T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

BAZI FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Mehmet TÜTÜNCÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI

Konya–2012

T. C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

BİLİMSEL ETİK SAYFASI

Öğrencinin	Adı Soyadı	Mehmet TÜTÜNCÜ
	Numarası	095202031005
	Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı / Matematik Eğitimi Bilim Dalı
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tezin Adı	Bazı Fark Denklem Sistemlerinin Çözümleri Üzerine Bir Çalışma

Bu tezin proje safhasından sonuçlanmasına kadarki bütün süreçlerde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını bildiririm.

M. Tütüncü

T. C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ KABUL FORMU

Öğrencinin	Adı Soyadı	Mehmet TÜTÜNCÜ
	Numarası	095202031005
	Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı / Matematik Eğitimi Bilim Dalı
	Programı	Tezli Yüksek Lisans
	Tez Danışmanı	Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI
	Tezin Adı	Bazı Fark Denklem Sistemlerinin Çözümleri Üzerine Bir Çalışma

Yukarıda adı geçen öğrenci tarafından hazırlanan "Bazı Fark Denklem Sistemlerinin Çözümleri Üzerine Bir Çalışma" başlıklı bu çalışma 14/06/2012 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunarak, jürimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Unvanı, Adı Soyadı	Danışman ve Üyeler	İmza
Yrd. Dç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI	Danışman	
Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA	Üye	
Yrd. Dç. Dr. Dağıstan ŞİMŞEK	Üye	

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Uygulamalı Matematiğin yeni çalışma alanlarından olan Fark Denklemleri sahip olduğu açık problemler dolayısıyla birçok bilim insanının ilgisini çekmektedir. Artan bu ilgi dolayısıyla günümüzde Fark Denklemleriyle ilgili olarak pek çok çalışma yapılmaktadır. Bizde bu çalışmalardan referans alarak Yüksek Lisans tezimi uygulamada önemli bir yer tutan Bazı Fark Denklem Sistemlerinin çözümleri ve çözümlerinin davranışlarını üzerine hazırladık.

Bu çalışma, Necmettin Erbakan Üniversitesi Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Orta Öğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI yönetiminde yapılarak Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Tez çalışmalarım sırasında tezimi büyük bir sabır ve titizlikle yöneten ve çalışmalarımda hiçbir desteğini esirgemeyen saygı değer hocalarım Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI, Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR ve Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA' ya sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Bu çalışmamı, beni bu günlere getiren, her anlamda desteklerini esirgemeyen, mutluluk kaynağım olan: "Sevgili Annem Nurten TÜTÜNCÜ' ye ve Sevgili Babam Nuri TÜTÜNCÜ" ye ayrıca çalışmalarım süresince beni manevi açıdan destekleyen ve her daim yanımda olan eşim, "Sevil TÜTÜNCÜ" ye ithaf ediyorum.

Mehmet TÜTÜNCÜ
Konya, 2012

T. C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin		
	Adı Soyadı	Mehmet TÜTÜNCÜ
	Numarası	095202031005
	Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı / Matematik Eğitimi Bilim Dalı
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tez Danışmanı	Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI
	Tezin Adı	Bazı Fark Denklem Sistemlerinin Çözümleri Üzerine Bir Çalışma

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Fark Denklem Sistemleri ile ilgili çalışmalara yer verildi.

İkinci bölümde, Fark Denklemleri ile ilgili tanım ve teoremlere yer verildi.

Üçüncü bölümde,

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} + 1}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-1} + 1}$$

fark denklem sisteminin çözümleri incelendi.

Dördüncü bölümde,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} - 1}, \; y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} - 1}, \; z_{n+1} = \frac{z_{n-1}}{x_{n-1} y_n + y_{n-1} x_n}$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışları incelendi.

Beşinci bölümde,

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} + 1}, \; y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} + 1}, \; z_{n+1} = \frac{z_{n-1}}{x_{n-1} y_n + y_{n-1} x_n}$$

fark denklem sisteminin çözümleri incelendi.

Anahtar kelimeler: Fark Denklemleri, Fark Denklem Sistemleri, Çözüm, Çözümün Davranışları

T. C.

NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin		
	Adı Soyadı	Mehmet TÜTÜNCÜ
	Numarası	095202031005
	Ana Bilim / Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana BİlimDalı / Matematik Eğitimi Bilim Dalı
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tez Danışmanı	Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI
	Tezin İngilizce Adı	A Study On The Solutions of The Systems of Some Difference Equation

SUMMARY

This study consists of five sections.

In the first section, the study of systems of difference equations given.

In the second section, the definitions and theorems about systems of difference equations given.

In the third section,

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1},\quad y_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1}$$

system solutions for difference equations were investigated.

In the fourth section,

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}-1},\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}-1},\ z_{n+1}=\frac{z_{n-1}}{x_{n-1}y_n+y_{n-1}x_n}$$

behavior of solutions of difference equations system were examined.

In the fifth section,

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}+1},\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1},\ z_{n+1}=\frac{z_{n-1}}{x_{n-1}y_n+y_{n-1}x_n}$$

system solutions for difference equations were investigated.

Keywords: Difference Equations, Difference Equations Systems, Solution, Behavior of Solutions.

İÇİNDEKİLER

Bilimsel Etik Sayfası ..……………………..………………………………..……..……....ii
Yüksek Lisans Tezi Kabul Formu ……………………………………….....……….iii
Ön Söz ve Teşekkür …………..………………………………………………..……..iv
Özet ……………………………………………………………...……………….….v
Summary ………………………………………………………….………….….….vi

1. BÖLÜM

FARK DENKLEM SİSTEMLERİ İLE İLGİLİ YAPILMIŞ ÇALIŞMALAR……..1

2. BÖLÜM

FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER….….11

3. BÖLÜM $x_{n+1}=\dfrac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1},\ \ y_{n+1}=\dfrac{x_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1}$

FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİ……………….……………....16

4. BÖLÜM $x_{n+1}=\dfrac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}-1},\ y_{n+1}=\dfrac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}-1},\ z_{n+1}=\dfrac{z_{n-1}}{x_{n-1}y_n+y_{n-1}x_n}$

FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİ VE ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI………………………………………………………….…..37

5. BÖLÜM $x_{n+1}=\dfrac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}+1},\ \ y_{n+1}=\dfrac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1},\ z_{n+1}=\dfrac{z_{n-1}}{x_{n-1}y_n+y_{n-1}x_n}$

FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİ…………………………..…….54

SONUÇ VE ÖNERİLER ……………………………………………………......63
KAYNAKLAR 64
ÖZGEÇMİŞ ………………………………………………………………...70

1. BÖLÜM

FARK DENKLEM SİSTEMLERİ İLE İLGİLİ YAPILMIŞ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, fark denklem sistemleri ile ilgili literatürde var olan ve çalışmamızda kullanılan fark denklem sistemleri ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Schinas (1997) yapmış olduğu çalışmada; $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 1}{x_{n-1}}$ Lyness fark denkleminin çözümlerinin periyodikliğinden ve denge noktasından hareketle

$$x_{n+1} = \frac{ay_n + A}{x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{bx_n + A}{y_{n-1}}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

$$x_{n+1} = \frac{a_n y_n + A}{x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{b_n x_n + A}{y_{n-1}}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

$$x_{n+1} = \frac{\max\{a_n y_n, A\}}{x_{n-1}}, \quad y_{n+1} = \frac{\max\{b_n x_n, A\}}{y_{n-1}}, \ n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

denklem sistemleri ve rasyonel formdaki benzer bazı fark denklemlerinin, fark denklem sistemlerinin ve maksimumlu fark denklem sistemlerinin denge noktalarını ve çözümlerinin periyodikliğini inceledi. Çalışma sonucunda; çeşitli fark denklemlerinin ve fark denklem sistemlerinin denge noktalarını, denklemlerin katsayılarının sabit olması veya periyodik birer dizi olması gibi durumlarda katsayılara ve denklemin genel terimlerine bağlı olarak elde etti. Ayrıca bazı fark denklem sistemlerinin de çözümlerinin periyodikliğini inceledi.

Papaschinopoulos ve Schinas (1998) yaptıkları çalışmada; $n = 0,1,2,...$ ve p, q pozitif tam sayı olmak üzere

$$x_{n+1} = A + \frac{y_n}{x_{n-p}}, \quad y_{n+1} = A + \frac{x_n}{y_{n-q}}$$

lineer olmayan fark denklem sisteminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını ve çözümlerinin sınırlılığını ve salınımlılığının davranışını incelediler.

Papaschinopoulos ve Schinas (1998) yaptıkları çalışmada; p ve q pozitif tamsayıları için lineer olmayan iki fark denkleminden oluşan,

$$x_{n+1} = \frac{A + y_n}{x_{n-p}}, \; y_{n+1} = \frac{A + x_n}{y_{n-q}}$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin salınımlı davranışını ve sınırlılığını incelediler. Ayrıca bu fark denklem sisteminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını çalıştılar. Bu çalışmada fark denklem sisteminin denge noktasının, $(c,c) = (1+A,\ 1+A)$ olduğunu elde ettiler ve sisteminin çözümlerinin $A \in (0,\infty)$ için bu noktada salınımlı olduğunu gördüler. Aynı şartlarda sistemin çözümlerinin alt ve üst sınırlarını elde ettiler. $A > 1$ için de pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu elde ettiler.

Grove ve arkadaşları (2001) yaptıkları çalışmada; a, b, c ve d reel sayılar ve başlangıç şartları x_0 ve y_0 keyfi reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1} = \frac{a}{x_n} + \frac{b}{y_n}, \; y_{n+1} = \frac{c}{x_n} + \frac{d}{y_n}, \; n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

fark denklem sisteminin, her $n \geq 0$ için iyi tanımlı olduğu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ değerlerinin kümesini ve çözümlerinin davranışlarını araştırdılar. Bu fark denklem sisteminde, $z_n = \dfrac{x_n}{y_n}$ dönüşümü yaparak Riccati fark denklemine ulaştılar ve bu denklemin karakteristik denkleminin çözümlerinden hareketle a, b, c ve d reel sayıları için şartlar elde ettiler, yani denklemin good küme ve forbidden kümesine ulaştılar. Denklemin çözümleri hakkında bazı şartlar altında genellemelere gittiler.

Clark ve Kulenović (2002) yaptıkları çalışmada; a, b, c ve d pozitif sayılar ve $x_0, y_0,$ başlangıç şartları negatif olmayan sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{a + cy_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{b + dx_n}$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin global kararlılık özelliklerini ve asimptotik davranışını incelediler.

Clark ve Kulenović (2002) yaptıkları çalışmada; a, b, c ve d keyfi pozitif sayılar ve başlangıç değerleri $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{a + cy_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{b + dx_n}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin asimptotik davranışlarını ve kararlılık özelliğini incelediler.

Papaschinopoulos ve Schinas (2002) yaptıkları çalışmada; $A_i, B_i,\ i \in 0,1,...,k$; $x_i, y_i,\ i \in -k, -k+1,...,0$ pozitif sayılar ve $p_i, q_i, i \in 0,1,...,k$, pozitif sabitler olmak üzere

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i}{y_{n-i}^{p_i}}, \quad y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{B_i}{x_{n-i}^{q_i}}$$

fark denklem sistemini incelediler.

Papaschinopoulos ve Schinas (2002) yaptıkları çalışmada; A_i, B_i, $i \in \{0,1,...,k\}$, x_i, y_i, $i = -k, -k+1,\ ...\ ,\ 0$ pozitif sayılar ve p_i, q_i, $i = 0,1,...,k$ pozitif sabitler olmak üzere,

$$x_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i}{y_{n-i}^{p_i}}, \quad y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{B_i}{x_{n-i}^{q_i}}$$

fark denklem sistemini çalıştılar. Çalışmalarında, pozitif çözümlerin sınırlılığını ve sürekliliğini elde ettiler. Daha sonra sistemin bir pozitif denge noktasının var ve tek olduğunu gösterip bu denge noktasının global asimptotik kararlılığını incelediler.

Son olarak da sistemin pozitif denge noktasında salınım göstermeyen çözümlerine ulaştılar.

Kulenović ve Nurkanović (2003) yılında altmışıncı yaş günü vesilesi ile Profesör Allan Peterson'a ithaf ettikleri çalışmada; A ile B katsayıları $(0, \infty)$ aralığında seçilen reel sayılar ve x_0, y_0 başlangıç şartları negatif olmayan keyfi sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = Ax_n \frac{y_n}{1+y_n}, \; y_{n+1} = By_n \frac{x_n}{1+x_n}$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin global asimptotik kararlılığını araştırdılar.

Clark ve arkadaşları (2003) yaptıkları çalışmada;

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{a+cy_n}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{b+dx_n}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin global asimptotik davranışını incelediler.

Çinar ve Yalçınkaya (2004) yaptıkları çalışmada; literatürde üç değişkenli fark denklem sistemleri üzerine yapılan ilk çalışmalardan olan makalelerinde,

$$x_{n+1} = \frac{1}{z_n}, \; y_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}y_{n-1}}, \; z_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelediler. $\{x_n\}$ ve $\{z_n\}$ çözümlerinin üç periyotlu, $\{y_n\}$ çözümlerinin ise on iki periyotlu olduğunu ispat ettiler.

Çinar ve Yalçınkaya (2004) yaptıkları çalışmada;

$$x_{n+1} = \frac{1}{z_n}, \; y_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}}, \; z_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelediler ve $\{x_n, y_n, z_n\}$ çözümlerinin üç periyotlu olduğunu ispat ettiler.

