GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

HACHEMEİSTER KREDİBİLİTE MODELİ VE BİR UYGULAMA

Esma BİÇER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2015

Esma BİÇER tarafından hazırlanan "HACHEMEİSTER KREDİBİLİTE MODELİ VE BİR UYGULAMA" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Meral EBEGİL

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu Onaylıyorum ..…………………

Başkan : Doç. Dr. Mehtap AKÇİL OK

İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı, Başkent Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu Onaylıyorum …………………...

Üye : Doç. Dr. Arzu Yaprak ÖZDEMİR

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu Onaylıyorum …………………...

Tez Savunma Tarihi: 15/01/2015

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

………………….…….

Prof. Dr. Şeref SAĞIROĞLU
Fen Bilimleri Enstitüsü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

…………………………….

Esma BİÇER

15/01/2015

HACHEMEİSTER KREDİBİLİTE MODELİ VE BİR UYGULAMA

(Yüksek Lisans Tezi)

Esma BİÇER

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2015

ÖZET

Kredibilite teorisinde amaç, poliçe sahiplerinin mevcut deneyimleri ile geçmişe ait deneyimlerinden sonuçlar çıkarmaktır. 1900'lerin başlarından itibaren, kredibilite teorisi yardımıyla bu iki deneyim arasında ağırlıklı ortalama kullanarak hem sigortalı hem de sigortacı için, uzlaşma sağlayacak adil bir prim değeri elde edilmeye çalışılmıştır. Eğer sigorta portföyü homojense, bütün sigortalıların ortak deneyimini temsil eden genel ortalamayı yani ortak primi kullanmak mantıklıdır. Ancak genellikle sigorta portföyleri heterojendir. Bu yüzden sigorta şirketleri iyi veya kötü hasar deneyimlerine sahip poliçe sahiplerini (sigortalıları) ayırt etmek ister. Bu ayrımın yapılması sigortalılar tarafından da istenilen bir durumdur. Dolayısıyla böyle portföylerde sadece ortak primi ele almak uygun değildir. Benzer şekilde sigorta şirketi bir sonraki dönem için sigortalılardan alınması gereken prim değeri olarak bireysel prim değerlerini belirlerse, bu durum ise sigorta şirketi için adil olmayacaktır. Bu sebeple bu iki prim arasında hem sigortacı hem de sigortalı için uzlaşma sağlayacak adil prim değerlerinin belirlenmesi önemlidir. Kredibilite teorisi bu iki uç prim değerine belirli ağırlıklar vererek her iki taraf içinde uzlaşmayı sağlayacak prim değerleri elde etmemizi sağlayan yöntemler topluluğudur. Bu yöntemlerden biri de Hachemeister kredibilite modelidir. Bu çalışmada öncelikle Hachemeister kredibilite modeli tanıtılmıştır. Daha sonra Hachemeister kredibilite modelinin işleyişini göstermek için Türkiye Sigorta Birliği sitesinden alınan veriler kullanılmıştır. Hasar tutarı ile hasar sayısı ve alınan prim değeri il poliçe adedi (sigortalı sayısı) verileri dikkate alınarak Hachemeister kredibilite modeli ile hasar tutarı modellemesi ve alınan prim değeri modellemesi yapılmıştır. Çalışmanın son kısmında simülasyon çalışması yardımı ile farklı grup ve dönem sayılarına göre homojen ve heterojen portföyler oluşturulmuştur. Bu portföyler kullanılarak bir sonraki sigorta dönemi için Hachemeister kredibilite modeli ile prim değerleri elde edilmiştir. Hachemeister kredibilite modeli kullanılarak elde edilen prim değerleri ile ağırlıklı ortak prim değerleri ve ağırlıklı bireysel prim değerleri karşılaştırılmış ve sonuçlar yorumlanmıştır.

Bilim Kodu	:	902.1.014
Anahtar Kelimeler	:	Kredibilite Teorisi, Hachemesiter Kredibilite Modeli, Linear Modeller, Regresyon Analizi
Sayfa Adedi	:	89
Danışman	:	Doç. Dr. Meral EBEGİL

HACHEMEİSTER CREDIBILITY MODELS AND AN APPLICATION

(M. Sc. Thesis)

Esma BİÇER

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2015

ABSTRACT

The purpose of credibility is finding results about past experience and the current experience. Since the beginning of 1900s, with the help of credibility theory, by using weighted average between these two experience, a fair premium (which) both insured and insurer comprimise has been tried. If insurance portfolio is homogeneous, to use general mean called collective premium representing collective experience of the insured is logical. However, insurance porfolios are generally heterogeneous. Therefore, insurance companies require to distinguish the insured having good or bad claims experience. That situation is also demanded by the insured. Whereat, to use only collective premium in the portfolio is not appropriate. Likely if insurance company determine to be taken premium values from the insured for the next term as an individual premium values, this condition will not be fair for the insurance company. For all these reasons, definding fair premium values between these two premiums are significant in terms of getting a deal between the insured and insurance company. Credibility theory is methods community, providing premium values to comprimise both the insured and insurance company via giving particular weights for these two points. One of the methods is Hachemeister Credibility Model. Initially, Hachemeister credibility model is introduced in this study. Then, to illustrate the applying of the Hachemeister credibility model, datum taken from Turkey Insurance Association site is used. Total amount of damage and injury and the premium value of provincial policy number (the number of the insured) datum are considered. Using amount of damage and the number of damage, amount of damage modeling have been studied with Hachemeister credibility model. Using premium value and the number of policy (the number of the insured), taken premium value modeling have been studied with Hachemeister credibility model. In the last part of the study, according to the number of different groups and periods, homogeneous and heterogeneous portfolios have been simulated. Hachmeister credibility model and premium value for the next insurance term have been obtained by using these portfolios. The resulting premium values, weighted collective premium values and weighted individual premium values are compared. Ultimately, results are interpreted.

Science Code	:	902.1.014
Key Words	:	Credibility Theory, Hachemeister Credibility Model, Linear Models, Regression Analysis
Page Number	:	89
Supervisor	:	Assoc. Prof. Dr. Meral EBEGİL

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren danışman Hocam Sayın Doç. Dr. Meral Ebegil'e ve ayrıca desteklerinden dolayı diğer hocalarım ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim. Yaşamım ve çalışmalarım boyunca ilgi ve sevgileriyle beni sürekli destekleyen annem, babama ve kardeşlerime çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
AEKK	Ağırlıklı en küçük kareler yöntemi
B. VE A. D.	Bağımsız ve aynı dağılımlı
ENDOSK	En iyi doğrusal sapmasız kestirici
EKK	En küçük kareler yöntemi
GAKT	Gruplar arası kareler toplamı
GDM	Genelleştirilmiş doğrusal model
GIKT	Gruplar içi kareler toplamı
HGDM	Hiyerarşik genelleştirilmiş doğrusal model

1. GİRİŞ

Kredibilite kuramı, geçmiş hasar bilgileri bilinen, benzer risk birimlerinden oluşan bir grupta, herhangi bir birimin gelecek dönemdeki beklenen hasarlarına veya hasar tutarına ilişkin öngörüde bulunmak için kullanılan yöntemleri inceler (Frees and Wang, 2005). Diğer bir deyişle kredibilite ağırlıklı prim miktarını hesaplama yöntemlerinden biridir. Ağırlıklandırma işlemi kredibilite faktörü ile yapılır. Kredibilite faktörünü belirlemek için çeşitli yöntemler vardır. Bu yöntemler kredibilite modelleri olarak isimlendirilir.

Kredibilite kuramı, 1890'ların sonlarına doğru işverenlerin mesuliyet sigortalarının fiyatlandırma çalışmalarıyla ortaya çıkmıştır. Kredibilite konusunda ilk tanım, Mowbray tarafından yapılan çalışmada tam kredibilite (Full Credibility) için verilmiştir. Kredibilite kuramının başlangıcı olan bu çalışma, verilere tam kredibilite verilebilmesi için gerekli kriterleri ortaya koymuştur (Mowbray, 1914; Ebegil, 2007). Bu yaklaşım *"Geleneksel Kredibilite"* veya *"Sınırlı Dalgalanmalı Kredibilite (Limited Fluctuation Credibility)"* olarak adlandırılmaktadır. *Sınırlı Dalgalanmalı Kredibilite* Birinci Dünya Savaşı sırasında, sınırlı deneyimle, işçilerin tazminat sigortalarında ödenecek sigorta primlerinin düzenlenmesi için geliştirilmiştir. Bu model, gözlemlerdeki rassal dalgalanmaların tahminler üzerindeki etkisini sınırlamaktadır.

Whitney (1918), gelecek dönemdeki hasarın, bireyin hasar bilgisi ile risk sınıfına ilişkin hasar bilgisinin ağırlıklandırılmış biçiminde elde edileceğini göstermiştir. Bu çalışma *Klasik Kredibilite (the Greatest Accuracy Credibility)* kuramının temelini oluşturmaktadır (Whitney, 1918).

Arthur Bailey (1945 ve 1950) yıllarında yayınladığı makalelerinde klasik kredibiliteye en küçük kareler yaklaşımını uygulamış ve kredibilite kestiricisini veren eşitliğin Bayes teoreminden elde edileceğini göstermiştir. Bu nedenle Arthur Bailey, modern kredibilite kuramının babası olarak anılmaktadır (Bailey, 1945; Bailey, 1950).

Mayerson (1964) kredibiliteye Bayesci yaklaşımı sunar ve kredibilite kuramına sağlam bir teorik temel kurulmasına ilişkin yönteme dikkat çeker (Mayerson, 1964).

Bühlmann (1967)'de, dağılımdan bağımsız, Bayes yönteminin en iyi doğrusal yaklaşımı şeklinde ifade edilebilecek, bir kredibilite formülü elde ederek Bühlmann kredibilite modelini oluşturmuştur (Bühlmann, 1967). Bu çalışmanın ardından Bühlmann ve Straub

(1970), riske maruz kalan birim sayılarının bireylere göre farklılık göstermesi durumunu da dikkate alıp, Bühlmann modelinin genelleştirilmiş hali olan Bühlmann-Straub kredibilite modelini sunmuşlardır. Bühlmann-Straub kredibilite modelinde, varyans homojenliği varsayımı bozularak, modele varyans heterojenliği özelliği eklenmiştir (Bühlmann ve Straub, 1970).

Kredibilite kuramı 1970'lerden sonra hızlı bir gelişim sürecine girmiştir. Jewell (1975) iki aşamalı hiyerarşik model ile çalışmış ve bu çalışmayı Taylor (1979) daha fazla aşamalı model ile genişletmiştir (Kremer, 1994; Ebegil, 2007).

Kuram üzerine çalışmalar 1970–1980 yılları arasında genelleştirmeler üzerine, 1980'den sonraki yıllarda ise parametrelerin tahmin edicileri üzerine yoğunlaşmıştır. Dönemin önemli çalışmaları Norberg (1980), Gisler (1980), De Vylder (1981) ve Dubey ve Gisler (1981) tarafından yapılmıştır (De Vylder, 1981; Kremer, 1994; Schnieper, 1995). 1980'li yılların ortasından 1990'lı yıllara kadar yavaşlayan süreç 1990'larda yeniden hızlanmış ve bu dönemde çalışmalar optimal parametre tahmin edicileri üzerine yoğunlaşmıştır.

Kredibilite kuramında, regresyon modeli çalışması Hachemeister (1975) tarafından yapılmıştır. Hachemeister (1975), ABD'de çeşitli eyaletlerde üçüncü şahsın otomobil mesuliyetinde (auto liability) oluşan bedensel yaralanma hasarları için ortalama hasar miktarlarını öngörmek (forecast) istemiştir. Aslında bu tür veriler, enflasyondan dolayı zaman trendinden etkilenir. Bu yüzden Hachemeister'in regresyon modelinde, zaman eğilim bileşeni modele açıklayıcı değişken olarak eklenmiştir (Bühlmann ve Gisler, 2005).

Hachemeister kredibilite modeli ilk olarak, ABD'nin eyaletleri için hasar şiddetlerini tahmin etmek amacıyla Hachemeister tarafından geliştirilmiştir (Hachemeister, 1975). Daha sonra Neuhaus (1987) yılındaki çalışmasında hachemeister kredibilite notasyonlarını kullanılarak sadece bir grup için ortalama hasar boyutu ve hasar şiddetini tahmin etmiştir (Neuhaus, 1987; Ledolter ve diğerleri, 1991). Sundt (1979) ve Norberg (1986) hiyerarşik kredibilite modelini regresyon bağlamında incelemiştir (Sundt, 1979; Norberg, 1986). Chang-Soo Lee (1991)'de Hachemeister krediblite modeli formu kullanılarak krediblite sigorta primlerinin tahmini için zaman serileri modeli çalışmasını yapmıştır (Lee, 1991).

Laird ve Ware (1982)'nin çalışmalarından bu yana doğrusal karma modeller uzun kesit verileri (longitudinal data, zaman içerisinde tekrarlanan ölçümlere dayanan veriler) modellemekte yaygın olarak kullanılmaktadırlar (örneğin, bioistatistikte ve çevresel istatistikte) (Laird ve Ware, 1982). Karma modeller, klasik doğrusal regresyon modellerinin kapsamını genişleterek, geleneksel sabit etkilerin yanı sıra rassal ya da öğeye özgü etkilerin de ortalamanın yapısında yer almasına imkân verirler. Bir diğer deyişle, doğrusal regresyon modelinde, ortalamanın oluşumunda sadece sabit etkiler dikkate alınırken, karma modellerle, rassal etkileri de modele katmak mümkün olmaktadır.

Son yıllarda iyi bilinen bazı istatistiksel modeller, kredibilite kuramına uygulanmaktadır. Bu çalışmalara örnek olarak varyans bileşenleri modelleri verilebilir (Dannenburg, 1995). Dannenburg ve diğerleri (1996), kredibilite modellerinin açıklanması zor olan risk parametresi koşulunun oluşturulması durumunda, gruplar veya bireyler arasında birden fazla risk parametresi olması nedeniyle analizin zorlaşacağını, bunun yerine risk değişkenlerinin birbirinden bağımsız varyans bileşenlerine ayrılmasının kolaylık sağlayacağını belirtmiş ve kredibilite kestiricilerinin elde edilmesinde varyans bileşenleri modelini kullanmışlardır (Dannenburg ve diğerleri, 1996). Young 1997'de karar kuramını kullanarak hasar fonksiyonunu en küçükleyen bir kredibilite formülü geliştirmiştir (Young, 1997).

Varyans bileşenleri modeli de doğrusal modellerden oluşturulmuştur (Goulet, 1998). Frees ve diğerleri (1999) kredibilite fiyatlarının kestiriminde, en iyi doğrusal sapmasız kestirici, ENDOSK (best linear unbiased predisctors, BLUP) kullanarak, kredibilite modellerinden; Bühlmann, Bühlmann-Straub, Jewell'in hiyerarşik modeli ve Hachemeister'in regresyon modelinin, doğrusal modellerin özel durumu olarak ifade edilebileceğini göstermiştir (Frees ve diğerleri. 1999).

Yu Loo (2000) çalışmasında sabit etki modeli ile rassal etki modelini kullanmıştır. Daha sonra Yu Loo (2000) çalışmasında hachemeister kredibilite modeli ile bu etki modellerinin trende uygunluğunu incelemiştir. Bu iki etki modellerinden kredibilite prim eşitlikleri ve yapılan çalışma sonucunda elde edilen değerlerin karşılaştırılması yapılmıştır (Loo, 2000). Luong ve Cossette (2003) çalışmasında hareketli ortalama hatalarını kullanarak kredibilite regresyon modelinin kovaryansı için genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicileri üzerine bir inceleme yapmıştır (Luong ve Cossette, 2003).

Aktüeryal (sigortacılıkta kullanılan) verilerin modellenmesinde, Genelleştirilmiş Doğrusal Model (GDM) ler yaygın olarak kullanılan istatistiksel araçlar olmuştur. Bu konuda başlangıç, McCullagh ve Nelder (1989)'in çalışmalarında sundukları aktüeryal örneklerle yapılmıştır (McCullagh ve Nelder, 1989). Ebegil (2006), Nelder ve Verrall (1997)'in çalışmalarını, Bühlmann-Straub kredibilite modelinin hiyerarşik genelleştirilmiş doğrusal model (HGDM) lerle bağlantısını kurarak genişletmiştir (Ebegil, 2006). Pitselis (2013) çalışmasında regresyon kredibilite tahmin edicilerinin sağlam tahmin edicilerini geliştirmeye çalışmıştır (Pitselis, 2012).

Bu çalışmanın amacı, regresyon kredibilite modellerini kullanarak yapılacak çalışmalara kaynak olacak şekilde Hachemeister kredibilite modelini tanıtmaktır. Bu amaç doğrultusunda öncelikle Hachemeister kredibilite modelinin teorik yapısı incelenerek, özetlenmiştir. Daha sonra Hachemeister kredibilite modelinin işleyişini göstermek için Türkiye Sigorta Birliği sitesinden alınan veriler kullanılmıştır. Araç türüne ilişkin hasar tutarı ile hasar sayısı ve alınan prim değeri ile poliçe adedi (sigortalı sayısı) verileri dikkate alınarak Hachemeister kredibilite modeli ile hasar tutarı modellemesi ve alınan prim değeri modellemesi yapılmıştır. Araç türleri; Otomobil, Taksi, Kamyonet, Kamyon ve Otobüs biçiminde tanımlanmıştır. Dönemler üçer aylık periyotlar şeklinde düzenlenmiş olup 2011 yılının son çeyreğinden (Ekim, Kasım, Aralık) 2014 yılına (2014 yılının 4. Çeyreği (Ekim, Kasım, Aralık) hariç) kadar olan hasar geçmişi ele alınmıştır. Çalışmanın son kısmında Matlab programı kullanılarak yapılan simülasyon çalışmasında farklı grup ve dönem sayılarına göre homojen ve heterojen portföyler oluşturulmuştur. Bu portföyler kullanılarak bir sonraki sigorta dönemi için Hachemeister kredibilite modeli ile prim değerleri elde edilmiştir. Hachemeister kredibilite modeli kullanılarak elde edilen prim değerleri ile ağırlıklı ortak prim değerleri ve ağırlıklı bireysel prim değerleri karşılaştırılmış ve sonuçlar yorumlanmıştır.

2. KREDİBİLİTE KAVRAMI

Kredibilite kelimesi, ilk defa aktüeryal bilimde güvenin ölçüsü olarak, yani aktüerin prim belirlemesi için bir kısım sigortalının deneyimlerini hangi ölçüde değerlendirmeye alması gerektiği şeklinde ifade edilmiştir (Longley - Cook, 1962). Kredibilite konusunda ilk tanım ise Mowbray (1914) tarafından yapılmıştır. Mowbray çalışmasında, poliçelerin fiyatlandırılması amacıyla bir riske ilişkin geçmişe ait bilgi ve deneyimlerin miktarını *"kredibilite"* olarak tanımlamıştır. Bu nedenle kredibilite, hasar aktüerya biliminde (casualty actuarial science) en önemli yöntemlerden birisidir (Mowbray, 1914; Ebegil, 2007).

Aktüerya biliminde, başlıca sorunlarından biri, risk sınıflarına ilişkin geçmiş hasar bilgisi ile bilinen bir portföyde, herhangi bir risk sınıfının gelecek dönemdeki hasarının öngörülmesidir. Bu bir kredibilite fiyatlandırma (ratemanking) sorunudur (Frees ve diğerleri, 1999).

Eğer bir poliçe sahibinin hasar geçmişi veya hasar deneyimi verileri tutarlı bir biçimde, safi (pure) primden daha iyiyse, sigortalı sigorta şirketinden prim değerinde bir indirim oranı talep edebilir. Tersi durumda, yani sigortalının geçmiş deneyimleri kötüyse, bu durumda sigortalının sigorta şirketi için maliyeti yüksek olacağından sigorta şirketi sigortalının prim oranında bir artış yapabilir. Bu konunun Norberg (1979) örneğini biraz sadeleştirerek açıklanması mümkündür (Noberg, 1979). Örneğin bir sigorta şirketinin 10 sigortalıya ait 10 yıllık deneyimleri Çizelge 2.1'deki gibi olsun. Hesaplamalarda ortalama hasar sayısı 0,20 olarak belirlenmiştir ve yapılan hasarlar "1" ile gösterilmiştir. Diğer bir ifade ile yılda 10 sigortalıdan ortalama 2'sinde hasar beklenmektedir.

Çizelge 2.1. 10 tane sigortalıya ait bir portföyün 10 yıllık hasar verileri

Yıl	Sigortalılar									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1									1	
2	1	1							1	
3	1		1						1	
4			1						1	
5									1	
6		1								
7	1	1		1	1					
8	1			1		1			1	
9	1				1					
10	1								1	
$\bar{Y}_i$	0,6	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1	0	0	0,7	0
$\bar{Y}$	0,23									

Çizelge 2.1'de görüldüğü üzere 1. yıl 9 numaralı sigortalı hasar kaydetmiştir. 2. yıl 1, 2 ve 9 numaralı sigortalı hasar kaydetmiştir. İki yıllık verilere bakıldığı zaman primin yeterli seviyede olduğu görülmektedir. Fakat bireysel olarak sigortalılar incelendiğinde 1 ve 9 numaralı sigortalılar ile 7, 8 ve 10 numaralı sigortalılar için çok açık farklılıklar olduğu görülmektedir (Özer, 2004).

Bir risk grubunda tüm risklerin homojen olduğu varsayılarak risk grubunun beklenen hasarı hesaplanır. Bu değerin kılavuz prim olarak gruptaki her sigortalıya uygulanması adaletsiz bir durum yaratmaktadır. Oysa Çizelge 2.1'deki gibi, risk birimleri arasında farklılıkların olması doğaldır. Bu nedenle bazı poliçe sahipleri, hasar deneyimlerinin varsayılandan daha iyi olmasına rağmen, daha fazla prim ödediklerini düşünerek, prim indirimi talebinde bulunabilir (örnekteki 7, 8 ve 10 numaralı sigortalılar gibi). Benzer biçimde, sigorta portföyünde, risk primi veya net prim hesabında varsayılandan daha kötü hasar deneyimine sahip poliçe sahipleri de (örneğimizdeki 1 ve 9 numaralı sigortalılar gibi) bulunmaktadır. Bu poliçe sahiplerinin daha fazla prim ödemeleri, sigorta portföyündeki sigortalılar arasında adaletli bir prim dağılımı için gereklidir (Özer, 2004).

Her sigortalıyı sadece kendi deneyimleri ile fiyatlandırmak da bir yöntem olabilir. Bu durumda da mevcut kısıtlı verilerin kredibilitesinin ölçüsünün belirlenmesi gerekmektedir ve aynı risk karakteristiğine sahip binlerce sigortalının deneyimleri yerine 10 yıllık verileri ölçüt almak gerçekçi bir çözüm olmayacaktır.

Bir sigortacı, poliçe sahibinin hasar deneyimini fiyatlandırırken poliçe sahibi hakkında ne kadar fazla geçmiş hasar bilgisine sahipse, poliçe sahibinin deneyiminin o kadar güvenilir olacağı açıktır. Aynı şekilde sigortacı, bir grup sigortasında, geniş grupların hasar deneyiminin, küçük gruplardan daha güvenilir olacağını da dikkate almalıdır. Ayrıca göz önüne alınması gereken diğer bir durum ise, piyasa rekabetinin sigortacıyı, tamamen sigortalının geçmiş hasar bilgisinden yararlanmak zorunda bırakabileceğidir.

İstatistiksel olarak kredibilite kuramı, sonuca sezgisel olmayan bir biçimde ulaşmayı hedefleyen bir yöntemdir. Önsel bilginin varlığında, örnek ortalaması veya başka sapmasız tahmin ediciler kullanılabilir. Ancak kredibilite kuramı, bu deneyime sadece kısmi ağırlık verir ve geri kalan ağırlığı diğer (güncel) bilgilerden oluşan tahmin ediciye verir. Kredibilite kuramı, sigortacının bu sorununa nicel olarak çözüm getirmesini sağlayan yöntemleri içerir (Klugman ve diğerleri, 2004; Ebegil, 2007; Erdal, 2013).

Sıklıkla aktüerya uygulamalarında, sigorta şirketi grup sigorta sözleşmeleri için prim değeri belirlemek zorundadır. Ancak gruptaki bazı sigortalılar için sınırlı sayıda deneyim bulunurken bazıları için çok sayıda deneyim mevcut olabilir. Aynı grup içinde bulunan sigortalılar bu durumdan etkilenir. Bu gibi durumlarda sigortalılar için prim değeri belirlenirken geçmiş deneyimlerinin farklılıklarından dolayı bireysel ve ortak deneyimler birlikte dikkate alınmalıdır. Bireysel ve ortak deneyimler iki uç noktadır. Bunlardan ilki her bir sigortalı için genel ortalamayı ifade eden $\bar{Y}$ tahmin edicisi tarafından elde edilen ortak prim (collective premium)'dir. Bütün sigortalılar aynı ortalamaya (hasar deneyimine) sahip iseler yani portföy homojense ortak primi kullanmak mantıklıdır. Ancak sigorta şirketleri iyi veya kötü hasar deneyimine sahip poliçe sahiplerini ayırt etmek ister. Bu yüzden sadece ortak primi ele almak mantıklı değildir. Diğer uç nokta olan her bir sigortalı için hesaplanan ortalama hasar değerlerine karşılık gelen $\bar{Y}_j$ ise bireysel primdir. Bireysel primler portföyün heterojen olmasına izin verir. Bu yüzden 1900'lerin başlarından itibaren, bu iki uç prim değerleri arasında ağırlıklı ortalamayı kullanarak her iki taraf içinde uzlaşma sağlayacak bir değer elde edilmeye çalışılmıştır. Bunun sonucunda kredibilite primi olarak adlandırılan

$$C_j = z_j\,\bar{Y}_j + \left(1 - z_j\right)\bar{Y} \qquad (2.1)$$

değeri elde edilir.

Eş. 2.1’de $\bar{Y}_j$ güncel gözlemlerin ortalaması, $\bar{Y}$ ise önsel ortalamayı gösterir. z_j kredibilite faktörü olarak tanımlanır. z_j, güncel gözlemlere verilen ağırlığı, (1-z_j) ise geçmiş gözlemlere verilen ağırlığı gösterir (Herzog, 1999). Kısacası, Eş. 2.1’deki gibi kredibilite faktörü ile ağırlıklandırılmış biçimde hesaplanan primler, kredibilite primi olarak adlandırılmaktadır (Dannenburg ve diğerleri, 1996).

Başka bir açıdan bakarsak $\bar{Y}_j$, sigorta portföyündeki j’inci sigortalının geçmiş hasar bilgisi ve $\bar{Y}$, tüm portföye ilişkin geçmiş hasar bilgisi olarak da ifade edilir. z_j =1 olması durumunda, bir sonraki döneme ilişkin öngörü değeri, tamamen sigortalının bireysel hasar deneyimine göre yapılmış olur. Sigortalıya ilişkin gözlem sayısı az ise z_j değeri 0’a yaklaşır ve bu durumda, kredibilite primi, tüm portföyün ortalamasına yakın olarak elde edilir. Portföy homojen ise, sigortalılara yüklenecek prim, tüm portföyün ortalaması olarak belirlenir. Diğer yandan, sigortalıların geçmiş hasar bilgisi yeterince geniş ve portföy heterojen ise, sigortalının bireysel ortalaması prim olarak belirlenebilir (Dannenburg ve diğerleri, 1996).

3. KREDİBİLİTE MODELLERİ

Kredibilite kuramı, son döneme ilişkin veriler ile önsel hipotez arasında (geçmişe ait veriler arasında) dengeli bir paylaştırma sonucu ortaya çıkan gerçek beklentinin doğrusal tahminini içerir. Yani kredibilite, ağırlıklı tahmin değerinin hesaplanması için kullanılan bir yöntemdir. Ağırlıklandırma işi z kredibilite faktörü ile yapılmaktadır. z değerini belirlemek için çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Bu yöntemler, kredibilite modelleri olarak isimlendirilir (Ebegil, 2007).

Kredibilite kuramı, sınırlı dalgalanmalı kredibilite *(the limited fluctuation credibility)* ve klasik kredibilite *(the greatest accuracy credibility)* olarak iki yöntem altında incelenmektedir.

Sınırlı dalgalanmalı kredibilite modeli, tam kredibilite *(full credibility)* ve kısmi kredibilite *(partial credibility)* olarak incelenebilir. Sınırlı dalgalanmalı kredibilite kuramında hem kredibilite faktörü z 'yi belirlemek hem de tam kredibilite için gerekli beklenen hasar (claim) sayısını bulmak için frekans dağılımlı modeller *(frequentist models)* kullanılır.

Bu çalışmanın konusu sınırlı dalgalanmalı kredibilite modelleri ile ilgili olmadığından bu modellerden bahsedilmeyecektir.

Klasik kredibilite *(the greatest accuracy credibility)* yaklaşımında kredibilite faktörü, Bayesci bir modelde optimal katsayılar olarak elde edilmektedir. Bühlmann ve Bühlmann-Straub modelleri sigorta uygulamalarında kredibilitenin Bayes yaklaşımlı modellemesi olarak bilinir. Bühlmann-Straub modeli, Bühlmann modelinin genelleştirilmiş halidir.

3.1. Basit Bir Kredibilite Modeli

Kredibilite teorisinde amaç poliçe sahiplerinin mevcut deneyimleri ile geçmişe ait deneyimlerinden sonuçlar çıkarmaktır. Varsayalım ki j adet farklı poliçe sahibi olsun ve bunların t dönemlik hasar deneyimleri mevcut bulunsun. $j = 1,2, \ldots, J;\ t = 1,2, \ldots, T$ olmak üzere Y_{jt}; t. dönemde j. hücrenin (sigortalının) rassal hasar deneyimleri olacak biçimde tanımlansın. Veriler, sigorta portföyünden hasar tutarları (the amount of losses), hasar sayıları (the number of claims) veya hasar oranı (loss ratio) şeklinde olabilir.

