üreteç kullanılarak bu yapılar daha da genişletilebilir. Sonraki kısımlarda bu genellemelere yer verileceğinden bu bölümde sadece tek bir üretece bağlı olan Riemann integralini inceleyeceğiz.

2.2.5. Tanım

f fonksiyonu $[r, s] \subseteq \mathbb{R}_\alpha$ aralığında, $-\infty \dot{<} r \dot{<} s \dot{<} \infty$ olacak şekilde sınırlı olsun. Bu aralıkta bir $\mathscr{P}$ bölüntüsü $\mathscr{P} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ şeklinde tanımlansın. Bu bölüntüler içinde alınan herhangi $\xi_1, \ldots, \xi_n$ noktaları için f'nin Riemann α-toplamı

$$\begin{aligned} N(f; \mathscr{P}) &= {}_\alpha\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \dot{\times} (x_i \dot{-} x_{i-1}) \\ &= {}_\alpha\sum_{i=1}^{n} \alpha\left\{\alpha^{-1} f(\xi_i)[\alpha^{-1}(x_i) - \alpha^{-1}(x_{i-1})]\right\} \\ &= \alpha\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha^{-1} f(\xi_i)[\alpha^{-1}(x_i) - \alpha^{-1}(x_{i-1})]\right\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

şeklinde tarif edilir. Açıktır ki α-üreteci altındaki toplam klasik Riemann toplamıdır.

2.2.6. Tanım

f fonksiyonu $[r, s]$ üzerinde tanımlı olmak üzere $L \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $\varepsilon \dot{>} \dot{0}$ için en az bir $\mathscr{P}_\varepsilon$ bölüntüsü vardır öyle ki

$$d_\alpha(N(f; \mathscr{P}_\varepsilon), L) \dot{<} \varepsilon$$

koşulu her $\mathscr{P}_\varepsilon \subset \mathscr{P}$ için sağlanırsa f'ye Riemann anlamında α-integrallenebilir denir ve $\int_r^s f(x)^{dx}$ şeklinde gösterilir.

Açıkca görülür ki f fonksiyonu klasik anlamda Riemann integrallenebilir ise aynı aralıkta α-integrallenebilirdir. Ayrıca α-üretecinin tanımından eğer f klasik anlamda Riemann integrallenebilir ise $(\alpha^{-1} \circ f)$ bileşke fonksiyonuda integrallenebilirdir ve

$$\int_r^s f(x)^{dx} = \alpha\left\{\int_r^s (\alpha^{-1} \circ f)(x)dx\right\} \tag{2.9}$$

elde edilir. Tersine olarak f Riemann integrallenebilir ise

$$\int_r^s f(x)dx = \alpha^{-1}\left\{\int_r^s \alpha(f(x))^{dx}\right\}$$

sağlanır ve buradan da klasik yapıyla bu yapı aralarında birebir bir ilişki kurulur.

Şimdi, klasik anlamda belirsiz integral yapısına denk olan ve α-antitürev adını vereceğimiz temel integral yapısını inceleyeceğiz. Basit olarak $\int f(x)^{dx} = F(x)$ ifadesinin anlamı $F_\alpha^*(x) = f(x)$ dir. Diğer bir ifadeyle verilen bir f fonksiyonu klasik anlamda integralllenebilir olmak üzere

$$\int f(x)^{dx} = \alpha\left\{\int (\alpha^{-1} \circ f)(x)dx\right\} \dot{+} C$$

elde edilir ve bu integrale f'nin α-belirsiz integrali denir. Burada α-üretecinin tersi sürekli integrallenebilir ve f'de integrallenebilir olduğundan bileşke fonksiyon $(\alpha^{-1} \circ f)$ integrallenebilirdir.

2.3. α-Aritmetikle İlgili Temel Teoremler

Bu kısımda, α-üreteci yardımıyla klasik analizin bazı temel teoremlerinin bu yapıdaki karşılıklarını vereceğiz.

2.3.1. Önerme. [29]

Keyfi $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için aşağıdaki koşullar geçerlidir:

(a) $|x \dot{\times} y|_\alpha = |x|_\alpha \dot{\times} |y|_\alpha$.

(b) $|x \dot{+} y|_\alpha \leq |x|_\alpha \dot{+} |y|_\alpha$.

2.3.1. Lemma. [29]

$u, v \in \mathbb{R}_\alpha$ olmak üzere

$$\frac{|u\dot{+}v|_\alpha}{\dot{1}\dot{+}|u\dot{+}v|_\alpha}\dot{\leq}\frac{|u|_\alpha}{\alpha(1)\dot{+}|u|_\alpha}\dot{+}\frac{|v|_\alpha}{\alpha(1)\dot{+}|v|_\alpha}.$$

eşitsizliği sağlanır. Burada kullanılan "$\frac{u}{v}$." notasyonu u ve v nin α-oranını belirtir.

2.3.2. Lemma. [29]

$a_k, b_k \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $k \in \{1,2,3,\dots,n\}$ olmak üzere

$$\sqrt[\dot{p}]{{}_\alpha\sum_{k=1}^{n}(a_k\dot{+}b_k)^{\dot{p}}}\ \dot{\leq}\ \sqrt[\dot{p}]{{}_\alpha\sum_{k=1}^{n}a_k{}^{\dot{p}}}\ \dot{+}\ \sqrt[\dot{p}]{{}_\alpha\sum_{k=1}^{n}b_k{}^{\dot{p}}}$$

eşitsizliği $p > 1$ için sağlanır.

2.3.1. Sonuç. [29]

$(\mathbb{R}_\alpha, d_\alpha)$ tam bir α-metrik uzaydır.

Sıralı reel sayı n'lilerinden oluşan *n*-boyutlu $\mathbb{R}_\alpha^n$ uzayı, aşağıda tarif edilen toplama ($\dot{+}$) ve skalarla çarpma ($\dot{\times}$) işlemleriyle $\mathbb{R}_\alpha$ cismi üzerinde $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_\alpha^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}_\alpha$ olmak üzere bir vektör uzaydır:

$$\begin{array}{rcccl} \dot{+} & : & \mathbb{R}_\alpha^n \times \mathbb{R}_\alpha^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_\alpha^n \\ & & (x,y) & \longmapsto & x\dot{+}y = (x_0\dot{+}y_0, x_1\dot{+}y_1, \dots, x_n\dot{+}y_n), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccl} \dot{\times} & : & \mathbb{R}_\alpha \times \mathbb{R}_\alpha^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_\alpha^n \\ & & (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda\dot{\times}x = (\lambda\dot{\times}x_0, \lambda\dot{\times}x_1, \dots, \lambda\dot{\times}x_n). \end{array}$$

2.3.1. Teorem. [29]

$x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_\alpha^n$ olmak üzere d_α uzaklık fonksiyonu

$$d_\alpha(x,y) = \sqrt[\cdot]{{}_\alpha\sum_{k=0}^{n}(x_k\dot{-}y_k)^{\dot{2}}} = \alpha\left\{\sqrt{\sum_{k=0}^{n}(\alpha^{-1}x_k - \alpha^{-1}y_k)^2}\right\} \tag{2.10}$$

şeklinde tanımlanır.

2.3.2. Teorem. [29]

$x=(x_k)$, $y=(y_k)\in\omega_\alpha$ *olmak üzere* ω_α *üzerinde tanımlı* d_α *metrik fonksiyonu*

$$d_\alpha(x,y)= {}_\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x_k\dot{-}y_k|_\alpha}{\dot{2}^{\dot{k}}\dot{\times}\left(\dot{1}\dot{+}|x_k\dot{-}y_k|_\alpha\right)}\cdot\ ;\ \ (\dot{1}=\alpha(1),\dot{2}=\alpha(2))$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde (ω_α,d_α) *bir* α*-metrik uzaydır.*

2.3.3. Teorem. [29]

$\lambda\in\{\ell_\infty,c,c_0\}$ *ve* $x=(x_k)$, $y=(y_k)\in\lambda(N)$ *olsun.* λ *uzayında uzaklık fonksiyonu* $d_\infty^\alpha(x,y)=\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k\dot{-}y_k|_\alpha$ *şeklinde tanımlansın. Bu durumda;* $(\lambda(N),d_\infty^\alpha)$ *uzayı bir tam* α*-metrik uzaydır. Ayrıca* $\lambda(N)$ *uzayı* $\|x\|_\infty^\alpha=\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k|_\alpha$ *normu ile birer Banach uzayıdır.*

2.3.4. Teorem. [29]

$\ell_p(N)$ *üzerinde* $p\geq 1$ *için* d_p^α *uzaklık fonksiyonu*

$$d_p^\alpha(x,y)=\left({}_\alpha\sum_{k=0}^{\infty}|x_k\dot{-}y_k|_\alpha^{\dot{p}}\right)^{(1\dot{/}p)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\ell_p(N),d_p^\alpha)$ *uzayı* α*-tamdır. Ayrıca* $\ell_p(N)$ *uzayı*

$$\|x\|_p^\alpha=\left({}_\alpha\sum_{k=0}^{\infty}|x_k|_\alpha^{\dot{p}}\right)^{(1\dot{/}p)},(p\geq 1)$$

normu ile Banach uzayıdır. Burada $(1/p)$*-inci kuvvet* $x^{1\dot{/}p}=\alpha\{(\alpha^{-1}(x))^{\frac{1}{p}}\}$ *şeklindedir.*

2.3.2. Önerme. [17]

$(r,s)\subset\mathbb{R}_\alpha$ *üzerinde* $f(a)=c>0$ *sabit bir fonksiyon olmak üzere* $f_\alpha^*(a)=\dot{0}$ *sağlanır. Tersine eğer her* $a\in(r,s)$ *için* $f_\alpha^*(a)=\dot{0}$ *ise c sabit olmak üzere* $f(a)=c>0$*'dır.*

2.4. α-Aritmetiğin Bazı Uygulamaları

Bu bölümde giriş bölümünde kısaca ele aldığımız geometrik aritmetik yapısını ele alacak ve analizin temel kavramlarını geometrik hesabı kullanarak yeniden yorumlayacağız.

2.4.1. Geometrik aritmetik

Geometrik aritmetik $\alpha = exp$ doğal logaritma üreteci ile elde edilen bir sistemdir. Bu sistemde klasik yapıda kullanılan toplama ve fark işlemlerinin yerini çarpma ve bölme işlemi almaktadır. Ayrıca geometrik aritmetik, klasik aritmetik veya reel sayı sisteminden farklılıklar göstermektedir. Doğal logaritma ya da *exp* üreteç fonksiyonu

$$\begin{array}{rccl} \alpha : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \alpha(x) = e^x = y \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{rccl} \alpha^{-1} : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \alpha^{-1}(y) = \ln y = x. \end{array}$$

şeklinde tanımlanırsa, geometrik aritmetik adlı bir alt α-aritmetik sınıfı oluşur. Şimdi α-aritmetik için verilen tanım ve eşitsizliklerin bu sınıftaki durumunu inceleyeceğiz.

Reel sayıların bir $\mathbb{R}_{exp} \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesini $\mathbb{R}_{exp} := \{e^x : x \in \mathbb{R}\}$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $x, y \in \mathbb{R}_{exp}$ olmak üzere

$$\begin{array}{lccl} \alpha - \text{toplam} & x\dot{+}y & = & \alpha\{\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)\} = e^{\{\ln x + \ln y\}} = x \cdot y \ \text{ geo. toplam} \\ \alpha - \text{fark} & x\dot{-}y & = & \alpha\{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)\} = e^{\{\ln x - \ln y\}} = x/y \ \text{ geo. fark} \\ \alpha - \text{çarpım} & x\dot{\times}y & = & \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y)\} = e^{\{\ln x \times \ln y\}} = x^{\ln y} = y^{\ln x} \ \text{ geo. kat} \\ \alpha - \text{oran} & x\dot{/}y, \frac{x}{y}. & = & \alpha\{\alpha^{-1}(x) \div \alpha^{-1}(y)\} = e^{\{\ln x \div \ln y\}} = x^{\frac{1}{\ln y}}, \ y \neq 1 \ \text{ geo. oran} \\ \alpha - \text{sıralama} & x\dot{<}y & \Leftrightarrow & \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y) \Leftrightarrow x < y \ \text{ geo. sıralama} \end{array}$$

cebirsel işlemleri geometrik aritmetiği oluşturur. Türkmen ve Başar [28] $(\mathbb{R}_{exp}, \dot{+}, \dot{\times})$ üçlüsünün reel bir cisim olduğunu göstermiştir.

2.4.1. Tanım

Keyfi $x \in \mathbb{R}_{exp}$ *sayısı için x in geometrik karesi* $x\dot{\times}x$ *olup* $x^{\dot{2}}$ *notasyonu ile gösterilir. Keyfi negatif olmayan* x, t *pozitif reel sayılar olmak üzere* $t = e^{\sqrt{\ln(x)}}$ *değeri yalnız bir olup t nin geometrik karesi x'e eşit olur denir. Kısaca* $t^{\dot{2}} = x$ *şeklinde yazılır. Geometrik aritmetikle ilgili işlemler boyunca* $x \in \mathbb{R}_{exp}$ *nın q-uncu geometrik kökü ve k-ıncı geometrik kuvvetini sırasıyla* $\sqrt[\dot{q}]{x}$ *ve* $x^{\dot{k}}$ *şeklinde göstereceğiz. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler* $p \in \mathbb{R}_{exp}$ *için* *geçerlidir:*

$$
\begin{aligned}
p^{\dot{2}} &= p\dot{\times}p = e^{\{\ln p \times \ln p\}} = e^{\ln^2 p} = p^{\ln p} \\
p^{\dot{3}} &= p^{\dot{2}}\dot{\times}p = e^{\ln^3 p} = p^{\ln^2 p} \\
&\vdots \\
p^{\dot{p}} &= p^{(p\dot{-}1)}\dot{\times}p = e^{\ln^n p} = p^{\ln^{n-1} p}.
\end{aligned}
$$

2.4.2. Tanım. [28]

$x \in \mathbb{R}_{exp}$ olmak üzere x in geometrik mutlak değeri $e^{|\ln(x)|}$ olup $|x|_{exp}$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle her $x \in \mathbb{R}^+$ için

$$
|x|_{\exp} = \begin{cases} x & , \quad x > 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \\ 1/x & , \quad x < 1 \end{cases}
$$

şeklindedir.

2.4.3. Tanım

$(r, s) \subset \mathbb{R}_{\exp}$ açık bir aralık ve $f : (r, s) \to \mathbb{R}_{\exp}$ ye bir fonksiyon olsun. $x, a \in (r, s)$ olmak üzere

$$
{}^{G}\lim_{x \to a} \frac{f(x)\dot{-}f(a)}{x\dot{-}a}. \tag{2.11}
$$

limiti varsa, bu değere f fonksiyonunun a noktasındaki geometrik türevi denir ve f'_{exp} ile gösterilir. Eğer f fonksiyonu a noktasında geometrik türevlenebilir ise f aynı noktada geometrik diferensiyellenebilir. Diğer yandan (2.11) dikkate alınırsa $f'_{exp}(a)$ türevi

$$
f'_{exp}(a) = \exp\left\{ \frac{(\ln \circ f)'(a)}{(\ln)'(a)} \right\} = e^{af'(a)/f(a)} \tag{2.12}
$$

şeklinde elde edilir.

Eğer $f : (r, s) \to \mathbb{R}_{\exp}$ fonksiyonu $E \subset (r, s)$ kümesinin her noktasında geometrik türevlenebilir ise, $y = f(x)$ fonksiyonu E üzerinde geometrik türevlenebilirdir denir. Diğer yandan $f\,:\,[r,s]\to\mathbb{R}_{\exp}$ için $x\in(r,s)$ olmak üzere

$$f'_{\exp}(a^{+}) = \ {}^{G}\!\lim_{x\to a^{+}} \frac{f(x)\dot{-}f(a)}{x\dot{-}a}. \text{ ve } f'_{\exp}(a^{-}) = \ {}^{G}\!\lim_{x\to a^{-}} \frac{f(x)\dot{-}f(a)}{x\dot{-}a}.$$

geometrik limitleri varsa, bu limitlere sırası ile f'nin a noktasındaki sağ ve sol taraflı geometrik türevleri denir.

Eğer verilen bir noktada f nin ikinci geometrik türevi varsa bu durumda

$$f''_{\exp}(a) = \exp\left\{\frac{(\ln\{f'_{\exp}(a)\})'}{(\ln)'(a)}\right\} \tag{2.13}$$

elde edilir. Bu işlem n kere tekrarlanırsa, verilen noktada n. mertebeden geometrik türev elde edilir. O halde $f^{(n)}_{exp}(a)$ varsa

$$f^{(n)}_{exp}(a) = \exp\left\{\frac{(\ln\{f^{(n-1)}_{exp}(a)\})'}{(\ln)'(a)}\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.14}$$

şeklindedir. Burada f' klasik türevi ifade eder.

2.4.4. Tanım

f fonksiyonu $[r,s]\subseteq\mathbb{R}_{\exp}$ de tanımlı reel değerli bir fonksiyon olmak üzere bütün $x_i\in\mathbb{R}_{\exp}$ için f'nin Riemann geometrik toplamı

$$\begin{aligned} P(f;\mathscr{P}) &= \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \ln f(\xi_i)[\ln(x_i)-\ln(x_{i-1})]\right\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i)^{\ln(x_i)-\ln(x_{i-1})} \end{aligned} \tag{2.15}$$

şeklindedir.

2.4.5. Tanım

f fonksiyonu $[r,s]\subseteq\mathbb{R}_{\exp}$ üzerinde tanımlı olmak üzere $L\in\mathbb{R}_{\exp}$ ve $\varepsilon>1$ için en az bir $\mathscr{P}_\varepsilon$ bölüntüsü vardır öyle ki $d_G\big(P(f;\mathscr{P}_\varepsilon),L\big)\dot{<}\varepsilon$ koşulu her $\mathscr{P}_\varepsilon\subset\mathscr{P}$ için sağlanırsa f'ye Riemann geometrik integrallenebilir denir ve ${}_{G}\!\int_r^s f(x)dx$ şeklinde gösterilir.

Açıkça görülür ki f klasik anlamda Riemann integrallenebilir ise aynı aralıkta Riemann geometrik integrallenebilirdir. Ayrıca exp üreteci sürekli ve $\nu = \ln \circ f$ klasik anlamda Riemann integrallenebilir ise

$$_G\int_r^s f(x)dx = \exp\left\{\int_r^s (\ln f)(x)dx\right\} = \exp\left\{\int_r^s \nu(x)dx\right\} \tag{2.16}$$

elde edilir. Tersine f Riemann integrallenebilir ise

$$\int_r^s f(x)dx = \ln\left\{{}_G\int_r^s \exp(f(x))dx\right\}$$

sağlanır.

2.4.2. Kuadratik aritmetik

Bu kısımda α-aritmetiğin alt sınıflarından biri olan kuadratik aritmetik (q-aritmetik) yapısı üzerinde duracağız. Kuadratik aritmetik için q-üreteç fonksiyonu kullanacağız ve α-aritmetik için verilen tanım ve eşitsizliklerin bu sınıftaki karşılıklarını inceleyeceğiz. Her $x, p \in \mathbb{R}$ için

$$q(x) = \begin{cases} x^{1/p} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x = 0 \\ -(-x)^{1/p} & , \ x < 0, \end{cases} \quad \text{ve} \quad q^{-1}(x) = \begin{cases} x^{p} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x = 0 \\ -(-x)^{p} & , \ x < 0, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan q-üreteç fonksiyonlarına sırasıyla p. kök ve p. kuvvet üreteçleri denir. Bu üreteçler yardımıyla kuadratik aritmetik diye adlandırılan bir alt $\alpha(x) = q(x)$ sınıfı elde edilir.

Reel sayıların bir $\mathbb{R}_q \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesini $\mathbb{R}_q := \{q(x) : x \in \mathbb{R}\}$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda q-aritmetiği için aşağıdaki cebirsel işlemler tanımlanır: Her $x, y \in \mathbb{R}_q$ ve $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{array}{lllll} q-\text{toplam} & x\dot{+}y & = & q\{q^{-1}(x)+q^{-1}(y)\} = (x^p+y^p)^{1/p} \\ q-\text{fark} & x\dot{-}y & = & q\{q^{-1}(x)-q^{-1}(y)\} = (x^p-y^p)^{1/p} \\ q-\text{çarpım} & x\dot{\times}y & = & q\{q^{-1}(x)q^{-1}(y)\} = (x^py^p)^{1/p} = xy \\ q-\text{oran} & x\dot{/}y & = & q\{q^{-1}(x)/q^{-1}(y)\} = (x^p/y^p)^{1/p} = x/y, y \neq 0 \\ q-\text{sıralama} & x\dot{<}y & \Leftrightarrow & q^{-1}(x) < q^{-1}(y) \Leftrightarrow x < y \ (p>0) \end{array}$$

2.4.6. Tanım

X boş olmayan herhangi bir küme ve $x, y, z \in X$ için $d_q : X \times X \to \mathbb{R}_q$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdaki metrik aksiyomları her p tamsayısı için sağlanır:

(Q1) $d_q(x, y) = 0$ *gerek ve yeter şart* $x = y$,

(Q2) $d_q(x, y) = d_q(y, x)$,

(Q3) $d_q(x, y) \leq (d_q(x, z)^p + d_q(z, y)^p)^{1/p}$, $(p > 0)$

Burada (X, d_q)*'ya kuadratik metrik uzay ve* d_q*'ya X üzerinde bir kuadratik metrik denir.*

2.4.7. Tanım

$A \subset \mathbb{R}_q$ ve $f : A \to \mathbb{R}_q$ bir fonksiyon olsun ve $a \in \mathbb{R}_q$ sayısı A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, bir $\delta > 0$ bulunabiliyor, öyle ki tüm $|x \dot{-} a|_q \dot{<} \delta$ yı sağlayan x ler için $|f(x) \dot{-} L|_q \dot{<} \varepsilon$ eşitsizliği doğru ise; $L \in \mathbb{R}_q$, $f(x)$'in a noktasındaki limitidir. Bu limite fonksiyonun q-limitidir denir ve ${}^q\lim_{x\to a} f(x) = L$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle $p \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
{}^q\lim_{x\to a} f(x) = L \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni d_q(f(x), L) < \varepsilon, \\
&\quad\ \forall \quad x \in A,\ \ d_q(x, a) < \delta.
\end{aligned}
$$

2.4.1. Sonuç

f nin a noktasında q-sürekli olması için gerek ve yeter şart ${}^q\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ olmasıdır.

2.4.8. Tanım

f keyfi $[r, s] \subseteq \mathbb{R}_q$ aralığında tanımlı pozitif değerli bir fonksiyon olsun. f'nin kuadratik gradyantı, f'nin $(r, f(r))$ ve $(s, f(s))$ noktaları için kuadratik eğimidir. Diğer bir ifadeyle $G_q{}^{s,r}$ gradyantı $p \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$
G_q{}^{s,r} = \left(\frac{f^p(s) - f^p(r)}{s^p - r^p} \right)^{1/p}, \quad (s \neq r)
$$

şeklindedir.