Camouzis ve Papaschinopoulos (2004) yaptıkları çalışmada; $n=0,1,\ldots,$ $i=-m,-m+1,\ldots,0$ için x_i, y_i pozitif sayılar ve m pozitif tamsayı olmak üzere

$$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{y_{n-m}},\quad y_{n+1}=1+\frac{y_n}{x_{n-m}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin global asimptotik davranışlarını, sınırlılığını ve sürekliliğini incelemişlerdir.

Çinar (2004) yaptığı çalışmada; $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1}\in\mathbb{R}^+$ için,

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_n},\ y_{n+1}=\frac{y_n}{x_{n-1}y_{n-1}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini incelemiştir.

Camouzis ve Papaschinopoulos (2004) yaptıkları çalışmada; pozitif başlangıç şartlar altında

$$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{y_{n-m}},\ y_{n+1}=1+\frac{y_n}{x_{n-m}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

Yang (2005) yaptığı çalışmada;

$$x_n=A+\frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}},\ y_n=A+\frac{x_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}\quad n=1,2,\ldots$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelediler.

Kulenović ve Nurkanović (2005) yaptıkları çalışmada; $a,b,c,d,\ e,f\in(0,8)$ ve x_0, y_0, z_0 negatif olmayan reel sayılar olmak üzere;

$$x_{n+1}=\frac{a+x_n}{b+y_n},\ y_{n+1}=\frac{c+y_n}{d+z_n},\ z_{n+1}=\frac{e+z_n}{f+x_n}\quad n=0,1,2,\ldots$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin global asimptotik davranışlarını incelediler.

Yang ve arkadaşları (2005) yaptıkları çalışmada; $n=0,1,...,$ $p,q\in\mathbb{Z}^{+}$ için $p\leq q$ ve a,b pozitif sabitler olmak üzere

$$x_n=\frac{a}{y_{n-p}},\ y_n=\frac{by_{n-p}}{x_{n-q}y_{n-q}}$$

yüksek mertebeden rasyonel fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelediler.

Zhang ve arkadaşları (2006) yaptıkları çalışmada; $n=0,1,...$ ve $p\geq 1,\ q\geq 1,$ $r\geq 1,\ s\geq 1,\ \mathrm{A}\geq 0,\ x_{1-r},\ x_{2-r},\ ...,\ x_0,\ y_{1-\max\{p,s\}},\ y_{2-\max\{p,s\}},\ ...,\ y_0\in\mathbb{R}^{+}$ olmak üzere

$$x_n=A+\frac{1}{y_{n-p}},\ y_n=A+\frac{y_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelediler.

Sun ve Xi (2006) yaptıkları çalışmada;

$$x_{n+1}=f\left(x_n,\ y_{n-k}\right),\ y_{n+1}=f\left(y_n,\ x_{n-k}\right),\ n\in\mathbb{N}_0$$

rasyonel fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin, pozitif başlangıç şartları altında global asimptotik kararlılığını göstermiş ve pozitif çözümlerin bir denge noktasına yakınsadıklarını ispat etmişlerdir.

Sun ve Xi (2006) yaptıkları çalışmada; yukarıdaki teorilerini daha da geliştirmişler ve

$$x_{n+1}=f\left(y_{n-q},\ x_{n-s}\right),\ y_{n+1}=g\left(x_{n-t},\ y_{n-p}\right),\ n\in\mathbb{N}$$

ayrıca $p,\ q,\ s,\ t\in\mathbb{N}_0,\ s\geq t,\ p\geq q$ ve başlangıç şartları pozitif olmak üzere genel fark denklem sisteminin tek pozitif denge noktasının belirli koşullar altında global çekici olduğunu göstermişlerdir.

Özban (2006) yaptığı çalışmada; tüm başlangıç şartları ve parametreler pozitif olmak üzere

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{y_{n-k}}, \; y_{n+1} = 1 + \frac{y_n}{x_{n-m} y_{n-m-k}}$$

fark denklem sistemini çözümlerinin periyodikliğini araştırmış ve ispat etmiştir.

Iricanin ve Stevic (2006) yaptıkları çalışmada; aşağıdaki iki fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini çalışmışlardır:

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{1 + x_n^{(2)}}{x_{n-1}^{(3)}}, \; x_{n+1}^{(2)} = \frac{1 + x_n^{(3)}}{x_{n-1}^{(4)}}, \; \dots, \; x_{n+1}^{(k)} = \frac{1 + x_n^{(1)}}{x_{n-1}^{(2)}},$$

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{1 + x_n^{(2)} + x_{n-1}^{(3)}}{x_{n-2}^{(4)}}, \; x_{n+1}^{(2)} = \frac{1 + x_n^{(3)} + x_{n-1}^{(4)}}{x_{n-2}^{(5)}}, \; \dots, \; x_{n+1}^{(k)} = \frac{1 + x_n^{(1)} + x_{n-1}^{(2)}}{x_{n-2}^{(3)}} \quad k \in \mathrm{N}.$$

Özban (2006) yaptığı çalışmada; $n = 0,1,2,...$ için

$$x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-k}}, \; y_{n+1} = \frac{y_n}{x_{n-m} y_{n-m-k}}$$

rasyonel fark denklem sisteminin pozitif çözümleri üzerine çalışma yapmıştır.

Özban (2007) yaptığı çalışmada; $n = 0,1,2,...,$ $q > 3$ ve 3'ün katı olmayan pozitif tamsayı, a ve b pozitif sabitler ve başlangıç değerleri $x_{-q+1}, x_{-q+2}, ..., x_0,$ $y_{-q+1}, y_{-q+2}, ..., y_0$ pozitif reel sayılar olan;

$$x_n = \frac{a}{y_{n-3}}, \; y_n = \frac{b y_{n-3}}{x_{n-q} y_{n-q}}$$

rasyonel fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını inceledi.

Zhang ve arkadaşları (2007) yaptıkları çalışmada; $n = 0,1,...$ ve $\mathrm{A} > 0$ için

$$x_{n+1} = A + \frac{y_{n-m}}{x_n}, \; y_{n+1} = A + \frac{x_{n-m}}{y_n}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlılığını, sınırlılığını ve sürekliliği üzerine inceleme yapmışlardır.

Papaschinopoulos ve arkadaşları (2007) yaptıkları çalışmada; $a_i,\ b_i$ $i=1,\ 2,\ldots,k$ pozitif sabitler, $k\geq 3$ tamsayı ve bütün başlangıç şartları pozitif olmak üzere $i=3,\ 4,\ldots,k$ için

$$x_1(n+1)=\frac{a_k x_k(n)+b_k}{x_{k-1}(n-1)},\ \ x_2(n+1)=\frac{a_1 x_1(n)+b_1}{x_k(n-1)},\ \ x_i(n+1)=\frac{a_{i-1}x_{i-1}(n)+b_{i-1}}{x_{i-2}(n-1)}$$

denklem sistemini çözümlerini incelemişlerdir.

Yalçınkaya (2008) yaptığı çalışmada;

$$z_{n+1}=\frac{t_n z_{n-1}+a}{t_n+z_{n-1}},\ t_{n+1}=\frac{z_n t_{n-1}+a}{z_n+t_{n-1}}\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

fark denklem sisteminin global asimptotik kararlılığı için bir yeterli koşulun olduğunu göstermişlerdir.

Yalçınkaya ve arkadaşları (2008) yaptıkları çalışmada; $n=0,1,2,\ldots,$ $a\in(0,\infty)$ parametre ve $k=\{-1,0\}$ için $z_k,t_k\in(0,\infty)$ olmak üzere

$$z_{n+1}=\frac{z_n t_{n-1}+a}{z_n+t_{n-1}},\ t_{n+1}=\frac{t_n z_{n-1}+a}{t_n+z_{n-1}}$$

fark denklem sisteminin global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Çinar ve Yalçınkaya (2010) yaptıkları çalışmada;

$$z_{n+1}=\frac{t_n+z_{n-1}}{t_n z_{n-1}+a},\quad t_{n+1}=\frac{z_n+t_{n-1}}{z_n t_{n-1}+a}\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

lineer olmayan fark denklemlerinden oluşan sisteminin global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Kurbanlı (2011) yaptığı çalışmada; $x_0,x_{-1},y_0,y_{-1},z_0,z_{-1}\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}-1},\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}-1},\ z_{n+1}=\frac{z_{n-1}}{y_n z_{n-1}-1}$$

rasyonel fark denklemleri sisteminin çözümlerinin davranışlarını inceledi.

Kurbanlı ve arkadaşları (2011) yaptıkları çalışmada; $x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} + y_n}{y_n x_{n-1} - 1}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1} + x_n}{x_n y_{n-1} - 1}$$

rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliğini incelemişlerdir.

Kurbanlı ve arkadaşları (2011) yaptıkları çalışmada; $x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1}, z_0, z_{-1} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} - 1}, \; y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} - 1}, \; z_{n+1} = \frac{x_n}{y_n z_n - 1}$$

rasyonel fark denklemleri sisteminin çözümlerinin davranışını incelediler.

Keying ve arkadaşları (2011) yaptıkları çalışmada; Kurbanlı'nın "$x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1}, z_0, z_{-1} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} - 1}, \; y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} - 1}, \; z_{n+1} = \frac{z_{n-1}}{y_n z_{n-1} - 1}$$

rasyonel fark denklemleri sisteminin çözümlerinin davranışları" başlıklı makalesini farklı yaklaşım ile incelediler.

Steviç (2011) yaptığı çalışmada; $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ parametreler ve başlangıç şartları x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{a x_{n-1}}{b y_n x_{n-1} + c}, \; y_{n+1} = \frac{\alpha y_{n-1}}{\beta x_n y_{n-1} + \gamma} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rasyonel fark denklem sistemini inceledi.

Touafek ve Elsayed (2012) yaptıkları çalışmada; başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-3}}{\pm 1\pm x_{n-3}y_{n-1}},\ y_{n+1}=\frac{y_{n-3}}{\pm 1\pm y_{n-3}x_{n-1}}$$

rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümleri ve çözümlerinin periyodikliğini incelediler.

Elsayed (2012) yaptığı çalışmada; başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayı olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{\pm 1\pm x_{n-1}y_{n}},\quad y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{\pm 1\pm y_{n-1}x_{n}}$$

rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini inceledi.

2. BÖLÜM

FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

x bağımsız değişkeninin tanımlı olduğu aralıkta, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y^{'}(x),\ y^{''}(x),\ ...,\ y^{(n)}(x),\ ...$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x' in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz. Bu bölümde x' in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu fark denklemleri üzerinde duracağız.

Tanım 2.1. n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de y olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin

$$E(y),\ E^2(y),\ E^3(y),\ ...,\ E^n(y),\ ...$$

gibi farklarını içeren bağıntılara fark denklemi denir.

Fark denklemlerinin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indisin farkına eşittir.

Birinci mertebeden bir fark denklemi;

$$a_0y(n)+a_1y(n+1)=f(n)$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden bir fark denklemi;

$$a_0y(n-1)+a_1y(n)+a_2y(n+1)=g(n)$$

şeklindedir.

Teorem 2.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f: I^{k+1} \to I$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon ise $x_{-k},\ x_{-(k-1)},\ \ldots,\ x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n,\ x_{n-1},\ \ldots,\ x_{n-k}), \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (2.1)$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne sahiptir.

Tanım 2.2. (2.1) denkleminde ;

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, \ldots, \bar{x})$$

şartını sağlayan $\bar{x}$ noktasına (2.1) denkleminin denge noktası denir.

Tanım 2.3. $\bar{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası ve $x_{-k},\ x_{-(k-1)}, \ldots,\ x_0 \in I$ olmak üzere:

(i) Her $\varepsilon > 0$ için

$$|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \ldots + |x_{-k} - \bar{x}| < \delta$$

iken her $n \geq 0$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

(ii) $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde,

$$|x_0 - \bar{x}| + |x_{-1} - \bar{x}| + \ldots + |x_{-k} - \bar{x}| < \gamma$$

şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

(iii) Eğer $\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}$ ise $\bar{x}$ denge noktasına çekim noktası denir.

(**iv**) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise, $\bar{x}$ denge noktasına global asimptotik kararlıdır denir.

(**v**) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise, kararsızdır denir.

(**vi**) Eğer

$$|x_0-\bar{x}|+|x_{-1}-\bar{x}|+...+|x_{-k}-\bar{x}|<r$$

ve bazı $N\geq -1$ sayıları için

$$|x_N-\bar{x}|\geq r$$

olacak şekilde bir $r>0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktasına repeller denir.

Tanım 2.4. (2.1) denkleminden elde edilen

$$y_{n+1}=\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_{n-i}}(\bar{x},\ ...\ ,\ \bar{x})y_{n-i} \tag{2.2}$$

denklemine, $\bar{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir.

(2.2) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^{k+1}-\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_{n-i}}(\bar{x},...,\bar{x})\lambda^{k-i}=0 \tag{2.3}$$

şeklindedir.

Teorem 2.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)

(**i**) Eğer (2.3) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(**ii**) Eğer (2.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır.

Tanım 2.5. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden $\bar{x}$ denge noktasından ne büyük ne de küçük ise bu çözümlere $\bar{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir. Aksi halde bu çözümlere salınımlı değildir denir.

Tanım 2.6. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde her n için $P \le x_n \le Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır denir.

Tanım 2.7. $\bar{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası olsun. $l \ge -k$, $m \le \infty$ olmak üzere $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından büyük veya eşit, $l = -k$ veya $l > -k$ için $x_{l-1} < \bar{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} < \bar{x}$ oluyorsa $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi denir. Benzer şekilde, $l \ge -k$, $m \le \infty$ olmak üzere $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ dizisinin her elemanı $\bar{x}$ denge noktasından küçük, $l = -k$ veya $l > -k$ için $x_{l-1} \ge \bar{x}$ ve $m = \infty$ veya $m < \infty$ için $x_{m+1} \ge \bar{x}$ oluyorsa $\{x_l, x_{l+1}, \dots, x_m\}$ dizisine $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi denir.

