T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

FARK DENKLEM SİSTEMLERİ VE BİLGİSAYAR UYGULAMALARI ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Merve GÜNER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA

Konya–2012

T. C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

BİLİMSEL ETİK SAYFASI

Öğrencinin		
	Adı Soyadı	Merve GÜNER
	Numarası	095202031016
	Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı / Matematik Eğitimi Bilim Dalı
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora ☐
	Tezin Adı	Fark Denklem Sistemleri ve Bilgisayar Uygulamaları Üzerine Bir Çalışma

Bu tezin proje safhasından sonuçlanmasına kadarki bütün süreçlerde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını bildiririm.

M. Güner
Öğrencinin imzası
(İmza)

T. C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ KABUL FORMU

Öğrencinin

Adı Soyadı	Merve GÜNER
Numarası	095202031016
Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı / Matematik Eğitimi Bilim Dalı
Programı	Tezli Yüksek Lisans
Tez Danışmanı	Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
Tezin Adı	Fark Denklem Sistemleri ve Bilgisayar Uygulamaları Üzerine Bir Çalışma

Yukarıda adı geçen öğrenci tarafından hazırlanan "Fark Denklem Sistemleri ve Bilgisayar Uygulamaları Üzerine Bir Çalışma" başlıklı bu çalışma 04/06/2012 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunarak, jürimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Unvanı, Adı Soyadı	Danışman ve Üyeler	İmza
Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA	Danışman	IYalçınkaya.
Yrd. Dç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI	Üye	
Yrd. Dç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK	Üye	

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Uygulamalı Matematiğin yeni çalışma alanlarından olan Fark Denklemleri sahip olduğu açık problemler dolayısıyla bir çok bilim insanının ilgisini çekmektedir. Artan bu ilgi dolayısıyla günümüzde Fark Denklemleriyle ilgili olarak bolca çalışma yapılmaktadır. Bizde bu çalışmamızda uygulamada önemli bir yer tutan Fark Denklem sistemlerini ve bunların bilgisayar uygulamalarını, yapılan çalışmalarıda referans alarak ortaya koymaya çalıştık.

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA yönetiminde yapılarak Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tez çalışmalarım sırasında yaptığı katkılarından dolayı Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI'ya ve çalışmalarım süresince beni manevi açıdan destekleyen ve her daim yanımda olan eşime teşekkür ederim.

Yüksek Lisans tezimi yönetmeyi kabul ederek karşılaştığım güçlüklerde değerli yardımlarını esirgemeyen, katkılarıyla beni yönlendiren saygıdeğer hocam Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA'ya teşekkür eder ve saygılarımı sunarım.

Merve GÜNER

Konya, 2012

T. C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin	Adı Soyadı	Merve GÜNER
	Numarası	095202031016
	Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı / Matematik Eğitimi Bilim Dalı
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora ☐
	Tez Danışmanı	Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
	Tezin Adı	Fark Denklem Sistemleri ve Bilgisayar Uygulamaları Üzerine Bir Çalışma

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Fark Denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremleri verdik.

İkinci bölümde, Fark Denklem Sistemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verdik.

Üçüncü bölümde,

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-2}-1},\ y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-2}-1},\ z_{n+1}=x_n y_n z_{n-2}$$

ve

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-3}-1},\ y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-3}-1},\ z_{n+1}=x_n y_n z_{n-3}$$

fark denklem sistemlerinin çözümlerini inceledik ve bu fark denklem sistemleri ile ilgili örnekler verdik.

Anahtar kelimeler: Fark Denklemleri, Fark Denklem Sistemleri, Çözüm.

T. C.

NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin	Adı Soyadı	Merve GÜNER
	Numarası	095202031016
	Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bİlim Dalı / Matematik Eğitimi Bilim Dalı
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tez Danışmanı	Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA
	Tezin İngilizce Adı	A Study On Systems of Difference Equations and Computer Applications .

SUMMARY

This study consists of three sections.

In the first section, general definitions and theorems about difference equations are given.

In the second section, we give some information about some difference equation systems studied before.

In the third section, the solutions of the systems of difference equations

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-2}-1},\ y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-2}-1},\ z_{n+1}=x_n y_n z_{n-2}$$

and

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-3}-1},\ y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-3}-1},\ z_{n+1}=x_n y_n z_{n-3}$$

are analyzed. Then, some examples related to these difference equation systems are given.

Keywords: Difference equations, System of difference equation, Solution.

İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM

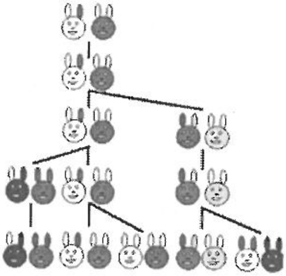
FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili literatürde var olan ve çalışmamızda kullanılan genel tanım ve teoremler verilmiştir.

x bağımsız değişkeninin tanımlı olduğu aralıkta, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y'(x), y''(x),..., y^{(n)}(x),...$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x'in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x' in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu denklemler üzerinde duracağız.

Fark denklemleri, biyoloji, ekoloji, ekonomi, fizik gibi uygulama alanları olan diferansiyel ve gecikmeli diferansiyel denklemlerinin nümerik çözümlerinde karşımıza çıkar. En bilinen fark denklemlerinden birisi Fibonacci`nin biyolojideki ilk matematiksel modeli olan $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, F_1 = F_2 = 1, \quad n = 2,3,...$ fark denklemidir. Fibonacci`nin modeline göre, yeni doğmuş biri dişi biri erkek olan bir çift tavşanı ele alalım. Tavşanlar ilk ayın sonunda çoğalmaya hazır oluyorlar. Tavşanların hiç ölmediğini ve yeni tavşan çiftinin birinin dişi diğerinin de erkek olduğunu varsayalım. Buna göre,

Tavşan çifti sayısı



1
1
2
3
5

olur.

Tanım 1.1. n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de y olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin $E(y), E^2(y), E^3(y), \ldots E^n(y), \ldots$ gibi farklarını içeren bağıntılara Fark Denklemi denir.

Birinci mertebeden fark denklemi;

$$a_0 y_n + a_1 y_{n+1} = f(n)$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden fark denklemi;

$$a_0 y_{n-1} + a_1 y_n + a_2 y_{n+1} = g(n)$$

şeklindedir. Genel olarak;

$$y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \ldots + a_0 y_n = h(n)$$

denklemi k. mertebeden lineer fark denklemidir. Burada $f(n)$ ve $g(n)$'ler n'e bağlı fonksiyonlardır. Bir fark denkleminin mertebesi; en yüksek mertebeli terimin mertebesi ile en düşük mertebeli terimin mertebesi arasındaki farktır. Bir fark denkleminde mertebesi kadar başlangıç şartı bulunur.

Tanım 1.2. Bir fark denkleminde bağımlı değişkenler birinci dereceden ve denklem bağımlı değişken parantezine alındığında katsayılar sadece bağımsız değişkenlerden oluşuyor ise bu denkleme lineer fark denklemi denir. Örneğin,

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + y_n - 5y_{n-1} = n$$

üçüncü mertebeden lineer bir fark denklemidir.

Teorem 1.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere $f: I^{k+1} \to I$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $x_{-k}, x_{-(k-1)}, \ldots, x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f\left(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k}\right), \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{1.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 1.3. Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 1.4. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise $\{x_n\}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

Tanım 1.5. (1.1) denkleminde $\bar{x} = f\left(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x}\right)$ şartını sağlayan $\bar{x}$ noktasına (1.1) denkleminin denge noktası denir. Eğer $\forall n \geq 0$ için $x_n = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ ' e f 'in sabit noktası denir.

Tanım 1.6. $\bar{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası olmak üzere:

(a) Eğer $x_{-k}, x_{-(k-1)}, \ldots, x_0 \in I$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \ldots + |x_{-k} - \bar{x}| < \delta$ iken her $n \geq 0$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

(b) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $x_{-k}, x_{-(k-1)}, \ldots, x_0 \in I$ iken $\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \ldots + |x_{-k} - \bar{x}| < \delta$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(c) Eğer her $x_{-k}, x_{-(k-1)}, \ldots, x_0 \in I$ iken $\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ denge noktasına çekim noktası denir.

(d) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise $\bar{x}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.

(e) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise kararsızdır denir.

(f) Eğer $x_{-k}, x_{-(k-1)}, \ldots, x_0 \in I$ iken $|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \ldots + |x_{-k} - \bar{x}| < r$ ve bazı $N \geq -1$ sayıları için $|x_N - \bar{x}| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktasına repeller denir.

Tanım 1.7. (1.1) denkleminden elde edilen

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}} (\bar{x}, \ldots, \bar{x}) \, y_{n-i} \tag{1.2}$$

denkleme $\bar{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.

(1.2) denkleminin karakteristik denklemi;

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}} (\bar{x}, \ldots, \bar{x}) \, \lambda^{k-i} = 0 \tag{1.3}$$

şeklindedir.

Teorem 1.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)

(a) Eğer (1.3) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise $\overline{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(b) Eğer (1.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise $\overline{x}$ denge noktası kararsızdır.

Tanım 1.8. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden $\overline{x}$ denge noktasından ne büyük ne de küçük ise bu çözümlere $\overline{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir. Aksi halde salınımlı değildir.

Tanım 1.9. $\overline{x}$, (1.1) denkleminin denge noktası olsun. $l \geq -k, m \leq \infty$ olmak üzere $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ dizisinin her elemanı $\overline{x}$ denge noktasından büyük veya eşit, $l = -k$ veya $l \geq -k$ için $x_{l-k} < \overline{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{l-1} < \overline{x}$ oluyorsa $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde $l \geq -k, m \leq \infty$ olmak üzere $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ dizisinin her elemanı $\overline{x}$ denge noktasından küçük, $l = -k$ veya $l > -k$ için $x_{l-k} \geq \overline{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} \geq \overline{x}$ oluyorsa $\{x_l, x_{l+1}, \ldots, x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir.

Teorem 1.3. (Clark Teoremi) $p, q \in R$ ve $k \in \{0, 1, \ldots\}$ olmak üzere

$$x_{n+1} + px_n + qx_{n-k} = 0 \quad n = 0, 1, \ldots$$

fark denkleminin lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $|p| + |q| < 1$ olmasıdır.

Sonuç 1.1. $p_k \in R,\ k \in \{1, 2, \ldots\}$ olmak üzere;

$$x_{n+1} + p_1 x_n + \ldots + p_k x_{n-k} = 0$$

fark denkleminin lokal asimptotik kararlı olması için gerek ve yeter şart $\sum_{i=1}^{k} |p_i| < 1$ olmasıdır.

Teorem 1.4.

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-k}), \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{1.4}$$

fark denklemini göz önünde bulunduralım. Burada $k \geq 1$'dir. $I = [a,b]$ reel sayıların bir aralığı olsun ve $f : [a,b] \times [a,b] \to [a,b]$ nin aşağıdaki özellikleri sağlayan sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim.

