GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

q-BALAZS-SZABADOS OPERATÖRLERİNİN BİR GENELLEŞMESİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Pelin KARATAŞLI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2015

Pelin KARATAŞLI tarafından hazırlanan " q-BALAZS-SZABADOS OPERATÖRLERİNİN BİR GENELLEŞMESİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ogün DOĞRU

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum ..…………………

Başkan : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum …………………...

Üye : Prof. Dr. Oktay DUMAN

Matematik Anabilim Dalı, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum …………………...

Tez Savunma Tarihi: 05/02/2015

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………….…….

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Pelin KARATAŞLI
05/02/2015

q-BALAZS-SZABADOS OPERATÖRLERİNİN BİR GENELLEŞMESİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Pelin KARATAŞLI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 2015

ÖZET

q-Balazs-Szabados operatörlerinin bir genelleşmesinin yaklaşım özelliklerinin incelendiği bu tezde ilk olarak Korovkin teoremi ispatlanmış; Balazs ve Balazs-Szabados operatörlerinin tanımı verilmiş; bazı özellikleri incelenerek Balazs-Szabados operatörlerinin q analoğu ve ilgili bazı kavramlar tanıtılmıştır. Daha sonra ise Korovkin teoremi yardımıyla q-Balazs-Szabados operatörlerinin Korovkin tip yaklaşım özellikleri incelenmiş; süreklilik modülünün tanımı ve özellikleri verilerek süreklilik modülü yardımı ile q-Balazs-Szabados operatörünün yaklaşım hızı elde edilmiştir. Ayrıca Volkov teoreminin yardımıyla iki değişkenli q-Balazs-Szabados operatörleri tanıtılarak q-Balazs-Szabados operatörlerinin özellikleri incelenmiştir. Son olarak ise iki değişkenli süreklilik modülü yardımıyla iki değişkenli q-Balazs-Szabados operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bilim Kodu	:	204.1.138
Anahtar Kelimeler	:	Lineer pozitif operatörler, Korovkin tipli teoremler, süreklilik modülü, q-serileri, q-Balazs-Szabados operatörleri
Sayfa Adedi	:	33
Danışman	:	Prof. Dr. Ogün DOĞRU

APPROXIMATION PROPERTIES OF A GENERALIZATION OF
q-BALAZS SZABADOS OPERATORS
(M. Sc. Thesis)

Pelin KARATAŞLI

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
February 2015

ABSTRACT

This thesis in which a generalization of q-Balazs-Szabados operators is introduced and the approximation properties of these operators are investigated, first of all, Korovkin theorem is proved; definitions of Balazs and Balazs-Szabados operators are given, some properties of these operators are investigated and q-analogue of Balazs Szabados operators and some related concepts are introduced. After that, Korovkin type approximation properties of q-Balazs-Szabados operators are investigated via Korovkin theorem; the definition of modulus of continuity and some features of it are given and rate of convergence of q-Balazs-Szabados operators are obtained via modulus of continuity. Moreover, two-variable q-Balazs-Szabados operators are defined and some properties of them are investigated via Volkov theorem. Finally, approximation properties of bivariate q-Balazs-Szabados operators are investigated via modulus of continuity.

Science Code : 204.1.138
Key Words : Linear positive operators, Korovkin type theorems, modulus of continuity, q-serials, q-Balazsa-Szabados operators
Page Number : 33
Supervisor : Prof. Dr. Ogün DOĞRU

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlama sürecinde beni her aşamasında yönlendiren, sabırla ilgilenen,saygıdeğer hocam , Sayın Prof. Dr. Ogün DOĞRU ‘ ya en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER KISALTMALAR

Aşağıda bu çalışmada kullanılmış simgeler açıklamalarıyla sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$	[a,b] aralığındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
$\Vert\boldsymbol{f}\Vert_{\boldsymbol{C}[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]}$	C[a,b] uzayındaki norm
$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) \rightrightarrows \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$	(f_n) fonksiyonlar dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$(\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{x})$	Balazs Operatörü
$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{n}}^{[\boldsymbol{\beta}]}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{x})$	Balazs-Szabados Operatörü
$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{n}}^{[\boldsymbol{\beta}]}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{q};\boldsymbol{x})$	q-Balazs-Szabados Operatörü
$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{\delta})$	f nin süreklilik modülü
$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{n_1},\boldsymbol{n_2}}^{[\boldsymbol{\beta}]}(\boldsymbol{f};\boldsymbol{q_1},\boldsymbol{q_2},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$	iki değişkenli q-Balazs-Szabados Operatörü

1. GİRİŞ

Bu bölümde lineer pozitif operatör tanımı yapılarak temel bazı teoremler ispat edilecektir. Ayrıca sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Temel Kavramlar

Tanım

X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun.
$T: X \to Y$ şeklinde tanımlanan dönüşümlere operatör adı verilir.

Tanım

X ve Y iki fonksiyon uzayı olmak üzere $T: X \to Y$ operatörü $\forall$ $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ve $\forall$ $f,g \in X$ için
$T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$
eşitliğini sağlıyorsa T operatörüne lineer operatör denir.

Tanım

f bir fonksiyon
ve T bir operatör olmak üzere
$f \geq 0$ iken $T(f) \geq 0$
sağlanıyorsa T operatörüne pozitif operatör denir.

Tanım

Bir [a,b] kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye [a,b] aralığındaki sürekli fonksiyonlar uzayı denir ve C[a,b] ile gösterilir. Bu uzaydaki norm
$\| f \|_{C[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} | f(x) |$

biçiminde tanımlanır.

Tanım

Her $x\in$[a,b] için

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f_n(\cdot)-f(\cdot)\right\| = \lim_{n\to\infty}\max_{a\le x\le b}\left| f_n(x)-f(x)\right| = 0$$

koşulu sağlanıyorsa (f_n) fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna C[a,b] normunda düzgün yakınsaktır denir ve $f_n \rightrightarrows f$ ile gösterilir.

Tanım

$T:X\to Y$ şeklinde tanımlı T operatörü verilsin. Eğer $\forall\ f\in X$ için

$$\left\|T(f)\right\|_Y \le M\left\| f\right\|_X$$

olacak şekilde bir M>0 sayısı varsa T ye sınırlı operatör adı verilir.

Teorem(Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

$\mathbb{R}^n$ de herhangi $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ iki nokta verilmiş olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i y_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^2}\ .\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|y_i\right|^2}$$

eşitsizliği vadır.

Teorem(Korovkin Teoremi)[1]

$f\in$ C[a,b] ve tüm reel eksende

$$\left| f(x)\right| \le M_f \tag{1.1}$$

olsun.

Eğer (L_n) lineer pozitif operatör dizisi her $x\in$[a,b] için

i. $L_n(1,x)\rightrightarrows 1$
ii. $L_n(t,x)\rightrightarrows x$
iii. $L_n(t^2,x)\rightrightarrows x^2$

şartları sağlanıyorsa bu durumda her $f \in C[a,b]$ için [a,b] de
$L_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$ dir.

İspat

Kabul edelim ki, $f \in C[a,b]$ olsun. Sürekli fonksiyonların tanımı gereği her pozitif ε sayısına karşılık öyle bir $\delta(\varepsilon)$ sayısı bulunabilir ki $|t-x| \leq \delta$ iken $|f(t)-f(x)| \leq \varepsilon$ olur. (1.1) ve üçgen eşitsizliğinden

$$|f(t)-f(x)| \leq |f(t)|+|f(x)| \leq 2M_f \tag{1.2}$$

yazabiliriz.