Tanım 2.8. Eğer bir $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde $n \ge -k$ olmak üzere her n tamsayısı için

$$x_{n+p} = x_n$$

olacak şekilde bir p pozitif tamsayısı var ise $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir. Bu şartı sağlayan en küçük p pozitif tam sayısına ise esas periyot denir.

Tanım 2.9. Eğer bir $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için

$$x_{n+p} = x_n$$

ise $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tamsayıdır.

3. BÖLÜM

BAZI FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

(3.1) $$x_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} + 1}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-1} + 1}$$

FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİ.

Bu bölümde;

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} + 1}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-1} + 1}$$

fark denklem sistemlerinin çözümleri incelenmiştir.

Teorem 3.1. $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}^{+}$ ve başlangıç şartları $y_0 = a,\ y_{-1} = b,\ x_0 = c,\ x_{-1} = d,$ $z_0 = e,\ z_{-1} = f,\ bc \neq -1$ olmak üzere;

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} + 1}, \quad y_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-1} + 1} \tag{3.1}$$

fark denklem sisteminin bütün çözümleri;

$$x_1 = \frac{y_{-1}}{x_0 y_{-1} + 1} = \frac{b}{cb+1}$$

$$y_1 = \frac{x_{-1}}{x_0 y_{-1} + 1} = \frac{d}{cb+1}$$

$$x_2 = \frac{y_0}{x_1 y_0 + 1} = \frac{a}{\left(\frac{b}{cb+1}\right)a + 1} = \frac{a(cb+1)}{cb+ba+1}$$

$$y_2 = \frac{x_0}{x_1 y_0 + 1} = \frac{c}{\left(\frac{b}{cb+1}\right)a + 1} = \frac{c(cb+1)}{cb+ba+1}$$

$n \geq 2$ ve $k = 1,2,...$ için

$$x_{4k+1} = \frac{b\prod_{n=0}^{k-1}\left[(n+1)(cb+ba) + n(ad+cd) + 1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb) + n(ba+ad+cd) + 1\right]\prod_{n=0}^{k-1}\left[(n+1)(cb+ba+ad) + n(cd) + 1\right]},$$

$$y_{4k+1} = \frac{d\prod_{n=0}^{k-1}\left[(n+1)(cb+ba) + n.(ad+cd) + 1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb) + n(ba+ad+cd) + 1\right]\prod_{n=0}^{k-1}\left[(n+1)(cb+ba+ad) + n(cd) + 1\right]},$$

$$y_{4k+2} = \frac{c\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb) + n(ba+ad+cd) + 1\right]\prod_{n=0}^{k-1}\left[(n+1)(cb+ba+ad) + n(cd) + 1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba) + n(ad+cd) + 1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]},$$

$$x_{4k+2}=\frac{a\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k-1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]},$$

$$y_{4k+3}=\frac{b\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]},$$

$$x_{4k+3}=\frac{d\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]},$$

$$y_{4k+4}=\frac{a\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]},$$

$$x_{4k+4}=\frac{c\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}$$

dır.

İspat. (3.1) denkleminde,

$n=0$ için

$$x_1=\frac{y_{-1}}{x_0y_{-1}+1}=\frac{b}{cb+1},$$

$$y_1=\frac{x_{-1}}{x_0y_{-1}+1}=\frac{d}{cb+1}$$

$n=1$ için

$$y_2=\frac{x_0}{x_1y_0+1}=\frac{c}{\left(\frac{b}{cb+1}\right)a+1}=\frac{c(cb+1)}{cb+ba+1},$$

$$x_2=\frac{y_0}{x_1y_0+1}=\frac{a}{\left(\frac{b}{cb+1}\right)a+1}=\frac{a(cb+1)}{cb+ba+1}$$

olduğu açıktır.

$n\geq 2$ için x_n ve y_n çözümlerinin doğruluğunu tümevarımla ispatlayalım.

$n=2$ için

$$y_3=\frac{x_1}{x_2y_1+1}=\frac{\left(\frac{b}{cb+1}\right)}{\left(\frac{a(cb+1)}{cb+ba+1}\right)\left(\frac{d}{cb+1}\right)+1}=\frac{\left(\frac{b}{cb+1}\right)}{\left(\frac{ad(cb+1)}{(cb+ba+1)(cb+1)}\right)+1}$$

$$=\frac{\left(\frac{b}{cb+1}\right)}{\left(\frac{ad(cb+1)+(cb+ba+1)(cb+1)}{(cb+ba+1)(cb+1)}\right)}=\frac{\left(\frac{b}{cb+1}\right)}{\left(\frac{(cb+1)(cb+ba+ad+1)}{(cb+ba+1)(cb+1)}\right)}$$

$$=\left(\frac{b}{cb+1}\right)\left(\frac{(cb+ba+1)(cb+1)}{(cb+1)(cb+ba+ad+1)}\right)=\frac{b(cb+ba+1)}{(cb+1)(cb+ba+ad+1)}$$

$$x_3=\frac{y_1}{x_2y_1+1}=\frac{\left(\frac{d}{cb+1}\right)}{\left(\frac{a(cb+1)}{cb+ba+1}\right)\left(\frac{d}{cb+1}\right)+1}=\frac{\left(\frac{d}{cb+1}\right)}{\left(\frac{ad(cb+1)}{(cb+ba+1)(cb+1)}\right)+1}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{d}{cb+1}\right)}{\left(\dfrac{ad(cb+1)+(cb+ba+1)(cb+1)}{(cb+ba+1)(cb+1)}\right)}=\frac{\left(\dfrac{d}{cb+1}\right)}{\left(\dfrac{(cb+1)(cb+ba+ad+1)}{(cb+ba+1)(cb+1)}\right)}$$

$$=\left(\frac{d}{cb+1}\right)\left(\frac{(cb+ba+1)(cb+1)}{(cb+1)(cb+ba+ad+1)}\right)=\frac{d(cb+ba+1)}{(cb+1)(cb+ba+ad+1)}$$

$n=3$ için

$$y_4=\frac{x_2}{x_3y_2+1}=\frac{\left(\dfrac{a(cb+1)}{(cb+ba+1)}\right)}{\left(\dfrac{d(cb+ba+1)}{(cb+1)(cb+ba+ad+1)}\right)\left(\dfrac{c(cb+1)}{cb+ba+1}\right)+1}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{a(cb+1)}{(cb+ba+1)}\right)}{\left(\dfrac{cd(cb+1)(cb+ba+1)}{(cb+1)(cb+ba+1)(cb+ba+ad+1)}\right)+1}$$

$$=\frac{a(cb+1)(cb+ba+ad+1)}{(cb+ba+1)(cb+ba+ad+cd+1)}$$

$$x_4=\frac{y_2}{x_3y_2+1}=\frac{\left(\dfrac{c(cb+1)}{cb+ba+1}\right)}{\left(\dfrac{d(cb+ba+1)}{(cb+1)(cb+ba+ad+1)}\right)\left(\dfrac{c(cb+1)}{cb+ba+1}\right)+1}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{c(cb+1)}{cb+ba+1}\right)}{\left(\dfrac{cd(cb+1)(cb+ba+1)}{(cb+1)(cb+ba+1)(cb+ba+ad+1)}\right)+1}$$

$$=\frac{c(cb+1)(cb+ba+ad+1)}{(cb+ba+1)(cb+ba+ad+cd+1)}$$

$n=4$ için

$$y_5=\frac{x_3}{x_4y_3+1}=\frac{\left(\dfrac{d(cb+ba+1)}{(cb+1)(cb+ba+ad+1)}\right)}{\left(\dfrac{c(cb+1)(cb+ba+ad+1)}{(cb+ba+1)(cb+ba+ad+cd+1)}\right)\left(\dfrac{b(cb+ba+1)}{(cb+1)(cb+ba+ad+1)}\right)+1}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{d(cb+ba+1)}{(cb+1)(cb+ba+ad+1)}\right)}{\left(\dfrac{cb}{(cb+ba+ad+cd+1)}\right)+1}$$

$$=\left(\frac{d(cb+ba+1)}{(cb+1)(cb+ba+ad+1)}\right)\frac{(cb+ba+ad+cd+1)}{(2cb+ba+ad+cd+1)}$$

$$=\frac{d(cb+ba+1)(cb+ba+ad+cd+1)}{(cb+1)(cb+ba+ad+1)(2cb+ba+ad+cd+1)}$$

$$x_5=\frac{y_3}{x_4y_3+1}=\frac{\left(\dfrac{b(cb+ba+1)}{(cb+1)(cb+ba+ad+1)}\right)}{\left(\dfrac{c(cb+1)(cb+ba+ad+1)}{(cb+ba+1)(cb+ba+ad+cd+1)}\right)\left(\dfrac{b(cb+ba+1)}{(cb+1)(cb+ba+ad+1)}\right)+1}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{b(cb+ba+1)}{(cb+1)(cb+ba+ad+1)}\right)}{\left(\dfrac{cb}{(cb+ba+ad+cd+1)}\right)+1}$$

$$=\left(\frac{b(cb+ba+1)}{(cb+1)(cb+ba+ad+1)}\right)\frac{(cb+ba+ad+cd+1)}{(2cb+ba+ad+cd+1)}$$

$$=\frac{b(cb+ba+1)(cb+ba+ad+cd+1)}{(cb+1)(cb+ba+ad+1)(2cb+ba+ad+cd+1)}$$

olup doğrudur.

$n = k$ için $k = 1, 2, \ldots$

$$x_{4k+1} = \frac{b\prod_{n=0}^{k-1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k-1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]},$$

$$y_{4k+1} = \frac{d\prod_{n=0}^{k-1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k-1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]},$$

$$y_{4k+2} = \frac{c\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k-1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]},$$

$$x_{4k+2} = \frac{a\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k-1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]},$$

$$y_{4k+3} = \frac{b\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]},$$

$$x_{4k+3} = \frac{d\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]},$$

$$y_{4k+4} = \frac{a\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]},$$

$$x_{4k+4}=\frac{c\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}$$

olduğunu kabul edelim.

$n=k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$x_{4(k+1)+1}=x_{4k+5}=\frac{y_{4k+3}}{x_{4k+4}y_{4k+3}+1},\quad A=x_{(4k+4)}y_{(4k+3)}+1 \text{ olsun.}$$

$$A=x_{4k+4}y_{4k+3}+1=\frac{x_{4k+4}}{\frac{1}{y_{4k+3}}}+1$$

$$A=\frac{\dfrac{c\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}{\dfrac{1}{\dfrac{b\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}}}+1$$

$$=\frac{\dfrac{c\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}{\dfrac{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{b\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}+1$$

$$=\frac{\dfrac{c}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[n\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]}}{\dfrac{1}{b\prod_{n=0}^{k}\left[n\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]}}+1=\frac{cb\prod_{n=0}^{k}\left[n\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[n\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]}+1$$

$$=\frac{cb\prod_{n=0}^{k}\left[n\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]+\prod_{n=0}^{k+1}\left[n\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[\left(n+1\right)\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]}$$

$$=\frac{cb\prod_{n=0}^{k}\left[n\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]+\prod_{n=0}^{k}\left[n\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]\left[\left(k+1\right)\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[n\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]}$$

$$=\frac{\prod_{n=0}^{k}\left[n\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]\left(\left[\left(k+1\right)\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]+cb\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[n\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]}$$

$$=\frac{\prod_{n=0}^{k}\left[n\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]\left(\left[\left(k+2\right)cb+\left(k+1\right)\left(ba+ad+cd\right)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[n\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]}$$

bulunur. Bulunan A nın bu değeri x_{4k+5} in paydasında yerine yazılırsa,

$$x_{4k+5}=\frac{\dfrac{b\prod_{n=0}^{k}\left[\left(n+1\right)\left(cb+ba\right)+n\left(ad+cd\right)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[n\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[\left(n+1\right)\left(cb\right)+n\left(ba+ad+cd\right)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[\left(n+1\right)\left(cb+ba+ad\right)+n\left(cd\right)+1\right]}}{\dfrac{\prod_{n=0}^{k}\left[n\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]\left(\left[\left(k+2\right)cb+\left(k+1\right)\left(ba+ad+cd\right)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[n\left(cb+ba+ad+cd\right)+1\right]}}$$

$$=\frac{\dfrac{b\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}}{\dfrac{\left(\left[(k+2)cb+(k+1)(ba+ad+cd)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}$$

$$=\frac{\dfrac{b\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\left(\left[(k+2)cb+(k+1)(ba+ad+cd)+1\right]\right)}}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}$$

$$=\frac{b\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}$$

doğru olduğu görülür.

$$y_{4(k+1)+1}=y_{4k+5}=\frac{x_{4k+3}}{x_{4k+4}y_{4k+3}+1}$$ olur.