(a) $f(u.v)$ fonksiyonu u'ya göre azalmayan; v'ye göre artmayan bir fonksiyondur.

(b) Eğer $(m, M) \in [a,b] \times [a,b]$

$$m = f(m, M) \text{ ve } M = f(M, m)$$

sisteminin bir çözümü ise $m = M$ dir.

Bu şartlar altında (1.4) denkleminin her çözümü $\overline{x}$ denge noktasına yakınsar.

2. BÖLÜM
FARK DENKLEM SİSTEMLERİ İLE İLGİLİ YAPILMIŞ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde fark denklem sistemleri ile ilgili yapılmış çalışmalardan bir kısmı kısaca özetlenmiştir.

Schinas (1997), yapmış olduğu çalışmada $x_{n+1}=\dfrac{x_n+1}{x_{n-1}}$ Lyness fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğinden ve denge noktasından hareketle

$$x_{n+1}=\frac{ay_n+A}{x_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{bx_n+A}{y_{n-1}},$$

$$x_{n+1}=\frac{a_ny_n+A}{x_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{b_nx_n+A}{y_{n-1}},$$

$$x_{n+1}=\frac{\max\{a_ny_n,A\}}{x_{n-1}},\quad y_{n+1}=\frac{\max\{b_nx_n,A\}}{y_{n-1}},$$

fark denklem sistemleri ve rasyonel formdaki benzer bazı fark denklemlerinin, fark denklem sistemlerinin ve maksimumlu fark denklem sistemlerinin denge noktalarını ve çözümlerinin periyodikliğini inceledi. Çalışma sonucunda; çeşitli fark denklemlerinin ve fark denklem sistemlerinin denge noktalarını, denklemlerin katsayılarının sabit olması veya periyodik birer dizi olması gibi durumlarda katsayılara ve denklemin genel terimlerine bağlı olarak elde etti. Ayrıca bazı fark denklem sistemlerinin de çözümlerinin periyodikliğini inceledi.

Papaschinopoulos ve Schinas (1998), p ve q pozitif tamsayıları için lineer olmayan iki fark denkleminden oluşan $x_{n+1}=A+\dfrac{y_n}{x_{n-p}},\ y_{n+1}=A+\dfrac{x_n}{y_{n-q}}$ fark denklem sisteminin çözümlerinin salınımlı davranışını ve sınırlılığını incelediler.

Ayrıca bu fark denklem sisteminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını çalıştılar. Bu çalışmada fark denklem sisteminin denge noktasının $(c,c)=(1+A,1+A)$ olduğunu elde ettiler ve sisteminin çözümlerinin $A\in(0,\infty)$ için bu noktada salınımlı olduğunu gördüler. Aynı şartlarda sistemin çözümlerinin alt ve üst sınırlarını elde ettiler. $A>1$ için de pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu elde ettiler.

Grove ve arkadaşları (2001), a,b,c ve d reel sayılar ve başlangıç şartları x_0 ve y_0 keyfi reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1}=\dfrac{a}{x_n}+\dfrac{b}{y_n}$, $y_{n+1}=\dfrac{c}{x_n}+\dfrac{d}{y_n}$ fark denklem sisteminin, her $n\geq 0$ için iyi tanımlı olduğu (x_0,y_0) değerlerinin kümesini ve çözümlerinin davranışlarını araştırdılar. Bu fark denklem sisteminde, $z_n=\dfrac{x_n}{y_n}$ dönüşümü yaparak Riccati fark denklemine ulaştılar ve bu denklemin karakteristik denkleminin çözümlerinden hareketle a,b,c ve d reel sayıları için şartlar elde ettiler, yani denklemin good küme ve forbidden kümesine ulaştılar. Denklemin çözümleri hakkında bazı şartlar altında genellemelere gittiler.

Clark ve Kulenovic (2002), a,b,c ve d pozitif sayılar ve x_0, y_0 başlangıç şartları negatif olmayan sayılar olmak üzere, $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{a+cy_n}$, $y_{n+1}=\dfrac{y_n}{b+dx_n}$ fark denklem sisteminin çözümlerinin global kararlılık özelliklerini ve asimptotik davranışını incelediler.

Papaschinopoulos ve Schinas (2002), A_i, B_i, $i\in\{0,1,\ldots,k\}$, x_i, y_i, $i=-k,-k+1,\ldots,0$ pozitif sayılar ve p_i, q_i, $i=0,1,\ldots,k$ pozitif sabitler olmak üzere, $x_{n+1}=\sum_{i=0}^{k}\dfrac{A_i}{y_{n-i}^{p_i}}$, $y_{n+1}=\sum_{i=0}^{k}\dfrac{B_i}{x_{n-i}^{q_i}}$ fark denklem sistemini çalıştılar. Çalışmalarında, pozitif çözümlerin sınırlılığını ve sürekliliğini elde ettiler. Daha sonra sistemin bir pozitif denge noktasının var ve tek olduğunu gösterip bu denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelediler. Son olarak da sistemin pozitif denge noktasında salınım göstermeyen çözümlerine ulaştılar.

Kulenović ve Nurkanović (2003), yılında altmışıncı yaş günü vesilesi ile Profesör Allan Peterson'a ithaf ettikleri çalışmalarında A ile B katsayıları $(0,\infty)$ aralığından seçilen reel sayılar ve x_0, y_0 başlangıç şartları negatif olmayan keyfi sayılar olmak üzere $x_{n+1} = Ax_n \dfrac{y_n}{1+y_n}$, $y_{n+1} = By_n \dfrac{x_n}{1+x_n}$ fark denklem sisteminin çözümlerinin global asimptotik kararlılığını araştırdılar.

Li ve Zhu (2003), yaptıkları çalışmada $a \in [0,\infty)$ ve $x_{-1}, x_0 \in (0,\infty)$ başlangıç koşulları altında $x_{n+1} = \dfrac{x_n x_{n-1} + a}{x_n + x_{n-1}}$ fark denkleminin global asimptotik kararlı olması için yeterli olan koşulu bulmuşlardır.

Çinar (2004), çalışmasında $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{-1 + x_n x_{n-1}}$ rasyonel fark denkleminin çözümlerini, bu çözümlerin başlangıç şartlarına göre durumlarını ve bu çözümlerin lokal asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Camouzis ve Papaschinopoulos (2004), çalışmalarında pozitif başlangıç şartlar altında $x_{n+1} = 1 + \dfrac{x_n}{y_{n-m}}$, $y_{n+1} = 1 + \dfrac{y_n}{x_{n-m}}$ fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

Çinar (2004), çalışmasında $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{-1 + ax_n x_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerini, bu çözümlerin başlangıç şartlarına göre durumlarını ve bu çözümlerin lokal asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Çinar (2004), çalışmasında $x_{n+1}=\frac{1}{y_n}$, $y_{n+1}=\frac{y_n}{x_{n-1}y_{n-1}}$ fark denklem sisteminin çözümlerinin dört periyotlu olduğunu ispat etmiştir.

Çinar ve Yalçınkaya (2004), literatürde üç değişkenli fark denklem sistemleri üzerine yapılan ilk çalışmalardan olan makalelerinde, $x_{n+1}=\frac{1}{z_n}$, $y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}y_{n-1}}$, $z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}}$ fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelediler. $\{x_n\}$ ve $\{z_n\}$ çözümlerinin üç periyotlu, $\{y_n\}$ çözümlerinin ise on iki periyotlu olduğunu ispat ettiler.

Çinar ve Yalçınkaya (2004), çalışmalarında; $x_{n+1}=\frac{1}{z_n}$, $y_{n+1}=\frac{x_n}{x_{n-1}}$, $z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}}$ fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelediler ve $\{x_n, y_n, z_n\}$ çözümlerinin üç periyotlu olduğunu ispat ettiler.

El-Owaidy ve arkadaşları (2004), yaptıkları çalışmada özel başlangıç koşulları altında $x_{n+1}=a+\frac{x_{n-k}}{x_n}$ fark denkleminin pozitif çözümlerinin global kararlılığını ve periyodikliğini incelemişlerdir.

Feuer (2004), yaptığı çalışmada, p pozitif bir sayı ve $x_{-1}, x_0 \in (0,\infty)$ başlangıç koşulları altında $x_{n+1}=p+\frac{x_{n-1}}{x_n}$ fark denkleminin çözümlerinin davranışlarını incelemiştir.

Clark ve arkadaşları (2005), yaptıkları çalışmada a,b,h pozitif sayılar ve negatif olmayan başlangıç koşulları için $x_{n+1}=\frac{h+x_n}{a+y_n}, y_{n+1}=\frac{y_n}{b+x_n}$ fark denklem sisteminin çözümlerinin global karakterlerini incelemişlerdir.

Kulenović ve Nurkanović (2005), yaptıkları çalışmada $x_{n+1}=\dfrac{a+x_n}{b+y_n}$, $y_{n+1}=\dfrac{c+y_n}{d+z_n}$, $z_{n+1}=\dfrac{e+z_n}{f+x_n}$ denklem sisteminin çözümlerinin global asimptotik davranışlarını incelemişlerdir.

Yang ve arkadaşları (2005), yaptıkları çalışmada p ve q, $p\leq q$ olan pozitif tamsayılar a, b pozitif sabitler olmak üzere, $x_n=\dfrac{a}{y_{n-p}}, y_n=\dfrac{by_{n-p}}{x_{n-q}y_{n-q}}$ fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

Sun ve Xi (2005), yaptıkları çalışmada $s<t$ olmak üzere, $x_{n+1}=f\left(x_{n-s},x_{n-t}\right)$ lineer olmayan fark denkleminin tüm pozitif çözümlerinin tek denge noktasına yakınsaması için yeterli şartları ortaya koymuştur.

Douraki ve arkadaşları (2006), yaptıkları çalışmada $A,B\in(0,\infty)$ ve $x_{-3k+1},x_{-3k+2},\ldots,x_0\in(0,\infty)$ olmak üzere $x_n=\dfrac{A}{x_{n-k}}+\dfrac{B}{x_{n-3k}}$ fark denkleminin çözümlerinin k periyotlu olduğunu incelemişlerdir.

Elabbasy, El-Metwally ve Elsayed (2006), yaptıkları çalışmada a,b,c,d pozitif sabitler ve $x_{-1},x_0\in R$ başlangıç koşulları altında $x_{n+1}=ax_n-\dfrac{bx_n}{cx_n-dx_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin belli başlı özelliklerini incelemişlerdir.