Eğer

$|t-x| > \delta$ ise $\dfrac{|t-x|}{\delta} > 1$ olacağından

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} > 1 \tag{1.3}$$

sağlanır.

(1.2) ve (1.3) den ise

$|f(t)-f(x)| \leq 2M_f \dfrac{(t-x)^2}{\delta^2}$ yazabiliriz.

O halde
$|t-x| \leq \delta$ için $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$

$|t-x| > \delta$ için $|f(t)-f(x)| \leq 2M_f \dfrac{(t-x)^2}{\delta^2}$ dir.

Dolayısıyla her $x,t \in [a,b]$ için

$$|f(t)-f(x)| < \varepsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{1.4}$$

sağlanır.

Eğer (i), (ii), (iii) koşulanlını sağlayan (L_n) operatör dizisinin $\lim_{n\to\infty} \|L_n(f)-f\|_{C[a,b]} = 0$

eşitliğini sağladığını gösterirsek ispat tamamlanmış olur. Şimdi bunu gösterelim.

Lineerlikten;

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right|=\left|L_n(f(t);x)-f(x)+L_n(f(x);x)-L_n(f(x);x)\right|$$

$$=\left|L_n(f(t);x)-L_n(f(x);x)+L_n(f(x);x)-f(x)\right|$$

$$=\left|L_n(f(t)-f(x);x)+f(x)(L_n(1;x)-1)\right|$$

yazabiliriz.

Üçgen eşitsizliğinden;

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right|\le\left|L_n(f(t)-f(x);x)\right|+\left|f(x)\right|\left|L_n(1;x)-1\right| \tag{1.5}$$

elde edilir.

Diğer taraftan lineer pozitif operatörler monoton artan ve

$f(t)-f(x)\le\left|f(t)-f(x)\right|$ olduğundan

$\left|L_n(f(t)-f(x);x)\right|\le L_n(\left|f(t)-f(x)\right|;x)$ dir. O halde (1.1) yardımıyla (1.5) eşitsizliği

$\left|L_n(f(t)-f(x);x)\right|\le L_n(\left|f(t)-f(x)\right|;x)+M_f\left|L_n(1;x)-1\right|$ olur.

(L_n) monoton artan olduğundan (1.4) den dolayı

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right|\le L_n(\varepsilon+2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x)+M_f\left|L_n(1;x)-1\right| \tag{1.6}$$

olur.

Diğer taraftan (L_n) lineer ve pozitif olduğundan

$$L_n(\varepsilon+2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x)=L_n(\varepsilon;x)+L_n(2\frac{M_f}{\delta^2}(t-x)^2;x)$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M_f}{\delta^2}L_n(t^2-2tx+x^2;x)$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M_f}{\delta^2}\left\{L_n(t^2;x)-x^2-x^2+2x^2-2xL_n(t;x)+x^2L_n(1;x)\right\}$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M_f}{\delta^2}\left\{L_n(t^2;x)-x^2+2x^2-2xL_n(t;x)+x^2L_n(1;x)-x^2\right\}$$

$$=\varepsilon L_n(1;x)+2\frac{M_f}{\delta^2}\{(L_n(t^2;x)-x^2)$$

$$+2x(x-L_n(t;x))+x^2(L_n(1;x)-1)\}$$

yazılabilir. Bu ifade (1.7) de kullanılacak olursa

$$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right| \le \varepsilon L_n(1,x)+2\frac{M_f}{\delta^2}\{(L_n(t^2;x)-x^2)+2x(x-L_n(t;x))+x^2(L_n(1;x)-1)\}$$

$$+M_f\left|L_n(1;x)-1\right| \tag{1.8}$$

elde edilir.

(i), (ii), (iii) koşulları (1.8) de kullanılırsa

$\left|L_n(f(t);x)-f(x)\right| < \varepsilon$ sağlanır. O halde $\left\|L_n(f)-f\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\{\max_{a\le x\le b}\left|L_n(f;x)-f(x)\right|\right\}=0$

olur ve böylece ispat tamamlanır.

Tanım

a_n ve b_n pozitif sayılar, x≥0, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\left(R_n f\right)\left(x\right)=\frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{b_n})\binom{n}{k}(a_n x)^k$$

operatörüne Balazs Operatörü denir. [4]

Teorem[4]

e_i(x)=x^i , i=0, 1, 2 olmak üzere

i) $(R_n e_0)(x)=1$

ii) $(R_n e_1)(x)=\frac{n}{b_n}\frac{a_n x}{1+a_n x}$

iii) $(R_n e_2)(x)=\frac{n(n-1)}{b_n^2}\left(\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^2+\frac{n}{b_n^{\ 2}}\frac{a_n x}{1+a_n x}$

sağlanır.

İspat

i) $\left(R_n e_0\right)\left(x\right) = \frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_n x)^k$

$$= \frac{1}{(1+a_n x)^n}(1+a_n x)^n$$

$$=1$$

ii) $\left(R_n e_1\right)\left(x\right) = \frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{b_n}\binom{n}{k}(a_n x)^k$

$$= \frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{b_n}\binom{n}{k}(a_n x)^k$$

$$= \frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{b_n}\binom{n}{k+1}(a_n x)^{k+1}$$

$$= \frac{a_n x}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{b_n}.\frac{n!}{(k+1)!\left(n-k-1\right)!}(a_n x)^k$$

$$= \frac{n}{b_n}.\frac{a_n x}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!\left(n-k-1\right)!}(a_n x)^k$$

$$= \frac{n}{b_n}.\frac{a_n x}{(1+a_n x)^n}.(1+a_n x)^{n-1}$$

$$= \frac{n}{b_n}.\frac{a_n x}{1+a_n x}$$

iii) $\left(R_n e_2\right)\left(x\right) = \frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{b_n{}^2}\binom{n}{k}(a_n x)^k$

$$= \frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{b_n{}^2}\frac{n!}{(k-1)!\left(n-k\right)!}(a_n x)^k$$

$$= \frac{1}{b_n{}^2(1+a_n x)^n}\left[\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{(k-2)!\left(n-k\right)!}(a_n x)^k + \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!\left(n-k\right)!}(a_n x)^k\right]$$

$$= \frac{1}{b_n{}^2(1+a_n x)^n}\left[\sum_{k=0}^{n-2}\frac{n.(n-1).(n-2)!}{k!.\left(n-2-k\right)!}(a_n x)^{k+2} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n.(n-1)!}{k!\left(n-1-k\right)!}(a_n x)^{k+1}\right]$$

$$= \frac{1}{b_n{}^2(1+a_n x)^n}\left[n.(n-1).(a_n x)^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}(a_n x)^k + n.(a_n x).\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(a_n x)^k\right]$$

$$= \frac{n(n-1)}{b_n^2}\left(\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^2 + \frac{n}{b_n{}^2}\frac{a_n x}{1+a_n x}$$

Şimdi

$$a_n k + b_{n,k} = c_n \text{ ve } n \to \infty \text{ için } \frac{n}{c_n} \to 1 \tag{1.9}$$

olmak üzere [3] de O. Doğru tarafından tanımlanan

$$\left(A_n f\right)(x) = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_{n,k}}\right) \binom{n}{k} (a_n x)^k, \; x \geq 0, \, n \in \mathbb{N} \tag{1.10}$$

lineer pozitif operatörünü göz önüne alalım. Eğer her n ve k için $a_n = 1,\; b_{n,k} = n - k + 1$ seçersek $c_n = n + 1$ olur. Bu seçimler (1.9) şartını sağlar. Bu seçimle (1.10) operatörü Bleimann, Butzer ve Hahn operatörüne dönüşür. Böylelikle bu operatöre Balazs operatörünün Bleimann, Butzer ve Hahn operatör tipli bir genelleşmesi denir.

