GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

BULANIK VERİ ZARFLAMA ANALİZİ MODEL GELİŞTİRME VE UYGULAMASI

Ayhan GÖLCÜKCÜ

DOKTORA TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAYIS 2017

Ayhan GÖLCÜKCÜ tarafından hazırlanan "BULANIK VERİ ZARFLAMA ANALİZİ MODEL GELİŞTİRME VE UYGULAMASI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Hasan BAL

İstatistik, Gazi Üniversitesi ……………………..

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan : Prof. Dr. Halil AYDOĞDU

İstatistik, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ……………………

Üye : Prof. Dr. İhsan ALP

İstatistik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ……………………..

Üye : Prof. Dr. Nezir KÖSE

Ekonometri, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ……………………

Üye : Doç. Dr. H. Hasan ÖRKCÜ

İstatistik, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ……………………

Tez Savunma Tarihi: 08/05/2017

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………………….

Prof. Dr. Hadi GÖKÇEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ayhan GÖLCÜKCÜ
08 / 05 / 2017

BULANIK VERİ ZARFLAMA ANALİZİ MODEL GELİŞTİRME VE UYGULAMASI

(Doktora Tezi)

Ayhan GÖLCÜKCÜ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2017

ÖZET

Yeni bir bulanık VZA modeli geliştirilmesi hedeflendiğinden, bu amaçla gerçekleştirilen araştırmalar sırasında, simpleks kavramına dayanan ve Dantzig tarafından önerilmiş olan simpleks metodu ile bulanık kümeler uygulamalarında önemli bir yere sahip bulunan t-normlarının geometrik olarak yüzeyleri üçgenlerden oluşan çok yüzlü bir nesne tanımladığı görüldü. Bu noktada, bu iki yöntemin ortak bir paydaya sahip olduğu düşüncesi ortaya çıkmış olup, verileri kendi model denklemi içerisinde [0,1] aralığına dönüştüren ve doğrusal programla teknikleri ile çözüm üreten VZA t-normu ilişkisi araştırıldı. Girdilerden veya çıktılardan birisi tek olduğunda VZA, t-normu şartlarını sağladı. Esasen, t-normu uygulamalarında da tek çıktı çok girdi kullanılmasından dolayı yapılan ispatın geçerli olduğu sonucuna ulaşıldı. Bir artı olarak VZA'nın çok çıktı tek girdi durumları için de kullanılabileceği gösterildi. Ayrıca önerilen yöntemin mevcut yöntemlerden uygulama olarak daha pratik olduğu basit örneklerle vurgulandı. Burada önerilen yöntemin hangi yönden bulanık olduğu sorusuna cevap olarak t-normları bulanık kesişime karşılık gelmekte olup, VZA tez kapsamında mevcut durumlara bir alternatif olarak sunuldu. Sonrasında önerilen bu model önce hipotetik bir veri setine sonra eğitim ile ilgili örnek bir veri setine ve ardından UNESCO'nun derlediği ülkelerin yükseköğretim istatistiklerine uygulandı. Tüm sonuçların önerilen modeli gerçeklediği görüldü.

Bilim Kodu	:	20507
Anahtar Kelimeler	:	Bulanık Veri Zarflama Analizi, VZA, Model, t-nom
Sayfa Adedi	:	130
Danışman	:	Prof. Dr. Hasan BAL

FUZZY DATA ENVELOPMENT ANALYSIS MODEL DEVELOPMENT AND APPLICATION

(Ph. D. Thesis)

Ayhan GÖLCÜKCÜ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

May 2017

ABSTRACT

It was aimed to develop a new fuzzy DEA model. During the researches carried out for this purpose, it was seen that the simplex method proposed by Dantzig, which originates from the simplex concept and the t-Norms which have an important role in the applications of fuzzy sets are geometrically describes a triangular multi-faced object. At this point, in the sense that these two methods have a common ground, the relation between the DEA, which transforms the data into a range of [0,1] in its model equation and produces a solution by linear programming techniques and t-norms has been investigated. When one of the inputs or outputs is odd, DEA provided t-norm conditions. In fact, t-norm applications also achieved the result that the proof of single output multiple input usage is valid. As a plus, it was shown that the DEA can also be used for multiple output single input situations. It is also emphasized that the proposed method is more practical than the existing methods. In response to the question of where the proposed method is blurred, the t-norms correspond to the fuzzy intersection, which is presented as an alternative to the existing situations within the scope of the DEA thesis. The proposed model was first applied to a hypothetical data set, then to a sample set of data on education and to the tertiary statistics of countries compiled by UNESCO as an application. It was seen that all the results achieved the proposed model.

Science Code	:	20507
Key Words	:	Fuzzy Data Envelopment Analysis, DEA, Model, t-norm
Page Number	:	130
Supervisor	:	Prof. Dr. Hasan BAL

TEŞEKKÜR

Bu dünyada var olmamın bir vesilesi olan ve doğduğum ilk günden beri nazımı hep çekmiş olan, özellikle de bu eserin vücuda getirilmesi sırasındaki stresli süreçte ekstradan bana destek olan için anne ve babamın haklarını ödeyemem. Ders dönemimde bana kapılarını açarak en ihtiyaç duyduğum anda destek olan kardeşim ile eşinin ve tabi bütün bu insanları benle paylaşan yeğenimin çalışmama dolaylı da olsa katkıları müstesnadır.

Eğitim hayatımın ilk basamağı olan ilkokulda beni en iyi tanıyıp, yolumu bulacak ilk adımların bilgisini bana veren ilkokul öğretmenime, yabancı dili bana öğreten hazırlık sınıfındaki İngilizce öğretmenime, üç tür hata vardır diyerek belki de istatistiğin tohumlarını zihnime atmış olan orta ortaokul edebiyat öğretmenime ve matematik öğretmenlerime, isimlerini burada zikretmesem de öncelikli olarak teşekkürü bir borç bilirim. Bunlara ek olarak, bu tezin yazılmasında gerekli olan istatistik bilimini lisans eğitimimden başlayarak bana kazandıran danışmanım Prof. Dr. Hasan BAL başta olmak üzere Gazi Üniversitesi İstatistik Bölümünün emekli olan, ayrılan eski-yeni tüm hocalarına ayrıca tek tek teşekkür ederim. Bunlar arasından beni genç bir öğrenci iken İstatistik Bölümünün koridorlarından alıp o zamanki adı ile Devlet İstatistik Enstitüsü (DİE) olan TUİK'in akademik organizasyonları ile tanıştıran ve içimde ilk kıvılcımları ateşleyen Prof. Dr. Reşat KASAP'ın hocamın ve beni VZA ile tanıştıran Prof. Dr. İhsan ALP hocamın isimlerini burada zikretmeden geçemem. Tez izleme komiteme dahil olduktan sonra tanıdığım ve konuya farklı bir bilim dalı açısından yaklaşarak ufkumu zenginleştiren Prof. Dr. Nezir KÖSE hocama burada değinmekte fayda görüyorum.

Sadece tezimi değil aynı zamanda öğrencisi olan şahsımı da iyi bir bilim insanı olma yolunda son derece teşvik ederek şekillendiren, bana sağladığı ve kazandırdığı serbestçe ve fütursuzca düşünme yetisinin yanında, değerli yorumları ile ayakları yere basan bir insan olma özelliğini de aynı anda kazandıran, danışman hocam Prof. Dr. Hasan BAL'a ayrıca tekrar tekrar teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge **Sayfa**

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\triangleq$	karşılık gelir
A	teknoloji katsayıları matrisi
z_O	etkinliği hesap edilecek KVB’nin amaç fonksiyonu
μ_r	r. çıktıya ait modelce hesap edilecek ağırlık değeri
y_{rO}	etkinliği hesap edilecek dolayısıyla amaç fonksiyonunda yer alan KVB’nin r. çıktısı
y_{rj}	j. KVB’nin r. çıktısı
v_i	i. girdiye ait modelce hesap edilecek ağırlık değeri
x_{iO}	etkinliği hesap edilecek dolayısıyla amaç fonksiyonunda yer alan KVB’nin i. Girdisi
x_{ij}	j. KVB’nin i. Girdisi
θ	zarfalama formundaki modelce hesap edilen etkinlik sonucu
λ_j	zarflama formundaki modelce hesap edilecek ağırlık değeri

Kısaltmalar	**Açıklamalar**
BCC	Banker, Charnes ve Cooper Modeli
BVZA	Bulanık Veri Zarflama Analizi
CCR	Charnes, Cooper ve Rhodes modeli
DEA	Data Envelopment Analysis
FDEA	Fuzzy Data Envelopment Analysis
KVB	Karar Verne Birimi
OWA	Sıralı ağırlıklı ortalama
VZA	Veri Zarflama Analizi

1. GİRİŞ

Latince bir kavram olan Calculus, esasen taşlar manasına gelse de bu taşların hesaplama amacıyla kullanılmış olmasından dolayı bilimsel kayıtlara her türlü matematiksel hesaplamayı içeren bir kavram olarak girmiştir [1]. Matematiğin sayılar ve bu sayılar arasındaki ilişkileri betimleyen sembollerin bilimi olmasının paralelinde harflerden müteşekkil kelimelerin bilimi olan edebiyat, tarih boyunca iletişim halinde olmuşlardır. Matematiğin herkes için ortak kesin kurallara bağlı yapısına tezat olarak edebiyat kişiye özel, söyleyenin kendi düşünsel dünyasını yansıtmaya çalıştığı ama dinleyenin kendi düşünsel dünyası ile söyleneni algıladığı ve yorumladığı yani herkes için farklı manalar ifade eden yapısı ile bir bilinmezlik ifade eder. Bu puslu dünyalar bileşimi eğitim ile bir ölçüde nesnel birlikteliğe zorlansa da hala içinde öznel kalan bir bulanıklık içerir. Bu durum edebi sanatları ortaya çıkarırken, insanların bu sanatlara olan ilgisi, bilinmezliği çözmek gayreti içindeki matematikçileri de cezbederken, bu cezbediş kelimelerin arkasında yatan öznel dünyanın modellenmesine dönük çalışmaları da beraberinde getirdi [2, 3].

Zadeh'in Bulanık kümeler adını verdiği makalesi [4] kelimelerin, kavramların farklı anlamlandırılmalarından ya da anlamlarının çakışmalarından kaynaklanan karmaşayı bulanıklık olarak gören yaklaşımlara öncü oldu, sonrasında konu üzerindeki çalışmaların ardı arkası kesilmedi[5-20]. Zadeh'in doğrudan kelimelerin anlamlarının matematiksel yorumu üzerinde eserleri de oldu [21-25]. İlginç olan, bu tür çalışmaların yöneylem araştırmacıları tarafından adı konmadan yüzeysel olarak optimizasyon teknikleri içerisinde, kesin olmayışın hesaplanması şeklinde, eşitsizlik içeren denklem sistemlerinin çözümü biçiminde Zadeh'ten önce yapılmaya başlanmış olması, olayın daha ilginç bir yanı ise bu çalışmalardan birinin simpleks metodunun mucidi Dantzig'e ait olmasıdır [2]. Zadeh'in bulanık kümeler adını verdiği ve bulanık mantık ilkelerini çizdiği öncel çalışması, problem çözümüne dönük matematiksel araçları Danzig'in üstadı olduğu yöneylem araştırmasının bir kolu olan matematiksel programlamada bolca bulmuş [26-41] ve bu nedenle bir ayağı bulanık programlama olarak anılmaktadır.

Eldeki kaynaklarla en iyiyi, en uygunu elde etmek olarak tanımlayabileceğimiz optimizasyonun modern anlamdaki geçmişi istatistiğin tarihi ile başlar denilse yanlış olmaz. Kârını en büyük yapmaya çalışan bir kumarbaz olan Gerolamo Cardano'nun meşhur oyunlar ve şansın kitabı adlı eseri hem istatistiğin hem de optimizasyonun temel taşlarından kabul edilir [42-45].

Görece daha yeni olan Yöneylem araştırmasının tarihçesi ise ikinci dünya savaşı yıllarına dayanır [46, 47]. Savaşın hemen öncesinde geliştirilen radar teknolojisinin düşman uçaklarının hücumlarının önlenmesinde nasıl kullanılabileceğini ortaya çıkarmak üzere görevlendirilen bir grup askeri ve sivil uzmanın oluşturduğu ekibi tanımlamak için kullanılan Opertaions Research terimi Türkçeye Yöneylem Araştırması olarak aktarıldı. Esasen harekât araştırması manasına gelmekte olup, bu ve kurulan benzer yeni ekiplerin savaş boyunca sürekli olarak operasyonel yani aktif tutularak araştırma faaliyetlerinde kullanılmaları ile uyguladıkları yöntemlere genel bir ad olarak kullanılmaktadır.

Yöneylem Araştırmasının bir metot olarak ortaya çıkmaya başladığı, ona temel teşkil edecek araştırmaların yapıldığı ama henüz adının konmadığı ikinci dünya savaşının hemen öncesinde birtakım araştırmacılar bu kapsamda doğrusal eşitsizliklerden oluşan denklem sistemlerinin çözümü ile uğraşmaktaydı. Theodore S. Motzkin, 1936'da taşımacılık konusunda çözüm getiren Beiträge zur Theorie der Linearen Ungleichungen (Doğrusal Eşitsilik Teorisine katkılar) başlıklı doktora tezini yayınladı. Rus asıllı bir başka bilim insanı Wassily W. Leontief ise Amerika'da, Harward üniversitesinde, Sektör içi iktisat konusunda girdi-çıktı tablolarını matris şeklinde ifadesi ve bu matris katsayılarını bir şekilde bulma üzerinde çalışmaktaydı. 1939'a gelindiğinde ise William Karush, Doğrusal olmayan programlama için opitmallik koşullarını master tezinde ortaya koydu ama yayınlamadı. Bu koşullar gümümüzde Karush, Khun, Tucker (KKT) şartları olarak bilinen yöntemin altyapısını oluşturdu. Rus matematikçi Leonid V. Kantorovich 1939'da doğrusal programlamanın ilk çözümü olan "Üretimin organizsayonu ve planlanması için matematiksel metotlar" adlı çalışmayı ülkesinde yayınladı ama bu çalışma maalesef kendi ülkesinde ilgi görmedi ve göz ardı edildi. Tjalling C. Koopmans 1941 yılında "piyasaya sürülen ürünlerin üretim yerinden alıcıya en az maliyetle sevkiyatı" konulu bir taşımacılık probleminin çözümü için Frank L. Hitchcock ile eş anlı olarak ama birbirlerinden bağımsız olarak uğraştılar. 1947'ye geldiğimizde artık savaş bitmişti. John von Neumann, Monte Carlo metodu olarak anılan bir çalışmayı bir başka araştırmacı Stanislaw Ulam ile birlikte kısa bir özet olarak yayınladı. [46, 47] Benzeri konularda daha birçok araştırmacının o yıllarda çalışmaları bulunmakla birlikte simpleks metodunun mucidi olan Dantzig "Reminiscences About The Origins Of Linear Programming (Doğrusal Programlamanın

Kökenleri Hakkında Söyleşi)" adlı eserinde simpleks metodunu geliştirirken bu isimler ile istişare ederek görüşlerini aldığını belirtmektedir [48, 49]. Benzer konular üzerinde birbirlerine danışarak bir şekilde doğrusal eşitsizliklerin kullanıldığı problemler üzerinde kimi zaman benzer çözümler üreten bu araştırmacılar Koopmans'ın editörlüğünü yaptığı bir konferans bildirileri kitabı ile tecrübelerini kamuoyu ile paylaştılar [50].

Savaş yıllarında askeri operasyonların bir karar desteği olması nedeniyle harekât araştırmaları (Oparations/Operational Reserarch) olarak nitelendirilen çalışmalar ve bu çalışmalarda kullanılan yöntemler, savaşın bitmesinin ardından askeri olma özelliğini en azından bilimsel camiada kaybetse de yöneticilere karşı karar destek niteliğini halen sürdürmektedir. Bu nedenle hala uluslararası camiada Oparations / Operational Reserarch adının kullanımı sürse de kamunun ve özel sektörün farklı yönetim kademeleri devreye girmiş olduğundan ve yöneticilere karar desteği ağırlık kazandığından Yönetim bilimi manasında "Management Science" da denilmektedir [51]. Dilimize ise her iki kavramın ortak bir kullanımı olarak "Yöneylem Araştırması" şeklinde kullanılmaktadır.

Geçen yıllar içinde yöneylem araştırması yöntemleri, kullanım alanlarına göre oldukça farklılaşarak ayrı ayrı uzmanlık dalları haline geldiler. Koopmans'ın kaynakların etkin bir şekilde paylaştırılmasın dair çalışmaları [52-54] daha sonra literatüre Pareto-Etkinik olarak geçen kavramı kazandıracak olup, bu kavramı mihenk taşı olarak kullanan Veri Zarflama Analizi (VZA) 1978 yılında Yöneylem Araştırmasının yine duayenlerinden olan Abraham Charnes ve William W. Cooper'ın doktora öğrencisi Eduardo Rhodes tarafından önerildi [55, 56].

VZA aradan geçen yıllar içinde kendine özgü bir teknik olarak oldukça gelişmiş, temel VZA modeleri olarak kabul edilen ilk ortaya çıkan CCR (Charnes, Cooper, Rhodes) modeli [55, 56], BCC (Banker, Charnes, Cooper) modeli [57], toplamsal ve çarpımsal modellerine [59, 60] gün be gün varyasyonlar eklendi. Ara ara yapılan derlemeler [59-77] VZA'nın geçen sürede ne kadar dallanıp budaklandığını ortaya koyacak niteliktedir.

Genel bir kabul olarak VZA'da verilerin kesin ve net olması beklenirken, günlük hayatta özellikle karşılıklı rekabetin bulunduğu sektörlerde yöneticilerin alacağı kararlar veriye göre değişim gösterebileceği, verinin ise anlık değişebileceği göz önüne alındığında gerçek verileri kesin ve net olarak bulmak oldukça zordur. Bu şekilde bulunan verilerin büyük çoğunluğu ise anlıktır, derlenip analiz edilinceye kadar geçen sürede veri değişeceğinden elde edilen sonuçların bir anlamı olamaz. Dolayısıyla teorik olarak oldukça kullanışlı olan bir yöntemi pratik olarak kullanmak sıkıntılı olabilir. Her ne kadar kullanılan eşitsizlikler belirsizliğe bir noktaya kadar çözüm olsa da yeterli değildi, bu nedenle Zadeh tarafından önerilen bulanık kümeler [4] yaklaşımı VZA'ya adapte etme gerekliliği ortaya çıktı.

Esasen bulanık mantığa dayalı bulanık işlemler VZA'nın da temel aldığı doğrusal programlama alanında çok daha önceden kullanılmaya başlandı [78]. Buna paralel olarak hızla gelişti [19, 26-28, 30, 31, 38, 79-83]. Bu etkileşim karşılıklı olup, sadece Matematiksel/Doğrusal Programlamayı kullanan araştırmacılar bulanık mantık ve buna bağlı işlemleri kullanmadı, bulanık kümeler üzerine çalışan araştırmacılar da optimizasyon tekniklerine ilgi gösterdi [39, 40, 84-92].

Özelikle Beliakov'un çok değişkenli bulanık analizlerde üyelik fonksiyonlarını ya da farklı karar vericilerin birden fazla durum hakkındaki görüşlerini birlşetirerek ortak bir değere dönüştürme yoluyla hiyerarşik bir sıraya sokma ya da aralarında ayrıma gitmeye yönelik yoğun çalışmaları oldu [83-87, 89, 93-95]. Burada kullandığı regresyona dayalı doğrusal olmayan veriyi kırıklı doğrusal ya da parçalı doğrusal fonksiyonlar (splines) kullanarak betimlemeye dönük çalışmaları, benzer metot kullanan VZA araştırmaları açısından da dikkat çekicidir.

Problem durumu/ konunun tanımı/araştımanın amacı ve önemi

Literatürde, simpleks algoritmasına isim veren simpleks kavramı üçgenlerden oluşan bir çok yüzlü tanımlar [96-100]. Simpleks kavramı ile Simpleks algoritması arasındaki ilişkiyi Dantzig simplex metodunu açıkladığı kitaplarında detayları ile vermektedir [101, 102].

Verinin çok değişkenli olması durumunda bulanık verinin ya da üyelik fonksiyonların birleştirilmesi amacıyla kullanılan araçlardan biri olan temeli üçgen eşitsizliğine [103, 104] dayanan [105] üçgensel normlar (t-normlar) [106-117] kullanılmaktadır. Beliakov, bu amaçla önerilen yöntemleri kullanmak için veriyi birtakım dönüşümler yoluyla zorlarken, çok değişkenli olması durumunda t-normlarının doğrusal programlama problemlerinin çözümünde kullanılan Dantzig'in önerdiği simpleks metoduna kaynaklık eden simplekslere benzerliğini atladığı görüldü.

Araştırmanın amacı ve önemi

Bu çalışma kapsamında yeni bir bulanık VZA modeli geliştirilmesi hedeflenmiş olup, bu amaçla yapılan araştırmalar sırasında bulanık kümeler ile ilgili işlemlerde üçgensel normların önemli bir yer tuttuğu, bulanık kesişim işleminin t-normları ile bulanık birleşim işleminin de t-conormları ile açıklanır. Geometrik olarak hem t-Normlarının hemde Dantzig'in önerdiği simpleks metoduna kaynaklık eden simpleks kavramının yüzeyleri üçgenlerden oluşan bir çok yüzlü cismi tanımlamakta olduğu görüldü. Bu noktada, bu iki yöntemin ortak bir paydaya sahip olduğu düşüncesi ortaya çıkmış olup, verileri kendi model denklemi içerisinde [0,1] aralığına dönüştüren ve doğrusal programla teknikleri ile çözüm üreten VZA'nın da t-normları ile benzer bir işleve sahip olup olmadığı tezin kapsamında araştırıldı. Girdilerden veya çıktılardan birisi tek olmak kaydıyla VZA'nın da t-normu şartlarını sağladığı görüldü. Esasen, t-normu uygulamalarında da tek çıktı çok girdi kullanılmasından yapılan ispatın geçerli olduğu sonucuna ulaşıldı. Bir artı olarak VZA'nın çok çıktı tek girdi durumları için de kullanılabileceği gösterildi. Bu ise tezin literatüre ek bir katkısıdır. Ayrıca tezde VZA'nın basitçe kâğıt kalem kullanılarak uygulanabilirliğine de vurgu yapılmış olup, t-normlarının kullanıldığı diğer uygulamalarda bu gözlemlenmedi. Bu, önerilen yöntemin mevcut yöntemlerden uygulama olarak daha pratiktir olduğunun göstergesidir. Burada sorulabilecek bir soru önerilen yöntemin hangi yönden bulanık olduğudur. Bu soruya cevap bizzat bulanık kümeler kavramını ortaya koyan Zadeh tarafından verilmiş olup; Bulanık olan, geliştirilen yöntemler ve bu yöntemleri geliştirirken kullanılan bulanık mantık ilkeleri değildir. Bulanık olan ortam ya da karar verilmesi gereken durumlardır. Bu bulanık ortam ya da durumlarda karar vermek için kullanılan bulanık mantık ilkeleri kesin kuralları olan yöntemlerdir ve daha önce de bahsedildiği gibi t-normları bulanık kesişime karşılık gelmekte olup, VZA tez kapsamında mevcut durumlara bir alternatif olarak sunuldu. Sonrasında önerilen bu model önce hipotetik bir veri setine sonra eğitim ile ilgili örnek bir veri setine ve ardından UNESCO'nun derlediği ülkelerin yükseköğretim istatistiklerine uygulandı. Tüm sonuçların önerilen modeli gerçeklediği görüldü.

Varsayımlar/sayıltılar

VZA, hem yöntemin kendisince üretilen etkin sınır yüzeyi ile ilgili olarak hem de etkinliği hesap edilecek KVB'lerin içyapısal özelliklerine dair herhangi bir varsayım gerektirmemektedir.

Sınırlılıklar

Gerek VZA gerekse Bulanık mantık literatürü oldukça kapsamlı ve yoğun bir şekilde dünyanın dört bir yanındaki araştırmacılarca araştırılmakta ve literatür oldukça kabarmış olup, mevzuattan kaynaklanan zaman vb. sınırlılıklar içerisinde konu olabildiğince özetlendi.

Tanımlar

Literatürdeki “splines” ve “aggregation” olarak geçen kavramlar henüz dilimize tam karşılık bulmuş değildir. Üstelik farklı bilim dalları için kullanımlarda anlam farkları mevcuttur. Doğrusal olmayan konveks bir fonksiyonu doğru parçalarından oluşan kırıklı/parçalı doğrusal bir fonksiyon ile ifade etmekte kullanılan doğru parçalarını ifade etmekte olan “splines” terimi için “kesitler”, daha çok birbirleri ile doğrudan aritmetik işlemler yardımı ile toplanamayan değerlerin ortak bir değer ile ifade edilmek üzere bir araya getirilmesi, toplulaştırılması manasında kullanılan “aggregation” için “birleştirme” bu amaçla kullanılan “aggregation function” teriminin karşılığı olarak da “birleştirme fonksiyonu” kullanıldı. “crisp” ve “negation” sözlükteki manalarıyla değil Zimmermann’ın onlara atfettiği anlamlara istinaden [19] sırasıyla “çift değerli” ve “tümleyen” olarak kullanıldı. Granülasyon, Türkçeye çevirisi kavramı tam karşılamadığından olduğu şekilde kullanıldı. Literatüre yerleşmiş olan tanımlara ait kısaltmalar ise kısaltmalar dizininde gösterildi.

2. BULANIK MANTIK VE BULANIK KÜMELER

Zimmermann, her ne kadar iki durumlu mantık karşıtı olarak Bertrand Russell'ın Vaguness (Belirsizlik) adlı çalışmasına atıf yapsa da Russell'ın bu alandaki çalışmaları daha eskiye 1903 tarihli Priciples of Mathematics (Matematiğin temelleri) adlı eserine dayanır. [19, 118, 119] Felsefecilerin ve Matematikçilerin bu tartışmalarına otuzlu yıllarda fizikçilerde iki arklı çalışma ile katıldılar ve bir quantum fiziği probleminin çözümü amacıyla oluşturulan iki farklı düşünsel deney ile paradoks olarak üçüncü bir durumun varlığına işaret ettiler [120, 121]. 1952 yılına gelindiğinde Kleene "Introduction to mathematics (Matematiğe giriş)" adlı eserinde bir bölümü üç durumlu mantığa ayırdı ve "doğru" ile "yanlış" ın yanında üçüncü bir durum olarak "unknown (bilinmeyen)" ya da "undefined (tanımlanmamış)" manasında bir "u" durumunu da içeren doğruluk tablolarını verdi ve önerdiği bu üç durumlu mantığın Łukasiewicz'in 1920 tarihli çalışmasında önerdiğinden farklı bir mantık olduğunu belirtti [122][1]. Bu öncü çalışmaların arkasından Zadeh'in 1965'te "Bulanık Kümeler" adlı makalesini yayınladı [4]. Sonrasında konu üzerindeki çalışmaların ardı arkası kesilmedi.

Çalışmasına Bulanık Kümeler adını koyan Zadeh, tanımı daha da ilk cümlesinde verdi; "Bulanık küme, sürekli üyelik derecelerine sahip nesnelerin bir sınıfıdır." [4] Bu tanımı açıklarken kullandığı örnek hayvanlar âlemine ait olup, dışarıdan taksonomi biliminin kurallarına bağlı ve oldukça sistematik gözükmesine karşın sınıflama noktasında yaşanan sıkıntıları da betimlemiştir [123]. Hakikaten de bir kuşun renklerinin daha parlak olması onun başka bir kuş olduğunu gösterir ama başka bir tür olduğunu gösterir mi? İşte bilim camiasında dahi konulmuş kurallar kesin ve net ayrımlar sağlamıyorsa, günlük hayatımızda karşılaştığımız durumların kesin ayrımlar sunmasını ya da durumlar karşısında kesin ayrımlar yapılması çok daha zordur. Hele de analitik felsefenin kurucusu kabul edilen Bertrand Russell'ın yıllar önce vurguladığı gibi [119] dilde belirsizlik varsa, ya da söyleyenin söylemek istediğini dinleyen farklı anlayabiliyorsa aradaki iletişim hakikaten karmaşık bir hal alır. Burada hedeflerin ya da kısıtların belirsiz olduğu bir karar problemi ortaya çıkar. Buradaki belirsizlikten kasıt, söz konusu hedef ya da kısıtlara ait alternatiflerin sınırlarının tam veya kesin olarak çizilmemiş olmasıdır. Zadeh bu tür durumları bulanık kabul edip, bulanık hedef veya kısıtların bir bulanık küme oluşturduğunu gösterdi ve her bir durum için bir üyelik fonksiyonu oluşturarak, üyelik derecelerine göre karar almayı

[1] Bu iki üç durumlu mantığın karşılaştırması Bergman'da mevcuttur [134].

sağlayacak yöntemlerin geliştirilmesinin ilk adımını attı [124]. Zadeh bu noktada bir uyarıyı da yapmaktadır. Bulanık olan, geliştirdiği yöntemler ve bu yöntemleri geliştirirken kullandığı bulanık mantık ilkeleri değildir. Bulanık mantık, biraz önce ifade ettiğimiz şekilde ortamın belirsiz olduğu ve yaklaşık bir yargıya varmanın gerekli olduğu durumlarda kullanılabilecek kesin kuralları olan bir mantıktır [125]. Bulanık mantığı insana ait iki farklı yeteneğin biçimsel olarak ifadesi olarak yorumlayabiliriz. Bu yeteneklerden birincisi bilginin tam olmadığı, kesin olmadığı ya da belirsiz olduğu ortamlarda nedenleri tersine çevirerek mantıklı kararlar alabilme becerisi, diğeri herhangi bir hesaplama ya da ölçüm yapmadan çok çeşitli fiziksel ya da zihinsel görevleri yerine getirme becerisi olarak tanımlanabilir [125]. Hájek, ilkini çok seçenekli mantık olarak nitelendirirken, ikincisini bulanık mantık olarak ele almaktadır [126].

2.1. Temel Kavramalar

Bulanık mantığın özünü derecelendirme ve granülasyon oluşturmaktadır [127]. Zadeh bunlara daha sonra kesinleştirme (precisiation) ve genellenmiş kısıtlar kavramını da ekledi [125]. Burada bir noktayı tekrar vurgulanırsa; bulanık mantığın kendisi bulanık değildir, bulanık olan bulanık mantığın kullanıldığı durumlardır. Bu açıdan bulanık mantığı betimlemenin en basit yolu, bulanık mantığın yaklaşık akıl yürütmenin izahı olduğunu söylemektir. Bu biçimiyle bulanık mantığın ayırt edici özellikleri;

a. Sözel olarak ifade edilen bulanık doğruluk değerleri (doğru, çok doğru, yaklaşık doğru, doğru değil, yanlış vb. gibi)

b. Mutlak olmayan doğruluk tabloları

c. Geçerliliği mutlak değil göreli olan çıkarsama kuralları

şeklinde sayılabilir [128].

<u>Bulanık mantık önermeleri</u>

$I = S(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ bir bilgi kümesi, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bu kümenin içerdiği önermeler ve q da bir soru olsun. Bulanık mantığa ait soru-cevap şaması aşağıdaki şekilde verilebilir [127]:

$$\frac{\begin{array}{l} I \\ q \end{array}}{\text{Cevap}(q/I)}$$

Burada Cevap (q/I), I bilgi kümesinden q sorusuna verilen cevaptır. Bu bulanık mantık soru-cevap şekilleri şematik olarak Çizelge 2.1'deki gibi örneklenebilir:

Çizelge 2.1. Bulanık mantık soru-cevap şekilleri

(1)	*I*	:	Genellikle kuşlar uçar Güvercin de bir kuştur.
	q	:	Güvercinin uçması olasılığı nedir?
	Cevap (q/I)	:	Çoğunlukla=genellikle
(2)	*I*	:	Genellikle kuşlar uçar
	q	:	Hangi oranda kuşlar uçmaz?
	Cevap (q/I)	:	(1 - genellikle)
(3)	*I*	:	Genellikle kuşlar uçar
	q	:	Hangi oranda kuşlar yürür?
	Cevap (q/I)	:	
(4)	*I*	:	Genellikle kuşlar uçar
	q	:	Kuşların uçma oranı nedir?
	Cevap (q/I)	:	
(5)	*I*	:	Bir sınıftaki öğrencilerin boyları faklı farklıdır. Çoğunluğu orta boyludur. Orta boylu olanlar diğerlerinden kat kat fazladır
	q	:	Rasgele çağırılan bir öğrencinin orta boylu olmaması olasılığı nedir?
	Cevap (q/I)	:	

Bu tablodan da görüldüğü gibi bulanık mantık Cavap(q/I)'nin elde edilmesi için kullanılabilir. (1) ve (2) için sonuç çıkarma basitken (3), (4) ve (5) için ek yöntemler uygulanması gerekir.

Doğruluk değerleri [0,1]" aralığında değer almak üzere, $v(p)$ ile p önemesinin doğruluk değeri gösterilsin, $\neg$; tümleyen, $\wedge$;bağlama, $\vee$; ayrışma, $\rightarrow$; içerme operatörleri olma üzere Łukasiewicz mantığını temel alan aşağıdaki ifadeleri bulanık mantık önermeleri için de kullanılabilir [128];

$v(\neg p) \triangleq 1 - v(p)$

$v(p \vee \mathrm{q}) \triangleq \mathrm{enb}\{ v(p), v(q)\}$

$v(p \wedge q) = \mathrm{enk}\{ v(p), v(q)\}$

$v(p \rightarrow q), = \mathrm{enk}\ \{1, 1 - v(p) + v(q)\}$

Burada $\triangleq$ karşılık gelir manasında iken, “olumsuz”, “bağlama” ve “ayrışma” yı, sırasıyla “değil”, “ve” ve “veya” şeklinde anlamak daha uygundur. Bu ifadelerin bulanık kümelerdeki karşılığı ise sırasıyla tümleyen, $\cap$ (kesişim) ve $\cup$ (birleşim)’e karşılık gelir. Her iki durumda da doğruluk değerleri üzerinde $\wedge$ ($\cap$) operatörü en küçüğünü seçmeyi, $\vee$($\cup$) operatörü en büyüğünü seçmeyi ifade eder. Bu ifadeleri bulanık kümelerde uygulayabilmek için Zadeh’in de [4] özellikle altını çizdiği üzere; bulanık kümenin, sürekli üyelik derecelerine sahip nesnelerin bir sınıfı olması, dolaysıyla öncelikli olarak bulanık üyelik fonksiyonunun tanımlanıp, oluşturulması gerekir. Zadeh, aynı zamanda üyelik fonksiyonunun açıklığının kısmi sıralı bir küme olarak alınabileceğini de dipnot olarak ifade etti. Böylece, bulanık küme, bazı nesnelerin diğerlerinden daha fazla bulunduğuna dair bir sıralama içeren unsurlarla donatılmış bir sınıf olarak karşımıza çıkar. Ancak genelleme yapabilmek için klasik mantık bağıntılarından daha fazlasına ihtiyaç duyulur [129]. Her ne kadar *enb, enk* ve *tümmleyen* bağıntıları bulanık kümelerde oldukça açıklayıcı olsalar da birçok başka alternatif de araştırıldı. Literatürde çarpım t-normu ve Łukasiewicz t-conormu olarak geçen ve Zadeh’in tanımlayıcı ilk çalışmasına cebirsel çarpım ve cebirsel toplam olarak aldığı bağıntılar bu arayışlara örnektir [130].

2.2. Bulanık Küme ve Üyelik Fonksiyonu

X, tanımlı boş olmayan bir uzay, bulanık alt kümesi ise A, yani A$\subseteq$X olsun. Üyelik fonksiyonunu, x ile tanımladığımız bir nesnenin bir A bulanık kümesinde yer almasının kabullenilme derecesi [131] olarak alındığında, A bulanık kümesini ve üyelik fonksiyonu cebirsel olarak aşağıdaki sıralı ikili şeklinde tanımlanır [124, 132, 133]:

$$\mathrm{A} = \{(x,\ \mu_A(x));\ x \in X\} \tag{2.1}$$

$$\mu_{\mathrm{A}}(x) = X \rightarrow [0,1] \tag{2.2}$$

Bu fonksiyon $\forall x \in X$’i sahip oldukları üyelik dereceleri ile A bulanık kümesine dahil eder ve birim aralık üzerinde değer alır [134]. Üyelik fonksiyonlarını derecelerine göre 3 kategoride incelenir:

a. $\mu_{\mathrm{A}}(x) = 1$, yani x’in A ya tam üye ($x \in \mathrm{A}$) olması,

b. $\mu_A(x) = 0$, yani x'in A ile ilişkisinin olmaması ($x \notin A$),

c. $0 < \mu_A(x) < 1$, yani x'in A ya kısmen üye olması.

Bulanık A kümesini de sonlu elemanlı olması $A=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ veya olmamasına $A=(x_1, x_2, \ldots)$ göre üyelik fonksiyonları cinsinden sırasıyla eşitlik 2.3 ve 2.4'deki gibi ifade edilir [132, 133];

$$A=\frac{\mu_A(x_1)}{x_1}+\frac{\mu_A(x_2)}{x_2}+\ldots+\frac{\mu_A(x_n)}{x_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_A(x_i)}{x_i} \tag{2.3}$$

$$A=\int_X \frac{\mu_A(x)}{x} \tag{2.4}$$

Her iki durumda da bölme, toplam ve integral işlemleri sembolik bir gösterim olup, $\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$ ifadesi $(x_i, \mu_A(x_i))$ sıralı ikilisine, toplam ve integral ifadeleri de kümelerin birleşimine karşılık gelir. Mesela bir sokakta sağlı sollu bulunan 10 bina kapı numaralarına göre sembolik olarak;

$$B = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 \tag{2.5}$$

şeklinde gösterilebilir ancak,

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \tag{2.6}$$

manasındadır [132]. Bu numaraların tek veya çift olmalarını bir üyelik kriteri olarak kullanıp binaları sokağın sağındaki veya solundaki binalar kümelerine de atayabiliriz[1]. Mesela R ile sağ taraftaki binalar kümesini gösterelim. Yukarıda belirtilen esaslar sahilinde R=2+4+6+8+10 ile R={2, 4, 6, 8, 10} aynı manadadır.

[1] 31 Temmuz 2006 tarih ve 26245 Sayılı Resmi Gazetede yayımlanan Adres ve Numaralamaya İlişkin Yönetmelik

2.2.1. Bulanık kümelere kullanılan bazı kavramlar

X , tanımlı boş olmayan bir uzay ve bulanık alt kümesi A olmak üzere, Bellman ve Zadeh, klasik küme işlemlerinden aşina olunan bazı kavramları aşağıdaki şekilde tanımladılar [124, 132];

Normallik

Bir A bulanık kümesinin normal olabilmesi için gerek ve yeter şart; *h*(A) ile tanımlanan bulanık kümenin yüksekliğinin birim olmasıdır. Eğer bulanık küme birim değil ise üyelik değerleri *h*(A) ya bölünerek bulanık küme normalize edilir.

$$h(\mathrm{A}) = Sup_x \mu_A(x) \tag{2.7}$$

$$\mu_{A_{Nor}}(x) = \frac{\mu_A(x)}{h(A)} \tag{2.8}$$

Destek kümesi ve bulanık kümenin çekirdeği (göbeği, özü)

A bulanık kümesinin destek kümesi *S*(A) üyelik fonksiyonun elemanlarından üyelik dereceleri pozitif olanların bir kümesidir. *Supp* A şeklinde de gösterilir.

$$S(\mathrm{A}) = Supp\ \mathrm{A} = \{x \in \mathrm{X};\ \mu_{\mathrm{A}}(x) > 0\} \tag{2.9}$$

A bulanık kümesinin çekirdeği (göbeği, özü) [135];

$$\mathrm{Core(A)} = \mathrm{C}(\mu) = [\mu]_1 = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} \mid \mu\mathrm{A(x)} = 1\} \tag{2.10}$$

şeklinde gösterilir. Üyelik derecesi 1 olan *x*'lerin kümesini gösterir [136]. Eğer bulanık kümenin çekirdeği boş değil ise bulanık kümeye normalizedir denir, aksi takdirde alt normaldir (subnormal) denir [137].

