GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

NORMAL KOMPLEKS KONTAKT METRİK MANİFOLDLAR VE ALTMANİFOLDLARI

İnan ÜNAL

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2017

İnan ÜNAL tarafından hazırlanan "NORMAL KOMPLEKS KONTAKT METRİK MANİFOLDLAR VE ALTMANİFOLDLARI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Aysel TURGUT VANLI

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Başkan: Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Prof. Dr. Nejat EKMEKÇİ

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Prof. Dr. Hasan Hüseyin UĞURLU

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Doç. Dr. Belgin KORKMAZ

Matematik Anabilim Dalı, Hitit Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Tez Savunma Tarihi: 08/12/2017

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

....

Prof. Dr. Hadi GÖKÇEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İnan ÜNAL

08/12/2017

NORMAL KOMPLEKS KONTAKT METRİK MANİFOLDLAR VE ALTMANİFOLDLARI

(Doktora Tezi)

İnan ÜNAL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2017

ÖZET

Bu çalışmada normal kompleks kontakt metrik manifoldların Riemann geometrisi ve altmanifoldları üzerinde çalışıldı. Normal kompleks kontakt metrik manifoldların eğrilik özellikleri, normal kompleks kontakt metrik manifoldlar üzerinde bazı özel eğrilik tensörleri ve eğrilik şartları incelendi. Kompleks η-Einstein normal kompleks kontakt metrik manifoldlar ve normal kompleks kontakt metrik manifoldların yarı-invaryant altmanifoldları üzerinde çalışılarak orijinal sonuçlar literatüre kazandırıldı.

Bilim Kodu	: 20402
Anahtar Kelimeler	: normal kompleks kontakt metrik manifold, kompleks $\eta-$Einstein, yarı-invaryant altmanifold, eğrilik tensörü.
Sayfa Adedi	: 124
Danışman	: Prof. Dr. Aysel TURGUT VANLI

NORMAL COMPLEX CONTACT METRIC MANIFOLDS AND THEIR SUBMANIFOLDS
(Ph. D. Thesis)

İnan ÜNAL

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
December 2017

ABSTRACT

In this thesis, we study on the Riemannian geometry of normal complex contact metric manifolds and their submanifolds. Some curvature properties of normal complex contact metric manifolds and some special curvature tensors on normal complex contact metric manifolds are studied. By working on complex $\eta-$ Einstein normal complex contact metric manifolds and semi-invariant submanifolds of normal complex contact metric manifolds, original results are added to literature.

Science Code	: 20402
Key Words	: normal complex contact metric manifold, complex $\eta-$Einstein, semi-invariant submanifold, curvature tensors.
Page Number	: 124
Supervisor	: Prof. Aysel TURGUT VANLI

TEŞEKKÜR

Diferensiyel geometri alanındaki bilgilerimin derinleşmesi ve anlamlanmasında büyük katkıları olan, bu tez çalışmasının mimarı, her soruma ve sorunuma bıkmadan usanmadan cevap arayan saygıdeğer hocam, çok kıymetli danışmanım sayın Prof. Dr. Aysel TURGUT VANLI'ya; uzun Ankara yolculuklarını dert etmeden sabırla beni bekleyen ve her zaman destekleyen en değerli varlıklarım eşim İlkay ÜNAL ve oğlum İlkin Deniz ÜNAL'a; beni Ankara'da hiç yalnız bırakmayan ve evi evim olan değerli dostum Deniz YILDIZ'a; matematikçi olmama vesile olarak bu seviyelere gelmemde çok emeği olan abim Sinan ÜNAL'a ve sevgili anne ve babama sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{C^\infty(M,\mathbb{R})}$	M manifoldundan $\mathbb{R}$'ye C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir fonksiyonların uzayı
$\boldsymbol{J}$	Hemen hemen kompleks yapı
$\boldsymbol{\eta}$	Reel Kontakt form
$\boldsymbol{\omega}$	Kompleks kontakt form
$\boldsymbol{TM}$	M nin tanjant uzayı
$\boldsymbol{\nabla}$	Levi-Cevita Koneksiyonu
$\boldsymbol{R}$	Riemann eğriliği
$\boldsymbol{K}$	Kesitsel eğrilik
$\boldsymbol{\rho}$	Ricci eğriliği
$\boldsymbol{\tau}$	Skalar eğrilik
$\boldsymbol{g}$	Riemann metriği
$\boldsymbol{\mathcal{H}}$	Yatay altdemet
$\boldsymbol{\mathcal{V}}$	Dikey altdemet
$\boldsymbol{\Gamma(TM)}$	M manifoldunun C^∞ vektör alanları uzayı
$\boldsymbol{TM^\perp}$	M altmanifoldunun normal altdemeti