[5] de K. Balazs ve J. Szabados aşağıdaki lineer pozitif operatörü tanımlamıştır.

$$R_n^{[\beta]}(f;x) = \frac{1}{(1+n^{\beta-1}x)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^{\beta}}\right) \binom{n}{k} (n^{\beta-1}x)^k, \; \mathrm{x} \geq 0$$

Burada $a_n = n^{\beta-1}$, $\mathrm{b}_n = n^{\beta}$, $\mathrm{n} = 1, 2, 3, \ldots,$ olup ve yakınsaklığın sağlanması için $0 \leq \beta \leq \frac{2}{3}$ olmalıdır. Bu operatöre Balazs-Szabados operatörü denir.

2. q-BALAZS-SZABADOS OPERATÖRLERİ

Bu bölümde Balazs-Szabados operatörlerinin q analoğu tanıtılacaktır. Öncelikle bu kısımda kullanılacak kavramları hatırlatalım.

2.1 Tanım

q>0 için

$$[r]_q = \begin{cases} \dfrac{1-q^r}{(1-q)} ; & q \neq 1 \\ r & ; \text{q=1} \end{cases} ,$$

$$[r]_q ! = \begin{cases} [r]_q [r-1]_q \ldots [1]_q & ; \text{r} = 1, 2, \ldots \\ 1 & ; \text{r} = 0 \end{cases} ,$$

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q !}{[r]_q ! [n-r]_q !}, \ \text{r} = 0, 1, 2 \ldots n$$

dir.

[2] de O. Doğru tarafından q-Balazs-Szabados operatörü

$$R_n^{[\beta]}(f; q; x) = \frac{1}{\ell_{n,q}([n]_q^{\beta-1} x)} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q^{\beta}}\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q ([n]_q^{\beta-1} x)^k$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu tezde $q = (q_n)$ dizisi alarak bu operatörü $0 < \beta < \frac{1}{2}$, $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$, $\lim_{n\to\infty} [n]_{q_n}^{-\beta} = 0$ koşulları altındaki yakınsaklık özelliklerini inceleyeceğiz.

Burada $x \geq 0$ ve $\ell_{n,q}(x) = \prod_{s=0}^{n-1} (1 + q^s x)$ dir.

Bu operatör lineer pozitif operatördür ve q=1 alındığına klasik Balazs-Szabados operatörüne dönüşür.

3. KOROVKİN TİP YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Şimdi O. Doğru tarafından [2] de ispatlanan lemmaları hatırlatalım.

3.1 Lemma[2]

q-Balazs-Szabados operatörleri için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

i) $R_n^{[\beta]}\left(e_0;q;x\right)=1$

ii) $R_n^{[\beta]}\left(e_1;q;x\right)=\dfrac{x}{1+\left[n\right]_q^{\beta-1}x}$

iii) $R_n^{[\beta]}\left(e_2;q;x\right)=\dfrac{\left[n-1\right]_q}{\left[n\right]_q}\dfrac{x^2q^2}{(1+\left[n\right]_q^{\beta-1}x)(1+\left[n\right]_q^{\beta-1}qx)}$

İspat

i) $R_n^{[\beta]}\left(e_0;q;x\right)=\dfrac{1}{\ell_{n,q}(\left[n\right]_q^{\beta-1}x)}\sum\limits_{k=0}^{n}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q(\left[n\right]_q^{\beta-1}x)^k$

$$\ell_{n,q}(x)=\prod_{k=0}^{n-1}(1+q^kx)=\sum_{k=0}^{n}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k$$

olup [7,syf 293] x yerine $\left[n\right]_q^{\beta-1}x$ alınmasıyla

$R_n^{[\beta]}\left(e_0;q;x\right)=1$ bulunur.

ii) $R_n^{[\beta]}\left(e_1;q;x\right)=\dfrac{1}{\ell_{n,q}(\left[n\right]_q^{\beta-1}x)}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\left[k\right]_q}{\left[n\right]_q^{\beta}}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q(\left[n\right]_q^{\beta-1}x)^k$

$$=\frac{1}{\ell_{n,q}(\left[n\right]_q^{\beta-1}x)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left[k+1\right]_q}{\left[n\right]_q^{\beta}}q^{\frac{k(k+1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_q(\left[n\right]_q^{\beta-1}x)^{k+1}$$

$$=\frac{1}{\ell_{n,q}([n]_q^{\beta-1}x)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{[k+1]_q}{[n]_q^{\beta}}q^{\frac{k(k+1)}{2}}\frac{[n]_q!}{[k+1]_q![n-k-1]_q!}[n]_q^{\beta-1}x([n]_q^{\beta-1}x)^k$$

$$=\frac{1}{\ell_{n,q}([n]_q^{\beta-1}x)}\sum_{k=0}^{n-1}q^{\frac{k(k+1)}{2}}\frac{[n-1]_q!}{[k]_q![n-k-1]_q!}x([n]_q^{\beta-1}x)^k$$

$$=\frac{x}{\ell_{n,q}([n]_q^{\beta-1}x)}\sum_{k=0}^{n-1}q^{\frac{k^2+k-k+k}{2}}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q([n]_q^{\beta-1}x)^k$$

$$=\frac{x}{\ell_{n,q}([n]_q^{\beta-1}x)}\sum_{k=0}^{n-1}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q([n]_q^{\beta-1}qx)^k$$

$$=\frac{x}{(1+[n]_q^{\beta-1}x)(\ell_{n-1,q}([n]_q^{\beta-1}qx))}\sum_{k=0}^{n-1}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix}n-1\\k\end{bmatrix}_q([n]_q^{\beta-1}qx)^k$$

$$=\frac{x}{1+[n]_q^{\beta-1}x}$$

iii) $R_n^{[\beta]}(e_2;q;x)=\dfrac{1}{\ell_{n,q}([n]_q^{\beta-1}x)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{[k]_q^2}{[n]_q^{2\beta}}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q([n]_q^{\beta-1}x)^k$

$$=\frac{1}{\ell_{n,q}([n]_q^{\beta-1}x)}\sum_{k=1}^{n}\frac{[k]_q^2}{[n]_q^{2\beta}}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}([n]_q^{\beta-1}x)^k$$

$$=\frac{1}{\ell_{n,q}([n]_q^{\beta-1}x)}\sum_{k=1}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q^{2\beta}}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{[n]_q!}{[k-1]_q![n-k]_q!}([n]_q^{\beta-1}x)^k$$

$$=\frac{1}{\ell_{n,q}([n]_q^{\beta-1}x)}\sum_{k=2}^{n}\frac{q[k-1]_q}{[n]_q^{2\beta}}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{[n]_q!}{[k-1]_q![n-k]_q!}([n]_q^{\beta-1}x)^k$$

$$+\frac{1}{\ell_{n,q}([n]_q^{\beta-1}x)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{[n]_q^{2\beta}}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\frac{[n]_q!}{[k-1]_q![n-k]_q!}([n]_q^{\beta-1}x)^k$$

$$=\frac{1}{\ell_{n,q}([n]_q^{\beta-1}x)}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{q}{[n]_q^{2\beta}}q^{\frac{(k+2)(k+1)}{2}}\frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k-2]_q!}([n]_q^{\beta-1}x)^{k+2}$$