Irićanin ve Stević (2006), çalışmalarında aşağıdaki iki fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini çalışmışlardır:

$$x_{n+1}^{(1)}=\frac{1+x_n^{(2)}}{x_{n-1}^{(3)}},x_{n+1}^{(2)}=\frac{1+x_n^{(3)}}{x_{n-1}^{(4)}},\ldots,x_{n+1}^{(k)}=\frac{1+x_n^{(1)}}{x_{n-1}^{(2)}}$$

$$x_{n+1}^{(1)}=\frac{1+x_n^{(2)}+x_{n-1}^{(3)}}{x_{n-2}^{(4)}},x_{n+1}^{(2)}=\frac{1+x_n^{(3)}+x_{n-1}^{(4)}}{x_{n-2}^{(5)}},\ldots,x_{n+1}^{(k)}=\frac{1+x_n^{(1)}+x_{n-1}^{(2)}}{x_{n-2}^{(3)}}\qquad k\in N.$$

Özban (2006), çalışmasında tüm başlangıç şartları ve parametreler pozitif olmak üzere $x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-k}},y_{n+1}=\frac{y_n}{x_{n-m}y_{n-m-k}}$ fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliğini araştırmış ve ispat etmiştir.

Sun ve Xi (2006), çalışmasında $x_{n+1}=f(x_n,y_{n-k}),y_{n+1}=f(y_n,x_{n-k})$ rasyonel fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin, pozitif başlangıç şartları altında global asimptotik kararlılığını göstermiş ve pozitif çözümlerin bir denge noktasına yakınsadıklarını ispat etmişlerdir.

Sun ve Xi (2006), yılındaki diğer bir çalışmalarında yukarıdaki teorilerini daha da geliştirmişler. $s\geq t,p\geq q$ ve başlangıç şartları pozitif olmak üzere $x_{n+1}=f(y_{n-q},x_{n-s}),y_{n+1}=g(x_{n-t},y_{n-p})$ genel fark denklem sisteminin tek pozitif denge noktasının belirli koşullar altında global çekici olduğunu göstermişlerdir.

Zhang ve arkadaşları (2006), yaptıkları çalışmada $p,r,s\geq 1,A\geq 0$, $x_{1-r},x_{2-r},\ldots,x_0\in R^+$ ve $y_{1-\max\{p,s\}},y_{2-\max\{p,s\}},\ldots,y_0\in R^+$ başlangıç koşulları altında $x_{n+1}=A+\frac{1}{y_{n-p}},y_{n+1}=A+\frac{y_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}$ fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

Özban (2007), çalışmasında, $x_n=\frac{a}{y_{n-3}},y_n=\frac{by_{n-3}}{x_{n-g}y_{n-g}}$ rasyonel fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini incelemiştir.

Zhang ve arkadaşları (2007), yaptıkları çalışmada $x_{n+1} = A + \frac{y_{n-m}}{x_n}$, $y_{n+1} = A + \frac{x_{n-m}}{y_n}$ fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlılığını ve sınırlılığını incelemiştir.

Yalçınkaya (2008), çalışmada $z_{n+1} = \frac{t_n z_{n-1} + a}{t_n + z_{n-1}}, t_{n+1} = \frac{z_n t_{n-1} + a}{z_n + t_{n-1}}$ fark denklem sisteminin global asimptotik kararlılığı için yeterli koşulları incelemiştir.

Yalçınkaya ve arkadaşları (2008), yaptıkları çalışmada $x_{n+1}^{(1)} = \frac{x_n^{(2)}}{x_n^{(2)} - 1}$, $x_{n+1}^{(2)} = \frac{x_n^{(3)}}{x_n^{(3)} - 1}, \ldots, x_{n+1}^{(k)} = \frac{x_n^{(1)}}{x_n^{(1)} - 1}$ fark denklem sisteminin çözümlerini araştırmıştır.

Elsayed (2009), yaptığı çalışmada a, b, c, d pozitif sabitler ve $x_{-1}, x_0 \in R^+$ başlangıç koşulları altında $x_{n+1} = ax_n - \frac{bx_n^2}{cx_n - dx_{n-1}}$ fark denkleminin çözümlerinin belli başlı özelliklerini incelemiştir.

Yalçınkaya ve Çinar (2010), çalışmalarında $z_{n+1} = \frac{t_n + z_{n-1}}{t_n z_{n-1} + a}, t_{n+1} = \frac{z_n + t_{n-1}}{z_n t_{n-1} + a}$ fark denklem sisteminin global asimptotik kararlılığını incelemiştir.

Kurbanlı (2011), çalışmasında $x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1}, z_0, z_{-1} \in R$ olmak üzere $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} - 1}, y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} - 1}, z_{n+1} = \frac{z_{n-1}}{y_n z_{n-1} - 1}$ fark denklemleri sisteminin çözümlerinin davranışlarını incelemiştir.

Kurbanlı ve arkadaşları (2011), çalışmalarında $x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1} \in R$ olmak üzere

$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + y_n}{y_n x_{n-1} - 1}, y_{n+1} = \frac{y_{n-1} + x_n}{x_n y_{n-1} - 1}$ rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Kurbanlı ve arkadaşları (2011), çalışmasında $x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1}, z_0, z_{-1} \in R$ olmak üzere $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} - 1}, y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} - 1}, z_{n+1} = \frac{x_n}{y_n z_n - 1}$ rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışını incelemişlerdir.

Keying ve arkadaşları (2011), daha önce Kurbanlı tarafından çalışılmış olan bir denklem sistemini ele almışlardır. Çalışmalarında, $x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1}, z_0, z_{-1} \in R$ olmak üzere $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} - 1}, y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} - 1}, \quad z_{n+1} = \frac{z_{n-1}}{y_n z_{n-1} - 1}$ fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışlarını farklı bir yaklaşım ile incelemişlerdir.

Stević (2011), çalışmasında $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ parametreler ve başlangıç şartları x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \frac{a x_{n-1}}{b y_n x_{n-1} + c}, y_{n+1} = \frac{\alpha y_{n-1}}{b x_n y_{n-1} + \gamma} n \in N_0$ rasyonel fark denklem sistemini incelemiştir.

Touafek ve Elsayed (2012), çalışmalarında başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \frac{x_{n-3}}{\pm 1 \pm x_{n-3} y_{n-1}}, y_{n+1} = \frac{y_{n-3}}{\pm 1 \pm y_{n-3} x_{n-1}}$ rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümleri ve çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Elsayed (2012), çalışmasında başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{\pm 1 \pm x_{n-1} y_n}, y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{\pm 1 \pm y_{n-1} x_n}$ rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini incelemiştir.

3. BÖLÜM

BAZI FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

3.1. $x_{n+1}=\dfrac{1}{y_{n-2}-1}$, $y_{n+1}=\dfrac{1}{x_{n-2}-1}$, $z_{n+1}=x_n y_n z_{n-2}$ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde;

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-2}-1},\ y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-2}-1},\ z_{n+1}=x_n y_n z_{n-2} \tag{3.1.1}$$

fark denklem sisteminin çözümleri incelenmiştir.

Teorem 3.1.1. Başlangıç şartları $y_0=a$, $y_{-1}=b$, $y_{-2}=c$, $x_0=d$, $x_{-1}=e$, $x_{-2}=f$, $z_0=g$, $z_{-1}=h$, $z_{-2}=j$, $a,b,c,d,e,f\neq 1$ olmak üzere (3.1.1) fark denklem sisteminin bütün çözümleri; $n\geq 3$, $k\in N$ ve

$$F(k)=\begin{cases} 0 & , k=0 \\ 1 & , k=1 \\ F(k-1)+F(k-2), & k>1 \end{cases}$$

için

$$x_{6k+1}=\frac{F(2k+1)-F(2k)c}{F(2k+1)c-F(2k+2)}$$

$$y_{6k+1}=\frac{F(2k+1)-F(2k)f}{F(2k+1)f-F(2k+2)}$$

$$z_{3k+1}=\frac{daj}{\left[F(k)a-F(k+1)\right]\left[F(k)d-F(k+1)\right]}$$

$$x_{6k+2} = \frac{F(2k+1) - F(2k)b}{F(2k+1)b - F(2k+2)}$$

$$y_{6k+2} = \frac{F(2k+1) - F(2k)e}{F(2k+1)e - F(2k+2)}$$

$$z_{3k+2} = \frac{h}{\left[F(k+1)c - F(k+2)\right]\left[F(k+1)f - F(k+2)\right]}$$

$$x_{6k+3} = \frac{F(2k+1) - F(2k)a}{F(2k+1)a - F(2k+2)}$$

$$y_{6k+3} = \frac{F(2k+1) - F(2k)d}{F(2k+1)d - F(2k+2)}$$

$$z_{3k+3} = \frac{g}{\left[F(k+1)b - F(k+2)\right]\left[F(k+1)e - F(k+2)\right]}$$

$$x_{6k+4} = \frac{F(2k+1)f - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)f}$$

$$y_{6k+4} = \frac{F(2k+1)c - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)c}$$

$$x_{6k+5} = \frac{F(2k+1)e - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)e}$$

$$y_{6k+5} = \frac{F(2k+1)b - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)b}$$

$$x_{6k+6} = \frac{F(2k+1)d - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)d}$$

$$y_{6k+6} = \frac{F(2k+1)a - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)a}$$

şeklindedir.

İspat:

$n=0$ için (3.1.1) den

$$x_1=\frac{1}{y_{-2}-1}=\frac{1}{c-1}$$

$$y_1=\frac{1}{x_{-2}-1}=\frac{1}{f-1}$$

$$z_1=x_0y_0z_{-2}=daj$$

$n=1$ için

$$x_2=\frac{1}{y_{-1}-1}=\frac{1}{b-1}$$

$$y_2=\frac{1}{x_{-1}-1}=\frac{1}{e-1}$$

$$z_2=x_1y_1z_{-1}=\frac{h}{(c-1)(f-1)}$$

ve $n=2$ için

$$x_3=\frac{1}{y_0-1}=\frac{1}{a-1}$$

$$y_3=\frac{1}{x_0-1}=\frac{1}{d-1}$$

$$z_3=x_2y_2z_0=\frac{g}{(b-1)(e-1)}$$

olduğu açıktır.

$n \geq 3$ için x_n ve y_n çözümlerinin doğruluğunu tümevarımla ispatlayalım.