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometrinin önemli çalışma alanlarından biri de manifoldlar üzerinde yapılardır. Bu yapıların başında tek boyutlu manifoldlar üzerinde tanımlanan kontakt yapılar gelmektedir. Üzerinde bir kontakt yapı taşıyan tek boyutlu manifodlar kontakt manifold olarak adlandırılmaktadır. Kontakt manifoldların genel rölativite teorisinde ve genel olarak teorik fizikte uygulamaları bulunmaktadır. Kholodenko [37] bu konuyu kitabında "Teorik fiziğin tüm alanları kontakt geometri ve kontakt topolojinin dili ile yeniden yazılabilir." şeklinde belirtmiştir. Mekanik, termodinamik ve elektrodinamikten optiğe, sıvı kristallerin fiziğinden kuantum mekaniği ve kuantum bilgisayarlarına kadar bir çok alanda kontakt geometrinin uygulamaları bulunmaktadır [37].

Kontakt geometrinin kökeni 1872'de Shopus Lie'nin diferensiyel denklem sistemlerini çalışırken bir geometrik araç olarak kontakt dönüşümleri kullanmasına dayanmaktadır [26]. 1960'lı yıllarda kontakt manifoldların Riemann geometrisi yoğun olarak çalışılmıştır. Sasaki [50] kontakt manifoldlar üzerinde kontakt yapı ile ilişkili metriği tanımlamıştır.

Kontakt manifoldlar reel ve kompleks kontakt manifoldlar şeklinde ikiye ayrılabilir. Kompleks kontakt manifoldların literatüre girmesi reel kontakt manifoldlar ile aynı tarihlerde olmasına karşın reel kontakt manifoldlar kadar ilgi görmemiştir. Kompleks kontakt manifoldlar üzerine ilk çalışma 1959 yılında Kobayashi [38] tarafından yapılmıştır. Kobayashi bu çalışmasında bir kompleks kontakt manifoldun tanımını vermiş ve kompleks kontakt formun global tanımlı olması için manifoldun birinci Chern sınıfının sıfır olmasının gerekli ve yeterli olduğunu göstermiştir. Boothby [14, 15] homojen kompleks kontakt manifoldlar üzerine çalışmış ve birinci Chern sınıfı sıfırdan farklı olan kompleks kontakt manifoldları karakterize etmiştir. 1962'de Lin [45], Sasaki [51] nin yaptığı çalışmanın benzerini kompleks kontakt manifoldlar üzerinde yapmış ve kompleks kontakt yapı ile ilişkili metriği vererek kompleks hemen hemen kontakt yapıyı incelemiştir. J. Wolf 1965'de kompleks homojen kontakt manifoldları ve kuaterniyon simetrik uzayları çalışmıştır. Blair, Ishihara ve Ludden [7] izdüşürülebilir hemen hemen kompleks kontakt manifoldları incelemişlerdir. Lin tarafından yapılmış olan çalışmadan bağımsız olarak ve farklı bir bakış açısı ile bir kompleks kontakt manifoldun hemen hemen kontakt yapı taşıdığı 1978'de Shubiya [57] tarafından gösterilmiştir.

Kompleks kontakt manifoldların normalliği üzerine ilk çalışmalar Ishihara-Konishi tarafından yapılmıştır. Yazarlar 3-yapılardan yararlanarak kompleks kontakt manifoldların normalliğini tanımlamışlardır [31]. Houh [28] normal kompleks kontakt metrik manifoldların eğrilik özelliklerini vermiştir. Ishihara ve Konishi [31–33] 1980'li yılların başlarında yayınladıkları çalışmalarda kompleks kontakt manifoldlar üzerinde hemen hemen kontakt yapının varlığını tekrar göstermiş, kontakt yapı ile ilişkili Hermityan metriği elde etmiş ve kompleks hemen hemen kontakt metrik manifold tanımını vermiştir. Ayrıca yazarlar çalışmalarında manifoldun normal olması için gereken koşulları ortaya koyarak eğrilik özelliklerini incelemişlerdir. Bu normallik literatürde IK-normallik olarak anılmaktadır.