Amaç, bir sonraki sigorta döneminde, belirli bir sigorta poliçesi (insurance policy) kapsamında hasar sayısını veya tutarını öngörmektir. Buradaki asıl problem, Y_{T+1} ile zaman ve geçmişte gözlenen $Y_{11}, Y_{12}, \cdots, Y_{JT}$ değerleri arasındaki ilişkinin modellenmesidir. Bu model,

$$Y_{jt} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{jt} \quad \text{j=1,2,…, J; t=1,2,…,T} \tag{3.1}$$

biçimindedir. Bu model için, her bir grubun gözlem dönemlerinin sayısı T'ye eşit olacak şekilde oluşturulur. Bu nedenle her bir j için t=1,2,…,T biçiminde ifade edilir. Y_{jt}; bağımsız aynı dağılımlı, her bir grup için farklı ortalamalara ve $s^2 > 0$ olacak biçimde sabit varyansa sahip olduğu varsayılmaktadır. Yani $Y_{jt} \sim \mathrm{N}(\mu_j, s^2)$'dır. Eş. 3.1'de α_j; ortalaması $E(\alpha_j) = 0$ ve varyansı $Var\,(\alpha_j) = a$ olan bağımsız ve aynı dağılıma sahip rassal değişken ve ε_{jt}; bütün j ve t değerleri için $E(\varepsilon_{jt}) = 0$ ve $Var\,(\varepsilon_{jt}) = s^2$ olacak şekilde bağımsız aynı dağılıma sahip hata terimi olarak tanımlanabilir. Her bir grubun ortalaması olarak tanımlanan μ_j'lerin eşit olduğu varsayılır. Burada, $E(\alpha_j) = 0$ ve $Var(\alpha_j) = a$ olmak üzere

$$\mathrm{E}(Y_{jt}) = \mu_j = \mu + \alpha_j \tag{3.2}$$

olduğu varsayılmaktadır. Bu varsayım altında varyans analizi tekniğini kullanarak grup ortalamalarının eşitliği testi yapılabilir. Burada,

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_J$$

$$H_1: En\ az\ bir\ \mu_J\ farklı$$

şeklinde kurulur. H_0 yani bütün grup ortalamalarının eşitliği hipotezi altında gruplar arası kareler toplamı (GAKT),

$$GAKT = \sum_{j=1}^{J} T\left(\bar{Y}_j - \bar{Y}\right)^2 \tag{3.3}$$

şeklindedir. Gruplar içi kareler toplamı (GIKT) ise,

$$GIKT = \sum_{j=1}^{J} \sum_{t=1}^{T} \left(Y_{jt} - \bar{Y}_j\right)^2 \tag{3.4}$$

biçiminde yazılabilir. GAKT ve GIKT sırasıyla serbestlik dereceleri (J-1), J(T-1) olan Ki-Kare dağılımına sahiptir.

Diğer bir deyişle bilindiği üzere varyans analizinde GAKT, s^2'ye bölündüğünde $\chi^2_{(J-1)}$ dağılımına, GIKT ise s^2'ye bölündüğünde $\chi^2_{J(T-1)}$ dağılımına sahip olur. Varyans analizinde Cochran Teoremine göre $\frac{GAKT}{s^2}$ ve $\frac{GIKT}{s^2}$ birbirinden bağımsızdır. Yani $\frac{GAKT}{s^2} \sim \chi^2_{(J-1)}$ ve $\frac{GIKT}{s^2} \sim \chi^2_{J(T-1)}$'dir. Elde edilen iki bağımsız χ^2 istatistiği serbestlik derecelerine bölerek,

$$F = \frac{\frac{1}{J-1}\sum_j T\left(\bar{Y}_J - \bar{Y}\right)^2}{\frac{1}{J(T-1)}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}\left(Y_{jt} - \bar{Y}_J\right)^2} = \frac{KO_{grup\ içi}}{KO_{gruplar\ arası}} \tag{3.5}$$

F istatistiği elde edilir. F değeri > $F_{(J-1),J(T-1)}$ olduğunda H_0 hipotezi reddedilir. F'nin kritik değeri F tablosundan bulunmaktadır.

Çizelge 3.1. 5 dönemden (yıllık) ve 3 gruptan oluşan heterojen portföy örneği

	T=1	T=2	T=3	T=4	T=5	$\bar{Y}_J$
J=1	99,3	93,7	103,9	92,5	110,6	500/5=100
J=2	112,5	108,3	118,0	99,4	111,8	550/5=110
J=3	129,2	140,9	108,3	105,0	116,6	600/5=120

Çizelge 3.1.'de görüldüğü gibi örneğin 3 grup ve 5 dönemden oluşacak şekilde bir veriye sahip olduğu varsayılsın (Dannenburg ve diğerleri, 1996). Çizelge 3.1'deki veriler kullanılarak örneğin genel ortalaması,

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_{jt}}{N} = \frac{1650}{15} = 110$$

biçiminde elde edilir. F istatistiğinin hesaplanan değeri elde edilebilir. Bunun için öncelikle, gruplar içi kare ortalaması

$$KO_{grup\ içi} = \frac{1}{J-1}\sum_j T\left(\bar{Y}_J - \bar{Y}\right)^2$$

$$KO_{grup\ içi} = \frac{1}{(3-1)}5[(100-110)^2 + (110-110)^2 + (120-110)^2]$$

$$KO_{grup\ içi} = 500$$

şeklinde elde edilir.

Gruplar arası kare ortalaması ise,

$$KO_{gruplar\ arası} = \frac{1}{J(T-1)}\sum_{j=1}^{J}\sum_{t=1}^{T}\left(Y_{jt} - \overline{Y}_j\right)^2$$

$$KO_{gruplar\ arası} = \frac{1}{3(5-1)}[(99{,}3 - 100)^2 + \ldots + (112{,}5 - 110)^2 + \cdots + (116{,}30 - 120)^2]$$

$$= \frac{1}{12}[224 + 118{,}74 + 894{,}9]$$

$$KO_{gruplar\ arası} = 103{,}1367$$

biçiminde hesaplanır. Buradan Eş. 3.5'de gösterilen F değeri 4,84 olarak hesaplanmıştır. %5 anlamlılık düzeyinde F tablo değeri J=3, T=5 olmak üzere $F_{0.05,2,12} = 3{,}88$'dir. $F\ değeri = 4{,}84$ > $F_{0.05,2,12} = 3{,}88$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir. Yani en az bir grup ortalaması μ_j'ler arasında bir farklılık olduğu söylenebilir.

H_0 hipotezinin reddedilmemesi, portföyün homojen olduğunu ve heterojen portföy için yeterli kanıtın olmadığı anlamına gelir. Bu sebepten prim olarak genel ortalamayı kullanabiliriz. H_0 hipotezi reddedilirse, en az bir grup ortalaması diğerlerinden farklıdır. Bu durumda sigorta portföyü heterojendir yorumu yapılabilir.

Burada μ_j grup ortalamalarında grup içi sapmaların olduğu ve bu sapmaların ortalaması sıfır, sabit varyansı olacak şekilde tanımlandığı varsayılır. Bu bilgiler paralelinde rassal değişken olan hasar deneyimleri Eş. 3.1'deki gibi

$Y_{jt} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{jt}$ j=1,2,…, J; t=1,2,…,T

biçiminde ifade edilmiştir. Burada α_j ve ε_{jt} rassal değişkenleri birbirinden bağımsızdır. Bütün t ve j değerleri için $E(\alpha_j) = E(\varepsilon_{jt}) = 0$, $Var(\alpha_j) = a\ ve\ Var(\varepsilon_{jt}) = s^2$ biçiminde tanımlanabilir. Buradan $E(Y_{jt}) = \mu$ ve Y_{jt}'nin varyansı ise varyans bileşenleri modelinde olduğu gibi Eş. 3.1'deki ifadenin sağ tarafındaki bileşenlerin varyans toplamına eşittir. Yani

$$Var(Y_{jt}) = s^2 + a \tag{3.6}$$

şeklinde hesaplanır. Eş. 3.1'deki model, klasik Bühlmann modelinin basit bir formudur. Burada Bühlmann modelinin sıfır kovaryansa sahip olduğu varsayılmaktadır.

Ayrıca Bühlmann modelinde bütün gözlemler aynı varyansa sahip ve bütün gruplar aynı sayıda gözlemler içermektedir. Bu sebepten Bühlmann modeli, dengelenmiş Bühlmann modeli (balanced Bühlmann model) olarak da adlandırılmaktadır. Eş. 3.1'deki bileşenler bir sigorta portföyü için,

- μ, sigorta portföyüne ait genel ortalama değeridir.
- α_j, j. sözleşme (sigortalı) için genel ortalamadan rassal sapmadır. $\alpha_j = \xi$ olduğunda yani α_j değeri bilindiğinde Y_{jt} 'nin beklenen değeri $\mu + \xi$'ye eşit olur. Yani $E(Y_{jt}) = \mu + \xi$'dir. Dönem sayısı sonsuza giderken $E(Y_{jt})$ uzun dönem ortalamaya (long-run mean) eşit olur.
- α_j bileşeni, sözleşmenin risk yapısını tanımlamaktadır. α_j'nin beklenen değeri sıfırdır, yani $E(\alpha_j) = 0$'dır ve $E(\alpha_j)$'nin çeşitliliği, sözleşmeler arasındaki farklılıklar olarak tanımlamaktadır. α_j'nin dağılımı, portföyün risk yapısını tanımlar. Bu sebepten yapısal dağılım parametresi olarak bilinmektedir.
- ε_{jt}, t sözleşme dönemindeki ortalamalardan sapmaya ait hata terimidir. ε_{jt}, iyi veya kötü hasar deneyimine sahip poliçe sahiplerinin hasar deneyimlerindeki çeşitliği yani sözleşme içindeki değişkenliği tanımlamaktadır.
- Y_{jt} j. grupta, t. döneme ilişkin hasar deneyimi şeklinde tanımlanabilen bir rassal değişkendir .

şeklinde tanımlanabilir.

Teorem 3.1.

Y_{jt} hasar deneyimleri, j. sözleşmenin t dönemi için stokastik olarak bağımsız bileşenlerin toplamı biçiminde yazılan Eş. 3.1'deki gibi model,

$Y_{jt} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{jt}$ j=1,2,…J; t=1,2,…,T

şeklinde ifade edilmiştir. Bu modelde,

α_j ; ortalaması $E(\alpha_j) = 0$ ve varyansı $Var\ (\alpha_j) = a$ olan bağımsız ve aynı dağılıma sahip rassal değişkendir.

ε_{jt}; bütün j ve t değerleri için $E(\varepsilon_{jt}) = 0$ ve $Var\ (\varepsilon_{jt}) = s^2$ olacak şekilde bağımsız aynı dağılıma sahip hata terimidir.

Teorem 3.1'e göre kredibilite primi,

$$Y_{j,T+1} = z\bar{Y}_j + (1-z)\bar{Y} \tag{3.7}$$

biçiminde ifade edilir. Burada kredibilite faktörü olarak tanımlanan z için optimal bir değer,

$$z = \frac{aT}{aT+s^2} = \frac{T}{T+\frac{s^2}{a}} \tag{3.8}$$

şeklinde ortaya çıkar. $\bar{Y}$ ortak tahmin edicisi ise,

$$\bar{Y} = \frac{1}{JT}\sum_j^J \sum_t^T Y_{jt} \tag{3.9}$$

biçiminde hesaplanır. μ'nın bireysel tahmin edicisi $\bar{Y}_j$ ise

$$\bar{Y}_j = \frac{1}{T}\sum_t^T Y_{jt} \tag{3.10}$$

şeklindedir (Dannenburg ve diğerleri, 1996).

İspat:

Burada homojen doğrusal kombinasyon $g(Y_{11},\cdots,Y_{JT}) = g_{11}Y_{11} + \cdots + g_{JT}Y_{JT}$, $Y_{j,T+1}$'in en iyi yansız tahmin edicisi olacak biçimde tanımlanmaktadır. Yani kredibilite priminin ortalama hata karesi,

$$E\left[\{Y_{j,T+1} - g(Y_{11},\cdots,Y_{JT})\}^2\right] \tag{3.11}$$

biçiminde tanımlanır. Optimal tahmin değerlerini bulmak için Eş. 3.11'e en küçük kareler (EKK) yöntemi uygulanabilir. Y_{jt} rassal değişkenleri bağımsız ve aynı dağılıma sahip oldukları varsayımı altında ve $\delta_{ut} = \begin{cases} 1, & t = u \\ 0, & t \neq u \end{cases}$ olmak üzere,

$$Kov[Y_{jt}, Y_{ju}] = a + \delta_{ut}s^2 \qquad t \neq u \qquad t,u = 1,2,\cdots,T \tag{3.12}$$

dir (Goovaerts ve diğerleri, 1990). Burada homojen doğrusal kombinasyon yerine Eş. 2.1'deki kredibilite prim değeri yani $g(Y_{11},\cdots,Y_{JT}) = (1-z)\bar{Y} + z\bar{Y}_j$ değeri yazıldığında, artık amacımız z'nin en iyi (optimal) değerinin belirlenmesidir.

Bunun için Eş. 3.11'deki ifade de Eş. 3.7 yerine yazıldığında ve gerekli düzenlemeler yapıldığında ortalama hata kare,

$$E\left[\left\{Y_{j,T+1}-(1-z)\bar{Y}-z\bar{Y}_j\right\}^2\right]=E\left[\left\{Y_{j,T+1}-\bar{Y}-z\left(\bar{Y}_j-\bar{Y}\right)\right\}^2\right]$$

$$=E\left[\left\{Y_{j,T+1}-\bar{Y}\right\}^2\right]-2zE\left[\left\{Y_{j,T+1}-\bar{Y}\right\}\left\{\bar{Y}_j-\bar{Y}\right\}\right]+z^2E\left[\left\{\bar{Y}_j-\bar{Y}\right\}^2\right]$$

$$=Var\left(Y_{j,T+1}-\bar{Y}\right)-2zKov\left[Y_{j,T+1}-\bar{Y},\bar{Y}_j-\bar{Y}\right]+z^2Var(\bar{Y}_j-\bar{Y}) \tag{3.13}$$

biçimde de yazılabilir. Burada z'nin en iyi değeri Eş. 3.13'ü en küçükleyecek z değeridir. Bunun için Eş. 3.13'ün z'ye göre türev alınır ve sıfıra eşitlenerek gerekli işlemler yapılırsa,

$$2Kov\left[Y_{j,T+1}-\bar{Y},\bar{Y}_j-\bar{Y}\right]+2zVar\left(\bar{Y}_j-\bar{Y}\right)=0$$

$$z=\frac{Kov\left[Y_{j,T+1}-\bar{Y},\bar{Y}_j-\bar{Y}\right]}{Var\left(\bar{Y}_j-\bar{Y}\right)} \tag{3.14}$$

biçiminde elde edilir. Burada,

$$Kov\left(Y_{jt},Y_{ju}\right)=a \qquad j\neq u \qquad t,u=1,2,\cdots,T \tag{3.15}$$

$$Var\left(Y_{jt}\right)=a+s^2 \tag{3.16}$$

$$Kov\left(Y_{jt},\bar{Y}_j\right)=Var\left(\bar{Y}_j\right)=a+\frac{s^2}{T} \tag{3.17}$$

$$Kov\left(\bar{Y}_j,\bar{Y}\right)=Var(\bar{Y})=\frac{\left(a+\frac{s^2}{T}\right)}{J} \tag{3.18}$$

şeklindedir. Buna göre kredibilite faktörü z,

$$z=\frac{aT}{aT+s^2}=\frac{T}{T+\frac{s^2}{a}} \tag{3.19}$$

biçiminde elde edilir (Dannenburg ve diğerleri, 1996).

3.2. Bühlmann Kredibilite Modeli

Sigortacılıkta en temel sorun, verilen $Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{jt}$ bağımsız ve aynı dağılıma sahip rassal değişkenler ve $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{jt}$ gözlemlenen değerler ile tüm Y_{jt} riskleri için ortak dağılım fonksiyonunun parametrelerini tahmin etmektir. Homojenlik ve rassal değişkenlerin bağımsızlığı varsayımları, aktüerlerin üzerinde durdukları en temel sorunlardır. Risk sınıflandırmasında, risk parametreleri sabit değil, rassal değişken olarak alınır (Bühlmann, 1967).

Bühlmann (1967)'deki çalışmasında, homojenlik kavramı nedir? sorusuna Y_{jt}, j riski için, t poliçe döneminde gerçekleşen hasar olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1T} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{J1} & \cdots & Y_{JT} \end{pmatrix}$$

matrisi, J tane risk için bir sınıfın T dönemlik hasar rassal değişkenleri olsun. Eğer sabit t'ler için $Y_{1t}, Y_{2t}, \dots, Y_{Jt}$'ler aynı dağılıma sahiplerse, bu sınıf yoğunluk açısından homojendir. Eğer sabit j'ler için $Y_{j1}, Y_{j2}, \dots, Y_{jT}$ 'ler aynı dağılıma sahiplerse, zaman açısından homojendir. Homojenliğin sağlanması için en az bu iki koşuldan birisinin gerçekleşmesi gerekir. Çalışmada homojenlik için genel yaklaşımın aksine zaman açısından da homojenliğin gerekli olduğu vurgulanmaktadır. Zamandaki değişimlerin, rassal değişken yerine dönemlik değişimler olduğu ve Bayesci yaklaşımın deneyimsel oranlama için kaçınılmaz olduğu görüşü savunulmaktadır (Bühlmann, 1967).

Eş. 3.1'de tanımlanan α_j bağımsız rassal değişkenleri risk parametreleri olarak ifade edilebilir. Her bir risk parametresi, Y_{jt} $(j = 1,2, \dots, J$ ve $t = 1,2, \dots, T)$ rassal değişkenleri ile gözlemlendiği varsayılırsa, t dönem için tek bir riskin hasar frekansları veya hasar toplamları olarak düşünebilir.

Risk parametrelerinin bilindiği varsayımı altında her bir poliçe sahibinin geçmiş hasar deneyimleri olan Y_{jt}'lerin bağımsız ve aynı dağılımlı oldukları varsayılır. Bu durum verilerin zaman açısından homojen olduklarını ama yoğunluk açısından ise homojen olmadıklarını gösterir.

Klasik kredibilite yaklaşımı varsayımları altında j grup için α_j koşulu beklenen değer,

$$E(Y_{jt}|\alpha_j\ ) = E(\mu + \alpha_j\ ) \tag{3.20}$$

biçimindedir. Eş. 3.1'de Y_{jt} değişkenlerinin süreç varyansı (process variance),

$$Var(Y_{jt}|\alpha_j) = Var(\varepsilon_{jt}) = s^2 \tag{3.21}$$

biçiminde ifade edilir. Eş. 3.20 ve Eş. 3.21'den hipotetik ortalamaların beklenen değeri $\mu = E[E(\mu + \alpha_j\ )]$, süreç varyansının beklenen değeri $E[Var(\varepsilon_{jt})] = s^2$ ve hipotetik ortalamaların varyansı $a = Var[E(Y_{jt}|\alpha_j\ )]$ olarak tanımlanır.

Teorem 3.2.

X, Y ve Θ rassal değişkenler olmak üzere

$$E[Y] = E[E[Y/\Theta]]$$

ve

$$Kov[X, Y] = E[Kov[X, Y/\Theta]] + Kov[E[X/\Theta], E[Y/\Theta]]$$

biçiminde eşitlikleri yazılabilir (Goovaerts ve diğerleri, 1990; Ebegil, 2007).

Teorem 3.2'ye göre Y_{jt}'nin ortalaması, varyansı ve kovaryansı Eş. 3.22, Eş. 3.23 ve Eş. 3.24'te gösterildiği gibi yazılabilir.

$$E(Y_{jt}) = E[E(\mu + \alpha_j\ )] = \mu \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned} Var(Y_{jt}) &= Var[E(\mu + \alpha_j\ )] + E[Var(\varepsilon_{jt})] \\ &= a + s^2 \end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} Kov(Y_{jt}, Y_{ju}) &= E(Y_{jt}Y_{ju}) - E(Y_{jt})E(Y_{ju}) \\ &= E[E(Y_{jt}Y_{ju}/\alpha_j)] - \mu^2 \\ &= E[E(Y_{jt}/\alpha_j)E(Y_{ju}/\alpha_j)] - \{E[E(\mu + \alpha_j\ )]\}^2 \end{aligned}$$

$$= E\left\{\left[E\left(Y_{jt}/\alpha_j\right)\right]^2\right\} - \left\{E\left[E\left(Y_{jt}|\alpha_j\right)\right]\right\}^2$$

$$= Var\left[E\left(Y_{jt}|\alpha_j\right)\right]$$

$$= a \tag{3.24}$$

Klasik kredibilite yaklaşımında anlatılanlara bakıldığında $\mu, \sigma^2 = s^2 + a$ ve $\rho = a/(s^2 + a)$ parametreleri ile gerekli işlemler yapılarak Bühlmann kredibilite primi,

$$C = (1 - z)\mu + z\bar{Y} \tag{3.25}$$

biçiminde elde edilir. Eş. 3.25'te Bühlmann kredibilite faktörü,

$$z = \frac{\alpha T}{\alpha T + s^2} = \frac{T}{T + \frac{s^2}{\alpha}} \tag{3.26}$$

biçiminde elde edilir. Son ifadedeki $\frac{s^2}{\alpha}$ yerine k yazıldığında Eş. 3.23'ten

$$k = \frac{s^2}{\alpha} = \frac{E[Var(\varepsilon_{jt})]}{Var\left[E\left(Y_{jt}|\alpha_j\right)\right]} \tag{3.27}$$

sonucuna ulaşılır. Eş. 3.27'de pay, süreç varyansının beklenen değeri iken payda da hipotetik ortalamanın varyansıdır. Bu durumda kredibilite faktörü

$$z = \frac{T}{T + k}$$

olmak üzere Bühlmann kredibilite modeli,

$$E(Y_{t+1}) = z\bar{Y} + (1 - z)\mu, \qquad z = \frac{T}{T + k} \qquad 0 \le z \le 1 \tag{3.28}$$

biçiminde özetlenebilir (Ebegil, 2007).

3.3. Bühlmann-Straub Kredibilite Modeli

Bühlmann modelinde bir sigortalının geçmişe ait hasar sonuçlarının, her geçmiş dönem için birbirleriyle bağımsız ve aynı dağılımlı bileşenlerden oluşmuş olmasını gerektirmektedir. Bu varsayımın ortaya çıkardığı zorluklardan biri riske maruz kalma değerindeki veya büyüklükteki değişimlere izin vermemesidir. Bir başka deyişle, Bühlmann modeli, geçmiş poliçe dönemlerinde farklı riske maruz kalan birimlerin sayısına (number of exposure units) veya farklı hasar büyüklüğü dağılımlarına (distribution of claim size) müsaade etmez. Yani, Bühlmann modeli bu tür farklılıkları ele alacak yapıda değildir. Bühlmann modeli için en önemli kısıtlamalardan biri $Y_{jt}|\alpha_j$ koşullu varyanslarının benzer olduğu şeklindeki kısıtlamadır. Bu sorunları gidermek için Bühlmann ve Straub (1970)'de Bühlmann modelinin genelleştirilmiş şeklini sunmuşlardır (Klugman ve diğerleri, 1998).

Bühlmann modelindeki varsayımlar altında t. dönem $(t = 1,2, \dots, T)$ ve portföydeki j. sözleşme $(j = 1,2, \dots, J)$ için hasar deneyimleri Eş. 3.1'de verilen eşitlik,

$$Y_{jt} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{jt}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada,

α_j ; ortalaması sıfır, varyansı a olmak üzere bağımsız ve aynı dağılımlı (b.ve a.d.) gözlemlenemeyen risk bileşenleri olarak tanımlanır.

ε_{jt}; ortalaması sıfır ve varyansı w_{jt} ağırlıklarıyla ters orantılı olacak biçimde bağımsız hata değişkendir. Yani $Var\left(\varepsilon_{jt}\right) = \frac{s^2}{w_{jt}}$ ve $E\left(\varepsilon_{jt}\right) = 0$'dir. Burada w_{jt}, bireylerin t. poliçe döneminde j. grubun bilinen bir riske maruz kalma değeridir. Ayrıca w_{jt}, doğal ağırlıklar olarak da tanımlanır. Portföyü tanımlayan yapısal risk parametreleri μ, a ve s^2'dir. α_j ve ε_{jt} bileşenlerinin de bağımsız oldukları varsayılır. Bağımsız ve aynı dağılıma sahip $(k = 1, \dots, w_{jt})$ Y_{jtk} rassal değişkenleri ise w_{jt}'ye göre ortalaması alındığında Y_{jt}'e eşit olacak şekilde tanımlanır. Yani

$$Y_{jt} = \frac{1}{w_{jt}} \sum_{k=1}^{w_{jt}} Y_{jtk} \tag{3.29}$$

şeklinde ifade edilebilir (Dannenburg ve diğerleri, 1996).

Bu bilgiler doğrultusunda Eş. 3.1'de verilen ifade,

$$Y_{jtk} = \mu + \alpha_j + \varepsilon_{jtk} \tag{3.30}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Eş. 3.30'daki α_j değeri Eş. 3.1'deki gibi tanımlanır. Ancak Eş. 3.30'daki ε_{jtk}, ortalaması sıfır, varyansı s^2 olmak üzere b. ve a.d. hata terimi şeklinde tanımlanır. Başka bir ifade ile,

$$\varepsilon_{jt} = \frac{1}{w_{jt}} \sum_{k=1}^{w_{jt}} \varepsilon_{jtk} \tag{3.31}$$

dir. Burada Eş. 3.29 ve Eş. 3.31 ifadeleri kullanılarak Eş. 3.1'in modellendiği bilgisi vurgulanmaktadır. Bühlmann modelindeki varsayımlar altında j grup ($j = 1,2, \ldots, J$) için α_j'nin bilindiği koşulu altında Y_{jt}'nin beklenen değeri,

$$E(Y_{jt} | \alpha_j) = E(\mu + \alpha_j) = \mu + \alpha_j = \mu_j \tag{3.32}$$

biçiminde elde edilir (Searle ve diğerleri, 1992). Bühlmann modelinde olduğu gibi Bühlmann-Straub modelinde de aynı tanımlar kullanılabilir. Eş. 3.1'de Y_{jt} değişkenlerinin süreç varyansı,

$$Var(Y_{jt} | \alpha_j) = Var(\varepsilon_{jt}) = \frac{s^2}{w_{jt}} \tag{3.33}$$

biçiminde ifade edilir. Eş. 3.32 ve Eş. 3.33'ten hipotetik ortalamaların beklenen değeri $\mu = E[E(\mu + \alpha_j)]$, süreç varyansının beklenen değeri $E[Var(\varepsilon_{jt})] = \frac{s^2}{w_{jt}}$ ve hipotetik ortalamaların varyansı ise $a = Var[E(Y_{jt} | \alpha_j)]$ olarak tanımlanır. Sırasıyla Y_{jt}'nin ortalaması, varyansı ve kovaryansı Eş. 3.34 ile Eş. 3.37 arasında ifade edilen eşitliklerde gösterildiği gibi yazılabilir (Dannenburg ve diğerleri, 1996; Ebegil, 2007).

$$E(Y_{jt}) = E[E(\mu + \alpha_j)] = \mu \tag{3.34}$$

$\delta_{ut} = \begin{cases} 1, & t = u \\ 0, & t \neq u \end{cases}$ olmak üzere,

$$Kov(Y_{jt}, Y_{ju}) = \delta_{ut} a \tag{3.35}$$

$$Var(Y_{jt}) = \delta_{ut} \left(a + \delta_{ut} \frac{s^2}{w_{jt}} \right) \tag{3.36}$$

$$Kov(Y_{jt}, Y_{jw}) = Var(Y_{jw}) = a + \frac{s^2}{w_{j\Sigma}} \tag{3.37}$$

Bühlmann-Straub ve Hachemeister kredibilite modellerinde ağırlıklı toplamlar için Eş. 3.38 ve Eş. 3.39'da gösterildiği gibi bazı notasyonlar kullanılmaktadır. İndis üzerinden toplamlar 'Σ' sembolü kullanılarak gösterilmektedir. Bunlar

$$w_{j\Sigma} = \sum_{t=1}^{T} w_{jt} \,, \qquad w_{\Sigma\Sigma} = \sum_{j=1}^{J} w_{j\Sigma} \tag{3.38}$$

ve

$$Y_{jw} = \sum_{t=1}^{T} \frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}} Y_{\mathrm{jt}} \,, \qquad Y_{ww} = \sum_{j=1}^{J} \frac{w_{j\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} Y_{jw} \tag{3.39}$$

dir. Burada $w_{j\Sigma}$ ifadesi, bireylerin bütün poliçe dönemleri için j. grubun riske maruz kalma sayısıdır. $w_{\Sigma\Sigma}$, bütün poliçe dönemleri için toplam riske maruz kalan birim sayısıdır.