2.4.9. Tanım

$(r,s)\subseteq\mathbb{R}_q$ açık bir aralık ve $f:(r,s)\to\mathbb{R}_q$ ye bir fonksiyon olsun. $x,a\in(r,s)$ olmak üzere

$$ {}^{q}\lim_{x\to a}\frac{f(x)\dot{-}f(a)}{x\dot{-}a}. \tag{2.17}$$

kuadratik limiti varsa, bu değere f fonksiyonunun a noktasındaki kuadratik türevi denir ve f_q' ile gösterilir. Eğer f fonksiyonu a noktasında kuadratik türevlenebilir ise f aynı noktada kuadratik diferensiyellenebilir. Diğer yandan $p\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere kuadratik türev

$$\begin{aligned} f_q'(a) &= \lim_{x\to a} q\left\{\frac{q^{-1}\{f(x)\}-q^{-1}\{f(a)\}}{q^{-1}(x)-q^{-1}(a)}\right\} \\ &= q\left\{\lim_{x\to a}\frac{(q^{-1}f)(x)-(q^{-1}f)(a)}{x-a}\lim_{x\to a}\frac{x-a}{q^{-1}(x)-q^{-1}(a)}\right\} \\ &= q\left\{\frac{(q^{-1}\circ f)'(a)}{(q^{-1})'(a)}\right\}. \end{aligned}$$

2.4.10. Tanım

f fonksiyonu $[r,s]\subset\mathbb{R}_q$ de tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. f'nin Riemann kuadratik toplamı $p\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$Q(f;\mathscr{P}) = q\left\{\sum_{i=1}^{n}(q^{-1}f)(\xi_i)[q^{-1}(x_i)-q^{-1}(x_{i-1})]\right\}.$$

2.4.11. Tanım

f fonksiyonu $[r,s]$ üzerinde tanımlı olsun. $L\in\mathbb{R}_q$ ve $\varepsilon>0$ için en az bir $\mathscr{P}$ bölüntüsü vardır öyle ki $p\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere $d_q\big(Q(f;\mathscr{P}),L\big)\dot{<}\varepsilon$ koşulu sağlanırsa f'ye Riemann kuadratik integrallenebilir denir ve ${}_q\int_r^s f(x)dx$ şeklinde gösterilir.

Açıkca görülür ki f klasik anlamda Riemann integrallenebilir ise aynı aralıkta kuadratik integrallenebilirdir. Ayrıca q-üreteci sürekli ve $v = q^{-1}\circ f$ klasik anlamda Riemann integrallenebilir ise $p\in\mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$ {}_q\int_r^s f(x)dx = q\left\{\int_r^s(q^{-1}f)(x)dx\right\} = q\left\{\int_r^s v(x)dx\right\} \tag{2.18}$$

elde edilir. Tersine f Riemann integrallenebilir ise $p \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\int_r^s f(x)dx = q^{-1}\left\{ {}_q\int_r^s (qf)(x)dx \right\}.$$

2.5. Ortalama Hesap

Bu kısımda α-aritmetik kullanılarak klasik ortalama (ağırlıklı) değerlerinin bu aritmetikteki karşılıkları incelenecektir.

2.5.1. Tanım

(α-aritmetik ortalama) $x_1, x_2, ..., x_n$ *birer poztif reel sayı olsunlar. Newtonyen olmayan aritmetik ortalama, her* $k \in \mathbb{N}$ *için* x_k*'ların α-toplamının* $\dot{n}$ *değerine α-oranıdır ve* A_α *ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle*

$$\begin{aligned} A_\alpha = {}_\alpha\sum_{k=1}^{n} x_k \dot{/} \dot{n} &= {}_\alpha\sum_{k=1}^{n} \alpha\left\{ \frac{\alpha^{-1}(x_k)}{n} \right\} \\ &= \alpha\left\{ \frac{\alpha^{-1}(x_1) + \alpha^{-1}(x_2) + \cdots + \alpha^{-1}(x_n)}{n} \right\}. \end{aligned}$$

Yukarıdaki tanımda üreteç fonksiyonu $\alpha = \exp$ veya $\alpha = q$ olarak alınırsa α-aritmetik ortalama aşağıdaki formlara dönüşür:

$$A_{exp} = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}} = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \text{ ve } A_q = \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}, \ (p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

A_{exp} ve A_q ortalamalarına, sırasıyla çarpımsal aritmetik ortalama ve q-aritmetik ortalama denir. Özel olarak $p = 1$ ve $p = -1$ değerleri için, A_q ortalaması sırasıyla klasik airtmetik ortalama ve klasik harmonik ortalamalara dönüşür. Ayrıca her $x_1, x_2, ..., x_n \in (0, \infty)$ için $\lim_{p \to 0} A_q = A_{exp}$ elde edilir.

2.5.2. Tanım

$x_1, x_2, ..., x_n$ *pozitif reel sayılar olsun. α-geometrik ortalama her* $n \in \mathbb{N}$ *için* x_n*'lerin* *α-çarpımlarının α-kökleri olarak tarif edilir. Diğer bir ifadeyle*

$$G_\alpha = \left({}_\alpha\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{\frac{1}{n}\cdot} = \alpha\left\{ \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha^{-1}(x_k) \right)^{\frac{1}{n}} \right\}$$
$$= \alpha\left\{ \left(\alpha^{-1}(x_1)\alpha^{-1}(x_2)\cdots\alpha^{-1}(x_n) \right)^{\frac{1}{n}} \right\}.$$

Benzer olarak üreteç fonksiyonu $\alpha = \exp$ veya $\alpha = q$ olarak alınırsa α-geometrik ortalama aşağıdaki formlara dönüşür:

$$\begin{aligned} G_{exp} &= \exp\left\{ \left(\ln(x_1)\ln(x_2)\cdots\ln(x_n) \right)^{\frac{1}{n}} \right\},\ (x_n > 1) \\ G_q &= \left\{ (x_1^p x_2^p \ldots x_n^p)^{\frac{1}{n}} \right\}^{\frac{1}{p}} = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

G_{exp} ve G_q ortalamalarına sırasıyla çarpımsal geometrik ortalama ve q-geometrik ortalama denir. Özel olarak bütün $p \in \mathbb{R}$ değerleri için, G_q ortalaması klasik geometrik ortalama ya da çarpımsal aritmetik ortalamayla denktir.

2.5.3. Tanım

$x_1, x_2, ..., x_n$ pozitif reel sayılar olsun ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha^{-1}(x_n) \neq 0$ sağlansın. H_α harmonik ortalama

$$H_\alpha = \frac{\dot{n}}{{}_\alpha\sum_{k=1}^{n} \frac{\dot{1}}{x_k}\cdot}\cdot = \frac{\dot{n}}{\frac{\dot{1}}{x_1}\dot{+}\frac{\dot{1}}{x_2}\dot{+}\cdots\dot{+}\frac{\dot{1}}{x_n}\cdot}\cdot$$
$$= \alpha\left\{ \frac{n}{\frac{1}{\alpha^{-1}(x_1)} + \frac{1}{\alpha^{-1}(x_2)} + \cdots + \frac{1}{\alpha^{-1}(x_n)}} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer olarak $\alpha = \exp$ veya $\alpha = q$ olarak alınırsa

$$H_{exp} = \exp\left\{ \frac{n}{\frac{1}{\ln(x_1)} + \frac{1}{\ln(x_2)} + \cdots + \frac{1}{\ln(x_n)}} \right\},\ H_q = \left\{ \frac{n}{\frac{1}{(x_1)^p} + \frac{1}{(x_2)^p} + \cdots + \frac{1}{(x_n)^p}} \right\}^{1/p}.$$

H_{exp} ve H_q ortalamalarına sırasıyla çarpımsal harmonik ortalama ve q-harmonic ortalama denir. Özel olarak $p = 1$ ve $p = -1$ değerleri için, H_q ortalaması sırasıyla klasik harmonik ortalama ve klasik aritmetik ortalamalara eşdeğerdir.

2.5.1. Ağırlıklı Ortalamalar

Bu kısımda Newtonyen olmayan ağırlıklı ortalamaların tanımı yapılarak bu yapıların ,klasik formları arasındaki ilişkiler irdelenecektir.

2.5.4. Tanım

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$'ler pozitif ağırlıklar ve $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$'ler reel sayılar olsun. Newtonyen olmayan ağırlıklı aritmetik ortalama

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_\alpha &= \frac{{}_\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i \dot{\times} \dot{w}_i}{{}_\alpha\sum_{i=1}^{n} \dot{w}_i} \dot{} = \frac{x_1 \dot{\times} \dot{w}_1 \dot{+} x_2 \dot{\times} \dot{w}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} x_n \dot{\times} \dot{w}_n}{\dot{w}_1 \dot{+} \dot{w}_2 \dot{+} \cdots \dot{+} \dot{w}_n} \dot{} \\
&= \alpha \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i\, \alpha^{-1}(x_i)}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \right\}. \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

şeklinde tarif edilir.

Eğer ağırlık değerlerinin toplamı ${}_\alpha\sum_{i=1}^{n} \dot{w}_i = \dot{1}$ ise o takdirde $\tilde{A}_\alpha = {}_\alpha\sum_{i=1}^{n} x_i \dot{\times} \dot{w}_i$ olduğu açıkça görülür. Diğer taraftan üreteç $\alpha = exp$ ve $\alpha = q$ şeçilirse

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_{exp} &= exp \left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \right\} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i} \right)^{1/\sum_{i=1}^{n} w_i}, (x_n > 1) \\
\tilde{A}_q &= \left\{ \frac{w_1(x_1)^p + w_2(x_2)^p + \cdots + w_n(x_n)^p}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n} \right\}^{1/p}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\tilde{A}_{exp}$ ve $\tilde{A}_q$ ortalamalarına sırasıyla ağırlıklı çarpımsal aritmetik ortalama ve ağırlıklı q-aritmetik ortalama denir. Özel olarak $p = 1$ ve $p = -1$ değerleri için, $\tilde{A}_q$ sırasıyla klasik ağırlıklı aritmetik ortalama ve klasik harmonik ortalama değerlerine denktir.

2.5.5. Tanım

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$'ler pozitif ağırlıklar ve $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$'ler reel sayılar olsun. Newtonyen olmayan ağırlıklı geometrik ortalama

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}_\alpha = \left\{ {}_\alpha\prod_{i=1}^{n} x_i \right\}^{\frac{w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \dot{}} &= x_1^{\frac{w_1}{w_1 + \cdots + w_n} \dot{}} \dot{\times} x_2^{\frac{w_2}{w_1 + \cdots + w_n} \dot{}} \dot{\times} \ldots \dot{\times} x_n^{\frac{w_n}{w_1 + \cdots + w_n} \dot{}} \\
&= \alpha \left\{ [\alpha^{-1}(x_1)]^{\frac{w_1}{w_1 + \cdots + w_n}} [\alpha^{-1}(x_2)]^{\frac{w_2}{w_1 + \cdots + w_n}} \cdots [\alpha^{-1}(x_n)]^{\frac{w_n}{w_1 + \cdots + w_n}} \right\}
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca üreteç $\alpha = exp$ ve $\alpha = q$ seçilirse

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{exp} &= \exp\left\{ [\ln(x_1)]^{\frac{w_1}{w_1+\cdots+w_n}} [\ln(x_2)]^{\frac{w_2}{w_1+\cdots+w_n}} \cdots [\ln(x_n)]^{\frac{w_n}{w_1+\cdots+w_n}} \right\}, \quad (x_n > 1) \\ \tilde{G}_q &= \left\{ x_1^{\frac{pw_1}{w_1+\cdots+w_n}} x_2^{\frac{pw_2}{w_1+\cdots+w_n}} \cdots x_n^{\frac{pw_n}{w_1+\cdots+w_n}} \right\}^{1/p} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i} \right)^{1/\sum_{i=1}^{n} w_i} \end{aligned}$$

elde edilir. $\tilde{G}_{exp}$ ve $\tilde{G}_q$ ortalamalarına sırasıyla ağırlıklı çarpımsal geometrik ortalam ve ağırlıklı q-geometrik ortalama denir.

2.5.6. Tanım

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$'ler pozitif ağırlıklar ve $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$'ler reel sayılar olsun. Newtonyen olmayan ağırlıklı harmonik ortalama

$$\tilde{H}_\alpha = \frac{{}_\alpha\sum_{k=1}^{n} \dot{w}_k}{{}_\alpha\sum_{k=1}^{n} \frac{\dot{w}_k}{x_k}.} . = \frac{\dot{w}_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \dot{w}_n}{\frac{\dot{w}_1}{x_1}. \dot{+} \frac{\dot{w}_2}{x_2}. \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{\dot{w}_n}{x_n}.} . = \alpha \left\{ \frac{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}{\frac{w_1}{\alpha^{-1}(x_1)} + \frac{w_2}{\alpha^{-1}(x_2)} + \cdots + \frac{w_n}{\alpha^{-1}(x_n)}} \right\}$$

şeklinde tarif edilir. Benzer olarak $\alpha = exp$ ve $\alpha = q$ için

$$\tilde{H}_{exp} = \exp\left\{ \frac{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}{\frac{w_1}{\ln(x_1)} + \frac{w_2}{\ln(x_2)} + \cdots + \frac{w_n}{\ln(x_n)}} \right\} \text{ and } \tilde{H}_q = \left\{ \frac{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}{\frac{w_1}{(x_1)^p} + \frac{w_2}{(x_2)^p} + \cdots + \frac{w_n}{(x_n)^p}} \right\}^{1/p}$$

elde edilir. $\tilde{H}_{exp}$ and $\tilde{H}_q$ ortalmalarına sırasıyla ağırlıklı çarpımsal harmonik ortalama ve ağırlıklı q-harmonik ortalama denir. Açıkça görüleceği üzere $\tilde{H}_q$ değeri $p = 1$ ve $p = -1$ için sırasıyla klasik ağırlıklı harmonik ortalama ve klasik ağırlıklı aritmetik ortalamaya eşdeğerdedir.

ağırlık	data	p	A_q	G_q	H_q	$\tilde{A}_q$	$\tilde{G}_q/\tilde{A}_{exp}$	$\tilde{H}_q$	G_{exp}	H_{exp}
$w_1 = 2$	$x_1 = 15$	1.0	27.50	24.74	22.64	32.82	29.88	27.27	24.02	23.36
$w_2 = 5$	$x_2 = 20$	0.1	24.99	24.74	24.50	30.16	29.88	29.59	24.02	23.36
$w_3 = 7$	$x_3 = 25$	2.0	30.61	24.74	21.14	35.77	29.88	25.21	24.02	23.36
$w_4 = 9$	$x_4 = 50$	5.0	38.22	24.74	18.73	41.69	29.88	21.55	24.02	23.36

Çizelge 2.1. Klasik ortalamalar(ağırlıklı) ile Newtonyen olmayan anlamda ortalamaların(ağırlıklı) karşılaştırılması

Çizelge 2.1'de, farklı üreteçlere bağlı olarak elde edilen ortalamalar(ağırlıklı) verilmiştir. Bu kısmın başında yapılan tarifler dikkate alındığında $\alpha = q$ üreteci için $p = 1$ alınırsa A_q, G_q ve H_q ortalamaları klasik formlarıyla denktir. Benzer olarak $p = 1$ için $\tilde{A}_q, \tilde{G}_q$ ve $\tilde{H}_q$ ağırlıklı ortalamaları ise klasik ağırlıklı formlarla aynı değerlerdir. Tablodan açıkça görüleceği üzere özellikle q-ortalama hesapları p değerlerinin seçimine bağlı olarak değişkenlik göstermektedir. Artan p değerleri için A_q ve $\tilde{A}_q$ ortalamaları artmakta ve $p \to \infty$ için limite geçildiğinde bu ortalamalar en yüksek data değerine yaklaşmaktadır. Diğer taraftan azalan p değerleri için H_q ve $\tilde{H}_q$ ortalamaları azalmakta ve $p \to \infty$ için limite geçildiğinde bu ortalamalar en düşük data değerine yaklaşmaktadır. Bu yaklaşım ise ortalama hesaba yeni bir bakış açısı kazandırmaktadır. Özellikle ağırlıklı ortalama hesapların genelinde p değerinin seçimine bağlı olarak ağırlıklardan bağımsız olarak, ortalama istenen değere yaklaştırılabilmektedir. Ayrıca tabloda elde edilen tüm değerlerin uygun p değerleri için klasik yapıda hesaplanan ortalamalarla benzerlik gösterdiği görülmektedir.

2.5.1. Sonuç

Her $n \in \mathbb{N}$ *için* $x_1, x_2, ..., x_n$ *pozitif reel sayılar olsun. Herhangi bir* α *bir üreteci için*

$H_\alpha < G_\alpha < A_\alpha$ *ve* $\tilde{H}_\alpha < \tilde{G}_\alpha < \tilde{A}_\alpha, \ (p \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

3. YILDIZ ARİTMETİK ($*$-ARİTMETİK)

Grossman [2] numaralı çalışmasında iki üreteç fonksiyonu kullanarak yeni bir aritmetik geliştirmiştir. Öyle ki bu yapı aritmetiklerin tamamını içine alan ve Newtonyen olmayan hesap tarzı olarak isimlendirilmiştir.

Bu yapıda ilk bölümde bahsedilen α-üretecinin özelliklerinin tümünü sağlayan, cebirsel işlemler için $\ddot{+}, \ddot{-}, \ddot{\times}$ ve $\ddot{/}$ notasyonları kullanılan bir β-üreteci kullanılır. Aritmetik yapılar birbiriyle izomorf olduklarından α-aritmetik ile elde edilen tüm yapılar β-aritmetik içinde geçerlidir. Öyle ki β-yakınsaklık, β-süreklilik ve β-türev tanımları α-aritmetikte verilen tanımlarla benzerlik gösterir. Genelde $*$-hesap tarzında α-aritmetik tanım kümesinin elemanları, β-aritmetik ise değer kümesinin elemanları için kullanılır.

3.1. Kompleks Yıldız Aritmetik

Şimdi iki üreteç arasındaki kuralı belirleyen bir ι fonksiyonu kullanılarak $*$-aritmetik yapısı incelenecektir.

3.1.1. Tanım. [1]

α-aritmetikten β-aritmetiğe tanımlanan izomorfizma dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip birtek ι (iota) fonksiyonudur:

(i) ι fonksiyonu, bire-birdir.

(ii) ι fonksiyonu, $\mathbb{R}_\alpha$'dan $\mathbb{R}_\beta$ üzerinedir.

(iii) $\mathbb{R}_\alpha$'dan seçilmiş herhangi u ve v'ler için,

$$\iota(u\dot{+}v) = \iota(u)\ddot{+}\iota(v)$$
$$\iota(u\dot{-}v) = \iota(u)\ddot{-}\iota(v)$$
$$\iota(u\dot{\times}v) = \iota(u)\ddot{\times}\iota(v)$$
$$\iota(u\dot{/}v) = \iota(u)\ddot{/}\iota(v)$$
$$u\dot{\leq}v \Leftrightarrow \iota(u)\ddot{\leq}\iota(v)$$

bağıntıları geçerlidir. Açıkça görülür ki α ve β'nın değer kümesi sırasıyla $\mathbb{R}_\alpha$ ve $\mathbb{R}_\beta$ olmak üzere tüm $x \in \mathbb{R}_\alpha$'lar için $\iota(x) = \beta\{\alpha^{-1}(x)\} \in \mathbb{R}_\beta$'dir. Bu durumda her p tamsayısı için $\iota(\dot{p}) = \ddot{p}$ olur.

$\mathbb{R}_\alpha$ ve $\mathbb{R}_\beta$ kısmi sıralı kümeler olmak üzere, α ve β aritmetiklerinin işlemleri $\alpha(a) = \dot{a} \in (\mathbb{R}_\alpha, \dot{+}, \dot{-}, \dot{\times}, \dot{/}, \dot{<})$ ve $\beta(b) = \ddot{b} \in (\mathbb{R}_\beta, \ddot{+}, \ddot{-}, \ddot{\times}, \ddot{/}, \ddot{<})$ şeklinde olsun. Bu durumda $(\dot{a}, \ddot{b})$ sıralı ikilisine koordinat sisteminde (Newtonyen olmayan) bir $*$-nokta denir. Bu noktaların tamamına ise Newtonyen olmayan kompleks sayılar kümesi denir ve $\mathbb{C}^*$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle,

$$\mathbb{C}^* := \{z^* = (\dot{a}, \ddot{b}) \mid \dot{a} \in \mathbb{R}_\alpha \subseteq \mathbb{R},\ \ddot{b} \in \mathbb{R}_\beta \subseteq \mathbb{R}\}.$$

Newtonyen olmayan kompleks sayılar kümesindeki $(\oplus)$ toplama ve $(\odot)$ çarpma işlemleri, ${z_1}^* = (\dot{a}_1, \ddot{b}_1)$ ve ${z_2}^* = (\dot{a}_2, \ddot{b}_2)$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{array}{rlcl} \oplus: & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & ({z_1}^*, {z_2}^*) & \longmapsto & {z_1}^* \oplus {z_2}^* = \big(\alpha\{a_1 + a_2\}, \beta\{b_1 + b_2\}\big) = (\dot{a}_1 \dot{+} \dot{a}_2, \ddot{b}_1 \ddot{+} \ddot{b}_2), \\ \odot: & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & ({z_1}^*, {z_2}^*) & \longmapsto & {z_1}^* \odot {z_2}^* = \big(\alpha\{a_1 a_2 - b_1 b_2\}, \beta\{a_1 b_2 + b_1 a_2\}\big), \end{array}$$

Tekin ve Başar [35] numaralı çalışmada, $(\boldsymbol{C}^*, \oplus, \odot)$ üçlüsünün bir cisim olduğunu göstermiştir. $\boldsymbol{C}^*$ kümesinden alınan ${z_1}^* = (\dot{a}_1, \ddot{b}_1)$ ve ${z_2}^* = (\dot{a}_2, \ddot{b}_2)$ noktaları arasındaki d^* uzaklık fonksiyonu

$$\begin{array}{rlcl} d^*: & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \boldsymbol{B}' \subset \mathbb{R}_\beta \\ & ({z_1}^*, {z_2}^*) & \longmapsto & d^*({z_1}^*, {z_2}^*) = \ddot{\sqrt{[\imath(\dot{a}_1 \dot{-} \dot{a}_2)]^{\ddot{2}} \ddot{+} (\ddot{b}_1 \ddot{-} \ddot{b}_2)^{\ddot{2}}}} \\ & & & = \beta\Big\{\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}\Big\} \end{array} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır. Keyfi $z^* = (\dot{a}, \ddot{b}) \in \mathbb{C}^*$ ve $\theta^* = (\dot{0}, \ddot{0}) \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere

$$\ddot{\|} z^* \ddot{\|} \;=\; d^*(z^*, \theta^*) = \ddot{\sqrt{[\imath(\dot{a} \dot{-} \dot{0})]^{\ddot{2}} \ddot{+} (\ddot{b} \ddot{-} \ddot{0})^{\ddot{2}}}} = \beta\Big\{\sqrt{a^2 + b^2}\Big\} \tag{3.2}$$

elde edilir. Her ${z_1}^*, {z_2}^* \in \mathbb{C}^*$ için $\ddot{\|} \cdot \ddot{\|}$ normunun ürettiği d^* metriği $d^*({z_1}^*, {z_2}^*) = \ddot{\|} z_1^* \ominus z_2^* \ddot{\|}$ şeklinde tanımlanır.

3.1.2. Tanım

($*$-seri) Kompeks terimli $(z_k^*) = (\dot{a}_k, \ddot{b}_k)$ dizisi verilsin. Bu durumda

$$ {}_{*}\sum_{k=0}^{\infty} z_k^* = (\dot{a}_1, \ddot{b}_1) \oplus (\dot{a}_2, \ddot{b}_2) \oplus \cdots \oplus (\dot{a}_k, \ddot{b}_k) \oplus \cdots = \Big({}_{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty} \dot{a}_k,\ {}_{\beta}\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{b}_k \Big) \in \mathbb{C}^* \tag{3.3}$$

şeklinde tarif edilen sonsuz toplama, kompleks terimli $*$-seri denir. Ayrıca $s_n^* = {}_*\sum_{k=1}^{n} z_k^*$ kısmi toplamlar dizisi olmak üzere $s_n \rightarrow s$, $s \in \mathbb{C}^*$ sağlanırsa seri yakınsaktır ve ${}_*\sum_{k=1}^{n} z_k^* = s$ yazılır.

3.1.1. Önerme. [35]

$z_1{}^*, z_2{}^* \in \mathbb{C}^*$ olsun. Aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

(i) $\| z_1^* \oplus z_2^* \| \mathrel{\ddot{\leq}} \| z_1^* \| \dot{+} \| z_2^* \|$.

(ii) $\| z_1^* \odot z_2^* \| = \| z_1^* \| \ddot{\times} \| z_2^* \|$.