$$+\frac{1}{\ell_{n,q}([n]_q^{\beta-1}x)}\sum_{k=1}^{n}\frac{[k]_q}{[n]_q^{\beta}[n]_q^{\beta}}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q([n]_q^{\beta-1}x)^k$$

$$=\frac{[n]_q[n-1]_q\,q}{[n]_q^{2\beta}}\frac{([n]_q^{\beta-1}x)^2}{\ell_{n,q}([n]_q^{\beta-1}x)}\sum_{k=0}^{n-2}q^{\frac{(k+2)(k+1)}{2}}\begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix}_q([n]_q^{\beta-1}x)^k$$

$$+\frac{x}{[n]_q^{\beta}}\frac{1}{1+[n]_q^{\beta-1}x}$$

$$=\frac{[n]_q[n-1]_q}{[n]_q^{2\beta}}\frac{q[n]_q^{2\beta-2}x^2}{\ell_{n,q}([n]_q^{\beta-1}x)}.\sum_{k=0}^{n-2}q^{2k+1}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix}([n]_q^{\beta-1}x)^k$$

$$+\frac{x}{[n]_q^{\beta}}\frac{1}{1+[n]_q^{\beta-1}x}$$

$$=\frac{[n]_q[n-1]_q}{[n]_q^{2}}\frac{x^2q^2}{\ell_{n,q}([n]_q^{\beta-1}x)}.\sum_{k=0}^{n-2}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix}([n]_q^{\beta-1}q^2x)^k$$

$$+\frac{x}{[n]_q^{\beta}}\frac{1}{1+[n]_q^{\beta-1}x}$$

$$=\frac{[n]_q[n-1]_q}{[n]_q^{2}}\frac{x^2q^2}{(1+[n]_q^{\beta-1}x)(1+q[n]_q^{\beta-1}x)}.\frac{1}{\ell_{n-2,q}([n]_q^{\beta-1}q^2x)}$$

$$\times\sum_{k=0}^{n-2}q^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix} n-2 \\ k \end{bmatrix}([n]_q^{\beta-1}q^2x)^k+\frac{x}{[n]_q^{\beta}}\frac{1}{1+[n]_q^{\beta-1}x}$$

$$=\frac{\left[n-1\right]_q}{\left[n\right]_q}\frac{x^2q^2}{(1+\left[n\right]_q^{\beta-1}x)(1+\left[n\right]_q^{\beta-1}qx)}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

4. q-BALAZS-SZABADOS OPERATÖRÜNÜN SÜREKLİLİK MODÜLÜ İLE YAKLAŞIM HIZI

f $[0,\infty)$ da düzgün sürekli ve sınırlı fonksiyon olmak üzere f nin süreklilik modülü $\omega(f;\delta) := \sup\limits_{\substack{x,t\geq 0 \\ |t-x|\leq\delta}} |f(t)-f(x)|$ dir.

Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $\omega(f;\delta)\geq 0$

ii) $\delta_1\leq\delta_2$ ise $\omega(f;\delta_1)\leq\omega(f;\delta_2)$

iii) $m\in\mathbb{N}$ için $\omega(f;m\delta)\leq m\omega(f;\delta)$

iv) $\lambda\in\mathbb{R}^+$ için $\omega(f;\lambda\delta)\leq(\lambda+1)\omega(f;\delta)$

v) $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(f;\delta)=0$

vi) $|f(t)-f(x)|\leq\omega(f;|t-x|)$

vii) $|f(t)-f(x)|\leq\left(\dfrac{|t-x|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta)$

İspat

i)Tanım gereğince mutlak değerin supremumu 0 a eşit ya da daha büyüktür.

ii) $\delta_1\leq\delta_2$ için $|t-x|\leq\delta_2$ kümesinin $|t-x|\leq\delta_1$ kümesini kapsadığı aşikardır. Bölge büyüdükçe alınan supremum artacağından ispat açıktır.

iii)Süreklilik modülünün tanımı gereğince

$$\omega(f;m\delta)=\sup_{\substack{x,t\geq 0\\ |t-x|\leq m\delta}}|f(t)-f(x)|$$

yazabiliriz.

$|t-x|\leq m\delta \;\Rightarrow\; x-m\delta\leq t\leq x+m\delta$ olup,

$t=x+mh$ seçimiyle $|h|\leq\delta$ ve $\omega(f;m\delta)=\sup\limits_{\substack{x,t\geq 0\\ |h|\leq\delta}}|f(x+mh)-f(x)|$ şeklinde yazabiliriz.

Diğer taraftan

$$\sup_{\substack{x,t\geq 0\\ |h|\leq\delta}}|f(x+mh)-f(x)|=\sup_{\substack{x,t\geq 0\\ |h|\leq\delta}}\left|\sum_{k=0}^{m-1}f(x+(k+1)h)-f(x+kh)\right|$$

olup sağ tarafa üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\sup_{\substack{x,t\geq 0\\ |h|\leq\delta}}|f(x+mh)-f(x)|\leq\sum_{k=0}^{m-1}\sup_{\substack{x,t\geq 0\\ |h|\leq\delta}}|f(x+(k+1)h)-f(x+kh)|$$

$$\leq\omega(f;\delta)+\ldots+\omega(f;\delta)$$

bulunur. Buradan

$$\omega(f;m\delta)\leq m\omega(f;\delta)$$

elde edilir.

iv)$[\![\lambda]\!]$ ile $\lambda\in\mathbb{R}^+$ sayısının tam değerini gösterirsek

$[\![\lambda]\!]\leq\lambda\leq[\![\lambda]\!]+1$

ifadesinin doğruluğu aşikardır. Bu eşitsizlik ve (ii) özelliği kullanılırsa

$\omega(f;\lambda\delta)\leq\omega(f;([\![\lambda]\!]+1)\delta)$eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafına (iii) özelliği uygulanırsa

$\omega(f;([\![\lambda]\!]+1)\delta)\leq([\![\lambda]\!]+1)\omega(f;\delta)$ elde edilir. Ayrıca her $\lambda\in\mathbb{R}^+$ için

$[\![\lambda]\!]+1<\lambda+1$ eşitsizliğinden dolayı

$\omega(f;([\![\lambda]\!]+1)\delta)\leq(\lambda+1)\omega(f;\delta)$ eşitsizliği geçerli olur.

v)$|t-x|\leq\delta$ eşitsizliğinde $\delta\to 0$ olması $t\to x$ olması anlamına gelir. f fonksiyonu düzgün sürekli olduğundan $t\to x$ için $|f(t)-f(x)|\to 0$ olması ispatı bitirir.

vi) $\omega(f;\delta)$ ifadesinde $\delta=|t-x|$ seçilirse

$\omega(f;|t-x|)=\sup\limits_{x,t\geq 0}|f(t)-f(x)|$ elde edilir. O halde

$|f(t)-f(x)|\leq\sup\limits_{x,t\geq 0}|f(t)-f(x)|$ olduğu göz önüne alınırsa ispat biter.

vii) (vi) özelliğinden dolayı

$|f(t)-f(x)|\leq\omega(f;\frac{|t-x|}{\delta}\delta)$ yazılabilir. Bu eşitsizlikte (iv) özelliği kullanılırsa

$|f(t)-f(x)|\leq(\frac{|t-x|}{\delta}+1)\omega(f;\delta)$ olur.