Eşitlik

A, B $\in$ X olan iki bulanık küme olsun A=B olabilmesi için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ olmasıdır. B bulanık kümesinin boş küme yani B=$\varnothing$ olması için gerek ve yeter şart ise $\forall x \in X$ için $\mu_B(x) = 0$ olmasıdır. A ve B kümelerinin eşitlik dereceleri ise E ile gösterilir ve eşitlik 2.11'deki gibi tanımlanır [132].

$$E(A=B) = 1 - \underset{x \in T}{enb} \left| \mu_A(x) - \mu_B(x) \right| \quad (2.11)$$

$$T = \{x \in X: \mu_A(x) \neq \mu_B(x)\} \quad (2.12)$$

Kapsama

Bir A bulanık kümesinin bir B bulanık kümesince kapsanması yani A$\subset$B olması için gerek ve yeter şart $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ olmasıdır.

Tümleyen

A, A$\subseteq$X olan bir bulanık küme olmak üzere A'nın tümleyeninin A′ olabilmesi için gerek ve yeter şart $\mu_{A'} = 1 - \mu_A$ olmasıdır.

Kesişim

A, B $\subseteq$ X olan iki bulanık küme olsun A ve B bulanık kümelerinin kesişimi A$\cap$B ile gösterilir ve aşağıdaki iki şekilde tanımlanır.

$$A \cap B = \mu_{A \cap B}(x) = \text{enk}\ (\mu_A(x)\ ,\ \mu_B(x)) \quad (2.13)$$

$$A \cap B = \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \quad (2.14)$$

İkiden fazla küme olması durumunda $A_1, A_2, \ldots, A_n \in X$ olan n tane kümenin kesişimi ise;

$$A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n = \mu_{A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n}(x) = \text{enk}\ (\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \ldots, \mu_{A_n}(x)) \quad (2.15)$$

Şeklinde tanımlanır ve gösterilir [132].

Birleşim

Birleşim kesişimin duali olup aşağıdaki şekilde gösterilir ve tanımlanır.

$$A \cup B = \mu_{A \cap B}(x) = \text{enb}\ (\mu_A(x),\ \mu_B(x)) \tag{2.16}$$

$$A \cup B = \mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \tag{2.17}$$

İkiden fazla küme olması durumunda $A_1, A_2, \ldots, A_n \in X$ olan n tane kümenin birleşimi ise;

$$A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n = \mu_{A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n}(x) = \text{enb}\ (\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \ldots, \mu_{A_n}(x)) \tag{2.18}$$

şeklinde tanımlanır ve gösterilir[132].

Bulanık kümelerdeki yegâne kesişim ve birleşim işlemleri eşitlik 2.13-2.18'de tanımlananlar değildir. Aşağıda tekrar verilen bulanık kesişim ve bulanık birleşim işlemleri literatürde farklı şekilde anlamlandırılarak da tanımlanmaktadır. Şöyle ki, kesişim işlemi t-normu, birleşim işlemi ise t-conormu olarak da tanımlanır.

$$A \cap B = \mu_{A \cap B}(x) = \text{enk}\ (\mu_A(x)\ ,\ \mu_B(x)) = \text{t-norm}$$
$$A \cup B = \mu_{A \cap B}(x) = \text{enb}\ (\mu_A(x)\ ,\ \mu_B(x)) = \text{t-conorm}$$

Bu konu bir sonraki üçgensel normlar basinde daha detaylı bir şekilde irdelenecektir.

Cebirsel çarpım/kartezyen çarpım

$A, B \subseteq X$ olan iki bulanık küme olsun. A ve B bulanık kümelerinin cebirsel çarpımı AB ile gösterilir ve eşitlik 2.19'daki gibi tanımlanır [124].

$$AB = \mu_{AB}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x) \tag{2.19}$$

İkiden fazla küme olması durumunda $A_1, A_2, \ldots, A_n \in X$ olan n tane kümenin cebirsel çarpımı ise;

$$\mu_{A_1A_2\ldots A_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \mu_{A_1}(x_1)\mu_{A_2}(x_2)\ldots\mu_{A_n}(x_n) \tag{2.20}$$

şeklinde ifade edilir [132].

Cebirsel toplam

A, B $\subseteq$ X olan iki bulanık küme olsun. A ve B bulanık kümelerinin cebirsel toplamı A$\oplus$B ile gösterilir ve aşağıdaki iki şekilde tanımlanır.

$$A\oplus B = \mu_{A\oplus B}(x) = \mu_A(x)\oplus\mu_B(x) \tag{2.21}$$

Konvekslik ve konkavlık

A, X=R^n de tanımlık bir bulanık küme olsun. A'nın konveks olması için gerek ve yeter şart $\lambda\in[0,1]$ olmak üzere x_1, x_2 $\in$X'in her bir çiftinin aşağıdaki eşitsizliği sağlamasıdır.

$$\mu_A[\lambda x_1+(1-\lambda)\, x_2] \geq \text{enk}\ (\mu_A(x)\ ,\ \mu_B(x)) \tag{2.22}$$

Eşitlik 2.22'den kolayca fark edilebileceği gibi konvekslik için şart kesişime karşılık gelir. Konkavlık ise konveksliğin zıttıdır, birleşime karşılık gelir [124].

Daraltma (Concentration)

A, A$\subseteq$X olan bir bulanık küme olmak üzere, bulanık bir kümenin daraltması CON (A) ile gösterilir ve eşitlik 2.23'deki gibi tanımlanır [132]:

$$\mu_{CON(A)}(x) = (\mu_A(x))^2,\ \forall x\in X \tag{2.23}$$

Üyelik değerleri [0,1] aralığında olduğundan kare alma işlemi mevcut değerleri küçülteceğinden üyelik fonksiyonu daralır. Burada kare alma işlemi bir zorunluluk olmayıp, daraltma için 1'den büyük herhangi bir değer alınabilir [138].

Genişletme (Dilation)

A, $A \subseteq X$ olan bir bulanık küme olmak üzere, bulanık bir kümenin genişletmesi DIL (A) ile gösterilir ve eşitlik 2.24 deki gibi tanımlanır [132]:

$$\mu_{DIL(A)}(x) = \sqrt{\mu_A(x)} = (\mu_A(x))^{0,5},\ \forall x \in X \tag{2.24}$$

Üyelik değerleri [0,1] aralığında olduğundan karekök alma işlemi mevcut değerleri büyüteceğinden üyelik değerleri genişler. Burada karekök alma işlemi bir zorunluluk olmayıp genişletme için 1'den küçük herhangi bir pozitif sayı ile üs alınabilir [138].

Yoğunlaştırma (Intensification)

Bazı üyelik derecelerinin bir kısmı genişlerken diğer bir kısmı da daralabilir, özellikle 0,5 ten küçük üyelik fonksiyonu değerlerinin genişlemesine (büyümesine) 0,5 ten büyük üyelik fonksiyonu değerlerinin ise daralmasına (küçülmesine) yoğunlaştırma denir. Yoğunlaştırma işleminden sonra geçiş bölgeleri daha dik bir hal alır [138].

2.3. α-Kesimi

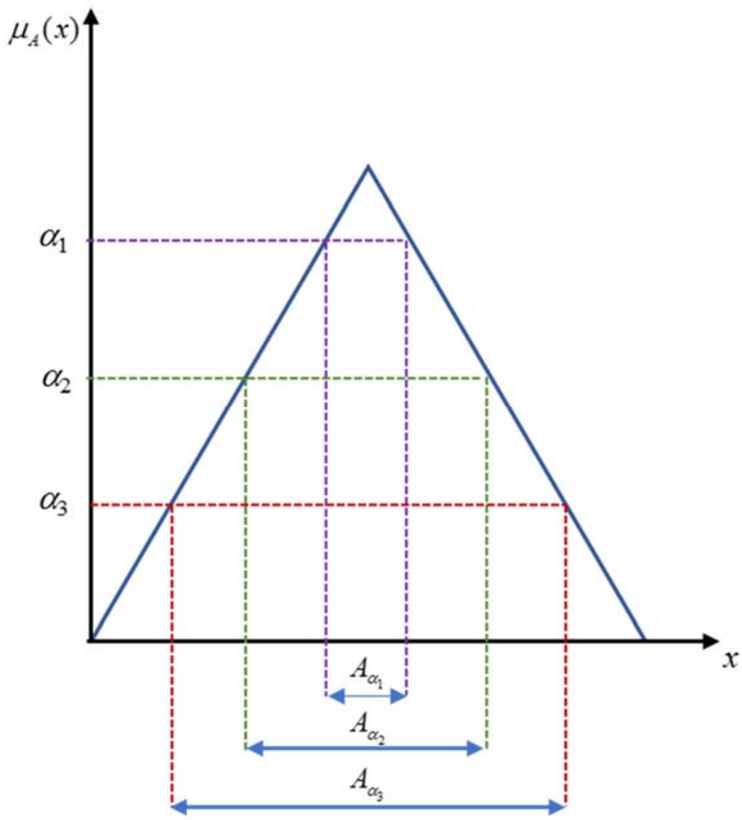
$A \subseteq X$ olan bir bulanık küme olmak üzere A nın α-kesimi A_α ile gösterilir ve eşitlik 2.25 deki gibi ifade edilir [132].

$$A_\alpha = \{x \in X:\ \forall \alpha \in [0,1] \text{ için } \mu_A(x) \geq 0\} \tag{2.25}$$

ya da karakteristik fonksiyon cinsinden,

$$\chi_{A_\alpha}(x) = \begin{cases} 1 & \mu_A(x) \geq \alpha, \\ 0 & \mu_A(x) < \alpha \end{cases} \tag{2.26}$$

Eğer eşitlik kaldırılırsa kuvvetli α-kesim denir. $A_{\alpha+}$ ile gösterilir. α-Kesim kümesinin grafik gösterimi ise şekil 2.1'deki gibidir [132].



Şekil 2.1. A bulanık kümesinin α-kesimleri

α-Kesim Özellikleri

A, B $\in$X ve α, β$\in$[0,1] olsun. Aşağıda verilen 5 özellik sağlanır [139].

(i) $A_{\alpha+} \subseteq A_\alpha$

(ii) $\alpha \leq \beta \rightarrow A_\alpha \supseteq A_\beta$ ve $A_{\alpha+} \supseteq A_{\beta+}$

(iii) $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$ ve $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$

(iv) $(A \cap B)_{\alpha+} = A_{\alpha+} \cap B_{\alpha+}$ ve $(A \cup B)_{\alpha+} = A_{\alpha+} \cup B_{\alpha+}$

(v) $A'_\alpha = A'_{(1-\alpha)+}$

Yukarıdaki özellikleri kullanırken dikkatli olmakta fayda vardır. *I* bir indeks kümesi ve $\forall i \in I$ için $A_i \in X$ olmak üzere bulanık kümeler ailesinin sonsuz olması durumunda aşağıdaki ek özelliklere gereksinim duyulur.

(i) $\underset{i\in I}{\cup} A_{\alpha_i} \subseteq \left(\underset{i\in I}{\cup} A_{\alpha}\right)$ ve $\underset{i\in I}{\cap} A_{\alpha_i} \subseteq \left(\underset{i\in I}{\cap} A_{\alpha}\right)$

(ii) $\underset{i\in I}{\cup} A_{\alpha+_i} \subseteq \left(\underset{i\in I}{\cup} A_{\alpha+}\right)$ ve $\underset{i\in I}{\cap} A_{\alpha+_i} \subseteq \left(\underset{i\in I}{\cap} A_{\alpha+}\right)$

(iii) $A \subseteq B$ olması için gerek ve yeter şart $A_{\alpha} \in B_{\alpha}$

$A \subseteq B$ olması için gerek ve yeter şart $A_{\alpha+} \in B_{\alpha+}$

(iv) A=B olması için gerek ve yeter şart $A_{\alpha}=B_{\alpha}$

A=B olması için gerek ve yeter şart $A_{\alpha+}=B_{\alpha+}$

2.4. Ayrışma Teoremi

αA_{α} aşağıdaki üyelik dereceleri atanmış bir bulanık küme olsun.

$$\mu_{\alpha A_{\alpha}}(x) = \begin{cases} \alpha & x \in A_{\alpha} \text{ için} \\ 0 & x \notin A_{\alpha} \text{ için} \end{cases} \tag{2.27}$$

Herhangi bir $A \subseteq X$ bulanık kümesi eşitlik 2.26'da gösterildiği şekilde ifade edilebilir [132].

$$A = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha A_{\alpha} \tag{2.28}$$

2.5. Genişletme Prensibi

İki fonksiyonu dönüştüren herhangi bir f:X→Y fonksiyonu; f: $\Im$(X) → $\Im$(Y) ve tersi f^{-1}: $\Im$(Y) → $\Im$(X) şeklinde tanımlı olsun. Genişletme prensibi aşağıdaki şekilde verilir [139].

$$\left[f\left(A\right)\right]\left(y\right) = \sup_{x|y=f(x)} A(x) \;\; (\forall A \in \Im(X) \text{ için}) \tag{2.29}$$

ve

$$\left[f^{-1}\left(B\right)\right]\left(x\right) = B\left(f(x)\right) \;\; ((\forall B \in \Im(Y) \text{ için}) \tag{2.30}$$

Genişletme prensibi bulanık olmayan kümelerde yer alan farklı matematiksel işlemleri bulanık kümelere taşır. Daha açık bir ifade ile A bulanık kümesi eşitlik 2.3 formunda tanımlanmış olsun.

$$A=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}=\frac{\mu_A(x_1)}{x_1}+\frac{\mu_A(x_2)}{x_2}+...+\frac{\mu_A(x_n)}{x_n}$$

Bu takdirde B=f(A) kümesi de aşağıdaki şekilde tanımlanır [132].

$$B \quad =\frac{\mu_A(x_1)}{f(x_1)}+\frac{\mu_A(x_2)}{f(x_2)}+...+\frac{\mu_A(x_n)}{f(x_n)} \tag{2.31}$$

Örnek 3.1.

A bulanık kümesi üyelik değerleri ile aşağıdaki şekilde tanımlı olsun.

$$A=\frac{0,2}{4}+\frac{0,3}{3}+\frac{0,6}{6}$$

f(x) =x^2 verildiğinde genişleme prensibi uyarınca B kümesi;

$$B=f(A)= \frac{0,2}{4^2}+\frac{0,3}{3^2}+\frac{0,6}{6^2}=\frac{0,2}{16}+\frac{0,3}{9}+\frac{0,6}{36}$$

biçiminde ifade edilir.

3. ÜÇGENSEL NORMLAR

Antik Yunan filozofu Öklit'in Elementler adlı eserinde yer verdiği 20 numarlı önerme köşeleri A, B, C olarak isimlendirilen bir üçgenin iki kenarının uzunlukları toplamının daima kalan üçüncü kenardan uzun olduğunu ifade etmektedir [103]. Üç noktanın arasındaki birbirine göre uzaklıkları baz alan bu önermeden yüzyıllar sonra yine üç nokta alan Menger, bu üç nokta arasındaki uzaklığı belli şartların sağlanması koşulu altında olasılık dağılımı ile değiştirdi [140]. Bu üçgensel normların ilk adımıydı, sonrasında Schweizer ve Sklar 1958'de önce Fransızca "Espaces métriques aléatoires" ve ardında İngilizce olarak "Statatistical Metric Spaces" başlıkları altında yayınladıkları makaleleri ile tanımın eksik kalan kısımlarını tamamladılar [141-143]. Sonrasında bulanık kesişim ve birleşim işlemini de tanımladığı ve bulanık kümelerin değişkenlerin birleştirilmesindeki etkinliği sebebiyle bulanık kümelerde yaygın olarak kullanılır hale geldi [107, 144-146]. İngilizce triangle (üçgen) kelimesinin baş harfine atfen fonksiyon t harfi ile gösterildi ve buradan hareketle literatürde üçgensel normlara kısaca t-normu dendi.

3.1. İstatistiksel Metrik ve t-Norm Menger Tanımı

Menger, [140]1942'de bir istatistiksel ölçütü ve bu ölçütün t-normunu şu şekilde tanımladı:

S bir küme ve bu kümenin her p ve q eleman çifti için aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\Pi(x; p, q)$ olasılık fonksiyonuna istatistiksel ölçüt denir.

a. $\Pi(0; p, p) = 1$

b. Eğer $p \neq q$ ise $\Pi(0; p, p) < 1$

c. $\Pi(x; p, q) = \Pi(x; q, p)$

d. $T[\Pi(x; p, q), \Pi(y; q, r)] \leq \Pi(x+y; p, r)$

$T(\alpha, \beta)$; $0 \leq \alpha \leq 1$ ve $0 \leq \beta \leq 1$ aralığında olup,

a. $0 \leq T(\alpha, \beta) \leq 1$

b. T her iki değişkende de azalan değildir

c. $T(\alpha, \beta) = T(\beta, \alpha)$

d. $T(1, 1) = 1$

e. Eğer $\alpha > 0$ ise $T(\alpha, 1) > 0$

şartlarını sağlar. Burada olasılık fonksiyonu derken x in tüm negatif olmayan değerleri için azalmayan olarak tanımlı bir fonksiyon kastedilmektedir. $\Pi(x; p, q)$ ile de p ve q arasındaki uzaklık fonksiyonu tanımlanmış olup, aradaki uzaklığın x den küçük olması olasılığını verir.

3.2. Schweizer ve Sklar Tanımı

Schweizer ve Sklar, Menger'in bir önceki bölümümde verilen üçgensel norm tanımında (e) ile gösterilen "Eğer $\alpha>0$ ise $T(\alpha, 1)>0$" şartını daha kuvvetli bir şart olan $T(\alpha, 1) = \alpha$ ile değiştirerek ve polinomlar için de kullanılabilir hale gelmesi açısından üçgen eşitsizliğine birleşme özelliğini de dahil ederek t-norm olmayı aşağıdaki şartlara bağladılar [141, 143].

a. $T(x, 1) = x$

b. $T(x, b) = T(b, x)$

c. $x \leq c$ ve $b \leq d$ olduğunda $T(a, b) \leq T(c, d)$

d. $T(T(a, b), c) = T(a, T(b,c))$

Sözel olarak t-normunu; birim aralıkta tanımlı, değişme, birleşme ve monotonluk özelliklerine sahip, etkisiz elemanı 1 olan ikili işlem olarak tanımlanır. Buna atfen kimi kaynaklar yukarıda küme formunda verilen şartları takibeden cebirsel biçimde de ifade ederler [147]

a. $x*1=x$

b. $x*y=y*x$

c. $y \leq x$ ise $x*y \leq x*z$

d. $x*(y*z)=(x*y)*z$

Sweizer ve Sklar T fonksiyonun tek olmadığını verilen şartları sağlayan farklı fonksiyonlar bulunabileceğini ifade ederek ve altı farklı t-normunun tanımlarını verdiler [142].

3.3. Temel t-Normları

Literatürde öne çıkan temel t-normları

a. $T_M(x, y) = \text{Enk}(x, y)$; en küçük t-normu

b. $T_P(x, y) = xy$; çarpım t-normu

c. $T_L(x, y) = \text{Enb}\,(x + y - 1, 0)$; Łukasiewicz t-normu

d. $T_D(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{Eğer } (x,y) \in [0,1[^2 \\ \text{enk}(x,y) & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$; Drastik t-norm şeklindedir. Bu dört t-normu kayda değer özelliklere sahip olduklarından önemlidirler, en küçük t-normu T_M adından da anlaşılacağı gibi t-normlarının en küçüğüdür, T_D drastik t-normu ise en büyüğüdür. Literatürde T_M, T_P, T_L, T_D t-normlarının sırasıyla M, Π, W, Z simgeleriyle de gösterilmektedir [142].

3.4. Üçgensel Conormlar (t-Conorm)

Kimi kaynaklarca S ile de gösterilir. Birim aralıkta tanımlı ikili bir işlem olup, değişme, birleşme, monotonluk ve etkisiz elemanın 0 olması özelliklerine sahiptir. T-normlarının dualidir. Buna istinaden t-conormları şu şekilde de tanımlayabiliriz. $S:[0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonunun bir t-conorm olması için gerek ve yeter şart karşılık gelecek bir t-normunun bulunması ve $\forall(x,y) \in [0,1]^2$ için eşitlik 3.1 ve 3.2'nin sağlanmasıdır.

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y) \tag{3.1}$$

$$T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y) \tag{3.2}$$

Temel t-conormlarını aşağıdaki şekilde ifade edilebilir [147].

a. $S_M(x, y) = \text{Enb}(x, y)$; en küçük t-conormu

b. $S_P(x, y) = x+y-xy$; çarpım t-conormu

c. $S_L(x, y) = \text{Enk}(x + y, 1)$; Łukasiewicz t-conormu

d. $S_D(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{Eğer } (x,y) \in [0,1[^2 \\ \text{enb}(x,y) & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$; Drastik t-conorm

3.5. t-Norm ve t-Conormlarının Üreticileri

t-Norm ve t-conormlarının toplamsal ve çarpımsal olmak üzere iki farklı biçimde üreticileri vardır [148].

<u>t-Normlarının toplamsal üreticileri</u>

T bir t-normu ve $f(1)=0$ olacak şekilde bir fonksiyon da $f: I \to [0,\infty]$ olsun. $\forall(x,y) \in I$ için,

$$T(x,y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y)) \tag{3.3}$$

fonksiyonuna T’nin bir toplamsal üreteci denir. Benzer şekilde S bir t-conorm $f(1) = 0$ olacak şekilde bir fonksiyon da f:I→[0,∞] olsun. ∀(x,y)∈I için,

$$S(x,y) = f^{(-1)}(f(x) + f(y)) \tag{3.4}$$

fonksiyonuna S’nin bir toplamsal üreteci denir.

<u>t-Normlarının çarpımsal üreticileri</u>

T bir t-normu ve $f(1)=1$ olacak şekilde bir fonksiyon da f:I→ I olsun. ∀(x,y)∈I için,

$$T(x,y) = f^{(-1)}(f(x)f(y)) \tag{3.5}$$

fonksiyonuna T’nin bir çarpımsal üreteci denir. Yine S bir t-conorm ve f:I→ I, $f(0)=1$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. ∀(x,y)∈I için,

$$S(x,y) = f^{(-1)}(f(x)f(y)) \tag{3.6}$$

fonksiyonuna S’nin bir çarpımsal üreteci denir.

3.6. t-Normu Aileleri

Lowen herhangi bir gruplama yapmadan 50 ayrı t-normunu vermektedir [148]. Klement, Mesiar ve Pap ise t-normlarını 9 aileye genellerken, her bir aileye ait temel t-normu ve t-conomunu tanımlayıp, dikkati çekici noktalarını vurguladı [108]. Klir ve Yuan ise bir kısm t-nornu ailesinin ek olarak üreticilerini, parametre açıklığını ve farklı parametrelere göre temel formüllerin değişimini t-norm ve t-conormlara göre verdi [139]. Belli başlı t-normu aileleri;

3.6.1. Temel t-norm ve t-conormları

Bölüm 4.2’de verilen 4 t-normu ve bölüm 4.3’de verilen 4 t-conormu literatürde temel t-norm ve t-conormları olarak geçmektedir.

3.6.2. Schweizer-Sklar t-normları ve t-conormları

Genel bir formül olup, içerdiği parametrenin değişimi ile temel t-norm ve t-conormlarına dönüşebilmektedir. Schweizer-Sklar -norm ve t-conormları için gösterim biçimi;

$$T_\lambda^{SS}(x,y)=\begin{cases}\left(enb\left(x^\lambda+y^\lambda-1\,,0\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}} & \lambda\in\left]-\infty,0\right[\bigcup\left]0,\infty\right[\text{ ise,}\\ T_M\left(x,y\right) & \lambda=-\infty \text{ ise,}\\ T_P\left(x,y\right) & \lambda=0 \text{ ise,}\\ T_D\left(x,y\right) & \lambda=\infty \text{ ise,}\end{cases} \tag{3.7}$$

$$S_\lambda^{SS}(x,y)=\begin{cases}1-\left(enb\left(\left(1-x\right)^\lambda+\left(1-y\right)^\lambda-1\,,0\right)\right)^{\frac{1}{\lambda}} & \lambda\in\left]-\infty,0\right[\bigcup\left]0,\infty\right[\text{ ise,}\\ S_M\left(x,y\right) & \lambda=-\infty \text{ ise,}\\ S_P\left(x,y\right) & \lambda=0 \text{ ise,}\\ S_D\left(x,y\right) & \lambda=\infty \text{ ise,}\end{cases} \tag{3.8}$$

<u>Toplamsal $t_\lambda^{SS}\left(x\right)$ ve çarpımsal $\theta_\lambda^{SS}\left(x\right)$ üreticisi</u>

$$t_\lambda^{SS}\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1-x^\lambda}{\lambda} & \lambda\in\left]-\infty,0\right[\bigcup\left]0,\infty\right[\text{ ise,}\\ -\log x & \lambda=0\end{cases} \tag{3.9}$$

$$\theta_\lambda^{SS}\left(x\right)=\begin{cases}e^{\frac{x^\lambda-1}{\lambda}} & \lambda\in\left]-\infty,0\right[\bigcup\left]0,\infty\right[\text{ ise,}\\ x & \lambda=0\end{cases} \tag{3.10}$$

3.6.3. Hamacher t-normları ve t-conormları

Hamacher tarafından doğruluk değerleri kümesi birim aralıkta çoklu değerler alabilen mantık ilkelerine göre, rasyonel fonksiyonlarla ifade edilebilen mantıksal birleştircilerin birleşimi ve ayrılması için sunulan bir yaklaşıma dayanır. Hamacher t-norm ve t-conormları için gösterim biçimi;

$$T_{\lambda}^{H}(x,y)=\begin{cases} T_D(x,y) & \lambda=\infty \text{ ise,} \\ 0 & \lambda=x=y=0 \text{ ise,} \\ \dfrac{xy}{\lambda+(1-\lambda)(x+y-xy)} & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{3.11}$$

$$S_{\lambda}^{H}(x,y)=\begin{cases} S_D(x,y) & \lambda=\infty \text{ ise,} \\ 1 & \lambda=x=y=0 \text{ ise,} \\ \dfrac{(x+y-xy)-(1-\lambda)xy}{1-(1-\lambda)xy} & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{3.12}$$

Toplamsal $t_{\lambda}^{H}(x)$ ve çarpımsal $\theta_{\lambda}^{H}(x)$ üreticisi

$$t_{\lambda}^{H}(x)=\begin{cases} \log\left(\dfrac{\lambda+(1-\lambda)x}{x}\right) & \lambda\in\,]0,\infty[\ \text{ ise,} \\ \dfrac{1-x}{x} & \lambda=0 \end{cases} \tag{3.13}$$

$$\theta_{\lambda}^{H}(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\lambda+(1-\lambda)x} & \lambda\in\,]0,\infty[\ \text{ ise,} \\ e^{\frac{1-x}{x}} & \lambda=0 \end{cases} \tag{3.14}$$

3.6.4. Frank t-norm ve t-conormları

Frank tarafından, bağımlılık fonksiyonlarının birleşme özellikleri üzerinde yapılan çalışmalar sırasında ortaya konmuştur. Frank t-norm ve t-conormları için gösterim biçimi;

$$T_{\lambda}^{F}(x,y)=\begin{cases} \log_{\lambda}\left(\dfrac{(\lambda^{x}-1)(\lambda^{y}-1)}{\lambda-1}\right) & \text{diğer durumlarda,} \\ T_M(x,y) & \lambda=0 \text{ ise,} \\ T_P(x,y) & \lambda=1 \text{ ise,} \\ T_L(x,y) & \lambda=\infty \text{ ise,} \end{cases} \tag{3.15}$$

$$S_{\lambda}^{F}(x,y)=\begin{cases} 1-\log_{\lambda}\left(\dfrac{\left(\lambda^{1-x}-1\right)\left(\lambda^{1-y}-1\right)}{\lambda-1}\right) & \text{diğer durumlarda,} \\ S_M\left(x,y\right) & \lambda=-\infty \text{ ise,} \\ S_P\left(x,y\right) & \lambda=0 \text{ ise,} \\ S_D\left(x,y\right) & \lambda=\infty \text{ ise,} \end{cases} \tag{3.16}$$

<u>Toplamsal $t_{\lambda}^{F}\left(x\right)$ ve $t_{\lambda}^{F}\left(x\right)$ çarpımsal üreticisi</u>

$$t_{\lambda}^{F}\left(x\right)=\begin{cases} \log\left(\dfrac{\lambda^{x}-1}{\lambda-1}\right) & \lambda\in\left]0,1\right[\bigcup\left]0,\infty\right[\text{ ise,} \\ -\log x & \lambda=1, \\ 1-x & \lambda=\infty \end{cases} \tag{3.17}$$

$$t_{\lambda}^{F}\left(x\right)=\begin{cases} \dfrac{\lambda-1}{\lambda^{x}-1} & \lambda\in\left]0,1\right[\bigcup\left]0,\infty\right[\text{ ise,} \\ x & \lambda=1 \text{ ise,} \\ e^{x-1} & \lambda=\infty \end{cases} \tag{3.18}$$

3.6.5. Yager t-norm ve t-conormları

Bulanık kümelerin kesişimi amacıyla en sık kullanılan t-normu ailesidir, Yager tarafından $\lambda\geq1$ olan özel bir durumu için tanımlanmıştır. Fikir, λ parametresini, mantıksal "VE" nin gücü için karşıt bir ölçüt olarak kullanmaktı. Bu bağlamda, $\lambda = 1$ en zorlu (yani en küçük) "VE" ve $\lambda = \infty$ en az talep eden (yani en büyük) "VE" anlamına gelir. Yager t-norm ve t-conormları için gösterim biçimi;

$$T_{\lambda}^{Y}(x,y)=\begin{cases} enb\left(\left(1-\left(1-x\right)^{\lambda}+\left(1-y\right)^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}},0\right) & \text{diğer durumlarda} \\ T_D\left(x,y\right) & 0 \\ T_M\left(x,y\right) & \infty \end{cases} \tag{3.19}$$

$$T_\lambda^Y(x,y) = \begin{cases} enk\left(\left(x^\lambda + y^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}, 1\right) & \text{diğer durumlarda} \\ T_D(x,y) & 0 \\ T_M(x,y) & \infty \end{cases} \tag{3.20}$$

<u>Toplamsal $t_\lambda^Y(x,y)$ ve çarpımsal $\theta_\lambda^Y(x,y)$ üreticisi</u>

$$t_\lambda^Y(x,y) = (1-x)^\lambda \tag{3.21}$$

$$\theta_\lambda^Y(x,y) = e^{-(1-x)^\lambda} \tag{3.22}$$

3.6.6. Dombi t-norm ve t-conormları

Bulanık mantık dahilinde birleştirici ve ayırıcı operatörlerin incelendiği erken dönem çalışmalar sırasında Dombi tarafından önerildi [107, 149]. Dombi t-norm ve t-conormları için gösterim biçimi:

$$T_\lambda^D(x,y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{1 + \left(\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^\lambda + \left(\dfrac{1-y}{y}\right)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}} & \text{diğer durumlarda} \\ T_D(x,y) & 0 \\ T_M(x,y) & \infty \end{cases} \tag{3.23}$$

$$S_\lambda^D(x,y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{1 + \left(\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^\lambda + \left(\dfrac{y}{1-y}\right)^\lambda\right)^{\frac{1}{\lambda}}} & \text{diğer durumlarda} \\ S_D(x,y) & 0 \\ S_M(x,y) & \infty \end{cases} \tag{3.24}$$

Toplamsal $t_\lambda^D(x,y)$ ve çarpımsal $\theta_\lambda^D(x,y)$ üreticisi

$$t_\lambda^D(x,y)=\left(\frac{1-x}{x}\right)^\lambda \tag{3.25}$$

$$\theta_\lambda^D(x,y)=e^{-\left(\frac{1-x}{x}\right)^\lambda} \tag{3.26}$$

3.6.7. Sugeno-Weber t-norm ve t-conormları

Sugeno ve Weber taradından bulanık kümelerin kesişimi ve bileşimini modellemek için önerildi. Burada önerilen t-conormlar Sugeno'nun erken dönem bulanık λ ölçüsünün bir genellemesi niteliğindedir [107, 150, 151]. Sugeno-Weber t-Norm ve t-conormları için gösterim biçimi:

$$T_\lambda^{SW}(x,y)=\begin{cases} enb\left(\dfrac{x+y-1+\lambda xy}{1+\lambda},0\right) & \text{diğer durumlarda} \\ T_D(x,y) & \lambda=-1 \\ T_P(x,y) & \lambda=\infty \end{cases} \tag{3.27}$$

$$S_\lambda^{SW}(x,y)=\begin{cases} enk\left(x+y-1+\lambda xy,1\right) & \text{diğer durumlarda} \\ S_D(x,y) & \lambda=-1 \\ S_P(x,y) & \lambda=\infty \end{cases} \tag{3.28}$$

Toplamsal $t_\lambda^{SW}(x)$ ve çarpımsal $\theta_\lambda^{SW}(x)$ üreticisi

$$t_\lambda^{SW}(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{\log(1+\lambda x)}{\log(1+\lambda)} & \lambda\in\,]-1,0[\bigcup]0,\infty[\text{ ise,} \\ 1-x & \lambda=0\text{ ise,} \\ -\log x & \lambda=\infty\text{ ise.} \end{cases} \tag{3.29}$$

$$\theta_{\lambda}^{SW}\left(x\right)=\begin{cases} e^{\frac{\log(1+\lambda x)}{\log(1+\lambda)}-1} & \lambda\in\left]-1,0\right[\bigcup\left]0,\infty\right[\text{ ise,} \\ e^{x-1} & \lambda=0 \text{ ise,} \\ x & \lambda=\infty \text{ ise.} \end{cases} \tag{3.30}$$

3.6.8. Aczél-Alsina t-norm ve t-conormları

Aczél ve Alsina tarafından önerildi. $p, q\in]0,1[\cup]0,\infty[$ olduğunda log p/log q katsayısı tüm $(x,y)\in[0,1]^2$ için irrasyoneldir [107]. Aczél-Alsina t-norm ve t-conormları için gösterim biçimi:

$$T_{\lambda}^{AA}(x,y)=\begin{cases} e^{-\left((-\log x)^{\lambda}+(-\log y)^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} & \text{diğer durumlarda,} \\ T_D\left(x,y\right) & \lambda=0 \text{ ise,} \\ T_M\left(x,y\right) & \lambda=\infty \text{ ise.} \end{cases} \tag{3.31}$$

$$S_{\lambda}^{AA}(x,y)=\begin{cases} 1-e^{-\left((-\log(1-x))^{\lambda}+(-\log(1-y))^{\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} & \text{diğer durumlarda,} \\ S_D\left(x,y\right) & \lambda=0 \text{ ise,} \\ S_M\left(x,y\right) & \lambda=\infty \text{ ise.} \end{cases} \tag{3.32}$$

<u>Toplamsal $t_{\lambda}^{AA}(x)$ ve $\theta_{\lambda}^{AA}(x)$ çarpımsal üreticisi</u>

$$t_{\lambda}^{AA}(x)=\left(-\log x\right)^{\lambda} \tag{3.33}$$

$$\theta_{\lambda}^{AA}(x)=e^{-(-\log x)^{\lambda}} \tag{3.34}$$

3.6.9. Mayor-Torrens t-norm ve t-conormları

Tüm $(x,y)\in[0,1]^2$ için sürekliliği gösterilebilen yegâne t-normları ailesidir. Mayor-Torrens t-norm ve t-conormları için gösterim biçimi:

$$T_{\lambda}^{MT}\left(x,y\right)=\begin{cases} enb\left(x+y-\lambda,0\right) & \lambda\in\left]0,1\right] \text{ ve } \left(x,y\right)\in\left[0,\lambda\right]^2 \text{ ise,} \\ enk\left(x,y\right) & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{3.35}$$

$$T_{\lambda}^{MT}(x,y)=\begin{cases} enk(x+y+\lambda,1) & \lambda\in\left]0,1\right] \text{ ve } (x,y)\in[0,\lambda]^2 \text{ ise,} \\ enb(x,y) & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{3.36}$$

<u>Toplamsal $t_{\lambda=1}^{MT}(x)$ ve çarpımsal $\theta_{\lambda=1}^{MT}(x)$ üreticisi</u>

$$t_{\lambda=1}^{MT}(x)=1-x \tag{3.37}$$

$$\theta_{\lambda=1}^{MT}(x)=e^{x-1} \tag{3.38}$$

3.7. Bulanık Kesişim Olarak t-Normları

A ve B ile ifade edilen iki bulanık kümenin kesişimi genelde birim aralıkta bir ikili işlem olarak betimlenir ve $\mathscr{k}$ kesişimi göstermek üzere eşitlik 3.39'daki şekilde tanımlanır.

$$\mathscr{k}:[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1] \tag{3.39}$$

Evrensel kümenin elamanı olan x'in A'da karşılık gelen üyelik derecesi ile B'de karşılık gelen üyelik derecesini alarak ortak bir üyelik derecesi ortaya koyar. Şöyle ki;

$$(A\cap B)(x) = \mathscr{k}\,[A(x), B(x)] \tag{3.40}$$

$\forall x\in X$ için sağlanır [139]. Bu tür bir fonksiyonun bulanık kesişim olarak nitelendirilebilmesi için bazı özellikleri de taşıması gerekir. A ve B iki bulanık küme ve $\mathscr{k}$ bir t-normu olmak üzere, A ve B'nin kesişiminin $\mathscr{k}$ ile sağlandığını göstermek için $\forall x\in X$'in eşitlik 3.40'ı sağladığını göstermek gerekir. Bu ise her bir x'in izini sürmeyi gerektirir. Ancak, $\mathscr{k}$ fonksiyonu sadece A(x) ve B(x) e bağlı olup, x'ten tamamen bağımsızdır. Dolayısıyla, x'i yok sayıp, t-normlarının biçimsel özelliklerinin incelenmesinde $\mathscr{k}$'nın elemanları keyfi a, b $\in[0,1]$ alınabilir [139].

Bulanık mantıktaki hem zayıf bağlantılar hem de kuvvetli bağlantılar sonsuz değerli t-norm koşullarını karşılar. Gerçekten de t-norm koşulları genelde bulanık mantıklardaki kesişim kavramlarının tanımlayıcısı olarak alınmaktadır; Yani herhangi bulanık bir kesişimin t-norm olması gerekir [152]. Dolayısıyla, günümüzde t-normlarının bulanık kesişime karşılık geldiği kabulü vardır ve artık birbirlerinin yerine kullanılırlar [153].