Bulunan x_{4k+5} ve y_{4k+5} in paydaları aynı olduğundan x_{4k+5} de hesaplamış olduğumuz A nın değerini y_{4k+5} de yerine yazılırsa,

$$y_{4k+5}=\frac{\dfrac{d\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}}{\dfrac{\prod_{n=0}^{k}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]\left(\left[(k+2)cb+(k+1)(ba+ad+cd)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}$$

$$=\frac{\dfrac{d\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}}{\dfrac{\left(\left[(k+2)cb+(k+1)(ba+ad+cd)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}$$

$$=\frac{\dfrac{d\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\left(\left[(k+2)cb+(k+1)(ba+ad+cd)+1\right]\right)}}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}$$

$$=\frac{d\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}$$

olup doğrudur.

$$x_{4(k+1)+2}=x_{4k+6}=\frac{y_{4k+4}}{x_{4k+5}y_{4k+4}+1}, \quad B=x_{4k+5}y_{4k+4}+1 \text{ olsun.}$$

$$B=x_{4k+5}y_{4k+4}+1=\frac{x_{4k+5}}{\dfrac{1}{y_{4k+4}}}+1$$

$$B=\frac{\dfrac{b\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}}{\dfrac{1}{\dfrac{a\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}}+1$$

$$=\frac{\dfrac{b\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}}{\dfrac{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{a\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}}+1$$

$$=\frac{\dfrac{b}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}}{\dfrac{1}{a\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}}+1=\frac{ba\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}+1$$

$$=\frac{ba\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]+\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}$$

$$=\frac{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb)+(k+1)(ba+ad+cd)+1\right]+ba\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}$$

$$=\frac{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb)+(k+2)(ba)+(k+1)(ad+cd)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}$$

$$=\frac{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba)+(k+1)(ad+cd)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}$$

bulunur. Bulunan B nin bu değeri x_{4k+6} nın paydasında yerine yazılırsa,

$$x_{4k+6}=\frac{\dfrac{a\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}{\dfrac{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba)+(k+1)(ad+cd)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}}$$

$$=\frac{\dfrac{a\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}{\dfrac{\left(\left[(k+2)(cb+ba)+(k+1)(ad+cd)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}}$$

$$=\frac{\dfrac{a\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba)+(k+1)(ad+cd)+1\right]\right)}}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}$$

$$=\frac{a\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}$$

doğru olduğu görülür.

$$y_{4(k+1)+2}=y_{4k+6}=\frac{x_{4k+4}}{x_{4k+5}y_{4k+4}+1}$$ olur.

Bulunan x_{4k+6} ve y_{4k+6} nın paydaları aynı olduğundan x_{4k+6} da hesaplamış olduğumuz B nin değerini y_{4k+6} da yerine yazılırsa,

$$y_{4k+6}=\frac{\dfrac{c\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}{\dfrac{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba)+(k+1)(ad+cd)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}}$$

$$=\frac{\dfrac{c\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}{\dfrac{\left(\left[(k+2)(cb+ba)+(k+1)(ad+cd)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}}$$

$$=\frac{\dfrac{c\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba)+(k+1)(ad+cd)+1\right]\right)}}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}$$

$$=\frac{c\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}$$

olup doğrudur.

$$x_{4(k+1)+3}=x_{4k+7}=\frac{y_{4k+5}}{x_{4k+6}y_{4k+5}+1},\quad C=x_{4k+6}y_{4k+5}+1\ \text{ olsun.}$$

$$C=x_{4k+6}y_{4k+5}+1=\frac{x_{4k+6}}{\dfrac{1}{y_{4k+5}}}+1$$

$$C=\frac{\dfrac{a\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}{\dfrac{1}{\dfrac{d\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}}}+1$$

$$=\frac{\dfrac{a\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}{\dfrac{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{d\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}+1$$

$$=\frac{\dfrac{a}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}}{\dfrac{1}{d\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}}+1=\frac{ad\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}+1$$

$$=\frac{ad\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]+\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}$$

$$=\frac{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba)+(k+1)(ad+cd)+1\right]+ad\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}$$

$$=\frac{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba)+(k+2)(ad)+(k+1)(cd)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}$$

$$=\frac{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba+ad)+(k+1)(cd)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}$$

bulunur. Bulunan C nin bu değeri x_{4k+7} nin paydasında yerine yazılırsa,

$$x_{4k+7}=\frac{\dfrac{d\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}}{\dfrac{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba+ad)+(k+1)(cd)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}}$$

$$=\frac{\dfrac{d\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}}{\dfrac{\left(\left[(k+2)(cb+ba+ad)+(k+1)(cd)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}}$$

$$=\frac{\dfrac{d\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba+ad)+(k+1)(cd)+1\right]\right)}}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}$$

$$=\frac{d\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}$$

doğru olduğu görülür.

$$y_{4(k+1)+3}=y_{4k+7}=\frac{x_{4k+5}}{x_{4k+6}y_{4k+5}+1}$$ olur.

Bulunan x_{4k+7} ve y_{4k+7} nin paydaları aynı olduğundan x_{4k+7} de hesaplamış olduğumuz C nın değerini y_{4k+7} de yerine yazılırsa,

$$y_{4k+7}=\frac{\dfrac{b\prod\limits_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod\limits_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod\limits_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod\limits_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}}{\dfrac{\prod\limits_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba+ad)+(k+1)(cd)+1\right]\right)}{\prod\limits_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}}$$

$$=\frac{\dfrac{b\prod\limits_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{\prod\limits_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod\limits_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}}{\dfrac{\left(\left[(k+2)(cb+ba+ad)+(k+1)(cd)+1\right]\right)}{\prod\limits_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}}$$

$$=\frac{\dfrac{b\prod\limits_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]\prod\limits_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}{\prod\limits_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba+ad)+(k+1)(cd)+1\right]\right)}}{\prod\limits_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}$$

$$=\frac{b\prod\limits_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]\prod\limits_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}{\prod\limits_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]\prod\limits_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}$$

olup doğrudur.

$$x_{4(k+1)+4} = x_{4k+8} = \frac{y_{4k+6}}{x_{4k+7}y_{4k+6}+1}, \quad D = x_{4k+7}y_{4k+6}+1 \text{ olsun.}$$

$$D = x_{4k+7}y_{4k+6}+1 = \frac{x_{4k+7}}{\frac{1}{y_{4k+6}}}+1$$

$$D = \frac{\dfrac{d\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}}{\dfrac{1}{\dfrac{c\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}}+1$$

$$= \frac{\dfrac{d\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}}{\dfrac{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}{c\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}}+1$$

$$= \frac{\dfrac{d}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}}{\dfrac{1}{c\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}}+1 = \frac{cd\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}+1$$

$$= \frac{cd\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]+\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}$$

$$=\frac{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba+ad)+(k+1)(cd)+1\right]+cd\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}$$

$$=\frac{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba+ad)+(k+2)(cd)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}$$

$$=\frac{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba+ad+cd)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}$$

bulunur. Bulunan D nin bu değeri x_{4k+8} in paydasında yerine yazılırsa,

$$x_{4k+8}=\frac{\dfrac{c\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}{\dfrac{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba+ad+cd)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}}$$

$$=\frac{\dfrac{c\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}{\left(\left[(k+2)(cb+ba+ad+cd)+1\right]\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{c\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba+ad+cd)+1\right]\right)}}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}$$

$$=\frac{c\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+2}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}$$

olup doğrudur.

$$y_{4(k+1)+4}=y_{4k+8}=\frac{x_{4k+6}}{x_{4k+7}y_{4k+6}+1}$$ olur.

Bulunan x_{4k+8} ve y_{4k+8} in paydaları aynı olduğundan x_{4k+8} de hesaplamış

olduğumuz D nın değerini y_{4k+8} de yerine yazılırsa,

$$y_{4k+8}=\frac{\dfrac{a\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}{\dfrac{\prod_{n=0}^{k}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba+ad+cd)+1\right]\right)}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}}$$

$$=\frac{\dfrac{a\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]}}{\left(\left[(k+2)(cb+ba+ad+cd)+1\right]\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{a\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]\left(\left[(k+2)(cb+ba+ad+cd)+1\right]\right)}}{\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}$$

$$= \frac{a\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb)+n(ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba+ad)+n(cd)+1\right]}{\prod_{n=0}^{k+2}\left[n(cb+ba+ad+cd)+1\right]\prod_{n=0}^{k+1}\left[(n+1)(cb+ba)+n(ad+cd)+1\right]}$$

olup doğrudur.

Bu sonuçlardan $n \geq 2$ için doğru olur ki istenendir.

Sonuç 3.1. $a, b, c, d \in \mathbb{R}^{+}$ ve başlangıç şartları $x_0 = c,\ x_{-1} = d,\ \ y_0 = a,\ y_{-1} = b$ olan, (3.1) denklem sisteminin bütün çözümleri için aşağıdaki

$$x_{4n+1}x_{4n+3} = y_{4n+1}y_{4n+3}$$

$$x_{4n+2}x_{4n+4} = y_{4n+2}y_{4n+4}$$

eşitlikler geçerlidir.

İspat. Teorem 3.1 den açıktır.

4. BÖLÜM

BAZI FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ VE ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI

(4.1) $$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}-1},\quad y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}-1},\quad z_{n+1}=\frac{z_{n-1}}{x_{n-1}y_n+y_{n-1}x_n}$$

FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİ VE ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI.

Bu bölümde;

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}-1},\quad y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}-1},\quad z_{n+1}=\frac{z_{n-1}}{x_{n-1}y_n+y_{n-1}x_n}$$

fark denklem sisteminin çözümleri ve çözümlerinin davranışları incelenmiştir.

Teorem 4.1. $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}/\{0\}$ ve başlangıç şartları $y_0 = a$, $y_{-1} = b$, $x_0 = c$, $x_{-1} = d$, $z_0 = e$, $z_{-1} = f$, $ad \neq 1$, $bc \neq 1$ ve $ad \neq -bc$ olmak üzere;

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} - 1}, \quad y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} - 1}, \quad z_{n+1} = \frac{z_{n-1}}{x_{n-1} y_n + y_{n-1} x_n} \tag{4.1}$$

fark denklem sisteminin bütün çözümleri;

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{d}{(ad-1)^n}, & n-\text{tek ise} \\ c(bc-1)^n, & n-\text{çift ise} \end{cases}$$

$$y_n = \begin{cases} \dfrac{b}{(bc-1)^n}, & n-\text{tek ise} \\ a(ad-1)^n, & n-\text{çift ise} \end{cases}$$

$$z_n = \begin{cases} \dfrac{f}{(ad+bc)^n}, & n-\text{tek ise} \\ e\left[\dfrac{(bc-1)(ad-1)}{ad(bc-1)+bc(ad-1)}\right]^n, & n-\text{çift ise} \end{cases}$$

dir.

İspat.

$n = 0$ için

$$x_1 = \frac{x_{-1}}{y_0 x_{-1} - 1} = \frac{d}{ad-1}$$

$$y_1 = \frac{y_{-1}}{x_0 y_{-1} - 1} = \frac{b}{bc-1}$$

$$z_1 = \frac{z_{-1}}{x_{-1} y_0 + y_{-1} x_0} = \frac{f}{ad+bc}$$

$n=1$ için
$$x_2=\frac{x_0}{y_1x_0-1}=\frac{c}{\frac{b}{bc-1}c-1}=\frac{c}{\frac{bc-(bc-1)}{bc-1}}=c(bc-1)$$

$$y_2=\frac{y_0}{x_1y_0-1}=\frac{a}{\frac{d}{ad-1}a-1}=\frac{a}{\frac{ad-(ad-1)}{ad-1}}=a(ad-1)$$

$$z_2=\frac{z_0}{x_0y_1+y_0x_1}=\frac{e}{c\frac{b}{bc-1}+a\frac{d}{ad-1}}=\frac{e}{\frac{bc}{bc-1}+\frac{ad}{ad-1}}$$

$$=\frac{e}{\frac{bc(ad-1)+ad(bc-1)}{(bc-1)(ad-1)}}=\frac{e(bc-1)(ad-1)}{bc(ad-1)+ad(bc-1)}$$

$n=2$ için
$$x_3=\frac{x_1}{y_2x_1-1}=\frac{\frac{d}{ad-1}}{a(ad-1)\frac{d}{ad-1}-1}$$

$$=\frac{\frac{d}{ad-1}}{(ad-1)\frac{ad}{ad-1}-1}=\frac{\frac{d}{ad-1}}{ad-1}=d(ad-1)^2$$

$$y_3=\frac{y_1}{x_2y_1-1}=\frac{\frac{b}{bc-1}}{c(bc-1)\frac{b}{bc-1}-1}$$

$$=\frac{\frac{b}{bc-1}}{(bc-1)\frac{bc}{bc-1}-1}=\frac{\frac{b}{bc-1}}{bc-1}=\frac{b}{(bc-1)^2}$$

$$z_3=\frac{z_1}{x_1y_2+y_1x_2}=\frac{\frac{f}{ad+bc}}{\left(\frac{d}{ad-1}\right)\left(a\left(ad-1\right)\right)+\left(\frac{b}{bc-1}\right)\left(c\left(bc-1\right)\right)}$$

$$=\frac{\frac{f}{ad+bc}}{\left(\frac{ad\left(ad-1\right)}{ad-1}\right)+\left(\frac{bc\left(bc-1\right)}{bc-1}\right)}=\frac{\frac{f}{ad+bc}}{ad+bc}=\frac{f}{\left(ad+bc\right)^2}$$

$n=k$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$x_k=\begin{cases}\dfrac{d}{\left(ad-1\right)^k}, & k-\text{tek ise}\\ c\left(bc-1\right)^k, & k-\text{çift ise}\end{cases}$$

$$y_k=\begin{cases}\dfrac{b}{\left(bc-1\right)^k}, & k-\text{tek ise}\\ a\left(ad-1\right)^k, & k-\text{çift ise}\end{cases}$$

$$z_k=\begin{cases}\dfrac{f}{\left(ad+bc\right)^k}, & k-\text{tek ise}\\ e\left[\dfrac{\left(bc-1\right)\left(ad-1\right)}{ad\left(bc-1\right)+bc\left(ad-1\right)}\right]^k, & k-\text{çift ise}\end{cases}$$