4.1 Lemma[2]

Her $n\in\mathbb{N}$, $x\geq 0$ için

$$R_n^{[\beta]}\left((e_1-x)^2;q_n;x\right)=\frac{1}{(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}x)(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}q_nx)}\Big[(q_n-1)x^2+[n]_{q_n}^{-\beta}x+(1-q_n)[n]_{q_n}^{\beta-1}x^3+[n]_{q_n}^{2\beta-2}q_nx^4\Big]$$

sağlanır.

İspat

$$R_n^{[\beta]}\left((e_1-x)^2;q_n;x\right)=R_n^{[\beta]}\left(e_2;q_n;x\right)-2xR_n^{[\beta]}\left(e_1;q_n;x\right)+x^2R_n^{[\beta]}\left(e_0;q_n;x\right)$$

$$=\frac{[n-1]_{q_n}}{[n]_{q_n}}\frac{x^2q_n^{\,2}}{(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}x)(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}q_nx)}+\frac{1}{[n]_{q_n}^{\beta}}\frac{x}{1+[n]_{q_n}^{\beta-1}x}-\frac{2x^2}{1+[n]_{q_n}^{\beta-1}x}+x^2$$

$$=\frac{[n]_{q_n}^{\beta-1}[n-1]_{q_n}x^2q_n^{\,2}+x+x^2[n]_{q_n}^{\beta-1}q_n-2x^2[n]_{q_n}^{\beta}-2x^3[n]_{q_n}^{\beta}[n]_{q_n}^{\beta-1}q_n}{[n]_{q_n}^{\beta}(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}x)(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}q_nx)}$$

$$+\frac{(x^2[n]_{q_n}^{\beta}+x^3[n]_{q_n}^{2\beta-1})(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}q_nx)}{[n]_{q_n}^{\beta}(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}x)(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}q_nx)}$$

$$=\frac{x^4[n]_{q_n}^{3\beta-2}q_n+x^3(-[n]_{q_n}^{2\beta-1}q_n+[n]_{q_n}^{2\beta-1})+x^2([n]_{q_n}^{\beta-1}[n-1]_{q_n}q_n^2+[n]_{q_n}^{\beta-1}q_n-[n]_{q_n}^{\beta})+x}{[n]_{q_n}^{\beta}(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}x)(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}q_nx)}$$

$$=\frac{x^4[n]_{q_n}^{2\beta-2}q_n+x^3(-[n]_{q_n}^{\beta-1}q_n+[n]_{q_n}^{\beta-1})+x^2([n]_{q_n}^{-1}[n-1]_{q_n}q_n^2+[n]_{q_n}^{-1}q_n-1)+x[n]_{q_n}^{-\beta}}{(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}x)(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}q_nx)}$$

$$=\frac{1}{(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}x)(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}q_nx)}\left[(q_n-1)x^2+[n]_{q_n}^{-\beta}x+(1-q_n)[n]_{q_n}^{\beta-1}x^3+[n]_{q_n}^{2\beta-2}q_nx^4\right]$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

4.2 Teorem[2]

$0<\beta<\frac{1}{2}$ olmak üzere (q_n); $\lim_n q_n=1$, $\lim_n [n]_{q_n}^{-\beta}=0$ ve $\frac{1}{2}\le q_n\le 1$ şartlarını sağlayan bir dizi olsun. Eğer f $[0,\infty)$ da sürekli bir fonksiyon ise

$$\left|R_n^{[\beta]}(f;q_n;x)-f(x)\right|\le 2\omega(f;\sqrt{\frac{x}{[n]_{q_n}^{\beta}}})((1+\sqrt{x})x^{\frac{1}{2(1-\beta)}})$$

sağlanır.

İspat

Bir önceki özelliklerden (vii), Lemma 3.1 ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|R_n^{[\beta]}(f;q_n;x)-f(x)\right|\le\frac{1}{\ell_{n,q}([n]_{q_n}^{\beta-1}x)}\sum_{k=0}^{n}|f(x)-f(\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}^{\beta}})|\,q_n^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_{q_n}([n]_{q_n}^{\beta-1}x)^k$$

$$\leq \omega(f;\delta)\frac{1}{\ell_{n,q_n}([n]_{q_n}^{\beta-1}x)}\sum_{k=0}^{n}(1+\frac{\left|x-\frac{[k]_{q_n}}{[n]_{q_n}^{\beta}}\right|}{\delta})q_n^{\frac{k(k-1)}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_n}([n]_{q_n}^{\beta-1}x)^k$$

$$\leq \omega(f;\delta)(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{R_n^{\beta}((e_1-x)^2;q_n;x)})$$

$\delta=\sqrt{\frac{x}{[n]_{q_n}^{\beta}}}$ seçersek ve Lemma4.1 i kullanırsak

$$\left|R_n^{[\beta]}(f;q_n;x)-f(x)\right|\leq \omega(f;\sqrt{\frac{x}{[n]_{q_n}^{\beta}}})\left[1+(\frac{[n]_{q_n}^{\beta}x(q_n-1)+1+[n]_{q_n}^{2\beta-1}x^2(1-q_n)+[n]_{q_n}^{3\beta-2}x^3q_n}{(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}x)(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}q_nx)})^{\frac{1}{2}}\right]$$

olur.

$\frac{1}{2}\leq q_n\leq 1$ olduğu kullanılırsa

$$\left|R_n^{[\beta]}(f;q_n;x)-f(x)\right|\leq \omega(f;\sqrt{\frac{x}{[n]_{q_n}^{\beta}}})\left[1+(\frac{1+[n]_{q_n}^{2\beta-1}x^2(1-q_n)+[n]_{q_n}^{3\beta-2}x^3q_n}{(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}x)(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}q_nx)})^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\leq \omega(f;\sqrt{\frac{x}{[n]_{q_n}^{\beta}}})\left[2+\frac{\sqrt{1-q_n}\,[n]_{q_n}^{\frac{2\beta-1}{2}}x}{(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}x)}+\frac{\sqrt{q_n}\,[n]_{q_n}^{\frac{3\beta-2}{2}}x^{\frac{3}{2}}}{(1+[n]_{q_n}^{\beta-1}q_nx)}\right]$$

$$\leq \omega(f;\sqrt{\frac{x}{[n]_{q_n}^{\beta}}})\left[2+\frac{\sqrt{q_n}\,[n]_{q_n}^{\frac{2\beta-1}{2}}x(1+\sqrt{x})}{1+[n]_{q_n}^{\beta-1}q_nx}\right]$$

$$\leq \omega(f;\sqrt{\frac{x}{[n]_{q_n}^{\beta}}})\left[2+\sqrt{q_n}\,[n]_{q_n}^{\frac{2\beta-1}{2}}(1+\sqrt{x})x^{\frac{1}{2(1-\beta)}}\frac{x^{\frac{1-2\beta}{2(1-\beta)}}}{1+[n]_{q_n}^{\beta-1}q_nx}\right] \quad (4.1)$$

bulunur.

Şimdi bir $x_0\epsilon[0,\infty)$ için $R_n^{[\beta]}(f;q_n;x_0)\to f(x_0)$ noktasal yakınsaklığını gösterelim.

$g(x)=\frac{x^{\frac{1-2\beta}{2(1-\beta)}}}{1+[n]_{q_n}^{\beta-1}q_nx}$ alınırsa $x_0=\frac{1-2\beta}{q_n}[n]_{q_n}^{1-\beta}$ için $g(x)$ 'in maximum değerine ulaşırız.