$n = 3$ için

$$x_4 = \frac{1}{y_1 - 1} = \frac{1}{\dfrac{1}{f-1} - 1} = \frac{1}{\dfrac{2-f}{f-1}} = \frac{f-1}{2-f}$$

$$y_4 = \frac{1}{x_1 - 1} = \frac{1}{\dfrac{1}{c-1} - 1} = \frac{1}{\dfrac{2-c}{c-1}} = \frac{c-1}{2-c}$$

$$z_4 = x_3 y_3 z_1 = \frac{1}{a-1}\frac{1}{d-1} daj = \frac{daj}{(a-1)(d-1)}$$

$n = 4$ için

$$x_5 = \frac{1}{y_2 - 1} = \frac{1}{\dfrac{1}{e-1} - 1} = \frac{1}{\dfrac{2-e}{e-1}} = \frac{e-1}{2-e}$$

$$y_5 = \frac{1}{x_2 - 1} = \frac{1}{\dfrac{1}{b-1} - 1} = \frac{1}{\dfrac{2-b}{b-1}} = \frac{b-1}{2-b}$$

$$z_5 = x_4 y_4 z_2 = \frac{f-1}{2-f}\frac{c-1}{2-c}\frac{h}{(c-1)(f-1)} = \frac{h}{(c-2)(f-2)}$$

$n = 5$ için

$$x_6 = \frac{1}{y_3 - 1} = \frac{1}{\dfrac{1}{d-1} - 1} = \frac{1}{\dfrac{2-d}{d-1}} = \frac{d-1}{2-d}$$

$$y_6 = \frac{1}{x_3 - 1} = \frac{1}{\dfrac{1}{a-1} - 1} = \frac{1}{\dfrac{2-a}{a-1}} = \frac{a-1}{2-a}$$

$$z_6 = x_5 y_5 z_3 = \frac{e-1}{2-e}\frac{b-1}{2-b}\frac{g}{(b-1)(e-1)} = \frac{g}{(b-2)(e-2)}$$

$n=6$ için

$$x_7=\frac{1}{y_4-1}=\frac{1}{\frac{c-1}{2-c}-1}=\frac{1}{\frac{2c-3}{2-c}}=\frac{2-c}{2c-3}$$

$$y_7=\frac{1}{x_4-1}=\frac{1}{\frac{f-1}{2-f}-1}=\frac{1}{\frac{2f-3}{2-f}}=\frac{2-f}{2f-3}$$

$$z_7=x_6y_6z_4=\frac{d-1}{2-d}\frac{a-1}{2-a}\frac{daj}{(a-1)(d-1)}=\frac{daj}{(a-2)(d-2)}$$

olup doğrudur.

$k=0,1,2,...$ olmak üzere $n=k$ için

$$x_{6k+1}=\frac{F(2k+1)-F(2k)c}{F(2k+1)c-F(2k+2)}$$

$$y_{6k+1}=\frac{F(2k+1)-F(2k)f}{F(2k+1)f-F(2k+2)}$$

$$z_{3k+1}=\frac{daj}{\left[F(k)a-F(k+1)\right]\left[F(k)d-F(k+1)\right]}$$

$$x_{6k+2}=\frac{F(2k+1)-F(2k)b}{F(2k+1)b-F(2k+2)}$$

$$y_{6k+2}=\frac{F(2k+1)-F(2k)e}{F(2k+1)e-F(2k+2)}$$

$$z_{3k+2}=\frac{h}{\left[F(k+1)c-F(k+2)\right]\left[F(k+1)f-F(k+2)\right]}$$

$$x_{6k+3} = \frac{F(2k+1) - F(2k)a}{F(2k+1)a - F(2k+2)}$$

$$y_{6k+3} = \frac{F(2k+1) - F(2k)d}{F(2k+1)d - F(2k+2)}$$

$$z_{3k+3} = \frac{g}{\left[F(k+1)b - F(k+2)\right]\left[F(k+1)e - F(k+2)\right]}$$

$$x_{6k+4} = \frac{F(2k+1)f - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)f}$$

$$y_{6k+4} = \frac{F(2k+1)c - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)c}$$

$$x_{6k+5} = \frac{F(2k+1)e - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)e}$$

$$y_{6k+5} = \frac{F(2k+1)b - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)b}$$

$$x_{6k+6} = \frac{F(2k+1)d - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)d}$$

$$y_{6k+6} = \frac{F(2k+1)a - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)a}$$

olduğunu kabul edelim.

$n = k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$x_{6(k+1)+1} = x_{6k+7} = \frac{1}{y_{6k+4} - 1}$$

$$=\frac{1}{\frac{F(2k+1)c-F(2k+2)}{F(2k+3)-F(2k+2)c}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)c}{F(2k+1)c-F(2k+2)-F(2k+3)+F(2k+2)c}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)c}{\left[F(2k+1)+F(2k+2)\right]c-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)c}{F(2k+3)c-F(2k+4)}$$

olup doğrudur.

$$y_{6(k+1)+1}=y_{6k+7}=\frac{1}{x_{6k+4}-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{F(2k+1)f-F(2k+2)}{F(2k+3)-F(2k+2)f}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)f}{F(2k+1)f-F(2k+2)-F(2k+3)+F(2k+2)f}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)f}{\left[F(2k+1)+F(2k+2)\right]f-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)f}{F(2k+3)f-F(2k+4)}$$

doğru olduğu görülür.

$$z_{3(k+1)+1} = z_{3k+4} = x_{3k+3}y_{3k+3}z_{3k+1}$$

$$= \frac{F(k+1)-F(k)a}{F(k+1)a-F(k+2)} \frac{F(k+1)-F(k)d}{F(k+1)d-F(k+2)} \frac{daj}{\left[F(k)a-F(k+1)\right]\left[F(k)d-F(k+1)\right]}$$

$$= \frac{daj}{\left[F(k+1)a-F(k+2)\right]\left[F(k+1)d-F(k+2)\right]}$$

doğru olduğu görülür.

$$x_{6(k+1)+2} = x_{6k+8} = \frac{1}{y_{6k+5}-1}$$

$$= \frac{1}{\frac{F(2k+1)b-F(2k+2)}{F(2k+3)-F(2k+2)b}-1}$$

$$= \frac{F(2k+3)-F(2k+2)b}{F(2k+1)b-F(2k+2)-F(2k+3)+F(2k+2)b}$$

$$= \frac{F(2k+3)-F(2k+2)b}{\left[F(2k+1)+F(2k+2)\right]b-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]}$$

$$= \frac{F(2k+3)-F(2k+2)b}{F(2k+3)b-F(2k+4)}$$

olup doğrudur.

$$y_{6(k+1)+2} = y_{6k+8} = \frac{1}{x_{6k+5}-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{F(2k+1)e-F(2k+2)}{F(2k+3)-F(2k+2)e}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)e}{F(2k+1)e-F(2k+2)-F(2k+3)+F(2k+2)e}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)e}{\left[F(2k+1)+F(2k+2)\right]e-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)e}{F(2k+3)e-F(2k+4)}$$

doğru olduğu görülür.

$$z_{3(k+1)+2}=z_{3k+5}=x_{3k+4}y_{3k+4}z_{3k+2}$$

$$=\frac{F(k+1)f-F(k+2)}{F(k+3)-F(k+2)f}\frac{F(k+1)c-F(k+2)}{F(k+3)-F(k+2)c}\frac{h}{\left[F(k+1)c-F(k+2)\right]\left[F(k+1)f-F(k+2)\right]}$$

$$=\frac{h}{\left[F(k+2)c-F(k+3)\right]\left[F(k+2)f-F(k+3)\right]}$$

olup doğrudur.

$$x_{6(k+1)+3}=x_{6k+9}=\frac{1}{y_{6k+6}-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{F(2k+1)a-F(2k+2)}{F(2k+3)-F(2k+2)a}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)a}{F(2k+1)a-F(2k+2)-F(2k+3)+F(2k+2)a}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)a}{\left[F(2k+1)+F(2k+2)\right]a-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)a}{F(2k+3)a-F(2k+4)}$$

olup doğrudur.

$$y_{6(k+1)+3}=y_{6k+9}=\frac{1}{x_{6k+6}-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{F(2k+1)d-F(2k+2)}{F(2k+3)-F(2k+2)d}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)d}{F(2k+1)d-F(2k+2)-F(2k+3)+F(2k+2)d}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)d}{\left[F(2k+1)+F(2k+2)\right]d-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)d}{F(2k+3)d-F(2k+4)}$$

doğru olduğu görülür.

$$z_{3(k+1)+3}=z_{3k+6}=x_{3k+5}y_{3k+5}z_{3k+3}$$

$$=\frac{F(k+1)e-F(k+2)}{F(k+3)-F(k+2)e}\frac{F(k+1)b-F(k+2)}{F(k+3)-F(k+2)b}\frac{g}{\left[F(k+1)b-F(k+2)\right]\left[F(k+1)e-F(k+2)\right]}$$

$$=\frac{g}{\left[F(k+2)b-F(k+3)\right]\left[F(k+2)e-F(k+3)\right]}$$

doğru olduğu görülür.

$$x_{6(k+1)+4}=x_{6k+10}=\frac{1}{y_{6k+7}-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{F(2k+3)-F(2k+2)f}{F(2k+3)f-F(2k+4)}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)f-F(2k+4)}{F(2k+3)-F(2k+2)f-F(2k+3)f+F(2k+4)}$$

$$=\frac{F(2k+3)f-F(2k+4)}{\left[F(2k+3)+F(2k+4)\right]-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]f}$$

$$=\frac{F(2k+3)f-F(2k+4)}{F(2k+5)-F(2k+4)f}$$

olup doğrudur.

$$y_{6(k+1)+4}=y_{6k+10}=\frac{1}{x_{6k+7}-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{F(2k+3)-F(2k+2)c}{F(2k+3)c-F(2k+4)}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)c-F(2k+4)}{F(2k+3)-F(2k+2)c-F(2k+3)c+F(2k+4)}$$

$$=\frac{F(2k+3)c-F(2k+4)}{\left[F(2k+3)+F(2k+4)\right]-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]c}$$

$$=\frac{F(2k+3)c-F(2k+4)}{F(2k+5)-F(2k+4)c}$$

olup doğrudur.

$$x_{6(k+1)+5}=x_{6k+11}=\frac{1}{y_{6k+8}-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{F(2k+3)-F(2k+2)e}{F(2k+3)e-F(2k+4)}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)e-F(2k+4)}{F(2k+3)-F(2k+2)e-F(2k+3)e+F(2k+4)}$$

$$=\frac{F(2k+3)e-F(2k+4)}{\left[F(2k+3)+F(2k+4)\right]-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]e}$$

$$=\frac{F(2k+3)e-F(2k+4)}{F(2k+5)-F(2k+4)e}$$

olup doğrudur.

$$y_{6(k+1)+5}=y_{6k+11}=\frac{1}{x_{6k+8}-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{F(2k+3)-F(2k+2)b}{F(2k+3)b-F(2k+4)}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)b-F(2k+4)}{F(2k+3)-F(2k+2)b-F(2k+3)b+F(2k+4)}$$

$$=\frac{F(2k+3)b-F(2k+4)}{\left[F(2k+3)+F(2k+4)\right]-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]b}$$

$$=\frac{F(2k+3)b-F(2k+4)}{F(2k+5)-F(2k+4)b}$$

doğru olduğu görülür.

$$x_{6(k+1)+6}=x_{6k+12}=\frac{1}{y_{6k+9}-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{F(2k+3)-F(2k+2)d}{F(2k+3)d-F(2k+4)}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)d-F(2k+4)}{F(2k+3)-F(2k+2)d-F(2k+3)d+F(2k+4)}$$

$$=\frac{F(2k+3)d-F(2k+4)}{\left[F(2k+3)+F(2k+4)\right]-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]d}$$

$$=\frac{F(2k+3)d-F(2k+4)}{F(2k+5)-F(2k+4)d}$$

olup doğrudur.

$$y_{6(k+1)+6} = y_{6k+12} = \frac{1}{x_{6k+9} - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{F(2k+3) - F(2k+2)a}{F(2k+3)a - F(2k+4)} - 1}$$

$$= \frac{F(2k+3)a - F(2k+4)}{F(2k+3) - F(2k+2)a - F(2k+3)a + F(2k+4)}$$

$$= \frac{F(2k+3)a - F(2k+4)}{\left[F(2k+3) + F(2k+4)\right] - \left[F(2k+2) + F(2k+3)\right]a}$$

$$= \frac{F(2k+3)a - F(2k+4)}{F(2k+5) - F(2k+4)a}$$

doğru olduğu görülür.