(iii) Keyfi $p > 1$ ve $z_k{}^*, t_k{}^* \in \mathbb{C}^*$, $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ için

$$\left({}_\beta\sum_{k=1}^{n} \| z_k^* \oplus t_k^* \|^p \right)^{1\ddot{/}p} \mathrel{\ddot{\leq}} \left({}_\beta\sum_{k=1}^{n} \| z_k^* \|^p \right)^{1\ddot{/}p} \ddot{+} \left({}_\beta\sum_{k=1}^{n} \| t_k^* \|^p \right)^{1\ddot{/}p} .$$

3.1.3. Tanım. [36]

$z^* = (\dot{a}, \ddot{b}) \in \mathbb{C}^*$ olsun. z^*'ın $*$-kompleks eşleniği $\overline{z}^* = \left(\alpha\{a\}, \beta\{-\beta^{-1}(\ddot{b})\}\right) = (\dot{a}, \ddot{-}\ddot{b})$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca z^*'ın reel kısmı $\mathscr{R}e(z^*)$ ve sanal kısmı $\mathscr{I}m(\overline{z}^*)$ olmak üzere

$$\mathscr{R}e(\overline{z}^*) = \mathscr{R}e(z^*) = (z^* \oplus \overline{z}^*)\dot{/}\dot{2} = \dot{a} \text{ ve } \mathscr{I}m(\overline{z}^*) = \ddot{-}\mathscr{I}m(z^*) = (z^* \ominus \overline{z}^*)\ddot{/}\ddot{2} = \ddot{b}$$

elde edilir.

Uyarı. [36]

Klasik kompleks yapılara benzer olarak $*$-kompleks sayılar için aşağıdaki durumlar geçerlidir:

(i) $z^* = (\dot{a}, \ddot{b}), w^* = (\dot{c}, \ddot{d}) \in \mathbb{C}^*$ *için* $z \oslash w$ *oranı*

$$\begin{aligned} z \oslash w &= (\dot{a}, \ddot{b}) \oslash (\dot{c}, \ddot{d}) \\ &= \left(\alpha\{(ac + bd)/(c^2 + d^2)\}, \beta\{(bc - ad)/(c^2 + d^2)\}\right) . \end{aligned}$$

(ii) α *ve* β *aynı üreteçler olmak üzere*

$$\begin{aligned} z^* \odot \overline{z^*} &= (\dot{a}, \ddot{b}) \odot (\dot{a}, \ddot{-}\ddot{b}) \\ &= \left(\alpha\{a^2 + b^2\}, \beta(0)\right) \\ &= \beta\{a^2 + b^2\} \\ &= \beta\left\{\left(\beta^{-1}\beta\sqrt{a^2 + b^2}\ \right)^2\right\} = (\ddot{\|}z^*\ddot{\|})^{\ddot{2}} \end{aligned}$$

sağlanır.

3.1.1. Sonuç. [35]

$(\mathbb{C}^*, \ddot{\|} \cdot \ddot{\|})$ *ikilisi,* $\ddot{\|}z^*\ddot{\|} = \ddot{\sqrt{[\imath(\dot{a})]^{\ddot{2}} \ddot{+} (\ddot{b})^{\ddot{2}}}};\ \ z^* = (\dot{a}, \ddot{b}) \in \mathbb{C}^*$ *normu ile bir Banach uzayıdır.*

3.2. ∗-türev ve ∗-integral

Bu alt kısımda yıldız hesap tarzı kullanılarak, önceki bölümlerde elde edilen türev ve integral kavramları genişletilecektir.

3.2.1. Tanım. [35]

(∗-limit) $A \subset \mathbb{R}_\alpha$, $B \subset \mathbb{R}_\beta$ *ve* $f : A \to B$ *olsun. Bu durumda, istendiği kadar küçük seçilebilen her* $\varepsilon \ddot{>} \ddot{0}$ *ve* $x_0 \in A$ *noktasının delinmiş δ-komşuluğundaki tüm x noktaları için* $|f(x) \ddot{-} y_0|_\beta \ddot{<} \varepsilon$ *eşitsizliği sağlanacak şekilde bir* $\delta = \delta(\varepsilon)$ *sayısı ve bir* $y_0 \in B$ *noktası mevcut ise o zaman fonksiyonun* x_0 *civarındaki ∗-limiti* y_0*'dır ve* ${}^*\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ *ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle*

$$ {}^*\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon \ddot{>} \ddot{0}, \exists\delta \dot{>} \dot{0} \ni |f(x) \ddot{-} y_0|_\beta \ddot{<} \varepsilon,\ \forall\, x \in A, |x \dot{-} a|_\alpha \dot{<} \delta. \tag{3.4}$$

3.2.2. Tanım

(∗-süreklilik) Bir $f : A \to B$ *fonksiyonu,* ${}^*\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ *olması durumunda* $a \in A$ *noktasında ∗-süreklidir denir.* f*, A'nın her noktasında ∗-sürekli ise o zaman* f*, A üzerinde ∗-süreklidir denir.*

3.2.3. Tanım

(∗-eğim) f *keyfi bir α-aralığı* $[\dot{r}, \dot{s}]$ *üzerinde tanımlı lineer bir fonksiyon olsun. Bu durumda*

$G_*{}^{s,r}$ gradyantı; $(r, f(r))$, $(s, f(s))$ noktaları ve $s \neq r$ için

$$G_*{}^{s,r} = \frac{f(s) \ddot{-} f(r)}{\imath(s \dot{-} r)} \quad : \tag{3.5}$$

şeklinde hesaplanır. Açıktır ki (3.5) eşitliğinde herhangi α ve β üreteçleri için

$$\begin{aligned} G_*{}^{s,r} &= \frac{\beta\{\beta^{-1}\{f(s)\} - \beta^{-1}\{f(r)\}\}}{\beta\{\alpha^{-1}(s) - \alpha^{-1}(r)\}} \quad : \\ &= \beta\left\{\frac{\beta^{-1}\{f(s)\} - \beta^{-1}\{f(r)\}}{\alpha^{-1}(s) - \alpha^{-1}(r)}\right\} \end{aligned}$$

elde edilir.

3.2.4. Tanım

($*$-türev) $(r, s) \subset \mathbb{R}_\alpha$ açık bir aralık, $f : (r, s) \to \mathbb{R}_\beta$'ya tanımlı bir fonksiyon ve $x, a \in (r, s)$ olsun. Eğer a noktasında

$$^*\lim_{x \to a}(f(x) \ddot{-} f(a)) \ddot{/} (\imath(x \dot{-} a)) \tag{3.6}$$

$*$-limiti mevcutsa, f fonksiyonu a noktasında $*$-türevlenebilir denir ve $f^*(a)$ ile gösterilir. Diğer taraftan (3.6) tanımı aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} f^*(a) &= {}^*\lim_{x \to a} \frac{f(x) \ddot{-} f(a)}{\imath(x \dot{-} a)} \quad : \\ &= \lim_{x \to a} \beta\left\{\frac{\beta^{-1}\{f(x)\} - \beta^{-1}\{f(a)\}}{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(a)}\right\} \\ &= \lim_{x \to a} \beta\left\{\frac{\beta^{-1}\{f(x)\} - \beta^{-1}\{f(a)\}}{x - a} \frac{x - a}{\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(a)}\right\} \\ &= \beta\left\{\frac{(\beta^{-1} \circ f)'(a)}{(\alpha^{-1})'(a)}\right\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Şimdi klasikte iyi bilinen ve pek çok alanda uygulaması olan Riemann integral kavramını $*$-hesap yapısıyla yeniden yorumlayacağız. Seçilen üreteçler doğal logaritma fonksiyonları olursa klasik yapıdan daha farklı yapılara ulaşılabilmektedir. Özel üreteçlerle elde edilen yapılara sonraki kısımlarda yer verileceğinden bu bölümde $\imath$ dönüşüm fonksiyonundan yararlanarak Riemann integralinin genel yapısı ve bazı uygulamaları üzerinde duracağız.

3.2.5. Tanım

f fonksiyonu $[r,s] \subseteq \mathbb{R}_\alpha$ üzerinde tanımlı olsun. Bu durumda f'nin Riemann yıldız toplamı

$$\begin{aligned} N^*(f;\mathscr{P}) &= {}_\beta\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \ddot{\times} \left\{\iota(x_{i-1}) \ddot{-} \iota(x_i)\right\} \\ &= {}_\beta\sum_{i=1}^{n} \beta\left\{\beta^{-1}(f(\xi_i))[\alpha^{-1}(x_{i-1}) - \alpha^{-1}(x_i)]\right\} \\ &= \beta\left\{\sum_{i=1}^{n} \beta^{-1}(f(\xi_i))(\alpha^{-1}\{x_{i-1}\} - \alpha^{-1}\{x_i\})\right\} \end{aligned} \tag{3.8}$$

şeklindedir.

3.2.6. Tanım

f fonksiyonu $[r,s]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere her $\varepsilon \ddot{>} \ddot{0}$ için verilen aralıkta en az bir $\mathscr{P}_\varepsilon$ bölüntüsü vardır öyle ki

$$d_\beta(N^*(f;\mathscr{P}), P) \ddot{<} \varepsilon$$

koşulu her $\mathscr{P} \subset \mathscr{P}_\varepsilon$ için sağlanırsa f'ye Riemann yıldız integrallenebilir($*$-integral) denir ve ${}_\star\int_r^s f(x)dx$ şeklinde gösterilir.

Açıkca görülür ki f fonksiyonu klasik anlamda Riemann integrallenebilir ise aynı aralıkta $*$-integrallenebilirdir ve

$${}_\star\int_r^s f(x)dx = \beta\left\{\int_r^s (\beta^{-1} \circ f)(x)dx\right\} \tag{3.9}$$

yazılır. Tersine f Riemann integrallenebilir ise

$$\int_r^s f(x)dx = \beta^{-1}\left\{{}_\star\int_r^s \beta(f(x))dx\right\}$$

elde edilir.

Temel olarak $\int_* f(x)dx = F(x)$ ifadesinin anlamı $F^*(x) = f(x)$'dir. Diğer bir ifadeyle verilen bir f fonksiyonunun klasik antitürevi $\int f(x)dx$ olmak üzere f nin $*$-antitürevi

$$_\star\!\!\int \beta\{f(x)\}dx = \beta\left\{\int f(x)dx\right\} \ddot{+} C$$

ve buradan da

$$_\star\!\!\int f(x)dx = \beta\left\{\int (\beta^{-1} \circ f)(x)dx\right\} \ddot{+} C$$

olur. Ayrıca β-üreteci sürekli olduğundan integrallenebilirdir ve f klasik anlamda integrallenebilir olduğundan bileşke fonksiyon $\beta^{-1} \circ f$ integrallenebilirdir.

4. KOMPLEKS YILDIZ CİSİM ÜZERİNDE TANIMLI DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde $*$-kompleks cismi üzerinde tanımlanan Newtonyen olmayan bazı dizi uzayları incelenecektir. Öncelikle bu yapılar için gerekli olan $*$-seriler ve bazı özelliklerini vereceğiz.

Yıldız aritmetik klasik hesap türlerini içeren bir yapıda olduğundan uygulama alanları istediği kadar genişletilebilir. Matematik analizin temel konu başlıklarında bu uygulama alanlarını görmek mümkündür. Şimdi vereceğimiz yapılar reel sayıların yıldız seri aracılığıyla toplanabilmesi mantığına dayanmaktadır. Bir önceki bölümde konveks terimli serilerin yakınsaması verilmişti. Burada ise reel terimli serilerin iki üretece bağlı olarak toplanabilmesi tanımı yapılacaktır.

4.1. $*$-Seriler ve Bazı Temel Özellikleri

Üreteç fonksiyonları α ve β olmak üzere $\iota : \mathbb{R}_\alpha \to \mathbb{R}_\beta$ dönüşümü verilsin. Her $k \in \mathbb{N}$ ve $x_k \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\begin{aligned} {}_*\sum_{k=0}^{\infty} x_k &= \beta\Big\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{-1}\{x_k\} \Big\} \\ &= \iota(x_0) \ddot{+} \iota(x_1) \ddot{+} \iota(x_2) \ddot{+} \cdots \ddot{+} \iota(x_k) \ddot{+} \cdots \\ &= {}_\beta\sum_{k=0}^{\infty} \iota\{x_k\} \end{aligned} \tag{4.1}$$

sonsuz toplamına reel terimli yıldız seri ($*$-seri) denir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n = {}_*\sum_{k=1}^{n} x_k$ sonlu toplamına $*$-serisinin kısmi toplamı bu terimlerden oluşan $\{s_n\}$ dizisine de kısmi toplamlar dizisi denir. Eğer $\{s_n\}$ dizisi bir s sayısına $*$-yakınsıyorsa ${}_*\sum_{n=0}^{\infty} x_k$ serisi de bu sayıya yakınsar ve $s = {}_*\sum_{n=0}^{\infty} x_k$ yazılır. Bu sayıya serinin yıldız toplamı diyeceğiz. Eğer $\{s_n\}$ dizisi ıraksak ise bu seri ıraksaktır.

(4.1)'de verilen yıldız serisinin hem α-üreteci hem de β-üreteci ile ayrı ayrı ifadesi mümkündür. Öyle ki

$${}_*\sum_{k=0}^{\infty} x_k = \iota\left\{ {}_\alpha\sum_{k=0}^{\infty} x_k \right\} \tag{4.2}$$

yazılabilir.

Uyarı

Seçilen üreteçlere bağlı olarak klasik serilerle ilgili tüm özellikler $*$-serilere genişletilebilir. Örneğin (4.1)'de $\beta = \alpha = I$ birim fonksiyonu olarak seçilirse, $*$-serisi klasik seriye dönüşür. Eğer $\beta = \alpha = \exp$ alınırsa serinin yakınsadığı değer klasikte $\prod_{k=0}^{\infty} x_k$ serisinin yakınsadığı değere eşittir.

4.1.1. Tanım

$a, r \in \mathbb{R}_\alpha$ ve $r \neq \dot{0}$ olmak üzere

$$_*\sum_{k=1}^{\infty} a \dot{\times} r^{\dot{k}} = \imath\{a \dot{\times} r\} \ddot{+} \imath\{a \dot{\times} r^{\dot{2}}\} \ddot{+} \cdots \ddot{+} \imath\{a \dot{\times} r^{\dot{k}}\} \ddot{+} \cdots$$

serisine yıldız geometrik($*$-geometrik) seri denir.

Tekin ve Başar [35] numaralı çalışmada, $\ell_\infty^*, c^*, c_0^*$ ve ℓ_p^* uzaylarını aşağıdaki şekilde tarif ettiler:

$$\begin{aligned}
\ell_\infty^* &= \left\{ z^* = (z_k^*) \in \omega^* : \sup_{k \in \mathbb{N}} \dot{|}z_k^*\dot{|} < \infty \right\}, \\
c^* &= \left\{ z^* = (z_k^*) \in \omega^* : \exists l \in \mathbb{C}^* \ni \ {}^*\lim_{k \to \infty} z_k^* = l \right\}, \\
c_0^* &= \left\{ z^* = (z_k^*) \in \omega^* : \ {}^*\lim_{k \to \infty} z_k^* = \theta^* \right\}, \\
\ell_p^* &= \left\{ z^* = (z_k^*) \in \omega^* : \ {}_\beta\sum_{k=1}^{\infty} \dot{|}z_k^*\dot{|}^{\ddot{p}} < \infty \right\}, \ (1 \leq p < \infty).
\end{aligned}$$

Burada ω^*, Newtonian olmayan kompleks terimli bütün dizilerin kümesi olmak üzere

$$\omega^* = \left\{ x = (x_k) : x_k \in \mathbb{C}^*, \ k \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca ω^*, kompleks cisim üzerinde

$$\begin{array}{rcccl} \oplus : & \omega^* \times \omega^* & \longrightarrow & \omega^* \\ & (x, y) & \longmapsto & x \oplus y = (x_k \oplus y_k), \end{array} \qquad \begin{array}{rcccl} \odot : & \mathbb{C}^* \times \omega^* & \longrightarrow & \omega^* \\ & (\mu, x) & \longmapsto & \mu \odot x = (\mu \odot x_k) \end{array}$$

şeklinde tanımlı cebirsel işlemlerle bir vektör uzay formudur. Bunun yanında açıktır ki ℓ_∞^*, c^*, c_0^* ve ℓ_p^* uzayları ω^*'ın birer alt vektör uzayları ve ilgili metriklerle tam $*$-metrik uzaylardır.

4.1.1. Teorem. [35]

Aşağıdaki durumlar geçerlidir:

(a) $\ell_\infty^*, c^*, c_0^*$ *ve* ℓ_p^* *kümeleri* $p \geq 1$ *için birer dizi uzayıdır.*

(b) λ^* *kümesi* ℓ_∞^*, c^* *veya* c_0^*; $z = (z_k^*)$, $t = (t_k^*) \in \lambda^*$ *olsun.* λ^* *üstünde tanımlı* d_∞^* *uzaklık fonksiyonu*

$$d_\infty^*(z,t) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \ddot{\|} z_k^* \ominus t_k^* \ddot{\|}$$

verilsin. Bu durumda (λ^*, d_∞^*) *bir* $*$*-tam metrik uzaydır.*

(c) ℓ_∞^*, c^* *ve* c_0^* *uzayları*

$$\|z\|_\infty^* := \sup_{k\in\mathbb{N}} \ddot{\|} z_k^* \ddot{\|};\ z = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_k^*) \in \lambda^*,\ \lambda \in \{\ell_\infty, c, c_0\}.$$

ile tanımlı norm ile birer Banach uzayıdır.

(d) ℓ_p^* *uzayı*

$$\|z\|_p^* := \left({}_{\beta}\sum_{k=1}^{\infty} \ddot{\|} z_k^* \ddot{\|}^{\ddot{p}} \right)^{\ddot{I}/\ddot{p}};\ z = (z_1^*, z_2^*, \dots) \in \ell_p^*$$

normu ile Banach uzayıdır.

Şimdi $\mathbb{C}^*$ kompleks cismi üzerinde sınırlı ve yakınsak seriler teşkil eden dizi uzayları bs^*, cs^*, cs_0^* ve sınırlı salınımlı dizi uzayları $bv^*, bv_p^*, bv_\infty^*$'nun tanımlarını vereceğiz ve tamlıklarını inceleyeceğiz.

$\mathbb{C}^*$ cismi üzerinde bs^*, cs^* ve cs_0^* dizi uzayları

$$\begin{aligned}
bs^* &:= \left\{ x = (x_k) \in \omega^* : \|x\|_{bs}^* = \sup_{n\in\mathbb{N}} \ddot{\|} {}_{*}\sum_{k=0}^{n} x_k \ddot{\|} < \infty \right\} \\
&:= \left\{ x = (x_k) \in \omega^* : \left({}_{*}\sum_{k=0}^{n} x_k \right) \in \ell_\infty^* \right\} \\
cs^* &:= \left\{ x = (x_k) \in \omega^* : \left({}_{*}\sum_{k=0}^{n} x_k \right) \in c^* \right\} \\
cs_0^* &:= \left\{ x = (x_k) \in \omega^* : \left({}_{*}\sum_{k=0}^{n} x_k \right) \in c_0^* \right\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaylar

$$D_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{d^*\Big({}_*\sum_{k=0}^{n} x_k, {}_*\sum_{k=0}^{n} y_k\Big)\right\}$$

uzaklık fonksiyonu ile birer $*$-tam metrik uzaydır.

İkinci olarak sınırlı salınımlı bv^*, bv_p^* ve bv_∞^* dizi uzay sınıfları, $(\Delta x)_k = x_k \ominus x_{k-1}$, $x_{-1} = \theta$ ve $(\Delta x)'_k = x_k \ominus x_{k+1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
bv^* &:= \left\{x = (x_k) \in \omega^* : \|x\|_{bv}^* := {}_\beta\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{|}(\Delta x)'_k\ddot{|} < \infty\right\},\\
bv_p^* &:= \left\{x = (x_k) \in \omega^* : {}_\beta\sum_{k=0}^{\infty} \ddot{|}(\Delta x)_k\ddot{|}^{\ddot{p}} < \infty\right\},\\
bv_\infty^* &:= \left\{x = (x_k) \in \omega^* : \sup_{k\in\mathbb{N}} \ddot{|}(\Delta x)_k\ddot{|} < \infty\right\},
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $d_\Delta(x, y)$, $d_p^\Delta(x, y)$ ve $d_\infty^\Delta(x, y)$ uzaklık fonksiyonları

$$\begin{aligned}
d_\Delta(x, y) &:= {}_*\sum_{k=0}^{\infty}\left\{d^*\big[(\Delta x)'_k, (\Delta y)'_k\big]\right\}\\
d_p^\Delta(x, y) &:= \left\{{}_*\sum_{k=0}^{\infty} d^*\big[(\Delta x)_k, (\Delta y)_k\big]^{\ddot{p}}\right\}^{1\ddot{/}p} (1 \le p < \infty)\\
d_\infty^\Delta(x, y) &:= \sup_{k\in\mathbb{N}}\left\{d^*\big[(\Delta x)_k, (\Delta y)_k\big]\right\}.
\end{aligned}$$

olmak üzere (bv^*, d_Δ), (bv_p^*, d_p^Δ) ve $(bv_\infty^*, d_\infty^\Delta)$ uzayları birer $*$-tam metrik uzaydır.

4.1.2. Teorem. [36]

bs^*, cs^* ve cs_0^* uzaylarından herhangi biri μ^* ve $z = (z_k^*)$, $t = (t_k^*) \in \mu^*$ olsun. μ^* üstünde D_∞ uzaklık fonksiyonu

$$\begin{aligned}
D_\infty : \mu^* \times \mu^* &\longrightarrow \mathbb{R}\\
(z, t) &\longrightarrow D_\infty(z, t) := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{d^*\Big({}_*\sum_{k=0}^{n} z_k^*, {}_*\sum_{k=0}^{n} t_k^*\Big)\right\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda (μ^*, D_∞) $*$-tam metrik uzaydır.

İspat

cs^* ve cs_0^* uzayları içinde ispat benzer şekilde olacağından sadece bs^* için ispat vereceğiz. Öncelikle (3.1)'de verilen uzaklık fonksiyonunu kullanarak metrik aksiyomlarının sağlandığını gösterelim:

(M1) $z=(z_k^*),\ t=(t_k^*)\in bs^*$ *olsun.*

$$D_\infty(z,t)=\ddot{0} \;\Leftrightarrow\; \sup_{n\in\mathbb{N}}\ddot{\left\|{}_*\sum_{k=0}^{n} z_k^* \ominus {}_*\sum_{k=0}^{n} t_k^*\right\|}=\ddot{0}$$
$$\Leftrightarrow\; {}_*\sum_{k=0}^{n} z_k^* = {}_*\sum_{k=0}^{n} t_k^* \Leftrightarrow z=t$$

elde edilir.