Böylelikle

$$g(x_0)=\frac{(1-2\beta)^{\frac{1-2\beta}{2(1-\beta)}}}{2(1-\beta)}\,q_n^{\frac{2\beta-1}{2(1-\beta)}}\,[n]_{q_n}^{\frac{1-2\beta}{2}} \tag{4.2}$$

elde edilir.

$$0<\beta<\frac{1}{2} \qquad \text{için} \qquad \frac{(1-2\beta)^{\frac{1-2\beta}{2(1-\beta)}}}{2(1-\beta)}\le 1$$

(4.3) olur.

(4.3)'ü (4.2)'de kullanırsak

$$g(x_0)\le q_n^{\frac{2\beta-1}{2(1-\beta)}}\,[n]_{q_n}^{\frac{1-2\beta}{2}} \tag{4.4}$$

elde edilir.

(4.4)'ü (4.1)'de kullanırsak

$$|R_n^{[\beta]}(f;q_n;x_0)-f(x_0)|\le \omega\Big(f;\sqrt{\frac{x_0}{[n]_{q_n}^{\beta}}}\Big)\left[2+\sqrt{q_n}\,[n]_{q_n}^{\frac{2\beta-1}{2}}(1+\sqrt{x_0})x_0^{\frac{1}{2(1-\beta)}}q_n^{\frac{2\beta-1}{2(1-\beta)}}\,[n]_{q_n}^{\frac{1-2\beta}{2}}\right]$$

$$=\omega\Big(f;\sqrt{\frac{x_0}{[n]_{q_n}^{\beta}}}\Big)\left[2+(1+\sqrt{x_0})x_0^{\frac{1}{2(1-2\beta)}}q_n^{\frac{\beta}{2(1-\beta)}}\right] \tag{4.5}$$

olur. (4.5)'de $q_n^{\frac{\beta}{2(1-\beta)}}\le 1$ eşitsizliği göz önüne alındığında ispat tamamlanmış olur.

Sonuç:Bu teorem bize x_0 noktasında $R_n^{[\beta]}(f;q_n;x_0)$ operatörünün $f(x_0)$ fonksiyonuna noktasal yaklaşım hızını vermektedir.

5. İKİ DEĞİŞKENLİ q-BALAZS-SZABADOS OPERATÖRLERİ

Şimdi de q-Balazs-Szabados operatörünün iki değişkenli genelleşmesini tanıtıp, yaklaşım özelliklerini inceleyelim.

Öncelikle [6] da Volkov tarafından ispatlanan aşağıdaki teoremi verelim.

5.1 Teorem[6]

$f(x,y)\in C\left[a,b;c,d\right]$ ve tüm reel eksenlerde $\left|f(x,y)\right|\le M_f$ olsun. $L_n(f(t,r);x,y)$ lineer pozitif operatör dizisi için düzgün olarak

i. $L_n(1;x,y)\rightrightarrows 1$

ii. $L_n(t;x,y)\rightrightarrows x$

iii. $L_n(r;x,y)\rightrightarrows y$

iv. $L_n(t^2+r^2;x,y)\rightrightarrows x^2+y^2$

koşulları sağlanıyorsa her $f(x,y)\in C\left[a,b;c,d\right]$ için $x\in\left[a,b\right]$, $y\in\left[c,d\right]$ de $L_n(f(t,r);x,y)\rightrightarrows f(x,y)$ olur.

İspat

$f(x,y)\in C\left[a,b;c,d\right]$ olduğundan ∀ε>0 için ∃δ vardır ki $\left|(x,y)-(t,r)\right|<\delta$ yani $\sqrt{(x-t)^2+(y-r)^2}<\delta$ olduğunda $\left|f(t,r)-f(x,y)\right|<\varepsilon$ sağlanır.

$\sqrt{(x-t)^2+(y-r)^2}\ge\delta$ olduğunda ise $\dfrac{(x-t)^2+(y-r)^2}{\delta^2}\ge 1$ olup,

$\left|f(x,y)\right|\le M_f$ olduğunun kullanılmasıyla $\left|f(t,r)-f(x,y)\right|\le 2M_f\left[\dfrac{(x-t)^2+(y-r)^2}{\delta^2}\right]$ yazılabilir. O halde her durumda

$$\left| f(t,r)-f(x,y)\right| \leq \varepsilon + 2M_f\left[\frac{(x-t)^2+(y-r)^2}{\delta^2}\right]$$

$$= \varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2}\left[x^2+y^2-2(xt-yr)+t^2+r^2\right] \qquad (5.1)$$

yazılabilir.

Diğer yandan L_n operatörünün lineerliğinden ve üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$\left|L_n(f(t,r);x,y)-f(x,y)\right| \leq \left|L_n(f(t,r)-f(x,y);x,y)\right| + \left|f(x,y)\right|\left|L_n(1;x,y)-1\right|$$

$$\leq \left|L_n(f(t,r)-f(x,y);x,y)\right| + M_f\left|L_n(1;x,y)-1\right| \qquad (5.2)$$

elde edilir. L_n operatörünün monotonluğundan(lineer ve pozitif olduğundan)

$$\left|L_n(f(t,r)-f(x,y);x,y)\right| \leq L_n(|\,f(t,r)-f(x,y)\,|;x,y) \qquad (5.3)$$

yazılabilir. (5.1) in (5.3) de kullanılmasıyla ve lineerlikten

$$|\,L_n(f(t,r)-f(x,y);x,y)\,| \leq \varepsilon + \varepsilon(L_n(1;x,y)-1) + 2\frac{M_f}{\delta^2}[(x^2+y^2)(L_n(1;x,y)-1)$$

$$-2x(L_n(t;x,y)-x)-2y(L_n(r;x,y)-y)$$

$$+(L_n(t^2+r^2;x,y)-(x^2+y^2))]$$

(5.4)

yazılabilir. (5.4) ün (5.2) de kullanılmasıyla ve i, ii, iii ve iv koşullarının kullanılmasıyla $|\,L_n(f(t,r)-f(x,y);x,y)\,| \leq \varepsilon$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Öncelikle O. Doğru tarafından [2] de tanımlanan iki değişkenli q-Balazs-Szabados operatörünü hatırlatalım.

$$I^2 = [0,a]\times[0,a], \quad f \in C(I^2)$$

olmak üzere

$$R^{[\beta]}_{n_1,n_2}(f;q_1,q_2,x,y) = \frac{1}{\ell_{n_1,q_1}([n_1]^{\beta-1}_{q_1}x)}\,\frac{1}{\ell_{n_2,q_2}([n_2]^{\beta-1}_{q_2}y)}$$

$$\times\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2} f\left(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]^{\beta}_{q_1}},\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]^{\beta}_{q_2}}\right)q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}\,q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}$$

$$\times\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)^{k_1}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)^{k_2}$$

operatörüne iki değişkenli q-Balazs-Szabados operatörü denir.

5.2.Lemma[2]

i. $R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(f;q_1,q_2,x,y)=R_{n_1}^{[\beta]x}(R_{n_2}^{[\beta]y}(f;q_2,x,y))$

ii. $R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(f;q_1,q_2,x,y)=R_{n_2}^{[\beta]y}(R_{n_1}^{[\beta]x}(f;q_1,x,y))$

dir.

Burada

$$R_{n_1}^{[\beta]x}(f;q_1,x,y)=\frac{1}{\ell_{n_1,q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)}\sum_{k_1=0}^{n_1}f(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}^{\beta}},y)q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)^{k_1}$$

$$R_{n_2}^{[\beta]y}(f;q_2,x,y)=\frac{1}{\ell_{n_2,q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)}\sum_{k_2=0}^{n_2}f(x,\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}^{\beta}})q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)^{k_2}$$

dir.