Verilen bir k fonksiyonu birim aralıkta bir ikili işlem olarak her a, b, c $\in [0,1]$ için en azından aşağıdaki temel 4 aksiyomu (K.1-K.4) sağladığı takdirde bulanık bir kesişim/t-normu olarak tanımlanır [139, 152].

3.7.1. Bulanık kesişim temel aksiyomları

(K.1) $k(a,1) = a$ (sınırlılık koşulu)
(K.2) $b \leq c$ ise $k(a, b) \leq k(a, c)$ (monotonluk)
(K.3) $k(a, b) \leq k(b, a)$ (değişme)
(K.4) $k(a, k(b, c)) \leq k(k(a, b), c)$ (birleşme)

Bu aksiyomlara bulanık kesişim/ t-normlarının yapısal iskeleti denir [139]. A ve B kümeleri bulanık olmadığında ilk üç aksiyomun (K.1-K.3) eşitlik 3.40 ile tanımlanan bulanık kesişimi klasik küme kesişimine dönüştürdüğü kolayca görülür:
$k(0,1) = 0$, (sınırlılık koşulundan)
$k(1,1) = 1$, (sınırlılık koşulundan)
$k(1,0) = k(0,1) = 0$, (değişme özelliği ve sınırlılık koşulundan)
$k(0,0) = 0$, (monotonluk)
k'nın bir bileşeni tam üyeliği ifade edecek şekilde 1 olduğunda sınır şartı ve değişme özelliği bulanık kesişim sezgisel olarak bunu gerektirdiğinden yine de sağlanır, kesişimde üyelik derecesi diğer bileşene eşit olur.

Monotonluk ve değişme özelliği A veya B kümesinden birindeki üyelik derecesindeki düşmenin kesişimden sonra üyelik derecesinde bir artışa neden olmamasını doğal olarak garanti eder. Değişme özelliği ayrıca bulanık kesişimin simetrik olmasını sağlar ki, kesişimi alınan kümelerin sıralamasının değişiminin kesişimi etkilememesi sonucunu doğurur. Son aksiyom olan birleşme (K.4) ise kesişimi herhangi bir sıralama şartı olmaksızın ikiden fazla kümeye genişletme imkânı sağlar.

Farklı gereksinimlere bağlı olarak bulanık kesişime (t-nomlarına) ait yukarıda verilen aksiyomlara (K.1-K.4) ek yeni kısıtlayıcı şartlar (K.5-K.7) da önerildi.

(K.5) $\Bbbk$ sürekli bir fonksiyondur. (süreklilik)

(K.6) $\Bbbk(a, a) < a$ (alt eşgüçlülük)

(K.7) $a_1 < a_2$ ve $a_1 < a_2$ iken $\Bbbk(a_1, a_2) < \Bbbk(b_1,b_2)$ (kuvvetli monotonluk)

Süreklilik A ya da B kümesindeki üyelik derecelerinden herhangi birindeki küçük bir artışın kesişim sonrasında üyelik derecesinde çok büyük (sürekli olmayan) bir artışa neden olmasını engeller. K.6, bazı x'lerin hem A hem de B kümesinde aynı üyelik derecesini alabilmesini sağlar ve ortak (kesişimle ortaya çıkan) üyelik derecesinin asıl üyelik derecesini geçmemesini garanti eder. K.7 ile monotonluk şartını daha da katı hale getirmektedir.

Alt eşgüçlülük özelliğini sağlayan sürekli bir t-normuna *Arşimedyan t-normu* denir, eğer kuvvetli monotonluk özelliği de sağlanıyorsa *kuvvetli Arşimedyen t-normu* denir. Teorem 3.7.2 standart bulanık kesişimin önemli bir özelliğini daha gözler önüne sermektedir.

3.7.2. Teorem

Standart bulanık kesişim yegâne denk t-normudur.

İspat

$\forall a \in [0,1]$ için enk$(a,a) = a$ olduğu aşikardır. $\forall a \in [0,1]$ için $\Bbbk(a,a) = a$ olan bir t-normu olduğu varsayılsın. $a \le b$ olacak şekilde herhangi $a, b \in [0,1]$ için;

$$a = \Bbbk(a, a) \le \Bbbk(a, b) \le \Bbbk(a, 1) = b \quad (3.41)$$

şeklinde monotonluk ve sınırlılık koşulundan yazılabilir. Sonuç olarak;

$$\Bbbk(a, b) = \mathrm{a} = \mathrm{enk}(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \quad (3.42)$$

yazılabilir. Benzer şekilde eğer a ≥ b ise;

$$b = \Bbbk(b, b) \le \Bbbk(a, b) \le \Bbbk(1, b) = b \quad (3.43)$$

ve dolayısıyla;

$$\Bbbk(a, b) = b = \mathrm{enk}(a, b) \quad (3.44)$$

Eşitlik 4.42 ve Eşitlik 4.44'ün bir sonucu olarak $\forall$ *a, b*$\in$[0,1] için

$$ḱ\,(a,\, b) = \text{enk}(a,\, b) \tag{3.45}$$

elde edilir.

3.8.2. Teorem

Standart bulanık birleşim yegâne denk t-conormudur.

3.7.3. Sonuç

Aşağıda verilen ve sıklıkla kullanılan bulanık kesişimler $\forall$ a, b $\in$ [0,1] için yukarıda verilen aksiyomlar (K.1-K.7) ve Teorem 3.7.2'nin bir sonucu olarak t-normlarına örnektir.

$$ḱ\,(a,\, b) = \text{enk}(a,\, b) \text{ (Standart kesişim)} \tag{3.46}$$

$$ḱ\,(a,\, b) = ab \text{ (Cebirsel çapım)} \tag{3.47}$$

$$ḱ\,(a,\, b) = \text{enb}(0,\, a+b-1) \text{ (Sınırlı fark)} \tag{3.48}$$

$$ḱ\,(a,\, b) = \begin{cases} a & b = 1 \text{ ise,} \\ b & a = 1 \text{ ise,} \\ 0 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \qquad \text{(Drastik kesişim)} \tag{3.49}$$

Ayrıca yukarıda verilen kesişimler eşitlik 4.50 de gösterildiği şekilde bir hiyerarşiye sahiptir [139].

$$ḱ_{\text{enk}}(a,\, b) \leq \text{enb}(0,\, a+b-1) \leq ab \leq \text{enk}(a,\, b) \tag{3.50}$$

3.8. Bulanık Birleşim Olarak t-Cormları

Bulanık birleşim için söylenecekler, bulanık kesişim için söylenenler ile paralellik gösterir. A ve B gibi iki bulanık kümenin birleşimini genel olarak eşitlik 3.51'deki gibi betimlenir.

$$ḅ\colon [0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1] \tag{3.51}$$

Bu fonksiyonun bağımsız değişkeni, bulanık küme A'daki bazı elemanların *x* üyelik derecesini ve bulanık küme B'deki aynı elemanın üyelik derecesini içeren çifttir. Fonksiyon bu iki üyelik derecesinin bir bileşkesi $A \cup B$ ye dönüştürür. Yani $\forall x \in X$ için;

$$(A \cup B)(x) = ḫ\,[A(x), B(x)] \tag{3.52}$$

sağlanır [139]. Burada ḫ fonksiyonunun bulanık bir birleşim olarak sağlaması gereken özellikler ile literatürde t-conormları olarak bilinen fonksiyonların sağlaması gereken özellikler tamamen karşılıklıdır. Şöyle ki; bulanık mantıktaki hem zayıf ayrışmalar hem de kuvvetli ayrışmalar sonsuz değerli t-conorm koşullarını karşılar. Gerçekten de t-conorm koşulları genelde bulanık mantıklardaki birleşim kavramlarının tanımlayıcısı olarak alınmaktadır; Yani herhangi bulanık bir birleşimin t-conorm olması gerekir [152]. Bu nedenle literatürde birbirlerinin yerine kullanılırlar [153].

Bir ḫ bulanık birleşimi/t-conormu birim aralıkta bir iki işlem olup, her a, b, c $\in [0,1]$ için en azından Aksiyom B.1-B.4'ü sağlar [139, 152].

3.8.1. Bulanık birleşim temel aksiyomları

(B.1) ḫ $(a,0) = a$ (sınırlılık koşulu)
(B.2) $b \leq c$ ise ḫ $(a, b) \leq$ ḫ (a, c) (monotonluk)
(B.3) ḫ $(a, b) \leq$ ḫ (b, a) (değişme)
(B.4) ḫ $(a,$ ḫ $(b, c)) \leq$ ḫ $($ḫ $(a, b), c)$ (birleşme)

Bu aksiyomlar bulanık birleşim için vazgeçilmezdir. Bu yüzden bulanık birleşimin/t-conormlarının yapısal iskeleti kabul edilirler. Bu aksiyomların kesişim aksiyomlarından farkı sınırlılık şartındadır. Bualnık birleşim/t-conormlarında da kesişimde olduğu gibi ek şartlar (B.5-B.7) konulabilir.

(B.5) ḫ sürekli bir fonksiyondur. (süreklilik)
(B.6) ḫ $(a, a) > a$ (süper eşgüçlülük)
(B.7) $a_1 < a_2$ ve $a_1 < a_2$ iken ḫ $(a_1, a_2) <$ ḫ (b_1, b_2) (kuvvetli monotonluk)

Burada verilen aksiyomlar kesişimle verilen aksiyomlar ile eşdeğerdir, ancak alt eşgüçlülüğün süper eşgüçlülük ile yer değiştirdiğini gözden kaçırmamak gerekir. Herhangi bir süper denk t-conorma Arşimedyan denir, eğer aynı zamanda kuvvetli monoton ise (B.7'yi sağlıyorsa) kuvvetli Aşimedyan denir. Teorem 3.8.2 standart bulanık birleşimin denkliğe göre anlamlı olduğunu göstermektedir. İspatı teorem 3.7.2 ile benzerdir.

3.8.3. Sonuç

Aşağıda verilen ve $\forall$ a, b $\in$ [0,1] için sıklıkla kullanılan bulanık birleşimler yukarıda verilen aksiyomlar (B.1-B.7) ve Teorem 3.8.2'nin bir sonucu olarak t-conormlarına örnektir.

$$ḫ\,(a, b) = \text{enb}(a, b) \text{ (Standart birleşim)} \tag{3.53}$$

$$ḫ\,(a, b) = a + b - ab \text{ (Cebirsel toplam)} \tag{3.54}$$

$$ḫ\,(a, b) = \text{enk}(1, a+b) \text{ (Sınırlı toplam)} \tag{3.55}$$

$$ḫ\,(a, b) = \begin{cases} a & b = 0 \text{ ise,} \\ b & a = 0 \text{ ise,} \\ 1 & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \text{(Drastik birleşim)} \tag{3.56}$$

Ayrıca $ḫ_{\text{enb}}(a, b)$ drastik birleşime karşılık gelmek üzere yukarıda verilen birleşimler eşitlik 3.57 de gösterildiği şekilde bir hiyerarşiye sahiptir.

$$\text{enb}(a, b) \leq a + b - ab \leq \text{enk}(1, a+b) \leq ḫ_{\text{enb}}(a, b) \tag{3.57}$$

3.9. Birleştirici (Aggregation) Operatörler ve Fonksiyonlar

Literatürde aggregation olarak geçen bu kavramın değişik bilim dallarındaki dilimiz karşılıkları farklı olup, bilinen aritmetik işlemler ile bir araya getirilip ortak bir paydada ifade edilemeyen olguları belirli ağırlıklar vererek bir araya getirme amacıyla kullanılırlar. Birkaç değişkenin birleştirici (bağlayıcı, bütünleştirici, birleştirici, toparlayıcı, kaynaştırıcı) kullanarak tek bir değere dönüştürülmesi ekonomi, finans, matematik, siyaset, fizik gibi karar verme gerektiren hemen her alanda temeldir [154]. Bu kavramı anlamayı kolaylaştırıcı bir örnek aşağıdaki şekilde verilebilir.

Örnek 4.1.

a) Veriler açık ve net rakamsal olduğunda en basit ve bilinen birleştirici operatörler aritmetik ortalama ve ağırlıklı ortalamadır.

b) Marketten bir miktar elma, erik, nar, portakal alınsın. Alınan bu nebatın hepsini birden ifade etmek için kullandığımız meyve kavramı birleştirici bir operatördür. Bu meyveleri bir sepete alınıp tartıldığında her birinin ağırlıkları tanımda ifade edilen ağırlıklara karşılık gelir.

c) Bu söylediklerimiz için biraz daha karmaşık bir örnek, geometrik yüzeylerin çizimi sırasında farklı düzlemlerin ortak bir fonksiyonla gösterilmesidir.

Temelde tüm karar problemleri A={a_1, a_2, ... , a_n, ... }şeklinde gösterilebilen sonlu veya sonsuz alternatifler kümesi, bize kısıt oluşturan yani sağlamamız gereken şartları belirten C={c_1, c_2, ... , ca_n}ile ifade edilen bir kriterler kümesi ve uzmanlar olarak nitelendirilebilecek ve alternatiflerin ne oranda kriterleri sağladığına karar verecek G={e_1, e_2, ... , e_g} ile gösterilen bir grup insandan oluşur [155]. Burada amaç kriterlere göre alternatifler arasındaki farkları anlamak, analiz etmek ve kontrol etmektir. İşte alternatifler, kriterler ve değerlendirmelerden oluşan kümeyi bir araya getirip tek bir değere dönüştürülmesi işleminde kullanılan araçlara birleştirici fonksiyonlar ya da birleştirici operatörler denir. Kısaca N farklı kaynaktan elde edilen bilgiyi harmanlayarak tek bir referans veriye dönüştürürler [155, 156]. Matematiksel olarak tanımını aşağıdaki gibidir.

Tanım

Birleştirici operatörü G, $\{G\}_{n=1}^{\infty}$ eşlemelerinin bir dizisi (G_n:II^n→II) olup, II = [a,b] alınabileceği gibi [95], bulanık kümeler bakış açısıyla düşünüldüğünde II = [0,1] olarak da alınabilir [135, 157]. Temel özellikleri;

(i) $\forall a \in [0,1]$ için $G_1(a)=a$ (3.58)

(ii) $G_n(0, 0 \ldots, 0) = 0$ ve $G_n(1, 1 \ldots, 1) = 1$, n=2, 3, … (3.59)

(iii) $a_i \geq b_i$ ise $G(a_1, a_2 \ldots, a_n) \geq G(b_1, b_2 \ldots, b_n)$ (3.60)

dir. Bu noktada literatürde tanımlı birçok fonksiyon mevcuttur, aralarındaki fark kullanılan verinin tipi ve fonksiyonun sağlaması gereken varsayımlardan kaynaklanır. Ortak olan varsayımlar eşgüçlülük (i ile bunun özel hali olan ii) ve monotonluktur (iii). Kimi fonksiyonlarda simetri özelliği de aranmaktadır [155]. Birleştirici operatörlerin sağlayabileceği özellikler aşağıdaki şekilde özetlenebilir [158]:

A. Temel matematiksel özellikler
a. Monotonluk
b. Süreklilik
c. Simetri
d. Eşgüçlülük (idempotency)
e. Bağlama, ayırma ve içsellik
B. Grup tabanlı özellikler
a. Birleşme (associativity)
b. Ayrışma ve kuvvetli ayrışma
c. Kendinden dağılma (Auodistributivity)
d. Bisimetri
C. Değişmezlik özellikleri
a. Oran, fark, aralık ve log-oran ölçekleri
b. Sıralama ölçekleri
c. Ölçeklerin tersi
D. Diğer Özellikler
a. Nötr ve yutan elemanlar
b. Toplamsallık ve buna bağlı özellikler

3.9.1. Birleştirici (Aggregation) operatör ve fonksiyonların kullanım alanları

Farklı alanlarda farklı anlamlar yüklense de ortak olarak bilgiyi tek bir noktada toparlama esasına dayanan birleştirici operatörler ve fonksiyonların belli başlı kullanım alanlarını aşağıdaki şekilde verilebilir [156]:

Ekonomi/iktisat

Gayri safi milli hâsıla hesabında olduğu gibi her türden ekonomik bilgiyi özetlemek, birkaç farklı kritere göre ülkeleri, firmaları, sektörleri sıralamak, insani gelişmişlik endeksi ya da perakende fiyat endeksi gibi endeksler oluşturmak benzeri amaçlarla kullanılırlar.

Biyoloji

DNA ve RNA dizilerini kaynaştırma uygulamalarında, taksonomi ile ilgili çalışmalarda farklı özelliklerin tek bir tür olarak tanımlanmasında, daha özel olarak dendogram (ağaç dalı benzeri yapı) ve sınıflama oluşturmada kullanılır.

Eğitim

En basiti öğrenci geçme notunun hesabı olup, bu hesap basit aritmetik ortalama olabileceği gibi farklı ağırlıklı ortalamalar da olabilir. Bu ikinciye en bariz örnek ÖSYM tarafından açıklanan sınav sonuçlarıdır. Bunun dışında öğrenci başarısını ölçmeye dönük kimi testler ve anketler ile eğitim kurumlarını sıralamak için kullanılan yöntemler bu kapsamda değerlendirilebilir.

Bilişim teknolojileri

Yapay sinir ağlarında kullanılan seçme ölçütlerinde ya da yazılım ve donanım seçiminde veya çok kriterli karar verme uygulamaları ile veri doğrulamada kullanılır.

Karar verme

Mevut alternatiflerden birinin seçimi ya da alternatifler arasından birtakım işlemciler vasıtası ile yeni alternatiflerin oluşturulmasında kullanılır.

Sistemin daha iyi kavranması

Tek kaynaktan veri gelen sistemlerde; gelen bilginin doğruluğunun ve bilgi gönderen kaynağın güvenilirliğinin teyit edilememesi, gelen bilginin sadece bilgiyi üreten kaynağın bakış açısını yansıtması gibi sorunlar vardır. Bu yüzden veri kaynaklarının artırılması ve farklı kaynaklardan gelen verilerin işlenmesine dönük yöntemler geliştirilmesi sistemin daha iyi kavranmasını kolaylaştıracaktır.

3.9.2. Birleştirici operatörlerin gösterim şekilleri

Birleştirici operatörleri aynı zamanda birleştirici fonksiyon tanımlamakta olup, bu fonksiyon farklı biçimlerde gösterilip, farklı manalar ifade edebilir [89, 95].

(i) Cebirsel bir formül (y=x+2 gibi)
(ii) Bir fonksiyonun grafiği (2 boyutlu, 3 boyutlu ya da kontur çizgileri gibi)
(iii) Sözlü olarak bir iş akışı ya da kısaca bir algoritma
(iv) Bir referans tablosu
(v) Cebirsel, diferansiyel ya da fonksiyonların çözümü
(vi) Bir bilgisayar kodlaması şeklinde

3.9.3. Temel birleştirici operatör (fonksiyon) aileleri

Farklı kaynaklarda farklı sayılarda bahsedilse de [89, 156, 158] temelde birleştirici operatörleri 4 farklı ana ailede incelenir [154].

A. Bağlayıcı birleştirici fonksiyonlar
a. Enb ve Enk
b. t-Normlar
c. Bağımlılık fonksiyonları (kapulalar)
d. Yarı-kapulalar
e. Kısmi-kapulalar
B. Ayırıcı birleştirici fonksiyonlar
a. Üçgensel t-conormlar
b. Dual kapulalar
C. Vasati birleştirici fonksiyonlar
a. Ortalamalar (Arritmetik, geometrik, harmonik, ağırlıklı aritmetik, (ağırlıklı) yarı-aritmetk)
b. Medyanlar
c. Sıralı ağırlıklı ortalama (OWA)
d. Sıralı ağırlıklı enb. (OWMax.)
e. Choquet ve Sugeno integralleri
f. Sıralı Modüler Ortalama (OMA) operatörleri
g. Latis polinomları
D. Karma birleştirici fonksiyonlar
a. Denk olmayan uninormlar
b. Gamma operatörleri
c. Bulanık doğrusal programlamadaki özel konveks toplamlar

Birleştirici ve ayırıcı fonksiyonlar başlığı altında incelenen t- normlar ve t-conormlar bulanık kümeler ile ilgili işlemlerde önemli bir yer tutar.

3.10 Deneysel Verilere Uygulama

Gerek bir birleştirici fonksiyon olarak düşünülsün gerekse ayrı bir yöntem olarak görülsün, her iki durumda da t-normları ve t-conormları $f:[0,1]^n \rightarrow [0,1]$ şeklinde tanımlı fonksiyonlardı. Oysaki gerçek hayatta veriler her zaman birim aralıkta değer almaz. Bu durumda verilerin analize uygun gale getirilmesi yani dönüştürülmesi gerekir. Bunu yaparken,

- Monotonluk özelliğinin korunması,
- Ölçek ve dağılımın farklı olabileceği,
- Ortalamaya dayalı birleştirici fonksiyonlarda eşgüçlülük özelliğinin sağlanması,
- Verinin numerik olmasının zorunlu olmadığını ve bu tür bir veriye kendine has bir dönüşüm gerekebileceği,

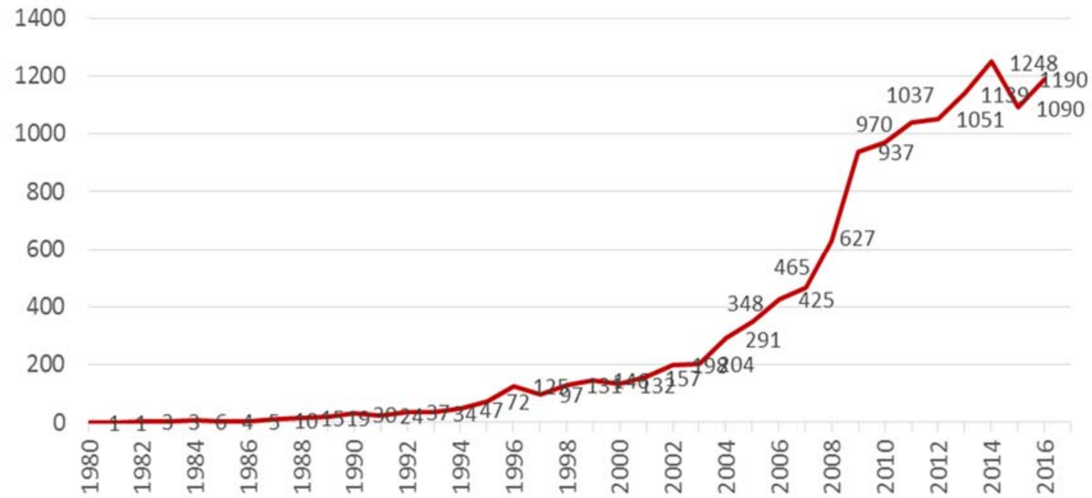
göz önünde bulundurulmalıdır [159].

3.10.1. Verilerin özetlenmesi

Günümüzün küresel dünyasında teknolojinin de yardımı ile veri üretimi artarken, veriye erişim kolaylaşmaktadır. Şekil 4.1 yıllara göre VZA konusunda yapılan yayınları göstermektedir. Sayının yüzlerle ifade edildiği düne kadar bu yayınlara erişim servis sağlayıcı tarafından sınırlandırılmış iken bugün on binlerle ifade dilen yayın için yegâne kısıtlar internet bağlantımızın hızı ve yeterli depolama alanımızın olup olmadığıdır.

Bu noktayı Emrouznejad ve Marra şöyle vurgulamaktadır [160]:

> Günümüzde bilgisayarların artan kapasitesi, yalnızca birkaç yıl öncesine kadar imkânsız olan büyük miktarda verilerin toplanmasına, depolanmasına ve analiz edilmesine olanak tanır. Bu yeni veriler büyük miktarlarda bilgi sağlamakta ve yeni bilgi işlem yöntemleri ve veri tabanları kullanımı ile bu sağlanmaktadır. Büyük verilerin ortaya çıkması birçok meseleyi de beraberinde getirmiştir; hesaplama kapasitesinden veri manipülasyon tekniklerine kadar hepsi de rekabetçi olanaklar sunmaktadır. Farklı alanlarda çalışan araştırmacılar ve endüstriler, bu konular üzerinde kafa yormaktadır.



Şekil 3.1 Yıllara göre VZA yayın sayısı

Hem problem hem de fırsatlar bu denli büyük olunca verilerin işlenmesi önem kazanır. Bu noktada veri özetleme anahtar rol üstlenmektedir. Veriler her zaman Şekil 3.1'deki gibi tek boyutlu olmayacaktır. Bazen öğrencilerin 100 üzerinden aldıkları notları 4'lük sisteme dönüştürüp harf karşılıkları atayan eşitlik 3.61 de örneklendiği gibi verilerde fonksiyonel bir ilişki de olabilir.

$$harf\left(not\right)=\begin{cases} AA & \bar{x}+3\sigma \le not & 4 \\ BA & \bar{x}+2\sigma \le not < \bar{x}+3\sigma & 3,5-4 \\ BB & \bar{x}+1\sigma \le not < \bar{x}+2\sigma & 3,0-3,5 \\ CA & \bar{x} \le not < \bar{x}+1\sigma & 2,5-3,0 \\ CB & \bar{x}-1\sigma \le not < \bar{x} & 2,0-2,5 \\ CC & \bar{x}-2\sigma \le not < \bar{x}-1\sigma & 1,5-2,0 \\ DD & not < \bar{x}-2\sigma & 1,0 \end{cases} \tag{3.61}$$

Veyahut koordinat eksenindeki konum vektörü, aynı sınıftaki öğrencilerin belirli bir A dersinden aldıkları notları gösteren notlar sütun vektörü ya da aynı öğrencinin farlı derslerden aldığı notları gösteren satır vektörü şeklinde çok değişkenli olabilir.

Veriler sayısal olduğunda ilk akla gelen özetleme biçimi bir takım belirtici istatistikleri kullanmaktır. Burada ilk akla gelenler, Artimetik ortalama, medyan, geometrik ortalama ve harmonik ortalamadır. Bunlara ağırlıklı ortalamayı da dahil edebiliriz. Bunların hepsi vasati değer üreticileri olup, birleştirici operatörlere (fonksiyonlara) örnektirler. Örnek 4.1 b'de olduğu gibi bazı veriler mevcut halleri ile hesaplamaya dahil edilemez. Böyle durumlarda verinin elmanın meyve olarak tanımlanması gibi bir takım dönüşümlerden geçirilmesi gerekir.

3.10.2. Verilerin dönüştürülmesi [159]

Tümleyen alma

Veriler [0,1] aralığında olduğunda standart tümleyen;

$$N(x)=1-x \tag{3.62}$$

olup, eğer veriler a,b $\in$R olmak üzere x$\in$[a,b] olduğunda tümleyen eşitlik 3.63 daki gibi alınır .

$$N(x) = b - x + a \tag{3.63}$$

Ölçekleme, standardizayon ve normalizasyon

Farklı birimler ile ölçülmüş değişkenleri birim aralığa değer alır hale getirmek için yapılan toplama çıkarma ve çarpma işlemleri kullanılarak yapılan dönüşümlere doğrusal dönüşümler denir. $x\in[a,b]$ $(a,b\in R)$ olmak üzere tek değişkenli doğrusal bir dönüşüm;

$$f(x) = \frac{x-a}{b-a} \tag{3.64}$$

şeklinde tanımlanır. Girdi vektörü $x_j = \{ x_{1,j} , x_{2,j} , \ldots , x_{m,j} \}$için $\overline{x}$ bilinen aritmetik ortalamayı, "s" de bilinen standart sapmayı göstermek üzere standardizasyon

$$f(x) = \frac{x-\overline{x}}{s} \tag{3.65}$$

şeklinde tanımlanır, buna normalizasyon da denir. Bu tür bir dönüşüm verilerin %95'ini [-2, 2] aralığına dönüştürecektir. Verileri birim aralığa dönüştürmek için ise eşitlik 3.66 teki dönüşüm uygulanır.

$$f(x) = 0{,}15\left(\frac{x - \bar{x}}{s}\right) + 0{,}5 \qquad (3.66)$$

Sıralama Ölçeklemesi

Girdi vektörü $x_j = \{ x_{1,j} , x_{2,j} , \dots , x_{m,j} \}$ ve her bir x_{ij} nin sırası $O_j(x_{ij})$ ile gösterilmek üzere sıralama ölçeklemesi eşitlik 3.67 deki gibi tanımlanır.

$$f(x) = \frac{m - O_j(x)}{m - 1} \qquad (3.67)$$

Logartimik ve polinom dönüşümleri

Verilerin üstel dağıldığı ya da çarpık olduğu durumlarda sırasıyla logaritmik ya da polinom dönüşümleri uygulanır.

$$f(x)=ln\,x \qquad (3.68)$$

$$f(x)=x^2 \qquad (3.69)$$

Parçalı (kırıklı) doğrusal dönüşüm

Parçalı doğrusal dönüşümlerde tanım kümesi tanım kümesi alt aralıklara ayrılır ve veri her bir alt aralıkta farklı bir f(x)=mx+c şeklindeki doğruya dönüştürülür. Tanım aralığının alt aralıklarının sınırlarında bu doğrular çakıştırılarak süreklilik sağlanır.

Tanım kümesi $[a, b];[a_0,a_1], [a_1,a_2], \dots , [a_{n-1},b]$ şeklinde n tane alt aralığa bölünmüş olsun. q_i (i=1, … ,n); $q_0 = 0$, $q_n = 1$ ve $q_i \in [0,1]$ olacak şekilde değişkenimizin dönüşüm sonrası almasını istediğimiz değer olsun. Bu durum için genel bir dönüşüm eşitlik 3.70’deki gibi tanımlanabilir.

$$f(x)=\begin{cases} q_1-\dfrac{x-a_0}{a_1-a_0} & , \quad a_0\le x<a_1 \\ q_2+\left(q_3-q_1\right)-\dfrac{x-a_0}{a_1-a_0} & , \quad a_1\le x<a_2 \\ \vdots & \quad \vdots \\ q_j+\left(q_{j+1}-q_{j-1}\right)-\dfrac{x-a_{j-1}}{a_j-a_{j-1}} & , \quad a_{j-1}\le x<a_j \\ \vdots & \quad \vdots \\ q_n+\left(1-q_{n-1}\right)-\dfrac{x-a_{n-1}}{b-a_{n-1}} & , \quad a_{n-1}\le x<a_n=b \end{cases} \tag{3.70}$$

Dönüşümlerden elde edilen fonksiyonlar [95]

Dönüşüm fonksiyonları, özellikleri kullandığımız dönüşümlerce açıklanan yeni fonksiyonların elde edilmesinde de kullanılabilir.

$f^{[a,b]}$, [a, b] aralığında tanımlı bir birleştirici fonksiyon olsun, $f^{[0,1]}$ de [0, 1] aralığına karşılık gelen birleştirici fonksiyon olsun. Bu takdirde bu iki birleştirici fonksiyonun birbirlerine dönüşümleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$f^{[a,b]}\left(x_1,...,x_n\right)=\left(b-a\right)f^{[0,1]}\left(\frac{x_1-a}{b-a},\dots,\frac{x_n-a}{b-a}\right)+a \tag{3.71}$$

$$f^{[0,1]}\left(x_1,...,x_n\right)=\frac{f^{[a,b]}\left(\left(b-a\right)x_1+a,\dots,\left(b-a\right)x_n+a\right)-a}{b-a} \tag{3.72}$$

$\varphi_1,...,\varphi_n,\psi$: II→I şeklinde tanımlı birebir ve örten fonksiyonlar olsun. Herhangi bir birleştirici f fonksiyonu için

$$g(x)=\psi\left(f\left(\varphi_1\left(x_1\right),...,\varphi_n\left(x_n\right)\right)\right) \tag{3.73}$$

fonksiyonu da bir birleştirici fonksiyondur.

f, II^n de tanımlı bir birleştirici fonksiyon olsun, h de sürekli kesin monoton $X \to II$ ($X \subseteq R$)olsun. h ye ölçekleme yada üreten fonksiyon denir. Ayrıca $f_h(x) = h^{-1}(f(h(x)))$ de X^n de bir birleştirici fonksiyondur.

f, bir birleştirici fonksiyon olsun ve ψ: $II \to II$ ve $\psi(a)=a$, $\psi(b)=b$ şartlarını sağlayan azalmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x \in [a,b]$ ve hemen her pozisyon için $\psi(f(b, \ldots, x, b, \ldots, b) \leq x$ bağlayıcı birleştirici fonksiyondur.

Üç birleştirici fonksiyon $f, g : II^n \to II$ ve $h : II^2 \to II$ iki değişkenli olsun. Bu takdirde

$$H(x) = h(f(x), g(x)) \tag{3.74}$$

bir birleştirici fonksiyondur ve f, g, h'nin sağladığı özelliklere bağlı aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- f, g, h sürekli ise H de süreklidir.
- f ve g simetrikse H de simetriktir.
- Eğer f, g, h birleşme özelliğini sağlıyorsa H de sağlar
- Eğer f, g, h bağlayıcı (ayırıcı) ise H de bağlayıcı (ayırıcı) dır.
- f, g, h den birinin ya da hepsinin birden etkisiz elamana sahip olması H nin de etkisiz elamana sahip olmasını gerektirmez.

Dual birleştirici fonksiyon

Dual birleştirici fonksiyonların elde edilmesinde tümleyen kullanılır. Veri önce dönüştürülürse standart tümleyen kullanılarak ya da doğrudan eşitlik 3.63'te belirtilen standart olmayan tümleyen kullanılarak elde edilir. Verileri birim aralıkta değer alan T birleştirici fonksiyonu için standart tümleyen kullanılarak elde edilen T^d birleştirici fonksiyon eşitlik 3.75'de tanımlandığı gibidir.

$$T^d = 1 - T(1 - x_1, 1 - x_2, \ldots, x_n) \tag{3.75}$$

3.10.3. Birleştirici fonksiyonların seçimi ve verilerden elde edilmesi

$D = \{(x_k, y_k)\}_{k=1}^{K}$ veriler, P_1, P_2, … matematiksel özellikler olmak üzere f ile gösterilen bir birleştirici operatörün seçimi, $f(x_k;w) \approx y_k$, k=1, …, k (w; x lere ait katsayılar/ağırlıklar) yaklaşık eşitliğini sağlayan ve belirtilen matematiksel özellikler ile uyumlu bir fonksiyonun bulunması işlemidir. Genellikle bu eşitlik 3.76 de gösterilen bir en küçükleme probleminin çözümünü gerektirir [158].

$$\begin{aligned} &enk \|r\| \\ &kısıtlar \\ &f \text{ sağlar } P_1, P_2, \ldots \end{aligned} \tag{3.76}$$

Burada $\|r\|$ artıkların normu olup, $r \in R^K$, $r_k = f(x_k;w) - y_k$ ile ifade edilen gözlenen ve tahmin edilen değerler arasındaki farkların vektörüdür. Bu norm eşitlik 3.77-3.780'de gösterildiği gibi farklı şekillerde tanımlanabilir [89].

En küçük mutlak sapma normu

$$\|r\|_1 = \sum_{k=1}^{K} |r_k| \tag{3.77}$$

En küçük kareler normu

$$\|r\|_2 = \sum_{k=1}^{K} \sqrt{(r_k)} \tag{3.78}$$

Chebyshev normu

$$\|r\|_\infty = \underset{k=1,\ldots,K}{enb} |r_k| \tag{3.79}$$

Sapmaların belirli bir ağılığa sahip olması durumu

$$\|r\|_2 = \sum_{k=1}^{K} \sqrt{(u_k r_k)} \tag{3.80}$$

Birleştirici fonksiyonların doğrusal programlama kullanılarak veriden elde edilmesi [83]

r_k^-, r_k^+ ≥0 olacak şekilde seçilmiş ve $r_k^+ - r_k^- = f\left(x_k;w\right) - y_k$ biçiminde tanımlı yardımcı değişkenler olsun ve $r_k^+ + r_k^- = \left|f\left(x_k;w\right) - y_k\right|$ eşitliği sağlansın. Bu durumda problem eşitlik 4.78 de verildiği şekilde bir sapmaları en küçükleme modelinin çözümü şekline dönüşür [83].

$$\begin{aligned}
&Enk \quad \sum_{k=1}^{K} r_k^+ + r_k^- \\
&kısıtlar \\
&r_k^+ - r_k^- - f\left(x_k;w\right) = y_k, \\
&w\text{'ya üzerinde koulacak diğer kısıtlar} \\
&k = 1,...,K \\
&r_k^+, r_k^- \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Benzer düşünce ile bölüm 3.9.3’te verilen birleştirici fonksiyonlar birer DP modeli şeklinde elde edilebilir.

Ağırlıklı ortalamalar

$f\left(x_k;w\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i$ ($w \in [0,1]$ ağırlıklar olup, $\sum w_i=1$ şartını sağlar) olmak üzere model

$$\begin{aligned}
&Enk \quad \sum_{k=1}^{K} r_k^+ + r_k^- \\
&kısıtlar \\
&r_k^+ - r_k^- - \sum_{i=1}^{n} w_i x_{ki} = -y_k, \quad (k = 1,...,K) \\
&\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\
&r_k^+, r_k^- \geq 0, \quad w_i \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

Sıralı ağırlıklı ortalamada (OWA) x_{ki} gözlem değerleri modelde $x_{k(i)}$ gözlemlerin sıralama değerleri ile yer değiştirir. Özel bir α seviyesi elde edilmek isteniyorsa $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} w_i(n-i) = \alpha$ kısıtı keyfi olarak modele eklenebilir.

g:[0,1] $\rightarrow$ [-∞, ∞] üretici fonksiyon olmak üzere sözde aritmetik ortalama için bu üretici fonksiyonun sabit olduğu yani bilindiği modelin çözümünden maksadın *w* ağırlık vektörünü bulmak olduğu durumda $f(x;w)=g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}w_i g(x_i)\right)$ olmak üzere model;

$$
\begin{aligned}
&Enk \quad \sum_{k=1}^{K} r_k^+ + r_k^- \\
&kısıtlar \\
&r_k^+ - r_k^- - \sum_{i=1}^{n} w_i g(x_{ki}) = -g(y_k), \quad (k=1,...,K) \qquad (3.83)\\
&\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \\
&r_k^+, r_k^- \geq 0, \quad w_i \geq 0.
\end{aligned}
$$

şeklinde ifade edilir, yine OWA için x_{ki} gözlem değerleri modelde $x_{k(i)}$ gözlemlerin sıralama değerleri ile yer değiştirir.