Böylece tümevarım yardımıyla (3.1.1) fark denklem sisteminin tüm çözümlerinin $n \geq 3$ için doğru olduğu ispatlanmış olur.

Sonuç 3.1.1. Başlangıç şartları $y_0 = a$, $y_{-1} = b$, $y_{-2} = c$, $x_0 = d$, $x_{-1} = e$, $x_{-2} = f$, $z_0 = g$, $z_{-1} = h$, $z_{-2} = j$ olmak üzere (3.1.1) fark denklem sisteminin bütün çözümleri için

$$x_{6n+4} \cdot y_{6n+1} - x_{6n+4} = y_{6n+4} \cdot x_{6n+1} - y_{6n+4}$$

$$x_{6n+5} \cdot y_{6n+2} - x_{6n+5} = y_{6n+5} \cdot x_{6n+2} - y_{6n+5}$$

$$x_{6n+6} \cdot y_{6n+3} - x_{6n+6} = y_{6n+6} \cdot x_{6n+3} - y_{6n+6}$$

eşitlikleri geçerlidir.

3.2. $x_{n+1}=\dfrac{1}{y_{n-3}-1}$, $y_{n+1}=\dfrac{1}{x_{n-3}-1}$, $z_{n+1}=x_n y_n z_{n-3}$ FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde;

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-3}-1},\ y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-3}-1},\ z_{n+1}=x_n y_n z_{n-3} \tag{3.2.1}$$

fark denklem sisteminin çözümleri incelenmiştir.

Teorem 3.1.1. Başlangıç şartları $y_0=a$, $y_{-1}=b$, $y_{-2}=c$, $y_{-3}=d$, $x_0=e$, $x_{-1}=f$, $x_{-2}=g$, $x_{-3}=h$, $z_0=j$, $z_{-1}=l$, $z_{-2}=m$, $z_{-3}=n$, $a,b,c,d,e,f,g,h\neq 1$ olmak üzere (3.2.1) fark denklem sisteminin bütün çözümleri; $n\geq 4$, $k\in N$ ve

$$F(k)=\begin{cases} 0 & , \ k=0 \\ 1 & , \ k=1 \\ F(k-1)+F(k-2) & , \ k>1 \end{cases}$$

için

$$x_{8k+1}=\frac{F(2k+1)-F(2k)d}{F(2k+1)d-F(2k+2)}$$

$$y_{8k+1}=\frac{F(2k+1)-F(2k)h}{F(2k+1)h-F(2k+2)}$$

$$z_{4k+1}=\frac{ean}{\left[F(k)a-F(k+1)\right]\left[F(k)e-F(k+1)\right]}$$

$$x_{8k+2} = \frac{F(2k+1) - F(2k)c}{F(2k+1)c - F(2k+2)}$$

$$y_{8k+2} = \frac{F(2k+1) - F(2k)g}{F(2k+1)g - F(2k+2)}$$

$$z_{4k+2} = \frac{m}{[F(k+1)d - F(k+2)][F(k+1)h - F(k+2)]}$$

$$x_{8k+3} = \frac{F(2k+1) - F(2k)b}{F(2k+1)b - F(2k+2)}$$

$$y_{8k+3} = \frac{F(2k+1) - F(2k)f}{F(2k+1)f - F(2k+2)}$$

$$z_{4k+3} = \frac{l}{[F(k+1)c - F(k+2)][F(k+1)g - F(k+2)]}$$

$$x_{8k+4} = \frac{F(2k+1) - F(2k)a}{F(2k+1)a - F(2k+2)}$$

$$y_{8k+4} = \frac{F(2k+1) - F(2k)e}{F(2k+1)e - F(2k+2)}$$

$$z_{4k+4} = \frac{j}{[F(k+1)b - F(k+2)][F(k+1)f - F(k+2)]}$$

$$x_{8k+5} = \frac{F(2k+1)h - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)h}$$

$$y_{8k+5} = \frac{F(2k+1)d - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)d}$$

$$x_{8k+6} = \frac{F(2k+1)g - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)g}$$

$$y_{8k+6}=\frac{F(2k+1)c-F(2k+2)}{F(2k+3)-F(2k+2)c}$$

$$x_{8k+7}=\frac{F(2k+1)f-F(2k+2)}{F(2k+3)-F(2k+2)f}$$

$$y_{8k+7}=\frac{F(2k+1)b-F(2k+2)}{F(2k+3)-F(2k+2)b}$$

$$x_{8k+8}=\frac{F(2k+1)e-F(2k+2)}{F(2k+3)-F(2k+2)e}$$

$$y_{8k+8}=\frac{F(2k+1)a-F(2k+2)}{F(2k+3)-F(2k+2)a}$$

şeklindedir.

İspat:

$n=0$ için (3.2.1) den

$$x_1=\frac{1}{y_{-3}-1}=\frac{1}{d-1}$$

$$y_1=\frac{1}{x_{-3}-1}=\frac{1}{h-1}$$

$$z_1=x_0y_0z_{-3}=ean$$

$n=1$ için

$$x_2=\frac{1}{y_{-2}-1}=\frac{1}{c-1}$$

$$y_2 = \frac{1}{x_{-2} - 1} = \frac{1}{g - 1}$$

$$z_2 = x_1 y_1 z_{-2} = \frac{m}{(d-1)(h-1)}$$

$n = 2$ için

$$x_3 = \frac{1}{y_{-1} - 1} = \frac{1}{b - 1}$$

$$y_3 = \frac{1}{x_{-1} - 1} = \frac{1}{f - 1}$$

$$z_3 = x_2 y_2 z_{-1} = \frac{l}{(c-1)(g-1)}$$

ve $n = 3$ için

$$x_4 = \frac{1}{y_0 - 1} = \frac{1}{a - 1}$$

$$y_4 = \frac{1}{x_0 - 1} = \frac{1}{e - 1}$$

$$z_4 = x_3 y_3 z_0 = \frac{j}{(b-1)(f-1)}$$

olduğu açıktır.

$n \geq 4$ için x_n ve y_n çözümlerinin doğruluğunu tümevarımla ispatlayalım.

$n = 4$ için

$$x_5 = \frac{1}{y_1 - 1} = \frac{1}{\frac{1}{h-1} - 1} = \frac{1}{\frac{2-h}{h-1}} = \frac{h-1}{2-h}$$

$$y_5 = \frac{1}{x_1 - 1} = \frac{1}{\frac{1}{d-1} - 1} = \frac{1}{\frac{2-d}{d-1}} = \frac{d-1}{2-d}$$

$$z_5 = x_4 y_4 z_1 = \frac{1}{a-1}\frac{1}{e-1}ean = \frac{ean}{(a-1)(e-1)}$$

$n = 5$ için

$$x_6 = \frac{1}{y_2 - 1} = \frac{1}{\frac{1}{g-1} - 1} = \frac{1}{\frac{2-g}{g-1}} = \frac{g-1}{2-g}$$

$$y_6 = \frac{1}{x_2 - 1} = \frac{1}{\frac{1}{c-1} - 1} = \frac{1}{\frac{2-c}{c-1}} = \frac{c-1}{2-c}$$

$$z_6 = x_5 y_5 z_2 = \frac{h-1}{2-h}\frac{d-1}{2-d}\frac{m}{(d-1)(h-1)} = \frac{m}{(d-2)(h-2)}$$

$n = 6$ için

$$x_7 = \frac{1}{y_3 - 1} = \frac{1}{\frac{1}{f-1} - 1} = \frac{1}{\frac{2-f}{f-1}} = \frac{f-1}{2-f}$$

$$y_7 = \frac{1}{x_3 - 1} = \frac{1}{\frac{1}{b-1} - 1} = \frac{1}{\frac{2-b}{b-1}} = \frac{b-1}{2-b}$$

$$z_7 = x_6 y_6 z_3 = \frac{g-1}{2-g}\frac{c-1}{2-c}\frac{l}{(c-1)(g-1)} = \frac{l}{(c-2)(g-2)}$$

$n = 7$ için

$$x_8 = \frac{1}{y_4 - 1} = \frac{1}{\frac{1}{e-1} - 1} = \frac{1}{\frac{2-e}{e-1}} = \frac{e-1}{2-e}$$

$$y_8 = \frac{1}{x_4 - 1} = \frac{1}{\frac{1}{a-1} - 1} = \frac{1}{\frac{2-a}{a-1}} = \frac{a-1}{2-a}$$

$$z_8 = x_7 y_7 z_4 = \frac{f-1}{2-f}\frac{b-1}{2-b}\frac{j}{(b-1)(f-1)} = \frac{j}{(b-2)(f-2)}$$

$n = 8$ için

$$x_9 = \frac{1}{y_5 - 1} = \frac{1}{\frac{d-1}{2-d} - 1} = \frac{1}{\frac{2d-3}{2-d}} = \frac{2-d}{2d-3}$$

$$y_9 = \frac{1}{x_5 - 1} = \frac{1}{\frac{h-1}{2-h} - 1} = \frac{1}{\frac{2h-3}{2-h}} = \frac{2-h}{2h-3}$$

$$z_9 = x_8 y_8 z_5 = \frac{e-1}{2-e}\frac{a-1}{2-a}\frac{ean}{(a-1)(e-1)} = \frac{ean}{(a-2)(e-2)}$$

olup doğrudur.

$k = 0,1,2,\ldots$ olmak üzere $n = k$ için

$$x_{8k+1} = \frac{F(2k+1) - F(2k)d}{F(2k+1)d - F(2k+2)}$$

$$y_{8k+1} = \frac{F(2k+1) - F(2k)h}{F(2k+1)h - F(2k+2)}$$

$$z_{4k+1} = \frac{ean}{\left[F(k)a - F(k+1)\right]\left[F(k)e - F(k+1)\right]}$$

$$x_{8k+2} = \frac{F(2k+1) - F(2k)c}{F(2k+1)c - F(2k+2)}$$

$$y_{8k+2} = \frac{F(2k+1) - F(2k)g}{F(2k+1)g - F(2k+2)}$$

$$z_{4k+2} = \frac{m}{\left[F(k+1)d - F(k+2)\right]\left[F(k+1)h - F(k+2)\right]}$$

$$x_{8k+3} = \frac{F(2k+1) - F(2k)b}{F(2k+1)b - F(2k+2)}$$

$$y_{8k+3} = \frac{F(2k+1) - F(2k)f}{F(2k+1)f - F(2k+2)}$$

$$z_{4k+3} = \frac{l}{\left[F(k+1)c - F(k+2)\right]\left[F(k+1)g - F(k+2)\right]}$$

$$x_{8k+4} = \frac{F(2k+1) - F(2k)a}{F(2k+1)a - F(2k+2)}$$

$$y_{8k+4} = \frac{F(2k+1) - F(2k)e}{F(2k+1)e - F(2k+2)}$$

$$z_{4k+4} = \frac{j}{\left[F(k+1)b - F(k+2)\right]\left[F(k+1)f - F(k+2)\right]}$$

$$x_{8k+5} = \frac{F(2k+1)h - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)h}$$

$$y_{8k+5} = \frac{F(2k+1)d - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)d}$$

$$x_{8k+6} = \frac{F(2k+1)g - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)g}$$

$$y_{8k+6} = \frac{F(2k+1)c - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)c}$$

$$x_{8k+7} = \frac{F(2k+1)f - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)f}$$

$$y_{8k+7} = \frac{F(2k+1)b - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)b}$$

$$x_{8k+8} = \frac{F(2k+1)e - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)e}$$

$$y_{8k+8} = \frac{F(2k+1)a - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)a}$$

olduğunu kabul edelim.