(M2) $D_\infty(z,t)=D_\infty(t,z)$ *olduğu açıktır.*

(M3) Üçgen eşitsizliği hesaba katılırsa $z=(z_k^*), t=(t_k^*), w=(w_k^*)\in\mathbb{C}^*$ *olmak üzere Önerme 3.1.1(i)'den*

$$\begin{aligned} D_\infty(z,t) &= \sup_{n\in\mathbb{N}}\ddot{\left\|{}_*\sum_{k=0}^{n} z_k^* \ominus {}_*\sum_{k=0}^{n} w_k^* \oplus {}_*\sum_{k=0}^{n} w_k^* \ominus {}_*\sum_{k=0}^{n} t_k^*\right\|} \\ &\ddot{\leq} \sup_{n\in\mathbb{N}}\ddot{\left\|{}_*\sum_{k=1}^{n} z_k^* \ominus {}_*\sum_{k=0}^{n} w_k^*\right\|}\ddot{+}\sup_{n\in\mathbb{N}}\ddot{\left\|{}_*\sum_{k=0}^{n} w_k^* \ominus {}_*\sum_{k=0}^{n} t_k^*\right\|} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $D_\infty(z,t)\ddot{\leq}D_\infty(z,w)\ddot{+}D_\infty(w,t)$ *sağlanır.*

(M1)-(M3) sağlandığından, (bs^*, D_∞) *ikilisi bir* $*$*-metrik uzaydır. Şimdi bu uzayın Newtonyen olmayan kompleks cisim üzerinde tam olduğunu gösterelim.*

Öncelikle $x^m=\{x_1^{(m)},x_2^{(m)},\ldots\}$ *dizisi,* bs^* *uzayından alınan bir Cauchy dizisi olsun. Her* $\varepsilon\ddot{>}\ddot{0}$ *için en az bir* $n_0\in\mathbb{N}$ *var öyle ki*

$$D_\infty(x^m,x^r)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{d^*\left({}_*\sum_{k=0}^{n} x_k^{(m)},\ {}_*\sum_{k=0}^{n} x_k^{(r)}\right)\right\}\ddot{<}\varepsilon$$

her $m, r > n_0$ *için sağlanır. Sabit* $k \in \mathbb{N}$ *ve her* $m, r > n_0$ *için*

$$d^*\Big({}_*\sum_{k=0}^{n} x_k^{(m)}, {}_*\sum_{k=0}^{n} x_k^{(r)} \Big) \ddot{<} \varepsilon \tag{4.3}$$

elde edilir. Herhangi $k \in \mathbb{N}$ *sabiti için* $x_k^{(m)} = \left\{ x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots, x_k^{(m)}, \ldots \right\}$ *dizisi bir Cauchy dizisidir. Bu durumda* $\mathbb{C}^*$ *uzayının tamlığı (bkz. [35]) dikkate alınırsa* $(x_k^{(m)})$ *dizisi yakınsaktır. Burada* $m \to \infty$ *için* $x_k^{(m)} \stackrel{*}{\to} x_k$ *seçelim. O halde* $x_1, x_2, \ldots$ *sonlu limit noktaları olmak üzere* $x = (x_1, x_2, \ldots)$ *olsun ve gösterelim ki* $x \in bs^*$ *dir. Bunun için önce (4.3)'de* $r \to \infty$ *için limit alınırsa*

$$d^*\Big({}_*\sum_{k=0}^{n} x_k^{(m)}, {}_*\sum_{k=0}^{n} x_k \Big) \ddot{\leq} \varepsilon \tag{4.4}$$

eşitsizliği her $m > n_0$ *için sağlanır.* $(x_k^{(m)}) \in bs^*$ *olduğundan en az bir* $p \in \mathbb{R}_\beta$ *vardır öyle ki her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $\ddot{\|} x_k^{(m)} \ddot{\|} \ddot{\leq} p$ *geçerlidir. O halde (4.4) ve üçgen eşitsizliği beraber dikkate alınırsa* $m > n_0$ *için*

$$d^*\Big({}_*\sum_{k=1}^{n} x_k, \ddot{0} \Big) \ddot{\leq} d^*\Big({}_*\sum_{k=1}^{n} x_k, {}_*\sum_{k=1}^{n} x_k^{(m)} \Big) \ddot{+} d^*\Big({}_*\sum_{k=1}^{n} x_k^{(m)}, \ddot{0} \Big) \ddot{\leq} \varepsilon \ddot{+} p$$

elde edilir. Bu durumda $x = (x_k) \in bs^*$ *olur. Diğer yandan* $m > n_0$ *için (4.4)'den*

$$D_\infty(x^m, x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \Big\{ d^*\Big({}_*\sum_{k=1}^{n} x_k^{(m)}, {}_*\sum_{k=1}^{n} x_k \Big) \Big\} \ddot{\leq} \varepsilon,$$

yazılır ve $m \to \infty$ *için limite geçilirse* $x^m \stackrel{*}{\to} x$ *sağlanır. Dolayısıyla* bs^* *uzayı* $*$*-tamdır.*

Theorem 4.1.2'den bs^*, cs^* ve cs_0^* uzayları $\|\cdot\|_{bs}^*$ veya $\|\cdot\|_{cs}^*$ normlarının ürettiği D_∞ metriği ile tamdır. Diğer yandan $bv^\star$ uzayının tamlığı benzer olarak elde edilir.

4.1.3. Teorem. [36]

$x = (x_k)$, $y = (y_k) \in bv^*$ *ve* $(\Delta x)'_k = x_k \ominus x_{k+1}$ *olmak üzere* $d_\Delta(x, y)$, $d_p^\Delta(x, y)$ *ve* $d_\infty^\Delta(x, y)$

uzaklık fonksiyonları

$$\begin{aligned}
d_\Delta(x,y) &:= {}_*\sum_{k=0}^{\infty}\left\{d^*\left[(\Delta x)'_k\,,(\Delta y)'_k\right]\right\}\\
d_p^\Delta(x,y) &:= \left\{{}_*\sum_{k=0}^{\infty} d^*\left[(\Delta x)_k,(\Delta y)_k\right]^{\ddot{p}}\right\}^{\ddot{1}/p}(1\le p<\infty)\\
d_\infty^\Delta(x,y) &:= \sup_{k\in\mathbb{N}}\left\{d^*\left[(\Delta x)_k,(\Delta y)_k\right]\right\}.
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde $(bv^*, d_\Delta), (bv_p^*, d_p^\Delta)$ *ve* $(bv_\infty^*, d_\infty^\Delta)$ *ikilileri birer* $*$*-tam metrik uzaydır.*

4.1.1. Sonuç. [36]

Aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

(i) bs^*, cs^* *ve* cs_0^* *uzayları*

$$\|x\|_{bs}^* = \|x\|_{cs}^* = \sup_{n\in\mathbb{N}}\ddot{\left\|{}_*\sum_{k=1}^{n} x_k\right\|};\ x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\lambda^*,\ \lambda\in\{bs,cs,cs_0\} \qquad (4.5)$$

normları ile birer Banach uzayıdır.

(ii) bv^* *uzayı, her* $k\in\mathbb{N}$ *için*

$$\|x\|_{bv}^* := {}_\beta\sum_{k=0}^{\infty}\ddot{\left\|(\Delta x)'_k\right\|},\ \ (\Delta x)'_k = (x_k \ominus x_{k+1}) \qquad (4.6)$$

şeklinde tanımlı norm ile bir Banach uzayıdır.

4.2. Dual Uzaylar

Köthe ve Toeplitz [44, 45] tarafından inşa edilen dual uzaylar, lineer fonksiyoneller ve matris dönüşüm sınıfları için önemli bir role sahiptir. Dizi uzaylarının dualleri ilk olarak Köthe tarafından tarif edilmiş olup bu dual sınıflarının geniş uygulamalarını Maddox [46] çalışmıştır. Bu bölümde klasik dizi uzaylarının α-, β- ve γ-dualllerinin Newtonyen olmayan hesap tarzındaki karşılıkları üzerinde duralım.

4.2.1. Tanım. [36]

λ^*, $\mu^* \subset \omega^*$ olmak üzere

$$S(\lambda^*, \mu^*) := \left\{w = (w_k) \in \omega^* : w \odot z = (w_k \odot z_k) \in \mu^* \ \ her \ \ z = (z_k) \in \lambda^*\right\}$$

olsun. Bu durumda $\lambda^* \subset \omega^*$ dizi uzayı için α-, β- ve γ-duallleri

$$\begin{aligned} \{\lambda^*\}^\alpha &:= \left\{w = (w_k) \in \omega^* : w \odot z = (w_k \odot z_k) \in \ell_1^* \ \ her \ \ z = (z_k) \in \lambda^*\right\}, \\ \{\lambda^*\}^\beta &:= \left\{w = (w_k) \in \omega^* : w \odot z = (w_k \odot z_k) \in cs^* \ \ her \ \ z = (z_k) \in \lambda^*\right\}, \\ \{\lambda^*\}^\gamma &:= \left\{w = (w_k) \in \omega^* : w \odot z = (w_k \odot z_k) \in bs^* \ \ her \ \ z = (z_k) \in \lambda^*\right\}, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca ν^* bir dizi uzayı; eğer $\nu^* \subset \lambda^*$ ise $S(\lambda^*, \mu^*) \subset S(\nu^*, \mu^*)$ ve eğer $\mu^* \subset \nu^*$ ise $S(\lambda^*, \mu^*) \subset S(\lambda^*, \nu^*)$ koşulları sağlanır.

Uyarı. [36]

$\varnothing \neq \lambda^* \subset \omega^*$ olmak üzere aşağıdaki koşullar geçerlidir:

(a) *φ^* dizi uzayı*

$$\varphi^* := \{x = (x_k) : \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, x_k = \ddot{0}\}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $\varphi^* < \{\lambda^*\}^\beta < \omega^*$ ise $\{\lambda^*\}^\beta$ bir dizi uzayıdır.

('<' notasyonu, Newtonyen olmayan lineer alt uzay için kullanılmıştır.)

(b) *Eğer $\lambda^* \subset \mu^* \subset \omega^*$ ise $\{\mu^*\}^\beta < \{\lambda^*\}^\beta$.*

(c) $\lambda^* \subset \{\lambda^*\}^{\beta\beta} := \left(\{\lambda^*\}^\beta\right)^\beta$.

(d) $\{\varphi^*\}^\beta = \omega^*$ *ve* $\{\omega^*\}^\beta = \varphi^*$.

İspat

Sadece (a) ve (d) koşullarını gösterelim. $w = (w_k), m = (m_k)$ ve $n = (n_k) \in \{\lambda^*\}^\beta$ olsun.

(a) Hipotezden $\{\lambda^*\}^\beta < \omega^*$ sağlanır. Gösterelim ki $m, n \in \{\lambda^*\}^\beta$ için $m \oplus n \in \{\lambda^*\}^\beta$ olur.

$l \in \lambda^*$ olsun. Buradan

$$(m_k \oplus n_k) \odot l_k = (m_k \odot l_k) \oplus (n_k \odot l_k) \in cs^*$$

elde edilir ve $m \oplus n \in \{\lambda^*\}^\beta$ olur. Şimdi $t \in \mathbb{C}^*$ ve $w = (w_k) \in \{\lambda^*\}^\beta$ için gösterelim ki $t \odot w \in \{\lambda^*\}^\beta$'dır. $l \in \lambda^*$ için $(w_k \odot l_k) \in cs^*$ olduğundan $((t_k \odot w_k) \odot l_k) = t_k \odot (w_k \odot l_k) \in cs^*$ ve $t \odot w \in \{\lambda^*\}^\beta$ elde edilir. Yani $\{\lambda^*\}^\beta$ uzayı ω^*'ın bir alt uzayıdır.

(d) (a) şıkkı kullanılarak sadece $\{\omega^*\}^\beta \subset \varphi^*$ koşulunun sağlandığını göstermek yeterlidir. $w = (w_n) \in \{\omega^*\}^\beta$ ve $z = (z_n)$ olmak üzere $z_n \odot w_n = \ddot{1}$, $w_n \neq \ddot{0}$ ve diğer durumlarda $z_n := \ddot{1}$ olarak verilsin. φ^*'ın tanımı gereği her $n \geq N$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $w_n = \ddot{0}$ olur. Böylelikle

$$\begin{aligned} {}_*\sum_{n=1}^{\infty} w_n \odot z_n &= [(w_1 \odot z_1) \oplus \cdots \oplus (w_n \odot z_n)] \oplus (w_N \odot z_N) \oplus \ddot{0} \oplus \ddot{0} \oplus \cdots \\ &= {}_*\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{1} < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $w \odot z \in cs^*$ ve $w \in \varphi^*$ olmasını gerektirir.

4.2.1. Teorem. [36]

Aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

(a) $\{c_0^*\}^\beta = \{c^*\}^\beta = \{\ell_\infty^*\}^\beta = \ell_1^*$.

(b) $\{\ell_1^*\}^\beta = \ell_\infty^*$.

İspat

(a) Uyarı (b) dikkate alınırsa $\{\ell_\infty^*\}^\beta \subset \{c^*\}^\beta \subset \{c_0^*\}^\beta$ koşulunun sağlandığı açıktır. Şimdi $\ell_1^* \subset \{\ell_\infty^*\}^\beta$ ve $\{c_0^*\}^\beta \subset \ell_1^*$ olduğunu gösterelim. $w = (w_k) \in \ell_1^*$ ve $z = (z_k) \in \ell_\infty^*$ verilsin. Bu taktirde her $k \in \mathbb{N}$ için

$${}_*\sum_{k=0}^{n} \left\| w_k \odot z_k \right\| \ddot{\leq} \|z\|_\infty^* \ddot{\times} \|w\|_1^* < \infty$$

elde edilir ve $w \odot z \in cs^*$ olur. Yani $\ell_1^* \subset \{\ell_\infty^*\}^\beta$ sağlanır.

Diğer yandan gösterelim ki $y = (y_k) \in \omega^* \setminus \ell_1^*$ *için en az bir* $x \in c_0^*$ *vardır öyle ki* $y \odot x \notin cs^*$ *sağlanır.* $y \notin \ell_1^*$ *için artan ve* $n_0 = \ddot{0}$ *olan bir* (n_p) *indeks dizisi için* ${}_*\sum_{k=n_{p-1}}^{n_p-1} \|y_k\| \ddot{>} p; (p \in \mathbb{N})$ *sağlansın. Bu durumda Uyarı (i) den* $x = (x_k) \in c_0^*$ *ve kompleks işaret fonksiyonu*

$$sgn^*(y) := \begin{cases} \bar{y} \oslash \|y\| & , \quad y \neq \ddot{0}, \\ \ddot{0} & , \quad y = \ddot{0}, \end{cases}$$

olmak üzere $x_k := (sgn^* y_k \oslash p)$ *dizisi tanımlansın. Uyarı (ii)'den üreteçler* $\alpha = \beta$ *olarak aynı şeçilirse her* $n_{p-1} \leq k < n_p$ *için*

$$\begin{aligned} {}_*\sum_{k=n_{p-1}}^{n_p-1} y_k \odot x_k &= {}_*\sum_{k=n_{p-1}}^{n_p-1} [y_k \odot (sgn^* y_k \oslash p)] \\ &= \frac{1}{p} \odot {}_*\sum_{k=n_{p-1}}^{n_p-1} \|y_k\| \ddot{\geq} \ddot{1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle $y \odot x \notin cs^*$ *ve* $y \notin \{c_0^*\}^\beta$ *olur. O halde* $\{c_0^*\}^\beta \subset \ell_1^*$*'dır.*

(b) *Uyarı (c) den* $\{\ell_\infty^*\}^\beta = \ell_1^*$ *olduğundan* $\ell_\infty^* \subset \left(\{\ell_\infty^*\}^\beta\right)^\beta = \{\ell_1^*\}^\beta$*'dır. Şimdi* $w = (w_n) \in \{\ell_1^*\}^\beta \setminus \ell_\infty^*$ *olsun.* w *sınırsız olduğundan en az bir* (w_{n_k}) *alt dizisi vardır öyle ki* $(k+1)^2$ *bir reel sayı olmak üzere* $\|w_{n_k}\| \ddot{\geq} (k+1)^2$ *sağlanır. Bu durumda* (x_n) *dizisi* $n = n_k$ *için* $x_n := (sgn^*(w_{n_k}) \oslash (k+1)^2)$ *ve diğer durumlarda* $\ddot{0}$ *şeklinde tanımlanırsa* $x \in \ell_1^*$ *sağlanır. Fakat*

$${}_*\sum_n w_n \odot x_n = {}_*\sum_k \frac{1}{(k+1)^2} \odot \|w_{n_k}\| \ddot{\geq} {}_*\sum_k 1 = \infty$$

olduğundan $w \notin \{\ell_1^*\}^\beta$*'dır ve bu da* $\{\ell_1^*\}^\beta \subset \ell_\infty^*$ *olması ile çelişir. Sonuç olarak* $\{\ell_1^*\}^\beta \subset \ell_\infty^*$*'dır. Bu adım ispatı tamamlar.*

Uyarı. [36]

$\varnothing \neq \lambda^* \subset \omega^*$ *olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanır:*

(a) $\varphi^* < \{\lambda^*\}^\alpha < \{\lambda^*\}^\beta < \{\lambda^*\}^\gamma < \omega^*$. *Özel olarak* $\zeta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ *olmak üzere* $\{\lambda^*\}^\zeta$ *uzayı* $\mathbb{C}^*$ *üzerinde bir dizi uzayıdır.*

(b) *Eğer* $\lambda^* < \mu^* < \omega^*$ *ise* $\{\mu^*\}^\zeta < \{\lambda^*\}^\zeta$.

(c) I bir indeks kümesi ve λ_i^*'ler birer dizi uzayı olmak üzere eğer $\lambda^* := \bigcup_{i\in I}\lambda_i^*$ ise $\langle\lambda^*\rangle^\zeta = \bigcap_{i\in I}\{\lambda_i^*\}^\zeta$ sağlanır. Burada $'\langle\rangle'$ notasyonu ile $\mathbb{C}^*$ üzerinde lineer alt uzayın bir tabanını göstereceğiz.

(d) $\lambda^* \subset \{\lambda^*\}^{\zeta\zeta} := \left(\{\lambda^*\}^\zeta\right)^\zeta$, $(\zeta \in \{\alpha,\beta,\gamma\})$.

İspat

(b)'nin sağlandığı açıktır. Ayrıca $\ell_\infty^* < cs^* < bs^*$ koşulundan (a) elde edilir. (c) ve (d) şıklarının ispatlarını diğer durumları benzer olarak elde edileceğinden sadece $\zeta = \alpha$ için yapalım.

(c) $\lambda_i^* \subset \langle\lambda^*\rangle$ olduğundan $\langle\lambda^*\rangle^\alpha \subset \{\lambda_i^*\}^\alpha$ ve (b) koşulundan $\langle\lambda^*\rangle^\alpha \subset \bigcap_{i\in I}\{\lambda_i^*\}^\alpha$ sağlanır. Diğer yandan eğer $y \in \{\lambda_i^*\}^\alpha$ öyle ki $y \in \bigcap_{i\in I}\{\lambda_i^*\}^\alpha$ ise her $x \in \lambda^*$ için $x \odot y \in \ell_1^*$ yazılır ve buradan da $y \in \{\lambda^*\}^\alpha \subset \langle\lambda^*\rangle^\alpha$ olur.

(d) $\lambda^* \subset \{\lambda^*\}^{\zeta\zeta}$ olduğu açık olmakla beraber $w \in \lambda^*$ ise her $z \in \{\lambda^*\}^\alpha$ için $w \odot z \in \ell_1^*$ olur.

Böylelikle (a) şıkkından $w \in \{\lambda^*\}^{\zeta\zeta}$ ve $\lambda^* \subset \{\lambda^*\}^{\zeta\zeta}$ sağlanır.

4.2.2. Teorem. [36]

Aşağıdaki koşullar sağlanır:

(a) $\{cs^*\}^\alpha = \{bv^*\}^\alpha = \{bv_0^*\}^\alpha = \ell_1^*$

(b) $\{cs^*\}^\beta = bv^*,\ \{bv^*\}^\beta = cs^*,\ \{bv_0^*\}^\beta = bs^*,\ \{bs^*\}^\beta = bv_0^*$.

(c) $\{cs^*\}^\gamma = bv^*,\ \{bv^*\}^\gamma = bs^*,\ \{bv_0^*\}^\gamma = bs^*,\ \{bs^*\}^\gamma = bv^*$,

İspat

İspat $\{cs^*\}^\zeta$; $\zeta = \alpha$ için verilecektir. Diğer şıklar benzer şekilde elde edilir.

(a) $x = (x_k) \in cs^*$ ve $y = (y_k) \in \ell_1^*$ olsun. Bu durumda (4.5)'de verilen tanım dikkate alınırsa her $k \in \mathbb{N}$ için

$$ {}_*\sum_k \ddot{\|} y_k \odot x_k \ddot{\|} \,\ddot{\leq}\, \|x\|_{cs}^* \,\ddot{\times}\, {}_*\sum_k \ddot{\|} y_k \ddot{\|} < \infty $$

sağlanır. O halde $y \in \{cs^*\}^\alpha$ *ve buradan* $\ell_1^* \subset \{cs^*\}^\alpha$ *olur.*

Tersine olarak $y = (y_k) \in \{cs^*\}^\alpha \setminus \ell_1^*$ *olsun. Her* p *doğal sayısı için* (n_p) *indeks dizisi* $n_p < n_{p+1}$ *olacak şekilde seçilsin. Bu durumda her* $n_p < k \leq n_{p+1}$ *için* $(\ddot{-}\ddot{1})^{\ddot{k}}\ddot{/}\ddot{2}^{\ddot{p}} = \beta\{(-1)^k 2^{-p}\}$ *geçerlidir. Buradan* $x = (x_k) \in cs^*$ *dizisini*

$$x_k := \begin{cases} (\ddot{-}\ddot{1})^{\ddot{k}}\ddot{/}\ddot{2}^{\ddot{p}} & , \quad n_p < k \leq n_{p+1}, \\ \ddot{0} & , \quad \textit{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak, (n_p) *nin seçimine bağlı olarak*

$${}_*\sum_k \ddot{|}y_k \odot x_k\ddot{|} \,\ddot{\geq}\, {}_*\sum_p \ddot{2}^{\ddot{-}\ddot{p}} \odot \, {}_*\sum_{k=n_p+1}^{n_{p+1}} \ddot{|}y_k\ddot{|} \,\ddot{\geq}\, {}_*\sum_p \ddot{2}^{\ddot{p}} = \infty$$

sağlanır. Burada $\sum_p 2^p$ *klasik geometrik serisi ıraksak olduğundan,*

$${}_*\sum_p \ddot{2}^{\ddot{p}} = \beta\left\{ \sum_p \beta^{-1}(\ddot{2}^{\ddot{p}}) \right\} = \beta\left\{ \sum_p 2^p \right\}$$

serisi de ıraksaktır. Böylece $x \odot y \notin \ell_1^*$ *olur ve* $y \notin \{cs^*\}^\alpha$ *sağlanır. Bu* $y \in \{cs^*\}^\alpha$ *olması ile çelişir. Sonuç olarak* $\{cs^*\}^\alpha \subset \ell_1^*$*'dır.*

(b) $u = (u_k) \in \{cs^*\}^\beta$ *ve* $w = (w_k) \in c_0^*$ *olsun.* $v = (v_k) \in cs^*$ *dizisi her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $v_k = (w_k \ominus w_{k+1})$ *şeklinde tanımlansın. Bu durumda* ${}_*\sum_k u_k \odot v_k$ *yakınsar fakat*

$${}_*\sum_{k=1}^{n} (w_k \ominus w_{k+1}) \odot u_k = \left[{}_*\sum_{k=1}^{n-1} w_k \odot (u_k \ominus u_{k-1}) \right] \ominus w_{n+1} \odot u_n \tag{4.7}$$

ve $\ell_1^* \subset cs^*$ *şartı* $(u_k) \in \{cs^*\}^\beta \subset \{\ell_1^*\}^\beta = \ell_\infty^*$ *olmasını gerektirir. (4.7)'de* $n \to \infty$ *için* $*$*-limite geçilirse*

$${}_*\sum_{k=1}^{\infty} (w_k \ominus w_{k+1}) \odot u_k = {}_*\sum_{k=1}^{\infty} w_k \odot (u_k \ominus u_{k-1})$$

her $k \in \mathbb{N}$ *için elde edilir. Yani* $(u_k \ominus u_{k-1}) \in \{c_0^*\}^\beta = \{c_0^*\}^\alpha = \ell_1^*$ *öyle ki* $u \in bv^*$ *ve* $\{cs^*\}^\beta \subseteq bv^*$ *sağlanır.*