Kompleks kontakt manifoldların birinci Chern sınıfı Kobayashi tarafından incelenmiş ve kompleks kontakt formun global tanımlanabilmesi için birinci Chern sınıfının sıfır olması gerektiği gösterilmiştir. Diğer yandan Ishihara ve Konishi bir IK-normal kompleks kontakt manifoldun Kähler-Einstein olduğunu ve birinci Chern sınıfının pozitif olduğu göstermişlerdir. 1992'de Jayne [36] doktora tez çalışmasında kompleks kontakt metrik manifoldlar üzerinde yapraklama (foliation) çalışmıştır. Yazar bu çalışmasında kompleks kontakt formu global almış ve kompleks K-kontakt manifold tanımını vermiştir. Foreman [21] 1996'da doktora tez çalışmasında kompleks kontakt manifoldlar üzerinde bazı sonuçlar elde etmiş ve twistor uzaylarını çalışmıştır. Foreman kompleks kontakt manifoldların geometrisi üzerinde birçok çalışma yapmıştır [19, 20, 22–25]. 1998'de Korkmaz [43] kompleks kontakt metrik manifoldların $\mathcal{V}$ dikey düzlemi için $R(X,Y)\mathcal{V} = 0$ koşulunu inceleyerek $\mathbb{C}^{n+1}\times \mathbb{CP}^n(16)$ üzerindeki kompleks kontakt metrik yapıyı vermiştir.

IK-normal manifoldun Kähler olması kompleks kontakt yapı üzerinde bazı kısıtlamalara yol açmıştır. Bunlardan biri, reeli bir normal kontakt metrik manifold olan kompleks Heisenberg grubun Kähler olmamasından dolayı IK-normal olmamasıdır. Korkmaz [44] 2000'de bir kompleks hemen hemen kontakt manifoldun normalliğini incelemiş ve normallik için Ishihara ve Konishi'den daha zayıf bir koşul vermiştir. Bu koşula göre kompleks Hesinberg grup bir normal kompleks kontakt metrik manifold örneğidir. Ayrıca yazar bu çalışmasında normal kompleks kontakt metrik manifoldların eğriliklerini incelemiş ve $\mathcal{GH}$-kesitsel eğriliği tanımlamıştır. 2002'de Kodama [39] kompleks 3-boyutlu kompleks kontakt manifoldları Legendre vektör alanları ile birlikte incelemiştir. Yazar çalışmasında global kompleks kontakt form taşıyan örnekler ele almış ve Legendre vektör alanları ile birlikte sonuçlar elde etmiştir. Korkmaz [43] 2003'deki çalışmasında kompleks kontakt metrik manifoldların nullity koşullarını inceleyerek kompleks $(\kappa,\mu)-$ uzayları tanımlamış ve bu uzaylar üzerine bazı sonuçlar elde etmiştir.

Bir normal kompleks kontakt metrik manifold üzerinde tanımlanan kompleks kontakt form global tanımlı ise bu manifolda kompleks Sasakian manifold adı verilmektedir. Kompleks Sasakian manifold üzerine ilk çalışmalar Foreman tarafından yapılmıştır [19].