$n = k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$x_{8(k+1)+1} = x_{8k+9} = \frac{1}{y_{8k+5} - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{F(2k+1)d - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)d} - 1}$$

$$= \frac{F(2k+3) - F(2k+2)d}{F(2k+1)d - F(2k+2) - F(2k+3) + F(2k+2)d}$$

$$= \frac{F(2k+3) - F(2k+2)d}{\left[F(2k+1) + F(2k+2)\right]d - \left[F(2k+2) + F(2k+3)\right]}$$

$$= \frac{F(2k+3) - F(2k+2)d}{F(2k+3)d - F(2k+4)}$$

olup doğrudur.

$$y_{8(k+1)+1} = y_{8k+9} = \frac{1}{x_{8k+5} - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{F(2k+1)h - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)h} - 1}$$

$$= \frac{F(2k+3) - F(2k+2)h}{F(2k+1)h - F(2k+2) - F(2k+3) + F(2k+2)h}$$

$$= \frac{F(2k+3) - F(2k+2)h}{\left[F(2k+1) + F(2k+2)\right]h - \left[F(2k+2) + F(2k+3)\right]}$$

$$= \frac{F(2k+3) - F(2k+2)h}{F(2k+3)h - F(2k+4)}$$

doğru olduğu görülür.

$$z_{4(k+1)+1} = z_{4k+5} = x_{4k+4} y_{4k+4} z_{4k+1}$$

$$= \frac{F(k+1) - F(k)a}{F(k+1)a - F(k+2)} \frac{F(k+1) - F(k)e}{F(k+1)e - F(k+2)} \frac{ean}{\left[F(k)a - F(k+1)\right]\left[F(k)e - F(k+1)\right]}$$

$$= \frac{ean}{\left[F(k+1)a - F(k+2)\right]\left[F(k+1)e - F(k+2)\right]}$$

doğru olduğu görülür.

$$x_{8(k+1)+2} = x_{8k+10} = \frac{1}{y_{8k+6} - 1}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{F(2k+1)c-F(2k+2)}{F(2k+3)-F(2k+2)c}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)c}{F(2k+1)c-F(2k+2)-F(2k+3)+F(2k+2)c}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)c}{\left[F(2k+1)+F(2k+2)\right]c-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)c}{F(2k+3)c-F(2k+4)}$$

olup doğrudur.

$$y_{8(k+1)+2}=y_{8k+10}=\frac{1}{x_{8k+6}-1}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{F(2k+1)g-F(2k+2)}{F(2k+3)-F(2k+2)g}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)g}{F(2k+1)g-F(2k+2)-F(2k+3)+F(2k+2)g}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)g}{\left[F(2k+1)+F(2k+2)\right]g-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)g}{F(2k+3)g-F(2k+4)}$$

doğru olduğu görülür.

$$z_{4(k+1)+2} = z_{4k+6} = x_{4k+5} y_{4k+5} z_{4k+2}$$

$$= \frac{F(k+1)h - F(k+2)}{F(k+3) - F(k+2)h} \frac{F(k+1)d - F(k+2)}{F(k+3) - F(k+2)d} \frac{m}{\left[F(k+1)d - F(k+2)\right]\left[F(k+1)h - F(k+2)\right]}$$

$$= \frac{m}{\left[F(k+2)d - F(k+3)\right]\left[F(k+2)h - F(k+3)\right]}$$

olup doğrudur.

$$x_{8(k+1)+3} = x_{8k+11} = \frac{1}{y_{8k+7} - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{F(2k+1)b - F(2k+2)}{F(2k+3) - F(2k+2)b} - 1}$$

$$= \frac{F(2k+3) - F(2k+2)b}{F(2k+1)b - F(2k+2) - F(2k+3) + F(2k+2)b}$$

$$= \frac{F(2k+3) - F(2k+2)b}{\left[F(2k+1) + F(2k+2)\right]b - \left[F(2k+2) + F(2k+3)\right]}$$

$$= \frac{F(2k+3) - F(2k+2)b}{F(2k+3)b - F(2k+4)}$$

olup doğrudur.

$$y_{8(k+1)+3} = y_{8k+11} = \frac{1}{x_{8k+7} - 1}$$

$$=\frac{1}{\frac{F(2k+1)f-F(2k+2)}{F(2k+3)-F(2k+2)f}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)f}{F(2k+1)f-F(2k+2)-F(2k+3)+F(2k+2)f}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)f}{\left[F(2k+1)+F(2k+2)\right]f-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)f}{F(2k+3)f-F(2k+4)}$$

doğru olduğu görülür.

$$z_{4(k+1)+3}=z_{4k+7}=x_{4k+6}y_{4k+6}z_{4k+3}$$

$$=\frac{F(k+1)g-F(k+2)}{F(k+3)-F(k+2)g}\frac{F(k+1)c-F(k+2)}{F(k+3)-F(k+2)c}\frac{l}{\left[F(k+1)c-F(k+2)\right]\left[F(k+1)g-F(k+2)\right]}$$

$$=\frac{l}{\left[F(k+2)c-F(k+3)\right]\left[F(k+2)g-F(k+3)\right]}$$

doğru olduğu görülür.

$$x_{8(k+1)+4}=x_{8k+12}=\frac{1}{y_{8k+8}-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{F(2k+1)a-F(2k+2)}{F(2k+3)-F(2k+2)a}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)a}{F(2k+1)a-F(2k+2)-F(2k+3)+F(2k+2)a}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)a}{\left[F(2k+1)+F(2k+2)\right]a-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)a}{F(2k+3)a-F(2k+4)}$$

olup doğrudur.

$$y_{8(k+1)+4}=y_{8k+12}=\frac{1}{x_{8k+8}-1}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{F(2k+1)e-F(2k+2)}{F(2k+3)-F(2k+2)e}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)e}{F(2k+1)e-F(2k+2)-F(2k+3)+F(2k+2)e}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)e}{\left[F(2k+1)+F(2k+2)\right]e-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]}$$

$$=\frac{F(2k+3)-F(2k+2)e}{F(2k+3)e-F(2k+4)}$$

doğru olduğu görülür.

$$z_{4(k+1)+4}=z_{4k+8}=x_{4k+7}y_{4k+7}z_{4k+4}$$

$$=\frac{F(k+1)f-F(k+2)}{F(k+3)-F(k+2)f}\frac{F(k+1)b-F(k+2)}{F(k+3)-F(k+2)b}\frac{j}{\left[F(k+1)b-F(k+2)\right]\left[F(k+1)f-F(k+2)\right]}$$

$$=\frac{j}{\left[F(k+2)b-F(k+3)\right]\left[F(k+2)f-F(k+3)\right]}$$

doğru olduğu görülür.

$$x_{8(k+1)+5}=x_{8k+13}=\frac{1}{y_{8k+9}-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{F(2k+3)-F(2k+2)h}{F(2k+3)h-F(2k+4)}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)h-F(2k+4)}{F(2k+3)-F(2k+2)h-F(2k+3)h+F(2k+4)}$$

$$=\frac{F(2k+3)h-F(2k+4)}{\left[F(2k+3)+F(2k+4)\right]-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]h}$$

$$=\frac{F(2k+3)h-F(2k+4)}{F(2k+5)-F(2k+4)h}$$

olup doğrudur.

$$y_{8(k+1)+5}=y_{8k+13}=\frac{1}{x_{8k+9}-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{F(2k+3)-F(2k+2)d}{F(2k+3)d-F(2k+4)}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)d-F(2k+4)}{F(2k+3)-F(2k+2)d-F(2k+3)d+F(2k+4)}$$

$$=\frac{F(2k+3)d-F(2k+4)}{\left[F(2k+3)+F(2k+4)\right]-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]d}$$

$$=\frac{F(2k+3)d-F(2k+4)}{F(2k+5)-F(2k+4)d}$$

doğru olduğu görülür.

$$x_{8(k+1)+6}=x_{8k+14}=\frac{1}{y_{8k+10}-1}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{F(2k+3)-F(2k+2)g}{F(2k+3)g-F(2k+4)}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)g-F(2k+4)}{F(2k+3)-F(2k+2)g-F(2k+3)g+F(2k+4)}$$

$$=\frac{F(2k+3)g-F(2k+4)}{\left[F(2k+3)+F(2k+4)\right]-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]g}$$

$$=\frac{F(2k+3)g-F(2k+4)}{F(2k+5)-F(2k+4)g}$$

olup doğrudur.

$$y_{8(k+1)+6}=y_{8k+14}=\frac{1}{x_{8k+10}-1}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{F(2k+3)-F(2k+2)c}{F(2k+3)c-F(2k+4)}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)c-F(2k+4)}{F(2k+3)-F(2k+2)c-F(2k+3)c+F(2k+4)}$$

$$=\frac{F(2k+3)c-F(2k+4)}{\left[F(2k+3)+F(2k+4)\right]-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]c}$$

$$=\frac{F(2k+3)c-F(2k+4)}{F(2k+5)-F(2k+4)c}$$

doğru olduğu görülür.

$$x_{8(k+1)+7}=x_{8k+15}=\frac{1}{y_{8k+11}-1}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{F(2k+3)-F(2k+2)f}{F(2k+3)f-F(2k+4)}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)f-F(2k+4)}{F(2k+3)-F(2k+2)f-F(2k+3)f+F(2k+4)}$$

$$=\frac{F(2k+3)f-F(2k+4)}{\left[F(2k+3)+F(2k+4)\right]-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]f}$$

$$=\frac{F(2k+3)f-F(2k+4)}{F(2k+5)-F(2k+4)f}$$

olup doğrudur.

$$y_{8(k+1)+7}=y_{8k+15}=\frac{1}{x_{8k+11}-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{F(2k+3)-F(2k+2)b}{F(2k+3)b-F(2k+4)}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)b-F(2k+4)}{F(2k+3)-F(2k+2)b-F(2k+3)b+F(2k+4)}$$

$$=\frac{F(2k+3)b-F(2k+4)}{\left[F(2k+3)+F(2k+4)\right]-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]b}$$

$$=\frac{F(2k+3)b-F(2k+4)}{F(2k+5)-F(2k+4)b}$$

doğru olduğu görülür.

$$x_{8(k+1)+8}=x_{8k+16}=\frac{1}{y_{8k+12}-1}$$

$$=\frac{1}{\frac{F(2k+3)-F(2k+2)e}{F(2k+3)e-F(2k+4)}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)e-F(2k+4)}{F(2k+3)-F(2k+2)e-F(2k+3)e+F(2k+4)}$$

$$=\frac{F(2k+3)e-F(2k+4)}{\left[F(2k+3)+F(2k+4)\right]-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]e}$$

$$=\frac{F(2k+3)e-F(2k+4)}{F(2k+5)-F(2k+4)e}$$

olup doğrudur.

$$y_{8(k+1)+8}=y_{8k+16}=\frac{1}{x_{8k+12}-1}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{F(2k+3)-F(2k+2)a}{F(2k+3)a-F(2k+4)}-1}$$

$$=\frac{F(2k+3)a-F(2k+4)}{F(2k+3)-F(2k+2)a-F(2k+3)a+F(2k+4)}$$

$$=\frac{F(2k+3)a-F(2k+4)}{\left[F(2k+3)+F(2k+4)\right]-\left[F(2k+2)+F(2k+3)\right]a}$$

$$=\frac{F(2k+3)a-F(2k+4)}{F(2k+5)-F(2k+4)a}$$

doğru olduğu görülür.