Bir sonraki dönemde, ortalama hasarların tahmin edilmesi, geçmiş verilerin doğrusal bir fonksiyonu ile $(\mu + \alpha_j)$ hipotetik ortalama değerinin elde edilmesi ile mümkündür. Bu işlemlerin yapılabilmesi için $g + \sum_{i,t} g_{it} Y_{it}$ şeklinde doğrusal tahmin ediciler kullanılmalıdır. g_{it}'ler kayıp hata kareleri minimize edecek şekilde seçilir. Bu verilerden yararlanarak,

$$Min\ E\left\{\left[\mu + \alpha_j - \left(g + \sum_{i,t} g_{it} Y_{it}\right)\right]^2\right\} \tag{3.40}$$

ifadesi oluşturulur. Burada amaç $g + \sum_{i,t} g_{it} Y_{it}$ biçiminde ifade edilen doğrusal prim değeri ile $E(Y_{jt}|\alpha_j) = \mu + \alpha_j$ arasındaki farkı en küçükleyecek prim değerini verecek $\tilde{g}_{it}$ tahmin değerlerini bulmaktır. Burada

$$\tilde{g} + \sum_{i,t} \tilde{g}_{it} Y_{it} \tag{3.41}$$

ifadesi kredibilite prim değeri olarak ifade edilebilir. Eş. 3.41'i en küçükleyecek değerin bulunması için g_{it}'ye göre türev alınır ve gerekli işlemler yapıldığında

$$\tilde{g} + \sum_{i,t} \tilde{g}_{it} Y_{it} = (1 - z_j)\mu + z_j Y_{jw} \tag{3.42}$$

şeklini alır (Ebegil, 2007).

Eş. 3.42'de Y_{jw}, Eş. 3.39'da gösterildiği gibi hesaplanır. Her bir sözleşme için hesaplanan kredibilite faktörü ise Eş. 3.38 kullanılarak

$$z_j = \frac{w_{j\Sigma}}{w_{j\Sigma} + \frac{s^2}{a}} \tag{3.43}$$

elde edilir. Burada Bühlmann-Straub kredibilite faktörü z_j, $w_{j\Sigma}$'e bağlıdır. Ayrıca Y_{jw}, Y_{jt} rassal değişkenlerin ağırlıklı ortalamasıdır. Bu ağırlıklar w_{jt} ile orantılıdır. Poliçe sahiplerinin oluşturduğu grupla ilgili, Y_{jt}'nin t döneminde poliçe sahiplerinin oluşturduğu j grupta w_{jt} adet riske maruz kalmış grup üyesinin ortalama kaybını temsil ettiği ve $w_{jt}Y_{jt}$'in ise her bir grubun t dönemindeki toplam kaybını ifade ettiği yorumu yapılabilir. Y_{jw}, t dönemlik bir sürede her bir grup için hesaplanan genel ortalama kaybını göstermektedir. Sonuç olarak Bühlmann-Straub modeli $z_j = \frac{w_{j\Sigma}}{w_{j\Sigma} + \frac{s^2}{a}}$ olmak üzere,

$$E\left(Y_{j,t+1}\right) = z_j Y_{jw} + (1 - z_j)\mu, \qquad 0 \leq z \leq 1 \tag{3.44}$$

biçiminde özetlenir (Dannenburg ve diğerleri, 1996; Ebegil, 2007).

4. REGRESYON KREDİBİLİTE MODELİ

Jewell'in hiyerarşik modelinde ifade edilen her bir kategori, niteliksel risk faktörüne göre gruplandırılarak sigorta portföyündeki sözleşmelere uygulanmaktadır. Örneğin, bir ülkede hayat sigortası yaptıran bireyleri incelemek istediğimizde, o ülkenin bölgeleri; merkez, kuzey ve güney olacak şekilde bölünebilir. Ancak, birçok durumda riskler hakkında niceliksel veriler, kasko durumundaki sigortalı aracın ağırlığı ya da hasar büyüklüğü enflasyona yansıyan bir zaman trendi gibi, risk primlerin seviyeleri üzerinde doğrudan bir etkiyle kullanılır. Böylece risk primi, bu ağırlıkların bir fonksiyonu olarak modellenir.

Hachemeister, ABD'de çeşitli eyaletlerde üçüncü şahsın otomobil mesuliyetinde (auto liability) oluşan bedensel yaralanma hasarları için ortalama hasar miktarlarını öngörmek (forecast) istemiştir. Burada bu tür verilerin enflasyondan dolayı zaman trendinden etkilendiği vurgulanmaktadır. Hachemeister, belli dönemlerde gözlemlenmiş ortalama hasar miktarı biçiminde tanımlanan veriye uygun bir regresyon doğrusu elde etmiştir (Hachemeister, 1975). Her bir eyalet için uygun regresyon doğrusunun eğimi ve kesişimi arasında önemli farklılıkların olduğunu vurgulamaktadır. Ayrıca Hachemeister çalışmasında küçük çaplı örneklerde özellikle eğimin tahmininde elde edilen sonuçların güvenilir olmadığını belirtmiştir. Ülke-çapında bütün eyaletlere ait verilerin bir regresyon doğrusuna uyması doğaldır. Benzer şekilde tek bir eyaletin verisinin de bir regresyon doğrusuna uyması da doğaldır. Burada bu iki veri için bir regresyon doğrusu belirlenirken özellikle tek bir eyaletin verisine dayanan durumun bireysel regresyon doğrusu ve bütün eyaletler için ortak deneyime dayalı çizilen ortak regresyon doğrusuna ne kadar ağırlık verileceği gibi bir soru ortaya çıkmıştır. Bu nedenle Hachemeister basit doğrusal regresyona dayalı bir uygulama problemiyle çalışmak zorunda kalmıştır (Hachemeister, 1975; Bühlmann, 1967).

Bu kısımda öncelikle Hachemeister kredibilite modeline temel oluşturmak amacıyla doğrusal regresyon modeli ve AEKK yönteminden bahsedilecektir. Daha sonra Hachemeister kredibilite modeli özetlenecektir.

4.1. Doğrusal Regresyon Modeli

Y_{jt} hasar deneyimleri, j. sözleşmenin t dönemi için stokastik olarak bağımsız bileşenlerin toplamı biçiminde tanımlanan basit doğrusal regresyon modeli,

$$Y_{jt} = \beta_1 + \beta_2 X_{jt} + \varepsilon_{jt} \qquad j=1,2,\ldots J;\ t=1,2,\ldots,T \tag{4.1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu modelde,

Y_{jt}; j. gruptan, t. döneme ilişkin rassal değişkendir.

X_{jt}, j. sözleşmenin t dönemi için açıklayıcı değişken olarak tanımlanır.

β_1 ve β_2, tahmin edilmek istenen bilinmeyen sabit-etki parametreleridir.

ε_{jt}; bütün j ve t değerleri için $E(\varepsilon_{jt}) = 0$ ve $Var\ (\varepsilon_{jt}) = s^2$ olacak şekilde bağımsız aynı dağılıma sahip hata terimidir.

Bilinmeyen β_1 ve β_2 parametrelerinin tahminleri olan $\widehat{\beta_1}$ ve $\widehat{\beta_2}$ yardımıyla ve gözlenen X_{jt} değeriyle elde edilen $\hat{Y}_{jt}$ değerleri, Y_{jt}'lerin tahmin ve beklenen değerleridir. Yani,

$$\hat{Y}_{jt} = E(Y_{jt}) = \widehat{\beta_1} + \widehat{\beta_2} X_{jt} \tag{4.2}$$

dir. $E(Y_{jt})$ ve Y_{jt} arasındaki fark, gözlenen Y_{jt}'nin, beklenen değeri $E(Y_{jt})$'den olan farkıdır. Bu fark,

$$e_{jt} = Y_{jt} - E(Y_{jt})$$

$$e_{jt} = Y_{jt} - \widehat{\beta_1} - \widehat{\beta_2} X_{jt} \tag{4.3}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan

$$Y_{jt} = \widehat{\beta_1} + \widehat{\beta_2} X_{jt} + e_{jt} \tag{4.4}$$

biçiminde yazılabilir (Tiryaki, 2010).

4.1.1. Ağırlıklı en küçük kareler yöntemi (AEKK)

Klasik ağırlıklı regresyon modeli,

$$Y_{jt} = \beta_{1j} + \beta_{2j}X_{jt} + \varepsilon_{jt} \qquad (j = 1,2,\cdots J \ ve \ t = 1,2,\cdots,T) \tag{4.5}$$

biçiminde yazılabilir. Burada ε_{jt} ; ortalaması sıfır ve w_{jt} ağırlıkları olmak üzere varyansı $\frac{s^2}{w_{jt}}$ olan bağımsız hata terimidir. Bühlmann-Straub ve Hachemeister kredibilite modellerinde ε_{jt} hata terimi ortalaması sıfır ve varyansı $\frac{s^2}{w_{jt}}$ şeklinde tanımlanmıştır. Bühlmann-Straub modeline uygun olması ve Hachemeister modelini daha iyi tanıtmak için AEKK yönteminde hata teriminin ortalamasını sıfır ve varyansı $\frac{s^2}{w_{jt}}$ olduğu varsayılır. Bu bölüm β_{1j} ve β_{2j} katsayılarının rassal olmadığı varsayımı altında incelenmiştir. Ayrıca burada bu katsayıların ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicisi elde edilmiştir. Bu tahmin ediciler, artık terimin karesinin ağırlıklandırılmış toplamının minimize edilmesi ile elde edilir. Buradan,

$$Y_{jt} = \hat{\beta}_{1j} + \hat{\beta}_{2j}X_{jt} + e_{jt} \qquad \Rightarrow \qquad e_{jt} = Y_{jt} - \hat{\beta}_{1j} + \hat{\beta}_{2j}X_{jt} \tag{4.6}$$

biçiminde yazılabilir. Bu durumda,

$$Q = \sum_t w_{jt}e_{jt}^2 = \sum_t w_{jt}\left(Y_{jt} - \hat{\beta}_{1j} - \hat{\beta}_{2j}X_{jt}\right)^2 \tag{4.7}$$

şeklinde gösterebiliriz. Hesaplamalarda ve ispatlarda kolaylık açısından yeni değişkenler tanımlanmıştır. Bağımsız ve aynı dağılıma sahip $(k = 1,\ldots,w_{jt})$ Y_{jtk} rassal değişkenleri ise w_{jt}'ye göre ortalaması alındığında Y_{jt}'e eşit olacak şekilde tanımlanır. Yani Eş. 3.29'da verilen eşitlik,

$$Y_{jt} = \frac{1}{w_{jt}}\sum_{k=1}^{w_{jt}} Y_{jtk}$$

şeklinde ifade edilebilir (Dannenburg ve diğerleri, 1996). Burada Y_{jtk} rassal değişkenlerin bütün değerler için varyans s^2'ye eşit olur. Y_{jt}'nin aksine Y_{jtk} gözlemleri birbirleriyle değişebilirdir, yani bu gözlemlerin hepsi aynı duyarlıktadır. Bu yüzden Y_{jt} kullanarak artık kareler toplamını minimize edecek şekilde β_{1j} ve β_{2j} parametrelerinin tahmin edicileri elde edilir. Eş. 4.7'da Eş. 3.29 değeri yerine yazılıp gerekli işlemler yapıldığında,

$$Q = \sum_t w_{jt}\left(Y_{jt} - \hat{\beta}_{1j} - \hat{\beta}_{2j}X_{jt}\right)^2$$

$$= \sum_t w_{jt}\left(\sum_{k=1}^{w_{jt}} \frac{Y_{jtk}}{w_{jt}} - \hat{\beta}_{1j} - \hat{\beta}_{2j}X_{jt}\right)^2$$

$$= \sum_t w_{jt}\left(\sum_{k=1}^{w_{jt}} \frac{Y_{jtk}}{w_{jt}} - \hat{\beta}_{1j} - \hat{\beta}_{2j}X_{jt}\right)^2$$

$$= \sum_t w_{jt}\left(\frac{1}{w_{jt}}\sum_{k=1}^{w_{jt}} Y_{jtk} - \left(\hat{\beta}_{1j} + \hat{\beta}_{2j}X_{jt}\right)\right)^2$$

$$= \sum_t w_{jt}\left(\frac{1}{{w_{jt}}^2}\left(\sum_{k=1}^{w_{jt}} Y_{jtk}\right)^2 - 2\frac{1}{w_{jt}}\left(\sum_{k=1}^{w_{jt}} Y_{jtk}\right)\left(\hat{\beta}_{1j} + \hat{\beta}_{2j}X_{jt}\right) + \left(\hat{\beta}_{1j} + \hat{\beta}_{2j}X_{jt}\right)^2\right)$$

$$= \sum_t \left(\frac{1}{w_{jt}}\left(\sum_{k=1}^{w_{jt}} Y_{jtk}\right)^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{w_{jt}} Y_{jtk}\right)\left(\hat{\beta}_{1j} + \hat{\beta}_{2j}X_{jt}\right) + w_{jt}\left(\hat{\beta}_{1j} + \hat{\beta}_{2j}X_{jt}\right)^2\right)$$

$$= \sum_t \frac{1}{w_{jt}}\left(\left(\sum_{k=1}^{w_{jt}} Y_{jtk}\right)^2 - 2w_{jt}\left(\sum_{k=1}^{w_{jt}} Y_{jtk}\right)\left(\hat{\beta}_{1j} + \hat{\beta}_{2j}X_{jt}\right) + {w_{jt}}^2\left(\hat{\beta}_{1j} + \hat{\beta}_{2j}X_{jt}\right)^2\right)$$

$$= \sum_t \frac{1}{w_{jt}}\left[\sum_{k=1}^{w_{jt}} Y_{jtk} - w_{jt}\left(\hat{\beta}_{1j} + \hat{\beta}_{2j}X_{jt}\right)\right]^2$$

sonucuna ulaşılır. Buradan,

$$Q = Q(g,h) = \sum_t^T \sum_k^{w_{jt}}\left(Y_{jtk} - g - hX_{jt}\right)^2 \tag{4.8}$$

biçiminde düzenlenir (Dannenburg ve diğerleri, 1996). β_{1j} ve β_{2j}'nin en küçük kareler tahmin edicisini Eş. 4.8'deki ifadeyi g ve h'a göre minimize ederek bulunur. Eş. 4.8'deki ifade,

$$Q = \sum_t^T \sum_k^{w_{jt}}\left(Y_{jtk} - Y_{jt} + Y_{jt} - g - hX_{jt}\right)^2$$

$$= \sum_{t,k}\left(Y_{jtk} - Y_{jt}\right)^2 + \sum_t w_{jt}\left(Y_{jt} - g - hX_{jt}\right)^2$$

$$+2\sum_t\left(Y_{jt} - g - hX_{jt}\right)\sum_{k=1}^{w_{jt}}\left(Y_{jtk} - Y_{jt}\right) \tag{4.9}$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Eş. 4.9'da $\sum_{k=1}^{w_{jt}}\left(Y_{jtk}-Y_{jt}\right)=0$'dır. Çünkü

$$\sum_{k=1}^{w_{jt}}\left(Y_{jtk}-Y_{jt}\right)=\sum_{k=1}^{w_{jt}}Y_{jtk}-\sum_{k=1}^{w_{jt}}Y_{jt}$$

$$=\sum_{k=1}^{w_{jt}}Y_{jtk}-w_{jt}Y_{jt}$$

şeklindedir. Eş. 3.29'dan

$$=\frac{\sum_{k=1}^{w_{jt}}Y_{jtk}}{w_{jt}}-\frac{w_{jt}Y_{jt}}{w_{jt}}=Y_{jt}-Y_{jt}=0$$

olacağı açıktır. Eş. 4.9'daki ikinci terim Y_{jt} için artık karelerin ağırlıklandırılmış toplamıdır. İlk terim ise g ve h'a bağlı değildir. Burada β_{1j} ve β_{2j}'nin ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicileri ikinci terimi minimize ederek elde edilir. Sadece w_{jt} tekrarların Y_{jt} ortalamaları bilindiğinde, ağırlıklı en küçük kareler (AEKK) tahmin edicilerine indirgenir. Bu yüzden EKK tahmin edicileri, Y_{jtk} bireysel gözlemlerine dayanır.

Teorem 4.1.1 (Bireysel Ağırlıklı En Küçük Kareler Tahmin Edicileri)

Eş. 4.5'deki modelde β_{1j} ve β_{2j}'nin ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicileri,

$$Y_{jw}=\sum_{t=1}^{T_j}\frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}}Y_{jt} \tag{4.10}$$

ve

$$X_{jw}=\sum_{t=1}^{T_j}\frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}}X_{jt} \tag{4.11}$$

olmak üzere

$$\beta_{1j}^{w}=Y_{jw}-\beta_{2j}^{w}X_{jw}=\sum_{t=1}^{T_j}\frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}}Y_{jt}-\beta_{2j}^{w}\sum_{t=1}^{T_j}\frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}}X_{jt} \tag{4.12}$$

ve

$$\beta_{2j}^{w}=\frac{\sum_{t=1}^{T_j}w_{jt}\left(Y_{jt}-Y_{jw}\right)\left(X_{jt}-X_{jw}\right)}{\sum_{t=1}^{T_j}w_{jt}\left(X_{jt}-X_{jw}\right)^{2}} \tag{4.13}$$

biçimindedir (Dannenburg ve diğerleri, 1996). Bu teoremin ispatı Ek 1'de verilmiştir.

Teorem 4.1.2 (Ortak Ağırlıklı En Küçük Kareler Tahmin Edicileri)

Eş. 4.1'deki modelde β_1 ve β_2'nin ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicileri,

$$Y_{ww} = \sum \frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}} Y_{jt} \tag{4.14}$$

ve

$$X_{ww} = \sum \frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}} X_{jt} \tag{4.15}$$

olmak üzere

$$\beta_1^w = Y_{ww} - \beta_2^w X_{ww} \tag{4.16}$$

ve

$$\beta_2^w = \frac{\sum_{t,j} w_{jt}(Y_{jt}-Y_{ww})(X_{jt}-X_{ww})}{\sum_{t,j} w_{jt}(X_{jt}-X_{ww})^2} \tag{4.17}$$

biçimindedir (Dannenburg ve diğerleri, 1996). Bu teoremin ispatı Ek 2'de verilmiştir.

4.2. Hachemeister Kredibilite Modeli

Çapraz sınıflandırma modeli ya da Jewell'in hiyerarşik modelini uygulamak için, bir sigorta portföyündeki sözleşmeler, tanımlanan kategorilerin her biri niteliksel risk faktörüne göre gruplanmış olmalıdır (Dannenburg ve diğerleri, 1996). Yaşam sigortasında, bir ülkenin bölgeleri merkez, kuzey ve güneyden oluşabilir. Ancak, birçok durumda riskler hakkında niceliksel verilerin, örneğin kasko sigortasında sigortalı aracın ağırlığı ya da hasar büyüklüğü, enflasyona yansıyan bir zaman trendi gibi, risk primlerinin tutarları üzerinde doğrudan bir etkisi mevcuttur. Böylece risk primi, bu ağırlıkların bazı fonksiyonları olarak modellenir. Bu sebepten poliçeler ağırlık sınıflarına ayrılmıştır.

Bu bölümde niceliksel risk faktörlerini içeren bir kredibilite modelinin temel halini yani regresyon kredibilite modeli tanıtılacaktır. Bu model, ABD'nin eyaletleri için hasar şiddetlerini tahmin etmek amacıyla Hachemeister tarafından geliştirilerek Aktüerya literatürüne sunulmuştur (Hachemeister, 1975). Bu amaç doğrultusunda, klasik doğrusal regresyon modeli olan Eş. 5.18'teki β_{1j} ve β_{2j} katsayıları tahmin edilerek enflasyon trendlerine yaklaşılabilir (Dannenburg ve diğerleri, 1996).

$$Y_{jt} = \beta_{1j} + \beta_{2j}t + \varepsilon_{jt} \qquad j = 1,2,\dots,J; t = 1,2,\dots,T \tag{4.18}$$

Burada Y_{jt} rassal değişkenlerin şiddetleri (hasar şiddetleri) olmak üzere; ε_{jt} ise ortalamadan rassal sapmalar olarak tanımlanır, bu yüzden $E[\varepsilon_{jt}] = 0$'dır.

Ortalama hasar şiddetleri tüm durum ve zamanlar için aynı ise Eş. 4.18'te bulunan bireysel modeldeki bütün j'ler için $\beta_{1j} = \beta_1$ ve $\beta_{2j} = \beta_2$ olur, buradan Eş. 4.19'daki gibi ortak (kolektif) model elde edilir.

$$Y_{jt} = \beta_1 + \beta_2 t + \varepsilon_{jt} \tag{4.19}$$

Hachemeister, Eş. 4.18'deki regresyon katsayılarını kullanarak her bir eyalet için ortalama hasar şiddetlerindeki değişime ve Eş. 4.19'daki gibi tüm eyaletleri baz alarak hesaplanan ortak hasar şiddetindeki değişime uygun regresyon modeli üzerinde çalışmıştır (Dannenburg ve diğerleri, 1996). Burada Eş. 4.19'deki β_1 ve β_2 katsayıları ile Eş. 4.18'teki β_{1j} ve β_{2j} katsayıları arasında dönüşüm sonucu oluşabilecek sapmalar, ortalaması sıfır ve varyansı ise σ^2 sabit varyanslı olacak şekilde tanımlanır. Başka bir ifade ile ε_j^I ve ε_j^S ifadeleri, ortalaması sıfır ve σ^2 sabit varyanslı olmak üzere $\Gamma_j = \beta_1 + \varepsilon_j^I$ ve $\Delta_j = \beta_2 + \varepsilon_j^S$ biçiminde notasyon değişimi yapılabilir (Dannenburg ve diğerleri, 1996). Eş. 4.18'teki t'nin yerine modeli daha genel ifade edecek biçimde bağımsız değişken olan X_{jt} kullanılarak doğrusal regresyon modeline genişletilebilir. Buradaki X_{jt}, $X_{jt} = t$ olduğunda bir doğrusal zaman trendini, $X_{jt} = t^2$ olduğunda ise bir karesel zaman trendini temsil etmektedir. Bunun paralelinde,

$$Y_{jt} = \Gamma_j + \Delta_j X_{jt} + \varepsilon_{jt} \qquad j = 1,\cdots,J;\ t = 1,\cdots,T \tag{4.20}$$

modeli elde edilir. Burada Γ_j, ortalaması β_1 olan rassal bir kesişim ve Δ_j, ortalaması β_2 olan rassal bir eğimdir. β_1 ve β_2 Hachemeister modelinde bilinen parametreler olarak varsayılır. Hachemeister modelinde (Γ_j, Δ_j) vektörünün kredibilite tahmin edicisi, Eş. 4.18'teki β_{1j} ve β_{2j}'nin bireysel tahmin edicileri ve Eş. 4.19'teki (β_1, β_2) ise ortak tahmin edicileri biçiminde tanımlanır. Eş. 4.20'deki modelin genel hali

$$Y_{jt} = \sum_{n=1}^{N} \left(\beta_N + \epsilon_j^N\right) X_{njt} + \varepsilon_{jt} \tag{4.21}$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada t gözlem dönemindeki j. sözleşme için N tane nicel risk faktörleri, $X_{1jt}, \cdots, X_{Njt}$ ise şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde N tane bağımsız değişkeni tanımlayacak katsayılar $\beta_1 + \epsilon_j^1, \cdots, \beta_N + \epsilon_j^N$ biçiminde ifade edilebilir. Burada Eş. 4.21'deki gibi N tane bağımsız değişkenli modelle çalışmak yerine Hachemeister modelini daha iyi anlayabilmek için çalışmanın devam eden kısımlarında 2 bağımsız değişkenli model kullanılacaktır.

Klasik regresyon modelinde kesişim ve eğim değerlerinin bilinmemesine rağmen sabit varsayılmaktadır. Burada amaç, t gözlem dönemindeki her bir grup için ifade edilen Y_{jt} bağımlı değişkenlerini açıklayabilecek uygun kesişimin ve eğimin değerlerini elde etmektir. Bunun için kesişim ve eğimin değerleri rassal olacak şekilde oluşturulur.

Eş. 4.20'deki modelde rassal değişkenler (Γ_j, Δ_j) farklı j değerleri için bağımsız varsayılır. Sabit j değerleri için ε_{jt}, diğer değişkenlerden bağımsız olup, ortalaması sıfır ve varyansı $\frac{s^2}{w_{jt}}$'dir. Eş. 4.20'deki modelin parametreleri;

$$\beta_1 = E[\Gamma_j] \qquad \beta_2 = E[\Delta_j] \qquad s^2 = w_{jt}Var[\varepsilon_{jt}]$$

$$a_{11} = Var[\Gamma_j] \qquad a_{22} = Var[\Delta_j] \qquad a_{12} = Kov[\Gamma_j, \Delta_j] \tag{4.22}$$

şeklinde tanımlanır. Eş. 4.22'de verilen ifadelerden Eş. 4.20'daki modelin eğimin ve kesişimin kredibilite tahmin edicisini bulmak oldukça karışıktır. Çünkü gerçekte bileşenlerin hepsi bağımsız değildir. Burada $a_{12} = 0$ alınsa bile, bağımsız değişkenlere α sabiti $(\alpha = \frac{a_{12}}{a_{22}})$ eklenmedikçe gözlemlerin aynı grubu için korelasyon sıfıra eşit olmayabilir. Eş. 4.20'ya α sabiti eklendikten sonra model,

$$Y_{jt} = (\Gamma_j - \alpha\Delta_j) + \Delta_j(X_{jt} + \alpha) + \varepsilon_{jt} \tag{4.23}$$

biçiminde ifade edilebilir (Dannenburg ve diğerleri, 1996). Eş. 4.18'deki t'nin yerine modeli daha genel ifade edecek biçimde bağımsız değişken olan X_{jt} kullanılmıştır.

Hachemeister kredibilite modeli için eğimin ve kesişimin kredibilite tahmin edicilerini Eş. 4.22'de verilen ifadelerden bulmak zordur. Bu problemden dolayı kesişim ve eğim korelasyonu sıfıra eşit olacak şekilde standartlaştırılmış bir model tanımlanır. Burada Eş 4.20'de $\alpha = \frac{a_{12}}{a_{22}}$ değeri kullanılarak bir doğrusal dönüşüm uygulanmaktadır. Bu dönüşüm sonucunda kesişim ve eğimin korelasyonunun sıfıra eşit olacağı aşikardır.

Teorem 4.2.1. (Standartlaştırılmış model için kredibilite tahmin edicileri):

D_{jt} şeklinde tanımlanan gözlemlerin,

$$D_{jt} = \Lambda_j + \Psi_j q_{jt} + \varepsilon_{jt} \tag{4.24}$$

şeklinde bağımsız bileşenlere ayrıldığı varsayılsın. Eş. 4.24'deki modelin birinci ve ikinci momentleri

$$E[\Lambda_j] = 0; \qquad E[\Psi_j] = 0; \qquad s^2 = w_{jt} Var[\varepsilon_{jt}]$$

$$b_1 = Var[\Lambda_j]; \qquad b_2 = Var[\Psi_j]\,; \qquad Kov[\Lambda_j, \Psi_j] = 0 \tag{4.25}$$

biçiminde yazılabilir. Eş. 4.20'deki genel modelin tahmin edicilerini elde etmek için doğrusal dönüşüm uygulanmaktadır. Bunun için Eş. 4.26 ile Eş. 4.31 arasında verilen ifadelerdeki dönüşümler kullanılarak Eş. 4.24'deki model ve Eş. 4.25'deki momentler elde edilir. Bu doğrusal dönüşümler

$$b_1 = a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}} \tag{4.26}$$

$$b_2 = a_{22} \tag{4.27}$$

$$D_{jt} = Y_{jt} - \beta_1 - \beta_2 X_{jt} \tag{4.28}$$

$$X_{jt} = q_{jt} - \frac{a_{12}}{a_{22}} \qquad \Rightarrow \qquad q_{jt} = X_{jt} + \frac{a_{12}}{a_{22}} \tag{4.29}$$

$$\Delta_j = \Psi_j + \beta_2 \qquad \Rightarrow \qquad \Psi_j = \Delta_j - \beta_2 \tag{4.30}$$

$$\Gamma_j = \Lambda_j + \frac{a_{12}}{a_{22}}\Psi_j + \beta_1 \qquad \Rightarrow \qquad \Lambda_j = \Gamma_j - \frac{a_{12}}{a_{22}}(\Delta_j - d) - \beta_1 \tag{4.31}$$

şeklinde ifade edilir. Eş. 4.26 - Eş. 4.31 eşitlikler, Eş. 4.24'te yerine yazıldığında ve gerekli işlemler yapıldığında,

$$Y_{jt} - \beta_1 - \beta_2 X_{jt} = \underbrace{\Gamma_j - \underbrace{\frac{a_{12}}{a_{22}}}_{\alpha}(\Delta_j - \beta_2) - \beta_1}_{\Lambda_j} + \underbrace{(\Delta_j - \beta_2)}_{\Psi_j}\underbrace{\left(X_{jt} + \frac{a_{12}}{a_{22}}\right)}_{q_{jt}} + \varepsilon_{jt}$$

$$Y_{jt} = (\Gamma_j - \alpha\Delta_j) + \beta_2 X_{jt} + \alpha\beta_2 + (\Delta_j - \beta_2)(X_{jt} + \alpha) + \varepsilon_{jt}$$

$$Y_{jt} = (\Gamma_j - \alpha\Delta_j) + \beta_2(X_{jt} + \alpha) + (\Delta_j - \beta_2)(X_{jt} + \alpha) + \varepsilon_{jt}$$

$$Y_{jt} = (\Gamma_j - \alpha\Delta_j) + \Delta_j(X_{jt} + \alpha) + \varepsilon_{\mathrm{jt}}$$

sonucu elde edilir. Buradan görüldüğü gibi Eş. 4.23'e ulaşılır. Eş. 4.22'deki mevcut parametreleri verilen Eş. 4.20'deki genel modelin kovaryansı,

$$a_{12} = Kov[\Gamma_j, \Delta_j] = E[(\Gamma_j - c)(\Delta_j - d)]$$

biçiminde yazılabilir. Doğrusal dönüşümler kullanılarak Eş. 4.24'de verilen standartlaştırılmış modelin kovaryansı incelendiğinde sıfıra eşit olduğu görülür. Diğer bir ifade ile,

$$Kov[\Lambda_\mathrm{j}, \Psi_\mathrm{j}] = E\left[\left(\Lambda_\mathrm{j} - \mathrm{E}(\Lambda_\mathrm{j})\right)\left(\Psi_\mathrm{j} - \mathrm{E}(\Psi_\mathrm{j})\right)\right]$$

$$= E[\Lambda_\mathrm{j}\Psi_\mathrm{j}] \tag{4.32}$$

elde edilir. Burada Eş. 4.30 ve Eş. 4.31'deki Λ_j ve Ψ_j değerlerini Eş. 4.32'de yerine yazıldığında

$$= E[\Gamma_j - \beta_1 - \alpha(\Delta_j - \beta_2)(\Delta_j - \beta_2)]$$

$$= E[(\Gamma_j - \beta_1)(\Delta_j - \beta_2)] - \alpha E[(\Delta_j - \beta_2)(\Delta_j - \beta_2)]$$

$$= a_{12} - \alpha Var(\Delta_j)$$

$$= a_{12} - \left(\frac{a_{12}}{a_{22}}\right) a_{22} = 0$$

sonucuna ulaşılır. Buradan Eş. 4.24'de verilen standartlaştırılmış modelin kovaryansının sıfıra eşit olduğu ispatlanmıştır.