Fetcu [17, 18] kompleks Sasakian manifoldlar üzerinde harmonik dönüşümleri incelemiş ve uyumlu (adapted) koneksiyonlar üzerine çalışmıştır. Blair ve Korkmaz [9] çalışmalarında kompleks kontakt metrik manifoldlar üzerindeki holomorfik reel özel doğrultular üzerinde çalışmışlardır. 2006'da Turgut Vanlı ve Blair [8, 63] normal kompleks kontakt metrik manifoldlar için dikey dağılımların enerjileri üzerine çalışmışlardır. 2010'da Blair ve Molina [11] yaptıkları çalışmada bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun konformal düz (flat) olamayacağını ve ayrıca Bochner düz olan bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun holomorfik kesitsel eğriliğinin 4 olduğunu ispatlamışlardır. 2012 de Blair ve Mihai [12] $\kappa < 1$ olan (κ, μ)-uzayının bir kompleks kontakt metrik manifolda lokal homojen olduğunu göstermişlerdir. Aynı yazarlar normal kompleks kontakt metrik manifodların lokal simetri koşulları üzerine de çalışmışlardır [12]. IK-normal kompleks kontakt metrik manifoldlar üzerine çalışma Imada [30] tarafından yapılmıştır. Bu çalışmasında Imada indirgeme yolu ile kompleks kontakt metrik manifoldların inşasını incelemiş ve yeni kompleks kontakt metrik manifold örnekleri vemiştir. Ayrıca Imada [29] 2015'teki çalışmasında hiperkähler manifoldların kompleks hiperyüzeyleri üzerindeki kompleks kontakt yapıyı incelemiştir. 2016 yılında Yıldırım [74] kompleks-(κ, μ) uzaylar üzerinde Bochner, konformal ve konharmonik eğrilik tensörlerinin sıfır olma şartlarını ele almıştır.

Bu tez çalışmasının amacı kompleks kontakt manifoldların geometrisine kapsamlı bir giriş yaparak bu alanda yeni sonuçlar elde etmektir. Bu tez çalışması 7 bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde tez boyunca kullanılacak olan temel kavramlara ve üçüncü bölümde kompleks kontakt manifoldların geometrisine yer verilmiştir. Tezin orijinal kısımları olan 4., 5., 6. ve 7. bölümlerde sırasıyla normal kompleks kontakt metrik manifoldların eğrilik özellikleri, özel eğrilik tensörleri, kompleks $\eta-$ Einstein yapısı ve normal kompleks kontakt metrik manifoldların yarı-invaryant altmanifoldları incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışması boyunca kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilecektir.

2.1. Riemann Manifoldları

2.1. Tanım

Diferensiyellenebilir bir manifold M olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\Gamma(TM)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların uzayı $C^\infty(M,R)$ olmak üzere

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M,R)$$

dönüşümü bilineer, simetrik ve pozitif tanımlı ise g ye M üzerinde bir Riemann metriği (veya metrik tensor) ve (M,g) ikilisine de bir Riemann manifoldu adı verilir [68].

2.2. Tanım

Diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ dönüşümü verilsin. Eğer her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve her $f, g \in C^\infty(M,R)$ için
1. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
2. $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
4. $(\nabla_X f)Y = X[f]Y + f\nabla_X Y$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde bir lineer koneksiyon denir [68] .

2.3. Tanım

V bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $X, Y, Z \in V$ için

$$\begin{aligned} [,] : V \times V &\to V \\ (X,Y) &\to [X,Y] \end{aligned}$$

dönüşümü
1. 2-lineer
2. Anti-simetrik ($\forall X, Y \in V$ için $[X,Y] = -[Y,X]$)
3. $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

şartlarını sağlıyorsa $[,]$ dönüşümüne V üstünde bir Lie operatörü (Lie parantez operatörü) denir [68].

2.4. Teorem

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun.

$$\begin{aligned} [,] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM) \\ (X,Y) &\to [X,Y] \end{aligned}$$

olmak üzere $\forall f \in C^{\infty}(M,R)$ için

$$[X,Y](f) = XY(f) - YX(f)$$

şeklinde tanımlanan $[,]$ operatörü $\Gamma(TM)$ üzerinde bir Lie operatörüdür [68].

2.5. Tanım

M bir manifold ve $(-a,a)$ gerçel sayı doğrusu üzerinde bir aralık olmak üzere

$$\begin{aligned} \varphi : (-a,a) \times M &\to M \\ (t,p) &\to \varphi_t(p) \end{aligned}$$

fonksiyonu verilsin. Eğer φ
1. Her $t \in (-a,a)$ sabit değeri için, $\varphi_t(p) = \varphi(t,p)$ bir diffeomorfizmdir,
2. Her $p \in M$ için $\varphi_0(p) = p$ dir,
3. Herhangi $s,t \in (-a,a)$ değerleri için $s+t \in (-a,a)$ ise $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ eşitliği sağlanır,
koşullarını sağlayan türevlenebilir bir fonksiyon ise φ ye M nin $1-$parametreli grubu adı verilir. Sadece ilk koşulu sağlayan türevlenebilir fonksiyonlar ailesine ise manifold üzerinde bir izotopi denir [49].