Ağırlık vekörü *w*'nun sabit olduğu yani bilindiği, yani modelin çözümünden maksadın üretici fonksiyonun tespiti olduğu durumda doğrusal kesitler (linear splines) B_j (j=1, … , J) şeklinde ifade edilen temel bazı fonksiyonların doğrusal bileşimi şeklinde üretici fonksiyon olarak kullanılır. Bu durumda üretici fonksiyon;

$$g(x)=\sum_{j=1}^{J} c_j B_j(x) \qquad (3.84)$$

şeklinde tanımlanır. Üretici fonksiyon keyfi tanımlandığından g'yi sabit tek bir fonksiyon olarak elde edebilmek için g(0)=0, g(1)=1 şeklinde kısıtlanır ve g'yi monoton artan bir fonksiyon yapacak c_j (≥0) değerleri modelden bulunmaya çalışılır. Yeni şekli ile *f* fonksiyonu eşitlik 3.85'deki gibi model ise eşitlik 3.86'daki gibi tanımlanır.

$$f(x_k;w;c)=\sum_{i=1}^{n} w_i g(x_{ki}) - g(y_k) = \sum_{j=}^{J} c_j \left(\sum_{i=1}^{n} w_i B_j(x_{ki}) - B_j(y_k) \right) \qquad (3.85)$$

$$enk \quad \sum_{k=1}^{K} r_k^+ + r_k^-$$

kısıtlar

$$r_k^+ - r_k^- - \sum_{j=}^{J} c_j \left(\sum_{i=1}^{n} w_i B_j\left(x_{ki}\right) - B_j\left(y_k\right) \right) = 0, \quad k = 1,...,K \tag{3.86}$$

$$\sum_{j=1}^{J} c_j B_j(0) = 0, \quad \sum_{j=1}^{J} c_j B_j(1) = 1,$$

$$r_k^+, r_k^- \geq 0, \quad c_j \geq 0, \quad w_i \text{ sabit}$$

Gerçek hayat uygulamalarında önceden gelen tecrübeler ile sabit değilse, ne c_j'ler yani üretici fonksiyon nede w_j ağırlıkları sabit değildir, yani değişkendir. Dolayısıyla bu model teorik olup, hem c_j'lerin hemde w_i'lerin değişken olduğu iki aşamalı bir model ile çözüm gerekebilir.

Üçgensel normlar (t-normlar) ve üçgensel conomlar (t-conormlar)

Önceki bölümlerde incelediğimiz üzere t-normlarının burada sürekli arşimedyen olanlarından sürekli ve azalan toplamsal üreticileri bulunanlar için modelleme yapıldı.

g:[0,1]→[0,∞], g(1)=0, g(0)< ∞ ya da g(0)= ∞ özelliğini sağlayan toplamsal üreticiyi göstermek üzere model;

$$enk \quad \sum_{k=1}^{K} r_k^+ + r_k^-$$

kısıtlar

$$r_k^+ - r_k^- - \sum_{j=}^{J} c_j \left(\sum_{i=1}^{n} w_i B_j\left(x_{ki}\right) - B_j\left(y_k\right) \right) = 0, \quad k = 1,...,K \tag{3.87}$$

$$\sum_{j=1}^{J} c_j B_j(0) = 0, \quad \sum_{j=1}^{J} c_j B_j(1) = 1,$$

$$r_k^+, r_k^- \geq 0, \quad c_j \leq 0, \quad w_i \text{ sabit}$$

şeklinde olup, dikkat edilirse eşitlik 3.80 den farklı olarak üretici monoton azalan olduğundan cj ≤ 0 dır.

Uninormlar, belirli bir aralıkta değer alan çıktılar, çıktılar ya da girdiler ya da sıralamanın korunması durumları için 3.81 modeli benzer mantıkla kısmi modifikasyonlarla kullanılır [83].

Burada önerilen modeller her ne kadar çözüm sağlıyor gibi gözükse de bizzat bu modelleri öneren Beliakov'un; "Belirli bir uygulama için en uygun birleştirici fonksiyonunun tanımlanması kolay değildir, zira fonksiyonların çeşitli matematiksel özelliklerle kısıtlamakla bile sonsuz sayıda seçenek ortaya çıkar. Fonksiyonları aritmetik ortalamalara veya OWA'ya kısıtlamakla bile bir ağırlıklandırma vektörünün seçilmesini gerektirir." şeklindeki kendi ifadesi ile bu yöntemle çözümün o kadar kolay olmadığı ortaya koydu [83].

4. BULANIK MATEMATİKSEL PROGRAMLAMA

Dantzig'in belirsizlik altında doğrusal programlama ile ilgili çalışması [2] ile Belman ve Zadeh'in bulanık kısıtları işledikleri *Bulanık ortamda karar verme* adlı çalışmasını [124] bir kenara ayıracak olursak, bulanık matematiksel programlama konusundaki ilk çalışma Japonya'dan geldi, Tanaka ve Okuda'ya ait olan bu çalışma ne yazık ki Japoncadır [78]. Hemen ardından Asai'nin de katılımı ile ikinci çalışma bu ilk çalışmanın üzerine bir yorum bir çeviri olarak *Journal of Cybernetics*'te İngilizce olarak yayınlandı [41]. Başta bulanık mantık ve kümelerin piri Zadeh olmak üzere bulanık kümeler üzerine çalışmalar olanca hızıyla devam ederken [21, 22, 128, 131, 151, 161-163], bulanık matematiksel programlama konusundaki bir diğer çalışma *Bulanık sistemlerin tanımı ve optimizasyonu* ismiyle Zimnermann'dan gedi [164]. Bunu Hamacher, Liberling ve Zimmermann'ın bulanık doğrusal programlama problemleri için duyarlılık analizi konusunu işledikleri çalışması [27] ile Zimmermann'ın birden fazla amaç fonksiyonu olması durumunda doğrusal programlama problemi üzerine yaptığı çalışmasına dahil ettiği bulanık doğrusal programlama çalışması izledi [26]. Sonrasında Fransız matematikçiler Didier Dubois ve Hanri Prade'in bulanık doğrusal kısıtların sistemini ortaya koyan bir makalesi ve yöneylem araştırması için bulanık modelleri de içeren bir kitabı yayınlandı [133, 165]. Yöneylem araştırmasının ve dolayısıyla matematiksel programlamanın bizzat mutfağında yer alan Dantzig yöneylem araştırmasının gelişimindeki anı, katkı ve tecrübelerini *Doğrusal programlamanın kaynakları hakkında anılar* adlı makalesinde anlattı [166]. Aynı yıl, *Zimmermann, yöneylem araştırmasında bulanık kümelerin kullanımı* adlı inceleme çalışması ile konuyu özetlerken, vektör maksimum problemlerinin çözümü ve düzgün modelleme konusunda yoğun bir talep olduğunu belirterek, *Bulanık matematiksel programlama* adlı çalışması ile bu konuya çözüm aradı [80, 167]. Tanaka ve Asai, kişisel görüşlere veya öznel yargılara dayanan bulanık parametrelerle doğrusal bir programlama problemini tartıştı [38]. Verdagay, bulanık doğrusal programlama problemlerinin çözümü için dual bir yaklaşım önerdi [168]. Zimmermann 1985 yılına gelindiğinde bir kez daha bulanık küme teorisinin matematiksel programlamaya uygulanmasına dair bir inceleme yazısı kaleme aldı [30]. Bulanık matematiksel programlama üzerindeki en etkin kalemlerden biri olan Zimmerman bahsi geçen çalışmalarının dışında daha birçok esere gerek tek başına gerekse farklı başka yazarlarla birlikte ya imza attı ya da bölüm yazarı olarak katkıda bulundu [19, 28, 29, 81, 82, 169-172]. Campos ve Verdegay, bulanık teknoloji katsayıları ve sağ taraf sabitleri üzerine çalışma yaparken tüm kısıtlarda bulanıklık olduğunda bulanık sayıların sıralanmasını ele aldı [173]. Delgado, Verdagay ve Villa, bulanık doğrusal programlama için genel bir model önerdi [31]. Lodwick, bulanık doğrusal programlamanın yapısını araştırdı, tüm α-kesim kümelerinde problem olduğu durumlar için yöntemlerin açık ve net olduğunu ortaya koyarken, bazı α-kesim kümelerinde sorunlu, bazılarında ise sorunsuz durumları yani yarı sorunlu yarı sorunsuz durumları geleceğe yönelik araştırma konusu yaparak çözümsüz bıraktı [174]. Fedrizzi, Kacprzyk ve Rooubens, editörlüğünü yaptıkları, İnteraktif bulanık optimizasyon adlı eserlerinde farklı yazarlarla birlikte bulanık optimizasyonun ve matematiksel programlamanın o güne kadarki bir derlemesini, bir bulanık fonksiyonun en küçüklenmesi, bulanıklaştırılmış matematiksel programlama problemlerini için en iyileme koşullarını, doğrusal programlamada bulanık tercihleri ve daha birçok konuyu işledi [175].Garcia-Aguado ve Verdagay, bulanık doğrusal programlama problemlerinde kullanılan üyelik fonksiyonlarının duyarlılığını araştırdı. Herrera, Kovacs ve Verdagay, bulanıklaştırlmış matematiksel programlama problemlerinin en iyilenmesi için parameterik bir yaklşaım ortaya koydu [176]. Herrera ve Verdagay bulanık matematiksel programlama alanındaki gelişmelere dair görüşlerini ilk defa olarak yayınladı, Verdegay, sonra Verdegay bu çalışmayı şahsi olarak güncelledi [40, 177], optimizasyon için bulanık küme tabanlı sezgisel yöntemler önerdi. Lodwick ve Kacpryzk bulanık optimizasyon konusundaki gelişmeleri, editörlüğünü yaptıkları bir kitapta topladılar [178]. Yine Lodwick ve Dubois bulanık doğrusal sistemlere geçişte gerekli bir adım olan aralıklı doğrusal sistemleri çalıştı [179]. Bu sayılanlar ilk anda göze çarpanlar olup, daha birçok çalışma farklı alan ve uygulamalarda yapıldı. Çalışma sayısı oldukça fazla olduğundan ve tezin kapsamı dışında kalan ya da gözden kaçan çalışmalar dahil edilmedi. Bir sonraki bölümde veri zarflama analizi ile olan bağlantısı dolayısıyla bulanık doğrusal programlama modeli verildi.

Genel bir doğrusal programlama modelini matris gösterimi ile eşitlik 4.1'deki gibi [180, 181] ve cebirsel biçimde eşitlik 4.2'deki gibi gösterilir [182, 183].

$$\begin{aligned} &enb\, Z = \mathrm{cx} \\ &A\mathrm{x} \leq \mathrm{b} \\ &\mathrm{x} \geq 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$enk\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$
$$x_j \geq 0 \qquad (4.2)$$
$$j = 1, ..., n$$
$$i = 1, ..., m$$

Modellerde Z amaç fonksiyonumuzu gösterirken, matris modelinde c vektörü, cebirsel modelde c_j katsayıları amaç fonksiyonu katsayılarını, x vektörü yada x_j ler karar değişkenlerini, A matrisi yada a_{ij} ler teknoloji katsayılarını gösterir. Bulanık kümlerde Zadeh'in özellikle üzerinde durduğu nokta yöntemin kendisinin bulanık olmadığıdır [125]. Ancak modeldeki diğer katsayılar ile eşitsizlik ifadelerinin her biri ya da hepsi kısmi ya da tamamen bulanık olabilir. Bu açıklama doğrultusunda tam bulanık doğrusal programlama modelini eşitlik 4.4 ve 4.5 deki gibi verilebilir.

$$enb\ Z = \tilde{c}x$$
$$\tilde{A}x\tilde{R}\tilde{b} \qquad (4.4)$$
$$x \geq 0$$

Burada x karar değişkeni vektörünü, $\tilde{c}$, bulanık amaç fonksiyonu katsayılarını, $\tilde{A}$ bulanık teknoloji katsayılarını, $\tilde{b}$ bulanık sağ taraf sabitlerini ve $\tilde{R}$ ise sağ taraf sabitleri ile teknoloji katsayıları arasındaki bulanık ilişkiyi ifade eder. Bu modelin cebirsel biçimi ise;

$$enb\ Z = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j\ \tilde{R}_i\ \tilde{b}_i$$
$$x \geq 0 \qquad (4.5)$$
$$j = 1, \ldots, n$$
$$i = 1, \ldots, m$$

şeklindedir. Eşitlik 4.5 benzeri bir bulanık matematisel /doğrusal programlama problemlerinin çözümü için Tanaka, Okuda ve Asai altı adımlı bir yöntem önerirken [41], Zimmermann çok amaçlı programlama bakış açısıyla konuya değindi [80]. Bunların dışında Bulanık kısıtlamaları eşitlik 4.5'teki modelde birleştirmek için öğelerin her bir grubuna belirli bir gerçek sayı atamak gibi bazı özelliklere sahip bazı operatörler, mesela, t-normları veya t-conormları kullanılabilir. Bunu yanında, normal t-normlarını veya t-conormlarını genelleştiren bazı yararlı operatörler de mevcuttur. Esasen, R'deki rasgele aralık [a, b] ile birim aralığı [0, 1] arasında bire-bir bir ilişki vardır. Bu nedenle, [a, b] aralığındaki operatörler için her sonuç, [0, 1] üzerindeki operatörler için bir sonuca dönüştürülebilir ve tersi de olabilir [135]. Ancak bir noktayı daha vurgulamakta fayda vardır ki, bulanıklığın ölçülmesi ve sonuçta ortaya çıkan üyelik fonksiyonunun özellikleri konusunda otoriteler arasında tam bir fikir birliği mevcut değildir [184].

5. VERİ ZARFALAMA ANALİZİ

5.1. Temel VZA Modelleri

5.1.1. Oran Modeli ve CCR modeli

Matematiksel formülleri eşitlik 5.1-5.3'te verilen modeller VZA'nın ortaya çıkış modelleridir. Oran modelinden (eşitlik 5.1) doğrudan elde edilmesi sebebi ile ilk anda primal olarak adlandırılan ve geometrik olarak hiperdüzlemlerin kesişimi üzerine kurulu olan çarpan form (eşitlik 5.2) daha sonra dual kabul edilerek, bunun duali olan eşitlik 5.3 zarflamayı yani VZA ile elde edilmek istene sonuçları daha iyi açıklayabildiği için primal VZA modeli olarak kabul edildi. Model, genel etkinliğin objektif bir değerlendirmesini yapar ve etkinsizliklerin kaynaklarını tanımlayarak, belirlenenemeyen miktarlarını tahmin edilmesinde kullanılır. [185].

Etkinliği hesap edilecek yani amaç fonksiyonunda yer alan KVB, O ile ve kısıtlarda yer alan KVB j (j=1, … , n) ile gösterilmek gösterilmek üzere VZA'nın oran modeli eşitlik 5.1'deki gibi tanımlanır.

$$
\begin{aligned}
& enb\ z_O = \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rO} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{iO} \\
& kısıtlar \\
& \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 1 \\
& j = 1, \dots, n,\ \mu_r, v_i \ge 0
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Modelde y_r ve x_i sırasıyla ilgili KVB'nin r. (r=1, …, s) çıktısını ve i. (i=1, …, m) girdisini göstermekte olup bu değerler veridir yani kullanıcı taradından sağlanır. μ_r ve v_i ise sırasıyla ilgili KVB'nin karşılık gelen çıktı ve girdi ağırlıkları olup, modelden hesap edilir. Model her bir KVB için ayrı ayrı çözülerek sonuç elde edilir. Bu model, oranı sağlayan tüm x ve y değerleri için çözüm olduğundan yani sonsuz çözüm ürettiğinden Charnes'ın kesirli programlama yaklaşımı [186] kullanılarak eşitlik 5.2'de verilen CCR çarpan formuna çevrildi [56, 70, 185, 187-189].

$$
\begin{aligned}
& enb\ z_O = \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rO} \\
& kısıtlar \\
& \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \le 0 \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{iO} = 1 \\
& j = 1,...,n,\ \mu_r, v_i \ge 0
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Bu modelin duali VZA zarfalama formu olup, θ etkinlik skorunu, O etkinliği hesap edilecek KVB'yi, λ modelden elde edilecek ağırlığı, y_r ve x_i sırasıyla ilgili KVB'nin r. (r=1, …, s) çıktısını ve i. (i=1, …, m) girdisini göstemek üzere model eşitlik 5.3'deki gibidir.

$$
\begin{aligned}
& enk\ z_O = \theta \\
& kısıtlar \\
& \sum_{j=1}^{n} y_{rj} \lambda_j \ge y_{rO} \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \lambda_j \le \theta x_{iO} \\
& \lambda_j \ge 0; \\
& i = 1, 2, ..., m; \\
& r = 1, 2, ..., s; \\
& j = 1, 2, ..., n.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Eşitlik 5.1-5.3'te verilen modeller girdi yönlü olup, çıktılar sabitken girdilerde azaltma yolu ile etkinlik artışını esas alırlar. Çıktı yönlü modeller ise aksine girdiler sabitken çıktı artışına dönük modellerdir. Bu modellerin matris formu[1] Eşitlik 5.4-5.6'daki gibidir [70, 185].

$$
\begin{aligned}
& enk\ z_O = X'_O v / \mu' Y_O \\
& kısıtlar \\
& X'v / Y'\mu \ge 1; \\
& X, Y, \mu, v \ge 0
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

[1] Oran modeli için verilen matris formu sadece gösterim amaçlıdır. Cebirsel işlem oran modeli matris formunda yapılamaz.

Çıktı yönlü primal (zarflama formu) CCR modeli

$$\begin{aligned}
&enb\ z_O = \phi \\
&kısıtlar \\
&Y'_{s\times n}\lambda_{n\times 1} \geq \phi Y'_O \\
&X'_{m\times n}\lambda_{n\times 1} \leq X'_O \\
&x_{ij}, y_{ij}, \lambda_i \geq 0;
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Çıktı yönlü dual (çarpan formu) CCR modeli

$$\begin{aligned}
&enk\ z_O = X_O v \\
&kısıtlar \\
&Y_O \mu = 1 \\
&X_{n\times m} v_{m\times 1} - Y_{n\times s}\mu_{s\times 1} \geq 0 \\
&x_{ij}, y_{ij}, \mu_i, v_i \geq 0
\end{aligned} \tag{5.6}$$

5.1.2. BCC modeli

Adını 1984 tarihli "Veri zarflama analizinde teknik ve ölçek etkinsizliklerini tahmin etmek için bazı modeller" adlı makalenin yazarları olan Banker, Charnes ve Cooper'ın isimlerinin baş harflerinden alır [57]. Verilen çalışma ölçeğinde saf teknik verimliliği tahmin ederek ve daha fazla getiri için ölçeğe göre artan, azalan ya da sabit getiri imkânlarının mevcut olup olmadığının belirleyerek teknik ve ölçek etkinliğini ayırır [185]. BCC modelinin çıktı ve girdi yönlü primal ve dual matematiksel formülleri eşitlik 5.7-5.10'daki gibidir [70, 185].

Çıktı yönlü primal (zarfalma formu) BCC modeli

$$\begin{aligned}
&enb\ z_O = \phi \\
&kısıtlar \\
&Y'_{s\times n}\lambda_{n\times 1} \geq \phi Y'_O \\
&X'_{m\times n}\lambda_{n\times 1} \leq X'_O \\
&\lambda_{1\times n} 1_{n\times 1} = 1 \\
&x_{ij}, y_{ij}, \lambda_i \geq 0;
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Çıktı yönlü dual (çarpan formu) BCC modeli

$$
\begin{aligned}
& enk\ z_O = X_O v - u_O \\
& kısıtlar \\
& Y_O \mu = 1 \\
& X_{n\times m} v_{m\times 1} - Y_{n\times s} \mu_{s\times 1} - u_O \geq 0 \\
& x_{ij}, y_{ij}, \mu_i, v_i \geq 0 \\
& u_O \text{ serbest}
\end{aligned}
\qquad (5.8)
$$

Girdi yönlü primal (zarfalma formu) BCC modeli

$$
\begin{aligned}
& enk\ z_O = \theta \\
& kısıtlar \\
& Y'_{s\times n} \lambda_{n\times 1} \leq Y'_O \\
& X'_{m\times n} \lambda_{n\times 1} \geq \theta X'_O \\
& \lambda_{1\times n} 1_{n\times 1} = 1 \\
& x_{ij}, y_{ij}, \lambda_i \geq 0;
\end{aligned}
\qquad (5.9)
$$

Girdi yönlü dual (çarpan formu) BCC modeli

$$
\begin{aligned}
& enb\ z_O = Y_O \mu - u_O \\
& kısıtlar \\
& X_O v = 1 \\
& Y_{n\times s} \mu_{s\times 1} - X_{n\times m} v_{m\times 1} - u_O \geq 0 \\
& x_{ij}, y_{ij}, \mu_i, v_i \geq 0 \\
& u_O \text{ serbest}
\end{aligned}
\qquad (5.10)
$$

5.1.3. Çarpımsal model

Charnes ve Cooper'ın içinde bulunduğu bir ekip tarafından, ekibe Seiford ve Stutz'un katılımları ile iki farklı çalışma ile olgunlaştırılmış bir modeldir [56, 55]. Logaritmik doğrusal zarflama ya da toplamsal modele indirgeme yoluyla üretim sürecinin parçalı doğrusal gösterimini sağlar [185]. Çarpımsal modelde veri üstel yapıdadır. Logaritması alınarak doğrusallaştırılır. Sabit ölçeğe göre getiri öngören varyant ve değişken ölçeğe göre getiri öngören invaryant formu vardır. Bu modellerin matematiksel formülleri Eşitlik 5.11-5.14'deki gibidir [56, 58].

Primal (zarflama formu) varyant çarpımsal modeli [56]

$$
\begin{aligned}
& enk\ Z_O = -1_{1\times s}\, s^{+}_{s\times 1} - 1_{1\times m}\, s^{-}_{m\times 1} \\
& kısıtlar \\
& \left[\log y_{jr}\right]'_{s\times n} \lambda_{n\times 1} - s^{+}_{s\times 1} = \left[\log y_O\right]_{s\times 1} \\
& \left[-\log x_{ji}\right]_{m\times n} \lambda_{n\times 1} - s^{-}_{m\times 1} = \left[\log x_O\right]_{m\times 1} \\
& \forall \lambda, s^{+}, s^{-} \geq 0
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

Dual (çarpan formu) varyant çarpımsal modeli [58]

$$
\begin{aligned}
& enb\ Z_O = \left[\log y_O\right]_{1\times s} \mu_{s\times 1} - \left[\log x_O\right]_{1\times m} v_{m\times 1} \\
& kısıtlar \\
& \left[\log y_{jr}\right]_{n\times s} \mu_{s\times 1} - \left[\log x_{ji}\right]_{n\times m} v_{m\times 1} \leq 0 \\
& -\mu_{s\times 1} \leq -1_{s\times 1} \\
& -v_{s\times 1} \leq -1_{m\times 1}
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Primal (zarflama formu) invaryant çarpımsal modeli [58]

$$
\begin{aligned}
& enk\ Z_O = -\delta 1_{1\times s}\, s^{+}_{s\times 1} - \delta 1_{1\times m}\, s^{-}_{m\times 1} \\
& kısıtlar \\
& \left[\log y_{jr}\right]'_{s\times n} \lambda_{n\times 1} - s^{+}_{s\times 1} = \left[\log y_O\right]_{s\times 1} \\
& \left[-\log x_{ji}\right]'_{m\times n} \lambda_{n\times 1} - s^{-}_{m\times 1} = \left[\log x_O\right]_{m\times 1} \\
& \lambda_{1\times n} 1_{1\times n} = 1 \\
& \forall \lambda, s^{+}, s^{-} \geq 0
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

Dual (çarpan formu) invaryant çarpımsal modeli [58]

$$
\begin{aligned}
& enb\ Z_O = \left[\log y_O\right]_{1\times s} \mu_{s\times 1} - \left[\log x_O\right]_{1\times m} v_{m\times 1} + \omega \\
& kısıtlar \\
& \left[\log y_{jr}\right]_{n\times s} \mu_{s\times 1} - \left[\log x_{ji}\right]_{n\times m} v_{m\times 1} + \omega 1_{n\times 1} \leq 0 \\
& -\mu_{s\times 1} \leq -\delta 1_{s\times 1} \\
& -v_{m\times 1} \leq -\delta 1_{m\times 1}
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

5.1.4. Toplamsal model

Ekibe Boaz Golany'nin eklenmesi ile Charnes, Cooper, Golany, Seiford ve Stutz tarafından çarpımsal modelden sonra önerildi [59]. Toplamsal model, DEA'yı Charnes ve Cooper'ın erken dönem verimsizlik analiziyle ilişkilendirirken, verimlilik sonuçlarınıda Koopmans'ın 1949'da yapılan doğrusal programlama konusundaki ilk konferansta sunduğu ve konferansın bildiriler kitabında yayımladığı çalışmasında [52-54, 50] yorumlandığı Pareto-optimallik kavramıyla ilişkilendirir [185].

Primal (zarflama formu) toplamsal modeli [185]

$$\begin{aligned}
&enk\ Z_O = -1_{1\times s} s^+_{s\times 1} - 1_{1\times m} s^-_{m\times 1} \\
&kısıtlar \\
&\lambda_{1\times n} Y_{n\times s} - s^+_{s\times 1} = Y_{O,\, s\times 1} \\
&\lambda_{1\times n} X_{n\times m} - s^-_{m\times 1} = X_{O,\, m\times 1} \\
&\lambda_{1\times n} 1_{n\times 1} \\
&\forall \lambda, s^+, s^- \geq 0
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Dual (çarpan formu) toplamsal modeli [185]

$$\begin{aligned}
&enb\ Z_O = X_{1\times s} \mu_{s\times 1} - X_{1\times m} v_{m\times 1} \\
&kısıtlar \\
&Y_{n\times s} \mu_{s\times 1} - X_{n\times m} v_{m\times 1} \leq 0 \\
&-\mu_{s\times 1} \leq -1_{s\times 1} \\
&-v_{s\times 1} \leq -1_{m\times 1}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

5.2. Farell'in Etkinlik Ölçüsü ve VZA Üretim İlişkisi

Farell'in 1957'deki üretken verimlilik ölçümü ile ilgili çalışması [190] konu ile bir şekilde alakalı birçok alanda temel çıkış noktası oldu. Farrell, çalışmasının daha ilk paragrafında;

> Bir endüstrinin üretken verimliliğini ölçme sorunu ekonominin hem kuramcıları hem de politika yapıcıları için önemlidir. Farklı ekonomik sistemlerin göreli etkinliği ile ilgili teorik yaklaşımlar deneysel testlere tabi tutulacaksa, bunun için etkinliğin biraz olsun fiili ölçümünü yapabilmek gerekir. Aynı şekilde, eğer ekonomik planlamanın kendisi belirli endüstrilerin planlaması ile ilgiliyse, belirli bir endüstrinin, başka kaynakları daha fazla tüketmeden, çıktısını yani etkinliğimi, ne kadar artıracağı bilinmelidir. [190]

Konunun önemine değinirken bu konuyu çözmeye yönelik girişimlerin bulunduğunu ancak ölçütleri bir araya getirmede başarısız olduklarını ifade ederek kendisi de bu kapsamdaki çalışmalara dahil olup, etkinlik kavramını sınıflayarak etkinlik ölçümü gösterdi. VZA da bu kapsamdadır ve parametrik olmayan bir teknik olarak Farell'in düşüncelerini matematiksel tabana oturtan ve uygulama alanına alan bir teknik olarak ortaya çıktı.

5.2.1. Etkinlik ve Farell'in etkinlik ölçüsü

Tanım (üretim etkinliği)

Ekonomistler, üretim etkinliği kavramını bir KVB'nin kaynaklarını/girdilerini ürünlere/çıktılara ne kadar iyi dönüştürebildiğini tanımlamakta kullanırlar [191]. Kısaca girdilerini çıktılara dönüştürebilme becerisinin derecesidir. Farell tarafından *teknik etkinlik* ve *paylaşım etkinliği* olarak iki bileşen olarak ifade edildi.

Tanım (teknik etkinlik)

İsrafı önleme becerisini ifade eder. Bu iki yolla mümkündür, birincisi teknoloji elverdiği ölçüde kullanılan girdi ile olabildiğince çok çıktıyı üretmek, ikincisi teknoloji elverdiği ölçüde çıktıyı mümkün olan en az girdi ile üretmektir [192]. Bu bakımdan girdi ve çıktı yönlü olarak iki farklı ölçümü vardır ve üretim imkânlarının sınırlarında faaliyet göstermeyi ifade eder. Herhangi bir üretim birimin etkinliği de bu sınıra olan konumuna göre hesap edilir. Eğer üretim birim bu sınırında üretim yapıyorsa teknik etkindir, üretimi bu sınırın altında kalıyorsa teknik etkin değildir. Bu sınırın üstünde üretim yapması ise üretim imkanları dahilinde olmadığından mümkün değildir.

Tanım (paylaşım etkinliği)

Gerçekleşebilen en üst oranda üretim yapmayı ifade eder. Bu çıktı/girdi oranının en yüksek, girdi/çıktı oranının en düşük olmasıdır [50]. Açıkçası, bu durumda üretim imkânlarının sınırında üretim yapmak yeterli olmayıp, bu sınırın da en uç noktasında üretim yapmayı gerektirir. Eğer üretim imkânları hemen her noktada bu seviyede ise sabit ölçeğe getiriden, değil ise değişken ölçeğe getiriden bahsedilir.

Tanım (etkinliğin genişletilmiş Pareto-Koopmans tanımı)

Herhangi bir KVB'nin tam (%100) etkin olması için gerek ve yeter şart herhangi bir girdi veya çıktısını diğer başka bir girdi veya çıktısını kötüleştirmeden iyileştirilememesidir. [188]

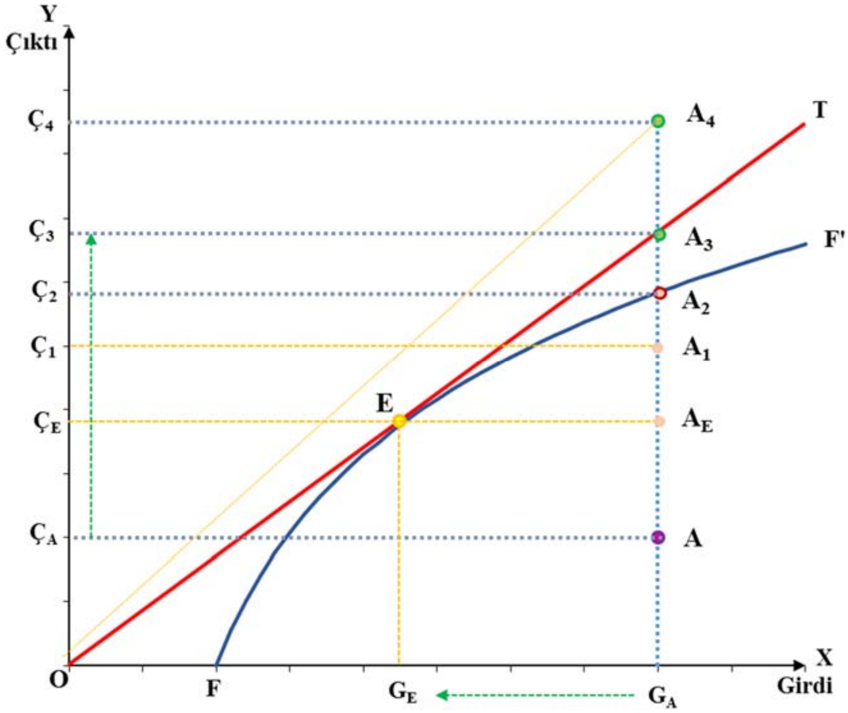
Tanım (göreli etkinlik)

Bir KVB nin mevcut gerçekleşmelere göre tem etkin (%100) olarak kabul edilebilmesi için gerek ve yeter şart diğer KVB'lerin bazı girdi ve çıktılarını kötüleştirmeden diğer bazı girdilerini iyileştirememesidir [188]. Daha açık bir ifade ile bir KVB'nin girdilerinde fazladan bir azalma ve/veya çıktılarında bir artış meydana geldiğinde diğer başka bir KVB'nin etkinlik skorunda değişim oluyorsa etkindir.

Farrell ortaya koyduğu kavramları açıklamak üzere, üretim fonksiyonunun bilindiği varsayımı altında[1] girdi en küçüklemesine dayanan iki girdi tek çıktı üreten bir sistemi grafik olarak kullandı. Bu sistem literatürdeki tek girdi tek çıktı oranlarını çoklu girdi kullanarak tek bir ölçütte göstermeyi de içermekteydi. Grafik olarak gösterdiği bu olguyu çalışmasının uygulamasında cebirsel olarak da elde etmeye çalıştı. VZA bu noktada çözüm ürettiğinden ve VZA'nın çalışma prensibini de basit olarak ortaya koymak bakımından Farrell etkinlik ölçüsü şekil 5.1'de tek girdi tek çıktı olarak betimlendi.

FF′ üretim imkânları kümesinin etkin sınırı ya da bilinen adıyla üretim fonksiyonu, A; bu üretim sisteminde üretim yapan bir KVB olsun, OT; üretim fonksiyonuna orijinden çizilen ve fonksiyonun en etkin noktası E den geçen teğeti göstersin. Buna göre, E, FF′ üretim imkânları kümesinin tam etkin olduğu noktada teğet olan ve tam etkinliği gösteren OT doğrusu üzerinde olmasından da anlaşılacağı üzere etkindir. E'nin çıktılarında bir birimlik artışa gitmek için mevcut girdi/çıktı ($G_E/Ç_E$) den oranından daha fazla girdi kullanması ya da girdilerinde bir birim azaltmaya gitmesi durumunda mevcut çıktı/girdi ($Ç_E/G_E$) oranından daha fazla çıktılarında düşüş olması FF′ üretim fonksiyonunun yapısından aşikârdır dolaysıyla E etkindir.

[1] Üretim fonksiyonu genelde bilinmez ve veriden tahmin edilir.



Şekil 5.1. Farrell etkinlik ölçüsü

A'yı E ile karşılaştırdığımızda ise A şekildeki konumu itibariyle hem E'den daha fazla girdi kullanmakta, hem de daha az çıktı üretmektedir, dolayısıyla tam etkin değildir. O zaman ne oranda etkindir? Bu sorunun cevabını bulmak için A'nın etkin sınırla olan ilişkisi incelenmelidir. Farrell tam etkinliği teknik etkinlik ve paylaşım etkinliği olarak iki parçaya ayırarak incelemektedir. Mesela A'nın çıktı/girdi oranı $Ç_A/G_A$ ifade edilsin, TE teknik etkinliği, PE paylaşım etkinliğini göstermek üzere A'nın Üretim (tam) etkinliği (ÜE);

$$\begin{gathered} \ddot{U}E = TE \times PE \\ \frac{Ç_3/G_A}{Ç_A/G_A} = \frac{Ç_2/G_A}{Ç_A/G_A} \times \frac{Ç_3/G_A}{Ç_2/G_A} \end{gathered} \tag{5.17}$$

Burada girdi (G_A) ortak olduğundan;

$$\begin{gathered} \ddot{U}E = TE \times PE \\ \frac{Ç_3}{Ç_A} = \frac{Ç_2}{Ç_A} \times \frac{Ç_3}{Ç_2} \end{gathered} \tag{5.18}$$

olarak elde edilir[193, 194]. A'nın etkin olabilmek için G_A miktar girdi kullanmaya devam ettiği takdirde çıktısını etkin olan E’nin ürettiği miktar olan A_E miktarına yükseltmesi kâfi değildir çünkü o seviyenin izin verdiğinden daha fazla girdi kullanmaktadır. A’nın çıktılarını A_1 seviyesine yükseltmesi de kâfi değildir çünkü A_1 seviyesi de üretim imkânları kümesinin etkin sınırı FF′ seviyesinin altında kalmaktadır. A’nın en azından teknik olarak etkin olabilmesi yani mevcut üretim imkânları kümesi içinde etkin olabilmesi için çıktısını A_2 seviyesine yükseltmesi gerekir. A’nın bu seviyenin üstüne çıkması mesela A_3 seviyesine ulaşması mevcut üretim imkânları ile mümkün olmayıp, üretim imkânlarının değişmesine bağlıdır. A’nın üretim imkânları değişti takdirde eğer A, G_A girdi seviyesini koruyarak A_4 seviyesinde çıktı üretmeye başlarsa bu takdirde etkin sınır da değişecek ve yeni tam etkin sınır OA_4 doğrusu olacaktır. E ise üretim süreçlerinde herhangi bir değişme olmadığı takdirde etkinliğini kaybedecektir. Bu son örnek bize göreli etkinliği açıklamaktadır.

Çıktıları koruyarak girdilerin azaltılması yolu ile etkinliğin artırılmasına dönük girişimler de mümkündür. Bu durumda yönelim yatay eksende orijine doğru olacak şekilde benzer hesaplamalar tekrar edilir [193, 194].

5.2.2. VZA ve üretim ilişkisi

Eduardo Rhodes’un doktora çalışmaları sırasında başlayan çalışmalar önce KVB’lerin etkinliğini bir takım üretim fonksiyonları ve yeni tahmin metotları konulu proje raporlarına [55] ardından, ise herkesin CCR oran modeli olarak bildiği (bknz eşitlik 5.1) DEA’nın ilk çalışması kabul edilen bir yayına dönüştü [56]. Amerikan eğitim sistemine uyum sorunu bulunan İspanyol kökenli çocukların eğitimi için yapılan bir projenin etkinliğini hesap etmek hedeflenmişti ve kar amacı güden bir faaliyet olmadığı için iktisadi analiz yapanların kolaylıkla sıyrılabilecekleri bir konu değildi ama ortaya çıkan sonuç en fazla da iktisadi analiz yapanlarca takdir edildi. Günümüzde VZA konusunda isim yapmış, Rajiv Banker, Subhash Ray, Emmanuel Thanassoulis, Rolf Färe, Shawna Grosskopf, John Ruggiero, gibi isimler hep ekonomist kökenlidir ya da Ali Emrouznejad ya da Joe Zhu gibi iktisat ile alakalı bir birimde faaliyetlerini yürütmektedirler.

Bir KVB’nin etkinliğinin ölçülmesi iki temel adımdan oluşur [194]:

- Üretim imkânları kümesinin (T) tespiti:
- Çıktılardaki mümkün en büyük artışın ya da girdilerdeki mümkün en fazla azalmanın tahmini

Üretim imkânları kümesi ve üretim varsayımları

Üretim imkânları kümesi kavram olarak, değerlendirilmekte olan DMU'lara ilişkin girdi-çıktı dönüşüm sürecinde mümkün görülen tüm girdi-çıktı etkileşiminin matematiksel ifadelerle gösterimidir [194].

T, üretim imkânları kümesini göstersin, x = $(x_1, x_2, \ldots, x_M) \in R_+^M$ üreticinin kullandığı girdileri, y = $(x_1, x_2, \ldots, x_S) \in R_+^S$ de elde ettiği çıktıları ifade etsin. Üretim teknolojisi;

Girdi yönlü bakış açısıyla üretim imkânları kümesi [195]

$$T = \{(x, y): y, x \text{ kullanılarak üretilebilir}; x \geq 0, y \geq 0\} \quad (5.19)$$

Çıktı yönlü bakış açısıyla üretim imkânları kümesi [196]

$$T = \{(x, y): x \text{ den } y \text{ üretilebilir}; x \geq 0, y \geq 0\} \quad (5.20)$$

İster çıktı yönlü isterse girdi yönlü bakış açısı ile ifade edilsin, üretim imkânları kümesi bir kısım girdilerin kullanılarak bir kısım çıktıların elde edilebileceğini ifade etmektedir. Bu noktadan hareketle girdi L(y) ve çıktı P(x) imkân kümelerini de sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$L(y) = \{x: (x,y) \in T\} = \{x: y, x \text{ kullanılarak üretilebilir}\} \quad (5.21)$$

$$P(x) = \{y: (x,y) \in T\} = \{y: x \text{ den } y \text{ üretilebilir}\} \quad (5.22)$$

Üretim imkânları kümesi, VZA da gözlemlenen girdi-çıktı etkileşimlerinden elde edilir. Bu durumda VZA için üretim imkânları kümesi [187];

$$T = \{(x, y): x \geq X\lambda, \quad y \leq Y\lambda, \quad \lambda \in R^n \geq 0\} \quad (5.23)$$

şeklinde tanımlanır ve üretim ile ilgili bazı varsayımların sağlanması gerekir [57, 187, 192, 1957, 195-199].