Tersine olarak $u = (u_k) \in bv^*$ *olmak üzere* $(u_k \ominus u_{k-1}) \in \ell_1^*$*'dır. Ayrıca* $v = (v_k) \in cs^*$

için (w_n) *dizisi* $w_n = {}_*\sum_{k=0}^{n} v_k$ *şeklinde her* $k \in \mathbb{N}$ *için tanımlanırsa* $w_n \in c^*$ *olur. Ayrıca* $\{c^*\}^\alpha = \ell_1^*$ *olduğundan* ${}_*\sum_k w_k \odot (u_k \ominus u_{k+1})$ *serisi yakınsaktır. Böylelikle*

$$
\begin{aligned}
{}_*\sum_{k=m}^{n}(w_k \ominus w_{k-1}) \odot u_k \quad &\ddot{\leq} \quad \left[{}_*\sum_{k=m}^{n-1} w_k \odot (u_k \ominus u_{k+1})\right] \\
&\oplus \quad (w_n \odot u_n) \ominus (w_{m-1} \odot u_m). \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $(w_n) \in c^*$ *ve* $(u_k) \in bv^* \subset c^*$ *olduğundan (4.8) eşitsizliğinin sağ yanı* $m, n \to \infty$ *için* $\ddot{0}$*'a yakınsar. Böylece* ${}_*\sum_{k=0}^{\infty}(w_k \ominus w_{k-1}) \odot u_k$ *veya* ${}_*\sum_{k=0}^{\infty} u_k \odot v_k$ *serisi yakınsaktır. Sonuç olarak* $bv^* \subseteq \{cs^*\}^\beta$ *olur.*

(c) *(a) şıkkından* $bv^* \subseteq \{cs^*\}^\beta$ *ve* $\{cs^*\}^\beta \subset \{cs^*\}^\gamma$ *olduğundan* $bv^* \subseteq \{cs^*\}^\beta$ *olduğunu biliyoruz. Burada* $\{cs^*\}^\gamma \subset bv^*$ *olduğunu göstermek yeterlidir. O halde* $u = (u_n) \in \{cs^*\}^\gamma$ *ve* $v = (v_n) \in c_0^*$ *olmak üzere* $(w_n) \in cs^*$ *dizisi her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $w_n = (v_n \ominus v_{n+1})$ *şeklinde tanımlansın. Bu durumda en az bir* $K \ddot{>} \ddot{0}$ *sayısı vardır öyle ki*

$$
\ddot{\left\|\right.} {}_*\sum_{k=1}^{n} u_k \odot w_k \ddot{\left\|\right.} \ddot{\leq} K
$$

eşitsizliği her $n \in \mathbb{N}$ *için geçerlidir. Benzer olarak* $(v_n) \in c_0^*$ *ve* $(u_n) \in \{cs^*\}^\gamma \subset \ell_\infty^*$ *olduğundan en az bir* $M \ddot{>} \ddot{0}$ *sayısı vardır öyleki her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $\ddot{\|} u_n \odot v_n \ddot{\|} \ddot{\leq} M$ *sağlanır. Bu koşullar birlikte hesaba katılırsa*

$$
\ddot{\left\|\right.} {}_*\sum_{k=1}^{n}(u_k \ominus u_{k-1}) \odot v_k \ddot{\left\|\right.} \ddot{\leq} \ddot{\left\|\right.} {}_*\sum_{k=1}^{n+1} u_k \odot (v_k \ominus v_{k+1}) \ddot{\left\|\right.} \oplus \ddot{\|} v_{n+2} \odot u_{n+1} \ddot{\|} \ddot{\leq} K \oplus M
$$

ve $(u_k \ominus u_{k-1}) \in \{c_0^*\}^\gamma = \{c_0^*\}^\alpha = \ell_1^*$ *öyle ki* $(u_n) \in bv^*$ *olur. O halde* $\{cs^*\}^\gamma \subset bv^*$ *ve sonuçta* $\{cs^*\}^\gamma = bv^*$ *elde edilir.*

5. SONSUZ MATRİSLER VE MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

$A = (a_{ij}^*)$ Newtonyen olmayan kompleks sayıların sonsuz bir matrisi olsun. α ve β keyfi üreteçler olmak üzere, $A = (a_{ij}^*) = (\dot{\epsilon}_{ij}, \ddot{\delta}_{ij})$ ve $B = (b_{ij}^*) = (\dot{\mu}_{ij}, \ddot{\eta}_{ij})$ matrisleri arasındaki ($\oplus$) cebirsel toplama ve ($\odot$) skalar çarpma işlemleri; $\varepsilon, \delta, \mu, \eta$ reel sayılar ve $\lambda^* = (\dot{\lambda}, \ddot{\lambda}) \in C^*$ için aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} A \oplus B = (a_{ij}^* \oplus b_{ij}^*) &= (\dot{\epsilon}_{ij}, \ddot{\delta}_{ij}) \oplus (\dot{\mu}_{ij}, \ddot{\eta}_{ij}) \\ &= (\dot{\epsilon}_{ij} \dot{+} \dot{\mu}_{ij}, \ddot{\delta}_{ij} \ddot{+} \ddot{\eta}_{ij}) \\ &= (\alpha\{\epsilon_{ij} + \mu_{ij}\}, \beta\{\delta_{ij} + \eta_{ij}\}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda^* \odot A &= (\lambda^* \odot a_{ij}^*) \\ &= (\dot{\lambda}, \ddot{\lambda}) \odot (\dot{\epsilon}_{ij}, \ddot{\delta}_{ij}) \\ &= (\alpha\{\lambda\epsilon_{ij} - \lambda\delta_{ij}\}, \beta\{\lambda\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\}). \end{aligned}$$

Ayrıca verilen bu sonsuz matrislerin çarpımı, bütün $i, j \in \mathbb{N}$ için $*$-seri tanımı [36] hesaba katılırsa

$$\begin{aligned} (A \odot B)_{ij} &= {}_*\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}^* \odot b_{kj}^* \\ &= \left(\alpha\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(\varepsilon_{ik}\mu_{kj} - \delta_{ik}\eta_{kj})\right\}, \beta\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(\varepsilon_{ik}\eta_{kj} + \delta_{ik}\mu_{kj})\right\}\right) \end{aligned} \tag{5.1}$$

şeklindedir. (5.1)'de verilen $*$-seri toplamının sağ tarafı bütün $i, j \in \mathbb{N}$ için $*$-yakınsaktır. Diğer bir ifadeyle (5.1)'de verilen $*$-serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_k(\varepsilon_{ik}\mu_{kj} - \delta_{ik}\eta_{kj}) \text{ ve } \sum_k(\varepsilon_{ik}\eta_{kj} + \delta_{ik}\mu_{kj}),$$

serilerinin klasik anlamda yakınsak olmasıdır. Iraksaklık tanımı içinde benzer durum söz konusudur.

5.1. Matris Dönüşümler

5.1.1. Tanım. [60]

$x_0^*, x_1^*, x_2^*, \ldots$ elemanları sonsuz sayıda bir lineer denklem sistemine ait elemanlar olmak üzere, ${}_*\sum_k a_{ik}^* \odot x_k^* = y_i$ verilsin. Bu durumda tüm x_k^* bilinmeyenleri ve a_{ik}^* katsayıları için bir $A \odot X = Y$ sonsuz matris formu oluşturulabilir. Bununla birlikte $\boldsymbol{I}_* = (\delta_{ij}^*)$ birim matrisi

$$\delta_{ij}^* = \begin{cases} 1^* = (\dot{1}, \ddot{1}) & , \quad i = j, \\ \\ \theta^* = (\dot{0}, \ddot{0}) & , \quad i \neq j. \end{cases}$$

olup, $\boldsymbol{I}_* \odot A = A \odot \boldsymbol{I}_* = A$'dır.

Örnek

(Cesàro) $\boldsymbol{C}_1^* = (c_{nk}^*)$ sonsuz matrisi bütün $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$c_{nk}^* = \begin{cases} \left(\frac{1}{n+1}\right)^* & , \quad 0 \leq k \leq n, \\ \\ \theta^* & , \quad k > n. \end{cases} \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde α ve β üreteçleri, exp *olarak seçilirse*

$$\begin{pmatrix} (e, e) & (1,1) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\sqrt{e}, \sqrt{e}) & (\sqrt{e}, \sqrt{e}) & (1,1) & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\sqrt[3]{e}, \sqrt[3]{e}) & (\sqrt[3]{e}, \sqrt[3]{e}) & (\sqrt[3]{e}, \sqrt[3]{e}) & (1,1) & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (\sqrt[n+1]{e}, \sqrt[n+1]{e}) & (\sqrt[n+1]{e}, \sqrt[n+1]{e}) & (\sqrt[n+1]{e}, \sqrt[n+1]{e}) & \cdots & (\sqrt[n+1]{e}, \sqrt[n+1]{e}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

kompleks terimli sonsuz bir matris elde dilir. Benzer olarak üreteçlerin seçimine bağlı olarak farklı sonsuz matrisler elde edilir.

Herhangi $\mu_1^*, \mu_2^* \subset w^*$ ve $A = (a_{nk}^*) = (\dot{\varepsilon}_{nk}, \ddot{\delta}_{nk})$ olsun. Eğer bütün $z = (z_k^*) \in \mu_1^*$ için $A \odot z = \{(Az)_n\}$

$$\begin{pmatrix} a_{00}^* & a_{01}^* & \cdots & a_{0k}^* & \cdots & \\ a_{10}^* & a_{11}^* & \cdots & a_{1k}^* & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{n0}^* & a_{n1}^* & \cdots & a_{nk}^* & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} z_0^* \\ z_1^* \\ \vdots \\ z_k^* \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00}^* \odot z_0^* \oplus a_{01}^* \odot z_1^* \oplus & \cdots \\ a_{10}^* \odot z_0^* \oplus a_{11}^* \odot z_1^* \oplus & \cdots \\ \vdots & \\ a_{n0}^* \odot z_0^* \oplus a_{n1}^* \odot z_1^* \oplus & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}_{*}\sum_k a^*_{0k} \odot z^*_k \\ {}_{*}\sum_k a^*_{1k} \odot z^*_k \\ \vdots \\ {}_{*}\sum_k a^*_{nk} \odot z^*_k \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Az)_0 \\ (Az)_1 \\ \vdots \\ (Az)_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

olmak üzere, z'nin bir A-dönüşümü var ve μ_2^*'ın bir elemanı ise A dönüşümüne μ_1^*'dan μ_2^*'a bir matris dönüşümü denir ve $A : \mu_1^* \to \mu_2^*$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $z = (z_k^*) = (\dot{\mu}_k, \ddot{\eta}_k)$ dizisi ve her $n \in \mathbb{N}_0$ için $\{(Az)_n\}$ dizisi

$$\begin{aligned} (Az)_n &= {}_{*}\sum_k a^*_{nk} \odot z^*_k \\ &= \left(\alpha\left\{\sum_k(\varepsilon_{nk}\mu_k - \delta_{nk}\eta_k)\right\}, \beta\left\{\sum_k(\varepsilon_{nk}\eta_k + \delta_{nk}\mu_k)\right\}\right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

5.1.2. Tanım. [37]

$z = (z_k) \in w^*$ olsun. Eğer z'nin A-limiti, bir $\gamma = (\dot{\gamma}_1, \ddot{\gamma}_2)$ değerine eşitse; yani ${}^*\lim_{n\to\infty} d^*((Az)_n, \gamma) = \theta^*$ sağlanırsa z; $\gamma \in \mathbb{C}^*$ değerine A-toplanabilirdir denir. Ayrıca her $k, n \in \mathbb{N}_0$ için aşağıdaki yakınsamalar geçerlidir:

$$\sum_k(\varepsilon_{nk}\mu_k - \delta_{nk}\eta_k) \to \gamma_1 \ \ \textit{ve} \ \ \sum_k(\varepsilon_{nk}\eta_k + \delta_{nk}\mu_k) \to \gamma_2.$$

Örnek. [37]

$z = (z_k^*)$ sonsuz terimli dizisi, $\ominus 1^* = (\dot{-}\dot{1}, \ddot{-}\ddot{1}) \in C^*$ olmak üzere

$$z_k^* = \begin{cases} 1^* & , \ k \ \ cift, \\ \ominus 1^* & , \ k \ \ tek. \end{cases},$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $z_k^* \in \ell_\infty^* \setminus c^*$ olduğu açıktır. Böylelikle $\theta^* \ddot{\leq} \ddot{|}(C_1^* z)_n\ddot{|} \ddot{\leq} \left(\frac{1}{n+1}\right)^*$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için ${}^*\lim_{n\to\infty}(C_1^* z)_n = \theta^*$'dır. Yani; (z_k^*) ıraksak dizisi θ^*'a C_1^*-toplanabilirdir.

Şimdi Kadak tarafından [36] numaralı çalışmada verilen Newtonyen olmayan dual uzay yapılarını kullanarak, Newtonyen olmayan kompleks cisim üzerinde bazı matris sınıflarının karakterizasyonu üzerinde duralım.

5.1.1. Teorem. [37]

Aşağıda verilen durumlar geçerlidir:

(i) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty^* : \ell_\infty^*)$ *gerek ve yeter şart*

$$M = \sup_{n\in\mathbb{N}} {}_\beta\sum_k \dot{|}|a_{nk}^*|\dot{|} < \infty. \tag{5.4}$$

(ii) $A = (a_{nk}) \in (c^* : \ell_\infty^*)$ *gerek ve yeter şart (5.4) sağlanır.*

(iii) $A = (a_{nk}) \in (c_0^* : \ell_\infty^*)$ *gerek ve yeter şart (5.4) sağlanır.*

(iv) $A = (a_{nk}) \in (\ell_p^* : \ell_\infty^*)$ *gerek ve yeter şart*

$$C = \sup_{n\in\mathbb{N}} {}_\beta\sum_k \dot{|}|a_{nk}^*|\dot{|}^{\ddot{p}} < \infty, (\ddot{0} \leq \ddot{p} < \infty). \tag{5.5}$$

İspat

Diğer şıklar benzer şekilde elde edilebileceğinden yalnız (i) şıkkının ispatı yapılacaktır.

Öncelikle (5.4) koşulu sağlansın ve $x = (x_k) \in \ell_\infty^*$ *olsun. Bu durumda bütün sabit* $n \in \mathbb{N}$*'ler için* $(a_{nk}^*)_{k\in\mathbb{N}} \in \{\ell_\infty^*\}^\beta = \ell_1^*$ *olur ve x'in bir A-dönüşümü mevcuttur. Hipotezden yola çıkarak*

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N}} d^*((Ax)_n, \theta^*) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} d^*\Big({}_*\sum_k a_{nk}^* \odot x_k, \theta^* \Big) \\ &\mathrel{\ddot{\leq}} \|x\|_\infty^* \ddot{\times} \sup_{n\in\mathbb{N}} {}_\beta\sum_k \dot{|}|a_{nk}^*|\dot{|} < \infty \end{aligned}$$

ve $A \odot x \in \ell_\infty^*$ *elde edilir.*

Tersine olarak, $A \in (\ell_\infty^* : \ell_\infty^*)$ *olsun.* $A \odot x = \{(Ax)_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *olmak üzere* $(Ax)_n)$ *dizisi,* ℓ_∞^* *üzerinde sınırlı lineer operatörlerin bir dizisidir öyle ki* $\sup_n d^*((Ax)_n, \theta^*) < \infty$*'dur. Kanıtın diğer kısmı klasikte iyi bilinen Banach-Steinhaus teoreminin temel bir uygulamasından ibarettir.*

Örnek. [37]

$(x_k^*) = (\dot{\varepsilon}_k, \ddot{\delta}_k) \in \ell_\infty^*$ *olsun. Bütün* $k, n \in \mathbb{N}$ *için* $A = (a_{nk}^*)$ *matrisi aşağıdaki şekilde tanımlansın.*

$$a_{nk}^* := \begin{cases} x_k^* & , \ k = n, \\ \theta^* & , \ k \neq n. \end{cases}$$

Bu taktirde $k = n$ *için* $\ddot{|}a_{nk}^*\ddot{|} = \beta\left\{\sqrt{\varepsilon_k^2 + \delta_k^2}\right\}$ *olur ve diğer durumlarda* $\ddot{|}a_{nk}^*\ddot{|} = \theta^*$*'dır. Her* $\varepsilon_k, \delta_k \in \mathbb{R}$ *için* $(x_k^*) \in \ell_\infty^*$ *olduğu hesaba katılırsa*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} {}_\beta\sum_k \ddot{|}a_{nk}^*\ddot{|} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\beta\sqrt{\varepsilon_0^2 + \delta_0^2}, \beta\sqrt{\varepsilon_1^2 + \delta_1^2}, \cdots, \beta\sqrt{\varepsilon_n^2 + \delta_n^2}, \cdots, \right\} < \infty$$

olur. Teorem 5.1.1 (i) kullanılarak $A = (a_{nk}^*) \in (\ell_\infty^* : \ell_\infty^*)$ *elde edilir.*

5.1.2. Teorem. [37] (Kojima-Schur)

$A = (a_{nk}^*) \in (c^* : c^*)$ *olması için gerek ve yeter şart (5.4) koşulu yanında, en az bir* $\alpha_k, l \in \mathbb{C}^*$ *için*

$$^*\lim_{n\to\infty} a_{nk}^* = \alpha_k \tag{5.6}$$

$$^*\lim_{n\to\infty} {}_*\sum_k a_{nk}^* = l \tag{5.7}$$

koşulları sağlanmalıdır.

İspat

(5.4), (5.6) ve (5.7) koşulları sağlansın. $x = (x_k^*) \in c^*$ *olmak üzere* $x_k^* \to s \in \mathbb{C}^*$ *olsun. Herbir* $n \in \mathbb{N}$ *için* $(a_{nk})_{k\in\mathbb{N}} \in \{c^*\}^\beta = \ell_1^*$ *olduğundan x'in bir A-dönüşümü mevcuttur. Bu taktirde*

$${}_*\sum_k a_{nk}^* \odot x_k^* = \left\{{}_*\sum_k a_{nk}^* \odot (x_k^* \ominus s)\right\} \oplus \left\{s \odot {}_*\sum_k a_{nk}^*\right\} \tag{5.8}$$

sağlanır. (5.8)'in sağ tarafındaki ilk seri (5.7)'den ${}_*\sum_k \alpha_k \odot (x_k^* \ominus s)$ *değerine ve ikinci seri*

$l \odot s$ değerine yakınsarlar. Son durumda

$$^{*}\lim_{n\to\infty} {}_{*}\sum_{k} a^{*}_{nk} \odot x^{*}_{k} = \left\{ {}_{*}\sum_{k} \alpha_{k} \odot (x^{*}_{k} \ominus s) \right\} \oplus l \odot s.$$

elde edilir ve $A \odot x \in c^{*}$'dır.

Tersine olarak $A = (a^{*}_{nk}) \in (c^{*} : c^{*})$ olsun. Her $x \in c^{*}$ için $A \odot x$ mevcuttur. Şimdi, e ve $e^{(n)}$ dizilerini, sırasıyla $e_k = 1^{*}$ ve $e^{(n)}_{k} = \theta^{*}(k \neq n)$, $e^{(n)}_{n} = 1^{*}$ olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda $x = e^{(k)}$ ve $x = e$ alınırsa (5.6) ve (5.7) sağlanır. Diğer yandan $c^{*} \subset \ell^{*}_{\infty}$ olduğundan Teorem 5.1.1(i)'den (5.4) koşulu elde edilir.

5.1.3. Teorem. [37]

$A = (a^{*}_{nk}) \in (c^{*}_{0} : c^{*})$ olması için gerek ve yeter şart (5.4) ile birlikte, en az bir $(\alpha^{*}_{k}) \in w^{*}$ mevcuttur öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ için

$$^{*}\lim_{n\to\infty} d^{*}(a^{*}_{nk}, \alpha^{*}_{k}) = \theta^{*} \tag{5.9}$$

koşulunun sağlanmasıdır. Eğer $A = (a^{*}_{nk}) \in (c^{*}_{0} : c^{*})$ ise, $(\alpha^{*}_{k}) \in \ell^{*}_{1}$ için

$$^{*}\lim_{n\to\infty} {}_{*}\sum_{k} a^{*}_{nk} \odot z^{*}_{k} = {}_{*}\sum_{k} \alpha^{*}_{k} \odot z^{*}_{k}.$$

İspat

(5.4) ve (5.9) sağlansın. Her $K \in \mathbb{N}$ için en az bir $n_K \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n \geq n_K$ için ${}_{\beta}\sum_{k=0}^{K} d^{*}(a^{*}_{nk}, \alpha^{*}_{k}) \ddot{<} \ddot{\varepsilon}$ olur. Her $n \geq n_K$ için (5.9) kullanılırsa

$${}_{\beta}\sum_{k=0}^{K} d^{*}(\alpha^{*}_{k}, \theta^{*}) \ddot{\leq} {}_{\beta}\sum_{k=0}^{K} d^{*}(a^{*}_{nk}, \alpha^{*}_{k}) \ddot{+} {}_{\beta}\sum_{k=0}^{K} d^{*}(a^{*}_{nk}, \theta^{*}) \ddot{\leq} \ddot{\varepsilon} \ddot{+} M$$

olduğundan $(\alpha^{*}_{k}) \in \ell^{*}_{1}$ ve ${}_{\beta}\sum_{k} d^{*}(\alpha^{*}_{k}, \theta^{*}) \ddot{\leq} M_0$ elde edilir. Şimdi bir $z = (z^{*}_{k}) \in c^{*}_{0}$ verilsin. Keyfi $\ddot{\varepsilon}_1 \ddot{>} 0$, sabit $k \geq k_0$ ve seçilen bir $k_0 \in \mathbb{N}$ için $d^{*}(z^{*}_{k}, \theta^{*}) < \ddot{\varepsilon}_1$ sağlanır. Buna ek olarak $a^{*}_{nk} \xrightarrow{*} \alpha^{*}_{k}$ olduğundan

$$a^{*}_{nk} \odot z^{*}_{k} \xrightarrow{*} \alpha^{*}_{k} \odot z^{*}_{k} \text{ ve } {}^{*}\lim_{n\to\infty} d^{*}(a^{*}_{nk} \odot z^{*}_{k}, \alpha^{*}_{k} \odot z^{*}_{k}) = \theta^{*}$$

elde edilir. Bu durumda en az bir $N = N(k_0) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki tüm $n \geq N$'ler için

$$
{}_{\beta}\sum_{k=0}^{k_0} d^*(a_{nk}^* \odot z_k^*, \alpha_k^* \odot z_k^*) \ddot{<} \ddot{\varepsilon}_2
$$

ve buradan da

$$
\begin{aligned}
d^*\left({}_{*}\sum_k a_{nk}^* \odot z_k^*, {}_{*}\sum_k \alpha_k^* \odot z_k^* \right) \quad & \ddot{\leq} \quad {}_{\beta}\sum_k d^*(a_{nk}^* \odot z_k^*, \alpha_k^* \odot z_k^*) \\
& = \quad {}_{\beta}\sum_{k=0}^{k_0} d^*(a_{nk}^* \odot z_k^*, \alpha_k^* \odot z_k^*) \ddot{+} \quad {}_{\beta}\sum_{k=k_0+1}^{\infty} d^*(a_{nk}^* z_k^*, \alpha_k^* z_k^*) \\
& \ddot{\leq} \quad \ddot{\varepsilon}_2 \ddot{+} \quad {}_{\beta}\sum_{k=k_0+1}^{\infty} [d^*(a_{nk}^* \odot z_k^*, \theta^*) \ddot{+} d^*(\alpha_k^* \odot z_k^*, \theta^*)] \\
& \ddot{\leq} \quad \ddot{\varepsilon}_2 \ddot{+} \quad {}_{\beta}\sum_{k=k_0+1}^{\infty} d^*(a_{nk}^*, \theta^*) d^*(z_k^*, \theta^*) \\
& \ddot{+} \quad {}_{\beta}\sum_{k=k_0+1}^{\infty} d^*(\alpha_k^*, \theta^*) d^*(z_k^*, \theta^*) \\
& \ddot{\leq} \quad \ddot{\varepsilon}_2 \ddot{+} \left\{ \varepsilon_1 \ddot{\times} \left({}_{\beta}\sum_{k=k_0+1}^{\infty} d^*(a_{nk}^*, \theta^*) \ddot{+} \quad {}_{\beta}\sum_{k=k_0+1}^{\infty} d^*(\alpha_k^*, \theta^*) \right) \right\} \\
& \ddot{\leq} \quad \ddot{\varepsilon}_2 \ddot{+} [\varepsilon_1 \ddot{\times} (M \ddot{+} M_0)]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bütün $n \geq N$'ler için ${}_{*}\sum_k a_{nk}^* \odot z_k^*$ serisi yakınsak olduğundan

$$
{}_{*}\sum_k a_{nk}^* \odot z_k^* \xrightarrow{*} {}_{*}\sum \alpha_k^* \odot z_k^*
$$

olup $A \odot z \in c^*$'dır.