2.6. Tanım

M üzerinde bir vektör alanı X ve X ile gerilmiş bir lokal dönüşümlü 1-parametreli grup φ_t olsun. Bir K tensör alanının X yönünde Lie türevi $\mathcal{L}_X K$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{L}_X K = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left[K_X - (\varphi_t K)_X \right]$$

olarak tanımlanır [68].

2.7. Teorem

(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. Her $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ ve her $f,g \in C^{\infty}(M,R)$ için
1. $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$
2. $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$
3. $\mathcal{L}_X g(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y)$
dir [68].

2.8. Tanım

(M,g) bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir vektör alanı X olsun. $\mathcal{L}_X g = 0$ ise X e Killing vektör alanı denir [68].

2.9. Tanım

M bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde verilen her bir diferensiyel $p-$forma bir diferensiyel $(p+1)-$form karşılık getiren diferensiyel operatöre dış türev operatörü denir. $X_0, X_1, ..., X_p \in \Gamma(TM)$ olmak üzere bir ω $p-$formunun dış türevi

$$\begin{aligned} d\omega(X_0,X_1,...,X_p) &= \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i X_i(\omega(X_0,X_1,...,\hat{X}_i...,X_p)) \\ &+ \frac{1}{p+1}\sum_{0\leq i\leq j\leq p}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,X_1,...,\hat{X}_i,...,\hat{X}_j,...,X_p) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada "ˆ" ile gösterilen vektör alanları kaldırılan vektör alanını temsil etmektedir [68].

Özel olarak bir $1-$form ω ve $2-$form Ω için d operatörü

$$d\omega(X,Y) = \frac{1}{2}\{X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])\}$$

ve

$$\begin{aligned} d\Omega(X,Y,Z) = \quad & \frac{1}{3}\{X(\Omega(Y,Z)) + Y(\Omega(Z,X)) + Z(\Omega(X,Y)) \\ & -\Omega([X,Y],Z) + \Omega([Y,Z],X) - \Omega([Z,X],Y)\} \end{aligned}$$

olarak elde edilir [68].

2.10. Tanım

M bir manifold M nin tanjant uzayı $\Gamma(TM)$ ve kotanjant uzayı $\Gamma^*(TM)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
T :& \Gamma^*(TM)^r \times \Gamma(TM)^s \to C^\infty(M, \mathbb{R}) \\
& (\theta^1, \theta^2, ..., \theta^r, X_1, X_2, ..., X_s) \to T(\theta^1, \theta^2, ..., \theta^r, X_1, X_2, ..., X_s)
\end{aligned}
$$

dönüşümü $(r+s)-C^\infty(M, \mathbb{R})$ lineer ise T ye M üzerinde bir $(r, s)-$tipinde tensör alanı denir. M üzerinde $(r, s)-$tipindeki tensörlerin uzayı $\mathcal{T}_s^r(M)$ ile gösterilir.

2.11. Tanım

M manifoldu üzerindeki $r-$formların uzayı $\wedge^r(TM)$ olmak üzere $T \in \mathcal{T}_0^r(M)$ tensörü için

$$
\begin{aligned}
Alt :& \mathcal{T}_0^r(M) \to \wedge^r(M) \\
& T \to Alt(T)(v_1, v_2, ..., v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S^k} sgn\sigma T(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, ..., v_{\sigma(k)})
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlı $Alt(T)$ ifadesine T tensörünün alterneliyen operatörü denir. Burada S^k ile 1 den k ya tüm permütasyonların kümesi gösterilmektedir [59].

2.12. Tanım

$\omega \in \wedge^k(M)$ ve $\eta \in \wedge^l(M)$ olmak üzere ω , $k-$formu ile η, $l-$formunun simetrik çarpımı

$$
\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} Alt(\omega \otimes \eta)
$$

biçiminde tanımlanır [59].

Eğer ω ve η 1-form ise her $X, Y \in M$ için

$$
(\omega \wedge \eta)(X, Y) = \omega(X)\eta(Y) - \eta(X)\omega(Y)
$$

dir.