Girdi olmadan çıktı üretilememesi [198]

$(x, y) \in$ T olmak üzere $x = 0$ ise y = 0 dır. Bu şart Färe, Grosskopf ve Margaritis tarafından Kemeny, Morgenstein ve Thompson'a atıfla eşitlik 5.24 de verilen denklem sistemi kullanılarak esnetildi [199].

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{s} y_{rj} > 0, \quad j = 1, \dots, n \\
&\sum_{j=1}^{n} y_{rj} > 0, \quad r = 1, \dots, s \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij} > 0, \quad j = 1, \dots, n \\
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij} > 0, \quad i = 1, \dots, m
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Buna göre, çıktı üretmeyen bir birim ve en az bir birim tarafından üretilmeyen bir çıktı bulunmamaktadır. Çıktılar en az bir girdi kullanılarak üretilmektedir yani girdi kullanmadan çıktı üretilemez ve girdiler kullanılıyorsa en az bir çıktı üretilmektedir.

Serbest kullanım

$(x, y) \in$ T ise $x' \geq x$ ve $y' \geq y$ olmak üzere $(x', y') \in$ T dir. Herhangi bir miktar çıktı gözlemlenmiş olandan daha fazla girdi kullanılarak da üretilebilir ya da herhangi miktar girdi kullanılarak gözlemlenmiş olandan daha az çıktı da üretilebilir [197]. Yani etkin olmayan üretim mümkündür [194].

Konvekslik

Mümkün üretim planlarının herhangi bir ağırlıklı ortalaması da mümkündür. $(x, y) \in$ T ve $(x', y') \in$ T ise $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere $\alpha(x, y) + (1-\alpha)(x', y') \in$T dir.

İspat [199]

$(x, y) \in$ T ve $(x', y') \in$ T olduğu verildiğinden ve serbest kullanım şartından X girdi matrisi, Y çıktı matrisi olmak üzere, z ve z' vektörleri aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$zX \leq x$, $y \leq zY$

$zX \leq x$, $y \leq zY$

Buradan,

$(\alpha z+(1-\alpha)z')X \leq \alpha x+(1-\alpha)x'$

ve

$\alpha y+(1-\alpha)y' \leq (\alpha z+(1-\alpha)z')Y$

$0 \leq \alpha \leq 1$ olmasından ve $(\alpha z+(1-\alpha)z') \geq 0$ olduğundan

$(\alpha x+(1-\alpha)x', \alpha y+(1-\alpha)y') \in T$.

γ Ölçeğe göre getiri [197]

Üretim verilen herhangi bir faktöre göre ölçeklenebilir.

$(x, y) \in T,\ \kappa \in \Gamma(\gamma) \rightarrow \kappa(x,y) \in T$

Bu şart monotonluğa karşılık gelir. Sabit ölçeğe göre getiride kesin artan olmayı, ölçeğe göre değişken getiride azalmayan olmayı garanti eder. Daha açık bir ifade ile girdiler artarken çıktıların azalması beklenemez ya da böyle bir birimin etkin olması, üretim imkânları kümesinin etkin sınırında yer alması beklenemez.

Üretim imkânları kümesi kapalı bir kümedir.

$(x, y) \in T$ ve $(x', y') \in T$ ise $(x+x', y+y') \in T$. Yani mümkün iki üretim palanının toplamı da mümkündür [197]. Daha genel bir ifade ile tüm gözlenen aktiviteler ya da girdi çıktı bileşimleri üretim imkânları kümesi T nin elamanıdır ve T yukarıdaki şartları sağlayan en küçük kümedir.

$(x_i, y_i) \in T \qquad (i=1, \dots, n)$

5.2.3. VZA ve uzaklık fonksiyonu ilişkisi

Girdi uzaklık fonksiyonu

T üretim imkânları kümesi eşitlik 5.19'da tanımlandığı şekilde olsun. L(y) de T'nin eşitlik 5.21'de tanımlı çıktı imkânları kümesini olsun. L(y) ($y \in$Y) girdi kümesinin uzaklık fonksiyonu $g(y,x)$ ile gösterilsin. $\xi(y,x) = h(y,x).x$ ve

$$h(y,x) = Enk\{h : (h \cdot y) \in L(y),\, h \geq 0\} \tag{5.25}$$

olmak üzere L : Y $\rightarrow$ X üretim ilişkisi eşitlik 5.26'deki gibidir [200][1].

$$g(y,x) = \frac{\|x\|}{\|\xi(y,x)\|} = \frac{1}{h(y,x)} \tag{5.26}$$

Çıktı uzaklık fonksiyonu

T üretim imkânları kümesi eşitlik 5.20'de tanımlandığı şekilde olsun. P(x)'de T'nin eşitlik 5.22'de tanımlı çıktı imkânları kümesini olsun. P(x) ($x \in$X) çıktı kümesinin uzaklık fonksiyonu $h(x,y)$ ile gösterilsin. $\eta(x,y) = g(x,y).y$ ve

$$g(x,y) = Enb\{g : (g \cdot y) \in P(x),\, g \geq 0\} \tag{5.27}$$

olmak üzere, P : X $\rightarrow$ Y üretim ilişkisi eşitlik 5.28'deki gibidir [200][2].

$$h(x,y) = \frac{\|y\|}{\|\eta(x,y)\|} = \frac{1}{g(x,y)} \tag{5.28}$$

[1] Notasyon 57 nolu kaynaktan adapte edilmiştir.
[2] Notasyon 57 nolu kaynaktan adapte edilmiştir.

Shephard uzaklık fonksiyonunun VZA ile ifadesi

VZA modelini oluşturmak üzere, j=1, … , n tane gözlemimiz (KVB) olsun. Her KVB nin girdileri $x_j=(x_{j1}, \dots, x_{jm}) \in \Re_+^m$ ve çıktıları $y_r=(y_{r1}, \dots, y_{rs}) \in \Re_+^s$ ile gösterilsin. Veriden elde edilen teknoloji kümesi T eşitlik 5.29'daki gibi tanımlanır ve veri eşitlik 5.24'deki şartları taşır.

$$
\begin{aligned}
T = \{(x, y) : & \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_j \geq y_{rO}, \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \leq x_{iO}, \\
& \lambda_j \geq 0, \\
& i = 1, 2, ..., m, \\
& r = 1, 2, ..., s, \\
& j = 1, 2, ..., n\}.
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

Bu teknoloji serbest kullanım ve konvekslik özelliklerine sahiptir. Farklı ölçeğe göre getiri ise isteğe bağlıdır [201]. Belirtilen şartlar altında $(x, y) \in$ T olmak üzere, eşitlik 5.26 ile tanımlanan girdi uzaklık fonksiyonu $g(x$,y) eşitlik 5.30'deki şekilde gösterilir [57];

$$
\begin{aligned}
& h(x, y) = enk\ h \\
& kısıtlar \\
& kY'_{s\times n}u_{n\times 1} \leq Y'_{s\times 1} \\
& kX'_{m\times n}u_{n\times 1} \geq hX'_{m\times 1} \\
& \lambda_i \geq 0; k > 0.
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

$\lambda =$ ku , $h(x,y)$ de yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
& h(x, y) = enk\ h \\
& kısıtlar \\
& Y'_{s\times n}\lambda_{n\times 1} \geq Y'_{s\times 1} \\
& hX'_{m\times 1} - X'_{m\times n}\lambda_{n\times 1} \geq 0 \\
& u_i \geq 0.
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

bir doğrusal programlama modeli elde edilir ve bu modelin duali de eşitlik 5.32'daki gibidir [57].

$$
\begin{aligned}
&enb\ z_O = Y_O \mu \\
&kısıtlar \\
&X_O v = 1 \\
&Y_{n\times s}\mu_{s\times 1} - X_{n\times m} v_{m\times 1} \geq 0 \\
&x_{ij}, y_{ij}, \mu_i, v_i \geq 0
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

Bu modelin eşdeğeri ağırlıklı girdi -ağırlıklı çıktı oranını gösteren model ise [57];

$$
\begin{aligned}
&enk\ z_O = Y'\mu / X'v \\
&kısıtlar \\
&Y'\mu / X'v \geq 1; \\
&\forall x_{ij} \in, y_{ij} \in Y, \mu_i \in \mu, v_i \in v \geq 0
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

Benzer işlemler eşitlik 6.28 ile tanımlanan çıktı uzaklık fonksiyonu $h(x$,y) eşitlik 6.33 deki şekilde gösterilir [57];

$$
\begin{aligned}
&g(x, y) = enb\ g \\
&kısıtlar \\
&kw_{1\times n} Y_{n\times s} \geq g Y'_{1\times s} \\
&kw_{1\times n} X_{n\times m} \leq X'_{1\times m} \\
&\lambda_i \geq 0; k > 0.
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

λ = kw, $g(x,y)$ de yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&g(x, y) = enb\ h \\
&kısıtlar \\
&hY'_{s\times 1} - Y'_{s\times n}\lambda_{n\times 1} \geq 0 \\
&X'_{m\times n}\lambda_{n\times 1} \leq X'_{m\times 1} \\
&\lambda_i \geq 0; k > 0.
\end{aligned}
\tag{5.35}
$$

yine bir doğrusal programlama modeli elde edilir ve bu modelin duali de eşitlik 5.36'daki gibidir [57].

$$
\begin{aligned}
&enk\ z_O = X_O v \\
&kısıtlar \\
&Y_O \mu = 1 \\
&X_{n\times m} v_{m\times 1} - Y_{n\times s}\mu_{s\times 1} \geq 0 \\
&x_{ij}, y_{ij}, \mu_i, v_i \geq 0
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

Bu modelin eşdeğeri ağırlıklı girdi-ağırlıklı çıktı oranını gösteren model ise [57];

$$
\begin{aligned}
& enk\ z_O = -X'v/Y'\mu \\
& kısıtlar \\
& X'v/Y'\mu \geq 1; \\
& \forall x_{ij} \in, y_{ij} \in Y, \mu_i \in \mu, v_i \in v \geq 0
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

Ekonomistler, etkinlik ölçümü üzerinde etkisi olan eş ürün eğrileri ile etkin (alt) kümler arasında ikiye bölünmüştür. Farklı etkinlik ölçümlerinin farklı gösterim özellikleri vardır. Bunlardan, Farrell'in girdi yönlü teknik ölçümü eş ürün eğrilerine (etkin sınıra) üyeliği gösterir. Bu arada Farrell'in girdi yönlü teknik etkinlik ölçümümün uzaklık fonksiyonunun tersi olduğunu da bilmekte fayda vardır [202]. Çıktı uzaklık fonksiyonunun önemli bir özelliği, uzaklık fonksiyonunun teknoloji kümesinin elemanı olabilmesinin gerek ve yeter şartının elde edilen uzaklık değerinin 1'den küçük olmasına bağlı olmasıdır. Yani Shephard çıktı uzaklık fonksiyonu bir girdi-çıktı vektörünün teknoloji kümesine ait olup olmadığını ortaya çıkarır. Dolayısıyla farklı zaman dilimlerinde ölçülen vektörleri karşılaştırmak için birebirdir. Kısaca uzaklık fonksiyonlarının oranlanması yoluyla üretkenlikteki değişim incelenebilir Malmquist endeksi buna örnektir [203].

5.3. Bulanık VZA ve Modelleri

VZA'nın gelişmesine paralel olarak BVZA da paralelinde gelişme gösterdi. Karsak'ın üç grupta incelediği BVZA çalışmaları [204], önce dört gruba [69] sonra da altı gruba çıkarken, henüz gruplaması yapılmamış münferit çalışmalar da başlı başına yedinci bir grup olarak karşımıza çıkmaktadır [65]. Daha kapsamlı bir inceleme Emrouznejad ve Tavanna'da mevuttur [205]. Kısa bir özet olarak aşağıdaki gibi verilebilir.

5.3.1. Tolerans yaklaşımı

Bu yaklaşımı Sengupta aynı yıl içinde yaptığı iki makalesi ile önerdi [206, 207]. Sonrasında, Sengupta VZA ile ilgili çalışmalarını iki ayrı kitapta daha toplayarak bulanık VZA'yı bu eserlerinde de işledi [208, 209]. Bu konudaki diğer bir önemli çalışma ise Kahraman ve Tolga' ya aittir [210]. Bu yöntemde kısıtlardaki eşitlik/eşitsizlik ifadelerinin ihlali durumları için bir tolerans düzeyleri belirlenmesi esasına dayanmaktadır. Ancak bulanık girdi ve çıktılar noktasında herhangi bir öneri içermediğinden bulanık üretim sistemleri için faydalı bulunmadı [204].

5.3.2. α-Kesim kümesi yaklaşımı

Öncü olarak yapılan birkaç çalışmayı [211-213] bir kenara bırakırsak bulanık bir VZA modelini α-kesim kümesi yaklaşımı ile bulanık olmayan modellere ayrıştırıp bu modellerden elde edilen sonuçlara göre karar almayı Kao ve Liu önerdi [214] ve hatta Tayvan üniversite kütüphanelerinden elde edilen kayıp veriler için uyguladı [215]. Önerilen model özet olarak eşitlik 6.38 ve 6.39 modellerinin ardışık olarak farklı α-seviyeleri için çözülmesini öngörmekteydi.

$$\begin{aligned}
&enb \quad w_0 = \sum\nolimits_r \mu_r \left(Y_{r0}\right)_\alpha^L \\
&\text{kısıtlar;} \\
&\sum\nolimits_i v_i \left(X_{i0}\right)_\alpha^U = 1 \\
&\sum\nolimits_r \mu_r \left(Y_{rj}\right)_\alpha^U - \sum\nolimits_i v_i \left(X_{ij}\right)_\alpha^L \le 0, \quad \text{KVB 0. için} \\
&\sum\nolimits_r \mu_r \left(Y_{rj}\right)_\alpha^L - \sum\nolimits_i v_i \left(X_{ij}\right)_\alpha^U \le 0, \quad j = 1,...,n; j \ne 0 \\
&\mu_r; v_i \ge \varepsilon; \quad \varepsilon: \text{ arşimedyan olmayan pozitif bir sabit} \\
&r = 1,...,s; i = 1,...,t
\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\begin{aligned}
&enb \quad w_0 = \sum\nolimits_r \mu_r \left(Y_{r0}\right)_\alpha^U \\
&\text{kısıtlar;} \\
&\sum\nolimits_i v_i \left(X_{i0}\right)_\alpha^L = 1 \\
&\sum\nolimits_r \mu_r \left(Y_{rj}\right)_\alpha^L - \sum\nolimits_i v_i \left(X_{ij}\right)_\alpha^U \le 0, \quad \text{KVB 0. için} \\
&\sum\nolimits_r \mu_r \left(Y_{rj}\right)_\alpha^U - \sum\nolimits_i v_i \left(X_{ij}\right)_\alpha^L \le 0, \quad j = 1,...,n; j \ne 0 \\
&\mu_r; v_i \ge \varepsilon \\
&r = 1,...,s; i = 1,...,t
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Bu yönteme karşı KVB'lerin etkinlik değerleri üyelik fonksiyonuna bağlı olarak hesap edildiğinden, kararlı olmayan çözümler verebileceği eleştirisi mevcuttur [204].

5.3.3. Bulanık sıralama yaklaşımı

Guo ve Tanaka [216] tarafından geliştirilen bu yaklaşım, KVB'lerin etkinliklerini bulanık kümenin sıralamasını gerektiren bulanık doğrusal programlar kullanarak bulma esasına dayanır. Bu önceden tanımlı olabilirlik dağılımlarına bağlı olarak bulanık kısıtları bulanık olmayan kısıtlar haline getirerek ve bulanık sayılar için kullanılan bir karşılaştırma kuralı ile yapılır [65].

Esası sıralamaya dayanan bulanıksızlaştırma yaklaşım da yine bu başlık altında incelenebilir. Lertworasirikul tarafından doktora tezinde önerilmiş olup [217], bulanık girdi ve çıktıların bulanık olmayan değerlere dönüştürüldükten sonra bilinen DEA metotları ile çözme tekniği üzerine kuruludur [65].

5.3.4. Olabilirlik yaklaşımı

Bulanık kümeler kavramını ortaya koyan Zadeh tarafından bulanık kümelerde kullanılan olabilirlik kavramı [218], Dubois ve Prade tarafından geliştirilirken [219, 220], VZA kapsamında olabilirlikten ilk bahsedenler Guo, Tanaka ve Inuiguchi [221] ile Alp [222] olmakla birlikte, literatürde olabilirlik yaklaşımını ortaya koyan kişiler olarak Lertworasirikul vd. [223-225] bilinir [65, 69, 205]. Alp, α-kesim kümeleri üzerinden bir olabilirlik dağılımı oluşturmaya çalışırken [222], Guo vd. [221] olabilirlik seviyeleri belirlemekle yetindi. Lertworasirikul vd. önceden tanımlı olabilirlik seviyeleri için etkin olabilecek KVBleri belirlemeye çalıştılar [204] ve bu kapsamda olabilirlik ve kredibilite yaklaşımı olarak bilinen BVZA yorumlarını önerdiler [65, 69, 205, 226]. Önerdikleri bulanık BCC modeli primal ve dual olarak sırasıyla eşitlik 5.40 ve 5.41 deki gibidir.

$$
\begin{aligned}
&enb\ \theta_p = \left(\sum_{r=1}^{s}\mu_r \tilde{y}_{rp}\right)_{\beta}^{U} - u_O \\
&kısıtlar \\
&\left(\sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{x}_{ip}\right)_{\alpha_O}^{U} \geq 1, \\
&\left(\sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{x}_{ip}\right)_{\alpha_O}^{L} \leq 1, \\
&\left(\sum_{r=1}^{s}\mu_r \tilde{y}_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{x}_{ij}\right)_{\alpha}^{L} - u_O \leq 0, \\
&u_O : serbest \\
&\mu_r, v_i \geq 0, \quad \forall r, i.
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

$$
\begin{aligned}
& Enk\ \theta_B \\
& kısıtlar \\
& \left(\theta_B \tilde{x}_{ip} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{x}_{ij}\right)_{\bar{\alpha}_1}^{U} \geq 0, \quad \forall i, \\
& \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{y}_{rj} - \tilde{y}_{rp}\right)_{\bar{\alpha}_2}^{U} \geq 0, \quad \forall r, \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \quad \forall j.
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

$\beta \in [0,1]$, $\alpha_O \in [0,1]$, $\alpha \in [0,1]$ kabul edilebilir primal olabilirlik seviyeleri iken $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 \in [0,1]$ dual olabilirlik seviyeleridir.

5.3.5. Bulanık aritmetik

Yeni önerilen bir gruptur, BVZA çalışmalarının ilk derlemesinde gruplanmayan [69] diğer çalışmalar içerisinde yer alan 11 benzer çalışmanın gruplanmasına dayanır [65]. Temeli Wang, Greatbanks ve Yang'ın veri zarflama analizi ile aralık etkinlik tahmini çalışması [227] ile Wang vd. nin [228] imalat işletmelerinin performans değerlendirmesinde bulanık aritmetiğe dayalı bulanık veri zarflama analizi çalışmasına dayanır. Bu grupta yayınlanan makaleler, karar vericilerin bulanık bir kesirli programlamayı geleneksel yöntemleri kullanarak bir DP modeline dönüştüremeyeceği fikrine dayanır ve ağırlıklı olarak DEA modellerinde girdi ve çıktı verisinin bulanıklığı durumu için bulanık aritmetiğe odaklanır. Önerilen modeller, KVB'lerin etkinliklerini bulanık sayı olarak hesaplamaya ek olarak, KVB'lerin bulanık etkinliklerini sıralamak için bulanık sıralama yaklaşımı içerir [65]. Modeller karmaşık olup, iç içe ardışık işlemler içermektedir.

5.3.6. Bulanık rasgele/tip-2 bulanık kümeler

Bu grup, ortak özellikler gösterdiği düşüncesi ile Emrouznejad vd. [65] tarafından 7 BVZA çalışmasının diğer BVZA çalışmaları arasından seçilerek oluşturuldu. Başını Qin in çektiği bir grup araştırmacı tarafından yayınlanan makalelerden oluşmaktadır [229-232]. Üyelik fonksiyonlarından kaynaklanan dilsel ya da sayısal belirsizliklerin çözümüne yönelik olarak, bulanık değişkenin beklenen değerine bağlı, tip-2 bulanık değişkenleri için genellenmiş kredibilite ölçüsünü kullanan bir indirgeme metodudur [65].

5.3.7. Herhangi bir gruba girmeyen diğer BVZA çalışmaları

Yaklaşık yarısı Zerafat Angiz'in başını çektiği yazarlarca yazılmış [233-237] diğer grupların kapsamına girmeyen 12 çalışmadan oluşan bir gruptur [65]. Bunlara ek olarak, Shen vd. BVZA ile bileşik gösterge üretimini gösterdi [238], Kao [239] ile Lozano ve Moreno [240] şebeke yapılı BVZA üzerine çalıştı. Buraya kadar sayılanlar özellikle dikkat çeken çalışmalar olup, literatürde 600'ün üzerinde BVZA çalışmasına ulaşılabilmektedir.

5.4. t-Norm VZA İlişkisi

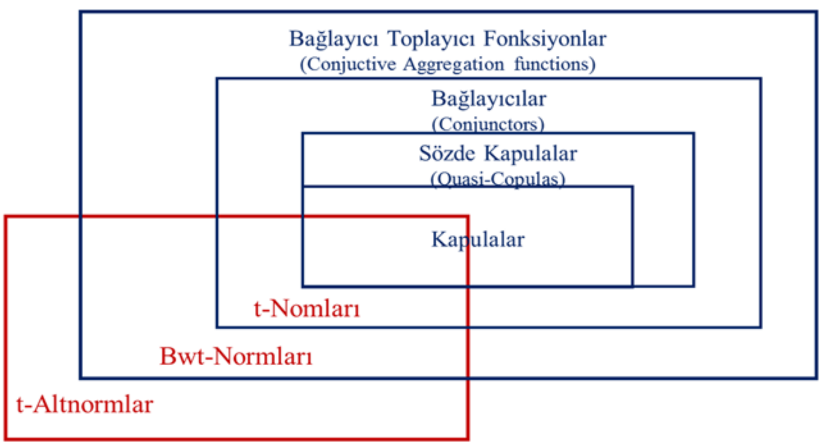
Üçgensel norm VZA ilişkisini irdelemeden önce şimdiye kadar anlatılanlar toparlanırsa; A ve B iki küme olsun ve bu iki küme hakkında karar vericinin bazı düşünceleri olsun. Eğer bu düşünceler ve bu iki kümenin yapısı klasik, var-yok, evet-hayır, doğru-yanlış vb. gibi kesin sınırlar ile birbirinden ayrılmamış ise bilinen mantık ilkeleri ile bu kümeler tanımlanamaz ve bu kümler üzerindeki düşünceler uygulamaya konulamaz. Çünkü muhtemelen hem kümelerin yapısı hem de düşüncelerin ifade ediliş biçimi bulanıktır. Zadeh'in önerdiği ve önderliğini yaptığı Bulanık kümler bu noktada kullanılmaktadır. Zadeh, önerdiği matematiksel ilkeler ve bu ilkelerin bir yöntem olarak kendisinin bulanık değil, bilakis kendi içinde tutarlı ve oldukça net olduğunu ifade etmektedir. Bulanık olan bu geliştirilen yöntemlerin uygulandığı durumlar ve olgulardır. İşte Zadeh ile başlayıp sonrasında gelişen bu matematiksel/mantıksal ilkelere *bulanık mantık* ve bunların uygulandığı alana *bulanık kümeler* denir. Şimdi adım adım konu açılırsa;

1) Ele aldığımız A ve B kümesi bulanık olsun.
2) Her bir kümenin elemanları (A ve B kümeleri birbirinden ayrı olarak) ilgili kümeye belirli bir üyelik derecesi ile bağlıdır. Bu dereceleri bir araya getirip ortaya koyan matematiksel ifadeye *üyelik fonksiyonu* denir.
3) Esasen bulanık kümeler ve elemanları üyelik dereceleri ile tanımlanır.
4) A veya B kümesinin (A ve B de olabilir) üzerindeki düşünceleri uygulamaya geçirecek faaliyette bulunulmak istensin. Bu amaçla yapılan faaliyetlere işlem (implication), kullanılan araçlara da işlemci (implication operatör) denir. Yapılmak istenenler bulanık mantık ilkelerine tabi bulanık kümelere uygulandığı için işleme, bulanık işlem (fuzzy implication), işlemciye bulanık işlemci/bulanık işlem fonksiyonu (fuzzy implication operator/function) denir.
5) Eğer IV. maddede yapılmak istenilenler A ve B kümelerinin ayrı ayrı değil birlikte

değerlendirilmesini gerektiriyorsa bu amaçla kullanılan işlem ve işlemcilere bulanık bağlayıcılar (fuzzy connectives) denir.

6) A ve B kümesine birtakım başka kümelerin de eklenmesi ile (buna gerek de yoktur) daha karmaşık düşüncelerimizi gerçekleştirmemizi sağlayacak fonksiyonel işlemlere birleştirme (aggragation) ve bu amaçla kullanılan araçlara birleştirici operatörleri/fonksiyonları (aggregation operators/functions) denir. Bir nevi IV. maddedeki tek hücreli yapıdan V. maddede tek hücreli yapıların ortak hareketine ve VI. madde ile çok hücreli yapıya geçilmiş olur.
7) Gerek IV. madde gerekse V. ve VI. maddelerde uygulamaya konan faaliyetlerimizin sonunda elde ettiğimiz sonuca doğruluk değeri ve bu değerlerin bir araya getirilmiş haline doğruluk fonksiyonu denir. (II. maddedeki bulanık elemanların kümeye üyelikleri de bu kapsama dahildir.)
8) Tüm bu yaptığımız işlemler bulanık mantık metotları (fuzzy reasoning methods) olarak adlandırılır.
9) Łukasiewicz tarafından geliştirilmiş olan üç durumlu mantık ve Menger tarafından ortaya konulan t-normlar ortak bir zeminde birleşmekte ve yoluna kümler üzerinde devam etmektedir. Bu noktadan hareketle t-normları;

(i) Bulanık kümelere üyelik fonksiyonu tanımlar,
(ii) Bulanık kümler arası işlem tanımlar,
(iii) Temel t-normları bağlayıcıdır,
(iv) Birlşetirme (aggregation) sağlar, birleştirici fonksiyondur,
(v) Yapılan üyelik, işlem, bağlama, birleştirme faaliyetleri için doğruluk fonksiyonu sağlar.



Şekil 5.2. Çeşitli bağlayıcı birleştirici fonksiyonlar arasındaki ilişkiler [158]

Grabisch, bu anlatılanları daha dar bir kapsamda Şekil 5.2 ile gösterdi [158]. Buradan hareketle bir önceki bölümde VZA ile bulanık kümler arası etkileşimi ortaya koymak üzere bulanık VZA modelleri verildi. Bu bölümde konu bir adım daha ileri götürülecek ve Girdi ve çıktılar olarak iki ayrı parçaya ayrılmış çok değişkenli bir veri kümesini modelden hesap ettiği ağırlıklar yardımı ile birleştirerek [0,1] aralığında tek bir değere dönüştüren VZA'nın bu dönüştürücü özelliğinin üzerine gidilerek VZA'nın sağladığı özellikler irdelenecektir.

Eşgüçlülük özeliği

Tüm veriler aynı olduğunda sonucun da aynı olması olarak nitelenen bu özelliği sınırlılık koşullarını ortaya koyan iki durumda incelenebilir (Bkz. Eşitlik 3.59).

$G_n(0, 0 \ldots, 0) = 0$, n=2, 3, … olması hiçbir girdi kullanılmamasını ya da çıktı üretiminin olmamasını içereceğinden üretim ile ilgili aksiyonlara bahsinde geçen eşitlik 5.24'te verilen şartlar bağlamında incelenmelidir. Şöyle ki, çıktı üretmeden girdi kullanılması mümkün olmayacağından, girdi kullanmadan çıktı üretmek ise doğaya aykırı olacağından burada irdelenecek olan tek durum üretimin ve tüketimin olmaması yani 0 girdi kullanılıp, 0 çıktı üretilmesi durumudur ki bu ispatsız olarak aşikârdır.

$G_n(1, 1 \ldots, 1) = 1$, n=2, 3, … tüm girdilerin ve çıktıların 1 olması durumunu tek girdi, tek çıktı VZA mantıksal anlatımını gösteren çizelge 5.1 den de görülebileceği gibi istenen sağlanır.

Çizelge 5.1. VZA'nin hesaplama mantığı

KVB	Y	X	Y/X	(Y/X)/ Enb (Y/X)
1	1	1	1/1=1	1/1=1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
4	1	1	1	1
5	1	1	1	1

Monotonluk özeliği

Farell'in etkinlik ölçüsünün anlatıldığı Şekil 6.1 hatırlanırsa, orijinden başlayıp FF′ ile gösterilen üretim fonksiyonun en uç noktasında teğet olan OT doğrusu CCR etkin sınırını vermekteydi. Orada da açıklandığı gibi G_E miktarından daha fazla girdi kullanan (G_A>G_E) A birimi etkim olabilmek için en az A_2 (A_2> E) miktarında çıktı üretmek zorundadır. Esasen bu şart VZA üretim ilişkisinde konu edinilen γ *Ölçeğe göre getiri* özelliğinin de bir gereğidir. Bunu basitçe cebirsel olarak da gösterilmesi istenirse;
Burada OT ile gösterilen etkin sınır esasen matematiksel olarak $y=kx$ (k>0) şeklinde bir doğru denklemidir. $y \leq z \Longrightarrow T(x,y) \leq T(x,z)$ olduğunu göstermek bu doğru denklemi üzerinden göstermek için $h>1$ olmak üzere; $x_2=hx_1$ olsun. Bu durumda $h>1$ olduğu için $x_2>x_1$ olur. Bunları T'de yerine yazılırsa; $T(x_2)=kx_2= hkx_1 = hT(x_1)=T(hx_1)$ eşitliği sağlanıyor olup, $h>1$ ve $x_2>x_1$ olduğundan, $T(x_2)> T(x_1)$ olur.

Etkisiz eleman

Monotonluk özelliğinin cebirsel sağlanmasında $h=1$ alınırsa istenen sağlanır.

Değişme özelliği

T(x,y)=T(y,x) olması doğrusal programlamanın dualite özelliğinden aşikardır.

Birleşme özelliği

$T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)$ olmasını göstermek için, $T_1(x)$ =y=kx_1 alınsın, X= (x_2+x_3) olmak üzere $T_2(X)=y=kX=k(x_2+x_3)$ doğru denkleminin tanımından sağlanır ve aynı zamanda $T_2(X)= kx_2+kx_3=T_1(x_2)+T_1(x_3)$ tür. U=x+X olarak tanımlanırsa, $T(U)=y=T(x+X)=T(X+x)$ olup X'i yerine yazdığımızda istenen sağlanır.

Bu yukarıda verdiğimiz, eşgüçlülük ve monotonluk özeliği birleştirme fonksiyonu olmanın, monotonluk, değişme, etkisiz eleman ve birleşme özelliği ise üçgensel norm olmanın şartı olup, VZA'nın bunları sağladığı tek girdi tek çıktı üzerinden gösterildi. Bir sonraki aşama VZA'nın bir model olarak da bu şartları sağladığını göstermek olacaktır.

5.4.1. Teorem (VZA'nın bir üçgensel norm özelliklerini sağlaması)

Yukarıdaki ön bilgiler ışığında VZA bir T normu olup, aşağıdaki özellikleri sağlar.

a. T(x,y)=T(y,x) (değişme/commutativity)

b. T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z) (birleşme/associativity)

c. y≤z⟹T(x,y)≤T(x,z) (monotonluk/monotonicity)

d. T(x,1)=x (1'in etkisiz eleman olması/neutral element 1)

İspat

Girdi ve çıktı yönlü oran modellerini sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlansın

$$\begin{array}{lcl} Enb \ \dfrac{\mu y_o}{v x_o} & & Enk \ \dfrac{v x_o}{\mu y_o} \\ Kısıtlar & \equiv & Kısıtlar \\ \dfrac{\mu y}{v x} \leq 1 & & \dfrac{v x}{\mu y} \geq 1 \\ \mu, v > 0 & & \mu, v > 0 \end{array}$$

Karşılık gelen CCR formu da

$$\begin{array}{lcl} enb \quad \mu y & & enk \quad v x \\ kısıtlar & & kısıtlar \\ v x = 1 & \equiv & \mu y = 1 \\ \mu y - v x \leq 1 & & v x - \mu y \geq 1 \\ \mu, v > 0 & & \mu, v > 0 \end{array}$$

olsun.

a. T(x,y)=T(y,x) (değişme/commutativity) özelliği

Girdi ve çıktı yönlü modeleler bu kapsamda isteneni sağlar. Ayrıca $\max\left\{c'x \mid Ax \leq b \wedge x \geq 0\right\}$ şeklinde ifade edilen bir Doğrusal Programlama (VZA) probleminin duali $\min\left\{b'y \mid A'y \leq c \wedge y \geq 0\right\}$ şeklinde olup isteneni sağlar. Ayrıca, Strang bunu "Primal ve dual modeller arasında tam bir simetri mevcuttur." diyerek açıkça da ortaya koymaktadır [241].

b. T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z) (birleşme/associativity)

$$\begin{aligned}&enb\quad \frac{\mu_1 y_{o1}}{v_1 x_o}+\frac{\mu_2 y_{o2}}{v_1 x_o}+\frac{\sum_{r=}^{s}\mu_r y_{or}}{v_1 x_o}\\ &kısıtlar\\ &\frac{\mu_1 y_{i1}}{v_1 x_o}+\frac{\mu_2 y_{i2}}{v_1 x_o}+\frac{\sum_{r=}^{s}\mu_r y_{ir}}{v_1 x_o}\le 1\\ &\mu,v>0; i=1,\ldots,n\end{aligned} \equiv \begin{aligned}&enb\quad \frac{\mu_1 y_{o1}}{v_1 x_o}+\left(\frac{\mu_2 y_{o2}}{v_1 x_o}+\frac{\sum_{r=}^{s}\mu_r y_{or}}{v_1 x_o}\right)\\ &kısıtlar\\ &\frac{\mu_1 y_{i1}}{v_1 x_o}+\left(\frac{\mu_2 y_{i2}}{v_1 x_o}+\frac{\sum_{r=}^{s}\mu_r y_{ir}}{v_1 x_o}\right)\le 1\\ &\mu,v>0; i=1,\ldots,n\end{aligned} \equiv$$

$$\begin{aligned}&\max\quad \left(\frac{\mu_1 y_{o1}}{v_1 x_o}+\frac{\mu_2 y_{o2}}{v_1 x_o}\right)+\frac{\sum_{r=}^{s}\mu_r y_{or}}{v_1 x_o}\\ &kısıtlar\\ &\left(\frac{\mu_1 y_{i1}}{v_1 x_o}+\frac{\mu_2 y_{i2}}{v_1 x_o}\right)+\frac{\sum_{r=}^{s}\mu_r y_{ir}}{v_1 x_o}\le 1\\ &\mu,v>0; i=1,\ldots,n\end{aligned}$$

c. y≤z⟹T(x,y)≤T(x,z) (monotonluk/monotonicity)

$x_2>x_1$ için $x_2=hx_1$ ($h>1$) olsun. ispat için oran modeli üzerinden VZA hesaplama mantığını kullanılırsa;

$$\begin{aligned}&enb\quad \frac{my_o}{vx_o}\\ &kısıtlar\\ &\frac{my}{vx}\le 1\\ &m,v>0\end{aligned}$$

, modelinde bir KVB'nin etkinlik skoru= $\dfrac{\dfrac{\mu_o}{v_o}}{\max\left(\dfrac{\mu}{v}\right)}$ olup, burada 2 durum söz konusudur.

- $x_2=hx_1\in$maks (y/x) yani (y_2/x_2) = maks (y/x)

- $x_2 = hx_1 \notin$ maks (y/x) ve $(y_2/x_2) <$ maks (y/x)

birinci durum için yani $(y_2/x_2) = (hy_1/ hx_1) =$ maks (y/x) ise;

$$\frac{\frac{y_o}{x_o}}{\max\left(\frac{y}{x}\right)} = k \text{ olsun.}$$

$$\frac{\frac{y_o}{x_o}}{\max\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{\frac{y_2}{x_2}}{\max\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{\frac{hy_1}{hx_1}}{\max\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{\max\left(\frac{y}{x}\right)}{\max\left(\frac{y}{x}\right)} = 1$$

İkinci durum için:

$$\frac{\frac{y_o}{x_o}}{\max\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{\frac{y_2}{x_2}}{\max\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{\frac{hy_1}{hx_1}}{\max\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{h\left(\frac{y_1}{x_1}\right)}{\max\left(\frac{y}{x}\right)} = h\frac{\left(\frac{y_1}{x_1}\right)}{\max\left(\frac{y}{x}\right)} = hk > k \quad (h>1 \text{ olduğundan})$$

Böylece istenen sağlanmış olur. İspat $y_j = \mu_r y_{rj}$ ve $x_j = v_i x_{ij}$ alınarak kolaylıkla genellenebilir.

d. T(x,1)=x (1'in etkisiz eleman olması/neutral element 1)

1'in etkisiz eleman olması h=1 alındığında c'de verdiğimiz ispattan sağlanır.