Eş. 4.24'deki standartlaştırılmış model için kredibilite tahmin edicileri,

$$\Lambda_j^* = z_{j1}(D_{jw} - \Psi_j^* q_{jw}) \; ; \qquad \Psi_j^* = z_{j2} \frac{\sum_t w_{jt} q_{jt}(D_{jt} - \Lambda_j^*)}{\sum_t w_{jt} q_{jt}^2} \tag{4.33}$$

şeklinde ifade edilir. Eş. 4.33'de ifade edilen kredibilite faktörleri,

$$z_{j1} = \frac{b_1}{b_1 + \frac{s^2}{w_{j\Sigma}}} = \frac{w_{j\Sigma}}{w_{j\Sigma} + \frac{s^2}{b_1}} \qquad \text{ve} \qquad z_{j2} = \frac{b_2}{b_2 + \frac{s^2}{\sum_t w_{jt} q_{jt}^2}} \tag{4.34}$$

biçimindedir (Dannenburg ve diğerleri, 1996). Burada Eş. 4.33'deki ifadelere Ek 3'teki gibi gerekli işlemler yapılarak standartlaştırılmış model için kredibilite tahmin edicileri,

$$\Lambda_j^* = \frac{z_{j2} z_{j1} q_{jw} (\sum_t w_{jt} q_{jt} D_{jt}) - (\sum_t w_{jt} q_{jt}^2) z_{j1} D_{jw}}{(q_{jw}\, z_{j1}) z_{j2} (\sum_t w_{jt} q_{jt}) - \left(\sum_t w_{jt} q_{jt}^2\right)} \tag{4.35}$$

ve

$$\Psi_j^* = \frac{z_{j2} \sum_t w_{jt} q_{jt} D_{jt} - (\sum_t w_{jt} q_{jt}) z_{j1} z_{j2} D_{jw}}{\left(\sum_t w_{jt} q_{jt}^2\right) - (z_{j2} \sum_t w_{jt} q_{jt}) z_{j1} q_{jw}} \tag{4.36}$$

şeklinde de yazılabilir.

İspat:

Eş. 4.24'de $\Psi_j = \psi_j$ koşulu altında $D_{jt} - \psi_j q_{jt} = \Lambda_j + \epsilon_{jt}$ rassal değişkenleri ortalaması sıfır, varyansları; $Var[\Lambda_j] = b_1$ ve $Var[\epsilon_{jt}] = s^2/w_{jt}$ olacak şekilde Bühlmann-Straub modeli biçiminde yazılabilir. Çünkü $\Lambda_j, \Psi_j,$ ve ϵ_{jt} bileşenlerinin bağımsız olduğu varsayılır. Buradan da Λ_j'nin koşullu kredibilite tahmin edicisi

$$\Lambda_j^{*/\psi_j} = z_{j1}\left(D_{jw} - \psi_j\, q_{jt}\right) + \left(1 - z_{j1}\right)0 \tag{4.37}$$

biçiminde yazılır. Eş. 4.37'deki z_{j1} ifadesi Eş. 4.33'deki gibi

$$\Lambda_j^* = z_{j1}\left(D_{jw} - \Psi_j^* q_{jw}\right) \tag{4.38}$$

elde edilir. Burada Ψ_j^* cinsinden Λ_j'nin kredibilite tahmin edicisi ifade edilmiştir. Benzer şekilde $\Lambda_j = \lambda_j$ (j=1,2,...,J) koşulu altında $(D_{jt} - \lambda_j)/q_{jt} = \Psi_j + \epsilon_{jt}/q_{jt}$ rassal değişkenleri ortalaması sıfır, varyansları b_2 ve $s^2/(w_{jt} q_{jt}^2)$ olacak şekilde Bühlmann-Straub modeli biçiminde yazılır. Burada $v_{jt} = w_{jt} q_{jt}^2$'yi ağırlıklar olarak tanımlanır. Bühlmann-Straub modeli biçiminde yeniden düzenlenen eşitlikte $q_{jt} = 0$ olsa bile q_{jt}'ye bölmek bir problem oluşturmamaktadır. Çünkü her durumda ilgili gözlemlerin ağırlığı sıfıra eşit olur (Dannenburg ve diğerleri, 1996). $\Lambda_j = \lambda_j$ verildiğinde Ψ_j'nin koşullu kredibilite tahmin edicisi

$$\Psi_j^{*/\lambda_j} = z_{j2} \sum_t \frac{v_{jt}}{v_{j\Sigma}} \frac{D_{jt} - \lambda_j}{q_{jt}} + \left(1 - z_{j2}\right)0 \tag{4.39}$$

biçiminde yazılır.

Eş. 4.39'daki z_{j2} ifadesi Eş. 4.29'daki gibi

$$\Psi_j^* = z_{j2} \frac{\sum_t w_{jt} q_{jt} (D_{jt} - \Lambda_j^*)}{\sum_t w_{jt} q_{jt}^2} \tag{4.40}$$

elde edilir. Elde edilen kredibilite sonuçlarını değiştirmeksizin Eş. 4.24'deki bileşenlerin sıfır kovaryansa sahip olacak şekilde bağımsız değişkenlerin genişletilebileceği varsayılır (Dannenburg ve diğerleri, 1996).

Parametrelerin tahmin edicileri: Hachemeister kredibilite modelini işlevsel yapabilmek için, Eş. 4.24'deki parametrelerini tahmin etmek gerekir. Bunun için yansız tahmin ediciler kullanılır. Optimal tahmin ediciler bilinmeyen yapısal parametreleri içerdiğinden dolayı tercih edilmemektedir. Burada β_1 ve β_2'nin kredibilite tahmin edicilerini elde etmek için β_1 ve β_2 parametrelerin bireysel AEKK tahmin edicilerinin ağırlıklı ortalamaları kullanılır. Burada $g_{1\Sigma} = g_{2\Sigma} = 1$ olacak şekilde g_{1j} ve g_{2j} katsayıları keyfi olarak seçilmektedir. $p_j = \sum_{t=1}^{T_j} w_{jt} \left(X_{jt} - X_{jw}\right)^2$ olmak üzere

$$g_{1j} = \frac{w_{j\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}}; \qquad g_{2j} = \frac{p_j}{p_\Sigma} \tag{4.41}$$

biçimde tanımlanabilir. $h_{1j} = g_{1j}(1 - g_{1j})$ ve $h_{2j} = g_{2j}(1 - g_{2j})$ olmak üzere parametrelerin yansız tahmin edicileri

$$\widehat{\beta_1} = \sum_{j=1}^{J} g_{1j} \beta_{1j}^w \tag{4.42}$$

$$\widehat{\beta_2} = \sum_{j=1}^{J} g_{2j} \beta_{2j}^w \tag{4.43}$$

$$\widehat{s^2} = \frac{1}{J} \sum_j \frac{1}{T_j - 2} \sum_t w_{jt} \left(Y_{jt} - \beta_{1j}^w - \beta_{2j}^w X_{jt}\right)^2, \qquad T_j > 2 \tag{4.44}$$

$$\widehat{a_{11}} = \frac{1}{h_{1\Sigma}} \left[\sum_j g_{1j} \left(\beta_{1j}^w - \widehat{\beta_1}\right)^2 - \widehat{s^2} \sum_j \frac{h_{1j}}{p_j} \sum_t \frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}} X_{jt}^2\right] \tag{4.45}$$

$$\widehat{a_{12}} = \frac{1}{h_{1\Sigma}} \left[\sum_j g_{1j} \left(\beta_{1j}^w - \widehat{\beta_1}\right)\left(\beta_{2j}^w - \widehat{\beta_2}\right) - \widehat{s^2} \sum_j \frac{h_{1j}}{p_j} X_{jw}\right] \tag{4.46}$$

$$\widehat{a_{22}} = \frac{1}{h_{2\Sigma}} \left[\sum_j g_{2j} \left(\beta_{2j}^w - \widehat{\beta_2}\right)^2 - \widehat{s^2} \sum_j \frac{h_{2j}}{p_j}\right] \tag{4.47}$$

biçiminde yazılır (Dannenburg ve diğerleri, 1996).

5. UYGULAMA

Bu bölümde, Hachemesiter kredibilite modellemesi gerçek veriler kullanılarak gösterilecektir. Karayolları trafik zorunlu mali sorumluluk sigorta istatistiklerinin araç türüne göre dağılımındaki toplam ödenen hasar deneyimi (hasar tutarı ile hasar sayısı ve alınan prim ile poliçe adedi) esas alınmıştır. Sigorta sektöründe faaliyet gösteren firmaların bir sonraki sigorta döneminde ortaya çıkabilecek hasarları karşılamaya yetecek kadar mali güce sahip olmaları gerektiği açıktır. Bunun için, firmaların bir sonraki sigorta döneminde oluşabilecek hasar talepleri karşısında, ödenecek hasar tutarını karşılayabilmek amaçlı öngörülen hasar tutarını hesaplanması gerekir. Sigorta sektöründeki bu probleme cevap veren modellerden biri de Hachemeister kredibilite modelidir. Buradan hareketle, Türkiye Sigorta Birliği resmi sitesinde yayınlanan trafik verilerinden yararlanılmıştır. Bu veriler kullanılarak Hachemeister kredibilite modeli yardımıyla hasar tutarı modellemesi ve alınacak prim tutarı modellemesi yapılmıştır. Verilerde araç türüne göre 5 grup ele alınmıştır. Gruplar,

- Otomobil
- Taksi
- Kamyonet
- Kamyon
- Otobüs

biçiminde tanımlanmıştır. Dönemler üçer aylık periyotlar şeklinde düzenlenmiştir. 2011 yılının son çeyreğinden (Ekim, Kasım, Aralık) 2014 yılına (2014 yılının 4. Çeyreği (Ekim, Kasım, Aralık) hariç) kadar olan hasar geçmişi sırasıyla Çizelge 5.1. ve Çizelge 5.15'te verilmiştir (http://www.tsb.org.tr/resmi-istatistikler.aspx?pageID=909). Bu hesaplamalar için Matlab programı kullanılmıştır.

5.1. Hachemeister Kredibilite Modeli ile Hasar Tutarının Modellenmesi

Burada Hachemeister modeli kullanarak kredibilite hasar tutarı modellemesi yapılacaktır. Bunun için hasar sayıları ağırlık olarak, bağımlı değişken ise hasar tutarı olarak kullanılmıştır. Çizelge 5.1.'deki veriler maddi, bedeni ve tedavi amaçlı ödenen toplam hasar tutarlarını ve hasar sayılarını içermektedir.

Çizelge 5.1. Araç türüne göre toplam hasar tutarı (TL) ve hasar sayısı

Dönem/ Periyot (t)		Otomobil		Taksi		Kamyon		Kamyonet		Otobüs	
		Hasar Tutarı (Y_{1t})	Hasar Sayısı (w_{1t})	Hasar Tutarı (Y_{2t})	Hasar Sayısı (w_{2t})	Hasar Tutarı (Y_{3t})	Hasar Sayısı (w_{3t})	Hasar Tutarı (Y_{4t})	Hasar Sayısı (w_{5t})	Hasar Tutarı (Y_{5t})	Hasar Sayısı (w_{5t})
1	2011-4	255 788 709	160 642	9 099 902	6 609	51 083 921	25 368	126 812 327	82 511	24 897 039	13 206
2	2012-1	283 385 326	173 407	10 610 809	6 777	56 732 707	26 151	138 086 175	88 576	27 544 379	14 942
3	2012-2	287 118 168	153 372	9 916 127	5 691	54 131 793	23 511	134 117 965	79 085	31 012 861	13 067
4	2012-3	259 122 981	128 624	7 980 940	4 411	47 689 101	19 633	118 690 197	63 494	22 369 061	8 938
5	2012-4	353 162 341	180 501	11 607 630	6 216	55 740 261	23 626	159 326 742	88 453	29 434 963	13 094
6	2013-1	314 935 635	175 574	10 184 071	5 640	53 636 386	23 502	144 857 888	83 932	25 933 363	12 726
7	2013-2	302 673 834	131 163	9 401 921	4 395	49 498 023	15 867	138 574 228	61 811	24 190 674	7 873
8	2013-3	298 118 852	111 143	9 163 414	4 426	53 945 423	14 009	141 671 134	57 231	27 176 302	6 780
9	2013-4	384 447 027	176 241	11 364 169	5 370	60 818 346	23 743	162 207 704	78 121	29 828 457	12 537
10	2014-1	408 687 981	191 030	11 770 030	5 444	68 448 413	20 616	181 449 848	87 864	38 202 892	12 671
11	2014-2	410 730 982	164 412	12 252 205	4 594	65 136 328	18 931	177 824 887	76 378	36 728 691	11 138
12	2014-3	444 943 869	164 104	12 488 282	4 728	65 378 133	17 805	195 607 532	74 719	34 881 558	9 735

Ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicisini hesaplamak için öncelikle Eş. 4.10 ve Eş. 4.11'de verilen eşitlikler hesaplanır. Buradan,

$Y_{1w} = \sum_{t=1}^{12} \frac{w_{1t}}{w_{1\Sigma}} Y_{1t}$

$$= \frac{1}{1910213}[255\ 788\ 709 * 160\ 642 + \cdots + 444\ 943\ 869 * 164\ 104] = 338\ 100\ 511{,}3$$

$Y_{2w} = \sum_{t=1}^{12} \frac{w_{2t}}{w_{2\Sigma}} Y_{2t}$

$$= \frac{1}{64301}[9\ 099\ 902 * 6\ 609 + \cdots + 12\ 488\ 282 * 4\ 728] = 10\ 506\ 680{,}61$$

$Y_{3w} = \sum_{t=1}^{12} \frac{w_{3t}}{w_{3\Sigma}} Y_{3t}$

$$= \frac{1}{252762}[51\ 083\ 921 * 25\ 368 + \cdots + 65\ 378\ 133 * 17\ 805] = 56\ 809\ 848{,}4$$

$Y_{4w} = \sum_{t=1}^{12} \frac{w_{4t}}{w_{4\Sigma}} Y_{4t}$

$$= \frac{1}{922175}[126\ 812\ 327 * 82\ 511 + \cdots + 195\ 607\ 532 * 74\ 719] = 152\ 437\ 602{,}7$$

$Y_{5w} = \sum_{t=1}^{12} \frac{w_{5t}}{w_{5\Sigma}} Y_{5t}$

$$= \frac{1}{136707}[24\ 897\ 039 * 13\ 206 + \cdots + 34\ 881\ 558 * 9\ 735] = 29\ 569\ 666{,}18$$

şeklinde hesaplanır. Sonuç olarak araç türüne göre ağırlıklı hasar tutarı ortalamaları,

$Y_{jw} =$
$[338\ 100\ 511{,}3 \quad 10\ 506\ 680{,}61 \quad 56\ 809\ 848{,}4 \quad 152\ 437\ 602{,}7 \quad 29\ 569\ 666{,}18\ ]$

biçiminde özetlenebilir. Benzer şekilde araç türüne göre ağırlıklı dönem ortalamaları, sırasıyla otomobil, taksi, kamyonet, kamyon ve otobüs için,

$X_{1w} = \sum_{t=1}^{12} \frac{w_{1t}}{w_{1\Sigma}} X_{1t} = \frac{1}{1910213}[1 * 160\ 642 + \cdots + 12 * 164\ 104] = 6{,}554007851$

$X_{2w} = \sum_{t=1}^{12} \frac{w_{2t}}{w_{2\Sigma}} X_{2t} = \frac{1}{64301}[1 * 6\ 609 + \cdots + 12 * 4\ 728] = 6{,}15873781$

$$X_{3w} = \sum_{t=1}^{12} \frac{w_{3t}}{w_{3\Sigma}} X_{3t} = \frac{1}{252762} [1 * 25\ 368 + \cdots + 12 * 17\ 805] = 6{,}135281411$$

$$X_{4w} = \sum_{t=1}^{12} \frac{w_{4t}}{w_{4\Sigma}} X_{4t} = \frac{1}{922175} [1 * 82\ 511 + \cdots + 12 * 74\ 719] = 6{,}404197685$$

$$X_{5w} = \sum_{t=1}^{12} \frac{w_{5t}}{w_{5\Sigma}} X_{5t} = \frac{1}{136707} [1 * 13\ 206 + \cdots + 12 * 9\ 735] = 6{,}2037862$$

şeklinde hesaplanır. Sonuç olarak araç türüne göre ağırlıklı dönem ortalamaları,

$$X_{jw} = [6{,}554007851 \quad 6{,}158737811 \quad 6{,}135281411 \quad 6{,}404197685 \quad 6{,}2037862\ ]$$

biçiminde özetlenebilir. Böylece ağırlıklı en küçük kareler tahmin edicileri Eş. 4.12 ve Eş. 4.13'te ifade edildiği gibi hesaplanır. Örneğin bu değerler otomobil için

$$\beta_{21}^{w} = \frac{\sum_{t=1}^{T_j} w_{1t}(Y_{1t} - Y_{1w})(X_{1t} - X_{1w})}{\sum_{t=1}^{T_j} w_{1t}(X_{1t} - X_{1w})^2}$$

$$= \frac{[160\ 642 * (255\ 788\ 709 - 338100511{,}3)(1 - 6{,}554007851) + \cdots + 164\ 104 * (444\ 943\ 869 - 338100511{,}3)(12 - 6{,}554007851)]}{[160\ 642 * (1 - 6{,}554007851)^2 + \cdots + 164\ 104 * (12 - 6{,}554007851)^2]}$$

$$= \frac{[3{,}74936E+14 + \cdots + 9{,}54869E+13]}{[23516043{,}45 + \cdots + 1709465{,}72]}$$

$$= \frac{3{,}74936E+14}{23516043{,}45}$$

$$= 233\ 604\ 343{,}3$$

biçiminde bulunur. Benzer şekilde her bir araç türüne göre yapılan hesaplamaların sonuçları,

$$\beta_{2j}^{w} = [15\ 943\ 857{,}61 \quad 240\ 688{,}0414 \quad 1\ 313\ 024{,}427 \quad 5\ 545\ 793{,}808 \quad 927\ 154{,}4485\ ]$$

şeklinde elde edilir.

Her bir araç türüne ilişkin β_{2j}^{w} değerleri ve Eş. 4.12 kullanılarak β_{1j}^{w} hesaplamaları,

$$\beta_{11}^{w} = Y_{1w} - \beta_{21}^{w} X_{1w}$$

$$= 338\ 100\ 511{,}3 - 15\ 943\ 857{,}61 * 6{,}554007851 = 233\ 604\ 343{,}3$$

$$\beta_{12}^{w} = Y_{2w} - \beta_{22}^{w} X_{2w}$$

$$= 10\ 506\ 680{,}61 - 240\ 688{,}0414 * 6{,}158737811 = 9\ 024\ 346{,}064$$

$$\beta_{13}^{w} = Y_{3w} - \beta_{23}^{w} X_{3w}$$

$$= 56\ 809\ 848{,}4 - 1\ 313\ 024{,}427 * \ 6{,}135281411 = 48\ 754\ 074{,}04$$

$$\beta_{14}^{w} = Y_{4w} - \beta_{24}^{w} X_{4w}$$

$$= 15\ 243\ 7602{,}7\ - 5\ 545\ 793{,}808 * 6{,}404197685 = 116\ 921\ 242{,}9$$

$$\beta_{15}^{w} = Y_{5w} - \beta_{25}^{w} X_{5w}$$

$$= 29\ 569\ 666{,}18\ - 927\ 154{,}4485 * 6{,}2037862 = 23\ 817\ 798{,}21$$

şeklinde elde edilir. Buradan,

$$\beta_{1j}^{w} = [233\ 604\ 343{,}3 \quad 9\ 024\ 346{,}064 \quad 48\ 754\ 074{,}04 \quad 116\ 921\ 242{,}9 \quad 23\ 817\ 798{,}21\ ]$$

biçiminde özetlenir. Eş. 4.42 ve Eş. 4.43'de $\widehat{\beta_1}$ ve $\widehat{\beta_2}$'in sapmasız (yansız) tahmin edicilerini,

$$\widehat{\beta_1} = \sum_{j=1}^{J} g_{1j} \beta_{1j}^{w}$$

$$\widehat{\beta_2} = \sum_{j=1}^{J} g_{2j} \beta_{2j}^{w}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada ifade edilen $g_{1\Sigma} = g_{2\Sigma} = 1$ olacak şekilde g_{1j} ve g_{2j} katsayıları verideki hasar sayısı kullanılarak Eş. 4.41'deki

$$g_{1j} = \frac{w_{j\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}}, \qquad g_{2j} = \frac{p_j}{p_\Sigma}, \qquad h_{1j} = g_{1j}(1 - g_{1j}), \qquad h_{2j} = g_{2j}(1 - g_{2j})$$

$$p_j = \sum_{t=1}^{T_j} w_{jt} (X_{jt} - X_{jw})^2$$

eşitlikleri kullanılarak gerekli hesaplamalar yapılabilir. Buradan her bir araç türüne ilişkin ağırlıklar toplamı,

$w_{j\Sigma} = \sum_{t=1}^{T} w_{jt}$

$w_{1\Sigma} = \sum_{t=1}^{T} w_{1t} = [160\ 642 + \cdots + 164\ 104] = 1\ 910\ 213$

$w_{2\Sigma} = \sum_{t=1}^{T} w_{2t} = [6\ 609 + \cdots + 4\ 728] = 64\ 301$

$w_{3\Sigma} = \sum_{t=1}^{T} w_{3t} = [25\ 368 + \cdots + 17\ 805] = 252\ 762$

$w_{4\Sigma} = \sum_{t=1}^{T} w_{4t} = [82\ 511 + \cdots + 74\ 719] = 922\ 175$

$w_{5\Sigma} = \sum_{t=1}^{T} w_{5t} = [13\ 206 + \cdots + 9\ 735] = 136\ 707$

şeklindedir. Genel ağırlıklar toplamı ise

$w_{\Sigma\Sigma} = \sum_j \sum_t w_{jt}$

$= [160\ 642 + \cdots + 164\ 104 + 6\ 609 + \cdots + 4\ 728 + 25\ 368 + \cdots + 17\ 805 + 82\ 511 + \cdots + 74\ 719 + \ 82\ 511 + \cdots + 74\ 719 + 13\ 206 + \cdots + 9\ 735]$

$= [1\ 910\ 213 + \ 64\ 301 + 252\ 762 + \ 922\ 175 + 136\ 707]$

$= 3\ 286\ 158$

biçiminde hesaplanır. Bu ağırlıklar kullanılarak her bir araç türü için,

$$g_{11} = \frac{w_{1\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} = \frac{1\ 910\ 213}{32\ 86\ 158} = 0{,}581290674$$

$$g_{12} = \frac{w_{2\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} = \frac{64\ 301}{3\ 286\ 158} = 0{,}019567227$$

$$g_{13} = \frac{w_{3\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} = \frac{252\ 762}{3\ 286\ 158} = 0{,}076917178$$

$$g_{14} = \frac{w_{4\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} = \frac{922\ 175}{3\ 286\ 158} = 0{,}28062406$$

$$g_{15} = \frac{w_{15}}{w_{\Sigma\Sigma}} = \frac{136\ 707}{3\ 286\ 158} = 0{,}04160086$$

şeklinde hesaplanır. Özet olarak,

$g_{1j} = [0{,}581290674 \quad 0{,}019567227 \quad 0{,}076917178 \quad 0{,}28062406 \quad 0{,}04160086\ ]$

biçiminde yazılabilir. Burada g_{2j}'nin hesaplanması için p_j değerleri gereklidir. Burada otomobil için,

$$p_1 = \sum_{t=1}^{T_j} w_{1t}(X_{1t} - X_{1w})^2$$
$$= [160\,642 * (1 - 6{,}554007851)^2 + \cdots + 164\,104 * (12 - 6{,}554007851)^2] = [4\,955\,324{,}29 + \cdots + 4\,867\,132{,}717]$$
$$= 23\,516\,043{,}45$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde diğer araç türleri için p_2, p_3, p_4 ve p_5 değerleri hesaplanabilir. Bu değerler $\widehat{\beta_2}$'in yansız tahmin edicisinin hesaplanması için gereklidir. Bu nedenle her bir araç türüne ilişkin p_j değerleri Çizelge 5.2'de özetlenmiştir.

Çizelge 5.2. $\widehat{\beta_2}$'in yansız tahmin edicisinin hesaplanması için gerekli olan $\sum_{t=1}^{T_j} w_{jt}\left(X_{jt} - X_{jw}\right)^2$ eşitliği kullanarak her bir araç türüne ilişkin p_j değerleri

Dönem	Otomobil	Taksi	Kamyon	Kamyonet	Otobüs
1	4 955 324,29	175 882,5135	668 982,4496	2 409 762,85	357 610,4351
2	3 596 285,607	117 208,8939	447 196,5445	1 718 104,885	264 052,3107
3	1 937 237,408	56 782,66137	231 112,8837	916 481,4161	134 122,9027
4	839 008,7061	20 555,91696	89 515,22448	367 005,8922	43 408,94876
5	435 899,1576	8 346,057327	30 450,69808	174 409,0725	18 974,5313
6	53 887,99719	142,1149869	430,1115158	13 712,45499	528,495702
7	26 089,50071	3 110,438499	11 864,36263	21 941,69343	4 991,138862
8	232 388,1533	15 005,23078	48 711,75041	145 743,6078	2 1874,88363
9	1 054 428,329	43 350,77933	194 849,6028	526 394,1144	98 024,44124
10	2 268 454,866	80 327,82708	307 921,6021	1 136 063,445	182 604,8121
11	3 249 906,715	107 673,3432	448 011,3335	1 613 210,207	256 214,841
12	4 867 132,717	161 320,9862	612 401,6241	2 339 676,312	327 057,9792
Toplam (p_j)	23 516 043,45	789 706,7632	3 091 448,187	11 382 505,95	1 709 465,72

Çizelge 5.2'de görüleceği gibi

$$p_j = [23\,516\,043{,}45 \quad 789\,706{,}7632 \quad 3\,091\,448{,}187 \quad 11\,382\,505{,}95 \quad 1\,709\,465{,}72]$$

biçiminde özetlenebilir.

$p_{\Sigma} = \sum_j p_j$

$= [23\ 516\ 043{,}45 + 789\ 706{,}7632 + 3\ 091\ 448{,}187 + 11\ 382\ 505{,}95 +$
$1\ 709\ 465{,}72]$

$= 40\ 489\ 170{,}07$

olmak üzere her bir araç türü için,

$$g_{21} = \frac{p_1}{p_{\Sigma}} = \frac{23\ 516\ 043{,}45}{40\ 489\ 170{,}07} = 0{,}580798357$$

$$g_{22} = \frac{p_2}{p_{\Sigma}} = \frac{789\ 706{,}7632}{40\ 489\ 170{,}07} = 0{,}019504148$$

$$g_{23} = \frac{p_3}{p_{\Sigma}} = \frac{3\ 091\ 448{,}187}{40\ 489\ 170{,}07} = 0{,}076352471$$

$$g_{24} = \frac{p_4}{p_{\Sigma}} = \frac{11\ 382\ 505{,}95}{40\ 489\ 170{,}07} = 0{,}281124704$$

$$g_{25} = \frac{p_5}{p_{\Sigma}} = \frac{1\ 709\ 465{,}72}{40\ 489\ 170{,}07} = 0{,}04222032$$

elde edilir. Özet olarak

$$g_{2j} = [0{,}580798357 \quad 0{,}019504148 \quad 0{,}076352471 \quad 0{,}281124704 \quad 0{,}04222032\ ]$$

biçiminde yazılır. Böylece yansız tahmin edicileri

$$\widehat{\beta_1} = \sum_{j=1}^{J} g_{1j}\beta_{1j}^{w}$$

$$= [0{,}581290674\ * 233\ 604\ 343{,}3\ + \cdots + 0{,}04160086\ * 23\ 817\ 798{,}21\ ]$$

$$= 173\ 520\ 388{,}3$$

ve

$$\widehat{\beta_2} = \sum_{j=1}^{J} g_{2j}\beta_{2j}^{w}$$

$$= [0{,}580798357\ * 15\ 943\ 857{,}61\ + \cdots + 0{,}04222032\ * 927\ 154{,}4485\ ]$$

$$= 10\ 963\ 317{,}78$$

şeklinde elde edilir.