2.13. Lemma

$\omega \in \wedge^k(M), \eta \in \wedge^l(M)$ ve $\theta \in \wedge^m(M)$ olmak üzere

1. $(\omega + \eta) \wedge \theta = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \theta,$
2. $\omega \wedge (\eta + \theta) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge \theta,$

3. $a\omega \wedge \eta = \omega \wedge a\eta = a(\omega \wedge \eta)$,
4. $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega$

dir [59].

2.14. Tanım

Diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerindeki bir lineer koneksiyon ∇ olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$
$$(X, Y) \to T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

ile tanımlı T tensör alanına ∇ lineer koneksiyonunun torsiyon tensörü denir [68].

2.15. Tanım

Diferensiyellenebilir bir manifold M ve ∇ da M üzerinde bir lineer koneksiyon olsun. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için
1. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Sıfır torsiyon özelliği)
2. $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Metrik ile bağdaşabilme özelliği)

şartları sağlanıyorsa, ∇ ya M üzerinde Riemann koneksiyonu veya Levi-Civita koneksiyonu denir [68].

2.16. Tanım

M bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir Riemann koneksiyonu ∇ olsun. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$
$$(X, Y, Z) \to R(X, Y, Z)$$

olmak üzere

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

şeklinde tanımlanan $(1, 3)-$tipindeki R tensör alanına M üzerinde Riemann eğrilik tensör alanı denir [68].
Ayrıca Riemann eğrilik tensör alanı Riemann-Christofell eğrilik tensör alanı olarak da

anılır ve

$$R(X,Y,Z,W)=g(R(X,Y)Z,W)$$

biçiminde de ifade edilir.

2.17. Teorem

M bir Riemann manifoldu ve M nin Riemann eğrilik tensör alanı R olsun. Bu durumda her $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için
1. $R(X,Y,Z,W)=-R(Y,X,Z,W)$
2. $R(X,Y,Z,W)=-R(X,Y,W,Z)$
3. $R(X,Y,Z,W)=R(Z,W,X,Y)$
4. $R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$ (I.Bianchi Özelliği)
5. $(\nabla_X R)(Y,Z)+(\nabla_Y R)(Z,X)+(\nabla_Z R)(X,Y)=0$ (II.Bianchi Özelliği)
dir [68].

2.18. Tanım

M bir Riemann manifoldu olsun. Bir $p\in M$ noktasındaki TpM tanjant uzayının Xp,Yp tanjant vektorleri tarafından gerilen 2-boyutlu bir altuzayı Π olmak uzere

$$K(\Pi)=\frac{g\left(R\left(Xp,Yp\right)Yp,Xp\right)}{g\left(Xp,Xp\right)g\left(Yp,Yp\right)-g\left(Xp,Yp\right)^2}$$

şeklinde tanımlanan $K(\Pi)$ reel sayısına Π nin kesitsel eğriliği denir [68].

2.19. Tanım

$n-$boyutlu bir Riemann manifoldu M nin eğrilik tensör alanı R ve $\Gamma(TM)$ nin bir ortonormal bazı $\{E_1,E_2,...,E_n\}$ olsun.

$$\begin{aligned}Q:\Gamma(TM)&\longrightarrow\Gamma(TM)\\ X&\longrightarrow QX=-\sum_{i=1}^{n}R\left(E_i,X\right)E_i\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan Q operatörüne M nin Ricci operatörü,

$\rho : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^{\infty}(M)$

$$(X,Y) \to \rho(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g\left(R\left(E_i, X\right)Y, E_i\right)$$

şeklinde tanımlı (0, 2)-tipindeki ρ tensor alanına, M üzerinde Ricci eğrilik tensörü adı verilir [68].

2.20. Tanım

n-boyutlu bir Riemann manifoldu M ve $\Gamma(TM)$ nin bir ortonormal bazı $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ olmak üzere M nin skalar eğriliği

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \rho\left(E_i, E_i\right)$$

şeklinde tanımlanır [68].