Tersine olarak $A = (a_{nk}^*) \in (c_0^* : c^*)$ olsun ve $z = (z_k^*) \in c_0^*$ verilsin. $A \odot z \in c^*$ mevcut olduğundan Theorem 5.1.1 (iii) kullanılarak $(c_0^* : c^*) \subset (c_0^* : \ell_\infty^*)$ koşulu, yani (5.4) sağlanır. Diğer yandan $z^{(n)} = \left\{ z_k^{(n)} \right\} \in c_0^*$ alınırsa her sabit $k \geq N$ için $A \odot z^{(n)} = \{a_{nk}^*\}_{n=0}^{\infty} \in c^*$'dır ve (5.9) elde edilir.

5.1.1. Sonuç. [37]

$A = (a_{nk}^*) \in (c_0^* : c_0^*)$ olması için gerek ve yeter şart (5.4) koşulu yanında her $k \geq N$ için $\alpha_k^* = \theta^*$ şartıyla (5.9) koşulunun sağlanmasıdır.

Örnek. [37]

Herhangi $k,n,r\in\mathbb{N}$ ve $r\geq 0$ verilsin. $C_r^*=(c_{nk}^{*(r)})$; Cesaro anlamında r. dereceden bir matris olmak üzere

$$c_{nk}^{*(r)}=\begin{cases}\left(\frac{\binom{n-k+r-1}{n-k}}{\binom{n+r}{n}}\right)^* & ;k\leq n\\ 0^* & ;\text{diğer durumlarda.}\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $r=2$ için

$$C_2^*=\begin{pmatrix} 1^* & \theta^* & \theta^* & \theta^* & \theta^* & \cdots\\ \left(\frac{2}{3}\right)^* & \left(\frac{1}{3}\right)^* & \theta^* & \theta^* & \theta^* & \cdots\\ \left(\frac{3}{6}\right)^* & \left(\frac{2}{6}\right)^* & \left(\frac{1}{6}\right)^* & \theta^* & \theta^* & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \left(\frac{2}{n+2}\right)^* & \left(\frac{2n}{(n+1)(n+2)}\right)^* & \cdots & \left(\frac{2(n-k+1)}{(n+1)(n+2)}\right)^* & \theta^* & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu durumda her $k\in\mathbb{N}$ için $\sup_{n\in\mathbb{N}}\ {}_{\beta}\sum_k \ddot{|}c_{nk}^{*(2)}\ddot{|}<\infty$ olduğundan (5.4) sağlanır. Diğer yandan

$$^*\lim_{n\to\infty}\ddot{|}c_{nk}^{*(2)}\ddot{|}={}^*\lim_{n\to\infty}\left\ddot{|}\left(\frac{2(n-k+1)}{(n+1)(n+2)}\right)^*\right\ddot{|}=\theta^*$$

olup, $\alpha_k^*=\theta^*$ şartıyla (5.9) sağlanır. Böylelikle $C_2^*\in(c_0^*:c_0^*)$'dır.

5.1.4. Teorem. [37]

$A=(a_{nk}^*)\in(\ell_\infty^*:c_0^*)$ olması için gerek ve yeter şart

$$^*\lim_{n\to\infty}\ {}_*\sum_k d^*(a_{nk}^*,\theta^*)=\theta^* \tag{5.10}$$

olmasıdır.

İspat

$A=(a_{nk}^*)\in(\ell_\infty^*:c_0^*)$ olsun ve $u=(u_k^*)\in\ell_\infty^*$ verilsin. Her sabit $n\in\mathbb{N}$ için ${}_*\sum_k a_{nk}^*\odot u_k^*$ serisi θ^*'a $*$-yakınsak olduğundan $A\odot u$ mevcuttur. Diğer yandan her $k\in\mathbb{N}$ için $u_k^*:=(1^*,1^*,1^*,\dots)$ olacak şekilde $u=(u_k^*)\in\ell_\infty^*$ dizisi tanımlansın. Bu taktirde $A\odot u\in c_0^*$ olur

ve

$$^*\lim_{n\to\infty} {}_*\sum_k a^*_{nk} \odot u^*_k = {}^*\lim_{n\to\infty} {}_*\sum_k a^*_{nk} \odot 1^* = {}^*\lim_{n\to\infty} {}_*\sum_k a^*_{nk} = \theta^*$$

eşitliklerini gerektirir. Böylece

$$^*\lim_{n\to\infty} {}_*\sum_k d^*(a^*_{nk}, \theta^*) = {}^*\lim_{n\to\infty} {}_\beta\sum_k \ddot{|}|a^*_{nk}|\ddot{|} \ddot{\leq} \ddot{\left\|} {}^*\lim_{n\to\infty} {}_*\sum_k a^*_{nk} \ddot{\right\|} = \theta^*$$

elde edilir.

Tersine olarak farzedelim ki (5.10) sağlansın ve $u = (u^*_k) \in \ell^*_\infty$ *verilsin. Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $A^*_n \in \{\ell^*_\infty\}^\beta = \ell^*_1$ *olduğundan* $A \odot u$ *mevcuttur. Bu durumda (5.10) koşulu dikkate alınırsa*

$$\begin{aligned}
^*\lim_{n\to\infty} d^*((Au)_n, \theta^*) &= {}^*\lim_{n\to\infty} d^*\left({}_*\sum_k a^*_{nk} \odot u^*_k, \theta^* \right) \\
&\ddot{\leq} {}^*\lim_{n\to\infty} {}_*\sum_k d^*(a_{nk} \odot u_k, \theta^*) \\
&\ddot{\leq} {}^*\lim_{n\to\infty} {}_*\sum_k d^*(a_{nk}, \theta^*) \ddot{\times} d^*(u_k, \theta^*) \\
&\ddot{\leq} \sup_{k\in\mathbb{N}} d^*(u_k, \theta^*) \ddot{\times} {}^*\lim_{n\to\infty} {}_*\sum_k d^*(a_{nk}, \theta^*) = \theta^*
\end{aligned}$$

elde edilir ve $A \odot u \in c^*_0$ *olur.*

5.1.5. Teorem. [37]

$A = (a^*_{nk}) \in (cs^* : c^*)$ *olması için gerek ve yeter şart (5.6) ile birlikte, her* $n, k \in \mathbb{N}$ *için*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} {}_*\sum_k d^*(\Delta a^*_{nk}, \theta^*) \ddot{<} \infty, \quad (\Delta a^*_{nk} = a^*_{nk} \ominus a^*_{n,k+1}) \tag{5.11}$$

sağlanmasıdır.

İspat

$x = (x^*_k) \in cs^*$, ${}_*\sum_k x^*_k = s$ *ve her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $y^*_k = {}_*\sum_{j=0}^k x^*_j$ *verilsin. Bir* $B = (b^*_{nk})$ *sonsuz matrisi* $B = (\Delta a^*_{nk})$ *şeklinde tanımlansın. Ayrıca farzedelim ki* $A \in (cs^* : c^*)$ *olsun. O halde her bir* $x = (x^*_k) \in cs^*$ *dizisi için* $A \odot x$ *mevcuttur ve* c^**'ın bir elemanıdır. Her sabit* $k \in \mathbb{N}$ *ve* $x = e^{(k)} \in cs^*$ *için (5.6) sağlanır. Diğer koşul için,* ${}_*\sum_k a^*_{nk} \odot x^*_k$ *serisinin m.*

kısmi toplamı ve Abel'in kısmi toplam formülü dikkate alınırsa her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
{}_{*}\sum_{k=0}^{m} a^{*}_{nk} \odot x^{*}_{k} &= \left\{ {}_{*}\sum_{k=0}^{m-1} (\Delta a^{*}_{nk}) \odot y^{*}_{k} \right\} \oplus a^{*}_{nm} \odot y^{*}_{m} \\
&= \left\{ {}_{*}\sum_{k=0}^{m-1} (\Delta a^{*}_{nk}) \odot (y^{*}_{k} \ominus s) \right\} \oplus \left\{ s \odot {}_{*}\sum_{k=0}^{m-1} \Delta a^{*}_{nk} \right\} \oplus a^{*}_{nm} \odot y^{*}_{m} \\
&= \left\{ {}_{*}\sum_{k=0}^{m-1} (\Delta a^{*}_{nk}) \odot (y^{*}_{k} \ominus s) \right\} \oplus [s \odot (a^{*}_{n0} \ominus a^{*}_{nm})] \oplus a^{*}_{nm} \odot y^{*}_{m} \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu taktirde (5.12)'de $m \to \infty$ için limite geçilirse her $n \in \mathbb{N}$ için

$$
(Ax)_n = {}_{*}\sum_{k} a^{*}_{nk} \odot x^{*}_{k} = \left\{ {}_{*}\sum_{k} b^{*}_{nk} \odot (y^{*}_{k} \ominus s) \right\} \oplus (s \odot a^{*}_{n0}) \qquad (5.13)
$$

sağlanır. ${}^{*}\lim_n (Ax)_n$ mevcut ve ${}^{*}\lim_n a^{*}_{nk} = \alpha^{*}_{0}$ olduğundan (5.13)'de $n \to \infty$ için limite geçilirse ${}^{*}\lim_n {}_{*}\sum_k b^{*}_{nk} \odot (y^{*}_{k} \ominus s)$ mevcut olur. Bu durum ise $\boldsymbol{B} \in (c^{*}_{0} : c^{*})$ olmasını gerektirir, çünkü $y \ominus s \in c^{*}_{0}$ olması için gerek ve yeter şart $x \in cs^{*}$ olmasıdır. Yani, $\boldsymbol{B} = (b^{*}_{nk})$ matrisi (5.11) koşulunu sağlar.

Tersine olarak (5.6) ve (5.11) sağlansın. İlk olarak (5.11) koşulundan, her sabit $n \in \mathbb{N}$ için $A^{*}_{n} = (a^{*}_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in \{cs^{*}\}^{\beta} = bv^{*} \subset \ell^{*}_{\infty}$ olur. Buradan da her $x \in cs^{*}$ için $A \odot x$'in mevcut olduğu görülür. Sonuç 5.1.1'den $\boldsymbol{B} = (b^{*}_{nk}) \in (c^{*}_{0} : c^{*}_{0})$'dır. Diğer yandan (5.13)'den ${}^{*}\lim_{n\to\infty} {}_{*}\sum_k a^{*}_{nk} \odot x^{*}_{k} = s \odot \alpha^{*}_{0}$ olur ve $\boldsymbol{A} = (a^{*}_{nk}) \in (cs^{*} : c^{*})$'dır.

5.1.6. Teorem. [37]

$A = (a^{*}_{nk}) \in (cs^{*} : cs^{*})$ olması için gerek ve yeter şart her $k \in \mathbb{N}$ ve $\alpha^{*}_{k} \in \mathbb{C}^{*}$ için

$$
\sup_{n \in \mathbb{N}} {}_{*}\sum_{k} d^{*}\Big({}_{*}\sum_{j=0}^{n} \Delta a^{*}_{jk}, \theta^{*} \Big) \ddot{<} \infty \qquad (5.14)
$$

$$
{}^{*}\lim_{n\to\infty} d^{*}\Big({}_{*}\sum_{n} a^{*}_{nk}, \alpha^{*}_{k} \Big) = \theta^{*} \qquad (5.15)
$$

olmasıdır.

İspat

$x=(x_k^*)\in cs^*$ *olsun ve* $\boldsymbol{C}=(c_{nk}^*)$ *matrisini* $c_{nk}={}_*\sum_{j=0}^{n} a_{jk}^*$ *olmak üzere*

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} a_{00}^* & a_{01}^* & a_{02}^* & \cdots & a_{0k}^* \\ a_{00}^*\oplus a_{10}^* & a_{01}^*\oplus a_{11}^* & a_{02}^*\oplus a_{12}^* & \cdots & a_{0k}^*\oplus a_{1k}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{00}^*\oplus\cdots\oplus a_{n0}^* & a_{01}^*\oplus a_{11}^*\oplus a_{n1}^* & a_{02}^*\oplus a_{12}^*\oplus a_{n2}^* & \cdots & a_{0k}^*\oplus a_{1k}^*\oplus a_{nk}^* \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlayalım. Varsayalım ki $A=(a_{nk}^*)\in(cs^*\,:\,cs^*)$ *olsun. Bu durumda her bir* $x=(x_k^*)\in cs^*$ *için* $A\odot x$ *mevcuttur ve* cs^**'ın bir elemanıdır. Her* $x=(x_k^*)\in cs^*$ *için bu durum sağlandığından (5.15) elde edilir. Diğer yandan* ${}_*\sum_j {}_*\sum_k a_{jk}^*\odot x_k^*$ *serisinin n. ve m. kısmi toplamlarından*

$$ {}_*\sum_{j=0}^{n} {}_*\sum_{k=0}^{m} a_{jk}^*\odot x_k^* = {}_*\sum_{k=0}^{m} {}_*\sum_{j=0}^{n} a_{jk}^*\odot x_k^* = {}_*\sum_{k=0}^{m} c_{nk}^*\odot x_k^* \tag{5.16}$$

elde edilir ve (5.16)'da $m\to\infty$ *için limit alınırsa her* $n\in\mathbb{N}$ *için*

$$ {}_*\sum_{j=0}^{n}(Ax)_j=(Cx)_n \tag{5.17}$$

sağlanır. Hipotezden $A\odot x\in cs^*$ *olduğundan* ${}^*\lim_n \sum_{j=0}^{n}(Ax)_j$ *mevcuttur ve* $\boldsymbol{C}=(c_{nk}^*)\in(cs^*\,:\,c^*)$*'dır. Teorem 5.1.5'de verilen (5.11) koşulu* $\boldsymbol{C}=(c_{nk}^*)$ *matrisi için geçerlidir ve bu ifade (5.14) koşuluna denktir.*

Tersine olarak (5.14) ve (5.15) sağlansın. Bu durumda $x\in cs^*$*'ın bir* A*-dönüşümü mevcuttur ve (5.17)'den* $\boldsymbol{C}$ *matrisi Teorem 5.1.5'nin koşullarını sağlar. Sonuç olarak* ${}^*\lim_n(Cx)_n$ *mevcuttur ve* $A\odot x\in cs^*$*'dır.*

5.1.7. Teorem. [37]

$A=(a_{nk}^*)\in(c^*\,:\,cs^*)$ *olması için gerek ve yeter şart (5.15) yanında, her* $k,n\in\mathbb{N}_0$ *için*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} {}_*\sum_{k} d^*\Big(\sum_{j=0}^{n} a_{jk}^*,\theta^*\Big)<\infty, \tag{5.18}$$

$$ {}_{*}\sum_{n} {}_{*}\sum_{k} a_{nk}^{*} < \infty. \tag{5.19} $$

olmasıdır.

İspat

$x = (x_k^*) \in cs^*$ olsun ve $\mathbf{C} = (c_{nk}^*)$ matrisi Teorem 5.1.6'daki gibi verilsin. Ayrıca $A = (a_{nk}^*) \in (c^* : cs^*)$ olsun. Bu durumda her bir $x \in c^*$ dizisi için $A \odot x$ mevcuttur ve cs^*'ın bir elemanıdır. Şimdi $x = e^{(k)} \in c^*$ ve $x = e \in c^*$ alınırsa (5.15) ve (5.19) koşulları sırasıyla sağlanır. Açıkca görülür ki $A \odot x \in cs^*$ olduğundan ${}_{*}\sum_{j}(Ax)_j$ serisi yakınsaktır ve ${}^{*}\lim_n {}_{*}\sum_{j=0}^{n}(Ax)_j$ mevcuttur. Bu durumda $\mathbf{C} = (c_{nk}^*) \in (c^* : c^*)$ sağlanır. Diğer yandan Kojima-Schur teoreminin (5.4) koşulu $\mathbf{C} = (c_{nk}^*)$ matrisi ile dikkate alınırsa bu koşul (5.18)'e denktir.

Tersine olarak (5.15), (5.18) ve (5.19) sağlansın. Bu durumda $x \in c^*$'ın bir A-dönüşümü mevcuttur ve (5.17)'den $\mathbf{C} = (c_{nk}^*)$ matrisi Kojima-Schur teoreminin koşullarını sağlar. Sonuç olarak ${}^{*}\lim_n(Cx)_n$ mevcuttur ve $A \odot x \in cs^*$'dır.

6. YILDIZ ARİTMETİĞİN BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Birinci bölümde tarif edilen normlu uzaylar hem tek üreteç hem de çift üreteçli yapılar üzerinde incelenmişti. Bu bölümde yıldız aritmetiği kullanarak reel ve kompleks cisim üzerinde iki boyutlu uzayda vektör uzay yapıları daha geniş bir biçimde ele alınacaktır.

6.1. Vektör Uzayları

Bu bölüm boyunca $\mathbb{R}_\alpha$ ve $\mathbb{C}^*$ cisimleri için, $\mathbb{F}^*$ notasyonu kullanılacaktır.

6.1.1. Tanım

$\mathbb{F}^*$ cismi üzerinde tanımlanan Newtonian olmayan $V^* \subseteq \mathbb{R}_\alpha \times \mathbb{R}_\beta$ vektör uzayı ($*$-vektör uzay) üzerinde toplama $\oplus$ ve çarpma $\odot$ işlemleri

$$\begin{array}{rcl} \oplus : V^* \times V^* & \longrightarrow & V^* \\ (u, v) & \longrightarrow & u \oplus v = (\dot{u_1} \dot{+} \dot{v_1}, \ddot{u_2} \ddot{+} \ddot{v_2}) \\ \odot : \mathbb{F}^* \times V^* & \longrightarrow & V^* \\ (\lambda, u) & \longrightarrow & \lambda \odot u = (\lambda \dot{\times} \dot{u_1}, \lambda \ddot{\times} \ddot{u_2}) \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $u = (\dot{u_1}, \ddot{u_2})$, $v = (\dot{v_1}, \ddot{v_2}) \in V^*$ vektörlerine birer $*$-vektör ve $\lambda \in \mathbb{F}^*$ ise skalar denir. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanırsa V^*'a, $\mathbb{F}^*$ cismi üzerinde bir $*$-vektör uzay denir:

(i) (Kapalılık) $u, v \in V^*$ olmak üzere $u \oplus v \in V^*$ ve $\lambda \odot v \in V^*$ her $\lambda \in \mathbb{F}^*$ için sağlanır ve herbiri tekdir.

(ii) (Birleşim) Her $\xi, \eta \in \mathbb{F}^*$ ve her $u, v, w \in V^*$ olmak üzere

$$u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w \ \ \text{ve} \ \ \xi \odot (\eta \odot v) = (\xi \odot \eta) \odot v$$

eşitlikleri geçerlidir.

(iii) (Değişim) Her $u, v \in V^*$ için $u \oplus v = v \oplus u$ dur.

(iv) (Toplamaya göre birim) V^* kümesi $\theta_A = (\dot{0}, \ddot{0})$ şeklinde toplama işlemine göre birim elemana sahiptir öyle ki her $u \in V^*$ için $u \oplus \theta_A = u$ sağlanır.

(v) (Toplamaya göre ters) V^* kümesi $u_{\oplus}^{-1} = (\dot{-}\dot{u_1}, \ddot{-}\ddot{u_2}) \in V^*$ şeklinde toplama işlemine göre

ters elemana sahiptir öyle ki her $u \in V^*$ için

$$u \oplus u_{\oplus}^{-1} = u_{\oplus}^{-1} \oplus u = \theta_A$$

geçerlidir.

(vi) *(Çarpmaya göre birim) V^* kümesi $\theta_M = (\dot{1}, \dot{0})$ şeklinde çarpma işlemine göre birim elemana sahiptir öyle ki her $u \in V^*$ için $u \odot \theta_M = u$ dur.*

(vii) *(Çarpmaya göre ters) V^* kümesi*

$$\dot{m} = \alpha\{u_1/({u_1}^2 \oplus {u_2}^2)\} \;\; ve \;\; \dot{n} = \beta\{-u_2/({u_1}^2 \oplus {u_2}^2)\}$$

olmak üzere $u_{\odot}^{-1} = (\dot{m}, \dot{n}) \in V^*$ şeklinde çarpma işlemine göre ters elemana sahiptir öyle ki her $u \in V^*$ için

$$u \odot u_{\odot}^{-1} = u_{\odot}^{-1} \odot u = \theta_M$$

geçerlidir.

(viii) *(Dağılma kuralları) Her $\xi, \eta \in \mathbb{F}^*$ ve her $u, v \in V^*$ olmak üzere*

$$\xi \odot (u \oplus v) = (\xi \odot u) \oplus (\xi \odot v) \;\; ve \;\; (\xi \oplus \eta) \odot u = (\xi \odot u) \oplus (\eta \odot u)$$

eşitlikleri sağlanır.

6.1.2. Tanım

$\mathbb{F}^*$ cismi üzerinde V^* vektör uzayının her bir elemanı $v_1, ..., v_n$ $*$-vektörlerinin lineer birleşimi olarak ifade ediliyorsa $v_1, \cdots, v_n$ $*$-vektörleri V^*'ı geriyor denir. Üstelik, $S = \{v_1, ..., v_n\}$ ise S kümesi V^*'ı gerer denir ve $*$-span V^* ile gösterilir.

6.1.3. Tanım

$S = \{v_1, ..., v_n\}$ olmak üzere aşağıdaki durumlar geçerlidir:

(i) *$a_1 \odot v_1 \oplus a_2 \odot v_2 \oplus \cdots \oplus a_n \odot v_n = (\dot{0}, \dot{0})$ olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan $a_1, \cdots, a_n$ sabitleri bulunabilirse V vektör uzayındaki $v_1, \cdots, v_n$ $*$-vektörleri aralarında lineer* *bağımlıdır denir. Aksi halde lineer bağımsızdır denir. Diğer bir ifadeyle*

$a_1 \odot v_1 \oplus a_2 \odot v_2 \oplus \cdots \oplus a_n \odot v_n = (\dot{0}, \ddot{0})$

eşitliğinin sağlanması $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ *olması ile mümkündür.*

(ii) Eğer V^* *sonlu bir* $*$*-tabana sahipse sonlu boyutlu olup bazdaki* $*$*-vektörlerin sayısı* V^**'ın boyutunu belirler.*

6.2. İç Çarpım ve Hilbert Uzayları

Bu kısımda yıldız hesap yapısı kullanılarak reel ve kompleks cisimde iç çarpım uzaylarının bu yapıyla olan ilişkileri incelenecektir. Reel cisimde cebirsel işlemler için $\dot{+}$ ve $\dot{\times}$ notasyonları, kompleks cisimde $\oplus$ ve $\odot$ notasyonlarii kullanılacaktır.