Ortak model için AEKK tahmin edicileri Eş. 4.14 ve Eş. 4.15’te verilen ifadeler kullanılarak hesaplanır. Eş. 4.10’daki ifade kullanılarak Eş. 4.14, Eş. 4.11’deki ifade kullanılarak Eş. 4.15 aşağıdaki gibi hesaplanmıştır;

$$Y_{ww} = \sum \frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}} Y_{jt} = \sum_{j} \frac{w_{j\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} Y_{jw}$$
$$= \frac{1}{3\ 286\ 158} [338\ 100\ 511{,}3 * 1\ 910\ 213 + \cdots + 29\ 569\ 666{,}18 * 136\ 707] = 245\ 117\ 696{,}6$$

ve

$$X_{ww} = \sum \frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}} X_{jt} = \sum_{j} \frac{w_{j\Sigma}}{w_{\Sigma\Sigma}} X_{jw}$$
$$= \frac{1}{3\ 286\ 158} [6{,}554007851 * 1\ 910\ 213 + \cdots + 6{,}2037862 * 136\ 707]$$
$$= 6{,}457456397$$

şeklinde elde edilir.

Çizelge 5.3. Ortak modelin AEKK tahmin edicisi β_2^{w}’nın hesaplanması için her bir araç türüne göre $w_{jt}(Y_{jt} - Y_{ww})(X_{jt} - X_{ww})$ değerleri

Dönem	Otomobil	Taksi	Kamyon	Kamyonet	Otobüs
1	-9,35524E+12	8,51277E+12	2,6863E+13	5,32729E+13	1,58716E+13
2	-2,95791E+13	7,08403E+12	2,19595E+13	4,22586E+13	1,44911E+13
3	-22271884090930	4,62792E+12	1,55249E+13	3,0351E+13	9,67295E+12
4	-4,4269E+12	2,57052E+12	9,52539E+12	1,9727E+13	4,89262E+12
5	-2,84236E+13	2,1155E+12	6,521E+12	1,10599E+13	4,11608E+12
6	-5607598744443	6,06141E+11	2,05864E+12	3,8495E+12	1,276E+12
7	4,09579E+12	-5,62059E+11	-1,684E+12	-3,57295E+12	-9,43678E+11
8	9,08667E+12	-1,61093E+12	-4,13114E+12	-9,1324E+12	-2,27933E+12
9	62433532463107	-3,19154E+12	-1,11257E+13	-1,64681E+13	-6,86253E+12
10	1,10693E+14	-4,50025E+12	-1,29027E+13	-1,98174E+13	-9,2879E+12
11	1,23688E+14	-4,85954E+12	-1,54775E+13	-2,33473E+13	-1,05434E+13
12	181752609573690	-6,09609E+12	-1,77376E+13	-2,05038E+13	-1,13436E+13
Toplam	3,92086E+14	4,69646E+12	1,93937E+13	6,76769E+13	9,05982E+12

Çizelge 5.4. Ortak modelin AEKK tahmin edicisi β_2^w'nın hesaplanması için her bir araç türüne göre $\sum_{t,j} w_{jt}\left(X_{jt} - X_{ww}\right)^2$ değerleri

Dönem	Otomobil	Taksi	Kamyon	Kamyonet	Otobüs
1	4 784 534,072	196 841,3346	755 556,2078	2 457 493,624	393 325,2633
2	3 445 409,383	134 651,6541	519 592,0625	1 759 909,24	296 881,3658
3	1 833 409,615	68 030,24098	281 050,6054	945 382,4649	156 202,9799
4	776 772,1624	26 638,43457	118 565,4922	383 446,104	53 977,40381
5	383 416,4608	13 203,8976	50 185,85661	187 890,0184	27 814,00179
6	36 741,73111	1 180,262245	4 918,177888	17 564,14375	2 663,12364
7	38 608,29608	1 293,683899	4 670,507948	18 194,28794	2 317,445583
8	264 458,185	10 531,40483	33 333,58569	136 177,7745	16 132,60839
9	1 139 314,874	3 4714,5152	15 3487,2876	505 015,3896	81 045,78717
10	2 397 352,987	68 320,10502	25 8722,8665	1 102 659,388	159 016,1739
11	3 392 592,688	94 795,82274	390 635,5508	157 6037,298	229 829,3151
12	5 041 240,35	145 243,1652	546 965,8536	2 295 351,958	299 057,1516
Toplam	23 533 850,8	795 444,521	3 117 684,054	11 385 121,69	1 718 262,62

Çizelge 5.3'deki ve Çizelge 5.4'deki hesaplamalar kullanılarak ortak model için AEKK tahmin edicileri,

$$\beta_2^w = \frac{\sum_{t,j} w_{jt}\left(Y_{jt} - Y_{ww}\right)\left(X_{jt} - X_{ww}\right)}{\sum_{t,j} w_{jt}\left(X_{jt} - X_{ww}\right)^2}$$

$$= \frac{[(3{,}92086\text{E} + 14) + \cdots + (9{,}05982\text{E} + 12)]}{[23\ 533\ 850{,}8 + 795\ 444{,}521 + 3\ 117\ 684{,}054 + 11\ 385\ 121{,}69 + 1\ 718\ 262{,}62]}$$

$$= \frac{4{,}92913E + 14}{40\ 550\ 363{,}69} = 12\ 155\ 564{,}06$$

ve

$$\beta_1^w = Y_{ww} - \beta_2^w X_{ww} = 245\ 117\ 696{,}6 - 12\ 155\ 564{,}06 * 6{,}457456397 = 16\ 662\ 3671{,}7$$

biçiminde elde edilir.

Hata varyansının yansız tahmin edicisini hesaplamak için Eş. 4.44'de verilen ifade kullanılır. Bunun için gerekli işlemler sonucu elde edilen değerler Çizelge 5.5'te özetlenmiştir.

Çizelge 5.5. Hata varyansının yansız tahmin edicisinin hesaplanması için her bir araç türüne göre $w_{jt}\left(Y_{jt} - \beta_{1j}^{w} - \beta_{2j}^{w} X_{jt}\right)^2$ değerleri

Dönem	Otomobil	Taksi	Kamyon	Kamyonet	Otobüs
1	6,25603E+18	1,80218E+14	2,62287E+16	1,55794E+18	3,05458E+14
2	5,55195E+19	8,27619E+15	7,4923E+17	8,98801E+18	5,23777E+16
3	4,95207E+18	1,63922E+14	4,86607E+16	2,47427E+16	2,54543E+17
4	1,88252E+20	1,77528E+16	7,83462E+17	2,64605E+19	2,37736E+17
5	2,86477E+20	1,18351E+16	4,18879E+15	1,90528E+19	1,26112E+16
6	3,60633E+19	4,56193E+14	2,10931E+17	2,39168E+18	1,5124E+17
7	2,37332E+20	7,51053E+15	1,1322E+18	1,82173E+19	2,94609E+17
8	4,41636E+20	1,41249E+16	3,95423E+17	2,20228E+19	1,11689E+17
9	9,51571E+18	1,61892E+14	1,44915E+15	1,67155E+18	6,82803E+16
10	4,6758E+19	6,24905E+14	8,88289E+17	7,22919E+18	3,31326E+17
11	5,00183E+17	1,54697E+15	7,11742E+16	7,65121E+14	8,19311E+16
12	6,57285E+19	1,56689E+15	1,34075E+16	1,10062E+19	3,75344E+13
Toplam	1,37899E+21	6,42005E+16	4,32464E+18	1,18623E+20	1,59669E+18

$$\widehat{s^2} = \frac{1}{J}\sum_j \frac{1}{T_j-2}\sum_t w_{jt}\left(Y_{jt} - \beta_{1j}^{w} - \beta_{2j}^{w} X_{jt}\right)^2 , \qquad T_j > 2$$

$$= \frac{1}{5} * \frac{1}{(12-2)} * [(1{,}37899\mathrm{E}+21) + (6{,}42005\mathrm{E}+16) + \cdots + (1{,}59669\mathrm{E}+18)]$$

$$= \frac{1}{5} * \frac{1}{10} * (1{,}5036E+21) = 3{,}0072E+19 = (5\ 483\ 792\ 022)^2$$

Eş. 4.41'deki eşitliklerden ve Çizelge 5.2'de elde edilen sonuçlardan h_{1j} ve h_{2j}

$$h_{1j} = [0{,}243391826 \quad 0{,}019184351 \quad 0{,}071000926 \quad 0{,}201874197 \quad 0{,}039870229\ ]$$

$$h_{2j} = [0{,}243471626 \quad 0{,}019123736 \quad 0{,}070522771 \quad 0{,}202093605 \quad 0{,}040437765\ ]$$

şeklinde elde edilir.

Çizelge 5.6. β_1 parametresinin varyansının tahmin edicisini hesaplamak amacıyla $\frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}} X_{jt}^2$ ifadesinin her bir araç türüne göre hesaplanan değerleri

Dönem	Otomobil	Taksi	Kamyon	Kamyonet	Otobüs
1	0,084096	0,102782	0,100363	0,089474	0,096601
2	0,363116	0,42158	0,413844	0,384205	0,437198
3	0,722615	0,796551	0,837147	0,771833	0,860256
4	1,077358	1,097588	1,242782	1,101639	1,046091
5	2,362315	2,416759	2,336783	2,397945	2,394537
6	3,308879	3,157649	3,347307	3,276549	3,351226
7	3,364539	3,34917	3,075949	3,284343	2,821926
8	3,723748	4,405281	3,547115	3,971897	3,174088
9	7,473261	6,764592	7,608671	6,861822	7,428274
10	10,00046	8,466431	8,156289	9,52791	9,268728
11	10,41447	8,644873	9,062482	10,02167	9,858295
12	12,37086	10,5882	10,14361	11,66756	10,25434
Toplam	55,26571	50,21146	49,87235	53,35686	50,99156

Burada elde edilen h_{1j} ve h_{2j} değerleri Eş. 4.45, Eş. 4.46 ve Eş. 4.47'de yerine koyup ve Çizelge 5.6'daki elde edilen sonuçları kullanarak gerekli işlemler yapıldığında, Çizelge 5.7'de sonuçlar özetlenmiştir.

Çizelge 5.7. Araç türüne göre hesaplanan parametre tahmin edici değerleri

$\widehat{\beta_1} = 173\,520\,388{,}3$	$\widehat{\beta_2} = 10\,963\,317{,}78$
$\widehat{s^2} = (5\,483\,792\,022)^2$	$\widehat{a_{12}} = (8{,}13751\text{E} + 14)$
$\widehat{a_{11}} = (97\,810\,570{,}63)^2$	$\widehat{a_{22}} = (7\,604\,951{,}103)^2$

Eş. 4.20'de verilen Hachemeister kredibilite modelinin parametre tahmin edicilerinin hesaplanması için Teorem 4.2.1'de ifade edilen Eş. 4.28 ve Eş. 4.29'daki gibi gerekli doğrusal dönüşüm uygulanmalıdır. Burada Çizelge 5.1'deki veriye gerekli doğrusal dönüşüm uygulanarak elde edilen yeni veri Çizelge 5.8'de özetlenmiştir.

Çizelge 5.8. Teorem 4.2.1.'de ifade edilen gerekli doğrusal dönüşümü sonucunda elde edilen yeni veri

Dönem	q_{jt}	Otomobil (D_{1t})	Taksi (D_{2t})	Kamyon (D_{3t})	Kamyonet (D_{4t})	Otobüs (D_{5t})
1	15,07015163	71 305 002,96	-175 383 804	-133 399 785	-57 671 379,04	-159 586 667
2	16,07015163	87 938 302,18	-184 836 214,8	-138 714 316,8	-57 360 848,82	-167 902 644,8
3	17,07015163	80 707 826,4	-196 494 214,6	-152 278 548,6	-72 292 376,6	-175 397 480,6
4	18,07015163	41 749 321,62	-209 392 719,4	-169 684 558,4	-98 683 462,38	-195 004 598,4
5	19,07015163	124 825 363,8	-216 729 347,2	-17 259 6716,2	-69 010 235,15	-198 902 014,2
6	20,07015163	75 635 340,07	-229 116 223,9	-185 663 908,9	-94 442 406,93	-213 366 931,9
7	21,07015163	52 410 221,29	-240 861 691,7	-200 765 589,7	-111 689 384,7	-226 072 938,7
8	22,07015163	36 891 921,51	-252 063 516,5	-207 281 507,5	-119 555 796,5	-234 050 628,5
9	23,07015163	112 256 778,7	-260 826 079,3	-211 371 902,3	-109 982 544,3	-242 361 791,3
10	24,07015163	1 255 34415	-271 383 536	-214 705 153	-101 703718	-2 449 50674
11	25,07015163	116 614 098,2	-281 864 678,8	-228 980 555,8	-116 291 996,8	-257 388 192,8
12	26,07015163	139 863 667,4	-292 591 919,6	-239 702 068,6	-109 472 669,6	-270 198 643,6

Eş. 4.24'te verilen standartlaştırılmış modelin D_{jt} ve q_{jt} rassal değişken değerleri Çizelge 5.8'de elde edildiği gibidir.

Eş. 4.24'teki standartlaştırılmış modelin Eş. 4.25'de verilen varyans hesaplaması,

$$b_1 = a_{11} - \frac{a_{12}^2}{a_{22}} = (97\,810\,570{,}63)^2 - \frac{(8{,}13751\text{E}+14)^2}{(7604951{,}103)^2} = -1{,}88269E + 15$$

$$b_2 = a_{22} = (7\,604\,951{,}103)^2$$

biçimindedir. Buradan elde edilen sonuçları Eş. 4.34'te yerine yazarak z_{j1} ve z_{j2} kredibilite faktörleri elde edilebilir. Otomobil için hesaplanan kredibilite faktörleri,

$$z_{11} = \frac{w_{1\Sigma}}{w_{1\Sigma} + \frac{\widehat{s^2}}{b_1}} = \frac{1\,910\,213}{1\,910\,213 + \frac{(5\,483\,792\,022)^2}{(-1{,}88269E+15)}} = 1{,}00843232$$

ve

$$z_{21} = \frac{b_2}{b_2 + \frac{\widehat{s^2}}{\sum_t w_{1t} q_{1t}^2}} = \frac{(7\,604\,951{,}103)^2}{(7\,604\,951{,}103)^2 + \frac{(5\,483\,792\,022)^2}{8\,360\,36\,516{,}9}} = 0{,}99937845$$

biçiminde hesaplanır. Benzer şekilde her bir grup (araç türü) için kredibilite faktörü hesaplanabilir. Burada z_{j2}'nin hesaplanması için gerekli olan $\sum_t w_{jt} q_{jt}^2$ işlemleri Çizelge 5.9'da özetlenmiştir.

Çizelge 5.9. z_{j2}'nin hesaplanması için gerekli olan $\sum_t w_{jt} q_{jt}^2$ değerleri

Dönem	Otomobil	Taksi	Kamyon	Kamyonet	Otobüs
1	36 483 319,5	1 500 966,488	5 761 313,038	18 739 029,49	2 999 207,662
2	44 782 318,45	1 750 158,714	6 753 489,823	22 874 731,93	3 858 768,114
3	44 691 078,83	1 658 300,926	6 850 872,092	23 044 584,21	3 807 594,131
4	41 999 643,58	1 440 325,506	6 410 770,948	20 732 719,94	2 918 528,535
5	65 642 921,98	2 260 576,966	8 592 083,56	32 167 762,94	4 761 903,925
6	70 723 136,13	2 271 853,963	9 466 863,802	33 808 731,71	5 126 172,613
7	58 229 983,01	1 951 165,918	7 044 175,113	27 441 073,17	3 495 228,503
8	54 136 820,91	2 155 867,39	6 823 666,125	27 876 738,95	3 302 481
9	93 801 081,61	2 858 085,282	12 636 781,91	41 578 487,96	6 672 591,282
10	110 677 471,3	3 154 102,254	11 944 337,26	50 905 958,93	7 341 225,139
11	103 334 997,6	2 887 386,437	11 898 370,19	48 004 527,93	7 000 372,255
12	111 533 744,1	3 213 398,467	12 101 218,21	50 782 978,01	6 616 420,066
Toplam	836 036 516,9	27 102 188,31	106 283 942,1	397 957 325,2	57 900 493,23

Çizelge 5.9'daki değerler kullanılarak ve gerekli işlemler yapılarak her bir araç türü için elde edilen z_{j1} ve z_{j2} kredibilite faktörleri Çizelge 5.10'de özetlenmiştir.

Çizelge 5.10. Her bir grup (araç türü) için z_{j1} ve z_{j2} kredibilite faktörü

Grup	z_{j1}	z_{j2}
Otomobil	1,00843232	0,99937845
Taksi	1,33050783	0,98117601
Kamyon	1,06745594	0,99513165
Kamyonet	1,01762613	0,99869514
Otobüs	1,13229757	0,99109971

Eş. 4.24'deki standartlaştırılmış model için kredibilite tahmin edicilerinin hesaplamasında gerekli olan her bir grup için z_{j1} ve z_{j2} $(j = 1,2,3,4,5)$ kredibilite faktörü Çizelge 5.10'da özetlenmiştir.

Burada Eş. 4.24'deki standartlaştırılmış model için kredibilite tahmin edicileri hesaplanacaktır. Eş. 4.35 ve Eş. 4.36'daki ifadeleri $A = \left(\sum_t w_{jt} q_{jt} D_{jt}\right)$, $B = \left(\sum_t w_{jt} q_{jt}^2\right)$ ve $C = \left(\sum_t w_{jt} q_{jt}\right)$ olmak üzere,

$$\Lambda_j^* = \frac{z_{j2} z_{j1} q_{jw} \left(\sum_t w_{jt} q_{jt} D_{jt}\right) - \left(\sum_t w_{jt} q_{jt}^2\right) z_{j1} D_{jw}}{\left(q_{jw}\, z_{j1}\right) z_{j2} \left(\sum_t w_{jt} q_{jt}\right) - \left(\sum_t w_{jt} q_{jt}^2\right)} = \frac{z_{j2} z_{j1} q_{jw} A - z_{j1} D_{jw} B}{q_{jw} z_{j1} z_{j2} C - B}$$

ve

$$\Psi_j^* = \frac{z_{j2} \sum_t w_{jt} q_{jt} D_{jt} - \left(\sum_t w_{jt} q_{jt}\right) z_{j1} z_{j2} D_{jw}}{\left(\sum_t w_{jt} q_{jt}^2\right) - \left(z_{j2} \sum_t w_{jt} q_{jt}\right) z_{j1} q_{jw}} = \frac{z_{j2} A - z_{j1} z_{j2} D_{jw} C}{B - z_{j2} z_{j1} q_{jw} C}$$

biçiminde yeniden düzenlenebilir.

Çizelge 5.11. Kredibilite tahmin edicisi Λ_j^* ve Ψ_j^*'nin hesaplanması için gerekli olan $A = \left(\sum_t w_{jt} q_{jt} D_{jt}\right)$ değerleri

Dönem	Otomobil	Taksi	Kamyon	Kamyonet	Otobüs
1	1,72622E+14	-1,7468E+13	-5,09987E+13	-7,17117E+13	-3,17604E+13
2	2,45056E+14	-2,013E+13	-5,82948E+13	-8,16491E+13	-4,03168E+13
3	2,113E+14	-1,90887E+13	-6,11149E+13	-9,75942E+13	-3,91234E+13
4	9,70361E+13	-1,66902E+13	-6,01992E+13	-1,13224E+14	-3,14954E+13
5	4,29672E+14	-2,56911E+13	-7,77637E+13	-1,16407E+14	-4,96667E+13
6	2,66524E+14	-2,5935E+13	-8,75756E+13	-1,59091E+14	-5,44966E+13
7	1,44842E+14	-2,23046E+13	-6,712E+13	-1,45461E+14	-3,75022E+13
8	9,04938E+13	-2,46222E+13	-6,40875E+13	-1,51011E+14	-3,50223E+13
9	4,56426E+14	-3,23129E+13	-1,1578E+14	-1,98218E+14	-7,00984E+13
10	5,77222E+14	-3,55615E+13	-1,06543E+14	-2,15093E+14	-7,47082E+13
11	4,80664E+14	-3,2463E+13	-1,08675E+14	-2,22677E+14	-7,18709E+13
12	5,98367E+14	-3,60648E+13	-1,11265E+14	-2,13246E+14	-6,85745E+13
Toplam	3,77022E+15	-3,08332E+14	-9,69417E+14	-1,78538E+15	-6,04636E+14

Çizelge 5.9'da Λ_j^* ve Ψ_j^*'nin hesaplanması için gerekli olan $B = \left(\sum_t w_{jt} q_{jt}^2\right)$ değerleri verilmiştir.

Çizelge 5.12. Kredibilite tahmin edicisi Λ_j^* ve Ψ_j^*'nin hesaplanması için gerekli olan $C = \left(\sum_t w_{jt} q_{jt}\right)$ değerleri

Dönem	Otomobil	Taksi	Kamyon	Kamyonet	Otobüs
1	2 420 899,298	99 598,63211	382 299,6065	1 243 453,281	199 016,4224
2	2 786 676,783	108 907,4176	420 250,5352	1 423 429,751	240 120,2056
3	2 618 083,296	97 146,23292	401 336,3349	1 349 992,942	223 055,6713
4	2 324 255,183	79 707,43883	354 771,2869	1 147 346,208	161 511,0153
5	3 442 181,439	118 540,0625	450 551,4024	1 686 812,122	249 704,5654
6	3 523 796,802	113 195,6552	471 688,7036	1 684 527,967	255 412,7496
7	2 763 624,298	92 603,31641	334 320,0959	1 302 367,142	165 885,3038
8	2 452 942,862	97 682,49111	309 180,7542	1 263 096,848	149 635,628
9	4 065 906,593	123 886,7142	547 754,6101	1 802 263,315	289 230,491
10	4 598 121,066	131 037,9055	496 230,246	2 114 899,803	304 992,8913
11	4 121 833,77	115 172,2766	474 603,0405	1 914 808,041	279 231,3488
12	4 278 216,163	123 259,6769	464 179,0497	1 947 935,66	253 792,9261
Toplam	39 396 537,55	1 300 737,82	5 107 165,666	18 880 933,08	2 771 589,219

Çizelge 5.8'deki veriden hesaplanan ağırlıklı ortalamalar, $D_{jw} = \sum_{t=1}^{T} \frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}} D_{jt}$ ve $q_{jw} = \sum_{t=1}^{T} \frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}} q_{jt}$ eşitliklerinden elde edilir. Buradan,

$$D_{jw} = \begin{bmatrix} 92\,726\,452{,}2 & -230\,533\,907{,}4 & -183\,973\,579{,}6 & -91\,294\,039{,}85 \\ & & -211\,964\,801{,}6 & \end{bmatrix}$$

ve

$$q_{jw} = [20{,}62415948 \quad 20{,}22888944 \quad 20{,}20543304 \quad 20{,}47434931 \quad 20{,}27393783]$$

sonucuna ulaşılır.

Araç türü otomobil için elde edilen değerler yerine yazılıp gerekli işlemler yapıldığında Eş. 4.24'de verilen standartlaştırılmış model için kredibilite tahmin edicileri,

$$\Lambda_1^* = \frac{z_{21} z_{11} q_{jw} A - z_{11} D_{jw} B}{q_{jw} z_{11} z_{21} C - B}$$

$$= \frac{(1{,}00843232 * 0{,}99937845 * 20{,}62415948 * 3{,}77022\text{E}+15) - (1{,}00843232 * 92726452{,}2 * 836036516{,}9)}{20{,}62415948 * 1{,}00843232 * 0{,}99937845 * 39396537{,}55 - 836036516{,}9}$$

$$= \frac{1{,}8824E+14}{-17\,173\,889{,}97} = -10\,960\,807{,}18$$

ve

$$\Psi_1^* = \frac{z_{21} A - z_{11} z_{21} D_{jw} C}{B - z_{21} z_{11} q_{jw} C}$$

$$= \frac{0{,}99937845 * 3{,}77022\text{E}+15 - 1{,}00843232 * 0{,}99937845 * 92726452{,}2}{836036516{,}9 - 1{,}00843232 * 0{,}99937845 * 20{,}62415948 * 92726452{,}2}$$

$$= \frac{8{,}62648E+13}{17\,173\,889{,}97} = 5\,023\,022{,}02$$

şeklinde hesaplanır. Benzer şekilde her bir araç türü için hesaplamalar yapılabilir. Sonuç olarak, her bir araç türü için kredibilite tahmin değerleri,

$$\Lambda_j^* = [10\,960\,807{,}18 \quad 23\,528\,895{,}41 \quad 19\,633\,405{,}06 \quad 35\,181\,751{,}59 \quad 27\,136\,401{,}98]$$

$$\Psi_j^* = \begin{bmatrix} 5\,023\,022{,}02 & -12\,270\,473{,}6 & -10\,015\,439{,}26 & -6\,147\,517{,}187 \\ & & 11\,637\,136{,}81 & \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Gerekli doğrusal dönüşüm sonucunda elde edilen kredibilite tahmin edicilerini, Hachemeister kredibilite modeli parametrelerini tahmin etmek için Eş. 4.30 ve Eş. 4.31 ifadeleri kullanılır. Bu bilgiler doğrultusunda otomobil için hesaplanan parametre tahmin edici değerleri

$\widehat{\Delta_1} = \Psi_1{}^* + \widehat{\beta_2} = 5\,023\,022{,}02 + 10\,963\,317{,}78 = 15\,986\,339{,}8$

ve

$\widehat{\Gamma_1} = \Lambda_1{}^* + \frac{\widehat{a_{12}}}{\widehat{a_{22}}}\Psi_1{}^* + \widehat{\beta_1}$

$= 10\,960\,807{,}18 + \frac{(8{,}13751E+14)}{(7\,604\,951{,}103)^2} 5\,023\,022{,}02 + 173\,520\,388{,}3 = 233\,234\,262{,}5$

biçimindedir. Benzer şeklide her bir araç türüne göre aynı işlemler uygulanabilir.

Özet olarak her bir araç türüne ilişkin AEKK tahmin değeri ile Eş. 4.24'deki standartlaştırılmış kredibilite modeline ilişkin kredibilite tahmin değerlerinden elde edilen parametre tahmin edicilerine ilişkin tahmin değerleri Çizelge 5.13'da gösterilmiştir.

Çizelge 5.13. Araç türüne ilişkin AEKK tahmin değeri ile Eş. 5.24'deki standartlaştırılmış kredibilite modeline ilişkin kredibilite tahmin değerlerinden elde edilen parametre tahmin edicilerine ilişkin tahmin değerleri

	β_{1j}^{w}	β_{2j}^{w}	$\widehat{\Gamma_J}$	z_{j1}	$\widehat{\Delta_J}$	z_{j2}
Otomobil	233 604 343,3	15 943 857,61	233 234 262,5	1,00843232	15.986.339,8	0,99937845
Taksi	9 024 346,064	240 688,0414	24 401 859,51	1,33050783	-1.307.155,826	0,98117601
Kamyonet	48 754 074,04	1 313 024,427	52 235 044,37	1,06745594	947.878,5222	0,99513165
Kamyon	116 921 242,9	5 545 793,808	122 205 640,9	1,01762613	4.815.800,591	0,99869514
Otobüs	23 817 798,21	927 154,4485	36 920 510,76	1,13229757	-673.819,0357	0,99109971

Çizelge 5.13'deki kredibilite ağırlıkları ile ilişkili olan $\widehat{\Gamma}_j$ ve $\widehat{\Delta}_j$ kredibilite tahmin edicilerinin bir sonraki sigorta dönemi (T+1 dönemi) için öngörülen kredibilite prim değerleri Çizelge 5.14'de özetlenmiştir. Ayrıca bu veri setinin bir sonraki sigorta dönemi için tahmin edilen AEKK tahmin değerleri ise Çizelge 5.14'de gösterilmiştir.

Otomobile ilişkin $\hat{Y}_{1,T+1} = \widehat{\Gamma_1} + \widehat{\Delta_1} X_{1,T+1}$ eşitliğinden T+1 dönemi için kredibilite hasar tutarı değeri,

$$\hat{Y}_{1,13} = \widehat{\Gamma_1} + \widehat{\Delta_1} X_{1,13} = 233\ 234\ 262{,}5 + 15\ 986\ 339{,}8\ (12 + 1) = 441\ 056\ 679{,}9$$

biçiminde hesaplanır. Benzer şekilde otomobile ilişkin $\hat{Y}_{1,T+1} = \beta_{11}^{w} + \beta_{21}^{w}\, X_{1,T+1}$ eşitliğinden T+1 dönemi için bireysel hasar tutarı,

$$\hat{Y}_{j13} = \beta_{1j}^{w} + \beta_{2j}^{w}\, X_{j13} = 233\ 604\ 343{,}3 + 15\ 943\ 857{,}61\ (12 + 1) = \ 440\ 874\ 492{,}2$$

biçiminde elde edilir. Her bir araç türünün T+1 dönemi için bireysel hasar tutarı ve kredibilite hasar tutarı sonuçları Çizelge 5.14'te özetlenmiştir. Ortak model kullanarak $\hat{Y}_{T+1} = \beta_1^{w} + \beta_2^{w}\, X_{T+1}$ eşitliğinden T+1 dönemi için ortak hasar tutarı

$$\hat{Y}_{13} = \beta_1^{w} + \beta_2^{w}\, X_{13} = 16\ 662\ 3671{,}7 + 12\ 155\ 564{,}06\ (12 + 1) = \ 324\ 646\ 004{,}5$$

biçiminde elde edilir. Bu değer bütün araç türleri için geçerlidir.

Çizelge 5.14. Her bir araç türüne ilişkin T+1'inci (13.) dönem için öngörülen hasar tutarı değerleri

		Bireysel Hasar Tutarı AEKK	Ortak Hasar Tutarı AEKK	Kredibilite Hasar Tutarı
1	Otomobil	440 874 492,2	324 646 004,5	441 056 679,9
2	Taksi	12 153 290,6	324 646 004,5	7 408 833,776
3	Kamyonet	65 823 391,59	324 646 004,5	64 557 465,16
4	Kamyon	189 016 562,4	324 646 004,5	184 811 048,6
5	Otobüs	35 870 806,04	324 646 004,5	28 160 863,29
TOPLAM		743 738 542,9	1 623 230 022,50	725 994 890,7

Çizelge 5.14'deki 2014-4 dönemi (13. dönem) için hesaplanan bireysel hasar tutarı otomobil için 440 874 492,2 TL, taksi için 12 153 290,6 TL, kamyonet için 65 823 391,59 TL, kamyon için 189 016 562,4 ve otobüs için 35 870 806,04 TL olarak öngörülmüştür. AEKK ile hesaplanan araç türüne göre ortak hasar tutarı 324 646 004,5 TL'dir.