$n=k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$x_{2k+1}=\frac{x_{2k-1}}{y_{2k}x_{2k-1}-1}=\frac{\frac{d}{\left(ad-1\right)^k}}{a\left(ad-1\right)^k\frac{d}{\left(ad-1\right)^k}-1}=\frac{\frac{d}{\left(ad-1\right)^k}}{ad-1}=\frac{d}{\left(ad-1\right)^{k+1}},$$

$$y_{2k+1}=\frac{y_{2k-1}}{x_{2k}y_{2k-1}-1}=\frac{\frac{b}{\left(bc-1\right)^k}}{c\left(bc-1\right)^k\frac{b}{\left(bc-1\right)^k}-1}=\frac{\frac{b}{\left(bc-1\right)^k}}{bc-1}=\frac{b}{\left(bc-1\right)^{k+1}},$$

$$z_{2k+1}=\frac{z_{2k-1}}{x_{2k-1}y_{2k}+y_{2k-1}x_{2k}}=\frac{\frac{f}{\left(ad+bc\right)^k}}{\frac{d}{\left(ad-1\right)^k}a\left(ad-1\right)^k+\frac{b}{\left(bc-1\right)^k}c\left(bc-1\right)^k}$$

$$=\frac{\frac{f}{\left(ad+bc\right)^k}}{ad+bc}=\frac{f}{\left(ad+bc\right)^{k+1}},$$

$$x_{2k+2}=\frac{x_{2k}}{y_{2k+1}x_{2k}-1}=\frac{c\left(bc-1\right)^k}{\frac{b}{\left(bc-1\right)^{k+1}}c\left(bc-1\right)^k-1}$$

$$=\frac{c\left(bc-1\right)^k}{\frac{bc}{\left(bc-1\right)}-1}=\frac{c\left(bc-1\right)^k}{\frac{1}{\left(bc-1\right)}}=c\left(bc-1\right)^{k+1},$$

$$y_{2k+2}=\frac{y_{2k}}{x_{2k+1}y_{2k}-1}=\frac{a\left(ad-1\right)^k}{\frac{d}{\left(ad-1\right)^{k+1}}a\left(ad-1\right)^k-1}$$

$$=\frac{a\left(ad-1\right)^k}{\frac{ad}{\left(ad-1\right)}-1}=\frac{a\left(ad-1\right)^k}{\frac{1}{\left(ad-1\right)}}=a\left(ad-1\right)^{k+1},$$

$$z_{2k+2}=\frac{z_{2k}}{x_{2k}y_{2k+1}+y_{2k}x_{2k+1}}$$

$$=\frac{e\left(\frac{(bc-1)^{k}(ad-1)^{k}}{\left[ad(bc-1)+bc(ad-1)\right]^{k}}\right)}{c(bc-1)^{k}\frac{b}{(bc-1)^{k+1}}+a(ad-1)^{k}\frac{d}{(ad-1)^{k+1}}}$$

$$=\frac{e\left(\frac{(bc-1)^{k}(ad-1)^{k}}{\left[ad(bc-1)+bc(ad-1)\right]^{k}}\right)}{\frac{bc}{(bc-1)}+\frac{ad}{(ad-1)}}=\frac{e\left(\frac{(bc-1)^{k}(ad-1)^{k}}{\left[ad(bc-1)+bc(ad-1)\right]^{k}}\right)}{\frac{bc(ad-1)+ad(bc-1)}{(bc-1)(ad-1)}}$$

$$=\frac{e\left(\frac{(bc-1)^{k}(ad-1)^{k}}{\left[ad(bc-1)+bc(ad-1)\right]^{k}}\right)}{\frac{bc(ad-1)+ad(bc-1)}{(bc-1)(ad-1)}}$$

$$=e\left(\frac{(bc-1)^{k}(ad-1)^{k}}{\left[ad(bc-1)+bc(ad-1)\right]^{k}}\right)\left(\frac{(bc-1)(ad-1)}{bc(ad-1)+ad(bc-1)}\right)$$

$$=e\left(\frac{(bc-1)^{k+1}(ad-1)^{k+1}}{\left[ad(bc-1)+bc(ad-1)\right]^{k+1}}\right)=e\left[\frac{(bc-1)(ad-1)}{ad(bc-1)+bc(ad-1)}\right]^{k+1}$$

doğru olduğu görülür ki istenendir.

Sonuç 4.1.1. $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}/\{0\}$ ve başlangıç şartları $y_0 = a$, $y_{-1} = b$, $x_0 = c$, $x_{-1} = d$, $z_0 = e$, $z_{-1} = f$, $ad \neq 1$, $bc \neq 1$, $ad \neq -bc$ ve (4.1) denkleminde; $0 < a,b,c,d,e,f < 1$ olsun. O halde;

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} y_{2n-1} = \begin{cases} -\infty, & n-\text{tek ise} \\ +\infty, & n-\text{çift ise} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n-1} = \begin{cases} \infty, & ad+bc \in (0,1) \\ 0, & ad+bc \in (1,2) \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} y_{2n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n} = \begin{cases} 0, & -\infty < \dfrac{1}{(ad-1)} + \dfrac{1}{(bc-1)} < -3 \\ +\infty, & -3 < \dfrac{1}{(ad-1)} + \dfrac{1}{(bc-1)} < -2 \;\; n-\text{çift ise} \\ -\infty, & -3 < \dfrac{1}{(ad-1)} + \dfrac{1}{(bc-1)} < -2 \;\; n-\text{tek ise} \end{cases}$$

dır.

İspat. $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}/\{0\}$ ve başlangıç şartları $y_0 = a$, $y_{-1} = b$, $x_0 = c$, $x_{-1} = d$, $z_0 = e$, $z_{-1} = f$, $ad \neq 1$, $bc \neq 1$, $ad \neq -bc$ ve (4.1) denkleminde;

$$0 < a,d < 1 \Rightarrow 0 < ad < 1 \Rightarrow -1 < ad-1 < 0,$$

$$-1 < ad-1 < 0 \Rightarrow -\infty < \frac{1}{ad-1} < -1,$$

$$0 < b,c < 1 \Rightarrow 0 < bc < 1 \Rightarrow -1 < bc-1 < 0,$$

$$-1 < bc-1 < 0 \Rightarrow -\infty < \frac{1}{bc-1} < -1,$$

$$-\infty < \frac{1}{ad-1} < -1 \text{ ve } -\infty < \frac{1}{bc-1} < -1 \Rightarrow -\infty < \frac{1}{ad-1} + \frac{1}{bc-1} < -2$$

$$-\infty < 2+\frac{1}{ad-1}+\frac{1}{bc-1} < 0 \Rightarrow -\infty < \frac{1}{2+\frac{1}{ad-1}+\frac{1}{bc-1}} < 0$$

$$0 < a,b,c,d < 1 \Rightarrow 0 < ad < 1 \text{ ve } 0 < bc < 1 \Rightarrow 0 < ad+bc < 2$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{(ad-1)^n} = d\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(ad-1)^n} = \begin{cases} -\infty, & n-\text{tek ise} \\ +\infty, & n-\text{çift ise} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{b}{(bc-1)^n} = b\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(bc-1)^n} = \begin{cases} -\infty, & n-\text{tek ise} \\ +\infty, & n-\text{çift ise} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n-1} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f}{(ad+bc)^n} = f\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(ad+bc)^n} = f.\infty = \infty, & ad+bc \in (0,1) \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f}{(ad+bc)^n} = f\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(ad+bc)^n} = f.0 = 0, & ad+bc \in (1,2) \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} c(bc-1)^n = c\lim_{n\to\infty}(bc-1)^n = c.0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n} = \lim_{n\to\infty} a(ad-1)^n = a\lim_{n\to\infty}(ad-1)^n = a.0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n} = \lim_{n\to\infty} e\left[\frac{(bc-1)(ad-1)}{ad(bc-1)+bc(ad-1)}\right]^n = e\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{(bc-1)(ad-1)}{(bc-1)(ad-1)}}{\frac{ad(bc-1)+bc(ad-1)}{(bc-1)(ad-1)}}\right]^n$$

$$= e\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\frac{ad}{(ad-1)}+\frac{bc}{(bc-1)}}\right]^n = e\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\frac{ad-1+1}{(ad-1)}+\frac{bc-1+1}{(bc-1)}}\right]^n$$

$$= e\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{(ad-1)}+1+\frac{1}{(bc-1)}}\right]^n = e\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2+\frac{1}{(ad-1)}+\frac{1}{(bc-1)}}\right]^n$$

$$=\begin{cases} e.0, & -\infty<\dfrac{1}{(ad-1)}+\dfrac{1}{(bc-1)}<-3 \\ +\infty.e, & -3<\dfrac{1}{(ad-1)}+\dfrac{1}{(bc-1)}<-2 \quad n-\text{çift ise} \\ -\infty.e, & -3<\dfrac{1}{(ad-1)}+\dfrac{1}{(bc-1)}<-2 \quad n-\text{tek ise} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & -\infty<\dfrac{1}{(ad-1)}+\dfrac{1}{(bc-1)}<-3 \\ +\infty, & -3<\dfrac{1}{(ad-1)}+\dfrac{1}{(bc-1)}<-2 \quad n-\text{çift ise} \\ -\infty, & -3<\dfrac{1}{(ad-1)}+\dfrac{1}{(bc-1)}<-2 \quad n-\text{tek ise} \end{cases}$$

Sonuç 4.1.2. $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}/\{0\}$ ve başlangıç şartları $y_0=a$, $y_{-1}=b$, $x_0=c$, $x_{-1}=d$, $z_0=e$, $z_{-1}=f$, $ad\neq 1$, $bc\neq 1$, $ad\neq -bc$ ve (4.1) denkleminde;

$1<ad,bc<2$ olsun. O halde;

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1}=\begin{cases} -\infty, & d<0 \\ +\infty, & d>0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n-1}=\begin{cases} -\infty, & b<0 \\ +\infty, & b>0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n}=\lim_{n\to\infty} y_{2n}=\lim_{n\to\infty} z_{2n}=\lim_{n\to\infty} z_{2n-1}=0$$

dır.

İspat. $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}/\{0\}$ ve başlangıç şartları $y_0=a$, $y_{-1}=b$, $x_0=c$, $x_{-1}=d$, $z_0=e$, $z_{-1}=f$, $ad\neq 1$, $bc\neq 1$, $ad\neq -bc$ ve (4.1) denkleminde;

$1<ad<2\Rightarrow 0<ad-1<1$ olur. O halde $\lim_{n\to\infty}(ad-1)^n=0$

$1 < bc < 2 \Rightarrow 0 < bc - 1 < 1$ olur. O halde $\lim\limits_{n\to\infty}(bc-1)^n = 0$

$1 < ad < 2$ ve $1 < bc < 2 \Rightarrow 2 < ad + bc < 4$ olur. O halde; $\lim\limits_{n\to\infty}(ad+bc)^n = \infty$

$$0 < ad - 1 < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{ad-1} < \infty,$$

$$0 < bc - 1 < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{bc-1} < \infty,$$

$$1 < \frac{1}{ad-1} < \infty \text{ ve } 1 < \frac{1}{bc-1} < \infty \Rightarrow 2 < \frac{1}{ad-1} + \frac{1}{bc-1} < \infty$$

$$\Rightarrow 4 < 2 + \frac{1}{ad-1} + \frac{1}{bc-1} < \infty \Rightarrow 0 < \frac{1}{2 + \frac{1}{ad-1} + \frac{1}{bc-1}} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2 + \frac{1}{ad-1} + \frac{1}{bc-1}}\right)^n = 0 \quad \text{olur.}$$

Buna göre;

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{(ad-1)^n} = d\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(ad-1)^n} = d.\infty = \begin{cases} -\infty, & d < 0 \\ +\infty, & d > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{b}{(bc-1)^n} = b\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(bc-1)^n} = b.\infty = \begin{cases} -\infty, & b < 0 \\ +\infty, & b > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{f}{(ad+bc)^n} = f\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(ad+bc)^n} = f.0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} c(bc-1)^n = c\lim_{n\to\infty}(bc-1)^n = c.0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n} = \lim_{n\to\infty} a(ad-1)^n = a\lim_{n\to\infty}(ad-1)^n = a.0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n} = \lim_{n\to\infty} e\left[\frac{1}{2+\dfrac{1}{(ad-1)}+\dfrac{1}{(bc-1)}}\right]^n = e\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2+\dfrac{1}{(ad-1)}+\dfrac{1}{(bc-1)}}\right]^n = e.0 = 0$$

Sonuç 4.1.3. $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}/\{0\}$ ve başlangıç şartları $y_0 = a$, $y_{-1} = b$, $x_0 = c$, $x_{-1} = d$, $z_0 = e$, $z_{-1} = f$, $ad \neq 1$, $bc \neq 1$, $ad \neq -bc$ ve (4.1) denkleminde;

$-\infty < ad, bc < -1$ olsun. O halde;

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} y_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} z_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} y_{2n} = \lim_{n\to\infty} z_{2n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \begin{cases} -\infty, & n-\text{tek ve } c>0 \text{ ise} \\ -\infty, & n-\text{çift ve } c<0 \text{ ise} \\ +\infty, & n-\text{tek ve } c<0 \text{ ise} \\ +\infty, & n-\text{çift ve } c>0 \text{ ise} \end{cases}$$

dır.