5.4.2. VZA'nın t- normu modeli

Bir önceki bölümde VZA'nın t-nomu özelliklerini sağladığı gösterildi. Bu bölümde de tümleyen fonksiyonu "1-x" kullanılarak VZA'nın t-normu modelleri verilecektir. Yalnız, tümleyen fonksiyonundaki "x" değişken olup, VZA'da x ve y'ler veriden elde edilen değerler yani sabitlerdir. VZA'daki değişkenler ise model katsayıları (ağırlıklar) olan μ, v, λ ve θdır [185], dolayısıyla tümleyen bu katsayılar üzerinden hesap edilmelidir. Bu noktadan hareketle VZA t-normu modeli girdi ya da çıktılardan tek olanın ağırlığının tümleyenidir. Çoklu girdi çoklu çıktı durumları için ispat gerçeklenemedi. Bu sonuca göre t-norm VZA'nın eşitlik 5.1 karşılık gelen üretici modelleri;

Girdi yönlü modeller

$$\begin{aligned}
&enb\ z_O = (1-\mu)\, y_O \Big/ \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{iO} \\
&kısıtlar \\
&(1-\mu)\, y_j \Big/ \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} \leq 1 \\
&j = 1,\ldots,n,\ \mu, \nu_i \geq 0
\end{aligned} \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned}
&enb\ z_O = \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rO} \Big/ (1-\nu)\, x_O \\
&kısıtlar \\
&\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} \Big/ (1-\nu)\, x_j \leq 1 \\
&j = 1,\ldots,n,\ \mu_r, \nu \geq 0
\end{aligned} \tag{5.43}$$

olup, bunların eşitlik 5.2’ye karşılık gelen CCR modeli karşılıkları eşitlik 5.44 ve 545’teki gibidir.

$$\begin{aligned}
&enb\ z_O = (1-\mu)\, y_O \\
&kısıtlar \\
&(1-\mu)\, y_j - \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} \leq 0 \\
&\sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{iO} = 1 \\
&j = 1,\ldots,n,\ \mu, \nu_i \geq 0
\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}
&enb\ z_O = \sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rO} \\
&kısıtlar \\
&\sum_{r=1}^{s} \mu_r y_{rj} - (1-\nu)\, x_j \leq 0 \\
&(1-\nu)\, x_{iO} = 1 \\
&j = 1,\ldots,n, \\
&\mu_r, \nu \geq 0
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Çıktı yönlü modeller

$$\begin{aligned}&enk\ z_O = (1-\nu)x_O \Big/ \sum_{r=1}^{s}\mu_r y_{rO}\\&kısıtlar\\&(1-\nu)x_j \Big/ \sum_{r=1}^{s}\mu_r y_{rj} \geq 1\\&j=1,...,n,\ \mu_r,\nu \geq 0\end{aligned} \tag{5.46}$$

$$\begin{aligned}&enk\ z_O = -\sum_{i=1}^{m}\nu_i x_{iO} \Big/ (1-\mu)y_O\\&kısıtlar\\&\sum_{i=1}^{m}\nu_i x_{ij} \Big/ (1-\mu)y_j \geq 1\\&j=1,...,n,\ \mu,\nu_i \geq 0\end{aligned} \tag{5.47}$$

olup, bunların eşitlik 6.6'ye karşılık gelen CCR modeli karşılıkları eşitlik 6.48 ve 6.49'daki gibidir.

$$\begin{aligned}&enb\ z_O = (1-\nu)x_{iO}\\&kısıtlar\\&(1-\nu)x_j - \sum_{r=1}^{s}\mu_r y_{rj} \geq 0\\&\sum_{r=1}^{s}\mu_r y_{rO} = 1\\&j=1,...,n,\\&\mu_r,\nu \geq 0\end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned}&enk\ z_O = \sum_{i=1}^{m}\nu_i x_{iO}\\&kısıtlar\\&\sum_{i=1}^{m}\nu_i x_{ij} - (1-\mu)y_j \geq 0\\&(1-\mu)y_O = 1\\&j=1,...,n,\\&\mu,\nu_i \geq 0\end{aligned} \tag{5.49}$$

5.4.3. Veriye, karşılaştırmalı uygulama

VZA'nın klasik CCR modelleri (eşitlik 5.1-5.6) ile önerilen modeller (eşitlik 5.42-5.49) arasındaki bağıntıyı göstermek üzere tek girdi kullanarak tek çıktı üreten hipotetik 5 KVB ve bu KVB'lerin verileri ile etkinliklerinin girdi ve çıktı yönlü hesaplaması Çizelge 5.2'de gösterildiği gibi olsun.

Çizelge 5.2. Hipotetik KVB'ler ve etkinliklerinin oran modeline göre hesabı

	VERİ		GİRDİ YÖNLÜ ANALİZ		ÇIKTI YÖNLÜ ANALİZ	
KVB	Y	X	Y/X	(Y/X)/ENB(Y/X)	X/Y	(X/Y)/ENK(X/Y)
A	25	5	5	5/5=1	0,2	0,2/0,2=1
B	24	6	4	4/5=0,8	0,25	0,25/0,2=1,25
C	24	8	3	3/5=0,6	0,333333	0,333333/0,2=1,6666667
D	20	10	2	2/5=0,4	0,5	0,5/0,2=2,5
E	15	15	1	1/5=0,2	1	1/0,2=5

Bu verinin kullanıldığı modeller μ; çıktı ağırlıklarını v ise girdi ağırlıklarını göstermek üzere Çizelge 5.3.'teki gibidir.

Çizelge 5.3. Girdi ve Çıktı yönlü örnek VZA modelleri

Girdi yönlü klasik CCR (1)	CCR (1-μ) modeli (2)	CCR (1-v) modeli (3)
$Enb\ 25\mu$	$Enb\ 25(1-\mu)$	$Enb\ 25\mu$
$5v=1$	$5v=1$	$5(1-v)=1$
$25\mu-5v\le 0$	$25(1-\mu)-5v\le 0$	$25\mu-5(1-v)\le 0$
$24\mu-6v\le 0$	$24(1-\mu)-6v\le 0$	$24\mu-6(1-v)\le 0$
$24\mu-8v\le 0$	$24(1-\mu)-8v\le 0$	$24\mu-8(1-v)\le 0$
$20\mu-10v\le 0$	$20(1-\mu)-10v\le 0$	$20\mu-10(1-v)\le 0$
$15\mu-15v\le 0$	$15(1-\mu)-15v\le 0$	$15\mu-15(1-v)\le 0$
$\mu,v\ge 0$	$\mu,v\ge 0$	$\mu,v\ge 0$
Çıktı yönlü klasik CCR (4)	CCR (1-μ) modeli (5)	CCR (1-v) modeli (6)
$Enk\ 5v$	$Enk\ 5v$	$Enk\ 5(1-v)$
$25\mu=1$	$25(1-\mu)=1$	$25\mu=1$
$5v-25\mu\ge 0$	$5v-25(1-\mu)\ge 0$	$5(1-v)-25\mu\ge 0$
$6v-24\mu\ge 0$	$6v-24(1-\mu)\ge 0$	$6(1-v)-24\mu\ge 0$
$8v-24\mu\ge 0$	$8v-24(1-\mu)\ge 0$	$8(1-v)-24\mu\ge 0$
$10v-20\mu\ge 0$	$10v-20(1-\mu)\ge 0$	$10(1-v)-20\mu\ge 0$
$15v-15\mu\ge 0$	$15v-15(1-\mu)\ge 0$	$15(1-v)-15\mu\ge 0$
$\mu,v\ge 0$	$\mu,v\ge 0$	$\mu,v\ge 0$

Bu modeller KVB A için düzenlenmiş olup, her bir KVB için ayrı ayrı çözülerek sonuçlar çizelge 5.4'teki gibi elde edilir.

Çizelge 5.4. Girdi yönlü örnek modellerin sonuçları

MODEL	VZA Sonucu	μ	v	y	x	$v*x$	$\mu*y$
Girdi yönlü klasik CCR (1)	1	0,04	0,2	25	5	1	1
	0,8	0,03333	0,16667	24	6	1	0,8
	0,6	0,025	0,125	24	8	1	0,6
	0,4	0,02	0,1	20	10	1	0,4
	0,2	0,01333	0,06667	15	15	1	0,2
CCR (1-μ) modeli (2)	1	0,96	0,2	25	5	1	24
	0,8	0,96667	0,16667	24	6	1	23,2
	0,6	0,975	0,125	24	8	1	23,4
	0,4	0,98	0,1	20	10	1	19,6
	0,2	0,98667	0,06667	15	15	1	14,8
CCR (1-v) modeli (3)	1	0,04	0,8	25	5	4	1
	0,8	0,03333	0,83333	24	6	5	0,8
	0,6	0,025	0,875	24	8	7	0,6
	0,4	0,02	0,9	20	10	9	0,4
	0,2	0,01333	0,93333	15	15	14	0,2

Çizelge 5.5. Çıktı yönlü örnek modellerin sonuçları

MODEL	VZA Sonucu	μ	v	y	x	$v*x$	$\mu*y$
Çıktı yönlü klasik CCR (4)	1	0,04	0,2	25	5	1	1
	1,25	0,04167	0,20833	24	6	1,25	1
	1,66667	0,04167	0,20833	24	8	1,66667	1
	2,5	0,05	0,25	20	10	2,5	1
	5	0,06667	0,33333	15	15	5	1
CCR (1-μ) modeli (5)	1	0,96	0,2	25	5	1	24
	1,25	0,95833	0,20833	24	6	1,25	23
	1,66667	0,95833	0,20833	24	8	1,66667	23
	2,5	0,95	0,25	20	10	2,5	19
	5	0,93333	0,33333	15	15	5	14
CCR (1-v) modeli (6)	1	0,04	0,8	25	5	4	1
	1,25	0,04167	0,79167	24	6	4,75	1
	1,66667	0,04167	0,79167	24	8	6,33333	1
	2,5	0,05	0,75	20	10	7,5	1
	5	0,06667	0,66667	15	15	10	1

v^*x ve μ^*y sütunlarındaki elde edilen sonuçların grafikleri incelendiğinde (Ek-1'de Şekil 5.3-5.5 ve Ek-2'de Şekil 5.6-5.8) önerilen modellerin t-normlarına karşılık geldiği klasik VZA'nın ise tümleyenin tümleyeninin kendisine eşit olmasından, yani (1- (1-μ)) = μ yada (1- (1-v)) = v olmasından t-normlarının birer üreticisi konumunda olduğu görüldü.

5.4.4. Gerçek veri ile bir deneme örneği

Hipotetik veriler üzerinden elde edilen sonuçların gerçek veriler üzerindeki etkisini görmek üzere, eğitim ile ilgili olarak 29 ülkeye ait akademik yayın sayısı ve yayınlara yapılan atıf sayısı çıktılar, yükseköğretimdeki toplam araştırmacı sayısı ve araştırmacı başına harcama da girdiler (çizelge 5.7) olmak üzere girdi yönlü modeller (eşitlik 5.50-5.54) kullanılsın.

<u>Model 1: girdi yönlü klasik CCR (eşitlik 5.2)</u>

Çıktı: Yayın Sayısı (YS)
Girdiler: Yükseköğretimdeki toplam araştırmacı sayısı (TA), Yükseköğretimde araştırmacı başına harcama (ABH)

$$\begin{aligned}
&enb\ z_O = \mu_{YS} YS_O \\
&kısıtlar \\
&\mu_{YS} YS_j - v_{TA} TA_j - v_{ABH} TA_j \le 0 \\
&v_{TA} TA_O + v_{ABH} TA_O = 1 \\
&j = 1,...,29,\ \mu_{YS}, v_{TA}, v_{ABH} \ge 0
\end{aligned} \tag{5.50}$$

<u>Model 2: girdi yönlü t-norm CCR (eşitlik 5.44)</u>

Çıktı: Yayın Sayısı (YS)
Girdiler: Yükseköğretimdeki toplam araştırmacı sayısı (TA) , Yükseköğretimde araştırmacı başına harcama (ABH)

$$\begin{aligned}
&enb\ z_O = (1-\mu_{YS}) YS_O \\
&kısıtlar \\
&(1-\mu_{YS}) YS_j - v_{TA} TA_j - v_{ABH} ABH_j \le 0 \\
&v_{TA} TA_O + v_{ABH} ABH_O = 1 \\
&j = 1,...,29,\ \mu_{YS}, v_{TA}, v_{ABH} \ge 0
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Model 3: girdi yönlü klasik CCR (eşitlik 5.2)

Çıktılar: Yayın Sayısı (YS), Atıf Sayısı (AS)
Girdiler: Yükseköğretimdeki toplam araştırmacı sayısı (TA)

$$\begin{aligned}
&enb\ z_O = \mu_{YS} YS_O + \mu_{AS} AS_O \\
&kısıtlar \\
&\mu_{YS} YS_O + \mu_{AS} AS_O - \nu_{TA} TA_j \le 0 \\
&\nu_{TA} TA_O = 1 \\
&j = 1,...,29,\ \mu_{YS}, \nu_{TA}, \nu_{ABH} \ge 0
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Model 4: girdi yönlü t-norm CCR (eşitlik 5.45)

Çıktılar: Yayın Sayısı (YS), Atıf Sayısı (AS)
Girdiler: Yükseköğretimdeki toplam araştırmacı sayısı (TA)

$$\begin{aligned}
&enb\ z_O = \mu_{YS} YS_O + \mu_{AS} AS_O \\
&kısıtlar \\
&\mu_{YS} YS_O + \mu_{AS} AS_O - (1-\nu_{TA}) TA_j \le 0 \\
&(1-\nu_{TA}) TA_O = 1 \\
&j = 1,...,29,\ \mu_{YS}, \nu_{TA}, \nu_{ABH} \ge 0
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Elde edilen sonuçlar (Çizelge 5.6) hipotetik örnek sonuçları ile paralel olup, modellerin çözüm sonuçlarının detayları Ek-3'deki gibi elde edildi. Hemen her modelde Hollanda ve Lüksemburg etkin çıkarken, çift girdinin kullanıldığı modellerde etkin sınıra Birleşik Krallık da dahil oldu. Veriler incelendiğinde İngiltere'nin Yükseköğretimde araştırmacı başına harcama konusunda satınalma gücü paritesine göre oldukça düşük kaldığı görüldü. Buradan diğer gelişmiş ülkelerde girdi israfının bulunduğu, Türkiye'nin ise daha çıktılarının yetersiz olduğu kanaatine varıldı. Grafikler bir önceki örneğinkiler ile benzer olduğundan ayrıca yer verilmedi.

Çizelge 5.6. Örnek uygulama için gerçek veri[1] ve etkinlik sonuçları

Sıra	Ülke	VERİLER				ETKİNLİK SONUCU			
		Y1	Y2	X1	X2	M1	M2	M3	M4
1	Almanya	161,860	978,143	335,928	151,594	0,801	0,801	0,290	0,290
2	Avusturya	22,776	141,848	44,601	131,235	0,356	0,356	0,312	0,312
3	Belçika	30,851	217,137	42,981	137,747	0,488	0,488	0,470	0,470
4	Birleşik Krallık	187,005	3660,261	355,060	80,164	1	1	0,933	0,933
5	Çek Cumhuriyeti	20,123	85,198	32,173	95,724	0,433	0,433	0,357	0,357
6	Danimarka	23,216	174,835	37,539	99,041	0,464	0,464	0,421	0,421
7	Estonya	2,698	18,115	6,247	57,771	0,292	0,292	0,275	0,275
8	Finlandiya	18,376	111,803	29,157	101,806	0,428	0,428	0,381	0,381
9	Fransa	117,720	658,824	172,700	125,714	0,982	0,982	0,394	0,394
10	Hollanda	55,346	415,986	37,629	114,993	1	1	1	1
11	İrlanda	12,724	76,403	15,281	110,309	0,564	0,564	0,499	0,499
12	İspanya	84,720	458,703	150,582	73,472	0,916	0,916	0,322	0,322
13	İsveç	36,057	249,723	55,365	112,857	0,576	0,576	0,422	0,422
14	İtalya	100,627	583,537	141,580	129,555	0,939	0,939	0,418	0,418
15	İzlanda	1,374	12,482	2,477	65,792	0,368	0,368	0,456	0,456
16	Japonya	130,490	538,258	388,831	158,463	0,571	0,571	0,192	0,192
17	Kore	74,105	333,144	181,284	157,360	0,552	0,552	0,234	0,234
18	Latviya	1,649	4,752	6,929	28,937	0,162	0,162	0,136	0,136
19	Lüksenburg	1,636	8,960	0,935	179,438	1	1	1	1
20	Macaristan	10,089	47,344	23,112	65,117	0,314	0,314	0,249	0,249
21	Norveç	18,736	113,063	30,583	84,652	0,446	0,446	0,368	0,368
22	Polonya	37,390	138,644	80,223	56,927	0,677	0,677	0,266	0,266
23	Portekiz	21,813	106,243	55,707	37,726	0,578	0,578	0,224	0,224
24	Slovakya	6,589	21,584	18,465	40,156	0,303	0,303	0,204	0,204
25	Slovenya	5,921	25,627	5,494	108,445	0,721	0,721	0,616	0,616
26	Şili	9,132	44,098	11,058	115,049	0,557	0,557	0,472	0,472
27	Türkiye	39,327	109,565	113,409	60,178	0,552	0,552	0,198	0,198
28	Yeni Zellanda	14,163	75,327	25,000	47,993	0,519	0,519	0,324	0,324
29	Yunanistan	18,473	93,049	54,602	33,836	0,514	0,514	0,193	0,193

[1] Veriler UNESCO'nun web veri tabanından (http://data.uis.unesco.org/#) 23.07.2017 tarihinde derlendi

5.5. UNESCO Eğitim İstatistikleri Üzerine Bir Uygulama

Bu bölüme kadar VZA’nın t-normu olmanın şartlarını sağladığını matematiksel olarak ifade edildi, ardından konuyu açıklayacak küçük çaplı bir örnek ile VZA’nın t-normlarının bir üreticisi olduğu farklı modeller üzerinde gösterildi ve sonrasında gerçek veri üzerinde bir uygulama denemesi yapıldı. Elde edilen sonuçların öne sürülen görüşü desteklediği VZA’nın bulanık kümelerde önemli bir yer tutan t-normları için bir üretici olarak kullanılabileceği görüldü. Elde edilen sonuçlar bu aşama itibari ile daha kapsamlı veriler üzerinde kullanılabilir niteliktedir.

Önerilen t-norm VZA modeli girdilerden ya da çıktılardan birinin tek olmasını gerektirdiğinden (Eşitlik 5.42-5.49) toplam akademik yayın sayısı çıktı olarak alındı. Bir ülkenin akademik yayın sayısında doğrudan ya da dolaylı etkisi olduğu düşünülen;

a. Yükseköğretimdeki araştırmacı sayısı
b. Yükseköğretimdeki teknik personel sayısı
c. Yükseköğretimdeki diğer destek personel sayısı
d. Doktora öğrenci sayısı
e. Satınalma gücü paritesine göre yükseköğretim yatırım harcamaları (2005 yılı sabit fiyatları ile ABD $)

girdi olarak alındı. Analiz yapılırken girdi israfının olup olmadığını yani girdilerde azaltmaya gitmenin mümkün olup olmadığını irdelemek üzere girdi yönlü model, çıktılarda ne oranda artış sağlanabileceğini görmek açısından da çıktı yönlü modeller hem klasik hem de önerilen şekli ile kullanıldı.

Analiz en çok ülkenin veri sağladığı 2013 yılı için yapıldı. Amerika, Çin gibi veri sağlamayan gelişmiş ülkeler, bu konuda veri üretemeyen Cabo Verde, Côte d'Ivoire benzeri küçük az gelişmiş ülkeler ve Türkiye gibi konuyu farklı açıdan bakarak eksik bildirimde bulunan (teknik personel ve diğer destek personeli) ülkeler önerdiğimiz model üzerinde farklı varyasyonlara neden olabileceğinden analiz dışı bırakıldı. Bütün eleme işlemlerinden sonra 35 ülke analize dahil edildi. Bu ülkeler ve ilgili değişkenlere ait verileri çizelge 5.7.’deki gibidir.

Eşitlik 6.44 ve 6.49’da tanımlanan modellerin uygulanması sonucunda, akademik yayınlarda tekel konumunda olan Hollanda’nın ve refah düzeyi Avrupa ortalamasının çok üzerinde olan komşusu Lüksemburg’un etkim çıktığı görüldü. Romanya ve Ukrayna haricinde diğer etkin ülkelerin az nüfuslu, ölçek olarak küçük seviyelerdeki ülkeler (Azerbaycan, Ermenistan, Güney Kıbrıs, , Slovenya, Umman gibi) olduğu Romanya ve Ukrayna’nın ciddi anlamda yükseköğrenim altyapısının mevcudiyeti (Doktora öğrenci sayısı) gözlendi. Gelişmiş ülkelerin akademik yayın noktasında her ne kadar sayısal üstünlükleri bulunsa da elde edilen sonuçların bu konuya ayırdıkları gerek insan gücü gerekse mali kaynakların sağlayabileceğinin gerisinde kaldığı yani kaynak israflarının bulunduğu sonucu çıkarıldı. VZA sonuçları (Çizelge 5.7) ve bu sonuçların oluşturan ağırlıklar Ek-4 ve Ek- 5’te verildi.

Ayrıca önerilen t-norm VZA ve klasik VZA sonuçlarının aynı olduğu girdi ve çıktı yönlü modeller arasında ise ihmal edilebilecek kadar ufak farkların bulunduğu, aynı ülkelerin etkin çıktığı görüldü. Bir miktar bozulma bulunsa da yine temel yapı itibariyle önerilen modelin t-normu yapısını koruduğu, klasik VZA modelinin modelin üreticisi konumunda olduğu sonucuna varıldı (EK-6’da Şekil 5.9-5.10).

Çizelge 5.7. UNESCO Eğitim İstatistikleri

Ülke	YS[1]	AS[2]	TPS[3]	DDPS[4]	DÖS[5]	YÖY[6]	CCR Sonuç
Almanya	161860	261657	30336	43934	27707	14936414,09	0,4074687
Avusturya	22776	33781	6477	4343	2227,5	2280379,481	0,4240729
Azerbaycan	760	2834	43	367	276	11813,355	1
Beyaz Rusya	1702	1829	216	660	1192	105153,456	0,5684735
Bosna Hersek	763	986	80	79	210	33304,66	0,5834307
Çek Cumhuriyeti	20123	22957	6224	2992	2433	1341095,603	0,5727752
Danimarka	23216	27080	5094	5365	1888	1898279,587	0,5306001
Ermenistan	1034	821	161	97	377	5030,319	1
Estonya	2698	4792	972	483	233	183657,414	0,4285755
Filipinler	1881	9693	177	467	3305	257078,055	0,4324684
Fransa	117720	113058	36600	23042	13419	9590962,463	0,5854108
Gürcistan	968	2762	897	1903	406	23168,29	0,5605166
Hollanda	55346	24589	2424	10616	4321	4079219,811	1
İrlanda	12724	11127	989	3164	1532	615150,455	0,7589292
İspanya	84720	117925	14762	17895	10504	4299614,346	0,5441453
Japonya	130490	317658	15158	56015	16471	19042469,95	0,3503274
Kazakistan	1801	9208	1345	1275	247	182860,352	0,2616652
Kıbrıs (Güney)	2015	1586	82	96	52	54874,624	1
Kore (Güney)	74105	97319	57797	26168	12625	5967279,607	0,4848123
Kosta Rika	693	2893	854	760	75	123636,61	0,1941892
Lüksemburg	1636	828	87	20	64	90338,623	1
Macaristan	10089	16023	3348	3741	1069	354290,425	0,6871402
Malta	553	806	103	251	24	31672,148	0,5397866
Moldova	408	962	63	145	488	5283,18	0,7360516
Polonya	37390	69027	6955	4241	3719	1825717,952	0,5223642
Portekiz	21813	52827	2451	429	4155	1318579,972	0,8377771
Romanya	14953	14884	1355	2477	5370	189160,594	1
Rusya Federasyonu	47744	42605	4658	11853	36533	2250803,422	0,6941246
Sırbistan	7459	11015	1471	1799	750	300149,777	0,6172741
Slovakya	6589	17917	382	166	2119	324889,138	0,9321823
Slovenya	5921	4310	935	249	1165	136860,345	1
Şili	9132	6383	3194	1480	593	443157,57	0,8814271
Ukrayna	9868	6936	637	804	8923	158601,339	1
Umman	1272	933	300	583	4	79241,204	1
Yeni Zelanda	14163	19000	2100	4000	1286	427877,765	0,7992334

[1]Yayın Sayısı, [2] Araştırmacı Sayısı, [3] Teknik Personel Sayısı, [4] Diğer Destek Personel Sayısı, [5] Doktora Öğrenci Sayısı, [6] Yükseköğretim Yatırımları (1000 ABD $)

6. TARTIŞMA

Bu bölümde konu uygulama ve teori birbirlerinden ayrı yaşam seyirleri olduğundan farklı iki başlık altında irdelendi.

6.1. Eğitim ve Uygulamanın İrdelenmesi

UNESCO Yükseköğretimde araştırma geliştirme (AR-GE) konusunda çalışanları araştırmacı, teknik personel ve diğer destek personel olmak üzere üç farklı kategoride değerlendirmekte ve ayrıca toplam AR-GE personeli diye bir dördüncü kategoride veri toplamaktadır. Veriler incelendiğinde aşağıda madde madde verilen sonuçlar elde edildi;

1) UNESCO'nun 161 ülkeden veri topladığı görüldü.
2) ABD de dahil olmak üzere 88 ülkenin bu kategorilerde hiç verisi bulunamadı.
3) 44 ülkede toplam AR-GE personeli diğer üç kategorinin toplamına eşit, ancak Mısır ve Türkiye'de teknik personel ve diğer destek personeli, Porto Riko ve Birleşik Krallık ta ise sadece diğer destek personeli toplamda 0 olarak ortaya çıkmaktadır.
4) Kişi sayısı olarak verilen bu kategorilerde Şili'nin değerlerinin küsuratlı olduğu görüldü, neden kişi sayısının küsurat içerdiği anlaşılamadı, yuvarlama yapılarak veri setine dahil edildi.
5) Kolombiya, El Salvador, Kırgızistan ve Uruguay sadece araştırmacı sayısını bildirdiği toplam AR-GE personelini bildirmediği görüldü, bildirilen sayı toplam AR-GE personelini mi, yoksa AR-GE'de görev alan başka personel de var mı, anlaşılamadı.
6) 19 ülkede toplam AR-GE personeli için bildirilen değer diğer üç kategorinin toplamından fazla olduğu görüldü, Bunlardan, aralarında Belçika, İtalya, Norveç ve İsveç gibi gelişmiş ülkelerin de bulunduğu 9 ülkenin teknik personel ve diğer destek personeli ayrı ayrı sayı olarak vermemektedir.
7) Çin'in sadece toplam AR-GE personeli sayısını verdiği araştırmacı, teknik personel ve diğer destek personel olarak ayırmamaktadır.
8) Aralarında Azerbaycan, Ermenistan ve Ukrayna'nın olduğu 9 ülkenin toplam AR-GE personeli sayısının diğer üç kategorinin toplamından az olduğu görüldü. Bu UNESCO'nun dikkate almadığı bir dördüncü kategorideki yükseköğretim çalışan grubunun bu ülkelerde akademik faaliyetlere katıldığı şeklinde yorumlandı. Bu konu ayrıca tartışılacaktır.

9) Araştırmacı sayıları konusunda tam bilgi veren Filistin, Arjantin ve Gine'nin ise Yükseköğretim ile ilgili finansal bilgilerini vermedikleri görüldü.
10) Doktora öğrencilerinin de fiili bir araştırmacı olduğundan hareketle analize dahil edilen doktora öğrencisi sayısını olmadığından yada bu veriyi vermediğinden bir kısım ülkenin daha kapsam dışı tutulması ile 35 ülke analize alındı.

Analiz sonuçları irdelendiğinde Azerbaycan, Ermenistan, Ukrayna gibi ülkelerin şaşılacak şekilde gelişmiş ülkelere rağmen etkin çıktı. Bu ülkelerin verisi incelendiğinde, yukarıda da bahsedildiği şekilde yükseköğretimde görev alan ama UNESCO'nun AR-GE personeli olarak sınıflanmadığı başka grupların da AR-GE faaliyetlerine katıldığını gösterir sayısal bulgulara ulaşıldı. Ayrıca bir örnek olarak Ukrayna ile Türkiye doktora öğrenci sayıları açısından karşılaştırıldığında 2012-2014 yılları için sırası ile (9248, 8923, 9081) ve (8734, -, 4516) olarak UNESCO'ya bildirildiği görüldü. Ukrayna'nın nüfusunun yaklaşık 45 milyon Türkiye'nin 80 milyon olduğu düşünüldüğünde, Türkiye'nin verisinin dalgalı ve tutarsız olması sebebi ile analize edilen veri setinde bile yer almazken, Ukrayna'nın etkin çıkması doğaldır. Bu arada performansa dayalı sistemlerin en iyilenmesinin VZA üretim ilişkisi bahsinde konu edilen ve eşitlik 6.24'te özetlenen asgari gereklerde bozulma ile yani en yüksek verimin sıfır girdi kullanarak çıktı üretmekle sağlanabileceğini, bunun da doğaya aykırı olduğunun altını çizmek gerekir.

6.2. Önerilen t-Norm VZA'nın İrdelenmesi

James, Bölüm 4.9'da bahsedilen ve t-normlarını da bir açıdan kapsayan birleştirici fonksiyonları incelerken aşağıdaki özelliklerin sağlandığını da ifade etmektedir [159].

Ortalamlar için;

(i) Simetri: Bileşenlerin sırasının çıktıyı etkilememesi
(ii) Ötelemede değişmezlik (translation invariance): girdilerde bir eklemenin çıktılarda da aynı miktarda değişime yol açması
(iii) Homojenlik: tüm girdilerin sabit bir sayı ile çarpılması durumunda çıktıların da aynı oranda değişmesi
(iv) Monotonluk: girdilerde herhangi bir artışın çıktılarda bir azalmaya yol açmaması

(v) Eşgüçlülük (idempotancy) tüm girdilerin aynı olması durumunda çıktıların da aynı olması

Geometrik otalamalar için:

(i) Yutan eleman: girdilerden birinin çıktıyı vermesi diğerlerinin devre dışı kalması

(ii) Lipschiltz süreklilik: fonksiyonun eğiminin ya da türevinin herhangi bir girdinin değişiminden uç bir şekilde etkilenmesi.

Bu bahsi geçen özelliklerin çoğu VZA üretim ilişkisinde de girdilerden çıktıların üretimi konusunda ekonomistlerin de üzerinde hemfikir olduğu ve VZA'nın da ön şart olarak sağladığı özelliklerdir (Bknz Bölüm 5.2). Ancak burada bir noktanın altını çizmekte fayda vardır. Gerek genel manada t-normları gerekse özelde VZA bir ortalama operatörü değildir. VZA bir optimizasyon operatörüdür. Ortalama operatörlerinin bakış açısı ile VZA'nın da aynı şartları sağlamasını istemek yanlış olacaktır. Mesela eşgüçlülük (idempotency) özelliğini sadece Zadeh'in önerdiği $T_M(x, y)$ = Enk(x, y) ve $S_M(x, y)$ = Enb(x, y) sağlamaktadır, literatürde önerilen diğer t-normları bu özelliği sağlamamaktadır [153].

Gerek Beliakov [94], gerekse ona atıf yapan yazarlar [159] t-normlarını veriye uygularken tek çıktı çok girdili modeller kullanmaktadır. Her ne kadar VZA aynı ayda hem girdilerin hem de çıktıların çoklu olması durumunda sonuç verse de uygulama sonuçları VZA'nın çoklu girdi çoklu çıktı durumları için bir t-normu üreticisi olduğunu gerçeklemedi.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Her ne kadar tezin kapsamı teorik olsa ve eğitim ile ilgili veri bu teorik açılımı desteklemek için kullanılsa da elde edilen sonuçlar değerlendirmeye değerdir. Özellikle günümüzün gelişmiş ülkelerinin bu analiz sonucunda etkin çıkmamaları ayrıca bir araştırma konusu olup, yüksek refahtan kaynaklanan bir kaynak israfının mevcut olduğu elde edilen VZA sonuçlarınca ortaya konmuştur. Ancak yukarıda da vurgu yaptığımız çıktılar sabitken sıfır girdi kullanmak en yüksek etkinliği sağlar benzeri doğaya ters bir sonuca gitmemek açısından yani aradaki dengenin kurulması bakımında konunun eğitimciler ve çalışma ekonomisi uzmanlarınca da irdelenmesi yerinde olacaktır.

Bulanık sistemlerde genelde dışardan kurulan kural tabanlı sistemler kullanılmaktadır. Burada eğer-ise formatındaki kurallar ile veri belli bir özelliği ya da şartı sağlıyor ise bir gruba atanmakta taşımıyor ise başka bir gruba atanmaktadır. Bulanık sistemler burada üyelik fonksiyonları yardımı ile herhangi bir özelliği ne taşıyan ne de taşımayan arada kalan durumlarda veriyi değerlendirmekte ve gruplamaktadır. Burada en yaygın olarak kullanılan α-kesim kümesi yardımı ile verinin aldığı değer aralığını dilimlemek ve eğer-ise kural istemini çok seçenekli hale getirmektir. VZA bu noktada etkin KVB'lerden oluşan bir kural koyucu sınır oluştururken, etkin olmayan KVB'leri de etkin sınırda bir noktaya yönlendirerek hedefleme yapmakta ve böylelikle KVBler gruplanmaktadır. Bu kural koyucu etkin sınır aynı zamanda bulanık kümelerdeki bulanık kümenin çekirdeğine karşılık gelir. Ayrıca etkin olmayan KVB'lerin etkinlikleri etkin sınıra göre hesap edildiğinden etkinlik skorları etkin sınıra üyelik derecesini vermektedir. Tekrar edilirse, bir (1) etkin sonucuna sahip KVB'ler etkin sınıra %100 üye iken etkin olmayan KVB'lerin etkin sınıra üyeliği elde ettikleri etkinlik sonucu oranındadır.

Bunun yanında etkin KVB'ler de iki durumda incelenebilir. Birinci durumda herhangi bir değişkende en uç değeri alan KVBler doğal olarak etkindir [242]. Bu karar verme birimleri en dar(minimum) etkin sınırı oluşturur. Veri; bu oluşan etkin sınırı, sınıra ulaşan ve etkin sınırın köşe noktalarına ait olmayan her bir KVB ile bölerek α-kesimlerin kendisi oluşturur. (Bknz. Ek-7) Etkin olmayan KVB'ler ise etkin bir KVB'ye ya da iki boyutta etkin iki KVB'nin gerdiği sınıra çok boyutta üç kVB taradından gerilen bir üçgen yüzeye iz düşer. Bu o KVB için hedef noktasıdır. Bu tamamen ilgili KVB'nin kendi verisine bağlıdır. Dolayısıyla VZA'da kural dışardan zorlama ile değil verinin kendisinden ortaya çıkmakta, kuralı veri koymaktadır. Yani oluşan etkin sınır ve bu etkin sınıra üyelik derecesini göstermesi bakımından ortaya çıkan etkinlik skorları ve ağırlıklarca belirlenen koordinatlar üzerinden etkin sınırın hedef bölgesine yönelim, ileriye dönük bir seçme, tercih ortaya koymaktadır. Bu bulanık sistemlerde var olan dereceli ayarlamanın kestirme bir şeklidir. Bu tür dereceli ayarlamalar yukarıda da belirtildiği gibi bulanık sistemlerde bir takım algoritmalar eliyle yapılmaktayken tekrar etmek gererkirse VZA bu ayarlamayı veriden elde edilen bilgiler ışığında kendisi yapmaktadır.

Sonuç olarak t-Normlar VZA ilişkisinin daha kapsamlı bir şekilde araştırılması, bir performans ölçüm aracı olan ve gelen veriyi kullanan VZA'nın bu özelliğinden hareketle daha veri oluşmadan da müdahale imkânını sunacağından üretim sürecinde kontrol noktası daha geriye çekilerek verimlilik artışı sağlanmış olacaktır.

Parametrik istatistiklerin parametrik olmayan istatistiklere üstünlüğü aşikârdır. Bu nedenle her KVB için VZA modelinin ayrı ayrı çözülmesi neticesinde modelde yer alan bir KVB için biri amaç fonksiyonunda iken olmak üzere KVB sayısınca ağırlık hesap edilmektedir. Bu ise VZA sonuçlarının test edilebilirliğini olumsuz etkilemektedir. Bu nedenle VZA'nın n çözümde tek bir ortak ağırlık kümesi vermesini sağlayacak çalışmalar da yapılmaya başlandı. Ortaya koyduğumuz VZA'nın bir t-normu üreticisi olması görüşü bu çalışmalara da katkı sağlayacak niteliktedir.

KAYNAKLAR

1. Lewis, C. T. and Short, C. (1958). *A Latin Dictionary. Founded on Andrews' edition of Freund's Latin Dictionary.*Oxford: Oxford.

2. Dantzig, G. B. (1955). Linear programming under uncertainty. *Management Science, 1*(3-4), 197-206.

3. Zadeh, L. A. (1962). From circuit theory to system theory. *Proceedings of the IRE, 50*(5), 856-865.

4. Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control, 8*(3), 338-353.

5. Zadeh, L. A. (1999a). Fuzzy logic and the calculi of fuzzy rules, fuzzy graphs and fuzzy probabilities. *Computers and Mathematics with Applications, 37*(11), 35.

6. Zadeh, L. A. (2005). Toward a generalized theory of uncertainty (GTU)—an outline. *Information Sciences, 172*(1), 1-40.

7. Zadeh, L. A. (1984). Fuzzy probabilities. *Information processing and management, 20*(3), 363-372.

8. Zadeh, L. A. (1968). Fuzzy Algorithms. *Information and Control, 12*, 94-102.

9. Bellman, R. E. and Zadeh, L. A. (1977). Local and fuzzy logics. In J. M. Dunn and G. Epstein (Eds.), *Modern uses of multiple-valued logic.* Boston: Reidel Publishing Company, pp. 103-165.

10. Wang, P. P., Ruan, D. and Kerre, E. E. (2007). *Fuzzy logic: A spectrum of theoretical and practical issues.* Berlin: Springer.

11. Hájek, P. (2006). What is mathematical fuzzy logic. *Fuzzy Sets and Systems, 157*(5), 597-603.

12. Höhle, U. and Rodabaugh, S. (1999). *Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory*. New York: Springer Science and Business Media.

13. Türkşen, I. B. (2005). *An ontological and epistemological perspective of fuzzy set theory.* Toronto: Elsevier.

14. Dubois, D. and Prade, H. (2000). *Fundamentals of fuzzy sets.* New York: Springer Science and Business Media.

15. Metcalfe, G., Olivetti, N. and Gabbay, D. M. (2008). *Proof theory for fuzzy logics.* Netherland: Springer Science and Business Media.

16. Dubois, D. and Prade, H. (1986a). Fuzzy sets and statistical data. *European Journal of Operational Research, 25*(3), 345-356.

17. Dubois, D. and Prade, H. (1989). Fuzzy sets, probability and measurement. *European Journal of Operational Research, 40*(2), 135-154.

18. Dubois, D. (2005). Forty years of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems, 3*(156), 331-333.

19. Zimmermann, H. J. (2010). Fuzzy set theory. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, 2*(3), 317-332.

20. Tamir, D. E., Rishe, D. and Kandel, A. (2015). *Fifty Years of Fuzzy Logic and its Applications.* London: Springer.

21. Zadeh, L. A. (1975c). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—II. *Information Sciences, 8*(4), 301-357.

22. Zadeh, L. A. (1975b). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. *Information Sciences, 8*(3), 199-249.

23. Zadeh, L. A. and Kacpryzk, J. (1999a). *Computing with words in Information/Intelligent systems 1: Foundations*. Berlin-Heidelberg: Springer-Werlag.

24. Zadeh, L. A. and Kacpryzk, J. (1999b). *Computing with Words in Information/Intelligent Systems 2: Applications*. Berlin-Heidelberg: Springer-Werlag.

25. Zadeh, L. A. (1996). Fuzzy logic= computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 4*(2), 103-111.

26. Zimmermann, H. J. (1978). Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. *Fuzzy Sets and Systems, 1*(1), 45-55.

27. Hamacher, H., Leberling, H. and Zimmermann, H. J. (1978). Sensitivity analysis in fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and Systems, 1*(4), 269-281.

28. Jones, A., Kaufmann, A. and Zimmermann, H.-J. (1986). *Fuzzy Sets Theory and Applications.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group.

29. Zimmermann, H.-J. (1986). Fuzzy set theory and mathematical programming. In A. Jones, A. Kaufmann, H.-J. Zimmermann (Eds.), *Fuzzy Sets Theory and Applications.* Dordrecht: Reidel Publishing Company, pp. 99-114.

30. Zimmermann, H.-J. (1985). Applications of fuzzy set theory to mathematical programming. *Information Sciences, 36*(1-2), 29-58.

31. Delgado, M., Verdegay, J. L. and Vila, M. A. (1989). A general model for fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and Systems, 29*(1), 21-29.