Çizelge 5.14'te görüldüğü gibi en fazla hasar yapan araç türü sıralanırsa otomobil, kamyon, kamyonet, otobüs ve taksidir. Buna göre eğer sigorta şirketi sigortalılara ortak hasar tutarı uygulaması yaparsa bu durum taksi, kamyonet, kamyon ve otobüs için adaletsiz olacaktır. Genellikle kredibilite modeli yardımı ile hesaplanan değerin bireysel ve ortak değerler arasına düşmesi beklenir. Çizelge 5.14’te bu durum taksi için sağlanmaktadır. Kamyonet, kamyon ve otobüs için kredibilite değerleri bireysel değerlerin biraz altında oluşmuştur. Otomobil için ise kredibilite değeri bireysel değerin biraz üstündedir.

5.2. Hachemeister Kredibilite Modeli ile Alınan Prim Değerinin Modellenmesi

Burada Hachemeister modeli kullanarak kredibilite prim tutarı modellemesi yapılacaktır. Bunun için poliçe adedi ağırlık olarak, bağımlı değişken ise alınan prim olarak kullanılmıştır. Bu veriler Çizelge 5.15’te gösterilmiştir.

Çizelge 5.15. Araç türüne göre alınan prim değeri ve poliçe adedi

Dönem/ Periyot (t)		Otomobil		Taksi		Kamyon		Kamyonet		Otobüs	
		Alınan Prim (Y_{1t})	Poliçe Adedi (w_{1t})	Alınan Prim (Y_{2t})	Poliçe Adedi (w_{2t})	Alınan Prim (Y_{3t})	Poliçe Adedi (w_{3t})	Alınan Prim (Y_{4t})	Poliçe Adedi (w_{5t})	Alınan Prim (Y_{5t})	Poliçe Adedi (w_{5t})
1	2011-4	346 519 846	1 911 751	14 484 626	19 281	54 991 170	101 711	173 336 739	627 318	27 541 873	46 823
2	2012-1	365 793 903	2 011 232	15 029 266	18 692	64 306 753	108 721	168 071 854	604 630	31 217 928	47 307
3	2012-2	412 943 470	2 276 714	16 897 616	19 299	78 443 906	120 149	200 136 566	692 431	34 275 272	46 797
4	2012-3	429 050 410	1 878 691	16 178 785	15 167	68 096 423	80 767	186 207 578	551 420	42 523 567	49 702
5	2012-4	514 246 256	2 214 414	23 660 922	19 251	86 050 416	94 644	243 673 461	697 946	44 529 478	48 867
6	2013-1	514 726 595	2 096 516	23 540 639	17 986	111 647 111	102 811	230 941 354	626 005	57 290 722	47 448
7	2013-2	586 035 269	2 164 844	23 856 187	16 435	132 175 290	105 815	267 365 492	664 027	61 994 417	43 048
8	2013-3	544 435 731	2 152 475	21 775 641	16 273	103 374 824	84 675	232 963 318	605 030	66 167 417	54 995
9	2013-4	587 958 373	2 207 387	29 688 614	19 847	115 805 761	88 038	261 754 033	663 266	75 669 468	46 158
10	2014-1	540 714 929	2 178 902	25 139 806	18 750	121 898 381	100 738	242 875 558	645 586	66 082 196	41 649
11	2014-2	565 603 415	2 347 924	21 992 623	18 832	128 001 331	108 414	254 573 167	697 613	65 083 165	40 401
12	2014-3	550 723 389	2 299 232	17 996 258	15 752	99 632 342	87 578	231 524 524	632 939	57 115 412	48 783

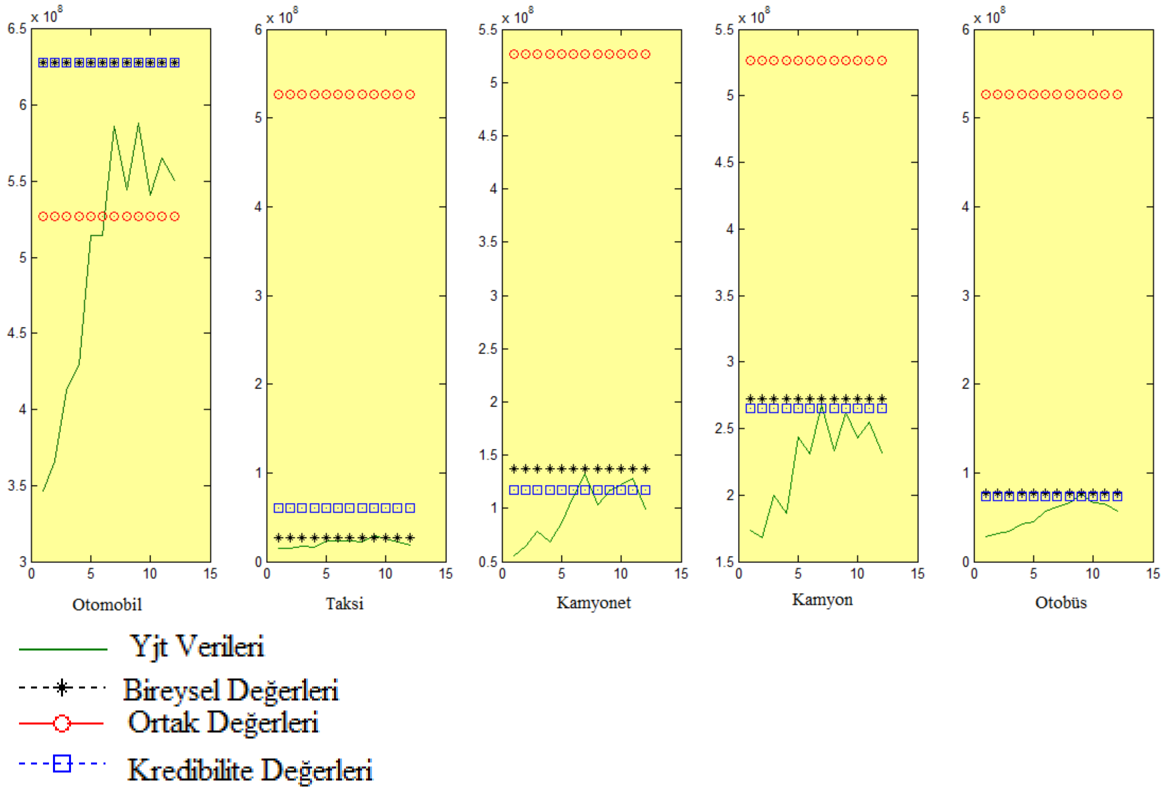
Çizelge 5.15'de her bir araç türüne göre alınan prim değerleri ile poliçe adedi verilmiştir. Burada Y_{jt}; alınan prim değeri ve ağırlık olarak kullanılan w_{jt} ise poliçe adedi şeklinde alınmıştır. Benzer şekilde hasar tutarı modellemesinde olduğu gibi Hachemeister kredibilite modeli kullanılarak prim değeri modellemesi yapılmıştır. Gerekli işlemler sonucunda elde edilen prim değerleri Çizelge 5.16'da özetlenmiştir.

Çizelge 5.16. Her bir araç türüne ilişkin T+1'inci (13.) dönem için öngörülen prim değerleri

		Bireysel Prim Değeri AEKK	Ortak Prim Değeri AEKK	Kredibilite Primi
1	Otomobil	627 760 321,68	526 673 863,7	627 817 539,29
2	Taksi	26 320 569,59	526 673 863,7	60 950 694,56
3	Kamyonet	136 799 239,87	526 673 863,7	116 744 077,52
4	Kamyon	272 243 159,54	526 673 863,7	265 430 637,13
5	Otobüs	77 248 907,07	526 673 863,7	73 102 989,34
TOPLAM		1 140 372 197,76	2 633 369 318,35	1 144 045 937,84

Çizelge 5.16'da görüleceği gibi bir sonraki dönem için araç türü otomobil olan sigortalıların bireysel olarak hesaplanan prim değeri 627 760 321,68 TL'dir. Tüm araç türleri alınarak ortak olarak hesaplanan prim değeri 526 673 863,7 TL'dir. Araç türü otomobil olan sigortalılar için kredibilite prim değeri ise 627 817 539,29 TL olarak hesaplanmıştır. Burada kredibilite prim değeri hem bireysel olarak hesaplanan prim değerinden hem de ortak olarak hesaplanan prim değerinden büyüktür. Bir sonraki dönem için araç türü taksi olan sigortalıların bireysel olarak hesaplanan prim değeri 26 320 569,59 TL'dir. Araç türü taksi olan sigortalılar için kredibilite prim değeri ise 60 950 694,56 TL olarak hesaplanmıştır. Sigorta şirketinin araç türü taksi olan sigortalılardan ortak olarak hesaplanan prim değerini talep etmesi şirket açısından karlı bir durum iken sigortalılar için zararlı bir durumdur. Başka bir ifade ile araç türü taksi olan sigortalılar için, bireysel olarak hesaplanan prim değeri olan 26 320 569,59 TL'yi ödemek avantajlıdır. Sigorta şirketi için ise tüm araç türleri alınarak ortak olarak hesaplanan prim değeri olan 526 673 863,7 TL'yi sigortalılardan talep etmesi avantajlıdır. Bütün sigortalılar aynı (hasar deneyimi) ortalamaya sahip iseler yani portföy homojense ortak primi kullanmak mantıklıdır. Ancak sigorta şirketleri iyi veya kötü hasar deneyimine sahip poliçe sahiplerini ayırt etmek ister.

Bu yüzden sadece ortak primi ele almak mantıklı değildir. Fakat her bir araç türüne göre sigortalı için hesaplanan ortalama hasar değerlerine karşılık gelen bireysel primler portföyün heterojen olmasına izin verir. Bu yüzden bu iki uç prim değerleri arasında ağırlıklı ortalamayı kullanarak her iki taraf içinde uzlaşma sağlayacak bir değer elde edilmeye çalışılmıştır. Bunun sonucunda Çizelge 5.16'da görüleceği gibi araç türü taksi olan sigortalılar için kredibilite primi 60 950 694,56 TL olarak hesaplanmıştır. Çizelge 5.16'da görüleceği gibi bir sonraki dönem için araç türü kamyonet, kamyon ve otobüs olan sigortalıların bireysel olarak hesaplanan prim değerleri sırasıyla 136 799 239,87 TL, 272 243 159,54 TL ve 77 248 907,07 TL'dir. Araç türü kamyonet, kamyon ve otobüs olan sigortalılar için kredibilite prim değerleri ise sırasıyla 116 744 077,52 TL, 265 430 637,13 TL ve 73 102 989,34 olarak hesaplanmıştır. Burada kamyonet, kamyon ve otobüs için hesaplanan kredibilite prim değerleri, bireysel olarak hesaplanan prim değerlerinden düşüktür. Bir sonraki dönem için kredibilite kestiriminin bireysel tahmin edici ve ortak tahmin edici arasında değerler olması beklenir. Fakat bazı durumlar bu beklentiye karşılık veremeyebilir. Genellikle kredibilite prim değeri hasar deneyimi tutarlı olan sigortalılar için bireysel primle ortak prim arasında bir yerdedir. Bu durum Şekil 5.1'de açıkça görülmektedir.



Şekil 5.1. Her bir araç türüne ilişkin T+1'inci (13.) dönem için öngörülen prim değerleri ve alınan prim değerleri grafiği

Çizelge 5.16 ele alındığında bireysel prim değeri toplamı 1 140 372 197,76 TL ve ortak prim değeri toplamı 2 633 369 318,35 ve kredibilite prim değeri toplamı 1 144 045 937,84 tür. Başka bir ifade ile sigorta şirketi bir sonraki dönem için sigortalılardan alması gereken prim değerini, ortak olarak hesaplanan primi baz alırsa sigortalılar için bu durum zararlı olacaktır. Benzer şekilde sigorta şirketi bir sonraki dönem için sigortalılardan alması gereken prim değerini bireysel olarak hesaplanan prim değerlerini baz alırsa bu durumda sigorta şirketi için zararlı olacaktır. Bu sebeple toplamda sigorta şirketi ve sigortalılar için alınması beklenen en uygun prim değeri kredibilite primidir.

6. HACHEMEİSTER KREDİBİLİTE MODELİ İÇİN PRİM TAHMİNLERİNİ ELDE ETMEK ÜZERE SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde Hachemesiter kredibilite modelinde grup, dönem sayısı ve hata varyansının değişmesiyle hesaplanan prim değerleri elde edilmiştir. Matlab programında simülasyon yöntemi kullanılarak farklı grup ve dönem sayıları için homojen ve heterojen sigorta portföyleri oluşturulmuştur. Burada dönem sayıları $t = 3, 6, 12\ ve\ 18$, grup sayıları $j = 5, 15\ ve\ 25$ ve hata varyansları $s^2 = (10)^2, (30)^2, (50)^2$ alınarak 36 farklı sigorta portföyü tasarlanmıştır. Regresyon katsayılarının boyutu $m = 2$'dir. Burada regresyon modeli,

$$Y_{jt} = \beta_{1j} + \beta_{2j}t + \varepsilon_{jt}$$

şeklindedir. Dannenburg ve diğerleri (1996)'daki çalışmalarının simülasyon uygulamasında kullanılan yapısal parametre değerleri,

$$\beta = (1400\ \ 150)', \qquad s^2 = (300)^2,$$

$$a_{11} = (100)^2, \qquad a_{22} = (20)^2, \qquad a_{12} = 0 \tag{6.1}$$

biçimindedir (Dannenbur ve diğerleri, 1996). Buradaki simülasyon çalışmasında Eş. 6.1'deki yapısal parametre değerleri kullanılmıştır. a_{11} ve a_{22} sırasıyla β_{1j} ve β_{2j}'nin varyans değerleri ve a_{12} ise β_{1j} ve β_{2j}'nin kovaryans değeridir. Burada $\Sigma = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ olarak tanımlanır. Regresyon katsayıları β_j'ler, ortalaması β ve varyansı Σ olan çok değişkenli normal dağılımdan üretilen simülasyon sonuçlarından elde edilir (Chen, 2008). ε_{jt} hata teriminin ortalaması sıfır ve varyansı $\frac{s^2}{w_{jt}}$ olacak şekilde normal dağıldığı varsayılır. Hasar sayısı olarak tanımlanan w_{jt} ağırlıkları, ortalaması λ olan poisson dağılımdan üretilen verilere ait simülasyon sonuçlarından elde edilmiştir. Burada poisson dağılımın λ parametresi (250, 9500) aralığında tek düze dağılımdan rastgele üretilmiştir (Kam Fung, Ho Lo ve Yı Zhu, 2007). Bu bilgiler doğrultusunda Y_{jt} değerleri bulunur. Açıklayıcı değişken olarak dönemler kullanılmaktadır. Yani $X_{jt} = (1,\ t)'$ dir. T+1'inci dönem için öngörülen hasar primleri, hasar tutarı modellemesinde ve alınan prim değeri modellemesinde olduğu gibi gerekli hesaplamalar yapılarak elde edilmiştir. Burada T+1'inci dönem için öngörülen hasar primleri, bireysel, ortak ve kredibilite prim değerleri olacak şekilde hesaplamalar yapılmıştır. Çizelge 6.1- Çizelge 6.6’daki 36 durumun her biri için hesaplanan hasar primleri 1000 tekrar ile bulunan sonuçların ortalaması alınarak elde edilmektedir.

Çizelge 6.1. Grup sayısı 5 iken dönem sayısı 3 ve 6 için hata varyansının ($s^2 = (10)^2, (30)^2, (50)^2$) durumlarından hesaplanan tahmin değerleri

Grup=5	t=3			t=6		
	$s^2 = 100$	$s^2 = 900$	$s^2 = 2\,500$	$s^2 = 100$	$s^2 = 900$	$s^2 = 2\,500$
Bireysel Değeri	10 008,5876111575	10 009,8892017497	10 024,2434150448	12 261,264137429	12 237,3373570613	12 257,5520160829
Kredibilite Değeri	10 109,9515968034	10 458,4216832673	10 023,153477486	12 208,826820821	12 065,7988122579	12 257,3167276658
Ortak Değeri	10 005,5017008946	10 008,9699875982	10 019,2892437901	12 259,2000981776	12 235,8703183766	12 254,7294046412

Çizelge 6.2. Grup sayısı 5 iken dönem sayısı 12 ve 18 için hata varyansının ($s^2 = (10)^2, (30)^2, (50)^2$) durumlarından hesaplanan tahmin değerleri

Grup=5	t=12			t=18		
	$s^2 = 100$	$s^2 = 900$	$s^2 = 2\,500$	$s^2 = 100$	$s^2 = 900$	$s^2 = 2\,500$
Bireysel Değeri	16 742,999941488	16 751,3829978497	16 762,2057299409	21 253,889529437	21 248,1924946717	21 253,9784763933
Kredibilite Değeri	16 715,1497260088	15 622,7233112309	16 645,1741885429	21 223,9613649685	21 279,1030520039	21 227,8390939066
Ortak Değeri	16 748,6199436907	16 750,8229659278	16 762,7405273472	21 256,934234104	21 249,8579902615	21 254,591645097

Çizelge 6.3. Grup sayısı 15 iken dönem sayısı 3 ve 6 için hata varyansının ($s^2 = (10)^2, (30)^2, (50)^2$) durumlarından hesaplanan tahmin değerleri

Grup=15	t=3			t=6		
	$s^2 = 100$	$s^2 = 900$	$s^2 = 2\,500$	$s^2 = 100$	$s^2 = 900$	$s^2 = 2\,500$
Bireysel Değeri	29 977,0981682886	30 026,181522768	30 028,1757133714	36 763,8898332083	36 763,7854838074	36 756,720852764
Kredibilite Değeri	30 465,8417383869	30 020,712898149	30 019,9229482494	36 803,1077450595	36 745,0921203564	36 757,2137441273
Ortak Değeri	29 981,4249650804	30 019,0981878438	30 011,1143690291	36 760,6192107198	36 766,8320321779	36 761,1934182807

Çizelge 6.4. Grup sayısı 15 iken dönem sayısı 12 ve 18 için hata varyansının ($s^2 = (10)^2, (30)^2, (50)^2$) durumlarından hesaplanan tahmin değerleri

Grup=15	t=12			t=18		
	$s^2 = 100$	$s^2 = 900$	$s^2 = 2\,500$	$s^2 = 100$	$s^2 = 900$	$s^2 = 2\,500$
Bireysel Değeri	50 282,4419471307	50 238,8221593214	50 219,4848051222	63 746,362721929	63 759,0714542123	63740,0719927191
Kredibilite Değeri	50 316,7177259766	50 241,2982239211	50 220,3815186588	63 705,6004337604	63 518,6011246949	63739,1125570488
Ortak Değeri	50 285,6483776347	50 238,1119551746	50 220,4041958038	63 750,6503604541	63 759,4887235469	63741,3476739618

Çizelge 6.5. Grup sayısı 25 iken dönem sayısı 3 ve 6 için hata varyansının ($s^2 = (10)^2, (30)^2, (50)^2$) durumlarından hesaplanan tahmin değerleri

Grup=25	t=3			t=6		
	$s^2 = 100$	$s^2 = 900$	$s^2 = 2\,500$	$s^2 = 100$	$s^2 = 900$	$s^2 = 2\,500$
Bireysel Değeri	50 002,510926319	49 991,3192554166	49 989,9353262681	61 270,1912100667	61 268,5724865135	61 246,7617136905
Kredibilite Değeri	49 998,2536382618	49 905,3030948356	50 065,9682255662	61 254,5156495686	61 283,4842717523	61 247,5982209177
Ortak Değeri	49 998,0626702497	49 971,4076049309	50 004,1315657524	61 252,8053187113	61 257,2700213248	61 257,4327978554

Çizelge 6.6. Grup sayısı 15 iken dönem sayısı 12 ve 18 için hata varyansının ($s^2 = (10)^2, (30)^2, (50)^2$) durumlarından hesaplanan tahmin değerleri

Grup=25	t=12			t=18		
	$s^2 = 100$	$s^2 = 900$	$s^2 = 2\,500$	$s^2 = 100$	$s^2 = 900$	$s^2 = 2\,500$
Bireysel Değeri	83 751,9297738973	83 737,1506808295	83 742,4337878149	106 271,945363517	106 223,4333358	106 223,288663104
Kredibilite Değeri	83 546,416482218	83 716,7900326678	83 711,4492005491	106 305,619472007	106 290,95361797	106 221,433851068
Ortak Değeri	83 758,7144588635	83 733,6108777657	83 744,3918319243	106 273,285708698	106 222,017340951	106 225,703093679

Aktüerya uygulamalarında sigorta portföyündeki veriler heterojen olarak oluşmaktadır. Ayrıca her bir grup sigortalı için hesaplanan ortalama hasar değerlerine karşılık gelen bireysel primler portföyün heterojen olmasına olanak sağlamaktadır. Fakat sigortalılar aynı (hasar deneyimine) ortalamaya sahip iseler yani portföy homojense ortak primi kullanmak mantıklıdır. Burada ortak ve bireysel prim değerleri arasında ağırlıklı ortalamayı kullanarak sigorta şirketi ve poliçe sahibi için uzlaşma sağlayacak bir değer elde etmek amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda Hachemeister kredibilite prim tahminleri elde edilmiştir.

Çizelge 6.1'de grup sayısı 5 ve hata varyansı 2 500 iken dönem sayısı 3 ve 6 olduğu; Çizelge 6.3'te grup sayısı 15 ve dönem sayısı 3 iken hata varyansı 900 ve 2 500 olduğu; aynı şekilde grup sayısı 15, dönem sayısı 6 ve hata varyansı 2 500 olduğu durumlarda beklenildiği gibi kredibilite prim tahminleri, ortak ve bireysel prim değerleri arasında bir değer aldığı gözlemlenmiştir. Ayrıca Çizelge 6.5'te grup sayısı 25 ve hata varyansı 100 iken dönem sayısı 3 ve 6 olduğu durumlarda da kredibilite prim tahminleri, ortak ve bireysel prim tahminleri arasında değer almıştır. Çizelge 6.1- Çizelge 6.6'daki bireysel prim tahminleri ile ortak prim tahminlerinin birbirlerine oldukça yakın değerler aldıkları görülmektedir.

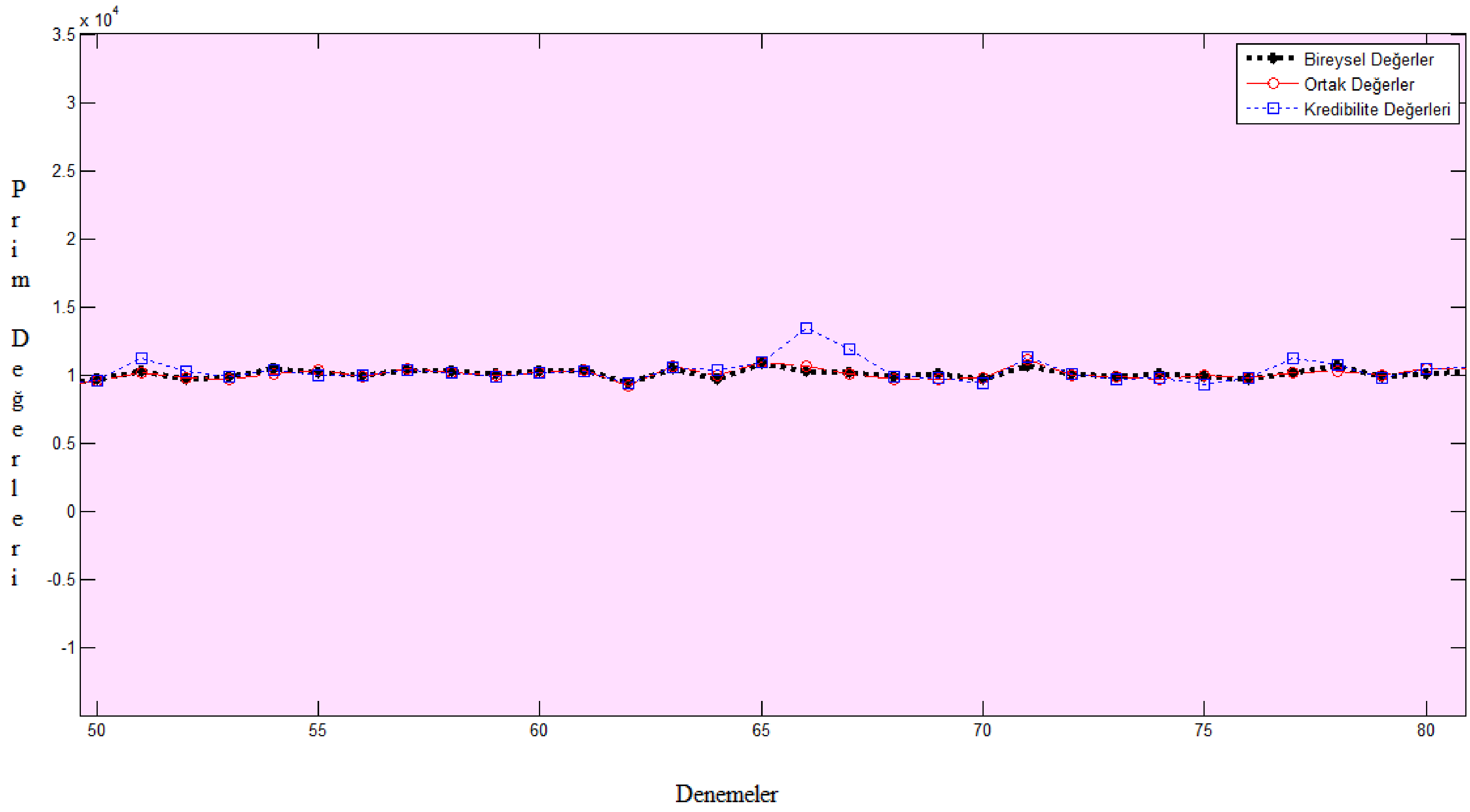
Çizelge 6.1 ve Çizelge 6.2'deki gibi grubun küçük ve dönem sayısının 3 ile 6 olduğu heterojen portföylerde ($s^2 = 2\,500$ için) Hachemeister kredibilite modelini kullanmak daha uygun olacağı söylenebilir. Benzer şekilde grup sayısı 15 olan Çizelge 6.3'te de Hachemeister kredibilite modeli için dönem sayısı 3 ile 6 olan heterojen portföylerde ($t = 3$ için $s^2 = 900, 2\,500$ ve $t = 6$ için $s^2 = 2\,500$) prim tahminlerinde bulunmak daha uygundur. Grup sayısı 25 olan yani grup sayısı çok büyük olan Çizelge 6.5'e bakıldığında dönem sayısı çok küçükken yani dönem sayısının minimum değeri olan 3 iken homojen ($s^2 = 100$) sigorta portföylerinde Hachemeister kredibilite modelini kullanmak iyi sonuçlar verebilir. Benzer şekilde dönem sayısı 3'ten 6'ya çıktığında yani yine dönem sayısı küçük fakat grup sayısı büyükken Hachemeister kredibilite modeli ile elde edilen sonuçları kullanmak uygun olabilir. Özet olarak sigorta portföyündeki dönem ve grup sayıları az iken heterojen portföylerde Hachemeister kredibilite modeli ile elde edilen sonuçları kullanmak mantıklıdır. Grup sayısı çok büyük iken ve dönem sayısı az iken homojen portföyler için de Hachemeister kredibilite modelini kullanmak uygun olabilir. Buradan da görüldüğü gibi Hachemeister kredibilite modeli elimizde az veri varken daha güvenilir sonuçlar elde etmemizi sağlayabilir. Bu durum sigortacı açısından bir avantajdır.

Ayrıca dönem sayısı minimum değere yani 3'e yakın (burada $t = 6$) iken heterojen bir portföyde grup sayısının artmasının kredibilite prim tahmin değerlerinde bir etkisinin olmadığı söylenebilir.