6.2.1. Tanım

V^**,* $\mathbb{R}_\alpha$ *reel cismi üzerinde bir* $*$*-vektör uzay olsun. Eğer* $I : V^* \times V^* \to \mathbb{R}_\alpha$ *dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlarsa, o takdirde bu dönüşüme* V^* *üzerinde Newtonyen olmayan bir iç çarpım denir ve* $x, y \in V^*$ *için* $\dot{\langle} \cdot, \cdot \dot{\rangle}$ *ile gösterilir. Her* $x, y, z \in V^*$ *ve* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_\alpha$ *olmak üzere*

(I1) $\dot{\langle} x \dot{+} y, z \dot{\rangle} = \dot{\langle} x, z \dot{\rangle} \dot{+} \dot{\langle} y, z \dot{\rangle}$

(I2) $\dot{\langle} \lambda \dot{\times} x, y \dot{\rangle} = \lambda \dot{\times} \dot{\langle} x, y \dot{\rangle}$

(I3) $\dot{\langle} x, y \dot{\rangle} = \dot{\langle} y, x \dot{\rangle}$

(I4) $\dot{\langle} x, x \dot{\rangle} \dot{\geq} \dot{0}$ *sağlanır ve* $\dot{\langle} x, x \dot{\rangle} = \dot{0}$ *olması için gerek ve yeter şart* $\theta_\alpha = (\dot{0}, \dot{0})$ *olduğunda* $x = \theta_\alpha$ *olmasıdır.*

Üzerinde iç çarpım tanımlanmış bir $*$-vektör uzayına iç çarpım uzayı denir. Özel olarak reel iç çarpım uzayına ise Öklidyen iç çarpım uzayı denir. Öklidyen iç çarpım uzayı V^* kümesi üzerinde bir $||x||_\alpha$ normu üretir ve bu norm

$$||x||_\alpha = \dot{\sqrt{\dot{\langle} x, x \dot{\rangle}}}, \tag{6.1}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca V^* üzerinde tanımlı d_α metriği

$$d_\alpha(x, y) = ||x \dot{-} y||_\alpha = \dot{\sqrt{\dot{\langle} x \dot{-} y, x \dot{-} y \dot{\rangle}}} \tag{6.2}$$

olur. O halde Newtonian olmayan anlamda iç çarpım uzayları normlu uzaylardır ve bu manada Hilbert uzayları Banach uzaylarıdır.

6.2.2. Tanım

V^*, $\mathbb{C}^*$ kompleks cismi üzerinde tanımlı bir $*$-vektör uzay olmak üzere, eğer $I : V^* \times V^* \to \mathbb{C}^*$ dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlarsa, o takdirde bu dönüşüme V^* üzerinde bir iç çarpım denir ve $x, y \in V^*$ için $\ddot{\langle} \cdot, \cdot \ddot{\rangle}$ ile gösterilir. Özel olarak kompleks iç çarpım uzayına ise üniter uzay denir.

Her $x, y, z \in V^*$ ve $\lambda^*, \mu^* \in \mathbb{C}^*$ olmak üzere

(CI1) $\ddot{\langle} x \oplus y, z \ddot{\rangle} = \ddot{\langle} x, z \ddot{\rangle} \oplus \ddot{\langle} y, z \ddot{\rangle}$

(CI2) $\ddot{\langle} \lambda^* \odot x, y \ddot{\rangle} = \lambda^* \odot \ddot{\langle} x, y \ddot{\rangle}$

(CI3) $\ddot{\langle} x, y \ddot{\rangle} = \overline{\ddot{\langle} y, x \ddot{\rangle}}$

(CI4) $\ddot{\langle} x, x \ddot{\rangle} = \ddot{0}$ *olması için gerek ve yeter şart* $x = \theta^* = (\dot{0}, \ddot{0})$ *olmasıdır.*

Üniter uzay V^* üzerinde bir $\ddot{|}|x|\ddot{|}$ normu üretir ve bu norm

$$\ddot{|}|x|\ddot{|} = \sqrt[\ddot{}]{\ddot{\langle} x, x \ddot{\rangle}} \tag{6.3}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca V^* kümesi üzerinde tanımlı d^* metriği

$$d^*(x, y) = \ddot{|}|x \ominus y|\ddot{|} = \sqrt[\ddot{}]{\ddot{\langle} x \ominus y, x \ominus y \ddot{\rangle}} \tag{6.4}$$

şeklindedir. (CI3) aksiyomunda kullanılan üst çizgi Tanım 3.1.3 de verilen kompleks eşleniktir. Ayrıca (6.3) eşitliği (N1)-(N4) olarak ilerde vereceğimiz norm aksiyomlarını sağlar. Bununla birlikte (CI1) ve (CI3) aksiyomlarından aşağıdaki koşullar her $\lambda^*, \mu^* \in \mathbb{C}^*$ için elde edilir:

(a) $\ddot{\langle} \lambda^* \odot x \oplus \mu^* \odot y, z \ddot{\rangle} = \lambda^* \odot \ddot{\langle} x, z \ddot{\rangle} \oplus \mu^* \odot \ddot{\langle} y, z \ddot{\rangle}$

(b) $\ddot{\langle} x, \lambda^* \odot y \ddot{\rangle} = \overline{\lambda^*} \odot \ddot{\langle} x, y \ddot{\rangle}$

(c) $\ddot{\langle} x, \lambda^* \odot y \oplus \mu^* \odot z \ddot{\rangle} = \overline{\lambda^*} \odot \ddot{\langle} x, y \ddot{\rangle} \oplus \overline{\mu^*} \odot \ddot{\langle} x, z \ddot{\rangle}$

(a) şıkkı üniter uzayın lineer olduğunu, (c) şıkkı ise eşlenik lineer olduğunu gösterir.

Öklidyen uzay üzerinde bir $||\cdot||_\alpha$ normu verilsin. Bu durumda

$$||x\dot{+}y||_\alpha^{\dot{2}}\dot{+}||x\dot{-}y||_\alpha^{\dot{2}} = \dot{2}\dot{\times}\left(||x||_\alpha^{\dot{2}}\dot{+}||y||_\alpha^{\dot{2}}\right) \tag{6.5}$$

eşitliği her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için sağlanır. Benzer olarak üniter uzay üzerinde $\ddot{||}\cdot\ddot{||}$ normu verilsin. Bu durumda

$$\ddot{||}x \oplus y\ddot{||}^{\ddot{2}}\ddot{+}\ddot{||}x \ominus y\ddot{||}^{\ddot{2}} = \ddot{2} \ddot{\times} \left(\ddot{||}x\ddot{||}^{\ddot{2}}\ddot{+}\ddot{||}y\ddot{||}^{\ddot{2}}\right) \tag{6.6}$$

eşitliği her $x, y \in \mathbb{C}^*$ için geçerlidir.

Örnek

(1) (Öklidyen uzay) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_\alpha^n$ olmak üzere $\mathbb{R}_\alpha^n$ uzayı

$$\dot{\langle} x, y \dot{\rangle} = x_1\dot{\times}y_1\dot{+}x_2\dot{\times}y_2\dot{+}\cdots\dot{+}x_n\dot{\times}y_n = {}_\alpha\sum_{k=1}^{n} x_k\dot{\times}y_k \tag{6.7}$$

şeklinde tanımlanan iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır. reelten de (6.7)'den

$$||x||_\alpha = \dot{\sqrt{\dot{\langle} x, x \dot{\rangle}}} = \dot{\sqrt{x_1{}^{\dot{2}}\dot{+}x_2{}^{\dot{2}}\dot{+}\cdots\dot{+}x_n{}^{\dot{2}}}}$$

yazılır.

(2) (Üniter uzay) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^{*n}$ olmak üzere $\mathbb{C}^{*n}$ uzayı

$$\ddot{\langle} x, y \ddot{\rangle} = x_1 \odot \overline{y_1} \oplus x_2 \odot \overline{y_2} \oplus \cdots \oplus x_n \odot \overline{y_n} = {}_*\sum_{k=1}^{n} x_k \odot \overline{y_k} \tag{6.8}$$

şeklinde tanımlanan iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır. Benzer olarak (6.8)'den

$$\begin{aligned} \ddot{|}x\ddot{|} = \ddot{\sqrt{\ddot{\langle} x, x \ddot{\rangle}}} &= \ddot{\sqrt{x_1 \odot \overline{x_1} \oplus \cdots \oplus x_n \odot \overline{x_n}}} \\ &= \ddot{\sqrt{\ddot{|}x_1\ddot{|}^{\ddot{2}}\ddot{+}\ddot{|}x_2\ddot{|}^{\ddot{2}}\ddot{+}\cdots\ddot{+}\ddot{|}x_n\ddot{|}^{\ddot{2}}}} \end{aligned}$$

elde edilir.

6.2.1. Teorem

X üniter uzay olmak üzere herhangi $a, b, c \in X$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar geçerlidir:

(i) $\langle \theta^*, b \rangle = \langle a, \theta^* \rangle = \theta^*$.

(ii) $\langle a, \lambda \odot b \oplus \mu \odot c \rangle = \overline{\lambda} \odot \langle a, b \rangle \oplus \overline{\mu} \odot \langle a, c \rangle$.

(iii) α ve β aynı üreteç fonksiyonları olmak üzere $\ddot{\langle} \lambda \odot a \oplus \mu \odot b, \lambda \odot a \oplus \mu \odot b \ddot{\rangle}$ *iç çarpımı*

$$(\ddot{|}\lambda\ddot{|})^{\ddot{2}} \odot \ddot{\langle} a, a \ddot{\rangle} \oplus (\lambda \odot \overline{\mu}) \odot \ddot{\langle} a, b \ddot{\rangle} \oplus (\mu \odot \overline{\lambda}) \odot \ddot{\langle} b, a \ddot{\rangle} \oplus (\ddot{|}\mu\ddot{|})^{\ddot{2}} \odot \ddot{\langle} b, b \ddot{\rangle}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$(\ddot{|}\lambda\ddot{|})^{\ddot{2}} = \lambda \odot \overline{\lambda} \ \ ve \ \ (\ddot{|}\mu\ddot{|})^{\ddot{2}} = \mu \odot \overline{\mu}$$

olduğu göz önüne alınmalıdır.

İspat

$a, b, c \in X$ ve $\theta^*, \lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$ olsun. Tanım (3.1.3)'de verilen eşlenik kavramı kullanılırsa aşağıdaki adımlar izlenir:

(i) $\ddot{\langle} (\dot{0}, \ddot{0}), (\dot{b}, \ddot{b}) \ddot{\rangle} = (\dot{0}, \ddot{0}) \odot (\dot{b}, \ddot{-}\ddot{b}) = (\dot{a}, \ddot{-}\ddot{a}) \odot (\dot{0}, \ddot{0}) = (\dot{0}, \ddot{0}) = \theta^*$.

(ii) $\ddot{\langle} a, \lambda \odot b \oplus \mu \odot c \ddot{\rangle} = \overline{\ddot{\langle} \lambda \odot b \oplus \mu \odot c, a \ddot{\rangle}} = \overline{\lambda \odot \ddot{\langle} b, a \ddot{\rangle} \oplus \mu \odot \ddot{\langle} c, a \ddot{\rangle}} = \overline{\lambda} \odot \ddot{\langle} a, b \ddot{\rangle} \oplus \overline{\mu} \odot \ddot{\langle} a, c \ddot{\rangle}$.

(iii) α ve β aynı üreteç fonksiyonları olmak üzere $\ddot{\langle} \lambda \odot a \oplus \mu \odot b, \lambda \odot a \oplus \mu \odot b \ddot{\rangle}$ *iç çarpımı daha basit olarak*

$$\overline{\lambda} \odot \ddot{\langle} \lambda \odot a \oplus \overline{\lambda} \odot \mu \odot b, a \ddot{\rangle} \oplus \overline{\mu} \odot \ddot{\langle} \lambda \odot a \oplus \mu \odot b, b \ddot{\rangle}$$

şeklinde yazılır. Bu ifade dahada açılırsa

$$(\lambda \odot \overline{\lambda}) \odot \ddot{\langle} a, a \ddot{\rangle} \oplus (\overline{\lambda} \odot \mu) \odot \ddot{\langle} b, a \ddot{\rangle} \oplus (\overline{\mu} \odot \lambda) \odot \ddot{\langle} a, b \ddot{\rangle} \oplus (\mu \odot \overline{\mu}) \odot \ddot{\langle} b, b \ddot{\rangle}$$

elde edilir.

Şimdi, (6.3)'de tanımlanan fonksiyonun norm şartlarını sağladığını göstereceğiz. (N1) ve

(N2) aksiyomları için (CI4) şartı yeterlidir. Ayrıca (N3) aksiyomu (CIP2) ve (CIP3) kullanılarak kolayca elde edilebilir. reelten

$$\begin{aligned}\ddot{\|}\lambda \odot x\ddot{\|} &= \ddot{\sqrt{}}\sqrt{\ddot{\langle}\lambda \odot x, \lambda \odot x\ddot{\rangle}} \\ &= \ddot{\sqrt{}}\sqrt{\lambda \odot \bar{\lambda}}\ \ddot{\times}\ \ddot{\sqrt{}}\sqrt{\ddot{\langle}x, x\ddot{\rangle}} \\ &= \ddot{|}\lambda\ddot{|}\ddot{\times}\ddot{\|}x\ddot{\|}\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Son olarak (N4) aksiyomu için aşağıdaki Lemma verilecektir.

6.2.2. Teorem

V^*, $\mathbb{F}^*$ cismi üzerinde bir iç çarpım uzayı olsun. O takdirde $x, y \in V^*$ olmak üzere aşağıda verileni koşullar geçerlidir:

(a) (Cauchy-Schwarz)

$$\ddot{|}\ \ddot{\langle}x, y\ddot{\rangle}\ \ddot{|} \ \ddot{\leq}\ \ddot{|}|x\ddot{|}|\ \ddot{\times}\ \ddot{|}|y\ddot{|}| \tag{6.9}$$

Eşitlik durumunun olması için gerek ve yeter şart x ve y vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır. Diğer yandan reel cisim üzerinde ise bu eşitsizlik

$$|\dot{\langle}x, y\dot{\rangle}|_\alpha \dot{\leq} ||x||_\alpha \dot{\times} ||y||_\alpha$$

şeklindedir.

(b) (Üçgen eşitsizliği)

$$\ddot{|}|x \oplus y\ddot{|}|\ddot{\leq}\ddot{|}|x\ddot{|}|\ddot{+}\ddot{|}|y\ddot{|}| \tag{6.10}$$

Eşitlik durumunun olması için gerek ve yeter şart $c \in \mathbb{R}_\alpha$ için $y = \theta^*$ veya $x = c \odot y$ olmasıdır. Benzer olarak reel cisimde bu eşitsizlik

$$||x\dot{+}y||_\alpha \dot{\leq} ||x||_\alpha \dot{+} ||y||_\alpha$$

şeklindedir.

İspat

reel cisimde verilen eşitsizlikler için ispat benzer olduğundan her iki koşul için sadece kompleks cisim üzerinde ispatlar verilecektir.

(a) $y = \theta^*$ *olmak üzere (6.9)'ün sağlanacağı açıktır. .* $y \neq \theta^*$ *olsun. Lemma 6.2.1(ii)'den her* λ *skaları için*

$$\begin{aligned} \ddot{0} \ &\ddot{\leq} \ \|x \ominus \lambda \odot y\|^{\ddot{2}} = \langle x \ominus \lambda \odot y, x \ominus \lambda \odot y \rangle \\ &= \ \langle x, x \rangle \ominus \overline{\lambda} \odot \langle x, y \rangle \ominus \lambda \odot \left[\langle y, x \rangle \ominus \overline{\lambda} \odot \langle y, y \rangle \right]. \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $\lambda = \langle y, x \rangle \ddot{/} \langle y, y \rangle$ *olacak şekilde seçilirse*

$$\ddot{0} \ \ddot{\leq} \ \langle x, x \rangle \ominus \left(\langle y, x \rangle \ddot{/} \langle y, y \rangle \right) \odot \langle x, y \rangle = \|x\|^{\ddot{2}} \ominus \left[|\langle x, y \rangle|^{\ddot{2}} \ddot{/} \|y\|^{\ddot{2}} \right]$$

eşitsizliği elde edilir ve buradan da

$$|\langle x, y \rangle|^{\ddot{2}} \ \ddot{\leq} \ \langle x, x \rangle \ddot{\times} \langle y, y \rangle$$

olur. Eşitlik durumu için $y = \theta^*$ *ve* $x \ominus \lambda \odot y = \theta^*$ *olduğundan* $x = \lambda \odot y$ *dir. Bu da lineer bağımlılığı ispatlar.*

(b) Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$|\langle x, y \rangle| = |\langle y, x \rangle| \ \ddot{\leq} \ \|x\| \ddot{\times} \|y\|.$$

Ayrıca

$$\|x \oplus y\|^{\ddot{2}} = \langle x \oplus y, x \oplus y \rangle = \|x\|^{\ddot{2}} \ddot{+} \langle x, y \rangle \ddot{+} \langle y, x \rangle \ddot{+} \|y\|^{\ddot{2}}$$

olduğu açıktır. Lemma 6.2.1(i) şıkkı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \|x \oplus y\|^{\ddot{2}} \ &\ddot{\leq} \ \|x\|^{\ddot{2}} \ddot{+} \ddot{2} \ddot{\times} |\langle x, y \rangle| \ddot{+} \|y\|^{\ddot{2}} \\ &\ddot{\leq} \ \|x\|^{\ddot{2}} \ddot{+} \ddot{2} \ddot{\times} \|x\| \ddot{\times} \|y\| \ddot{+} \|y\|^{\ddot{2}} = \{ \|x\| \ddot{+} \|y\| \}^{\ddot{2}} \end{aligned}$$

eşitsizliğini elde edilir. Son olarak her iki tarafın β-karesi alınırsa (6.10)'a ulaşılır.

Diğer taraftan eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\ddot{\langle} x, y \ddot{\rangle} \ddot{+} \ddot{\langle} y, x \ddot{\rangle} = \ddot{2} \ddot{\times} \ddot{|} \ddot{\langle} x, y \ddot{\rangle} \ddot{|}$$

olmasıdır. Sol taraf $2\mathscr{R}e\ddot{\langle} x, y \ddot{\rangle}$*'dir. Bu durumda* $\mathscr{R}e$*,* $*$*-kompleks sayının reel kısmı olmak üzere*

$$\mathscr{R}e\ddot{\langle} x, y \ddot{\rangle} = \ddot{\|} x \ddot{\|} \ddot{\times} \ddot{\|} y \ddot{\|} \ddot{\geq} \ddot{|} \ddot{\langle} x, y \ddot{\rangle} \ddot{|} \tag{6.11}$$

elde edilir. İspatın geri kalanı (a) koşulu takip edilerek benzer şekilde ede edilir.

6.2.3. Teorem

X üniter uzay olmak üzere $\{x_n\}$ *ve* $\{y_n\}$ *için* ${}^{*}\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *ve* ${}^{*}\lim_{n\to\infty} y_n = y$ *dizileri yakınsak olsunlar. O takdirde* ${}^{*}\lim_{n\to\infty} \ddot{\langle} x_n, y_n \ddot{\rangle} = \ddot{\langle} x, y \ddot{\rangle}$ *olur.*

İspat

Açıkça görülür ki

$$\begin{aligned}
\ddot{|} \ddot{\langle} x_n, y_n \ddot{\rangle} \ominus \ddot{\langle} x, y \ddot{\rangle} \ddot{|} &= \ddot{|} \ddot{\langle} x_n, y_n \ddot{\rangle} \ominus \ddot{\langle} x_n, y \ddot{\rangle} \oplus \ddot{\langle} x_n, y \ddot{\rangle} \oplus \ddot{\langle} x, y \ddot{\rangle} \ddot{|} \\
&\ddot{\leq} \ddot{|} \ddot{\langle} x_n, y_n \ddot{\rangle} \ominus \ddot{\langle} x_n, y \ddot{\rangle} \ddot{|} \ddot{+} \ddot{|} \ddot{\langle} x_n, y \ddot{\rangle} \ominus \ddot{\langle} x, y \ddot{\rangle} \ddot{|} \\
&= \ddot{|} \ddot{\langle} x_n, y_n \ominus y \ddot{\rangle} \ddot{|} \ddot{+} \ddot{|} \ddot{\langle} x_n \ominus x, y \ddot{\rangle} \ddot{|} \\
&\ddot{\leq} \ddot{\|} x_n \ddot{\|} \ddot{\times} \ddot{\|} y_n \ominus y \ddot{\|} \ddot{+} \ddot{\|} y \ddot{\|} \ddot{\times} \ddot{\|} x_n \ominus x \ddot{\|}
\end{aligned}$$

sağlanır. $\{x_n\}$ *dizisi yakınsak olduğundan* $\ddot{\|} x_n \ddot{\|}$ *sınırlıdır. O halde* $n \to \infty$ *için limite geçilirse eşitsizliğin sağ tarafı* $\ddot{0}$*'a gider. Bu adım ispatı tamamlar.*

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Kalkülüsün keşfi, matematikte ve genel olarak bilimde bütünüyle yeni ufuklar açmıştır. Bu zorlu süreçte çoğu bilim insanı sonsuz büyük ve sonsuz küçük çokluklardan mantıksal ve kavramsal sonuçlar çıkararak sonsuzluk ve limit kavramlarını yorumlamaya çalışmışlardır. 17. yy. sonlarına doğru bu belirsiz süreci aydınlatacak önemli pek çok gelişme yaşanmıştır. Önceleri basit bir fikir olarak ortaya atılan kalkülüs kavramı bu gelişmelerde ilk sırayı alır. Öyle ki Newton ve Leibniz'in birbirlerinden habersiz bir şekilde ortaya koydukları bazı fikirler, çoğu bilim insanı tarafından heyecanla ve birazda tereddütle karşılanmıştır. Zira bu dönem, sonsuzluk ve limit üzerine ciddi tartışmaların ve fikir ayrılıklarının yaşandığı bir dönemdir. Bu sancılı süreç Cantor'un sonsuz küme teorisi ile yerini başka bir tartışmaya bıraksa da artık kalkülüsün gelişimi daha da hızlanacak ve fen ve teknoloji alanında kendini iyiden iyiye hissettirmeye başlayacaktır.

Bilimin ilerlemesinde önemli bir yeri olan kalkülüs, günümüzdeki mükemmel yapısıyla aslında her probleme cevap verecek nitelikte oluşturulmuştur. Fakat yine de bazı bilim insanları bu hesaplama tarzlarının genişletilmesi ve farklı problemlere uyarlanabilecek yapıların elde edilmesi adına çeşitli arayışlara girmişlerdir. Grosman ve Katz da bu bilim insanlarına bir örnek teşkil eder. Aslında ilk başta ciddi tepkiler alsalar da bu yapıların bilime yeni bir soluk getireceğini düşünmüşlerdi. Bunu Grossman'ın bizzat kendisinin ifadeleriyle anlıyoruz. 2014 yılında kendi internet sitesinden yayınladığı ve Hocası Katz'a hitaben yazdığı mektupta aynen şu ifadeleri kullanmıştır.

Sevgili Katz;
Senin de çok iyi bildiğin gibi, yıllarca çoğu bilim insanı; özellikle soyut matematik alanında çalışanlar, ele aldığımız bu yapıların faydası olmadığı kanaatini sürekli dile getirdiler. Zaman zaman sabrımızı taşıran bütün olumsuzluklara rağmen, biz daima bu yapılarda matematik ve mühendislik gibi çoğu alanda önemli bir potansiyel olduğuna inanıyorduk. Ve bugün görüyoruz ki zaman bizi haklı çıkardı. (M. Grossman 21 Temmuz 2014)

Aslında Grossman'ı bu düşünceye iten özellikle son yıllarda bu yapılarda elde edilen sonuçların varlığı olsa gerektir. Öyle ki mühendislik, fen ve teknoloji, iktisadi ve ekonomik yapılar, görüntü analizi ve matematiğin çoğu başlığında ciddi çalışmalar son on yıllık periyot ta büyük bir artış göstermiştir. Diğer taraftan bazı bilim insanlarına göre de klasik yapı her türlü ihtiyacı karşıladığından bu yapılarla ilgilenmek anlamsızdır. Zaten Grossman da bunu açıkça ifade etmiştir ve bu ihtimal ki belli bir zamana kadarda devam edecektir.