İspat

İspatta Barbosu' nun [8] tekniği kullanılacaktır.

i. $R_{n_1}^{[\beta]x}(R_{n_2}^{[\beta]y}(f;q_2,x,y))=R_{n_1}^{[\beta]x}(\frac{1}{\ell_{n_2,q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)}\sum_{k_2=0}^{n_2}f(x,\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}^{\beta}})q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)^{k_2})$

$$=\frac{1}{\ell_{n_2,q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)}\sum_{k_2=0}^{n_2}R_{n_1}^{[\beta]x}(f(x,\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}^{\beta}});q_1,x,y)q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)^{k_2}$$

$$=\frac{1}{\ell_{n_1,q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)}\frac{1}{\ell_{n_2,q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)}\sum_{k_2=0}^{n_2}q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)^{k_2}\sum_{k_1=0}^{n_1}f(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}^{\beta}},\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}^{\beta}})$$

$$\times q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)^{k_1}$$

$$=R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(f;q_1,q_2,x,y)$$

ii. $R_{n_2}^{[\beta]y}(R_{n_1}^{[\beta]x}(f;q_2,x,y))=R_{n_2}^{[\beta]y}(\frac{1}{\ell_{n_1,q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)}\sum_{k_1=0}^{n_1}f(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}^{\beta}},y)q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)^{k_1})$

$$=\frac{1}{\ell_{n_1,q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)}\sum_{k_1=0}^{n_1}R_{n_2}^{[\beta]y}(f(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}^{\beta}},y);q_2,x,y)q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)^{k_1}$$

$$=\frac{1}{\ell_{n_1,q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)}\frac{1}{\ell_{n_2,q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)}\sum_{k_1=0}^{n_1}q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)^{k_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}f(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}^{\beta}},\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}^{\beta}})$$

$$\times q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)^{k_2}$$

$$=R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(f;q_1,q_2,x,y)$$

6. İKİ DEĞİŞKENLİ q-BALAZS-SZABADOS OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Eğer

$\lim\limits_{n,m\to\infty}\left\| f_{n,m}-f\right\|_{C(I^2)}=0$ ise $\{f_{n,m}\}$ dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsar deriz. Burada

$\left\| f\right\|_{C(I^2)}=\max\limits_{(x,y)\in I^2}\left| f(x,y)\right|$ dir.

6.1.Lemma[2]

$e_{ij}: I^2\to\mathbb{R}$, $e_{ij}=x^i y^j$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

i. $R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(e_{00};q_1,q_2,x,y)=1$

ii. $R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(e_{10};q_1,q_2,x,y)=\dfrac{x}{1+\left[n_1\right]_{q_1}^{\beta-1}x}$

iii. $R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(e_{01};q_1,q_2,x,y)=\dfrac{y}{1+\left[n_2\right]_{q_2}^{\beta-1}y}$

iv. $R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(e_{20};q_1,q_2,x,y)=\dfrac{\left[n_1-1\right]_{q_1}}{\left[n_1\right]_{q_1}}\dfrac{x^2q_1^2}{(1+\left[n_1\right]_{q_1}^{\beta-1}x)(1+\left[n_1\right]_{q_1}^{\beta-1}q_1x)}+\dfrac{1}{\left[n_1\right]_{q_1}^{\beta}}\dfrac{x}{1+\left[n_1\right]_{q_1}^{\beta-1}x}$

v. $R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(e_{02};q_1,q_2,x,y)=\dfrac{\left[n_2-1\right]_{q_2}}{\left[n_2\right]_{q_2}}\dfrac{y^2q_2^2}{(1+\left[n_2\right]_{q_2}^{\beta-1}y)(1+\left[n_2\right]_{q_2}^{\beta-1}q_2y)}+\dfrac{1}{\left[n_2\right]_{q_2}^{\beta}}\dfrac{y}{1+\left[n_2\right]_{q_2}^{\beta-1}y}$

İspat

i. $R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(e_{00};q_1,q_2,x,y)=\dfrac{1}{\ell_{n_1,q_1}(\left[n_1\right]_{q_1}^{\beta-1}x)}\dfrac{1}{\ell_{n_2,q_2}(\left[n_2\right]_{q_2}^{\beta-1}y)}\sum\limits_{k_1=0}^{n_1}\sum\limits_{k_2=0}^{n_2}q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}$

$$\times\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}(\left[n_1\right]_{q_1}^{\beta-1}x)^{k_1}(\left[n_2\right]_{q_2}^{\beta-1}y)^{k_2}$$

$=1$ (Lemma3.1 den)

ii. $$R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(e_{10};q_1,q_2,x,y)=\frac{1}{\ell_{n_1,q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)}\frac{1}{\ell_{n_2,q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)}\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}^{\beta}}q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}$$

$$\times\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)^{k_1}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)^{k_2}$$

$$=\frac{x}{1+[n_1]_{q_1}^{\beta-1}x}$$ (Lemma3.1 ve Lemma3.2 den)

iii. $$R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(e_{01};q_1,q_2,x,y)=\frac{1}{\ell_{n_1,q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)}\frac{1}{\ell_{n_2,q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)}\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}^{\beta}}q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}$$

$$\times\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)^{k_1}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)^{k_2}$$

$$=\frac{y}{1+[n_2]_{q_2}^{\beta-1}y}$$ (Lemma3.1 ve Lemma3.2 den)

iv. $$R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(e_{20};q_1,q_2,x,y)=\frac{1}{\ell_{n_1,q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)}\frac{1}{\ell_{n_2,q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)}\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_1]_{q_1}^2}{[n_1]_{q_1}^{2\beta}}q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}$$

$$\times\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)^{k_1}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)^{k_2}$$

$$=\frac{[n_1-1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}}\frac{x^2q_1^2}{(1+[n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)(1+[n_1]_{q_1}^{\beta-1}q_1x)}+\frac{1}{[n_1]_{q_1}^{\beta}}\frac{x}{1+[n_1]_{q_1}^{\beta-1}x}$$

(Lemma3.1 ve Lemma3.3 den)

v. $$R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(e_{02};q_1,q_2,x,y)=\frac{1}{\ell_{n_1,q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)}\frac{1}{\ell_{n_2,q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)}\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}\frac{[k_2]_{q_1}^2}{[n_2]_{q_1}^{2\beta}}q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}$$

$$\times\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)^{k_1}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)^{k_2}$$

$$=\frac{[n_2-1]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}}\frac{y^2q_2^2}{(1+[n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)(1+[n_2]_{q_2}^{\beta-1}q_2y)}+\frac{1}{[n_2]_{q_2}^{\beta}}\frac{y}{1+[n_2]_{q_2}^{\beta-1}y}$$

Lemma3.1 ve Lemma3.3 den elde edilir.

Şimdi iki değişkenli süreklilik modülünü ve teoremde kullanacağımız özelliğini hatırlayalım;

$\forall f\in R^{I^2}$, $f:I^2\to R$ ve $(\delta_1,\delta_2)\in R_+^2$ için $\omega(\delta_1,\delta_2)$ süreklilik modülü

$$\omega(\delta_1,\delta_2)=\sup\{\left|f(x,y)-f(x',y')\right|(x,y)\in I^2,(x',y')\in I^2,\ |x-x'|<\delta_1,|y-y'|<\delta_2\}$$

şeklindedir. Burada süreklilik modülü monoton artan fonksiyondur. Yani $(\delta_1,\delta_2)\in R_+^2$, $(\delta_1',\delta_2')\in R_+^2$, $\delta_1<\delta_1'$ ve $\delta_2<\delta_2'$ ise $\omega(\delta_1,\delta_2)\le\omega(\delta_1',\delta_2')$ dir.