Böylece tümevarım yardımıyla (3.2.1) fark denklem sisteminin tüm çözümlerinin $n \geq 4$ için doğru olduğu ispatlanmış olur.

Sonuç 3.2.1. Başlangıç şartları $y_0 = a$, $y_{-1} = b$, $y_{-2} = c$, $y_{-3} = d$, $x_0 = e$, $x_{-1} = f$, $x_{-2} = g$, $x_{-3} = h$, $z_0 = j$, $z_{-1} = l$, $z_{-2} = m$, $z_{-3} = n$ olmak üzere (3.2.1) fark denklem sisteminin bütün çözümleri için

$$x_{8n+5}.y_{8n+1} - x_{8n+5} = y_{8n+5}.x_{8n+1} - y_{8n+5}$$

$$x_{8n+6}.y_{8n+2} - x_{8n+6} = y_{8n+6}.x_{8n+2} - y_{8n+6}$$

$$x_{8n+7}.y_{8n+3} - x_{8n+7} = y_{8n+7}.x_{8n+3} - y_{8n+7}$$

$$x_{8n+8}.y_{8n+4} - x_{8n+8} = y_{8n+8}.x_{8n+4} - y_{8n+8}$$

eşitlikleri geçerlidir.

3.3. NÜMERİK SONUÇLAR

Bu kısımda (3.1.1) ve (3.2.1) denklem sistemleri için nümerik örnekler verilmiştir. Keyfi başlangıç değerleri için verilen sistemlerin Maple Matematik Programı kullanılarak (x_n, y_n, z_n) çözümleri elde edilmiştir.

Örnek 3.3.1. $x_{-2} = 5$, $x_{-1} = 4$, $x_0 = 3$, $y_{-2} = 0.5$, $y_{-1} = 1.2$, $y_0 = 3.8$, $z_{-2} = 2$, $z_{-1} = 6$, $z_0 = 10$ başlangıç şartları altında (3.1.1) denklem sisteminin çözümlerini inceleyelim:

Tablo-1:

(x_n, y_n, z_n) **Çözümleri**

n	x_n	y_n	z_n	n	x_n	y_n	z_n
1	-2.0000000	0.25000000	22.8000000	11	-0.7142857	-0.4285714	-0.1714285
2	5.00000000	0.33333333	-3.0000000	12	-0.7500000	-0.7187499	-1.0204081
3	0.35714285	0.50000000	16.6666666	13	-0.6363636	-0.5882352	0.89062499
4	-1.3333333	-0.3333333	4.07142857	14	-0.6999999	-0.5833333	-0.0641711
5	-1.5000000	0.25000000	-1.3333333	15	-0.5818181	-0.5714285	-0.4166666
6	-2.0000000	-1.5555555	-6.2499999	16	-0.6296296	-0.6111111	-0.2961038
7	-0.7500000	-0.4285714	12.6666666	17	-0.6315789	-0.5882352	-0.0246913
8	-1.3333333	-0.4000000	-0.4285714	18	-0.6363636	-0.6321839	-0.1547987
9	-0.3913043	-0.3333333	-3.3333333	19	-0.6206896	-0.6136363	-0.1191222
10	-0.6999999	-0.5714285	1.65217391	20	-0.6296296	-0.6129032	-0.0094043

Örnek 3.3.2. $x_{-2} = 15$, $x_{-1} = 6$, $x_0 = 1.1$, $y_{-2} = 20$, $y_{-1} = 8$, $y_0 = 1.4$, $z_{-2} = 6.2$, $z_{-1} = -3$, $z_0 = -3.5$ başlangıç şartları altında (3.1.1) denklem sisteminin çözümlerini inceleyelim:

Tablo-2:

(x_n, y_n, z_n) **Çözümleri**

n	x_n	y_n	z_n
1	0.05263157	0.07142857	9.54800000
2	0.14285714	0.20000000	-0.0112781
3	2.50000000	10.0000000	-0.1000000
4	-1.0769230	-1.0555555	238.700000
5	-1.2500000	-1.1666666	-0.0128205
6	0.11111111	0.66666666	-0.1458333
7	-0.4864864	-0.4814814	17.6814814
8	-0.4615384	-0.4444444	-0.0030030
9	-3.0000000	-1.1250000	-0.0299145
10	-0.6749999	-0.6727272	59.6750000

n	x_n	y_n	z_n
11	-0.6923076	-0.6842105	-0.0013636
12	-0.4705882	-0.2500000	-0.0141700
13	-0.5978260	-0.5970149	7.0205882
14	-0.5937500	-0.5909090	-0.0004866
15	-0.8000000	-0.6800000	-0.0049715
16	-0.6261682	-0.6258503	3.81920000
17	-0.6285714	-0.6274509	-0.0001907
18	-0.5952380	-0.5555555	-0.0019607
19	-0.6150627	-0.6149425	1.26296296
20	-0.6144578	-0.6140350	-0.0000721

Örnek 3.3.3. $x_{-3} = -1.5$, $x_{-2} = 1.9$, $x_{-1} = -16$, $x_0 = 4.5$, $y_{-3} = -4.5$, $y_{-2} = 24$, $y_{-1} = 36$, $y_0 = 14$, $z_{-3} = 41$, $z_{-2} = -1$, $z_{-1} = 4$, $z_0 = -0.5$ başlangıç şartları altında (3.2.1) denklem sisteminin çözümlerini inceleyelim:

Tablo-3:

(x_n, y_n, z_n) **Çözümleri**

n	x_n	y_n	z_n
1	-0.1818181	-0.4444444	25.8300000
2	0.04347826	1.11111111	-0.0727272
3	0.02857142	-0.0588235	0.19323671
4	0.07692307	0.28571428	0.00084033
5	-0.7142857	-0.8461538	56.7692307
6	9.00000000	-1.0454545	-0.0439560
7	-0.9444444	-1.0294117	-1.8181818
8	-1.4000000	-1.0833333	0.00081699
9	-0.5416666	-0.5833333	86.0999999
10	-0.4888888	0.12499999	-0.0138888

n	x_n	y_n	z_n
11	-0.4927536	-0.5142857	0.11111111
12	-0.4800000	-0.4166666	0.00020703
13	-0.6315789	-0.6486486	17.2200000
14	-1.1428571	-0.6716417	-0.0056899
15	-0.6603773	-0.6699029	0.08528784
16	-0.7058823	-0.6756756	0.00009159
17	-0.6065573	-0.6129032	8.21303656
18	-0.5982142	-0.4666666	-0.0021152
19	-0.5988372	-0.6022727	0.02380952
20	-0.5967741	-0.5862068	0.00003303

Örnek 3.3.4. $x_{-3}=5$, $x_{-2}=9$, $x_{-1}=5$, $x_0=6$, $y_{-3}=15$, $y_{-2}=24$, $y_{-1}=20$, $y_0=17$, $z_{-3}=24$, $z_{-2}=30$, $z_{-1}=16$, $z_0=-13$ başlangıç şartları altında (3.2.1) denklem sisteminin çözümlerini inceleyelim:

Tablo-4:

(x_n, y_n, z_n) Çözümleri

n	x_n	y_n	z_n
1	0.07142857	0.25000000	2448.00000
2	0.04347826	0.12500000	0.53571428
3	0.05263157	0.25000000	0.08695652
4	0.06250000	0.20000000	-0.1710526
5	-1.3333333	-1.0769230	30.6000000
6	-1.1428571	-1.0454545	0.76923076
7	-1.3333333	-1.0555555	0.10389610
8	-1.2500000	-1.0666666	-0.2407402
9	-0.4814814	-0.4285714	40.8000000
10	-0.4888888	-0.4666666	0.15873015

n	x_n	y_n	z_n
11	-0.4864864	-0.4285714	0.0237037
12	-0.4838709	-0.4444444	-0.0501930
13	-0.6999999	-0.6749999	8.7741935
14	-0.6818181	-0.6716417	0.07499999
15	-0.6999999	-0.6727272	0.01085481
16	-0.6923076	-0.6739130	-0.0236363
17	-0.5970149	-0.5882352	4.09364548
18	-0.5982142	-0.5945945	0.02633889
19	-0.5978260	-0.5882352	0.00386100
20	-0.5974025	-0.5909090	-0.0083120

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada,

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-2}-1},\ y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-2}-1},\ z_{n+1}=x_n y_n z_{n-2}$$

ve

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-3}-1},\ y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-3}-1},\ z_{n+1}=x_n y_n z_{n-3}$$

fark denklem sistemlerinin çözümleri incelenmiş, farklı durumlar için genel çözümler elde edilmiştir. Bu sistemlerde katsayılar farklı parametreler veya dizi alınarak yeni sistemler elde edilebilir ve oluşturulan yeni denklem sistemlerinin çözümleri incelenebilir. Ayrıca bu sistemlerin en genel hali olan

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-k}-1},\ y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-k}-1},\ z_{n+1}=x_n y_n z_{n-k}$$

fark denklem sisteminin çözümleri, periyodikliği ve kararlığı üzerine çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

Amleh, A. M. (1998). Boundedness Periodicity and Stability of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Camouzis, E. ve Papaschinopoulos, G. (2004). Global asymptotic behavior of positive solutions on the system of rational difference equations $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{y_{n-m}}$, $y_{n+1} = 1 + \frac{y_n}{x_{n-m}}$. *Applied Mathematics Letters, 17*(6), 733-737.