32. Sahinidis, N. V. (2004). Optimization under uncertainty: state-of-the-art and opportunities. *Computers and Chemical Engineering, 28*(6–7), 971-983.

33. Herrera, F., Kovacs, M. and Verdegay, J. (1993). Optimality for fuzzified mathematical programming problems: a parametric approach. *Fuzzy Sets and Systems, 54*(3), 279-285.

34. Rommelfanger, H. (1996). Fuzzy linear programming and applications. *European Journal of Operational Research, 92*(3), 512-527.

35. Fedrizzi, M., Kacprzyk, J. and Verdegay, J. L. (1991). A survey of fuzzy optimization and mathematical programming. In M. Fedrizzi and M. Roubens (Eds.), *Interactive fuzzy optimization*. Berlin: Springer, pp. 15-28.

36. Schryen, G. and Hristova, D. (2015). Duality in fuzzy linear programming: a survey. *OR Spectrum, 37*(1), 1-48.

37. Vojtáš, P. (2001). Fuzzy logic programming. *Fuzzy Sets and Systems, 124*(3), 361-370.

38. Tanaka, H. and Asai, K. (1984). Fuzzy linear programming problems with fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems, 13*(1), 1-10.

39. Luhandjula, M. K. (2015). Fuzzy optimization: Milestones and perspectives. *Fuzzy Sets and Systems, 274*, 4-11.

40. Verdegay, J. L. (2015). Progress on Fuzzy Mathematical Programming: A personal perspective. *Fuzzy Sets and Systems, 281*, 219-226.

41. Tanaka, H., Okuda, T. and Asai, K. (1974). On Fuzzy-Mathematical Programming. *Journal of Cybernetics, 3*(4), 37-46.

42. Franklin, J. (2015). *The science of conjecture: Evidence and probability before Pascal.*Baltimore: JHU Press.

43. Hald, A. (2003). *A history of probability and statistics and their applications before 1750.* New Jersey: John Wiley and Sons.

44. Ore, Ø., (1965). *Cardano: The Gambling Scholar*. Princeton: Princeton University Press.

45. Tabak, J. (2014). *Probability and statistics: The science of uncertainty.* New York: Infobase Publishing.

46. Assad, A. A. and Gass, S. I. (2011). *Profiles in operations research: pioneers and innovators.* New York: Springer Science and Business Media.

47. Gass, S. I. and Assad, A. A. (2005). *An annotated timeline of operations research: An informal history.* Boston: Springer Science and Business Media.

48. Bachem, A., Grötschel, M. and Korte, B. (2012). *Mathematical Programming The State of the Art.* Berlin: Springer Science and Business Media.

49. Dantzig, G. B. (2012). Reminiscences about the origins of linear programming. In A. Bachem, M. Grötschel and B. Korte (Eds.), *Mathematical Programming The State of the Art*. Berlin: Springer, pp. 78-86.

50. Koopmans, T. C. (1951). *Activity Analysis of Production and Allocation*. New York-London: Wiley and Chapman-Hall.

51. Charnes, A. and Cooper. W. W. (1961) *Management models and industrial applications of linear programming*. Vol. 1. New York: Wiley.

52. Koopmans, T. C. (1949a). Efficient Allocation of Resources; Rand Corparation AD060462. Santa Monica.

53. Koopmans, T. C. (1949b). Report of the Madison Meeting, September 7-10, 1948. *Econometrica, 17*(1), 63-78.

54. Koopmans, T. C. (1951). Efficient allocation of resources. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 455-465.

55. Charnes, A., Cooper, W. W. and Rhodes, E. (1977a). Measuring the Efficiency of Decision Making Units with Some New Production Functions and Estimation Methods; Center for Cybernetic Studies AD-A 049149. Austin, Texas.

56. Charnes, A., Cooper, W. W. and Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research, 2*(6), 429-444.

57. Banker, R. D., Charnes, A. and Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science, 30*(9), 1078-1092.

58. Charnes, A., Cooper, W. W., Seiford, L. and Stutz, J. (1983). Invariant multiplicative efficiency and piecewise cobb-douglas envelopments. *Operations Research Letters, 2*(3), 101-103.

59. Charnes, A., Cooper, W. W., Golany, B., Seiford, L. and Stutz, J. (1985). Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions. *Journal of Econometrics, 30*(1-2), 91-107.

60. Liu, J. S., Lu, L. Y. Y., Lu, W. M. and Lin, B. J. Y. (2013). A survey of DEA applications. *Omega (United Kingdom), 41*(5), 893-902.

61. Gattoufi, S., Oral, M. and Reisman, A. (2004a). Data envelopment analysis literature: A bibliography update (1951-2001). *Socio-Economic Planning Sciences, 38*(2-3), 159-229.

62. Gattoufi, S., Oral, M. and Reisman, A. (2004b). A taxonomy for data envelopment analysis. *Socio-Economic Planning Sciences, 38*(2-3), 141-158.

63. Gattoufi, S., Oral, M., Kumar, A. and Reisman, A. (2004a). Epistemology of data envelopment analysis and comparison with other fields of OR/MS for relevance to applications. *Socio-Economic Planning Sciences, 38*(2-3), 123-140.

64. Gattoufi, S., Oral, M., Kumar, A. and Reisman, A. (2004b). Content analysis of data envelopment analysis literature and its comparison with that of other OR/MS fields. *Journal of the Operational Research Society, 55*(9), 911-935.

65. Emrouznejad, A., Tavana, M. and Hatami-Marbini, A. (2014). The state of the art in fuzzy data envelopment analysis. In A. Emrouznejad and M. Tavana (Eds.), *Performance Measurement with Fuzzy Data Envelopment Analysis*, Berlin. Springer Verlag, pp. 1-45.

66. Emrouznejad, A. (2014). Advances in data envelopment analysis. *Annals of Operations Research, 214*(1), 1-4.

67. Emrouznejad, A. and Cabanda, E. (2013). Introduction to data envelopment analysis and its applications. In I. H. Osman, A. Anouze, A. Emrouznejad (Eds.) *Handbook of Research on Strategic Performance Management and Measurement Using Data Envelopment Analysis.*Hershey: IGI Global, pp. 235-255.

68. Cook, W. D., Seiford, L. M. and Zhu, J. (2013). Data envelopment analysis: The research frontier. *Omega (United Kingdom), 41*(1), 1-2.

69. Hatami-Marbini, A., Emrouznejad, A. and Tavana, M. (2011). A taxonomy and review of the fuzzy data envelopment analysis literature: Two decades in the making. *European Journal of Operational Research, 214*(3), 457-472.

70. Cooper, W. W., Seiford, L. M. and Zhu, J. (2011) Data envelopment analysis: History, models and interpretations. In W.W. Cooper, L.M. Seiforford, J. Zhu(Eds.), *Handbook on data envelopment analysis.* New York: Springer, pp. 1-39.

71. Cook, W. D. and Seiford, L. M. (2009). Data envelopment analysis (DEA) - Thirty years on. *European Journal of Operational Research, 192*(1), 1-17.

72. Lewin, A. Y. and Seiford, L. M. (1997). Extending the frontiers of Data Envelopment Analysis. *Annals of Operations Research, 73*, 1-11.

73. Seiford, L. M. (1996). Data envelopment analysis: The evolution of the state of the art (1978-1995). *Journal of Productivity Analysis, 7*(2-3), 99-137.

74. Ali, A. I., Lerme, C. S. and Seiford, L. M. (1995). Components of efficiency evaluation in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research, 80*(3), 462-473.

75. Seiford, L. M. and Thrall, R. M. (1990). Recent developments in DEA. The mathematical programming approach to frontier analysis. *Journal of Econometrics, 46*(1-2), 7-38.

76. Seiford, L. M. (1990). Models, extensions and applications of data envelopment analysis: A selected reference set. *Computers, Environment and Urban Systems, 14*(2), 171-175.

77. Phillips, F. (2005). 25 Years of Data Envelopment Analysis. *International Journal of Information Technology and Decision Making, 4*(3), 317-323.

78. Tanaka, H. and Okuda, T. (1973). Fuzzy mathematical programming. *Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers, 9*(5), 607-613.

79. Lai, Y.-J. and Hwang, C.-L. (1992). *Fuzzy mathematical programming*. Berlin: Springer.

80. Zimmermann, H.-J. (1983). Fuzzy mathematical programming. *Computers and operations research, 10*(4), 291-298.

81. Zimmermann, H.-J. (1987). Fuzzy mathematical programming. In H.-J. Zimmermann (Eds.), *Fuzzy Sets, Decision Making and Expert Systems.* Boston: Kluwer Academic Publishers, pp. 71-124.

82. Zimmermann, H.-J. (1996). *Fuzzy Set Theory—and Its Applications.* (Third edition). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

83. Beliakov, G. (2009). Construction of aggregation functions from data using linear programming. *Fuzzy Sets and Systems, 160*(1), 65-75.

84. Beliakov, G. (2000). Shape preserving approximation using least squares splines. *Approximation Theory and its Applications, 16*(4), 80-98.

85. Beliakov, G. (2002). Monotone approximation of aggregation operators using least squares splines. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 10*(06), 659-676.

86. Beliakov, G. (2003). How to build aggregation operators from data. *International Journal of Intelligent Systems, 18*(8), 903-923.

87. Beliakov, G. (2004). Least squares splines with free knots: global optimization approach. *Applied Mathematics and Computation, 149*(3), 783-798.

88. Calvo, T., Mesiarová, A. and Valášková, Ľ. (2003). Construction of aggregation operators: new composition method. *Kybernetika, 39*(5), 643-650.

89. Beliakov, G., Pradera, A. and Calvo, T. (2007). *Aggregation functions: A guide for practitioners.* Berlin: Springer.

90. Verdegay, J.-L. (2003). *Fuzzy sets based heuristics for optimization.* Berlin: Springer Science and Business Media.

91. Bustince, H., Herrera, F. and Montero, J. (2007). *Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models*. Berlin: Springer.

92. Dubois, D. and Prade, H. (1996). What are fuzzy rules and how to use them. *Fuzzy Sets and Systems, 84*(2), 169-185.

93. Beliakov, G., Mesiar, R. and Valaskova, L. (2004). Fitting generated aggregation operators to empirical data. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 12*(02), 219-236.

94. Beliakov, G. (2005). Fitting triangular norms to empirical data. In E. P. Klement and R. Mesiar (Eds.), *Logical, algebraic, analytic and probabilistic aspects of triangular norms*. Amsterdam: Elsevier, pp. 262-272.

95. Beliakov, G., Sola, H. B. and Sánchez, T. C. (2016). *A Practical Guide to Averaging Functions.*London: Springer.

96. Heesterman, A. R. G. (1983). *Matrices and simplex algorithms: a textbook in mathematical programming and its associated mathematical topics*. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

97. Borgwardt, K. H. (1987). *The Simplex Method: a probabilistic analysis.* Berlin: Springer Welag.

98. Zörnig, P. (1991). *Degeneracy graphs and simplex cycling.* Berlin: Springer Werlag.

99. Spendley, W., Hext, G. R. and Himsworth, F. R. (1962). Sequential application of simplex designs in optimisation and evolutionary operation. *Technometrics, 4*(4), 441-461.

100. Brearley, A., Mitra, G. and Williams, H. P. (1975). Analysis of mathematical programming problems prior to applying the simplex algorithm. *Mathematical Programming, 8*(1), 54-83.

101. Dantzig, G. B. and Thapa, M. N. (2003). *Linear programming 2: theory and extensions.* New York: Springer Science and Business Media.

102. Dantzig, G. B. (1963). *Linear Programming and Extensions*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

103. Heath, T. L. (1908). *The thirteen books of Euclid's Elements.* Cambridge: Cambridge University Press.

104. Khamsi, M. A. and Kirk, W. A. (2001). *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory.* Canada: John Wiley and Sons.

105. Alsina, C., Schweizer, B. and Frank, M. J. (2006). *Associative functions: triangular norms and copulas.* Singapore: World Scientific.

106. Klement, E. P., Mesiar, R. and Pap, E. (2000b). Triangular norms: Basic notions and properties. In E. P. Klement and R. Mesiar (Eds.), *Logical, Algebraic, Analytic and Probabilistic Aspects of Triangular Norms*. Amsterdam: Elsevier, pp. 17-60.

107. Klement, E. P., Mesiar, R. and Pap, E. (2000a). *Triangular norms.* Dordrecht: Springer Science and Business Media.

108. Jenei, S. (2000). Structure of left-continuous triangular norms with strong induced negations (I) Rotation construction. *Journal of Applied Non-Classical Logics, 10*(1), 83-92.

109. Jenei, S. (2001). Structure of left-continuous triangular norms with strong induced negations (II) Rotation-annihilation construction. *Journal of Applied Non-Classical Logics, 11*(3-4), 351-366.

110. Jenei, S. (2002). Structure of left-continuous triangular norms with strong induced negations.(III): Construction and decomposition. *Fuzzy Sets and Systems, 128*(2), 197-208.

111. Jenei, S. (2004). How to construct left-continuous triangular norms—state of the art. *Fuzzy Sets and Systems, 143*(1), 27-45.

112. Klement, E. P., Mesiar, R. and Pap, E. (2004a). Triangular norms. Position paper I: basic analytical and algebraic properties. *Fuzzy Sets and Systems, 143*(1), 5-26.

113. Klement, E. P., Mesiar, R. and Pap, E. (2004b). Triangular norms. Position paper II: general constructions and parameterized families. *Fuzzy Sets and Systems, 145*(3), 411-438.

114. Klement, E. P., Mesiar, R. and Pap, E. (2004c). Triangular norms. Position paper III: continuous t-norms. *Fuzzy Sets and Systems, 145*(3), 439-454.

115. Mesiarová, A. (2005). Generators of triangular norms. In E. P. Klement and R. Mesiar (Eds.), *Logical, algebraic, analytic and probabilistic aspects of triangular norms*. Amsterdam: Elsevier, pp. 95-111.

116. Jenei, S. (1997). *Characterization and limit theorems on triangular norms,* Unpublished Ph. D. Thesis, Eotvos Lorand University, Budapest.

117. Navara, M., Petrık, M. and Sarkoci, P. Explicit formulas for generators of triangular norms. *Publicationes Mathematicae Debrecen, 77*(1-2), 171-191.

118. Russell, B. (1903). *Principles of Mathematics.* Cambridge: Cambridge University Press.

119. Russell, B. (1923). Vagueness. *The Australasian Journal of Psychology and Philosophy, 1*(2), 84-92.

120. Aghayi, N. (2017). Cost efficiency measurement with fuzzy data in DEA. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 32*(1), 409-420.

121. Agarwal, S. (2017). Scale efficiency with fuzzy data. *International Journal of Business and Systems Research, 11*(1-2), 152-162.

122. Kleene, S. C., De Bruijn, N., de Groot, J. and Zaanen, A. C. (1952). *Introduction to metamathematics.* New York: van Nostrand.

123. Härlin, M. and Sundberg, P. (1998). Taxonomy and philosophy of names. *Biology and Philosophy, 13*(2), 233-244.

124. Bellman, R. E. and Zadeh, L. A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment. *Management science, 17*(4), 141-164.

125. Zadeh, L. A. (2008). Is there a need for fuzzy logic? *Information Sciences, 178*(13), 2751-2779.

126. Hájek, P. (1998). *Metamathematics of fuzzy logic.* Dordrecht: Springer Science and Business Media.

127. Zadeh, L. A. (2012). Fuzy Logic. In R. A. Meyers (Eds.), *Computational Complexity Theory, Techniques and Applications.* New York: Springer.

128. Zadeh, L. A. (1975). Fuzzy logic and approximate reasoning. *Synthese, 30*(3), 407-428.

129. Dubois, D. and Prade, H. (2015). The legacy of 50 years of fuzzy sets: A discussion. *Fuzzy Sets and Systems, 281*, 21-31.

130. Fodor, J. and Torrens, J. (2015). An overview of fuzzy logic connectives on the unit interval. *Fuzzy Sets and Systems, 281*, 183-187.

131. Bellman, R. and Giertz, M. (1973). On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets. *Information Sciences, 5*, 149-156.

132. Rutkowski, L. (2008). *Computational intelligence: methods and techniques.* Berlin: Springer Verlag.

133. Dubois, D. J. and Prade, H. (1980). *Fuzzy sets and systems: theory and applications.* London: Academic press.

134. Ross, T. J. (2009). *Fuzzy logic with engineering applications.*Singapore: John Wiley and Sons.

135. Ramik, J. (2008). Fuzzy Linear Programming. In W. Pedrycz, A. Skowron and V. Kreinovich (Eds.), *Handbook of granular computing.* Chichester: John Wiley and Sons, pp. 689-718.

136. Pedrycz, W., Skowron, A. and Kreinovich, V. (2008). *Handbook of granular computing.* Chichester: John Wiley and Sons.

137. Ruspini, E. H., Bonissone, P. P. and Pedrycz, W. (1998). *Handbook of fuzzy computation*. Bristol and Philadelphia: Institute of Physics Publishing.

138. Paksoy, T., Pehlivan, N. Y., ve Özceylan, E. (2013). *Bulanık küme teorisi*. Ankara: Nobel Yayınları.

139. Klir, G. and Yuan, B. (1995). *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications*. New Jersey: Prentice Hall.

140. Menger, K. (1942). Statistical metrics. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 28*(12), 535-537.

141. Schweizer, B. and Sklar, A. (1960). Statistical metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics, 10*(1), 313-334.

142. Schweizer, B. and Sklar, A. (2005). *Probabilistic Metric Spaces*. Mineola, New York: Dover Publications Inc.

143. Schweizer, B. (2005). Triangular norms, looking back—triangle functions, looking ahead. In E. P. Klement & R. Mesiar (Eds.), *Logical, Algebraic, Analytic and Probabilistic Aspects of Triangular Norms.* Amsterdam: Elsevier, pp. 3-15.

144. Dubois, D., Prade, H. and Klement, E. P. (2013). *Fuzzy sets, logics and reasoning about knowledge.* Dordrecht: Springer Science and Business Media.

145. Jenei, S. (2005). A survey on left-continuous t-norms and pseudo t-norms. In E.P. Klement, R. Mesiar (Eds.), *Logical, Algebraic, Analytic and Probabilistic Aspects of Triangular Norms.* Amsterdam: Elsevier pp. 113-142.

146. Klement, E. P. and Navara, M. (1999). A survey on different triangular norm-based fuzzy logics. *Fuzzy Sets and Systems, 101*(2), 241-251.

147. Klement, E. P. and Mesiar, R. (2005). *Logical, algebraic, analytic and probabilistic aspects of triangular norms*. Amsterdam: Elsevier.

148. Lowen, R. (1996). *Fuzzy set theory: basic concepts, techniques and bibliography.* Dordrecht: Springer Science and Business Media.

149. Dombi, J. (1982). A general class of fuzzy operators, the DeMorgan class of fuzzy operators and fuzziness measures induced by fuzzy operators. *Fuzzy Sets and Systems, 8*(2), 149-163.

150. Weber, S. (1983). A general concept of fuzzy connectives, negations and implications based on t-norms and t-conorms. *Fuzzy Sets and Systems, 11*(1-3), 115-134.

151. Sugeno, M. (1974). *Theory of fuzzy integrals and its applications,* Unpublished Ph. D. Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo.

152. Bergmann, M. (2008). *An introduction to many-valued and fuzzy logic: semantics, algebras and derivation systems.* Cambridge: Cambridge University Press.

153. Gupta, M. M. and Qi, J. (1991). Theory of T-norms and fuzzy inference methods. *Fuzzy Sets and Systems,* 40(3), 431-450.

154. Mesiar, R., Kolesárová, A. and Komorníková, M. (2015). Aregation Function on [0,1]. In J. Kacprzyk and W. Pedrycz (Eds.), *Springer handbook of computational intelligence*. Berlin: Springer, pp. 61-74.

155. Torra, V. (2010). Aggregation Operators for Evaluating Alternatives. In W. A. Lodwick and J. Kacprzyk (Eds.), *Fuzzy Optimization: Recent Advances and Applications.* Berlin: Springer Verlag, pp. 65-76.

156. Torra, V. and Narukawa, Y. (2007). *Modeling decisions: information fusion and aggregation operators*. New York: Springer Science and Business Media.

157. Calvo, T., Mayor, G. and Mesiar, R. (2002). *Aggregation Operators: New Trends and Applications* New York: Physica-Verlag.

158. Grabisch, M., Marichal, J.-L., Mesiar, R. and Pap, E. (2009). *Aggregation Functions.* Cambridge: Cambridge University Press.

159. James, S. (2016). *An Introduction to Data Analysis using Aggregation Functions in R.* Switzerland: Springer International Publishing.

160. Emrouznejad, A. and Marra, M. (2016). Big Data: Who, What and Where? Social, Cognitive and Journals Map of Big Data Publications with Focus on Optimization. In A. Emrouznejad (Eds.), *Big Data Optimization: Recent Developments and Challenges.* Switzerland: Springer International Publishing, pp. 1-16.

161. Kramosil, I. and Michálek, J. (1975). Fuzzy metrics and statistical metric spaces. *Kybernetika, 11*(5), 336-344.

162. Zadeh, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-III. *Information Sciences, 9*(1), 43-80.

163. Zadeh, L. A., Fu, K.-S. and Tanaka, K. (Editors) (1975). *Fuzzy sets and their applications to cognitive and decision processes: Proceedings of the us–japan seminar on fuzzy sets and their applications, held at the university of california, berkeley, california, july 1-4, 1974.* New York: Academic Press.

164. Zimmermann, H.-J. (1975). Description and optimization of fuzzy systems†. *International Journal Of General System, 2*(1), 209-215.

165. Dubois, D. and Prade, H. (1980). Systems of linear fuzzy constraints. *Fuzzy Sets and Systems, 3*(1), 37-48.

166. Dantzig, G. B. (1982). Reminiscences about the origins of linear programming. *Operations Research Letters, 1*(2), 43-48.

167. Zimmerman, H.-J. (1983). Using fuzzy sets in operational research. *European Journal of Operational Research, 13*(3), 201-216.

168. Verdegay, J. L. (1984). A dual approach to solve the fuzzy linear programming problem. *Fuzzy Sets and Systems, 14*(2), 131-141.

169. Mitra, G., Greenberg, H. J., Lootsma, F. A., Rijckaert, M. J. and Zimmermann, H. J. (1987). *Mathematical models for decision support.* Berlin: Springer Verlag.

170. Zimmermann, H.-J. (1987). *Fuzzy sets, decision making and expert systems* (Vol. 10). Boston: Kluwer Academic Publidhers.

171. Fullér, R. and Zimmermann, H.-J. (1992). On computation of the compositional rule of inference under triangular norms. *Fuzzy Sets and Systems, 51*(3), 267-275.

172. Zimmermann, H.-J. (2012). *Practical applications of fuzzy Technologies.* New York: Springer Science and Business Media.

173. Campos, L. and Verdegay, J. L. (1989). Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems, 32*(1), 1-11.

174. Lodwick, W. A. (1990). Analysis of structure in fuzzy linear programs. *Fuzzy Sets and Systems, 38*(1), 15-26.

175. Fedrizzi, M. and Roubens, M. (1991). *Interactive fuzzy optimization.* Berlin: Springer Verlag.

176. Garcia-Aguado, C. and Verdegay, J. (1993). On the sensitivity of membership functions for fuzzy linear programming problems. *Fuzzy Sets and Systems, 56*(1), 47-49.

177. Herrera, F. and Verdegay, J. L. (1997). Fuzzy sets and operations research: perspectives. *Fuzzy Sets and Systems, 90*(2), 207-218.

178. Lodwick, W. A. and Kacprzyk, J. (2010). *Fuzzy Optimization: Recent Advances and Applications.* Berlin: Springer Verlag.

179. Lodwick, W. A. and Dubois, D. (2015). Interval linear systems as a necessary step in fuzzy linear systems. *Fuzzy Sets and Systems, 281*, 227-251.

180. Esin, A. (1988). *Yöneylem Araştırmasında Yaralanılan Karar Yöntemleri* (Üçüncü Baskı). Ankara: Gazi Üniversitesi.

181. Hillier, F. S. and Lieberman. G. J. (2015). *Introduction to operations research* (Tenth Edition).New York: McGraw-Hill Education.

182. Bal, H. (1995). *Optimizasyon Teknikleri*. Ankara: Gazi Üniversitesi.

183. Wagner, H. M. (1969). *Principles of operations research: with applications to managerial decisions*. United Kingdom: Prentice-Hall.

184. Dombi, J. (1990). Membership function as an evaluation. *Fuzzy Sets and Systems, 35*(1), 1-21.

185. Charnes, A., Cooper, W. W., Lewin, A. Y. and Seiford, L. M. (1994). *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Applications.*New York: Kluwer Academic Publishers.

186. Charnes, A. and Cooper, W. W. (1962). Programming with linear fractional functionals. *Naval Research Logistics Quarterly, 9*(3-4), 181-186.

187. Cooper, W. W., Seiford, L. M. and Tone, K. (2007). *Introduction to data envelopment analysis and its uses: with DEA-solver software and references.* New York: Springer Science and Business Media.

188. Cooper, W. W., Seiford, L. M. and Zhu, J. (2011). *Handbook on data envelopment analysis.* New York: Springer Science and Business Media.

189. Cooper, W. W., Seiford, L. M. and Tone, K. (2000). *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*: Boston: Kluwer Academic Publishers.

190. Farrell, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General), 120*(3), 253-290.

191. Norman, M. and Stoker, B. (1991). *Data envelopment analysis: the assessment of performance.* Chichester: John Wiley and Sons.

192. Fried, H. O., Lovell, C. K. and Schmidt, S. S. (2008). *The Measurement of Productive Efficiency and Productivity Growth.*Oxford: Oxford University Press.

193. Banker, R. D. (1984). Estimating most productive scale size using data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research, 17*(1), 35-44.

194. Thanassoulis, E. (2001). *Introduction to the theory and application of data envelopment analysis.* New York: Springer Science and Business Media.

195. Ray, S. C., Kumbhakar, S. C. and Dua, P. (2015). *Benchmarking for Performance Evaluation: A Production Frontier Approach.* New Delhi: Springer India.

196. Ray, S. C. (2004). *Data envelopment analysis: theory and techniques for economics and operations research.* Cambridge: Cambridge university press.

197. Bogetoft, P. and Otto, L. (2010). *Benchmarking with DEA, SFA and R.* New York: Springer Science and Business Media.

198. Färe, R. and Grosskopf, S. (2002). Two perspectives on DEA: Unveiling the link between CCR and Shephard. *Journal of Productivity Analysis, 17*(1-2), 41-47.

199. Färe, R., Grosskopf, S. and Margaritis, D. (2015a). *Advances in Data Envelopment Analysis.* Singapore: World Scientific.

200. Shephard, R. W. (1970). *Theory of cost and production functions.*USA: Princeton University Press.

201. Färe, R., Grosskopf, S. and Whittaker, G. (2004). Distance Functions with application to DEA. In J. W.W. Cooper, L.M. Seiford, Zue (Eds.), *Handbook on data envelopment analysis.* Boston: Kluwer International Series, pp. 139-152.

202. Färe, R., Grosskopf, S. and Margaritis, D. (2015b). Distance Functions in Primal and Dual Spaces. In J. Zhu (Eds.), *Data Envelopment Analysis A Handbook of Models and Methods.* New York: Springer, pp. 1-21.

203. Pastor, J. T. and Aparicio, J. (2015). Multiplicative and Additive Distance Functions: Efficiency Measures and Duality. In S. C. Ray, S. C. Kumbhakar, P. Dula (Eds.), *Benchmarking for Performance Evaluation.* Delhi, Springer India, pp. 251-281.

204. Karsak, E. E. (2008). Using data envelopment analysis for evaluating flexible manufacturing systems in the presence of imprecise data. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 35*(9-10), 867-874.

205. Emrouznejad, A. and Tavana, M. (2014). *Performance measurement with fuzzy data envelopment analysis.* Berlin: Springer Verlag.

206. Sengupta, J. K. (1992b). Measuring efficiency by a fuzzy statistical approach. *Fuzzy Sets and Systems, 46*(1), 73-80.

207. Sengupta, J. K. (1992a). A fuzzy systems approach in data envelopment analysis. *Computers and Mathematics with Applications, 24*(8), 259-266.

208. Sengupta, J. (1993). *Econometrics of Information and Efficiency* (Vol. 25): Springer Science and Business Media.

209. Sengupta, J. K. (1995). *Dynamics of Data Envelopment Analysis.* Dordrecht: Springer Science and Business Media.

210. Kahraman, C. and Tolga, E. (1998, May). *Data envelopment analysis using fuzzy concept.* Paper presented at The 28th International Symposium on Multiple-Valued Logic, Fukuoka, Japan.

211. Carlsson, C. and Korhonen, P. (1986). A parametric approach to fuzzy linear programming. *Fuzzy Sets and Systems, 20*(1), 17-30.

212. Girod, O. A. and Triantis, K. P. (1999). The evaluation of productive efficiency using a fuzzy mathematical programming approach: the case of the newspaper preprint insertion process. *IEEE Transactions on Engineering Management, 46*(4), 429-443.

213. Triantis, K. and Girod, O. (1998). A mathematical programming approach for measuring technical efficiency in a fuzzy environment. *Journal of Productivity Analysis, 10*(1), 85-102.

214. Kao, C. and Liu, S.-T. (2000). Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis. *Fuzzy Sets and Systems, 113*(3), 427-437.

215. Kao, C. and Liu, S.-T. (2000). Data envelopment analysis with missing data: an application to university libraries in Taiwan. *Journal of the Operational Research Society, 51*(8), 897-905.

216. Guo, P. and Tanaka, H. (2001). Fuzzy DEA: a perceptual evaluation method. *Fuzzy Sets and Systems, 119*(1), 149-160.

217. Lertworasirikul, S. (2002). *Fuzzy Data Envelopment Analysis (DEA).* Unpublished Ph. D. Thesis, North Carolina State University, Raleigh.

218. Zadeh, L. A. (1999b). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems, 100*, 9-34.

219. Dubois, D., & Prade, H. (1986). *Possibility theory: an approach to computerized processing of uncertainty.*New York: Plennum Press.

220. Dubois, D. and Prade, H. (2001). Possibility Theory, Probability Theory and Multiple-Valued Logics: A Clarification. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, 32*(1), 35-66.

221. Guo, P., Tanaka, H. and Inuiguchi, M. (2000). Self-organizing fuzzy aggregation models to rank the objects with multiple attributes. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part A: Systems and Humans, 30*(5), 573-580.

222. Alp, İ. (2002). Possibilistic data envelopment analysis. *Mathematical and Computational Applications, 7*(1), 5-14.

223. Lertworasirikul, S., Fangn, S. C., Joines, J. A. and Nuttle, H. L. W. (2002, March). *A Possibility Approach to Fuzzy Data Envelopment Analysis.* Paper presented at the 6th Joint Conference on Information Sciences, JCIS 2002, Research Triange Park, North Carolina, USA.

224. Lertworasirikul, S., Fang, S. C., Joines, J. A. and Nuttle, H. L. W. (2003). Fuzzy data envelopment analysis (DEA): A possibility approach. *Fuzzy Sets and Systems, 139*(2), 379-394.

225. Lertworasirikul, S., Fang, S. C., Nuttle, H. L. W. and Joines, J. A. (2003). Fuzzy BCC model for data envelopment analysis. *Fuzzy Optimization and Decision Making, 2*(4), 337-358.

226. Lertworasirikul, S., Fang, S.-C., Joines, J. A. and Nuttle, H. L. (2003). Fuzzy data envelopment analysis: A credibility approach. In J.-L. Verdegay (Eds.), *Fuzzy sets based heuristics for optimization.* Berlin: Springer, pp. 141-158.

227. Wang, Y.-M., Greatbanks, R. and Yang, J.-B. (2005). Interval efficiency assessment using data envelopment analysis. *Fuzzy Sets and Systems, 153*(3), 347-370.

228. Wang, Y.-M., Luo, Y. and Liang, L. (2009). Fuzzy data envelopment analysis based upon fuzzy arithmetic with an application to performance assessment of manufacturing enterprises. *Expert systems with applications, 36*(3), 5205-5211.

229. Qin, R., Liu, Y., Liu, Z. and Wang, G. (2009, May). *Modeling fuzzy DEA with Type-2 fuzzy variable coefficients.* Paper presented at the The Sixth International Symposium on Neural Networks, Wuhan, China.

230. Qin, R., Liu, Y. and Liu, Z.-Q. (2011). Modeling fuzzy data envelopment analysis by parametric programming method. *Expert systems with applications, 38*(7), 8648-8663.

231. Qin, R. and Liu, Y.-K. (2010a). Modeling data envelopment analysis by chance method in hybrid uncertain environments. *Mathematics and Computers in Simulation, 80*(5), 922-950.

232. Qin, R. and Liu, Y.-K. (2010b). A new data envelopment analysis model with fuzzy random inputs and outputs. *Journal of Applied Mathematics and Computing, 33*(1-2), 327-356.

233. Angiz L, M. Z., Emrouznejad, A., Mustafa, A. and Al-Eraqi, A. S. (2010). Aggregating preference ranking with fuzzy Data Envelopment Analysis. *Knowledge-Based Systems, 23*(6), 512-519.

234. Zerafat Angiz L, M. and Mustafa, A. (2013). Fuzzy interpretation of efficiency in data envelopment analysis and its application in a non-discretionary model. *Knowledge-Based Systems*, 49, 145-151.

235. Zerafat Angiz, M., Tajaddini, A., Mustafa, A. and Jalal Kamali, M. (2012). Ranking alternatives in a preferential voting system using fuzzy concepts and data envelopment analysis. *Computers and Industrial Engineering, 63*(4), 784-790.

236. Zerafat Angiz L, M., Mustafa, A. and Emrouznejad, A. (2010). Ranking efficient decision-making units in data envelopment analysis using fuzzy concept. *Computers and Industrial Engineering, 59*(4), 712-719.

237. Zerafat Angiz, M., Saati, S., Memariani, A., & Movahedi, M. (2006). Solving possibilistic linear programming problem considering membership function of the coefficients. *Fuzzy Sets and Systems, 1*(2), 131-142.

238. Shen, Y., Hermans, E., Brijs, T., & Wets, G. (2014). Fuzzy data envelopment analysis in composite indicator construction. In A. Emrouznejad and M. Tavana (Eds.), *Performance Measurement with Fuzzy Data Envelopment Analysis.* Berlin: Springer, pp. 89-100.

239. Kao, C. (2014). Network data envelopment analysis with fuzzy data. In A. Emrouznejad and M. Tavana (Eds.), *Performance Measurement with Fuzzy Data Envelopment Analysis.* Berlin: Springer, pp. 191-206.

240. Lozano, S. and Moreno, P. (2014). Network fuzzy data envelopment analysis. In A. Emrouznejad and M. Tavana (Eds.), *Performance Measurement with Fuzzy Data Envelopment Analysis.* Berlin: Spirnger, pp. 207-230.

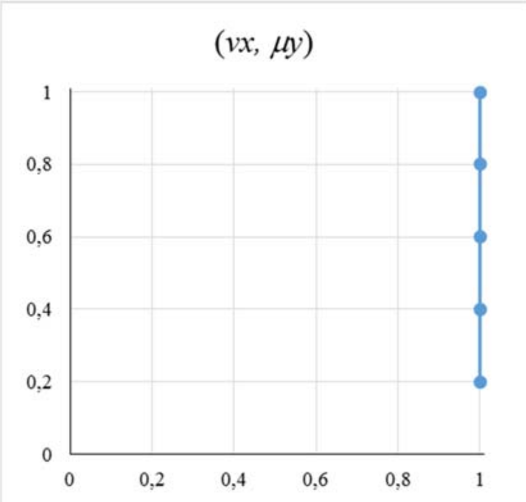
241. Strang, G. (2006). *Linear Algebra and Its applicaitons* (Fourth Edition). Belmont, USA: Thomson Brooks/Cole.

242. Chen, Y. and Ali, A. I. (2002). Output–input ratio analysis and DEA frontier. *European Journal of Operational Research, 142*(3), 476-479.