Aslında matematiğin gelişiminde içinde bulunduğumuz yüzyılda da benzer bir tartışma yaşanmıştır. Her kesimden bilim insanının haberdar olduğu fuzzy (bulanık) mantık son elli yıla damgasına vurmuş olan bir yapıdır. Bu yapıya ilk çıktığı zamanlarda ciddi itirazlar olmuş ve ilmin kesin verilere dayanmayan yapılar üzerine bina edilemeyeceği gerçeği sürekli bir tartışılma konusu olmuştur. Bu tartışmaların gölgesinde ciddi çalışmalar kaleme alınmış ve ilginçtir ki son yıllarda fuzzy kavramı belki de çoğu kimsenin tahmin edemeyeceği seviyelere ulaşmıştır. Neredeyse fuzzy başlığında konuşulmayan bilim dalı yok denecek kadar az hale gelmiştir. Teknolojik gelişmelerde de ciddi etkileri görülmeye başlanmıştır. Çok kariyerli dergiler sadece bu yapı üzerine kurulmuş ve bu yapı sayesinde ciddi etki faktörlerine ulaşmışlardır. Bu vesileyle Grosman ve Katzı heyecanlandıran ilmin fuzzy de ortaya çıkardığı heyecan olmuştur denebilir. Klasik yapıların cevap vermekte zorlandığı bazı başlıklar için bu hesap yöntemlerinin kayda değer bir fikir vereceği öngörülmüştür.

Yukarıda izah etmeye çalıştığımız yapılar üzerine ülkemizde son yıllarda çok değerli bilim insanları tarafından yayınlar yapılmıştır. Analiz ve uygulama alanında emekleme düzeyinde olan bu başlığın zamanla daha iyi yerlerde olacağı düşünülmektedir. Üreteç fonksiyonlarının seçimine bağlı olarak elde edilen cisim yapıları bize yeni fikirler sunmuştur. Öyle ki klasikte yaygın olarak kullanılan kartezyen koordinat sistemine getirilen yorum, diferensiyel denklem çözümlerinde farklı bir model oluşturmuş ve bu denklemlerin sayısal çözümlerine dair yeni yeni fikirler ortaya çıkmıştır. Özellikle türeve getirilen yorum ile türevin kullanıldığı her bilim dalında bir etkisi olacağı varsayılmaktadır. Dizi uzayları, metrik topoloji, sabit nokta, metrik ve normlu uzaylar, iç çarpım uzayları, Banach uzayları, konvekslik, aritmetik ve geometrik ortalama, dual uzaylar ve matris dönüşümleri gibi analizin temel başlıklarında yoğun çalışmalar günümüzde devam etmektedir.

Bu tezde ele alınan başlıklar ve orjinal sonuçlar aşağıda sıralanmıştır.

- Tezde başlangıçta tek bir üreteç fonksiyonu kullanılarak klasik analizin temel kavramları üzerine bazı uygulamalar yapılmıştır.
- Yıldız hesap tarzı denilen ve herhengi iki üretece bağlı olarak kullanılabilen aritmetik yapısı kullanılarak klasik analizin temel kavramları ele alınmış ve yeni bir türev tanımı sunulmuştur. Bu tanım vasıtasıyla elde edilen sonuçlar [39] numaralı çalışma için temel teşkil etmiştir.
- Yıldız hesap kullanılarak dizi uzay yapıları genişletilmiş ve dual uzay başlıkları ele alınmıştır. Bu başlıkta elde edilen sonuçlar orjinal olup, yayınlanmıştır. [36]
- Yıldız hesapla elde edilen dual yapılar kullanılarak, yıldız aritmetikle oluşturulmuş dizi uzayları arasındaki matris dönüşümleri incelenmiş ve elde edilen sonuçlar yayınlanmıştır.[37]
- Tezin son kısmında yıldız aritmetiğin bazı geometrik özellikleri incelenmiştir. Özel olarak

vektör uzay ve iç çarpım uzay yapıları inşa edilerek gerekli teoremler ispat edilmiştir. Elde edilen sonuçlar yayınlanmıştır.[38]

Bu tez yukarıda izah edilen yapıların diğer bilim alanlarına genişletilmesi adına bir fikir sunmayı amaçlamaktadır. Elde edilen sonuçlar saygın dergilerde yayınlanmış ve bilim insanlarının kullanımına sunulmuştur. Geleceğinin açık olduğunu sezdiğimiz bu başlıkta bazı eleştirel yaklaşımlar var olsa da, bilme ve insanlığa ciddi faydalar getirmesini ve bilhassa ülkemizin genç bilim insanlarının, farklı üreteçler yardımıyla başka hesaplama türleri oluşturarak; klasik yapıya alternatif bir hesap tarzı elde etmelerini diliyoruz.

KAYNAKLAR

1. Grossman, M. and Katz, R. (1972). *Non-Newtonian Calculus*, Lowell Technological Institute.

2. Grossman, M. (1979). *The first nonlinear system of differential and integral calculus*, Galileo Institute.

3. Grossman, M. (1983). *Bigeometric Calculus*, Archimedes Foundation Box, Massachusetts.

4. Filip, D. A. and Piatecki, C. (2010). A non-Newtonian examination of the theory of exogenous economic growth, *Cncsis - Uefiscsu and laboratoire d'Economie d'Orleans*.

5. Filip, D. A ve Piatecki, C. (2013). In defense of a non-Newtonian economic analysis, *Cncsis - Uefiscsu*.

6. Cordova-Lepe, F. (2009). From quotient operation toward a proportional calculus, *International Journal of Mathematics*, Game Theory and Algebra, 18(6), 527-536.

7. Cordova-Lepe, F. (2006). The multiplicative derivative as a measure of elasticity in economics, *Tmat Revista Latinoamericana de Ciencias'e Ingeniería*, 2(3).

8. Perrone, P. (2013). A gauge theoretic approach to quantum physics, *Infn-Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Italian National Institute for Nuclear Physics*.

9. Hohlfeld, R.G., Drueding, T. W. and Ebersole, J. F. (1989). Application of optical measure theory to atmospheric temperature sounding from Tovs radiances, *U.S. Air Force Geophysics Laboratory, Atmospheric Sciences Division*.

10. Meginnis, J. (1980). Non-Newtonian calculus applied to probability, utility and Bayesian analysis, *Manuscript of the report for delivery at the 20th Seminar on Bayesian Inference in Econometrics, Purdue University, West Lafayette, Indiana.*

11. Ostoja-Starzewski, M. (2013). *The inner workings of fractal materials*, Media-Upload, University of Ilinois at Urbana-Champaign.

12. Avazzadeh, Z., Beygi Rizi, Z., Loghmani, G. B. and Maalek Ghaini, F. M. (2012). A numerical solution of nonlinear parabolic-type Volterra partial integro-differential equations using radial basis functions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 36(5), 881-893.

13. Atto Trouve, E. and Nicolas, J. M. (2014). *Geometric wavelet approximations and differencing*, https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00950823/document.

14. Florack, L. and Assen, H. (2012). Multiplicative Calculus in Biomedical Image Analysis, *J. Math. Imaging Vis.* 42, 64–75.

15. Florack, L. (2012). Regularization of positive definite matrix field based on multiplicative calculus, *Lecture Notes in Computer Science*, 6667, 786-796.

16. Özyapıcı, A. and Bilgehan, B. (2013). Applications of multiplicative calculus to exponential signal processing, *The Abstract Book*.

17. Bashirov, A.E., Kurpıınar, E. M. and Özyapıcı, A. (2008). Multiplicative calculus and its applications, *J. Math. Anal. Appl.* 337(2008), 36-48.

18. Bashirov, A.E., Kurpıınar, E. M., Tandoğdu, Y. and Özyapıcı, A. (2011). On modelling with multiplicative differential equations, *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 26, 425-438.

19. Bashirov, A. E. and Rıza, M. (2011). Complex multiplicative calculus, arXiv preprint, arXiv:1103.1462.

20. Bashirov, A. E. and Rıza, M. (2011). On complex multiplicative differentiation, *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 1(1), 75–85.

21. Bashirov, A.G. and Bashirova G. (2011). Dynamics of literary texts and diffusion, *Online Journal of Communication and Media Technologies*, 1(3), 60-82.

22. Rıza, M., Özyapıcı, A. and Mısırlı, E. (2009). Multiplicative Finite difference methods, *Quarterly of Applied Mathematics*, 67(4), 745.

23. Rıza, M., Eminaga, B. and Mısırlı, E. (2012). Bigeometric Calculus: A modelling tool, arXiv:1402.2877v1.

24. Özyapıcı, A. and Mısırlı, E. (2007). Exponential approximation on multiplicative calculus, *6th ISAAC Congress*, p. 471.

25. Mısırlı, E. and Gürefe, Y. (2011). Multiplicative Adams-Bashforth-Moulton methods, *Numerical Algorithms*, 57 (4), 425-439.

26. Uzer, A. (2010). Multiplicative type complex calculus as an alternative to the classical calculus, *Computers and Mathematics with Applications*, 60(10), 2725-2737.

27. Uzer, A. (2013). Exact solution of conducting half plane problems in terms of a rapidly convergent series and an application of the multiplicative calculus, *Tübitak*.

28. Türkmen, C. and Başar, F. (2012). Some basic results on the sets of sequences with geometric calculus, *AIP Conference Proceedings*, 1470(2012), 95-98.

29. Cakmak, A.F. and Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus, *J.Inequal. Appl.*, 228.

30. Aniszewska, D. (2007). Multiplicative Runge Kutta methods, *Nonlinear Dynamics*, 50(1), 265-272.

31. Rybaczuk, M. and Stoppel, P. (2010). The fractal growth of fatigue defects in materials, *International Journal of Fracture*, 103, 71-94.

32. Liu, Z. and Guo, W. (2010). Data driven adaptive spline smoothing, *Statistica Sinica*, 20, 1143-1163.

33. Baqaee, D. (2010). *Intertemporal choice: a Nash bargaining approach*, Rezerv Bank of New Zealand.

34. Cakır, Z. (2013). Spaces of continuous and bounded functions over the field of geometric complex numbers, *J.Inequal. Appl.*,1(8).

35. Tekin, S. and Başar, F. (2013). Certain sequence spaces over the non-Newtonian complex field, *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 739319, 2013.

36. Kadak, U. (2014). Determination of the Kothe-Toeplitz duals over the non-Newtonian complex field, *The Scientific World Journal*, Article ID 438924.

37. Kadak, U. and Efe, H. (2014). Matrix transformations between certain sequence spaces over the non-Newtonian complex field, *The Scientific World Journal*, Article ID 705818.

38. Kadak, U. and Efe, H. (2014). The construction of Hilbert spaces over the Non-Newtonian field, *International Journal of Analysis*, Article ID 746059.

39. Kadak, U. and Ozluk, M. (2014). Generalized runge-Kutta methods with respect to non-Newtonian calculus, *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 594685.

40. Ozavsar, M. and Cevikel, A. C. (2013). Fixed points of multiplicative contraction mappings on multiplicative metric spaces, *arXiv preprint*, arXiv:1205.5131.

41. Cakmak, A.F. and Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus, *J.Inequal. Appl.*, 228.

42. Sarwar, M. and Badshah-e-Rome (2014). Some fixed point theorems in multiplicative metric space, arXiv.org, *Cornell University Library*, arXiv:1410.3384v1.

43. Abbas, M. , Ali, B. and Suleiman, I.Y. (2014). Common fixed points of locally contractive mappings in multiplicative metric spaces with application, *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*.

44. Köthe, G. and Toeplitz, O. (1969). *Vector Spaces I*, Springer-Verlag.

45. Köthe, G. and Toeplitz, O. (1934). Linear Raume mit unendlichen koordinaten und Ring unendlicher Matrizen, *J. F. Reine u. angew Math.*, 171, 193-226.

46. Maddox, I.J. (1980). *Infinite Matrices of Operators*, Lecture notes in Mathematics, 786, Springer-Verlag.

47. Mursaleen, M. and Noman, A.K. (2014). Hausdorff measure of noncompactness of certain matrix operators on the sequence spaces of generalized means, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (in press).

48. Alghamdi, M.A. and Mursaleen, M.(2011). Hankel matrix transformation of the Walsh-Fourier series, *Applied Mathematics and Computation*, 224, 278-282.

49. Mohiuddine, S.A., Mursaleen, M. and Alotaibi, A. (2013). The Hausdorff measure of noncompactness for some matrix operators, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 92,119-129

50. Mursaleen, M. and Mohiuddine, S.A. (2012). Some matrix transformations of convex and paranormed sequence spaces into the spaces of invariant means, *Abstract and Applied Analysis*, 719729, 719-729.

51. Mursaleen, M. and Latif, A. (2012). Document Applications of measure of noncompactness in matrix operators on some sequence spaces, *Abstract and Applied Analysis*, 378250.

52. Mursaleen, M. and Noman, A.K. (2012). Compactness of matrix operators on some new difference sequence spaces, *Linear Algebra and Its Applications*, 436(1), 41-52.

53. Mursaleen, M. and Noman, A.K. (2010). The Hausdorff measure of noncompactness of matrix operators on some BK spaces, *Operators and Matrices*, 5(3), 473-486.

54. Mursaleen, M., Karakaya, V., Polat, H. and Simsek, N. (2011). Measure of noncompactness of matrix operators on some difference sequence spaces of weighted means, *Computers and Mathematics with Applications*, 62(2), 814-820.

55. Mursaleen, M. and Mohiuddine, S.A. (2009). Almost bounded variation of double sequences and some four dimensional summability matrices, *Publicationes Mathematicae*, 75(3-4), 495-508.

56. Zeltser, M., Mursaleen, M., and Mohiuddine, S.A. (2009). On almost conservative matrix methods for double sequence spaces, *Publicationes Mathematicae*,75(3-4), 387-399.

57. Gökhan, A., Colak, R. and Mursaleen, M. (2009). Some matrix transformations and

generalized core of double sequences, *Mathematical and Computer Modelling*, 49 (7-8), 1721-1731.

58. Malkowsky, E., Mursaleen, M. and Suantai, S. (2007). The dual spaces of sets of difference sequences of order m and matrix transformations, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 23 (3), 521-532.

59. Malkowsky, E. and Mursaleen, M. (1995). Matrix transformations between FK-spaces and the sequence spaces $m(\varphi)$ and $n(\varphi)$, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*,196 (2), 659-665.

60. Başar, F. (2012). Summability Theory and Its Applications, *Bentham Science Publishers, e-books*, Monographs.

61. Niculescu, C.P. and Persson, L.E. (2006). Convex functions and their applications, *A Contemporary Approach, Springer.*

62. Niculescu, C.P. and Persson, L.E. (2000). Convexity according to the geometric mean, *Math. Inequal. Appl.,* 2, 155–167.

63. Webster, R. (1995). Convexity, *Oxford University Press Inc.*, New York.

64. Banas, J and Amar, A.B. Measures of noncompactness in locally convex spaces and fixed point theory for the sum of two operators on unbounded convex sets, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae* 54 (1), 21-40.

65. Matkowski, J. (2005). Generalized weighted quasi-arithmetic means, *Aequationes Mathematicae*, 79 (3), 203-212.

66. Glazowska, D. and Matkowski, J. (2007). An invariance of geometric mean with respect to Lagrangian means, Journal of *Mathematical Analysis and Applications*, 331 (2), 1187-1199.

67. Matkowski, J. (2008). Generalized weighted quasi-arithmetic means and the Kolmogorov-Nagumo theorem, *Colloquium Mathematicum*, 133 (1), 35-49.

68. Merentes, N. and Nikodem, K. Remarks on strongly convex functions, *Aequationes Mathematicae*, 80 (1), 193-199.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: KADAK, Uğur
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 25.07.1982, Erzurum
Telefon	: 0 (312) 202 13 85
Faks	: 0 (312) 202 13 85
e-mail	: ugurkadak@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi / F.B.E.	2015
Yüksek Lisans	İstanbul Fatih Üniversitesi / F.B.E.	2010
Lisans	Bülent Ecevit Üniversitesi / Matematik	2004
Lise	Erzurum Atatürk Yabancı Ağırlıklı Lisesi	1999

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2011 - 2015	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2010 - 2011	Bozok Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Uğur Kadak and Muharrem Özlük "Generalized Runge-Kutta method with respect to non-Newtonian calculus" Abstract and Applied Analysis, (2014).

Uğur Kadak and Feyzi Başar "On Fourier series of fuzzy-valued functions", The Scientific World Journal, vol. 2014, Article ID 782652, 2014.

Uğur Kadak and Feyzi Başar "Power series of fuzzy numbers with reel or fuzzy coefficients", Filomat, 26:3 (2012), 519–528.

Uğur Kadak, "Determination of the Köthe-Toeplitz duals over the non-Newtonian complex field" The Scientific World Journal, vol. 2014, Article ID438924, 2014.

Uğur Kadak and Hakan Efe"On uniform convergence of sequences of fuzzy-valued function" Journal of Function Spaces and Applications, 2014 (in press)

Yusuf Pandır, Yusuf Gürefe, Uğur Kadak and Emine Mısırlı "Classification of Exact Solutions for Some Nonlinear Partial Differential Equations with Generalized Evolution", Abstract and Applied Analysis, (2012), Article ID 478531.

Uğur Kadak,"Certain paranormed sequence spaces defined using the partial metric" Far East Journal of Mathematical Sciences"(2014).

Uğur Kadak and Hakan Efe,"Matrix transformations between certain sequence spaces over the non-Newtonian complex field" The Scientific World Journal, vol. 2014, Article ID705818, 2014.

Uğur Kadak and Muharrem Özlük"Characterization of matrix transformations between some classical sets of sequences with respect to partial metric "Far East Journal of Mathematical Sciences" 82(2013) No.1 , pp.93-118.

Uğur Kadak and Muharrem Özlük"Some new sets of sequences of fuzzy numbers with respect to the partial metric "The Scientific World Journal, 2014 (in press).

Uğur Kadak "On the sets of fuzzy-valued function with the level sets", Journal of Fuzzy Set Valued Analysis, (2013) 1-13.

Uğur Kadak and Feyzi Başar "On some sets of fuzzy-valued sequences with the level sets", Contemporary Analysis and Applied Math., (2013) Vol.1, No.2, 70-90.

Uğur Kadak, Feyzi Başar and Hakan Efe "Some partial metric spaces of sequences and functions" General Mathematics Notes, 19(2013) No.2 , pp.10-36.

Uğur Kadak and Muharrem Özlük "A new approach for the sequence spaces of fuzzy level sets with the partial metric", Journal of Fuzzy Set Valued Analysis, 2013(2013) doi:10.5899/2013/jfsva-00179.

Uğur Kadak and Muharrem Özlük "On partial metric spaces of fuzzy numbers with the level sets", Advances in Fuzzy Sets and Systems, 16(2013) No.1 , pp.31-64.

Uğur Kadak and Feyzi Başar "Power series of fuzzy numbers", AIP Conference Proceeding, (2012) 1309(538-550).

Uğur Kadak, "On the classical sets of sequences with fuzzy b-metric", General Mathematics

Notes, 23(1), 2014.

Uğur Kadak and Hakan Efe, “The construction of Hilbert spaces over the non-Newtonian field” International Journal of Analysis, vol. 2014, Article ID746059.

İnceleme Altındaki Çalışmalar

Uğur Kadak “Some characterizations of matrix transformations between certain sets of sequences of fuzzy numbers” (2014).

Uğur Kadak “A generalization on convex functions and weighted means by using the non-Newtonian calculus” (2014).

Uğur Kadak “Non-Newtonian fuzzy numbers and related applications” (2015).

Uğur Kadak and Murat Kirişçi and A.F. Çakmak “On the classical paranormed sequence spaces and related duals over the non-Newtonian complex field” (2015).

Uğur Kadak “Some new sets of difference sequences of fractional order of fuzzy numbers and related dual properties” (2015).

Uğur Kadak “Determination of the difference sequence spaces of fractional order over the non-Newtonian real field and related dual properties” (2015)

Atıflar

Pandır Y., Gurefe Y., Mısırlı E., The extended trial equation method for some time fractional differential equations, Discrete Dynamics in Nature and Society (2013) ,art. no. 491359.

Pandır Y., Gurefe Y., Mısırlı E, Classification of exact solutions to the generalized Kadomtsev-Petviashvili equation, Physica Scripta (2013), 87 (2) , art. no. 025003.

Gurefe, Y., Misirli, E., Sonmezoglu, A., Ekici, M., Extended trial equatşon method to generalized nonlinear partial differential equations, Applied Mathematics and Computation (2013), 219 (10) , pp. 5253-5260.

B.C.Tripathy, P.C.Das., On convergence of series of fuzzy real numbers, Kuwait J. Sci. E. (2012), 39 (2) pp. 57-70.

Pandır Y., Gurefe Y., New exact solutions of the generalized fractional Zakharov-Kuznetsov equations, Life Science Journal (2013) ,10 (2) , pp. 2701-2705, 491359.

Uğur Kadak Determination of the sets of sequences with the standart fuzzy metric, Journal of Mathematics and System Science (2013).

Uğur Kadak and Feyzi Başar On some sets of fuzzy-valued sequences with the level sets, Contemporary Analysis and Applied Mathematics, (2013) Vol.1, No.2, 70-90.

Uğur Kadak On the sets of fuzzy-valued function with the level sets, Journal of Fuzzy Set Valued Analysis (2013).

Uğur Kadak and Feyzi Başar Power series of fuzzy numbers, AIP Conference Proceedings (2010) 1309(538-550).

Bulut, H., Baskonus, H.M., Pandir, Y. The modified trial equation method for fractional wave equation and time fractional generalized burgers equation Abstract and Applied Analysis(2013) .

Bekir A. and Güner Ö. Topological soliton solutions for the Camassa-Holm, Ocean Engineering, (2013) 74(276-279).

Uğur Kadak and Muharrem Özlük, Characterization of matrix transformations between some classical sets of sequences with respect to partial metric, Far East Journal of Mathematical Sciences” 82(2013) no.1 , pp.93-118.

Hasan Bulut, Classification of exact solitons for generalized form of K(m, n) equation, ”Abstract and Applied Analysis (2013) 742643.

Filiz A., Ekici M., Sönmezoğlu M. F-expension method and new exact solutions of the Schrödinger-Kdv equation, The Scientific World Journal (2014).

Postolache, M., Gurefe, Y., Sonmezoglu, A., Ekici, M., Misirli, Extended trial equation method and applications to some nonlinear problems, UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics (2014).

Belgacem, F.B.M., Bulut, H., Baskonus, H.M., Akturk, T., Mathematical analysis of the generalized Benjamin and Burger-Kdv equations via the extended trial equation method , Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences (2014).

Bulut, H., Pandir, Y., Tuluce Demiray, S., Exact solutions of nonlinear Schrodingers equation with dual power-law nonlinearity by extended trial equation method , Waves in Random and Complex Media (2014).

Kadak, U., Efe, H., Matrix transformations between certain sequence spaces over the non-Newtonian complex field, Scientific World Journal (2014).

Kadak, U., Başar, F., On Fourier series of fuzzy valued functions, Scientific World Journal (2014).

Uluslararası / Ulusal Sempozyumlar

Uğur Kadak and Feyzi Başar "Fuzzy level sets "1st. International Conference on Applied Analysis and Algebra (2011) 29-30 June, Yıldız Technical University, Istanbul, Turkey.

Uğur Kadak and Feyzi Başar "Power series of fuzzy numbers" International Conference on Mathematical Sciences (2010) 04-07 September, Abant Izzet Baysal University, Bolu, Turkey.

Uğur Kadak and Feyzi Başar "Alternating and binomial series of fuzzy numbers" 23. National Conference on Mathematical Sciences (2010), 14-17 August, Erciyes University, Kayseri, Turkey.

Uğur Kadak and Muharrem Özlük"A new approach for the sequence spaces of fuzzy level sets with the partial metric "International Conference on Applied Analysis Mathematical Modelling" (2013), 2-5 June, Yıldız Technical University, Istanbul, Turkey.

Uğur Kadak and Hakan Efe "On matrix transformations between some sets of sequences with the fuzzy level sets "4th. International Conference on Matrix Analysis and Applications" (2013), 2-5 July, Selcuk University, Konya, Turkey.

Uğur Kadak, Geometric Topology in Newyork (2013), 12-19 August, Columbia University, Newyork, USA.

Uğur Kadak, Feyzi Başar and Hakan Efe "Construction of the duals of classical sets of sequences and related matrix transformations with non-Newtonian calculus" The Algerian Turkish International Days on Mathematics (2013), 12-14 Sep., Fatih University, Istanbul, Turkey.

GAZİ GELECEKTİR...