Çinar, C. (2004). On the positive solutions of the difference equation system $x_{n+1} = \frac{1}{y_n}, y_{n+1} = \frac{y_n}{x_{n-1}y_{n-1}}$. *Applied Mathematics and Computation, 158*(2), 303-305.

Çinar, C. (2004). On the difference equation $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{-1 + x_n x_{n-1}}$. *Applied Mathematics and Computation, 158*(3), 813-816.

Çinar, C. (2004). On the solutions of the difference equation $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{-1 + a x_n x_{n-1}}$. *Applied Mathematics and Computation, 158*(3), 793-797.

Çinar, C. ve Yalçınkaya, İ. (2004). On the positive solutions of difference equation system $x_{n+1} = \frac{1}{z_n}$, $y_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}y_{n-1}}$, $z_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}}$. *Int. Mathematical Journal, 5*(5), 517-519.

Çinar, C. ve Yalçınkaya, İ. (2004). On the positive solutions of difference equation system $x_{n+1} = \frac{1}{z_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n}{x_{n-1}}$, $z_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}}$. *Int. Mathematical Journal, 5*(5), 525-527.

Clark, D. ve Kulenović, M. R. S. (2002). A coupled system of rational difference equations. *Computers and Mathematics with Applications, 43*, 849-867.

Clark, D., Kulenović, M. R. S. ve Selgrade, J. F. (2005). On a system of rational difference equations, *Journal of Difference Equations and Applications, 11*(7), 565-580.

Devault, R. (1996). Permanence and Stability In Models of a Perannial Grass, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Douraki, M. J., Dehghan, M. ve Razzaghi, M. (2006). On the higher order rational recursive sequence $x_n = \frac{A}{x_{n-k}} + \frac{B}{x_{n-3k}}$. *Applied Mathematics and Computation, 173*, 710-723.

Elabbasy, E. M., El-Metwally, H. ve Elsayed, E. M. (2006). On the difference equation $x_{n+1} = ax_n - \frac{bx_n}{cx_n - dx_{n-1}}$, *Advances in Difference Equations, 2006,* 82579, 1-10.

Elaydi, S., 1996, An Introduction to Difference Equations, Spinger-Verlag, New York.

El-Owaidy, H. M., Ahmed, A. M. ve Mousa, M. S., (2004). On asymptotic behaviour of the difference equation $x_{n+1} = a + \frac{x_{n-k}}{x_n}$. *Applied Mathematics and Computation, 147*, 163-167.

Elsayed, E. M. (2009). Qualitative behavior of difference equation of order two. *Mathematical and Computer Modelling, 50*, 1130-1141.

Elsayed, E. M. (2012). Solutions of rational difference system of order two. *Mathematical and Computer Modelling, 55*, 378-384.

Feuer, J. (1998). Invariants and Invariant Regions of Lyness-Type Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Feuer, J. (2004). On the behavior of solutions of $x_{n+1} = p + \frac{x_{n-1}}{x_n}$. *Applicable Analysis, 83*(6), 599-606.

Grove, E. A., Ladas, G., McGrath L. C. ve Teixeira, C. T. (2001). Existence and behavior of solutions of a rational system. *Communications on Applied Nonlinear Analysis, 3*(1), 1-25.

Irićanin, B. ve Stević, S. (2006). Some systems of nonlinear difference equations of higher order with periodic solutions. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A Mathematical Analysis, 13*, 499–507.

Kent, C. M. (1998). Stability and Periodicity of Some Difference Equations and Applications, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Kulenović, M. R. S. ve Nurkanović, M. (2003). Global asymptotic behavior of a two-dimensional system of difference equations modeling cooperation. *Journal of Difference Equations and Applications, 9*(1), 149-159.

Kulenović, M. R. S. ve Nurkanović, M. (2005). Global behavior of a three-dimensional linear fractional system of difference equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 310*, 673-689.

Kurbanlı, A. S. (2011). On the behavior of solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}-1}, y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}-1}, z_{n+1}=\frac{z_{n-1}}{y_n z_{n-1}-1}$. *Discrete Dynamics in Nature and Society, 2011*, 932362, 1-12.

Kurbanlı, A. S., Çinar, C., Şimşek, D. (2011). On the periodicity of solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1}=\frac{x_{n-1}+y_n}{y_n x_{n-1}-1}, y_{n+1}=\frac{y_{n-1}+x_n}{x_n y_{n-1}-1}$. *Applied Mathematics, 2*, 410-413.

Kurbanlı, A. S., Çinar, C. ve Erdoğan, M. E. (2011). On the behavior of solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}-1}, y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}-1}$, $z_{n+1}=\frac{x_n}{y_n z_n-1}$ *Applied Mathematics, 2*, 1031-1038.

Keying, L., Zhongjian, X. L. ve Peng, L. (2011). More on three-dimensional systems of rational difference equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society, 2011*, 178483, 1-9.

Li, X. ve Zhu, D. (2003). Global asymptotic stability in a rational difference equation. *Journal of Difference Equations and Applications, 9*(9), 833-839.

McGrath, L. C. (2002). Existence Stability Boundedness and Periodicity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Moybe, L. A. (2000). Difference Equations with Public Health Applications, New York, USA.

Özban, A. Y. (2006). On the positive solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-k}}$, $y_{n+1}=\frac{y_n}{x_{n-m}y_{n-m-k}}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 323,* 26–32.

Özban, A. Y. (2007). On the system of rational difference equations $x_n=\frac{a}{y_{n-3}}$, $y_n=\frac{by_{n-3}}{x_{n-g}y_{n-g}}$. *Applied Mathematics and Computation, 188,* 833–837.

Papaschinopoulos, G. ve Schinas, C. J. (1998). On a system of two nonlinear difference equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 219,* 415-426.

Papaschinopoulos, G. ve Schinas, C. J. (2002). On the system of two difference equations $x_{n+1}=\sum_{i=0}^{k} A_i / y_{n-i}^{p_i}$, $y_{n+1}=\sum_{i=0}^{k} B_i / x_{n-i}^{q_i}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 273,* 294-309.

Prokup, N. (2000). Boundedness Global Stability and Periodicity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island,* (PhD Thesis).

Radin, M. A. (2001). The Global Stability Boundedness and Periodicity Character of Certain Difference Equations, *University of Rhode Island,* (PhD Thesis).

Schinas, C. J. (1997). Invariants for difference equations and systems of difference equations of rational form. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 216,* 164-179.

Stević, S. (2011). On a system of difference eguations $x_{n+1}=\frac{ax_{n-1}}{by_n x_{n-1}+c}$, $y_{n+1}=\frac{\alpha y_{n-1}}{bx_n y_{n-1}+\gamma} n \in N_0$ *Applied Mathematics and Computation 218,* 3372-3378.

Sun, T. ve Xi, H. (2005). Global behavior of the nonlinear difference equation $x_{n+1}=f(x_{n-s},x_{n-t})$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 311*, 760-765.

Sun, T. ve Xi, H. (2006). On the system of rational difference equations $x_{n+1}=f(x_n,y_{n-k})$, $y_{n+1}=f(y_n,x_{n-k})$. *Advances in Difference Equations, 2006*, 16949, 1-7.

Sun, T. ve Xi, H. (2006). On the system of rational difference equations $x_{n+1}=f(y_{n-q},x_{n-s})$, $y_{n+1}=f(x_{n-t},y_{n-p})$. *Advances in Difference Equations, 2006*, 51520, 1-8.

Teixeria, C. T. (2000). Existence Stability Boundedness and Periodicity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Touafek, N. ve Elsayed, E. M. (2012). On the solutions of systems of rational difference equations $x_{n+1}=\frac{x_{n-3}}{\pm 1 \pm x_{n-3}y_{n-1}}$, $y_{n+1}=\frac{y_{n-3}}{\pm 1 \pm y_{n-3}x_{n-1}}$. *Mathematical and Computer Modelling, 55,* 1987-1997.

Valicenti, S. (1999). Periodicity and Global Attractivity of Some Difference Equations, *University of Rhode Island*, (PhD Thesis).

Yalçınkaya, İ. (2008). On the global asymptotic stability of a second-order system of difference equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society, 2008*, 860152, 1-12.

Yalçınkaya, İ. ve Çinar, C. (2010). On the global asymptotic stability of two nonlinear difference equations $z_{n+1} = \frac{t_n + z_{n-1}}{t_n z_{n-1} + a}, t_{n+1} = \frac{z_n + t_{n-1}}{z_n t_{n-1} + a}$. *Fasciculi Mathematici, 2010,* 43, 171-180.

Yalçınkaya, İ., Çinar, C. ve Atalay, M. (2008). On the solutions of systems of difference equations. *Advances in Difference Equations, 2008*, 143943, 1-9.

Yang, X., Liu, Y. ve Bai, S., (2005). On the system of high order rational difference equations $x_n = \frac{a}{y_{n-p}}, y_n = \frac{by_{n-p}}{x_{n-q}y_{n-q}}$. *Applied Mathematics and Computation, 171*, 853-856.

Zhang, Y., Yang, X., Megson, G. M. ve Evans, D. J., (2006). On the system of rational difference equations. *Applied Mathematics and Computation, 176*, 403-408.

Zhang Y., Yang X., Evans D. J. ve Zhu, C., (2007). On the nonlinear difference equation system $x_{n+1} = A + \frac{y_{n-m}}{x_n}, y_{n+1} = A + \frac{x_{n-m}}{y_n}$. *Computers & Mathematics with Applications, 53*, 1561–1566.

T. C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü
Özgeçmiş

Adı Soyadı:	Merve GÜNER	İmza:	
Doğum Yeri:	Nevşehir		
Doğum Tarihi:	08.06.1986		
Medeni Durumu:	Evli		

Öğrenim Durumu

Derece	Okulun Adı	Program	Yer	Yıl
İlkokul	**20 Temmuz İlköğretim Okulu**		**Merkez-Nevşehir**	**1992-1997**
Ortaokul	**Nevşehir Anadolu Lisesi**		**Merkez-Nevşehir**	**1997-2001**
Lise	**Nevşehir Anadolu Öğretmen Lisesi**		**Merkez-Nevşehir**	**2001-2004**
Lisans	**Selçuk Üniversitesi**	**Matematik Öğretmenliği**	**Meram-Konya**	**2004-2009**
Yüksek Lisans	**Necmettin Erbakan Üniversitesi**	**Eğitim Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Programı**	**Meram - Konya**	**2009-2012**

İlgi Alanları:	**Kitap okumak, Spor yapmak, Matematik Bilimi**
İş Deneyimi:	**Özel ders verme, Seviye Dershanesi, Kaymaklı Lisesi**

Hakkımda bilgi almak için önerebileceğim şahıslar:	**Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR** **Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA** **Yrd. Doç. Dr. A. Selçuk KURBANLI**
Tel:	**0 544 434 69 09**
Adres	**Bahçelievler Mahallesi Naryolu Cad. No:15/7 Merkez/NEVŞEHİR**