İspat. $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}/\{0\}$ ve başlangıç şartları $y_0 = a$, $y_{-1} = b$, $x_0 = c$, $x_{-1} = d$, $z_0 = e$, $z_{-1} = f$, $ad \neq 1$, $bc \neq 1$, $ad \neq -bc$ ve (4.1) denkleminde;

$$-\infty < ad < -1 \Rightarrow -\infty < ad-1 < -2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(ad-1)^n = \begin{cases} -\infty, & n-\text{tek ise} \\ +\infty, & n-\text{çift ise} \end{cases},$$

$$-\infty < bc < -1 \Rightarrow -\infty < bc-1 < -2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(bc-1)^n = \begin{cases} -\infty, & n-\text{tek ise} \\ +\infty, & n-\text{çift ise} \end{cases},$$

$$-\infty < ad < -1 \text{ ve } -\infty < bc < -1 \Rightarrow -\infty < ad+bc < -2$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(ad+bc)^n = \begin{cases} -\infty, & n-tek \\ +\infty, & n-çift \end{cases}$$

$$-\infty < ad-1 < -2 \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{ad-1} < 0,$$

$$-\infty < bc-1 < -2 \Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{1}{bc-1} < 0,$$

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{ad-1} < 0 \text{ ve } -\frac{1}{2} < \frac{1}{bc-1} < 0 \Rightarrow -1 < \frac{1}{ad-1} + \frac{1}{bc-1} < 0$$

$$-1 < \frac{1}{ad-1} + \frac{1}{bc-1} < 0 \Rightarrow 1 < 2 + \frac{1}{ad-1} + \frac{1}{bc-1} < 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{2+\frac{1}{ad-1}+\frac{1}{bc-1}} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{ad-1}+\frac{1}{bc-1}}\right)^n = 0 \quad \text{olur.}$$

Buna göre;

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{(ad-1)^n} = d \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(ad-1)^n} = d.0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{(bc-1)^n} = b \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(bc-1)^n} = b.0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{f}{(ad+bc)^n} = f \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(ad+bc)^n} = f.0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} c(bc-1)^n = c \lim_{n\to\infty} (bc-1)^n$$

$$= c\begin{cases} -\infty, & n-\text{tek ise} \\ +\infty, & n-\text{çift ise} \end{cases} = \begin{cases} -\infty, & n-\text{tek ve } c>0 \text{ ise} \\ -\infty, & n-\text{çift ve } c<0 \text{ ise} \\ +\infty, & n-\text{tek ve } c<0 \text{ ise} \\ +\infty, & n-\text{çift ve } c>0 \text{ ise} \end{cases},$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n} = \lim_{n\to\infty} a(ad-1)^n = a \lim_{n\to\infty} (ad-1)^n = a.0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n} = \lim_{n\to\infty} e\left[\frac{1}{2+\frac{1}{(ad-1)}+\frac{1}{(bc-1)}}\right]^n = e\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2+\frac{1}{(ad-1)}+\frac{1}{(bc-1)}}\right]^n = e.0 = 0$$

Sonuç 4.1.4. $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}/\{0\}$ ve başlangıç şartları $y_0 = a$, $y_{-1} = b$, $x_0 = c$, $x_{-1} = d$, $z_0 = e$, $z_{-1} = f$, $ad \neq 1$, $bc \neq 1$, $ad \neq -bc$ ve (4.1) denkleminde;

$2 < ad, bc < \infty$ olsun. O halde;

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} y_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} z_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} z_{2n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \begin{cases} +\infty, & c > 0 \\ -\infty, & c < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n} = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

dır.

İspat. $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}/\{0\}$ ve başlangıç şartları $y_0 = a$, $y_{-1} = b$, $x_0 = c$, $x_{-1} = d$, $z_0 = e$, $z_{-1} = f$, $ad \neq 1$, $bc \neq 1$, $ad \neq -bc$ ve (4.1) denkleminde;

$$2 < ad < \infty \Rightarrow 1 < ad - 1 < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(ad-1)^n = \infty,$$

$$2 < bc < \infty \Rightarrow 1 < bc - 1 < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(bc-1)^n = \infty,$$

$$2 < ad < \infty \text{ ve } 2 < bc < \infty \Rightarrow 4 < ad + bc < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(ad+bc)^n = \infty,$$

$$1 < ad - 1 < \infty \Rightarrow 0 < \frac{1}{ad-1} < 1 \text{ ve } 1 < bc - 1 < \infty \Rightarrow 0 < \frac{1}{bc-1} < 1,$$

$$0<\frac{1}{ad-1}<1 \text{ ve } 0<\frac{1}{bc-1}<1 \Rightarrow 0<\frac{1}{ad-1}+\frac{1}{bc-1}<2,$$

$$\Rightarrow 2<2+\frac{1}{ad-1}+\frac{1}{bc-1}<4 \Rightarrow \frac{1}{4}<\frac{1}{2+\frac{1}{ad-1}+\frac{1}{bc-1}}<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{ad-1}+\frac{1}{bc-1}}\right)^n=0 \text{ olur.}$$

Buna göre;

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{(ad-1)^n}=d\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(ad-1)^n}=d.0=0$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{(bc-1)^n}=b\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(bc-1)^n}=b.0=0$$

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{f}{(ad+bc)^n}=f\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(ad+bc)^n}=f.0=0$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n}=\lim_{n\to\infty} c(bc-1)^n=c\lim_{n\to\infty}(bc-1)^n=c.\infty=\begin{cases}+\infty, & c>0\\ -\infty, & c<0\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n}=\lim_{n\to\infty} a(ad-1)^n=a\lim_{n\to\infty}(ad-1)^n=a.\infty=\begin{cases}+\infty, & a>0\\ -\infty, & a<0\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n}=\lim_{n\to\infty} e\left[\frac{1}{2+\frac{1}{(ad-1)}+\frac{1}{(bc-1)}}\right]^n=e\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2+\frac{1}{(ad-1)}+\frac{1}{(bc-1)}}\right]^n=e.0=0$$

Sonuç 4.1.5. $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}/\{0\}$ ve başlangıç şartları $y_0=a$, $y_{-1}=b$, $x_0=c$, $x_{-1}=d$, $z_0=e$, $z_{-1}=f$, $ad\neq 1$, $bc\neq 1$, $ad\neq -bc$ ve (4.1) denkleminde;

$-1 < a,b,c,d,e,f < 0$ olsun. O halde;

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \begin{cases} +\infty, & n-\text{tek ise} \\ -\infty, & n-\text{çift ise} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n-1} = \begin{cases} +\infty, & n-\text{tek ise} \\ -\infty, & n-\text{çift ise} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} y_{2n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n-1} = \begin{cases} -\infty, & ad+bc \in (0,1) \\ 0, & ad+bc \in (1,2) \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n} = \begin{cases} 0, & -\infty < \dfrac{1}{(ad-1)} + \dfrac{1}{(bc-1)} < -3 \\ +\infty, & -3 < \dfrac{1}{(ad-1)} + \dfrac{1}{(bc-1)} < -2 \quad n-\text{çift ise} \\ -\infty, & -3 < \dfrac{1}{(ad-1)} + \dfrac{1}{(bc-1)} < -2 \quad n-\text{tek ise} \end{cases}$$

dır.

İspat. $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}/\{0\}$ ve başlangıç şartları $y_0 = a$, $y_{-1} = b$, $x_0 = c$, $x_{-1} = d$, $z_0 = e$, $z_{-1} = f$, $ad \neq 1$, $bc \neq 1$, $ad \neq -bc$ ve (4.1) denkleminde;

$$-1 < a,d < 0 \Rightarrow 0 < ad < 1 \Rightarrow -1 < ad-1 < 0,$$

$$-1 < ad-1 < 0 \Rightarrow -\infty < \frac{1}{ad-1} < -1,$$

$$-1 < b,c < 0 \Rightarrow 0 < bc < 1 \Rightarrow -1 < bc-1 < 0,$$

$$-1 < bc-1 < 0 \Rightarrow -\infty < \frac{1}{bc-1} < -1,$$

$$-\infty < \frac{1}{ad-1} < -1 \text{ ve } -\infty < \frac{1}{bc-1} < -1 \Rightarrow -\infty < \frac{1}{ad-1} + \frac{1}{bc-1} < -2,$$

$$-\infty < 2+\frac{1}{ad-1}+\frac{1}{bc-1} < 0 \Rightarrow -\infty < \frac{1}{2+\frac{1}{ad-1}+\frac{1}{bc-1}} < 0,$$

$$-1 < a,b,c,d < 0 \Rightarrow 0 < ad < 1 \text{ ve } 0 < bc < 1 \Rightarrow 0 < ad+bc < 2,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{(ad-1)^n} = d\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(ad-1)^n} = \begin{cases} +\infty, & n-\text{tek ise} \\ -\infty, & n-\text{çift ise}\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{b}{(bc-1)^n} = b\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(bc-1)^n} = \begin{cases} +\infty, & n-\text{tek ise} \\ -\infty, & n-\text{çift ise}\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n-1} = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{f}{(ad+bc)^n} = f\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(ad+bc)^n} = f.\infty = -\infty, & ad+bc\in(0,1) \\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{f}{(ad+bc)^n} = f\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(ad+bc)^n} = f.0 = 0, & ad+bc\in(1,2)\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} c(bc-1)^n = c\lim_{n\to\infty}(bc-1)^n = c.0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} y_{2n} = \lim_{n\to\infty} a(ad-1)^n = a\lim_{n\to\infty}(ad-1)^n = a.0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} z_{2n} = \lim_{n\to\infty} e\left[\frac{(bc-1)(ad-1)}{ad(bc-1)+bc(ad-1)}\right]^n = e\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\frac{(bc-1)(ad-1)}{(bc-1)(ad-1)}}{\frac{ad(bc-1)+bc(ad-1)}{(bc-1)(ad-1)}}\right]^n$$

$$= e\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\frac{ad}{(ad-1)}+\frac{bc}{(bc-1)}}\right]^n = e\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\frac{ad-1+1}{(ad-1)}+\frac{bc-1+1}{(bc-1)}}\right]^n$$

$$= e\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{(ad-1)}+1+\frac{1}{(bc-1)}}\right]^n = e\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2+\frac{1}{(ad-1)}+\frac{1}{(bc-1)}}\right]^n$$

$$=\begin{cases} e.0, & -\infty<\dfrac{1}{(ad-1)}+\dfrac{1}{(bc-1)}<-3 \\ +\infty.e, & -3<\dfrac{1}{(ad-1)}+\dfrac{1}{(bc-1)}<-2 \quad n-\text{çift ise} \\ -\infty.e, & -3<\dfrac{1}{(ad-1)}+\dfrac{1}{(bc-1)}<-2 \quad n-\text{tek ise} \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & -\infty<\dfrac{1}{(ad-1)}+\dfrac{1}{(bc-1)}<-3 \\ +\infty, & -3<\dfrac{1}{(ad-1)}+\dfrac{1}{(bc-1)}<-2 \quad n-\text{çift ise} \\ -\infty, & -3<\dfrac{1}{(ad-1)}+\dfrac{1}{(bc-1)}<-2 \quad n-\text{tek ise} \end{cases}$$

5. BÖLÜM

BAZI FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

(5.1) $$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}+1},\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1},\ z_{n+1}=\frac{z_{n-1}}{x_{n-1}y_n+y_{n-1}x_n}$$

FARK DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİ.

Bu bölümde;

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}+1},\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1},\ z_{n+1}=\frac{z_{n-1}}{x_{n-1}y_n+y_{n-1}x_n}$$

fark denklem sisteminin çözümleri incelenmiştir.

Teorem 5.1. $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}/\{0\}$ ve başlangıç şartları $y_0 = a$, $y_{-1} = b$, $x_0 = c$, $x_{-1} = d$, $z_0 = e$, $z_{-1} = f$, $ad \neq -1$, $bc \neq -1$, $ad \neq -bc$ olmak üzere;

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} + 1},\ y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} + 1},\ z_{n+1} = \frac{z_{n-1}}{x_{n-1} y_n + y_{n-1} x_n} \tag{5.1}$$

fark denklem sisteminin bütün çözümleri;

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{d \prod_{i=1}^{n} \left[(2i-2)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{n} \left[(2i-1)ad+1\right]}, & n-\text{tek ise} \\[2ex] \dfrac{c \prod_{i=1}^{n} \left[(2i-1)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{n} \left[(2i)bc+1\right]}, & n-\text{çift ise} \end{cases}$$

$$y_n = \begin{cases} \dfrac{b \prod_{i=1}^{n} \left[(2i-2)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{n} \left[(2i-1)bc+1\right]}, & n-\text{tek ise} \\[2ex] \dfrac{a \prod_{i=1}^{n} \left[(2i-1)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{n} \left[(2i)ad+1\right]}, & n-\text{çift ise} \end{cases}$$

$$z_n = \begin{cases} \dfrac{f \prod_{i=1}^{n} \left[(2i-2)bc+1\right]\left[(2i-2)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{n} \left\{bc\left[(2i-2)ad+1\right] + ad\left[(2i-2)bc+1\right]\right\}}, & n-\text{tek ise} \\[2ex] \dfrac{e \prod_{i=1}^{n} \left[(2i-1)bc+1\right]\left[(2i-1)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{n} \left\{bc\left[(2i-1)ad+1\right] + ad\left[(2i-1)bc+1\right]\right\}}, & n-\text{çift ise} \end{cases}$$

dır.