EKLER

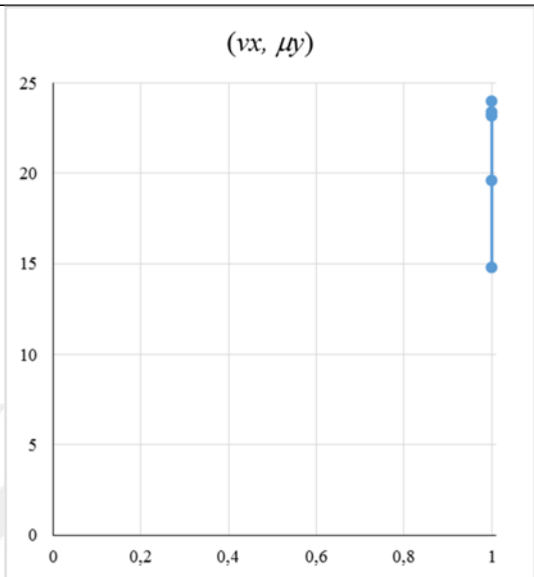
EK-1. Girdi yönlü örnek model sonuçlarının grafikleri

Girdi yönlü klasik CCR (1)



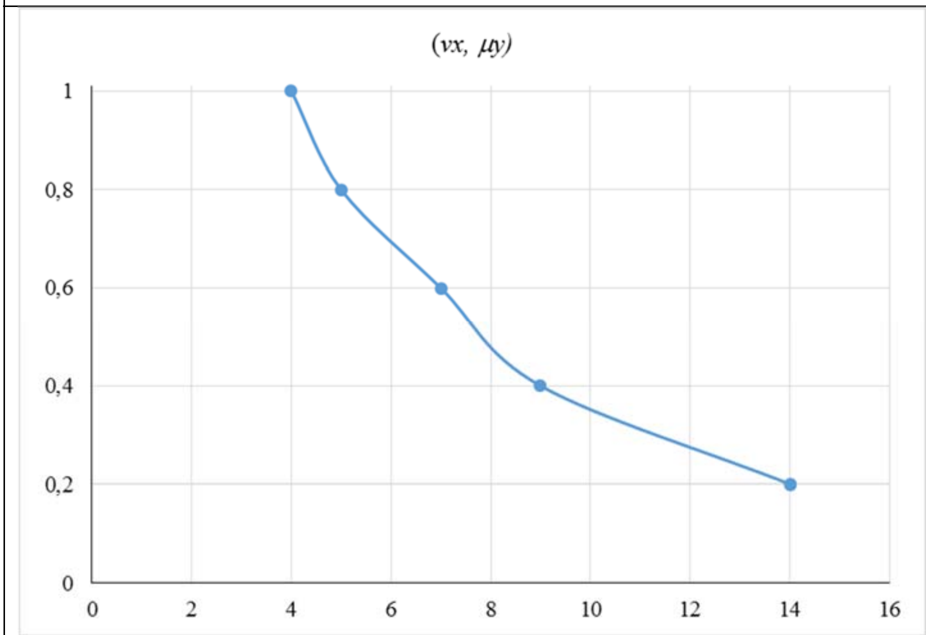
Şekil 5.3. Girdi yönlü klasik CCR modeli (1) için (vx, μy) grafiği

CCR (1-μ) modeli (2)



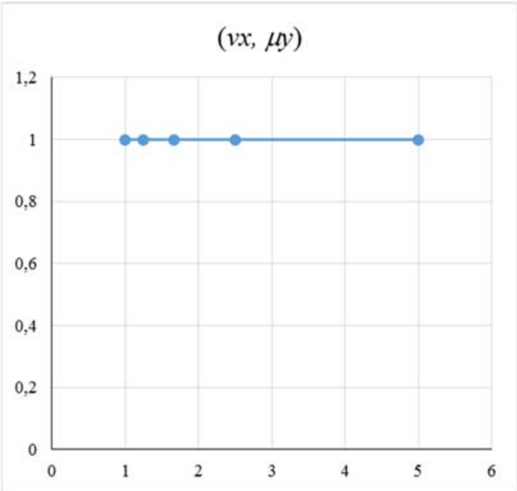
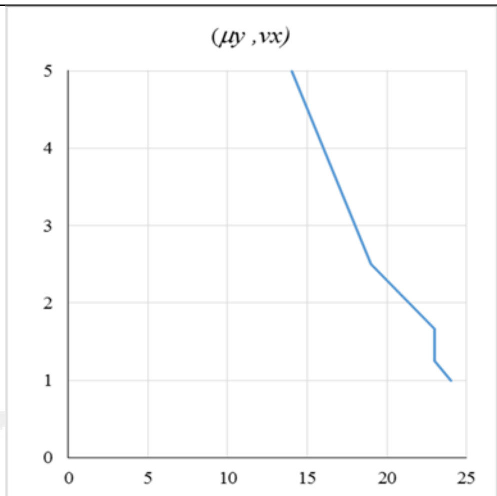
Şekil 5.4. Girdi yönlü CCR (1-μ) modeli (2) için (vx, μy) grafiği

CCR (1-v) modeli (3)

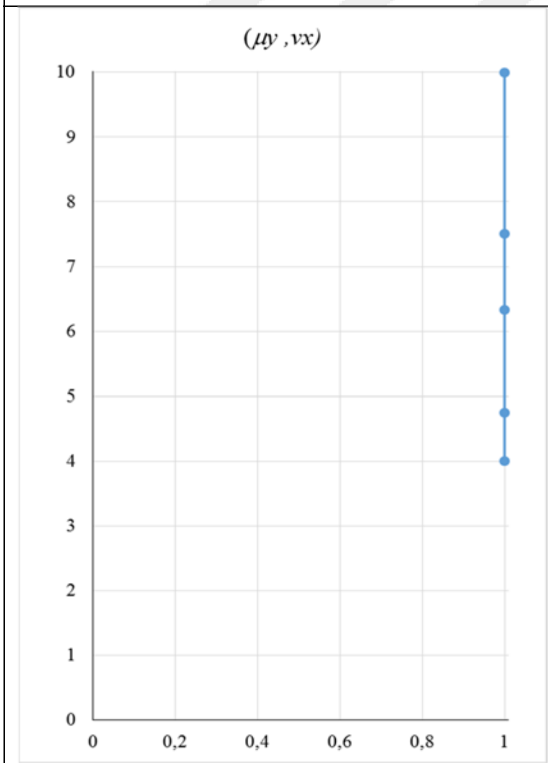


Şekil 5.5. Girdi yönlü CCR (1-v) modeli (2) için (vx, μy) grafiği

EK-2. Çıktı yönlü örnek model sonuçlarının grafikleri

Çıktı yönlü klasik CCR (4)	CCR (1-μ) modeli (5)
 Şekil 5.6. Çıktı yönlü klasik CCR modeli (4) için (vx, μy) grafiği	 Şekil 5.7. Girdi yönlü CCR (1-μ) modeli (5) için (vx, μy) grafiği

CCR (1-v) modeli (6)



Şekil 5.8. Çıktı yönlü CCR (1-v) modeli (6) için (vx, μy) grafiği

EK-3. Çizelge 5.8. Gerçek veri ile bir deneme örneği sonuçları (Bölüm 5.4.4)

Sıra no	Ülke	VERİLER				MODEL 1				MODEL 2				MODEL3				MODEL4			
		Y1	Y2	X1	X2	Etkinlik Skoru	$v2*x2$	$v1*x1$	$\mu1*y1$	Etkinlik Skoru	$v1*x1$	$v2*x2$	$\mu1*y1$	Etkinlik Skoru	$\mu1*y1$	$\mu2*y2$	$v1*x1$	Etkinlik Skoru	$\mu1*y1$	$\mu2*y2$	$v1*x1$
1	Almanya	161,860	978,143	335,928	151,594	0,801	0,250	0,750	0,801	0,801	0,750	0,250	161,060	0,290	0,135	0,155	1,000	0,290	0,135	0,155	3358,280
2	Avusturya	22,776	141,848	44,601	131,235	0,356	0,685	0,315	0,356	0,356	0,315	0,685	22,420	0,312	0,143	0,169	1,000	0,312	0,143	0,169	445,010
3	Belçika	30,851	217,137	42,981	137,747	0,488	0,003	0,997	0,488	0,488	0,997	0,003	30,363	0,470	0,201	0,268	1,000	0,470	0,201	0,268	428,810
4	Birleşik Krallık	187,005	3660,261	355,060	80,164	1,000	1,000	0,000	1,000	1,000	0,000	1,000	186,005	0,933	0,000	0,933	1,000	0,933	0,000	0,933	3549,600
5	Çek Cumhuriyeti	20,123	85,198	32,173	95,724	0,433	0,687	0,313	0,433	0,433	0,313	0,687	19,690	0,357	0,357	0,000	1,000	0,357	0,357	0,000	320,730
6	Danimarka	23,216	174,835	37,539	99,041	0,464	0,661	0,339	0,464	0,464	0,339	0,661	22,752	0,421	0,000	0,421	1,000	0,421	0,000	0,421	374,390
7	Estonya	2,698	18,115	6,247	57,771	0,292	0,009	0,991	0,292	0,292	0,991	0,009	2,406	0,275	0,121	0,154	1,000	0,275	0,121	0,154	61,470
8	Finlandiya	18,376	111,803	29,157	101,806	0,428	0,004	0,996	0,428	0,428	0,996	0,004	17,948	0,381	0,177	0,204	1,000	0,381	0,177	0,204	290,570
9	Fransa	117,720	658,824	172,700	125,714	0,982	0,350	0,650	0,982	0,982	0,650	0,350	116,738	0,394	0,191	0,203	1,000	0,394	0,191	0,203	1726,000
10	Hollanda	55,346	415,986	37,629	114,993	1,000	0,003	0,997	1,000	1,000	0,997	0,003	54,346	1,000	0,000	1,000	1,000	1,000	0,000	1,000	375,290
11	İrlanda	12,724	76,403	15,281	110,309	0,564	0,007	0,993	0,564	0,564	0,993	0,007	12,160	0,499	0,234	0,266	1,000	0,499	0,234	0,266	151,810
12	İspanya	84,720	458,703	150,582	73,472	0,916	0,265	0,735	0,916	0,916	0,735	0,265	83,804	0,322	0,322	0,000	1,000	0,322	0,322	0,000	1504,820
13	İsveç	36,057	249,723	55,365	112,857	0,576	0,601	0,399	0,576	0,576	0,399	0,601	35,481	0,422	0,183	0,240	1,000	0,422	0,183	0,240	552,650
14	İtalya	100,627	583,537	141,580	129,555	0,939	0,403	0,597	0,939	0,939	0,597	0,403	99,688	0,418	0,199	0,219	1,000	0,418	0,199	0,219	1414,800
15	İzlanda	1,374	12,482	2,477	65,792	0,368	0,026	0,974	0,368	0,368	0,974	0,026	1,006	0,456	0,000	0,456	1,000	0,456	0,000	0,456	23,770
16	Japonya	130,490	538,258	388,831	158,463	0,571	0,231	0,769	0,571	0,571	0,769	0,231	129,919	0,192	0,192	0,000	1,000	0,192	0,192	0,000	3887,310
17	Kore	74,105	333,144	181,284	157,360	0,552	0,391	0,609	0,552	0,552	0,609	0,391	73,553	0,234	0,234	0,000	1,000	0,234	0,234	0,000	1811,840
18	Latviya	1,649	4,752	6,929	28,937	0,162	0,004	0,996	0,162	0,162	0,996	0,004	1,487	0,136	0,136	0,000	1,000	0,136	0,136	0,000	68,290
19	Lüksenburg	1,636	8,960	0,935	179,438	1,000	0,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,000	0,636	1,000	1,000	0,000	1,000	1,000	1,000	0,000	8,350
20	Macaristan	10,089	47,344	23,112	65,117	0,314	0,676	0,324	0,314	0,314	0,324	0,676	9,775	0,249	0,249	0,000	1,000	0,249	0,249	0,000	230,120
21	Norveç	18,736	113,063	30,583	84,652	0,446	0,672	0,328	0,446	0,446	0,328	0,672	18,290	0,368	0,172	0,196	1,000	0,368	0,172	0,196	304,830
22	Polonya	37,390	138,644	80,223	56,927	0,677	0,344	0,656	0,677	0,677	0,656	0,344	36,713	0,266	0,266	0,000	1,000	0,266	0,266	0,000	801,230
23	Portekiz	21,813	106,243	55,707	37,726	0,578	0,334	0,666	0,578	0,578	0,666	0,334	21,235	0,224	0,224	0,000	1,000	0,224	0,224	0,000	556,070
24	Slovakya	6,589	21,584	18,465	40,156	0,303	0,616	0,384	0,303	0,303	0,384	0,616	6,286	0,204	0,204	0,000	1,000	0,204	0,204	0,000	183,650
25	Slovenya	5,921	25,627	5,494	108,445	0,721	0,019	0,981	0,721	0,721	0,981	0,019	5,200	0,616	0,616	0,000	1,000	0,616	0,616	0,000	53,940
26	Şili	9,132	44,098	11,058	115,049	0,557	0,010	0,990	0,557	0,557	0,990	0,010	8,575	0,472	0,472	0,000	1,000	0,472	0,472	0,000	109,580
27	Türkiye	39,327	109,565	113,409	60,178	0,552	0,282	0,718	0,552	0,552	0,718	0,282	38,775	0,198	0,198	0,000	1,000	0,198	0,198	0,000	1133,090
28	Yeni Zellanda	14,163	75,327	25,000	47,993	0,519	0,587	0,413	0,519	0,519	0,413	0,587	13,644	0,324	0,324	0,000	1,000	0,324	0,324	0,000	249,000
29	Yunanistan	18,473	93,049	54,602	33,836	0,514	0,314	0,686	0,514	0,514	0,686	0,314	17,959	0,193	0,193	0,000	1,000	0,193	0,193	0,000	545,020

Y1: Toplam Yayın Sayısı (1000), Y2: Atıf Sayısı (1000), X1: Yükseköğretimdeki Toplam Araştırmacı Sayısı (1000), X2: Yükseköğretimde Araştırmacı Başına Harcama (1000 ABD $)

EK 4. Çizelge 5.9. UNESCO eğitim istatistikleri girdi yönlü önerilen VZA model sonuçları

Ülke	CCR Sonuç	μ_{k1}	v_{k1}	v_{k2}	v_{k3}	v_{k4}	v_{k5}	$\mu_1 \times y_1$	$v_1 \times x_1$	$v_2 \times x_2$	$v_3 \times x_3$	$v_4 \times x_4$	$v_5 \times x_5$
Almanya	0,4074687	2,51741E-06	2,4E-06	0	0	1,5E-06	2,2956E-08	0,40746863	0,616456042	0	0	0,040662294	0,342881517
Avusturya	0,4240729	1,86193E-05	1,7E-05	0	0	1,1E-05	1,6979E-07	0,424072949	0,588641357	0	0	0,024178443	0,387180387
Azerbaycan	1	0,001315789	0	0,00436	0	0,0012	4,0657E-05	0,99999964	0	0,187583673	0	0,332123772	0,480292621
Beyaz Eusya	0,5684735	0,000334003	0,0004	0	0	1,8E-05	2,3889E-06	0,568473617	0,727840673	0	0	0,020963203	0,251196044
Bosna Hersek	0,5834307	0,000764654	0,0007	0,00086	0	0,00013	6,5484E-06	0,583430621	0,686619637	0,068695	0	0,02659482	0,21809057
Çek Cumhuriyeti	0,5727752	2,84637E-05	2,7E-05	0	0	1,7E-05	2,5956E-07	0,572775236	0,611535683	0	0	0,040372083	0,348092227
Danimarka	0,5306001	2,28549E-05	2,1E-05	0	0	1,3E-05	2,0841E-07	0,530600055	0,579220078	0	0	0,025155297	0,395624435
Ermenistan	1	0,000967118	0	0	0	0,00221	3,3422E-05	1,000000012	0	0	0	0,831878398	0,168121611
Estonya	0,4285755	0,000158849	0,00015	0	0	9,3E-05	1,4485E-06	0,428575411	0,712389262	0	0	0,02157689	0,266033825
Filipinler	0,4324684	0,000229914	0	0,00565	0	0	0	0,432468422	0	1,000000086	0	0	0
Fransa	0,5854108	4,97291E-06	4,7E-06	0	0	2,9E-06	4,5348E-08	0,585410847	0,526171028	0	0	0,038902567	0,434926458
Gürcistan	0,5605166	0,000579046	0	0	0	0,00132	2,0011E-05	0,560516625	0	0	0	0,5363869	0,463613006
Hollanda	1	1,80682E-05	2,6E-05	0	0	0	8,749E-08	0,99999983	0,643107345	0	0	0	0,356892777
İrlanda	0,7589292	5,96455E-05	5,4E-05	6,7E-05	0	9,9E-06	5,1079E-07	0,758929215	0,604408069	0,066243655	0	0,015133845	0,314214423
İspanya	0,5441453	6,42287E-06	6E-06	0	0	3,7E-06	5,857E-08	0,544145292	0,708842812	0	0	0,039330652	0,251826563
Japonya	0,3503274	2,68471E-06	0	6,6E-05	0	0	0	0,350327416	0	0,999999938	0	0	0
Kazakistan	0,2616652	0,000145289	0	0	0	0,00033	5,0209E-06	0,261665129	0	0	0	0,081878178	0,918121896
Kıbrıs (Güney)	1	0,000496278	0	0	0	0,00113	1,715E-05	0,999999969	0	0	0	0,058879912	0,941120105
Kore (Güney)	0,4848123	6,54223E-06	6,1E-06	0	0	3,8E-06	5,9658E-08	0,484812251	0,595852608	0	0	0,048150967	0,355996385
Kosra Rika	0,1941892	0,000280215	0	0	0	0,00646	4,1722E-06	0,194189203	0	0	0	0,48416055	0,515839508
Lüksenburg	1	0,000611247	0,00057	0	0	0,00036	5,5739E-06	0,999999928	0,473655082	0	0	0,022805741	0,503539173
Macaristan	0,6871402	6,81079E-05	0	0	0	0,00016	2,3537E-06	0,6871402	0	0	0	0,166116934	0,833883099
Malta	0,5397866	0,000976106	0	0	0	0,02249	1,4534E-05	0,539786673	0	0	0	0,53969016	0,460309697
Moldova	0,7360516	0,001804048	3,4E-05	0,00907	0	0	7,4978E-05	0,736051584	0,032325009	0,57155301	0	0	0,396122006
Polonya	0,5223642	1,39707E-05	0	0	0	3,2E-05	4,828E-07	0,522364099	0	0	0	0,118544985	0,881454984
Portekiz	0,8377771	3,84072E-05	0	0	0,0006	0	5,617E-07	0,837777126	0	0	0,259355468	0	0,740644524
Romanya	1	6,68762E-05	7,7E-07	0,00024	0	5,2E-05	2,0251E-06	0,999999968	0,011471371	0,325496339	0	0,279971448	0,383060796
Rusya Federasyonu	0,6941246	1,45385E-05	1,7E-05	0	0	7,7E-07	1,0398E-07	0,694124712	0,737991029	0	0	0,027966271	0,234042591
Sırbistan	0,6172741	8,27556E-05	0	0	0	0,00019	2,8599E-06	0,617274095	0	0	0	0,14161125	0,858388742
Slovakya	0,9321823	0,000141476	0	0,00015	0,00167	0	2,0463E-06	0,93218207	0	0,05789019	0,277280756	0	0,66482909
Slovenya	1	0,00016889	0	0	0,00105	0,00014	4,2342E-06	1,000000058	0	0	0,261637746	0,15886674	0,579495441
Şili	0,8814271	9,65207E-05	9E-05	0	0	5,6E-05	8,8016E-07	0,881427124	0,576581177	0	0	0,033367428	0,390051384
Ukrayna	1	0,000101338	0	0,00045	0,0001	2E-05	2,8439E-06	1,000000424	0	0,288572912	0,083424085	0,176963791	0,451039211
Umman	1	0,000786164	0,00068	0	0	0,00515	4,3663E-06	0,999999972	0,633408102	0	0	0,0205995	0,345992454
Yeni Zellanda	0,7992334	5,64311E-05	0	0	0	0,00013	1,9501E-06	0,799233386	0	0	0	0,165576358	0,834423684

K: klasik, Ö: önerilen , μ: çıktı ağırlığı, v: girdi ağırlığı

EK 4. (Devam) Çizelge 5.10. UNESCO eğitim istatistikleri girdi yönlü klasik VZA model sonuçları

Ülke	CCR Sonucu	$\mu_{ö1}$	$v_{ö1}$	$v_{ö2}$	$v_{ö3}$	$v_{ö4}$	$v_{ö5}$	$\mu_1 \times y_1$	$v_1 \times x_1$	$v_2 \times x_2$	$v_3 \times x_3$	$v_4 \times x_4$	$v_5 \times x_5$
Almanya	0,4074687	0,999998	2,36E-06	0	0	1,47E-06	2,30E-08	161859,5954	0,616456042	0	0	0,040662294	0,342881517
Avusturya	0,4240729	0,999981	1,74E-05	0	0	1,09E-05	1,70E-07	22775,57637	0,588641357	0	0	0,024178443	0,387180387
Azerbaycan	1	0,998684	0	4,36E-03	0	1,20E-03	4,07E-05	758,999992	0	0,187583673	0	0,332123772	0,480292621
Beyaz Eusya	0,5684735	0,999666	3,98E-04	0	0	1,76E-05	2,39E-06	1701,431532	0,727840673	0	0	0,020963203	0,251196044
Bosna Hersek	0,5834307	0,999235	6,96E-04	8,59E-04	0	1,27E-04	6,55E-06	762,4165339	0,686619637	0,068695	0	0,02659482	0,21809057
Çek Cumhuriyeti	0,5727752	0,999972	2,66E-05	0	0	1,66E-05	2,60E-07	20122,42649	0,611535683	0	0	0,040372083	0,348092227
Danimarka	0,5306001	0,999977	2,14E-05	0	0	1,33E-05	2,08E-07	23215,46835	0,579220078	0	0	0,025155297	0,395624435
Ermenistan	1	0,999033	0	0	0	2,21E-03	3,34E-05	1033,000019	0	0	0	0,831878398	0,168121611
Estonya	0,4285755	0,999841	1,49E-04	0	0	9,26E-05	1,45E-06	2697,571558	0,712389262	0	0	0,02157689	0,266033825
Filipinler	0,4324684	0,99977	0	5,65E-03	0	0	0	1880,567558	0	1,000000086	0	0	0
Fransa	0,5854108	0,999995	4,65E-06	0	0	2,90E-06	4,53E-08	117719,4114	0,526171028	0	0	0,038902567	0,434926458
Gürcistan	0,5605166	0,999421	0	0	0	1,32E-03	2,00E-05	967,439528	0	0	0	0,5363869	0,463613006
Hollanda	1	0,999982	1,43E-05	1,00E-04	0	-9,49E-08	9,91E-08	55344,99824	0,352451595	0,24354534	0	-0,000410031	0,404413281
İrlanda	0,7589292	0,99994	5,43E-05	6,70E-05	0	9,88E-06	5,11E-07	12723,24165	0,604408069	0,066243655	0	0,015133845	0,314214423
İspanya	0,5441453	0,999994	6,01E-06	0	0	3,74E-06	5,86E-08	84719,45779	0,708842812	0	0	0,039330652	0,251826563
Japonya	0,3503274	0,999997	0	6,60E-05	0	0	0	130489,6477	0	0,999999938	0	0	0
Kazakistan	0,2616652	0,999855	0	0	0	3,31E-04	5,02E-06	1800,738315	0	0	0	0,081878178	0,918121896
Kıbrıs (Güney)	1	0,999504	0	0	0	1,13E-03	1,72E-05	2013,999956	0	0	0	0,058879912	0,941120105
Kore (Güney)	0,4848123	0,999994	6,12E-06	0	0	3,81E-06	5,97E-08	74104,51832	0,595852608	0	0	0,048150967	0,355996385
Kosra Rika	0,1941892	0,99972	0	0	0	6,46E-03	4,17E-06	692,8058214	0	0	0	0,48416055	0,515839508
Lüksenburg	1	0,999389	5,57E-04	6,86E-04	0	1,01E-04	5,23E-06	1635,000077	0,460915805	0,059718157	0	0,006479027	0,472887008
Macaristan	0,6871402	0,999932	0	0	0	1,55E-04	2,35E-06	10088,31294	0	0	0	0,166116934	0,833883099
Malta	0,5397866	0,999024	0	0	0	2,25E-02	1,45E-05	552,4602167	0	0	0	0,53969016	0,460309697
Moldova	0,7360516	0,998196	3,36E-05	9,07E-03	0	0	7,50E-05	407,263968	0,032325009	0,57155301	0	0	0,396122006
Polonya	0,5223642	0,999986	0	0	0	3,19E-05	4,83E-07	37389,47654	0	0	0	0,118544985	0,881454984
Portekiz	0,8377771	0,999962	0	0	6,05E-04	0	5,62E-07	21812,16238	0	0	0,259355468	0	0,740644524
Romanya	1	0,999933	7,71E-07	2,40E-04	0	5,21E-05	2,03E-06	14951,99964	0,011471371	0,325496339	0	0,279971448	0,383060796
Rusya Federasyonu	0,6941246	0,999986	1,73E-05	0	0	7,66E-07	1,04E-07	47743,30771	0,737991029	0	0	0,027966271	0,234042591
Sırbistan	0,6172741	0,999917	0	0	0	1,89E-04	2,86E-06	7458,382395	0	0	0	0,14161125	0,858388742
Slovakya	0,9321823	0,999859	0	1,52E-04	1,67E-03	0	2,05E-06	6588,067657	0	0,05789019	0,277280756	0	0,66482909
Slovenya	1	0,999831	1,54E-04	0	5,62E-05	9,29E-05	1,57E-06	5919,999943	0,662769819	0	0,013995232	0,108248084	0,214986799
Şili	0,8814271	0,999904	9,03E-05	0	0	5,63E-05	8,80E-07	9131,118762	0,576581177	0	0	0,033367428	0,390051384
Ukrayna	1	0,999899	0	5,96E-04	3,87E-05	1,72E-05	2,75E-06	9867,000372	0	0,379600594	0,031088839	0,153685647	0,435624905
Umman	1	0,999214	6,79E-04	0	0	5,15E-03	4,37E-06	1270,999954	0,633408102	0	0	0,0205995	0,345992454
Yeni Zellanda	0,7992334	0,999944	0	0	0	1,29E-04	1,95E-06	14162,20121	0	0	0	0,165576358	0,834423684

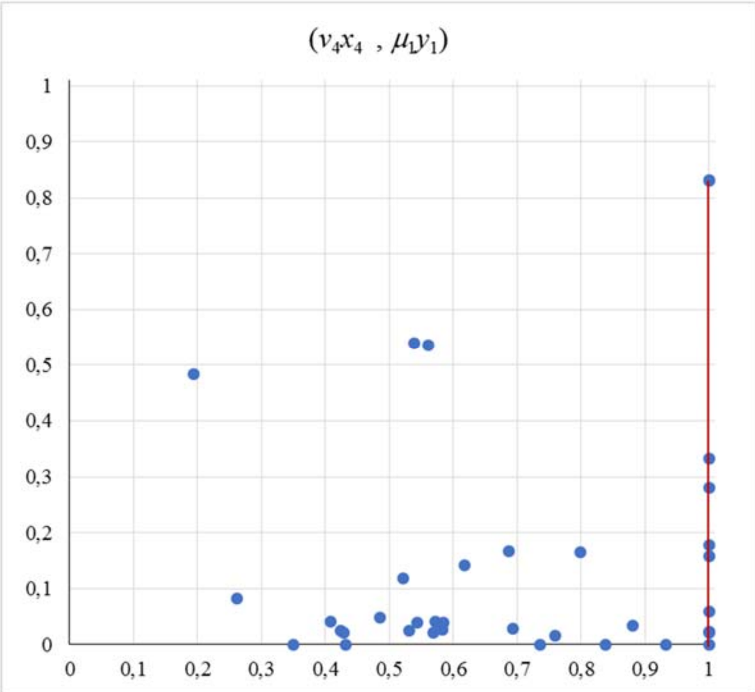
K: klasik, Ö: önerilen , μ: çıktı ağırlığı, v: girdi ağırlığı

EK 5. Çizelge 5.11. UNESCO eğitim istatistikleri çıktı yönlü klasik ve önerilen VZA model sonuçları

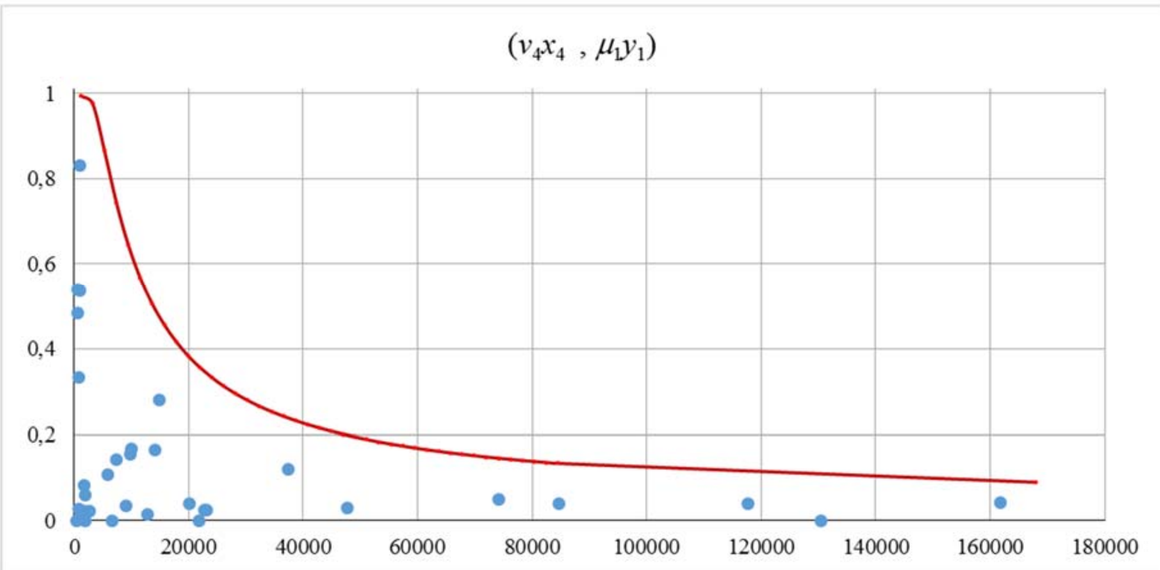
Ülke	model sonucu	CCR Skoru	μ_{k1}	v_{k1}	v_{k2}	v_{k3}	v_{k4}	v_{k5}	$\mu_{ö1}$	$v_{ö1}$	$v_{ö2}$	$v_{ö3}$	$v_{ö4}$	$v_{ö5}$
Almanya	2,454176	0,40747	2,52E-06	2,36E-06	0	0	1,47E-06	2,3E-08	0,999998	2,36E-06	0	0	1,47E-06	2,30E-08
Avusturya	2,358085	0,42407	1,86E-05	1,74E-05	0	0	1,09E-05	1,7E-07	0,999981	1,74E-05	0	0	1,09E-05	1,70E-07
Azerbaycan	1	1	0,001316	0	0,004362	0	0,001203	4,07E-05	0,998684	0	4,36E-03	0	1,20E-03	4,07E-05
Beyaz Eusya	1,759097	0,56847	0,000334	0,000398	0	0	1,76E-05	2,39E-06	0,999666	3,98E-04	0	0	1,76E-05	2,39E-06
Bosna Hersek	1,714	0,58343	0,000765	0,000696	0,000859	0	0,000127	6,55E-06	0,999235	6,96E-04	8,59E-04	0	1,27E-04	6,55E-06
Çek Cumhuriyeti	1,745886	0,57278	2,85E-05	2,66E-05	0	0	1,66E-05	2,6E-07	0,999972	2,66E-05	0	0	1,66E-05	2,60E-07
Danimarka	1,884659	0,5306	2,29E-05	2,14E-05	0	0	1,33E-05	2,08E-07	0,999977	2,14E-05	0	0	1,33E-05	2,08E-07
Ermenistan	1	1	0,000967	0	0	0	0,002207	3,34E-05	0,999033	0	0	0	2,21E-03	3,34E-05
Estonya	2,333311	0,42858	0,000159	0,000149	0	0	9,26E-05	1,45E-06	0,999841	1,49E-04	0	0	9,26E-05	1,45E-06
Filipinler	2,312308	0,43247	0,00023	0	0,00565	0	0	0	0,99977	0	5,65E-03	0	0	0
Fransa	1,708202	0,58541	4,97E-06	4,65E-06	0	0	2,9E-06	4,53E-08	0,999995	4,65E-06	0	0	2,90E-06	4,53E-08
Gürcistan	1,784068	0,56052	0,000579	0	0	0	0,001321	2E-05	0,999421	0	0	0	1,32E-03	2,00E-05
Hollanda	1	1	1,81E-05	2,62E-05	0	0	0	8,75E-08	0,999982	1,43E-05	1,00E-04	0	-9,49E-08	9,91E-08
İrlanda	1,317646	0,75893	5,96E-05	5,43E-05	6,7E-05	0	9,88E-06	5,11E-07	0,99994	5,43E-05	6,70E-05	0	9,88E-06	5,11E-07
İspanya	1,837745	0,54415	6,42E-06	6,01E-06	0	0	3,74E-06	5,86E-08	0,999994	6,01E-06	0	0	3,74E-06	5,86E-08
Japonya	2,854473	0,35033	2,68E-06	0	6,6E-05	0	0	0	0,999997	0	6,60E-05	0	0	0
Kazakistan	3,821678	0,26167	0,000145	0	0	0	0,000331	5,02E-06	0,999855	0	0	0	3,31E-04	5,02E-06
Kıbrıs (Güney)	1	1	0,000496	0	0	0	0,001132	1,72E-05	0,999504	0	0	0	1,13E-03	1,72E-05
Kore (Güney)	2,062654	0,48481	6,54E-06	6,12E-06	0	0	3,81E-06	5,97E-08	0,999994	6,12E-06	0	0	3,81E-06	5,97E-08
Kosra Rika	5,149617	0,19419	0,00028	0	0	0	0,006455	4,17E-06	0,99972	0	0	0	6,46E-03	4,17E-06
Lüksenburg	1	1	0,000611	0,000572	0	0	0,000356	5,57E-06	0,999389	5,57E-04	6,86E-04	0	1,01E-04	5,23E-06
Macaristan	1,455307	0,68714	6,81E-05	0	0	0	0,000155	2,35E-06	0,999932	0	0	0	1,55E-04	2,35E-06
Malta	1,852584	0,53979	0,000976	0	0	0	0,022487	1,45E-05	0,999024	0	0	0	2,25E-02	1,45E-05
Moldova	1,3586	0,73605	0,001804	3,36E-05	0,009072	0	0	7,5E-05	0,998196	3,36E-05	9,07E-03	0	0	7,50E-05
Polonya	1,914373	0,52236	1,4E-05	0	0	0	3,19E-05	4,83E-07	0,999986	0	0	0	3,19E-05	4,83E-07
Portekiz	1,193635	0,83778	3,84E-05	0	0	0,000605	0	5,62E-07	0,999962	0	0	6,05E-04	0	5,62E-07
Romanya	1	1	6,69E-05	7,71E-07	0,00024	0	5,21E-05	2,03E-06	0,999933	7,71E-07	2,40E-04	0	5,21E-05	2,03E-06
Rusya Federasyonu	1,440663	0,69412	1,45E-05	1,73E-05	0	0	7,66E-07	1,04E-07	0,999986	1,73E-05	0	0	7,66E-07	1,04E-07
Sırbistan	1,620026	0,61727	8,28E-05	0	0	0	0,000189	2,86E-06	0,999917	0	0	0	1,89E-04	2,86E-06
Slovakya	1,072751	0,93218	0,000141	0	0,000152	0,00167	0	2,05E-06	0,999859	0	1,52E-04	1,67E-03	0	2,05E-06
Slovenya	1	1	0,000169	0	0	0,001051	0,000136	4,23E-06	0,999831	1,54E-04	0	5,62E-05	9,29E-05	1,57E-06
Şili	1,134524	0,88143	9,65E-05	9,03E-05	0	0	5,63E-05	8,8E-07	0,999904	9,03E-05	0	0	5,63E-05	8,80E-07
Ukrayna	1	1	0,000101	0	0,000453	0,000104	1,98E-05	2,84E-06	0,999899	0	5,96E-04	3,87E-05	1,72E-05	2,75E-06
Umman	1	1	0,000786	0,000679	0	0	0,00515	4,37E-06	0,999214	6,79E-04	0	0	5,15E-03	4,37E-06
Yeni Zellanda	1,251199	0,79923	5,64E-05	0	0	0	0,000129	1,95E-06	0,999944	0	0	0	1,29E-04	1,95E-06

K: Klasik, Ö: Önerilen, μ: çıktı ağırlığı, v :girdi ağırlığı

EK-6. UNESCO eğitim istatistikleri girdi yönlü model için örnek grafikler



Şekil 5.9. UNESCO eğitim verisi klasik VZA model örnek grafiği



Şekil 5.10. UNESCO eğitim verisi önerilen t-norm VZA model örnek grafiği

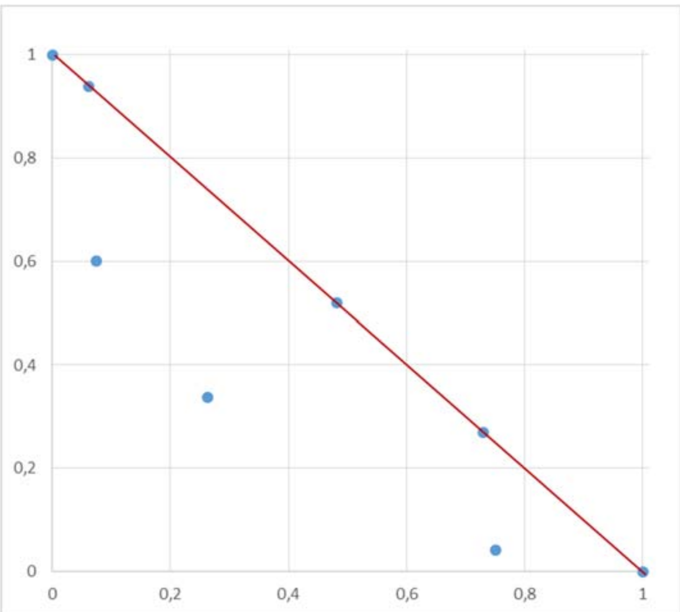
EK-7. VZA'nın veriye kendiliğinden α-kesimlerine ayırması örneği

Çizelge 7.1. Örnek Verileri

KVB	y1	y2	x
A	0	75	25
B	120	0	30
C	30	80	40
D	24	24	16
E	96	16	32
C'	50	150	50
D'	50	50	20
E'	140	60	40

Çizelge 7.2. Örnek verisi analiz sonucu

VZA Sonucu	m1	m2	v1	m1y1	m2y2	v1x1
1	1,35E-10	0,013333	0,04	0	1	1
1	0,008333	0,002079	0,033333333	1	0	1
0,675	0,0025	0,0075	0,025	0,075	0,6	1
0,6	0,010958	0,014042	0,0625	0,262994	0,337006	1
0,791667	0,007813	0,002604	0,03125	0,75	0,041667	1
1	0,001238	0,006254	0,02	0,061914	0,938086	1
1	0,009624	0,010376	0,05	0,481201	0,518799	1
1	0,005215	0,004499	0,025	0,730032	0,269968	1



Şekil 7.1. Etkin KVB'lerin etkin sınırı aralıklara böldüğünün gösterimi

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: GÖLCÜKCÜ, Ayhan
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 14.11.1975, Yalvaç
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 0 (535) 643 57 50
e-mail	: ayhangolcukcu@sdu.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Doktora	Gazi Üniversitesi /İstatistik	Halen Devam Ediyor
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi /İstatistik	2003
Lisans	Gazi Üniversitesi /İstatistik	2000
Lise	Isparta Anadolu Lisesi	1994

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2007-Halen	Süleyman Demirel Üniversitesi	Bilgisayar İşletmeni
2005-2007	Süleyman Demirel Üniversitesi	Memur
2002-2005	Sakarya Üniversitesi	VHKİ

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Bal, H. and A. Gölcükcü,(2002). Data Envelopment Analysis: an application to Turkish banking industry. *Mathematical and Computational Applications*, 7(1), 65-72.

Bal, H. And A. Gölcükcü.(2016). Academic Efficiency Comparison of Countries via DEA. In R. Banker, A. Emrouznejad, H. Ahn, M. Afsharian (Eds.), *Data Envelopment Analysis and its Applications* : *Proceedings of the 13th International Conference on Data Envelopment Analysis,* Braunschweig, Germany: iDEAs, pp. 9-14.

Gölcükcü, A.,(2015). Investigation of Optimist and Pessimist Situations via DEA with Fuzzified Data: Banking Example. Gazi University Journal of Science, 28(4), 561-569.

Gölcükcü, A. and H. Bal.(2014). Customer Effieincy Versus Firm Effieincy: A Banking Example. In R. Banker, A. Emrouznejad, H. Bal, İ. Alp (Eds.), *Data Envelopment Analysis and Performance Measurement : Proceedings of the 11th International Conference on Data Envelopment Analysis*. Samsun: iDEAs, pp. 93-100.

Gölcükcü, A., Orhan, H., Bal, H., and Bilginturan, S. (2014). *Testing The Best Design for Female Calf Growth with DEA.* Paper Presented At The Recent Developments. In R. Banker, A. Emrouznejad, S. M. Doraisamy, B. Arabi (Eds.), *Data Envelopment Analysis and Its Applications: Proceedings of the 12th International Conference On Data Envelopment Analysis.* Kuala Lumpur, Malaysia: iDEAs, pp. 370-375.

Bal, H., Gölcükcü, A., (2014). Do players performance indicate team performance: Turkish basketball league example. In R. Banker, A. Emrouznejad, S. M. Doraisamy, B. Arabi (Eds.), Data Envelopment Analysis and Its Applications: Proceedings of the 12th International Conference On Data Envelopment Analysis. Kuala Lumpur, Malaysia: iDEAs, pp. 124-129.

Gölcükcü, A., V.S. Özsoy, and H. Bal.(2016). Matrix Model for Multiple Group Comparison with Malmquist Data Envelopment Analysis: a Basketball League Example. In J. Bleach (Editor), *OR58 Annual Conference – Keynote Papers and Extended Abstracts.* Portsmouth, United Kingdom: OR Society, pp. 21-26.

Hobiler

Satranç, Trekking, Fotoğrafçılık

GAZİ GELECEKTİR...