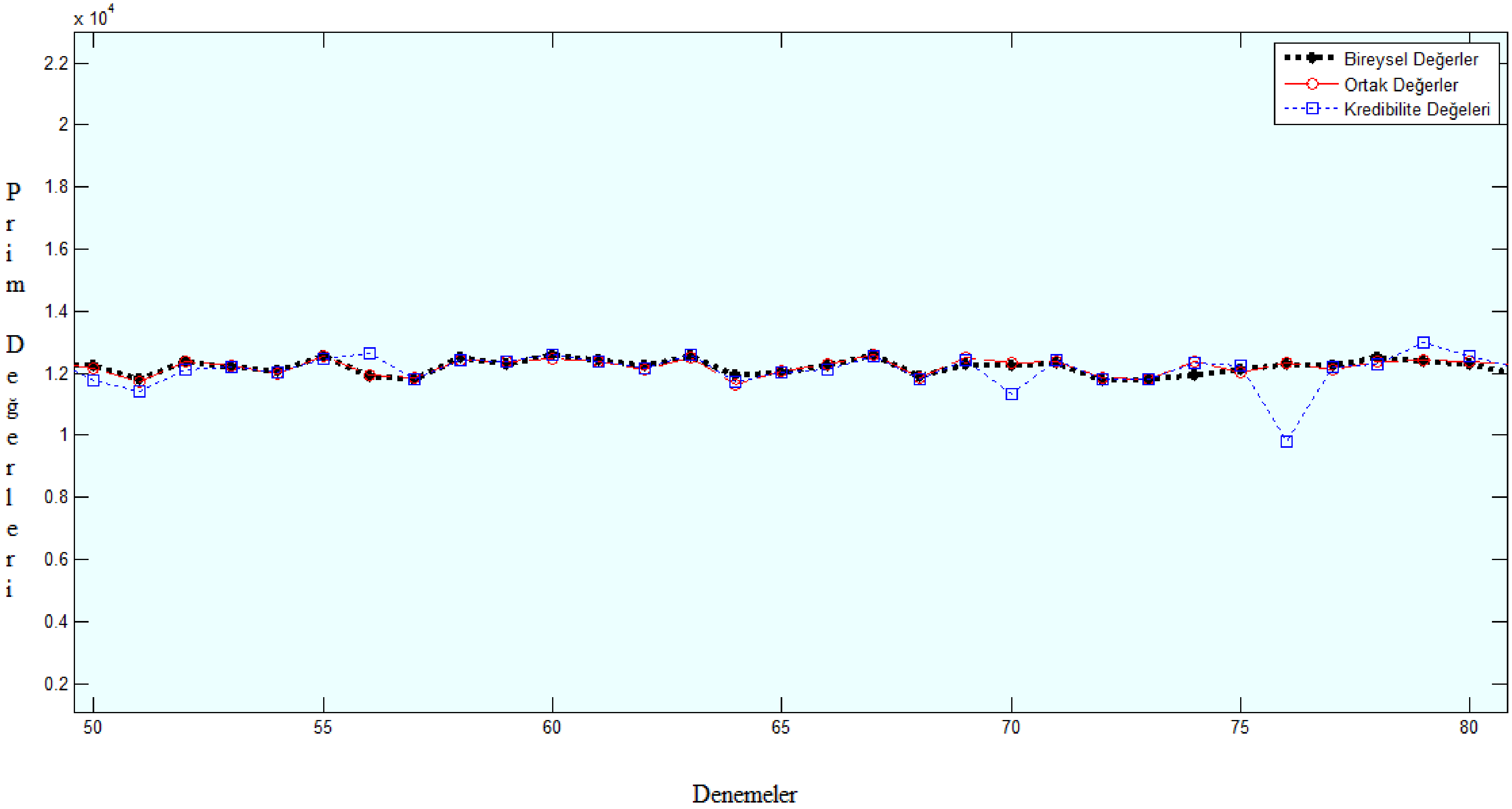
Çizelge 6.1- Çizelge 6.6'daki 36 durumun her biri için hesaplanan hasar primleri 1000 tekrar ile bulunan sonuçların ortalaması alınarak elde edilmiştir. Fakat Şekil 6.1- Şekil 6.8'de görüleceği gibi 1 000 tekrarın hepsi için her üç yöntemle de hesaplanan kredibilite prim değerleri şekil üzerinde işaretlenmiştir. 36 farklı portföyün her birisi için yapılan 1 000 denemelik simülasyon sonuçlarının her birini şekil olarak göstermek yerine, sadece 8 portföy seçilerek şekil üzerinde gösterilmiştir. Bunlar Şekil 6.1- Şekil 6.8'de verilmiştir.

Şekillerden de görüleceği gibi kredibilite prim değeri her zaman bireysel prim değeri ile ortak prim değeri arasında yer almamaktadır. Örneğin Çizelge 6.3'te 49., 53., 58., 62., 74., 77. ve 79. denemelerde kredibilite prim değerinde sapmalar görülmektedir. Veri durağan hale getirildiğinde ve deneme sayısı arttırıldığında bu durum ortadan kalkabilir. Bu başka bir çalışmanın inceleme konusu olabilir.

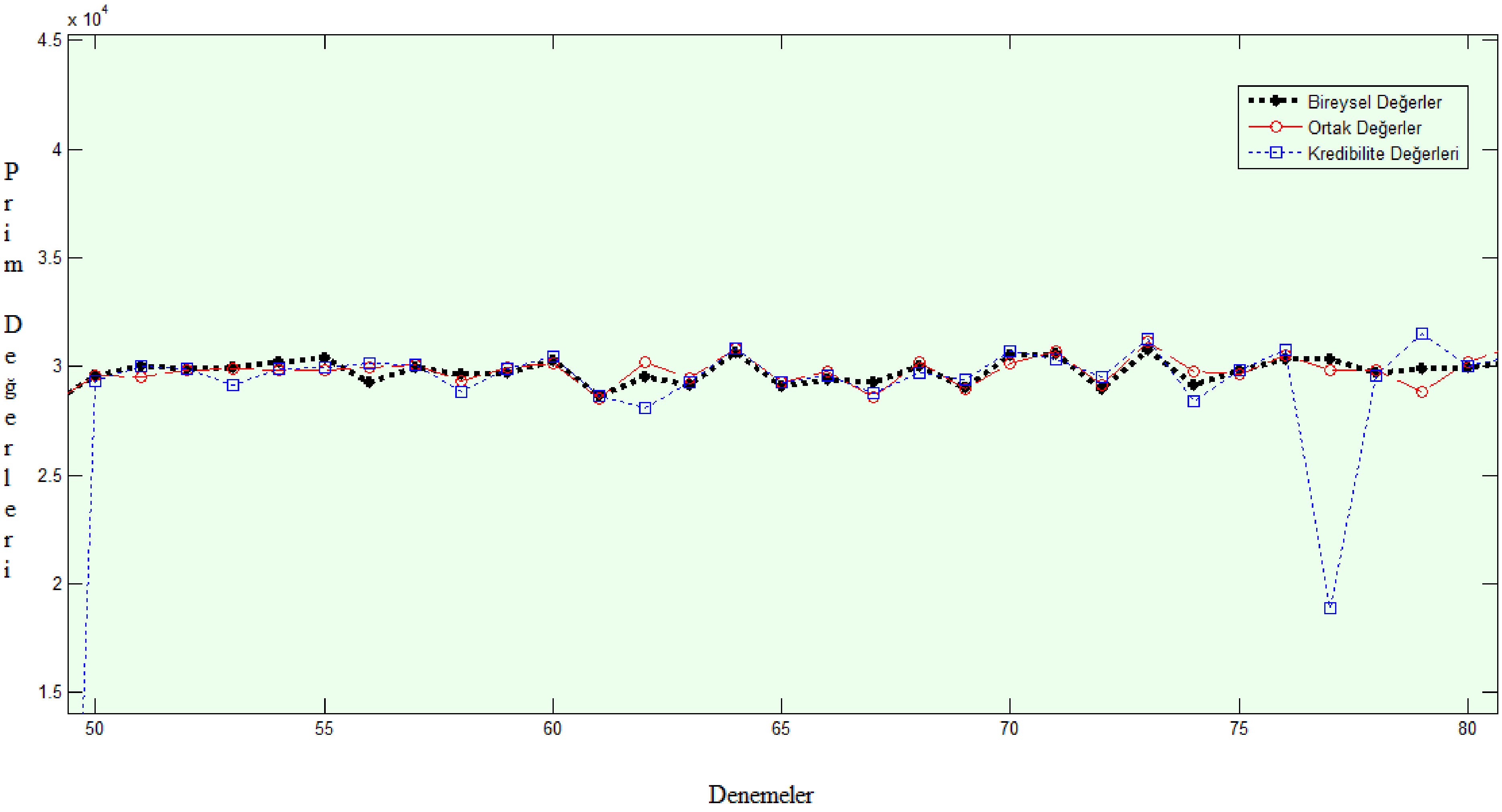
Şekil 6.3'deki portföy Şekil 6.6'daki portföyden daha heterojen bir portföydür. Her iki şekilde incelendiğinde daha homojen olan portföyde yani Şekil 6.6'da kredibilite prim değeri sapmaların ortak prim ve bireysel prim değerlerinden çok farklı olduğu gözlemlenmektedir. Örneğin Şekil 6.3'te 49. ve 77. denemelerde kredibilite prim değerlerindeki sapmalar oldukça büyükken Şekil 6.6'da 51., 53., 55., 70., 75., 76. ve 80. denemelerdeki kredibilite prim değerlerindeki sapmalar oldukça büyüktür. Bu da beklenen bir sonuçtur. Çünkü heterojen portföylerde kredibilite prim değerleri daha adil sonuçlar verir.



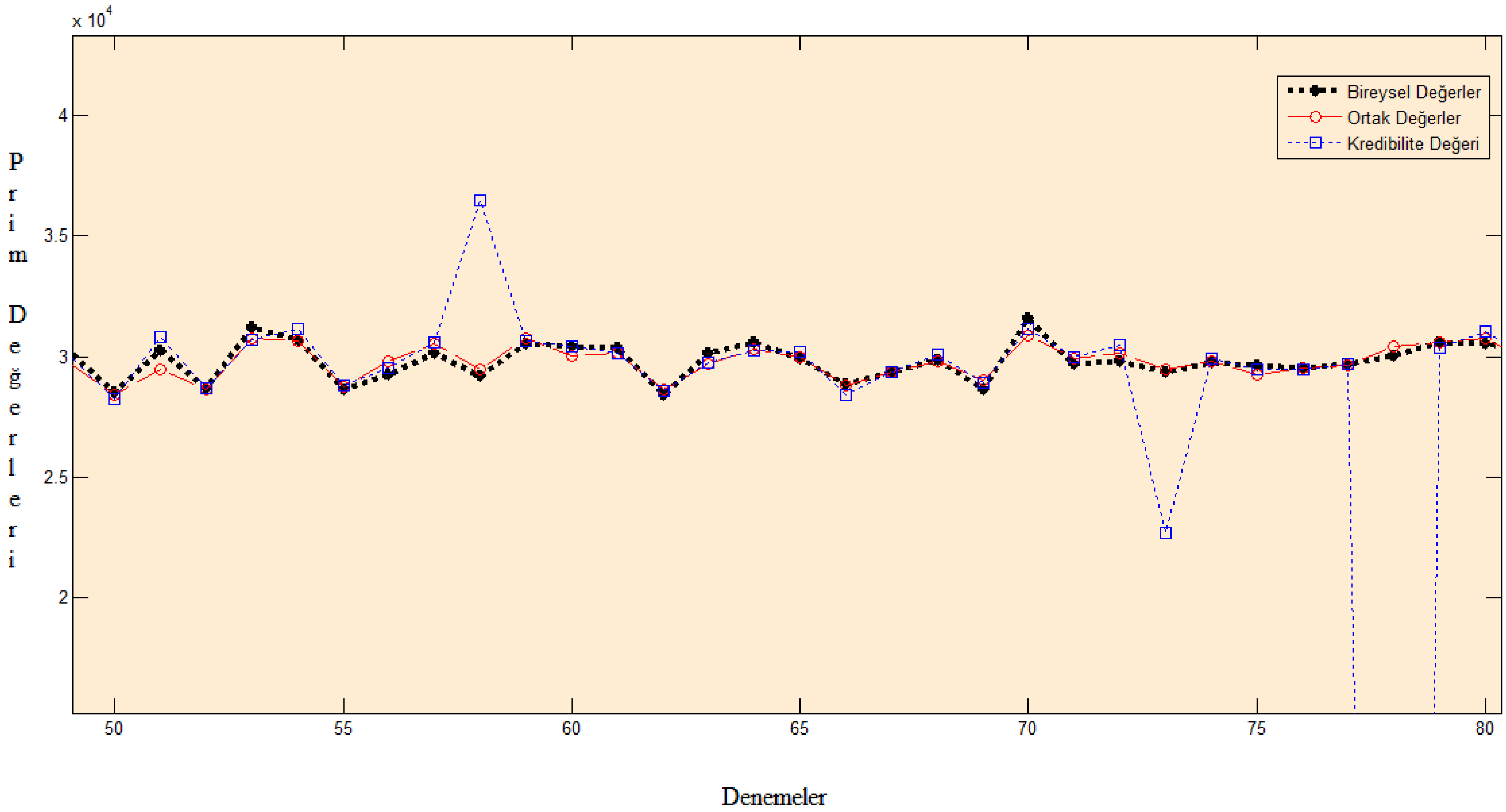
Şekil 6.1. Grup 5, dönem 3 ve $s^2 = 2\ 500$ durumunda simülasyon sonucu elde edilen grafik



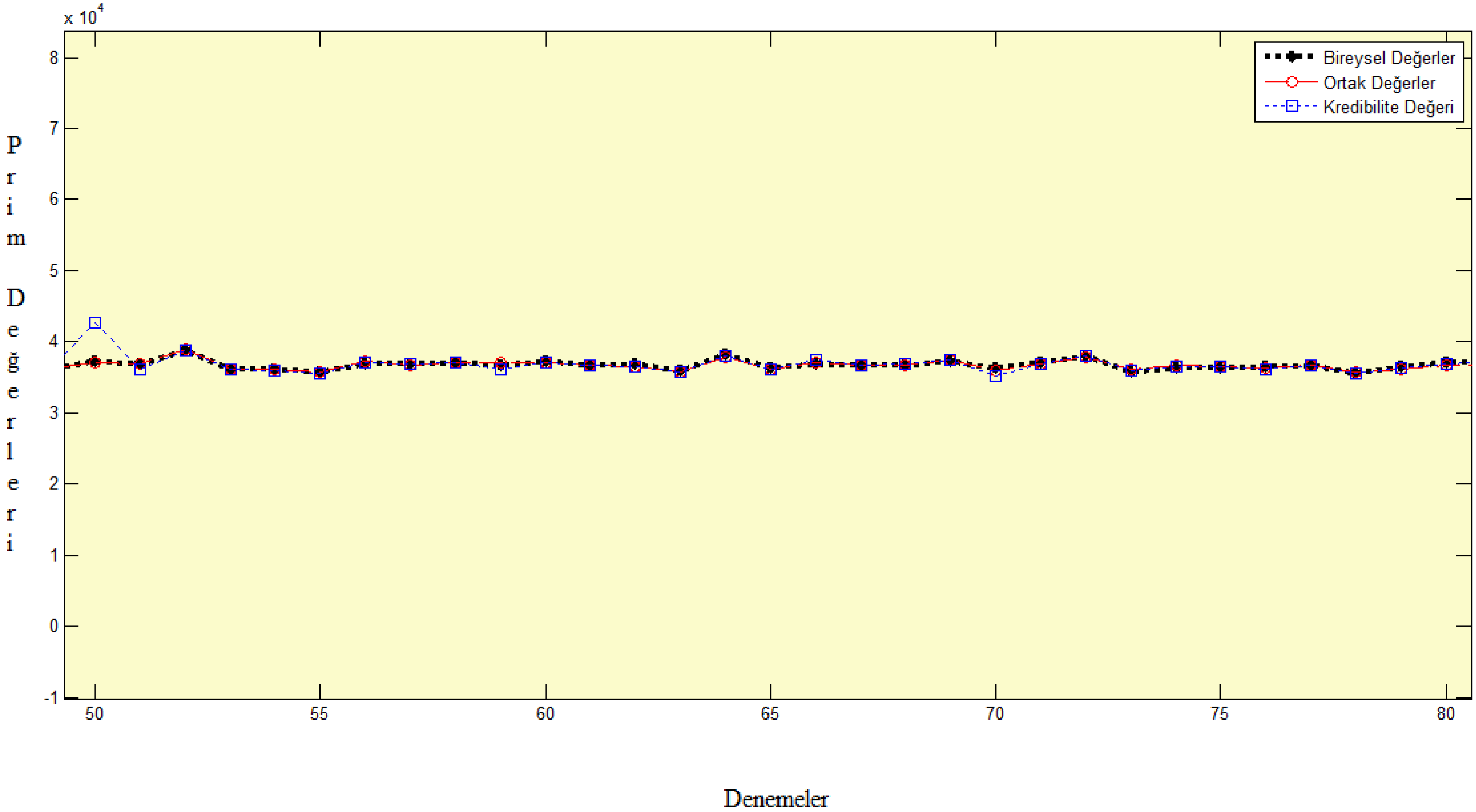
Şekil 6.2. Grup 5, dönem 6 ve $s^2 = 2\ 500$ durumunda simülasyon sonucu elde edilen grafik



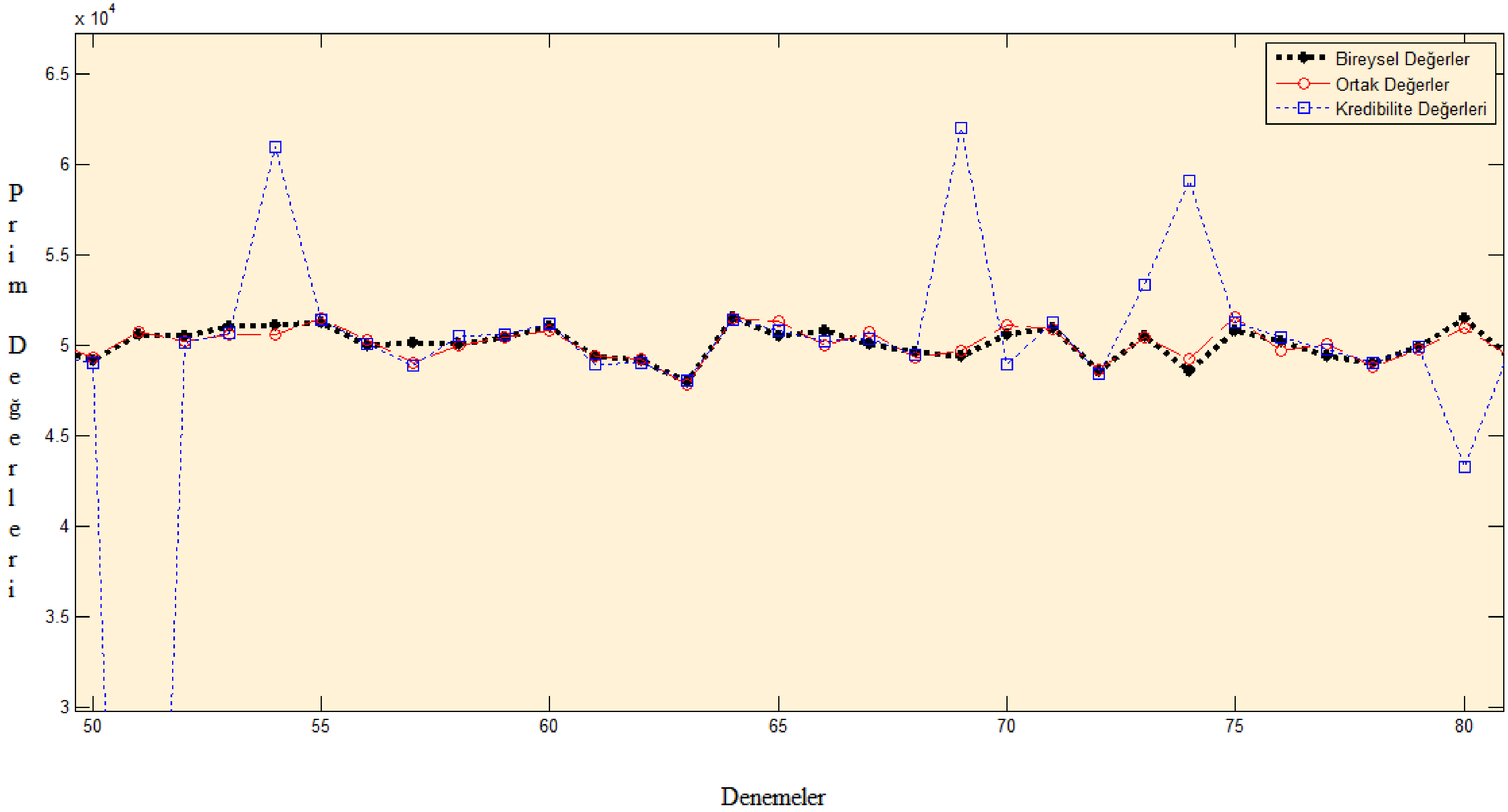
Şekil 6.3. Grup 15, dönem 3 ve $s^2 = 900$ durumunda simülasyon sonucu elde edilen grafik



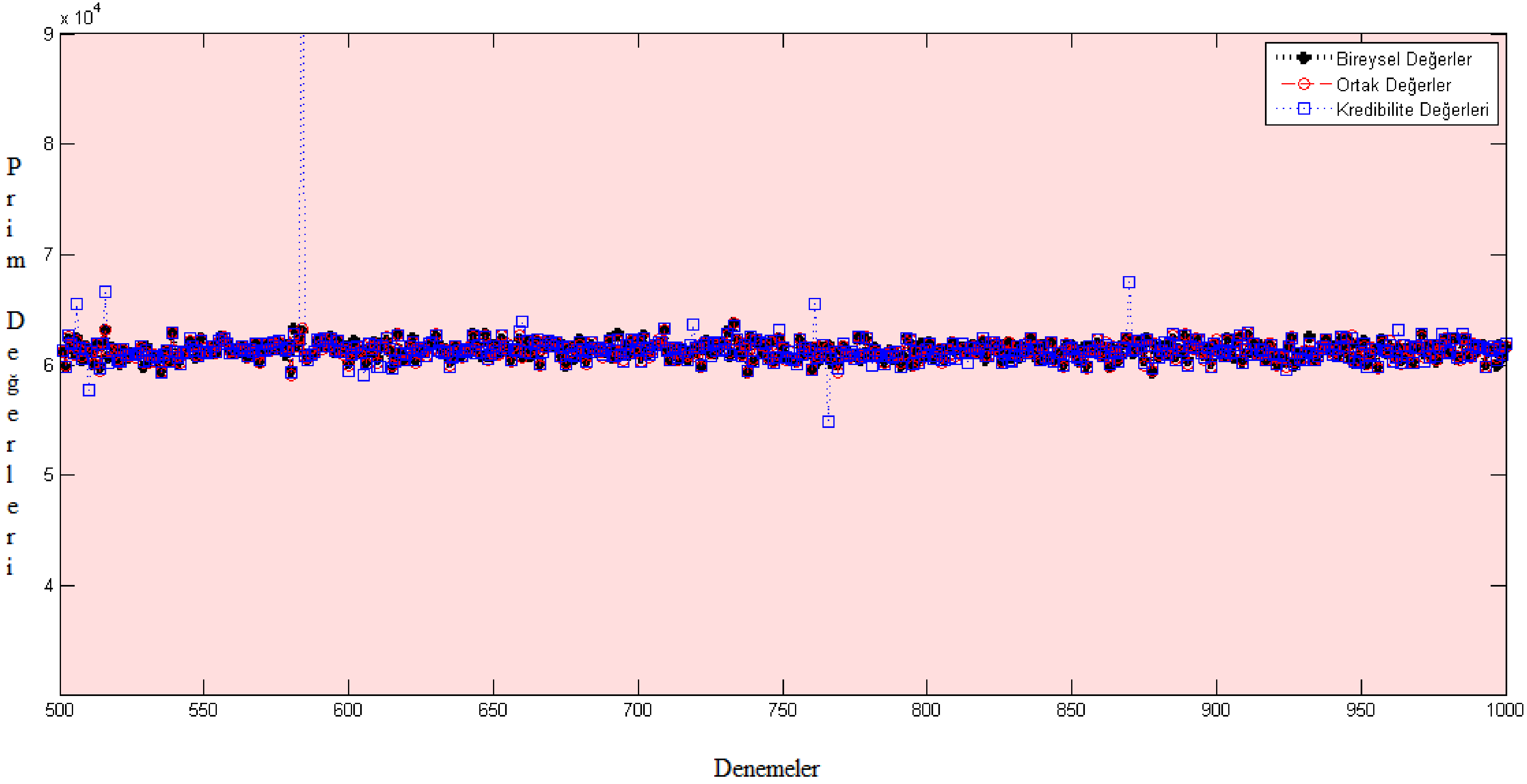
Şekil 6.4. Grup 15, dönem 3 ve $s^2 = 2\ 500$ durumunda simülasyon sonucu elde edilen grafik



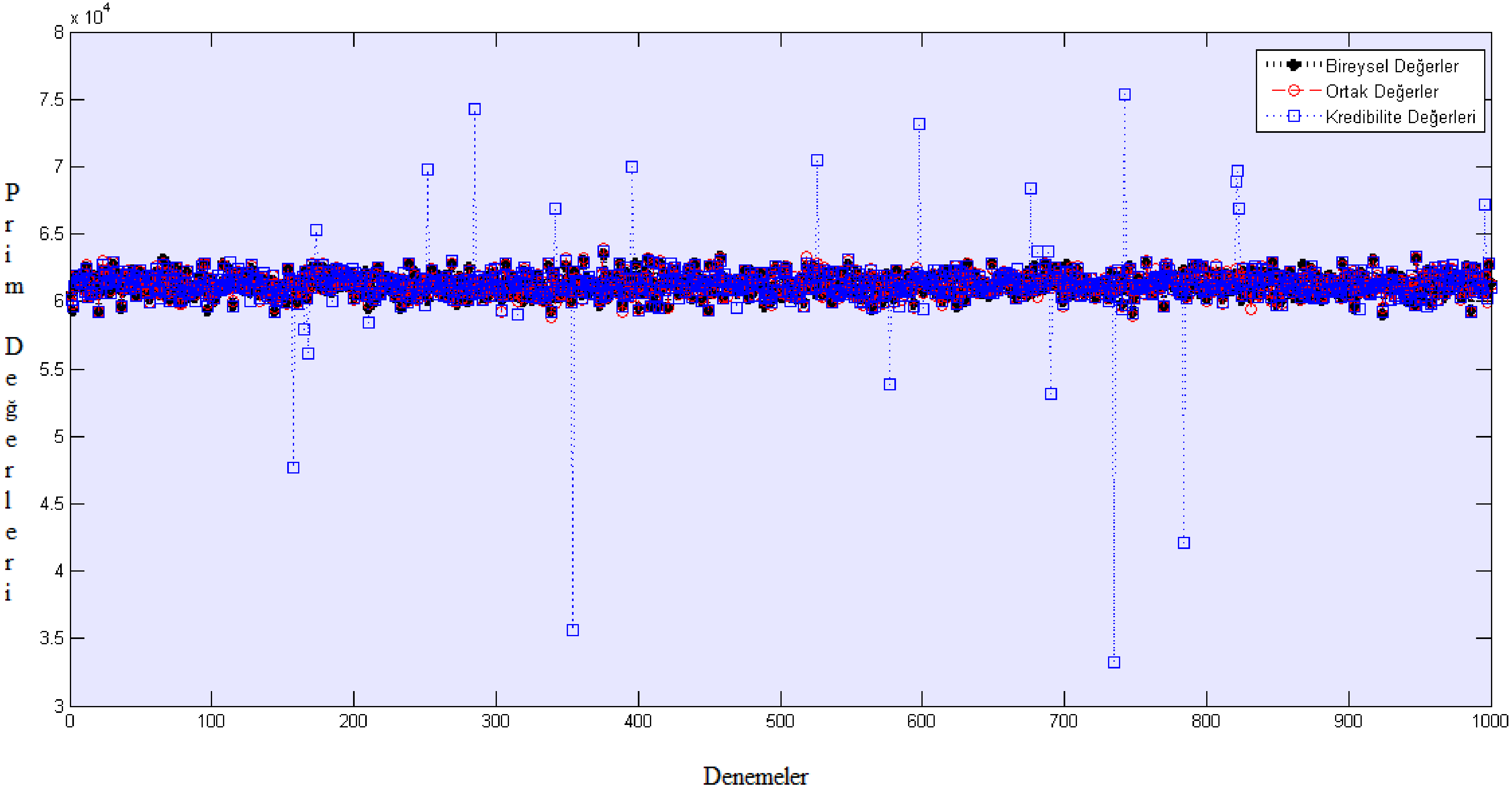
Şekil 6.5. Grup 15, dönem 6 ve $s^2 = 2\,500$ durumunda simülasyon sonucu elde edilen grafik



Şekil 6.6. Grup 25, dönem 3 ve $s^2 = 100$ durumunda simülasyon sonucu elde edilen grafik



Şekil 6.7. Grup 25, dönem 6 ve $s^2 = 100$ durumunda simülasyon sonucu elde edilen grafik



Şekil 6.8. Grup 25, dönem 6 ve $s^2 = 2\ 500$ durumunda simülasyon sonucu elde edilen grafik

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sıklıkla aktüerya uygulamalarında, sigorta şirketi grup sigorta sözleşmeleri için prim değeri belirlemek zorundadır. Ancak gruptaki bazı sigortalılar için sınırlı sayıda deneyim bulunurken bazıları için çok sayıda deneyim mevcut olabilir. Aynı grup içinde bulunan sigortalılar bu durumdan etkilenir. Bu gibi durumlarda sigortalılar için prim değeri belirlenirken geçmiş deneyimlerinin farklılıklarından dolayı bireysel ve ortak deneyimler birlikte dikkate alınmalıdır. Kredibilite teorisinde amaç, poliçe sahiplerinin mevcut deneyimleri ile geçmişe ait deneyimlerinden sonuçlar çıkarmaktır. 1900'lerin başlarından itibaren, kredibilite teorisi yardımıyla bu iki deneyim arasında ağırlıklı ortalama kullanarak hem sigortalı hem de sigortacı için, uzlaşma sağlayacak adil bir prim değeri elde edilmeye çalışılmıştır. Eğer sigorta portföyü homojense, bütün sigortalıların ortak deneyimini temsil eden genel ortalamayı yani ortak primi kullanmak mantıklıdır. Ancak genellikle sigorta portföyleri heterojendir. Bu yüzden sigorta şirketleri iyi veya kötü hasar deneyimlerine sahip poliçe sahiplerini (sigortalıları) ayırt etmek ister. Bu sigortalılar tarafından da istenilen bir durumdur. Dolayısıyla böyle portföylerde sadece ortak primi ele almak uygun değildir. Benzer şekilde sigorta şirketi bir sonraki dönem için sigortalılardan alınması gereken prim değeri olarak bireysel prim değerlerini belirlerse, bu durum ise sigorta şirketi için adil olmayacaktır. Bu sebeple bu iki prim arasında hem sigortacı hem de sigortalı için uzlaşma sağlayacak adil prim değerlerinin belirlenmesi önemlidir. Kredibilite teorisi bu iki uç prim değerine belirli ağırlıklar vererek her iki taraf içinde uzlaşmayı sağlayacak prim değerleri elde etmemizi sağlayan yöntemler topluluğudur. Bu yöntemlerden biri de Hachemeister kredibilite modelidir.