Ispat. $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}/\{0\}$ ve başlangıç şartları $y_0 = a$, $y_{-1} = b$, $x_0 = c$, $x_{-1} = d$, $z_0 = e$, $z_{-1} = f$, $ad \neq -1$, $bc \neq -1$, $ad \neq -bc$ olmak üzere;

$n=0$ için
$$x_1=\frac{x_{-1}}{y_0x_{-1}+1}=\frac{d}{ad+1}$$

$$y_1=\frac{y_{-1}}{x_0y_{-1}+1}=\frac{b}{bc+1}$$

$$z_1=\frac{z_{-1}}{x_{-1}y_0+y_{-1}x_0}=\frac{f}{ad+bc}$$

$n=1$ için
$$x_2=\frac{x_0}{y_1x_0+1}=\frac{c}{\frac{b}{bc+1}c+1}=\frac{c\left(bc+1\right)}{2bc+1}$$

$$y_2=\frac{y_0}{x_1y_0+1}=\frac{a}{\frac{d}{ad+1}a+1}=\frac{a\left(ad+1\right)}{2ad+1}$$

$$z_2=\frac{z_0}{x_0y_1+y_0x_1}=\frac{e}{c\frac{b}{bc+1}+a\frac{d}{ad+1}}=\frac{e}{\frac{bc}{bc+1}+\frac{ad}{ad+1}}$$

$$=\frac{e}{\frac{bc\left(ad+1\right)+ad\left(bc+1\right)}{\left(bc+1\right)\left(ad+1\right)}}=\frac{e\left(bc+1\right)\left(ad+1\right)}{bc\left(ad+1\right)+ad\left(bc+1\right)}$$

$$x_3=\frac{x_1}{y_2x_1+1}=\frac{\frac{d}{ad+1}}{\frac{a\left(ad+1\right)}{2ad+1}\frac{d}{ad+1}+1}=\frac{\frac{d}{ad+1}}{\frac{ad}{2ad+1}+1}$$

$$=\frac{\frac{d}{ad+1}}{\frac{3ad+1}{2ad+1}}=\frac{d\left(2ad+1\right)}{\left(ad+1\right)\left(3ad+1\right)}$$

$$y_3=\frac{y_1}{x_2y_1+1}=\frac{\frac{b}{bc+1}}{\frac{c\left(bc+1\right)}{2bc+1}\frac{b}{bc+1}+1}=\frac{\frac{b}{bc+1}}{\frac{bc}{2bc+1}+1}$$

$$=\frac{\dfrac{b}{bc+1}}{\dfrac{3bc+1}{2bc+1}}=\frac{b\left(2bc+1\right)}{\left(bc+1\right)\left(3bc+1\right)}$$

$$z_3=\frac{z_1}{x_1y_2+y_1x_2}=\frac{\dfrac{f}{ad+bc}}{\dfrac{d}{ad+1}\dfrac{a\left(ad+1\right)}{2ad+1}+\dfrac{b}{bc+1}\dfrac{c\left(bc+1\right)}{2bc+1}}=\frac{\dfrac{f}{ad+bc}}{\dfrac{ad}{2ad+1}+\dfrac{bc}{2bc+1}}$$

$$=\frac{\dfrac{f}{ad+bc}}{\dfrac{ad\left(2bc+1\right)+bc\left(2ad+1\right)}{\left(2ad+1\right)\left(2bc+1\right)}}=\frac{f\left(2ad+1\right)\left(2bc+1\right)}{\left(ad+bc\right)\left(ad\left(2bc+1\right)+bc\left(2ad+1\right)\right)}$$

$n=k$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$x_{2k-1}=\frac{d\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-2\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]}$$

$$x_{2k}=\frac{c\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i\right)bc+1\right]}$$

$$y_{2k-1}=\frac{b\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-2\right)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]}$$

$$y_{2k}=\frac{a\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i\right)ad+1\right]}$$

$$z_{2k-1}=\frac{f\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-2\right)bc+1\right]\left[\left(2i-2\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left\{bc\left[\left(2i-2\right)ad+1\right]+ad\left[\left(2i-2\right)bc+1\right]\right\}}$$

$$z_{2k}=\frac{e\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left\{bc\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]+ad\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]\right\}}$$

$n=k+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$x_{2k+1}=\frac{x_{2k-1}}{y_{2k}x_{2k-1}+1}=\frac{\dfrac{d\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-2\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]}}{\left(\dfrac{a\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i\right)ad+1\right]}\right)\left(\dfrac{d\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-2\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]}\right)+1}$$

$$=\frac{\dfrac{d\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-2\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]}}{\left(\dfrac{ad}{\left(2k\right)ad+1}\right)+1}=\frac{\dfrac{d\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-2\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]}}{\left(\dfrac{ad+\left(2k\right)ad+1}{\left(2k\right)ad+1}\right)}$$

$$=\frac{d\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-2\right)ad+1\right]\left(\left(2k\right)ad+1\right)}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]\left(\left(2k+1\right)ad+1\right)}=\frac{d\prod_{i=1}^{k+1}\left[\left(2i-2\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k+1}\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]}$$

$$y_{2k+1}=\frac{y_{2k-1}}{x_{2k}y_{2k-1}+1}=\frac{\dfrac{b\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-2\right)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]}}{\left(\dfrac{c\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i\right)bc+1\right]}\right)\left(\dfrac{b\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-2\right)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]}\right)+1}$$

$$= \frac{\dfrac{b\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-2)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-1)bc+1\right]}}{\dfrac{bc}{\left[(2k)bc+1\right]}+1} = \frac{\dfrac{b\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-2)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-1)bc+1\right]}}{\dfrac{bc+(2k)bc+1}{(2k)bc+1}}$$

$$= \frac{b\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-2)bc+1\right]\left((2k)bc+1\right)}{\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-1)bc+1\right]\left((2k+1)bc+1\right)} = \frac{b\prod_{i=1}^{k+1}\left[(2i-2)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k+1}\left[(2i-1)bc+1\right]}$$

$$x_{2k+2} = \frac{x_{2k}}{y_{2k+1}x_{2k}+1} = \frac{\dfrac{c\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-1)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[(2i)bc+1\right]}}{\left(\dfrac{b\prod_{i=1}^{k+1}\left[(2i-2)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k+1}\left[(2i-1)bc+1\right]}\right)\left(\dfrac{c\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-1)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[(2i)bc+1\right]}\right)+1}$$

$$= \frac{\dfrac{c\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-1)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[(2i)bc+1\right]}}{\dfrac{bc}{\left[(2(k+1)-1)bc+1\right]}+1} = \frac{\dfrac{c\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-1)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[(2i)bc+1\right]}}{\dfrac{bc+(2k+1)bc+1}{\left[(2k+1)bc+1\right]}}$$

$$= \frac{c\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-1)bc+1\right]\left[(2k+1)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[(2i)bc+1\right]\left[(2k+2)bc+1\right]} = \frac{c\prod_{i=1}^{k+1}\left[(2i-1)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k+1}\left[(2i)bc+1\right]}$$

$$y_{2k+2} = \frac{y_{2k}}{x_{2k+1}y_{2k}+1} = \frac{\dfrac{a\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-1)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[(2i)ad+1\right]}}{\left(\dfrac{d\prod_{i=1}^{k+1}\left[(2i-2)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k+1}\left[(2i-1)ad+1\right]}\right)\left(\dfrac{a\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-1)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[(2i)ad+1\right]}\right)+1}$$

$$=\frac{\dfrac{a\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i\right)ad+1\right]}}{\left(\dfrac{ad}{\left[\left(2k+1\right)ad+1\right]}\right)+1}=\frac{\dfrac{a\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i\right)ad+1\right]}}{\dfrac{ad+\left(2k+1\right)ad+1}{\left(2k+1\right)ad+1}}$$

$$=\frac{a\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]\left[\left(2k+1\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i\right)ad+1\right]\left[\left(2k+2\right)ad+1\right]}=\frac{a\prod_{i=1}^{k+1}\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k+1}\left[\left(2i\right)ad+1\right]}$$

$$z_{2k+1}=\frac{z_{2k-1}}{x_{2k-1}y_{2k}+y_{2k-1}x_{2k}}$$

$$=\frac{\dfrac{f\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-2\right)bc+1\right]\left[\left(2i-2\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left\{bc\left[\left(2i-2\right)ad+1\right]+ad\left[\left(2i-2\right)bc+1\right]\right\}}}{\left(\dfrac{d\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-2\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]}\right)\left(\dfrac{a\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i\right)ad+1\right]}\right)+\left(\dfrac{b\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-2\right)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]}\right)\left(\dfrac{c\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i\right)bc+1\right]}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{f\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-2\right)bc+1\right]\left[\left(2i-2\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left\{bc\left[\left(2i-2\right)ad+1\right]+ad\left[\left(2i-2\right)bc+1\right]\right\}}}{\left(\dfrac{ad\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-2\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i\right)ad+1\right]}\right)+\left(\dfrac{bc\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-2\right)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i\right)bc+1\right]}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{f\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-2\right)bc+1\right]\left[\left(2i-2\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left\{bc\left[\left(2i-2\right)ad+1\right]+ad\left[\left(2i-2\right)bc+1\right]\right\}}}{\left(\dfrac{ad}{\left[\left(2k\right)ad+1\right]}\right)+\left(\dfrac{bc}{\left[\left(2k\right)bc+1\right]}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{f\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-2)bc+1\right]\left[(2i-2)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left\{bc\left[(2i-2)ad+1\right]+ad\left[(2i-2)bc+1\right]\right\}}}{\dfrac{ad\left[(2k)bc+1\right]+bc\left[(2k)ad+1\right]}{\left[(2k)ad+1\right]\left[(2k)bc+1\right]}}$$

$$= \frac{f\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-2)bc+1\right]\left[(2i-2)ad+1\right]\left[(2k)ad+1\right]\left[(2k)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left\{bc\left[(2i-2)ad+1\right]+ad\left[(2i-2)bc+1\right]\right\}\left\{ad\left[(2k)bc+1\right]+bc\left[(2k)ad+1\right]\right\}}$$

$$= \frac{f\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-2)bc+1\right]\left[(2k)bc+1\right]\left[(2i-2)ad+1\right]\left[(2k)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left\{bc\left[(2i-2)ad+1\right]+ad\left[(2i-2)bc+1\right]\right\}\left\{bc\left[(2k)ad+1\right]+ad\left[(2k)bc+1\right]\right\}}$$

$$= \frac{f\prod_{i=1}^{k+1}\left[(2i-2)bc+1\right]\left[(2i-2)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k+1}\left\{bc\left[(2i-2)ad+1\right]+ad\left[(2i-2)bc+1\right]\right\}}$$

$$z_{2k+2} = \frac{z_{2k}}{x_{2k}y_{2k+1}+y_{2k}x_{2k+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{e\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-1)bc+1\right]\left[(2i-1)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left\{bc\left[(2i-1)ad+1\right]+ad\left[(2i-1)bc+1\right]\right\}}}{\left(\dfrac{c\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-1)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[(2i)bc+1\right]}\right)\left(\dfrac{b\prod_{i=1}^{k+1}\left[(2i-2)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k+1}\left[(2i-1)bc+1\right]}\right)+\left(\dfrac{a\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-1)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left[(2i)ad+1\right]}\right)\left(\dfrac{d\prod_{i=1}^{k+1}\left[(2i-2)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k+1}\left[(2i-1)ad+1\right]}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{e\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-1)bc+1\right]\left[(2i-1)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left\{bc\left[(2i-1)ad+1\right]+ad\left[(2i-1)bc+1\right]\right\}}}{\left(\dfrac{bc\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-1)bc+1\right]}{\prod_{i=1}^{k+1}\left[(2i-1)bc+1\right]}\right)+\left(\dfrac{ad\prod_{i=1}^{k}\left[(2i-1)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k+1}\left[(2i-1)ad+1\right]}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{e\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left\{bc\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]+ad\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]\right\}}}{\left(\dfrac{bc}{\left[\left(2k+1\right)bc+1\right]}\right)+\left(\dfrac{ad}{\left[\left(2k+1\right)ad+1\right]}\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{e\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left\{bc\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]+ad\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]\right\}}}{\dfrac{bc\left[\left(2k+1\right)ad+1\right]+ad\left[\left(2k+1\right)bc+1\right]}{\left[\left(2k+1\right)bc+1\right]\left[\left(2k+1\right)ad+1\right]}}$$

$$=\frac{e\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]\left[\left(2k+1\right)bc+1\right]\left[\left(2k+1\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left\{bc\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]+ad\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]\right\}\left\{bc\left[\left(2k+1\right)ad+1\right]+ad\left[\left(2k+1\right)bc+1\right]\right\}}$$

$$=\frac{e\prod_{i=1}^{k}\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]\left[\left(2k+1\right)bc+1\right]\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]\left[\left(2k+1\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k}\left\{bc\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]+ad\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]\right\}\left\{bc\left[\left(2k+1\right)ad+1\right]+ad\left[\left(2k+1\right)bc+1\right]\right\}}$$

$$=\frac{e\prod_{i=1}^{k+1}\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]}{\prod_{i=1}^{k+1}\left\{bc\left[\left(2i-1\right)ad+1\right]+ad\left[\left(2i-1\right)bc+1\right]\right\}}$$

olur ki istenendir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada;

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1},\quad y_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1},$$

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}-1},\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}-1},\ z_{n+1}=\frac{z_{n-1}}{x_{n-1}y_n+y_{n-1}x_n}$$

ve

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}+1},\quad y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1},\ z_{n+1}=\frac{z_{n-1}}{x_{n-1}y_n+y_{n-1}x_n}$$

fark denklem sistemleri tanımlanmış ve çözümlerinin davranışları incelenmiştir. Bu sistemlerde katsayılar farklı parametreler alınarak veya sistemlerin mertebesi yükseltilerek yeni sistemler elde edilebilir. Oluşturulan sistemlerin çözümleri, periyodikliği ve kararlılığı üzerine farklı çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR:

Elaydi, S., (1995). *An Introduction to Difference Equations*. Spinger - Verlag New York.