6.2.Teorem

Her $f:I^2\to R$ fonksiyonu için $\omega(f,\delta_1,\delta_2)$ iki değişkenli q-Balazs-Szabados operatörünün süreklilik modülü olmak üzere

$$|R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(f;q_1,q_2,x,y)-f(x,y)|\le\left[R_{n_1}^{[\beta]}((e_1-x)^2;q_1,x)R_{n_2}^{[\beta]}((e_1-y)^2;q_2,y)\right]^{1/2}\omega(f,\frac{1}{\sqrt{[n_1]_{q_1}^{\beta}}},\frac{1}{\sqrt{[n_2]_{q_2}^{\beta}}})$$

dir.

İspat

$$|R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(f;q_1,q_2,x,y)-f(x,y)|=$$

$$|\frac{1}{\ell_{n_1,q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)}\frac{1}{\ell_{n_2,q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)}\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}(f(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}^{\beta}},\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}^{\beta}})-f(x,y))q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}$$

$$\times\begin{bmatrix} n_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix} n_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)^{k_1}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)^{k_2}| \tag{6.1}$$

sağlanır.

Süreklilik modülünün monotonluğundan

$$|\,f(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}^{\beta}},\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}^{\beta}})-f(x,y)\,|\le \omega(f,|\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}^{\beta}}-x|,|\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}^{\beta}}-y|)$$

$$\le (|\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}^{\beta}}-x|\sqrt{[n_1]_{q_1}^{\beta}}+1)(|\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}^{\beta}}-y|\sqrt{[n_2]_{q_2}^{\beta}}+1)\omega(f,\frac{1}{\sqrt{[n_1]_{q_1}^{\beta}}},\frac{1}{\sqrt{[n_2]_{q_2}^{\beta}}}) \tag{6.2}$$

olup, (6.2), (6.1) de yerine yazılırsa

$$|\,R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(f;q_1,q_2,x,y)-f(x,y)\,|\le \omega(\frac{1}{\sqrt{[n_1]_{q_1}^{\beta}}},\frac{1}{\sqrt{[n_2]_{q_2}^{\beta}}})\frac{1}{\ell_{n_1,q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)}\frac{1}{\ell_{n_2,q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)}$$

$$\times\sum_{k_1=0}^{n_1}\sum_{k_2=0}^{n_2}(|\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}^{\beta}}-x|\sqrt{[n_1]_{q_1}^{\beta}}+1)(|\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}^{\beta}}-y|\sqrt{[n_2]_{q_2}^{\beta}}+1)$$

$$\times q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)^{k_1}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)^{k_2}$$

$$=\omega(f,\frac{1}{\sqrt{[n_1]_{q_1}^{\beta}}},\frac{1}{\sqrt{[n_2]_{q_2}^{\beta}}})\frac{1}{\ell_{n_1,q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)}\frac{1}{\ell_{n_2,q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)}$$

$$\times(\sqrt{[n_1]_{q_1}^{\beta}}\sum_{k_1=0}^{n_1}|\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}^{\beta}}-x|q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)^{k_1}+1)$$

$$\times(\sqrt{[n_2]_{q_2}^{\beta}}\sum_{k_2=0}^{n_2}|\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}^{\beta}}-y|q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)^{k_2}+1) \tag{6.3}$$

elde edilir.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden faydalanırsak;

$$\left[\frac{1}{\ell_{n_1,q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)}\sum_{k_1=0}^{n_1}|\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}^{\beta}}-x|q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)^{k_1}\right]^2$$

$$\le\frac{1}{\ell_{n_1,q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)^2}\sum_{k_1=0}^{n_1}(\frac{[k_1]_{q_1}}{[n_1]_{q_1}^{\beta}}-x)^2q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)^{k_1}\sum_{k_1=0}^{n_1}q_1^{\frac{k_1(k_1-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_1\\k_1\end{bmatrix}_{q_1}([n_1]_{q_1}^{\beta-1}x)^{k_1}$$

$$\le R_{n_1}^{[\beta]}((e_1-x)^2;q_1;x)$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\left[\frac{1}{\ell_{n_2,q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left|\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}^{\beta}}-y\right|q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)^{k_2}\right]^2$$

$$\leq\frac{1}{\ell_{n_2,q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)^2}\sum_{k_2=0}^{n_2}\left(\frac{[k_2]_{q_2}}{[n_2]_{q_2}^{\beta}}-y\right)^2q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)^{k_2}\sum_{k_2=0}^{n_2}q_2^{\frac{k_2(k_2-1)}{2}}\begin{bmatrix}n_2\\k_2\end{bmatrix}_{q_2}([n_2]_{q_2}^{\beta-1}y)^{k_2}$$

$$\leq R_{n_2}^{[\beta]}((e_1-y)^2;q_2;y)$$

olur.

O halde

$$|R_{n_1,n_2}^{[\beta]}(f;q_1,q_2,x,y)-f(x,y)|\leq\left[R_{n_1}^{[\beta]}((e_1-x)^2;q_1,x)R_{n_2}^{[\beta]}((e_1-y)^2;q_2,y)\right]^{1/2}\omega\left(f,\frac{1}{\sqrt{[n_1]_{q_1}^{\beta}}},\frac{1}{\sqrt{[n_2]_{q_2}^{\beta}}}\right)$$

dir.

KAYNAKLAR

1. Korovkin, P. P . (1953). *On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions*. Dokl. Akad. Nauk SSSR. Vol. 90. No. 953.

2. Dogru, O. (2006). On statistical approximation properties of Stancu type bivariate generalization of q-Balazs-Szabados operators. *In Proceedings Of The International Conference On Numerical Analysis And Approximation Theory*.

3. Dogru, O. (2002). On Bleimann, Butzer and Hahn type generalization of Balázs operators. *Studia Universitatis Babes-Bolyai. Mathematica* 47.4 : 37-45.

4. Balázs, K. (1975). "Approximation by Bernstein type rational functions. *Acta Mathematica Hungarica* 26.1: 123-134.

5. Balázs, K. and Szabados, J. (1982). "Approximation by Bernstein type rational functions. II. *Acta Mathematica Hungarica* 40.3 : 331-337.

6. Volkov, V. I. (1957). The Convergence Of Sequences Of Linear Positive Operators In The Space Of Continuous Functions Of 2 Variables. *Doklady Akademii Nauk SSSR* 115.1 : 17-19.

7. Phillips G. M. (2003). *Interpolation and Approximation by Polynomials*.New York : Springer Verlag, 293.

8. Barbosu D.(2000), Some Generalized bivariate Bernstein Operators, Math.Notes (Miskolc), 1, 3-10.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: Pelin, KARATAŞLI
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 26.10.1988, Altındağ
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (506) 6638071
Faks	: -
E-Posta	: plinyilmaz@gmail.com

Eğitim

Derece	**Okul/Program**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik	2015
Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik	2010
Lise	Mehmetçik Y.D.A.L	2006

İş Deneyimi

Yıl	**Çalıştığı Yer**	**Görev**
2013-2014	Şanlıurfa Kız A.İ.H.L	Öğretmen
2014-	Ayaş Naime-Ali Karataş Ç.P.A.L.	Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Kitap Okuma, Sinema, Ebru

GAZİ GELECEKTİR...