Genellikle kredibilite prim değeri, hasar deneyimi tutarlı olan sigortalılar için bireysel primle ortak prim arasında bir yerdedir. Başka bir ifade ile hasar deneyimi durağan olarak hareket ediyorsa kredibilite prim değeri bireysel primle ortak prim arasında bir yerde olacak şekilde kredibilite faktörüne ağırlık vermektedir. Hasar deneyimi durağan değilse kredibilite prim değeri, hasar deneyimindeki iniş çıkışlardan dolayı veriye güvenmemektedir. Bu sebeple hasar deneyimi durağan olmadığında kredibilite prim değeri genellikle bireysel prim ile ortak prim arasında yer almamaktadır.

Sigorta sektöründe faaliyet gösteren firmaların bir sonraki sigorta döneminde ortaya çıkabilecek hasarları karşılamaya yetecek kadar mali güce sahip olmaları gerektiği açıktır. Bunun için, firmaların bir sonraki sigorta döneminde oluşabilecek hasar talepleri karşısında, ödenecek hasar tutarını karşılayabilmek amaçlı öngörülen hasar tutarını hesaplanması gerekir. Burada portföy homojen ise, sigortalılara yüklenecek prim, tüm portföyün ortalaması olarak belirlenir. Diğer yandan, sigortalıların geçmiş hasar bilgisi yeterince geniş ve portföy heterojen ise, sigortalının bireysel ortalaması prim olarak belirlenebilir (Dannenburg ve diğerleri, 1996). Bu çalışmada elde edilen sonuçlar da bu durumu destekler niteliğindedir. Sonuç olarak sigorta portföyündeki dönem ve grup sayıları az iken heterojen portföylerde Hachemeister kredibilite modeli ile elde edilen sonuçları kullanmak mantıklıdır. Grup sayısı çok büyük iken ve dönem sayısı az iken homojen portföyler içinde Hachemeister kredibilite modelini kullanmak uygun olabilir. Buradan da görüldüğü gibi Hachemeister kredibilite modeli elimizde az veri varken daha güvenilir sonuçlar elde etmemizi sağlayabilir. Bu durum sigortacı açısından bir avantajdır. Ayrıca dönem sayısı minimum değere yani 3'e yakın (burada $t = 6$) iken heterojen bir portföyde grup sayısının artmasının kredibilite prim tahmin değerlerinde bir etkisinin olmadığı söylenebilir.

Uygulamada kullanılan veri yapısında açıklayıcı değişken olarak dönemler (t =1,2,...,T) kullanılmasından dolayı sadece bağımlı değişkenle ilgili bilgiden yararlanılmıştır. Bu sebeple, çeşitli açıklayıcı değişkenlerin olduğu veri kullanılarak Hachemeister kredibilite modelinin kredibilite tahmin değerlerinin elde edilmesi şeklinde yeni bir çalışma önerilebilir.

KAYNAKLAR

Bailey, A. L. (1945). A Generalized Theory of Credibility. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 32: 13–20.

Bailey, A. L. (1950). Credibility Procedures, Laplace’ s Generalization of Bayes Rule and the Combination of Collateral Knowledge with Observed Data. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 37: 7–23.

Bühmann, H. (1967). Experience Rating and Credibility. *ASTIN Bulletin*, 4: 199–207.

Bühlmann, H. and Straub, E. (1970). Glaubwürdigkeit für Schadensätze. *Mitt. Ver. Schweiz. Ver.*, 70(1): 111-133.

Bühlmann, H. and Gisler, A. (2005). *A Course in Credibility Theory and its Applications,* 8: 199–218.

Chang-Soo, L. (1991). *Time series models for the credibility estimations of insurance premiums,* A thesis submitted in partial fulfillment of the requirements for the Doctor of Philosophy degree in Statistics in the Graduate College of The University of Iowa, Iowa, 17-20.

Chen, X. X. (2008). *Estimation of Structural Parameters in Credibility Context Using Mixed Effects Models.* University of Hong Kong.

Cossette, H. and Luong, A. (2003). Generalized least squares estimators for cavariance parameters for credibility regression models with moving average errors. *Insurance: Mathematics and Economics,* 32, 281-293.

De Vylder, F. (1978). Paramater Estimation in Credibility Theory. *ASTIN Bulletin,* 10: 99-112

De Vylder, F. (1981). Practical Credibility Theory with Emphasis on Optimal Parameter Estimation. *ASTIN Bulletin,* 12: 115-132.

Dannenburg, D. (1995). Crossed Classification Credibility Models. *In. Trans. 25th Int. Congress of Actuaries,* 4: 1–36

Dannenburg, D. R., Kaas, R., Goovaerts, M. J. (1996). *Practical Actuarial Credibility Models. Institute of Actuarial Science and Econometrics,* University of Amsterdam, The Netherlands, 250-300.

Ebegil, M. (2006). A Study to Examine Bühlmann-Straub Credibility Model in Generalized Linear Models. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1,* 55 (2), 9-16.

Ebegil, M. (2007). *Kredibilite Teorisinde Parametre Tahmini ve İstatistiksel Yaklaşım*, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 48-78.

Erdal, A. (2014). *Klasik Kredibilite Modellerinde Kredibilite Faktörün İncelenmesi*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 25-75.

Frees, E.W., Young, V.R. and Luo, Y. (1999). A Longitudinal Data Analysis Interpretation of Credibility Models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 24 (3): 229–247.

Frees, E. W., Wang, P. (2005). Credibility Using Copulas, *North American Actuarial Journal*, 9 (2), pp. 31-48.

Goovaerts, M. J., Kaas, R., Van Heerwaarden, A. E. and Bauwelinckx, T. (1990). *Effective Actuarial Methods*, Amsterdam, Holland: North Holland, pp. 158.

Goulet, V. (1998). Principles and Application of Credibility Theory. *Journal of Actuarial Practice,* 6: 5–62.

Hachemeister, A. C. (1975). *Credibility for Regression Models with Application to Trend* (Reprint), New York.

Hardy, M. R. and Panjer, H. H. (1998). A credibility approach to mortality risk. *ASTIN Bulletin*, 28: 269-283.

Herzog, T. N. (1999). *Introduction to Credibility Theory*. 3rd ed. ACTEX Publications, Winsted, 11–145.

Kam Fung, W., Ho Lo, C. And Yi Zhu, Z. (2007). Structural Parameter Estimation Using Generalized Estimating Equations for Regression Credibility Models. *ASTIN Bulletin*, 37(2): 323–343.

Kremer, E. (1994). Robust Credibility Via Robust Kalman Filtering. *ASTIN Bulletin*, 24(2): 221–233.

Klugman, S., Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (1998). *Loss Models*, Wiley, New York, pp. 410.

Klugman, S., Panjer, H., Wilmot, G. (2004). *Loss Models from Data to Decisions*, Willey, New York.

Laird, N. M. and Ware, J. H. (1982). *Random-Effects Models for Longitudinal Data*. Biometrics, 38 (4): 963–974.

Ledolter, J., Klugman, S., Lee, C-S. (1991). *Credibility Models With Time-Varying Trend Components*. Workshop.

Longley-Cook, L. H. (1992). *An Introduction To Credibility Theory*. PCAS Vol 49, pp. 194-221.

Loo, Y. (2000). *Modern Statistical Methods In Credibility Theory,* A dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, University of Wisconsin – Madison, 1-5.

Luong, A. and Cossette, H. (2003). Generalized least squares estimators for covariance parameters for credibility regression models with moving average errors. *Insurance: Mathematics and Economics,* 32 (2003), 281–293.

Mayerson, A. L. (1964). A Bayesian View of Credibility. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 51: 85–104.

McCulloch, P. and Nelder, J. A. (1989). *Generalized Linear Models*, Monographs on Statistics and Applied Probability 2^{nd} ed", Chapman and Hall, New York, 423–431.

Mowbray, A. H. (1914). How Extensive a Payroll is Necessary to Give a Dependable Pure Premium?. *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 1: 24–30.

Neuhaus, W. (1987). Early Warning. *Scandmavtan Actuartal Journal,* 128-156.

Norberg, R. (1979). The Credibility Approach to Ratemaking. *Scandinavian Actuarial Journal*, 181-241.

Norberg, R. (1986). Hierarchical Credibility: Analysis of a Random Effect Linear Model with Nested Classification. *Scandinavian Actuarial Journal,* 204-222.

Özer, M. (2004). *Hiyerarşik Kredibilite Modeli ve İki Aşamalı Hiyerarşik Model*, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 1-10.

Pitselis, G. (2013). A review on robust estimators applied to regression credibility. Journal *of Computational and Applied Mathematics*, 239 (2013), 231–249.

Searles. R., Casella, G. and McCulloch, E. C. (1992). *Variance Components*. (3. Ed.). A Wiley-Interscience Publication, 44-46.

Sundt, B. (1979). A Hierarchical Credibility Regression Model. *Scandinavian Actuarial Journal*, 107-114.

Schnieper, R. (1995). On the Estimation of the Credibility Factor: A Bayesian Approach. *ASTIN Bulletin*, 25(2): 137–151

Tiryaki, E. (2010). *Basit Doğrusal Regresyon Modeli için Bazı Sağlam Tahmin Edicilerin Karşılaştırılması*, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 10-12.

Turner, B. J. (2004). *Credible Risk Classification-How to Create Risk Classification Systems with the Maximum Price Differentiation While Addressing Concerns of Credibility,* Casualty Actuarial Society, Arlington, Virginia, Winter: 171–210.

Whitney, A. (1918). The Theory of Experience Rating. Proceedings of the Casualty *Actuarial Society*, 4: 274–292.

Young, V. R. (1997). Credibility Using Semiparametric Models. *ASTIN Bulletin*, 27(2): 273–285.

İnternet: Türkiye Sigorta, Reasürans, Emeklilik Şirketleri Birliği. Türkiye Sigorta Birliği Resmi Trafik İstatistikleri. 2015-01-09. URL: http://www.webcitation.org/query?url=http%3A%2F%2Fwww.tsb.org.tr%2Fresmi-istatistikler.aspx%3FpageID%3D909&date=2015-01-09 . Son Erişim Tarihi: 2015-01-09.

EKLER

Ek-1. AEKK yönteminde parametre tahminlerinin elde edilmesi

Eş. 4.9'daki $\sum_t w_{jt}\left(Y_{jt} - g - hX_{jt}\right)^2$ ifadenin g'ye göre kısmi türevi alındığında

$$\frac{\partial Q}{\partial g} = 2\sum_t w_{jt}\left(Y_{jt} - g - hX_{jt}\right)(-1) = 0$$

$$= (-2)\sum_t\left(w_{jt}Y_{jt} - w_{jt}g - w_{jt}hX_{jt}\right) = 0$$

$w_{j\Sigma}$ sabit ve $w_{j\Sigma} = \sum_t w_{jt}$ olduğundan,

$$= \frac{w_{j\Sigma}}{w_{j\Sigma}}\left[\sum_t w_{jt}Y_{jt} - \sum_t w_{jt}g - \sum_t w_{jt}hX_{jt}\right] = 0$$

$$= w_{j\Sigma}\left[\underbrace{\sum_t \frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}}Y_{jt}}_{Y_{jw}} - \frac{\sum w_{jt}}{w_{j\Sigma}}g - h\underbrace{\sum_t \frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}}X_{jt}}_{X_{jw}}\right] = 0$$

Eş. 4.10 ve Eş. 4.11 ifadeleri kullanarak

$$Y_{jw} - g - hX_{jw} = 0 \qquad \rightarrow \qquad g = Y_{jw} - hX_{jw} \tag{1.1}$$

elde edilir. Eş. 4.9'daki ifade h'a göre kısmi türevi alındığında,

$$\frac{\partial Q}{\partial h} = 2\sum_t w_{jt}\left(Y_{jt} - g - hX_{jt}\right)\left(-X_{jt}\right) = 0$$

$$= (-2)\sum_t w_{jt}X_{jt}\left(Y_{jt} - g - hX_{jt}\right) = 0$$

$$= \sum_t w_{jt}\left(Y_{jt}X_{jt} - gX_{jt} - hX_{jt}^2\right) = 0$$

$$= \sum_t w_{jt}\left(Y_{jt}X_{jt} - gX_{jt} - hX_{jt}^2\right) = 0$$

$$= \sum_t w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - g\sum_t w_{jt}X_{jt} - h\sum_t w_{jt}X_{jt}^2 = 0$$

$$h\sum_t w_{jt}X_{jt}^2 = \sum_t w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - g\sum_t w_{jt}X_{jt}$$

sonucu elde edilir. Eş. 1.1'deki g ifadesini yerine yazılırsa,

$$h\sum_t w_{jt}X_{jt}^2 = \sum_t w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - \left[Y_{jw} - hX_{jw}\right]\sum_t w_{jt}X_{jt}$$

$$h\sum_t w_{jt}X_{jt}^2 = \sum_t w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - \left[\frac{\sum w_{jt}Y_{jt}}{w_{j\Sigma}} - h\frac{\sum w_{jt}X_{jt}}{w_{j\Sigma}}\right]\sum_t w_{jt}X_{jt}$$

Ek-1. (devam) AEKK yönteminde parametre tahminlerinin elde edilmesi

$$hw_{j\Sigma}\sum_t w_{jt}X_{jt}^2 = w_{j\Sigma}\sum_t w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - \sum w_{jt}Y_{jt}\sum_t w_{jt}X_{jt} + h\sum_t w_{jt}^2X_{jt}^2$$

$$h\left(w_{j\Sigma}\sum_t w_{jt}X_{jt}^2 - \sum_t w_{jt}^2X_{jt}^2\right) = w_{j\Sigma}\sum_t w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - \sum w_{jt}Y_{jt}\sum_t w_{jt}X_{jt}$$

$$h = \frac{w_{j\Sigma}\sum_t w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - \sum w_{jt}Y_{jt}\sum_t w_{jt}X_{jt}}{\left(w_{j\Sigma}\sum_t w_{jt}X_{jt}^2 - \sum_t w_{jt}^2X_{jt}^2\right)} \qquad (1.2)$$

ifadesine ulaşılır. Ayrıca Eş. 4.10 ve Eş. 4.11'i kullanarak h yeniden yazılabilir. Buradan,

$$h = \frac{\left(w_{j\Sigma}\sum_t w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - \sum w_{jt}Y_{jt}\sum_t w_{jt}X_{jt}\right)\frac{1}{w_{j\Sigma}}}{\left(w_{j\Sigma}\sum_t w_{jt}X_{jt}^2 - \sum_t w_{jt}^2X_{jt}^2\right)\frac{1}{w_{j\Sigma}}}$$

$$= \frac{\sum_t w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - \frac{\overbrace{\sum w_{jt}Y_{jt}}^{Y_{jw}}}{w_{j\Sigma}} w_{j\Sigma} \frac{\overbrace{\sum_t w_{jt}X_{jt}}^{X_{jw}}}{w_{j\Sigma}}}{\sum_t w_{jt}X_{jt}^2 - w_{j\Sigma}\underbrace{\frac{\sum_t w_{jt}X_{jt}}{w_{j\Sigma}}}_{X_{jw}}\underbrace{\frac{\sum_t w_{jt}X_{jt}}{w_{j\Sigma}}}_{X_{jw}}}$$

$$= \frac{\sum_t w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - w_{j\Sigma}Y_{jw}X_{jw}}{\sum_t w_{jt}X_{jt}^2 - w_{j\Sigma}X_{jw}^2} \qquad (1.3)$$

sonucu elde edilir. Ayrıca Eş. 1.3'ü

$$h = \frac{\sum w_{jt}(Y_{jt} - Y_{jw})(X_{jt} - X_{jw})}{\sum w_{jt}(X_{jt} - X_{jw})^2}$$

biçiminde yazmak mümkündür.

Ek-2. Ortak model için AEKK yönteminde parametre tahminlerinin elde edilmesi

Burada $\sum_{j,t} w_{jt}\left(Y_{jt} - g - hX_{jt}\right)^2$ ifadenin g'ye göre kısmi türevi alındığında

$$\frac{\partial Q}{\partial g} = 2\sum_{j,t} w_{jt}\left(Y_{jt} - g - hX_{jt}\right)(-1) = 0$$

$$= (-2)\sum_{j,t}\left(w_{jt}Y_{jt} - w_{jt}g - w_{jt}hX_{jt}\right) = 0$$

$w_{j\Sigma}$ sabit ve $w_{j\Sigma} = \sum_t w_{jt}$ olduğundan,

$$= \frac{w_{j\Sigma}}{w_{j\Sigma}}\left[\sum w_{jt}Y_{jt} - \sum w_{jt}g - \sum w_{jt}hX_{jt}\right] = 0$$

$$= w_{j\Sigma}\left[\underbrace{\sum \frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}} Y_{jt}}_{Y_{ww}} - \frac{\sum w_{jt}}{w_{j\Sigma}} g - h\underbrace{\sum \frac{w_{jt}}{w_{j\Sigma}} X_{jt}}_{X_{ww}}\right] = 0$$

Eş. 4.14 ve Eş. 4.15 ifadeleri kullanarak

$$Y_{ww} - g - hX_{ww} = 0 \qquad \rightarrow \qquad g = Y_{ww} - hX_{ww} \qquad (2.1)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\sum_{j,t} w_{jt}\left(Y_{jt} - g - hX_{jt}\right)^2$ ifade h'a göre kısmi türevi alındığında,

$$\frac{\partial Q}{\partial h} = 2\sum_{j,t} w_{jt}\left(Y_{jt} - g - hX_{jt}\right)\left(-X_{jt}\right) = 0$$

$$= (-2)\sum_{j,t} w_{jt}X_{jt}\left(Y_{jt} - g - hX_{jt}\right) = 0$$

$$= \sum_{j,t} w_{jt}\left(Y_{jt}X_{jt} - gX_{jt} - hX_{jt}^2\right) = 0$$

$$= \sum_{j,t} w_{jt}\left(Y_{jt}X_{jt} - gX_{jt} - hX_{jt}^2\right) = 0$$

$$= \sum w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - g\sum w_{jt}X_{jt} - h\sum w_{jt}X_{jt}^2 = 0$$

$$h\sum w_{jt}X_{jt}^2 = \sum w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - g\sum w_{jt}X_{jt}$$

sonucu elde edilir. Eş. 2.1'deki g ifadesini yerine yazılırsa,

$$h\sum w_{jt}X_{jt}^2 = \sum w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - \left[Y_{jw} - hX_{jw}\right]\sum w_{jt}X_{jt}$$

Ek-2. (devam) Ortak model için AEKK yönteminde parametre tahminlerinin elde edilmesi

$$h\sum w_{jt}X_{jt}^2 = \sum w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - \left[\frac{\sum w_{jt}Y_{jt}}{w_{j\Sigma}} - h\frac{\sum w_{jt}X_{jt}}{w_{j\Sigma}}\right]\sum w_{jt}X_{jt}$$

$$hw_{j\Sigma}\sum w_{jt}X_{jt}^2 = w_{j\Sigma}\sum w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - \sum w_{jt}Y_{jt}\sum w_{jt}X_{jt} + h\sum w_{jt}^2X_{jt}^2$$

$$h\left(w_{j\Sigma}\sum w_{jt}X_{jt}^2 - \sum w_{jt}^2X_{jt}^2\right) = w_{j\Sigma}\sum w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - \sum w_{jt}Y_{jt}\sum w_{jt}X_{jt}$$

$$h = \frac{w_{j\Sigma}\sum w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - \sum w_{jt}Y_{jt}\sum w_{jt}X_{jt}}{\left(w_{j\Sigma}\sum w_{jt}X_{jt}^2 - \sum w_{jt}^2X_{jt}^2\right)} \qquad (2.2)$$

ifadesine ulaşılır. Ayrıca Eş. 4.14 ve Eş. 4.15'i kullanarak h yeniden yazılabilir. Buradan,

$$h = \frac{\left(w_{j\Sigma}\sum w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - \sum w_{jt}Y_{jt}\sum w_{jt}X_{jt}\right)\frac{1}{w_{j\Sigma}}}{\left(w_{j\Sigma}\sum w_{jt}X_{jt}^2 - \sum w_{jt}^2X_{jt}^2\right)\frac{1}{w_{j\Sigma}}}$$

$$= \frac{\sum w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - \overbrace{\frac{\sum w_{jt}Y_{jt}}{w_{j\Sigma}}}^{Y_{ww}} w_{j\Sigma} \overbrace{\frac{\sum w_{jt}X_{jt}}{w_{j\Sigma}}}^{X_{ww}}}{\sum w_{jt}X_{jt}^2 - w_{j\Sigma}\underbrace{\frac{\sum w_{jt}X_{jt}}{w_{j\Sigma}}}_{X_{ww}}\underbrace{\frac{\sum w_{jt}X_{jt}}{w_{j\Sigma}}}_{X_{ww}}}$$

$$= \frac{\sum_{j,t} w_{jt}Y_{jt}X_{jt} - w_{j\Sigma}Y_{ww}X_{ww}}{\sum_{j,t} w_{jt}X_{jt}^2 - w_{j\Sigma}X_{ww}^2} \qquad (2.3)$$

sonucu elde edilir. Ayrıca Eş. 2.3'ü

$$h = \frac{\sum w_{jt}(Y_{jt} - Y_{ww})(X_{jt} - X_{ww})}{\sum w_{jt}(X_{jt} - X_{ww})^2}$$

biçiminde yazmak mümkündür.

Ek-3. Eş. 4.24'teki standartlaştırılmış model için kredibilite tahmin edicilerinin oluşturulması

Eş. 4.24'teki standartlaştırılmış model için kredibilite tahmin edicileri,

$\Lambda_j^* = z_{j1}\left(D_{jw} - \Psi_j^* q_{jw}\right)$; $\Psi_j^* = z_{j2} \frac{\sum_t w_{jt} q_{jt}(D_{jt} - \Lambda_j^*)}{\sum_t w_{jt} q_{jt}^2}$

şeklinde ifade edilir. Burada Eş. 4.33'deki ifadelere gerekli işlemler yapılarak standartlaştırılmış model için kredibilite tahmin edicileri

$$\Lambda_j^* = \frac{z_{j2} z_{j1} q_{jw}(\sum_t w_{jt} q_{jt} D_{jt}) - \left(\sum_t w_{jt} q_{jt}^2\right) z_{j1} D_{jw}}{(q_{jw}\, z_{j1}) z_{j2}(\sum_t w_{jt} q_{jt}) - \left(\sum_t w_{jt} q_{jt}^2\right)}$$

ve

$$\Psi_j^* = \frac{z_{j2} \sum_t w_{jt} q_{jt} D_{jt} - (\sum_t w_{jt} q_{jt}) z_{j1} z_{j2} D_{jw}}{\left(\sum_t w_{jt} q_{jt}^2\right) - (z_{j2} \sum_t w_{jt} q_{jt}) z_{j1} q_{jw}}$$

şeklinde de yazılabilir. Eş. 4.33'deki Λ_j^* ifadesi için uygulanan gerekli işlemler

$$\Lambda_j^* = z_{j1} D_{jw} - z_{j1} \Psi_j^* q_{jw}$$

$$\Psi_j^* (\sum_t w_{jt} q_{jt}^2) = z_{j2} (\sum_t w_{jt} q_{jt} D_{jt} - \sum_t w_{jt} q_{jt} \Lambda_j^*)$$

$$\Lambda_j^* = z_{j1} D_{jw} - z_{j1} \Psi_j^* q_{jw}$$

$$\Psi_j^* \left(\sum_t w_{jt} q_{jt}^2\right) = z_{j2} \sum_t w_{jt} q_{jt} D_{jt} - z_{j2} \sum_t w_{jt} q_{jt} \Lambda_j^*$$

$$\left(-\sum_t w_{jt} q_{jt}^2\right) \quad / \quad \Lambda_j^* = z_{j1} D_{jw} - q_{jw} z_{j1} \Psi_j^*$$

$$z_{j1}\, q_{jw} \quad / \quad z_{j2} \sum_t w_{jt} q_{jt} \Lambda_j^* = z_{j2} \sum_t w_{jt} q_{jt} D_{jt} - \Psi_j^* \left(\sum_t w_{jt} q_{jt}^2\right)$$

Ek-3. (devam) Eş. 4.24'teki standartlaştırılmış model için kredibilite tahmin edicilerinin oluşturulması

$$\left(-\sum_t w_{jt}q_{jt}^2\right)\Lambda_j^* = \left(-\sum_t w_{jt}q_{jt}^2\right)z_{j1}D_{jw} + \left(\sum_t w_{jt}q_{jt}^2\right)q_{jw}z_{j1}\Psi_j^*$$

$$(z_{j1}q_{jw})\,z_{j2}\left(\sum_t w_{jt}q_{jt}\right)\Lambda_j^* = z_{j2}(z_{j1}q_{jw})\left(\sum_t w_{jt}q_{jt}D_{jt}\right) - \Psi_j^*\left(\sum_t w_{jt}q_{jt}^2\right)(z_{j1}q_{jw})$$

$$\begin{aligned}(q_{jw}\,z_{j1})z_{j2}\left(\sum_t w_{jt}q_{jt}\right)\Lambda_j^* - \left(\sum_t w_{jt}q_{jt}^2\right)\Lambda_j^* \\ = z_{j2}(z_{j1}q_{jw})\left(\sum_t w_{jt}q_{jt}D_{jt}\right) - \left(\sum_t w_{jt}q_{jt}^2\right)z_{j1}D_{jw}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_j^*\left[(q_{jw}\,z_{j1})z_{j2}\left(\sum_t w_{jt}q_{jt}\right) - \left(\sum_t w_{jt}q_{jt}^2\right)\right] \\ = z_{j2}(z_{j1}q_{jw})\left(\sum_t w_{jt}q_{jt}D_{jt}\right) - \left(\sum_t w_{jt}q_{jt}^2\right)z_{j1}D_{jw}\end{aligned}$$

biçiminde olup

$$\Lambda_j^* = \frac{z_{j2}z_{j1}q_{jw}\left(\sum_t w_{jt}q_{jt}D_{jt}\right) - \left(\sum_t w_{jt}q_{jt}^2\right)z_{j1}D_{jw}}{(q_{jw}\,z_{j1})z_{j2}\left(\sum_t w_{jt}q_{jt}\right) - \left(\sum_t w_{jt}q_{jt}^2\right)} \qquad (3.1)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde Eş. 4.33'deki Ψ_j^* ifadesi için uygulanan gerekli işlemler

$$\Lambda_j^* = z_{j1}D_{jw} - z_{j1}\Psi_j^* q_{jw}$$

$$\Psi_j^*\left(\sum_t w_{jt}q_{jt}^2\right) = z_{j2}\sum_t w_{jt}q_{jt}D_{jt} - z_{j2}\sum_t w_{jt}q_{jt}\Lambda_j^*$$

Ek-3. (devam) Eş. 4.24'teki standartlaştırılmış model için kredibilite tahmin edicilerinin oluşturulması

$$z_{j1}q_{jw}\Psi_j^* = z_{j1}D_{jw} - \Lambda_j^*$$

$$\Psi_j^*\left(\sum_t w_{jt}q_{jt}^2\right) = z_{j2}\sum_t w_{jt}q_{jt}D_{jt} - z_{j2}\sum_t w_{jt}q_{jt}\Lambda_j^*$$

$$\left(-z_{j2}\sum_t w_{jt}q_{jt}\right) \quad / \quad z_{j1}q_{jw}\Psi_j^* = z_{j1}D_{jw} - \Lambda_j^*$$

$$\Psi_j^*\left(\sum_t w_{jt}q_{jt}^2\right) = z_{j2}\sum_t w_{jt}q_{jt}D_{jt} - z_{j2}\sum_t w_{jt}q_{jt}\Lambda_j^*$$

$$\left(-z_{j2}\sum_t w_{jt}q_{jt}\right)z_{j1}q_{jw}\Psi_j^* = \left(-z_{j2}\sum_t w_{jt}q_{jt}\right)z_{j1}D_{jw} + \left(z_{j2}\sum_t w_{jt}q_{jt}\right)\Lambda_j^*$$

$$\Psi_j^*\left(\sum_t w_{jt}q_{jt}^2\right) = z_{j2}\sum_t w_{jt}q_{jt}D_{jt} - z_{j2}\sum_t w_{jt}q_{jt}\Lambda_j^*$$

$$\Psi_j^*\left[\left(\sum_t w_{jt}q_{jt}^2\right) - \left(z_{j2}\sum_t w_{jt}q_{jt}\right)z_{j1}q_{jw}\right] = z_{j2}\sum_t w_{jt}q_{jt}D_{jt} - \left(\sum_t w_{jt}q_{jt}\right)z_{j1}z_{j2}D_{jw}$$

biçiminde olup

$$\Psi_j^* = \frac{z_{j2}\sum_t w_{jt}q_{jt}D_{jt} - \left(\sum_t w_{jt}q_{jt}\right)z_{j1}z_{j2}D_{jw}}{\left(\sum_t w_{jt}q_{jt}^2\right) - \left(z_{j2}\sum_t w_{jt}q_{jt}\right)z_{j1}q_{jw}} \qquad (3.2)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: BİÇER, Esma
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 27.08.1989, Ankara
Medeni hali	: Bekâr
Telefon	: 0 (543) 635 18 29
e-mail	: esmabicer@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / İstatistik Bölümü	Devam Ediyor
Lisans	Gazi Üniversitesi/ İstatistik Bölümü	2010
Lise	Dr. Şerafettin Tombuloğlu Lisesi	2006

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2013-Halen	PTT A.Ş.	Gişe görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

-

Hobiler

Yüzme, Dans.

GAZİ GELECEKTİR...