Schinas, C. J., (1997). Invariants for difference equations and systems of difference equations of rational form. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 216*, 164-179.

Papaschinopoulos, G. and Schinas, C. J., (1998). On a system of two nonlinear difference equations $x_{n+1} = A + \frac{y_n}{x_{n-p}}$, $y_{n+1} = A + \frac{x_n}{y_{n-q}}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 219*, 415-426.

Papaschinopoulos, G. and Schinas, C. J. (1998). On a system of two nonlinear difference equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 219*, 415 – 426 .

Grove, E. A., Ladas, G., McGrath L. C. and Teixeira, C. T. (2001). Existence and behavior of solutions of a rational system. *Communications Applications Nonlinear Analysis 3* (1), 1-25.

Kulenović, M. R. S. and Ladas, G., (2002). *Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjecture*. Boca Raton London.

Clark, D. and Kulenović, M. R. S., (2002). A Coupled System of Rational Difference Equations. J*ournal Computers & Mathematics with Applications, 43*, 849-867.

Papaschinopoulos, G. and Schinas, C. J., (2002). On the system of two difference equations $x_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} A_i / y_{n-i}^{p_i}$, $y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} B_i / x_{n-i}^{q_i}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 273,* 294-309.

Clark, D. and Kulenović, M. R. S., (2002). A coupled system of rational difference equations. *Computers and Mathematics with Applications, 43,* 849-867.

Clark, D., Kulenović, M. R. S. and Selgrade, J. F., (2003). Global asymptotic behavior of a two-dimensional difference equation modelling competition. *Nonlinear Analysis, 52* (7), 1765–1776.

Papaschinopoulos, G., Schinas, J. and Hatzifilippidis, V., (2003). Global behavior of the solutions of a max-equation and of a system of two max-equation, *Journal of Computational Analysis and Applications, 5*(2), 237-247.

Kulenović, M. R. S. and Nurkanović, M., (2003). Global asymptotic behavior of a two-dimensional system of difference equations modeling cooperation. *Journal of Difference Equations and Applications, 9* (1), 149 – 159.

Çinar, C. and Yalçınkaya, İ., (2004). On the positive solutions of difference equation system $x_{n+1} = 1/z_n$, $y_{n+1} = 1 - x_{n-1}y_{n-1}$, $z_{n+1} = 1/x_{n-1}$. *International Mathematical Journal, 5*(5), 517–519.

Çinar, C., (2004). On the solutions of the difference equation $x_{n+1} = x_{n-1}/(-1 + ax_n x_{n-1})$. *Applied Mathematics and Computation, 158,* 793-797.

Çinar, C., (2004). On the difference equation $x_{n+1} = x_{n-1}/(-1 + x_n x_{n-1})$. *Applied Mathematics and Computation, 158,* 813-816.

Camouzis, E. and Papaschinopoulos, G., (2004). Global asymptotic behavior of positive solutions on the system of rational difference equations $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{y_{n-m}}$, $y_{n+1} = 1 + \frac{y_n}{x_{n-m}}$. *Applied Mathematics Letters, 17,* 733-737.

Çinar, C., (2004). On the positive solutions of the difference equation $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{1 + ax_n x_{n-1}}$. *Applied Mathematics and Computation, 158,* 809-812.

Çinar, C., (2004). On the positive solutions of the difference equation system $x_{n+1} = \frac{1}{y_n}$, $y_{n+1} = \frac{y_n}{x_{n-1}y_{n-1}}$. *Applied Mathematics and Computation* 158, 303-305.

Kulenović, M. R. S. and Nurkanović, Z., (2005). Global behavior of a three-dimensional linear fractional system of difference equations $x_{n+1} = \frac{a + x_n}{b + y_n}$, $y_{n+1} = \frac{c + y_n}{d + z_n}$, $z_{n+1} = \frac{e + z_n}{f + x_n}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 310*, 673-689.

Yang, X., Liu, Y. and Bai, S., (2005). On the system of high order rational difference equations $x_n = \frac{a}{y_{n-p}}$, $y_n = \frac{by_{n-p}}{x_{n-q}y_{n-q}}$. *Applied Mathematics and Computation, 171,* 853-856.

Sun, T. and Xi, H., (2005). Global behavior of the nonlinear difference equation $x_{n+1} = f(x_{n-s}, x_{n-t})$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 311*, 760-765.

Yang, X., (2005). On the system of rational difference equations $x_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}}$, $y_n = A + \frac{x_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 307,* 305-311.

Sun, T. and Xi, H., (2006). On the system of rational difference equations $x_{n+1} = f(x_n, y_{n-k})$, $y_{n+1} = f(y_n, x_{n-k})$. *Advances in Difference Equations, 2006,* Article ID 16949, 7 pages.

Sun, T. and Xi, H., (2006). On the system of rational difference equations $x_{n+1} = f(y_{n-q}, x_{n-s})$, $y_{n+1} = g(x_{n-t}, y_{n-p})$. *Advances in Difference Equations, 2006,* Article ID 51520, 1-8.

Irićanin B. and Stević, S., (2006). Some systems of nonlinear difference equations of higher order with periodic solutions. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A Mathematical Analysis, 13,* 499–507.

Özban, A. Y., (2006). On the positive solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = 1 + x_n / y_{n-k}$, $y_{n+1} = 1 + y_n / x_{n-m} y_{n-m-k}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 323,* 126–32.

Özban, A. Y., (2006). On the positive solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = 1 / y_{n-k}$, $y_{n+1} = y_n / x_{n-m} y_{n-m-k}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 323,* 26-32.

Zhang, Y., Yang, X., Megson, M. G. and Evans, J. D., (2006). On the system of rational difference equations $x_n = A + \frac{1}{y_{n-p}}$, $y_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-r} y_{n-s}}$. *Applied Mathematics and Momputation, 176,* 403-408.

Zhang, Y., Yang, X., Evans, J. D. and Zhu, C., (2007). On the nonlinear difference equation system $x_{n+1} = A + \frac{y_{n-m}}{x_n}$, $y_{n+1} = A + \frac{x_{n-m}}{y_n}$. C*omputers and Mathematics with Applications, 53,* 1561-1566.

Özban, A. Y., (2007). On the system of rational difference equations $x_n = \frac{a}{y_{n-3}}$, $y_n = \frac{b y_{n-3}}{x_{n-q} y_{n-q}}$. *Applied Mathematics and Computation, 188,* 833-837.

Yalçınkaya, İ., (2008). On the Global Asymptotic Stability of a Second–Order System of Difference Equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society, 2008,* Article ID 860152,12 pages.

Yalçınkaya, İ., Çinar, C., and Şimşek, D., (2008). On the global asymptotic stability of a system of difference equations $z_{n+1} = \frac{z_n t_{n-1} + a}{z_n + t_{n-1}}$, $t_{n+1} = \frac{t_n z_{n-1} + a}{t_n + z_{n-1}}$. *Applicable Analysis, 87* (6), 677–687.

Sun, F., Yang, X. and Zhang, C., (2009). On the recursive sequence $x_n = A + x_{n-k}^{p} / x_{n-1}^{r}$. *Discrete Dynamics in Nature and Society, 2009*. Article ID 608976, 8 pages.

Şimşek, D., Demir, B. and Çinar, C., (2009). On the solutions of the system of the difference equations $x_{n+1} = \max\{A / x_n, y_n / x_n\}$, $y_{n+1} = \max\{A / y_n, x_n / y_n\}$. *Discrete Dynamics in Nature and Society 2009* (2009), Article ID 325296, 11 pages.

Yalçınkaya, İ. and Çinar, C., (2010). Global asymptotic stabiliy of a system of two nonlinear difference equations $z_{n+1} = (t_n + z_{n-1}) / (t_n z_{n-1} + a)$, $t_{n+1} = (z_n + t_{n-1}) / (z_n t_{n-1} + a)$. *Fasciculi Mathematici, 43*, 171-180.

Gelişken, A., Çinar, C. and Kurbanlı, A. S., (2010). On the asymptotic behavaior and periodic nature of a difference equation with maximum. *Computer & Mathematics with Applications, 59*(2) January 2010

Kurbanlı, A. S., (2010). On the behavaior of solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = x_{n-1} / (y_n x_{n-1} - 1)$, $y_{n+1} = y_{n-1} / (x_n y_{n-1} - 1)$. *World Applied Sciences Journal, 10* (11), (2010), 1344-1350

Kurbanlı, A. S., Çinar, C. and Yalçınkaya, İ., (2011). On the behavaior of solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = x_{n-1} / \left(y_n x_{n-1} + 1\right)$, $y_{n+1} = y_{n-1} / \left(x_n y_{n-1} + 1\right)$. *Mathematical and Computer Modelling, 53*, 1261–1267.

Kurbanlı, A. S., (2011). On the behavior of solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} - 1}$, $y_{n+1} = \dfrac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} - 1}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_{n-1}}{y_n z_{n-1} - 1}$. *Discrete Dynamics in Nature and Society, 2011* Article ID 932362, 12 pages.

Kurbanlı, A. S., (2011). On the behavior of positive solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1} = \dfrac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} - 1}$, $y_{n+1} = \dfrac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} - 1}$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{y_n z_n}$. *Advances in Difference Equations, 2011*, 2011:40.

Kurbanlı, A. S., Çinar, C. and Şimşek, D., (2011). On the periodicity of soluations of the system of rational difference equations $x_{n+1}=(x_{n-1}+y_n)/(y_n x_{n-1}-1)$, $y_{n+1}=(y_{n-1}+x_n)/(x_n y_{n-1}-1)$. *Applied Mathematics, 2,* 410-413.

Keying, L., Zhongjian, Xiaorui, L. and Peng., L., (2011). More on Three-Dimensional Systems of Rational Difference Equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society, 2011,* Article ID 178483, 9 pages.

Kurbanlı, A. S., Çinar, C. and Erdoğan, M. E., (2011). On the behavior of solutions of the system of rational difference equations $x_{n+1}=x_{n-1}/(y_n x_{n-1}-1)$, $y_{n+1}=y_{n-1}(x_n y_{n-1}-1)$, $z_{n+1}=x_n(y_n z_n-1)$. *Applied Mathematics, 2,* 1031-1038.

Stević, S., (2011). On a system of difference equations $x_{n+1}=\dfrac{ax_{n-1}}{by_n x_{n-1}+c}$, $y_{n+1}=\dfrac{\alpha y_{n-1}}{\beta x_n y_{n-1}+\gamma}$. *Applied Mathematics and Computation, 218,* 3372-3378.

Touafek, N. and Elsayed, E. M., (2012). On the solutions of systems of rational difference equations $x_{n+1}=\dfrac{x_{n-3}}{\pm 1\pm x_{n-3}y_{n-1}}$, $y_{n+1}=\dfrac{y_{n-3}}{\pm 1\pm y_{n-3}x_{n-1}}$. *Mathematical and Computer Modelling, 55,* 1987-1997.

Elsayed, E. M., (2012). Solutions of rational difference systems of order two $x_{n+1}=\dfrac{x_{n-1}}{\pm 1\pm x_{n-1}y_n}$, $y_{n+1}=\dfrac{y_{n-1}}{\pm 1\pm y_{n-1}x_n}$. *Mathematical and Computer Modelling, 55,* 378-384.

Gua, Y. and Ding, R., (2012). Observable state space realizations for multivariable systems. *Computer & Mathematics with Applications, 63*(9), 1389-1399.

T.C.

NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Özgeçmiş

Adı Soyadı:	Mehmet TÜTÜNCÜ		İmza:	
Doğum Yeri:	Seydişehir			
Doğum Tarihi:	24.04.1980			
Medeni Durumu:	Evli			
Öğrenim Durumu				
Derece	Okulun Adı	Program	Yer	Yıl
İlköğretim	**Rebii Karatekin İ.Ö.O**		**Selçuklu / KONYA**	**1986 - 1991**
Ortaöğretim	**Dumlupınar Anadolu Lisesi**		**Selçuklu / KONYA**	**1991 - 1993**
Lise	**Atatürk Sağlık Meslek Lisesi**	**Sağlık Memurluğu**	**Selçuklu / KONYA**	**1993 - 1997**
Lisans	**Afyon Kocatepe Üniversitesi**	**Fen Edebiyat Matematik**	**AFYON**	**2000 - 2004**
Tezsiz Yüksek Lisans	**Afyon Kocatepe Üniversitesi**	**Matematik Öğretmenliği**	**AFYON**	**2004 - 2005**
Becerileri:	**Sayısal İşlem, Matematik, Uygulamalı Matematik.**			

İlgi Alanları:	**Uygulamalı Matematik, Analiz, Geometri.**
İş Deneyimi:	**Bil Dershaneleri Matematik Öğretmenliği (2004-2005)** **Sonuç Dershaneleri Matematik Öğretmenliği (2005-2007)** **Seviye Dershaneleri Matematik Öğretmenliği (2007-2009)** **Ataselçuk Dershaneleri Matematik Öğretmenliği (2009-2010)** **Özel Diltaş Anadolu Lisesi Matematik Öğretmenliği (2010-…)**
Aldığı Ödüller:	**Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Birinciliği**
Hakkımda bilgi almak için önerebileceğim şahıslar:	**Prof. Dr. Cengiz ÇİNAR (Gazi Üni. Öğretim Üyesi)** **Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA (N.E. Üni. Öğretim Üyesi)** **Yrd. Doç. Dr. Abdullah Selçuk Kurbanlı (N.E. Üni. Öğretim Üyesi)**
Tel:	**0-507-690-22-20**
Adres	**Özlem Mah. Argun Sk. Çevreyolu Cad. Elmas Apt. Bina no:66 Kat: 9 No:37 Selçuklu, KONYA**