2.2. Einstein Manifoldları

Genel rölativitede vakum Einstein alan denklemleri olarak bilinen denklemlerin bir çözümü olan metrik, Albert Einstein (1859-1955) çalışmaları sonrası onun adı ile anılmıştır. M bir Riemann manifoldu R_{ij}, M nin Ricci eğriliği ve Λ kozmoloji sabiti olmak üzere vakum Eistein alan denklemi

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \tau + \Lambda g_{ij} = 0 \tag{2.1}$$

dir [6]. Ayrıca $\tau = g^{ij} R_{ij}$ olup Eş. 2.1 de yerine yazılırsa

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} g^{ij} R_{ij} + \Lambda g_{ij} = 0$$

ve $g_{ij} g^{ij} = boyM = n$ olduğundan

$$R_{ij} - \frac{n}{2} R_{ij} + \Lambda g_{ij} = 0 \Rightarrow R_{ij}(1 - \frac{n}{2}) = -\Lambda g_{ij} \Rightarrow R_{ij} = -\frac{2}{2-n} \Lambda g_{ij}$$

elde edilir. Diğer yandan $\dfrac{2\Lambda}{n-2} = \lambda$ sabit olduğundan $R_{ij} = \lambda g_{ij}$ bulunur.

2.21. Tanım

(M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve bir λ skaleri için

$\rho(X,Y) = \lambda g(X,Y)$

ise (M,g) ye bir Einstein manifoldu denir [6].

Eğer manifoldun boyutu 1 ise $\tau = 0$ dır. 2 ve 3−boyutlu bir Remann manifoldunun Einstein olması için gerek ve yeter koşul kesitsel veya skalar eğriliğinin sabit olmasıdır. Dolayısıyla bu tanım yalnızca $boyM \geq 4$ için geçerlidir [6].

2.3. Eğrilik Tensörleri

2.22. Tanım

V bir vektör uzayı ve g pozitif tanımlı bir metrik olsun. V üzerinde

$R : V \times V \longrightarrow Hom(V,V)$
$(X,Y) \longrightarrow R(X,Y)$

şeklinde tanımlı (1,3) tipindeki dönüşüm, her $X,Y,Z,W \in V$ için
1. $R(X,Y) = -R(Y,X)$
2. $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$
3. $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ (Bianchi özdeşliği)
özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme V üzerinde bir eğrilik tensörü denir [62].

V vektör uzayı üzerinde tanımlı tüm eğrilik tensörlerinin uzayı $\mathcal{R}(V)$ ile gösterilir. Bir Riemann manifoldu üzerinde tanımlanan eğrilik tensörü yukarıdaki tanıma uygun bir örnektir. Riemann eğrilik tensörü dışında Riemann geometrisinin önemli eğrilik tensörleri projektif, Weyl konformal, konsörkılır, quasi-konformal ve konharmonik eğrilik tensörleridir. Bu bölümde bu tensörlerin tanım ve özellikleri verilecektir.

2.3.1. Projektif eğrilik tensörü

2.23. Tanım

(M,g) ve (M',g') iki Riemann manifoldu ve $f : M \to M'$ bir diffeomorfizm olsun. M de bir geodezik γ ve M' de bir geodezik γ' olmak üzere eğer $f(\gamma)$, M' de ve $f^{-1}(\gamma)$, M de bir geodezik ise f ye bir geodezik koruyan dönüşüm ya da projektif dönüşüm denir. M ve M' manifoldlarına ise ortak geodezikli manifoldlar denir [1].

Bir projektif dönüşüm, bir M Riemann manifoldu üzerindeki geodezikleri yine geodeziklere dönüştüren bir dönüşümdür. Projektif dönüşümler matematiksel fizikteki denklemlerin simetrilerinin çalışılmasında kullanılır [1]. Projektif geometri projektif dönüşümler altında invaryant kalan nicelikleri ve ilişkileri inceler [60]. Projektif dönüşümler altında invaryant kalan önemli bir tensör projektif eğrilik tensörüdür (veya Weyl projektif eğrilik tensörü) ve bu tensör manifoldların Riemann geometrisinde önemli bir rol oynar.

$n \geq 2$ olmak üzere $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu M olsun. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için M üzerinde projektif eğrilik tensörü

$$\mathcal{P}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{n-1}\left[\rho\left(Y,Z\right)X - \rho\left(X,Z\right)Y\right]$$

biçiminde tanımlanır [68].

2.24. Tanım

$n-$boyutlu bir lineer koneksiyon geodezik doğruları $\mathbb{R}^n$ in düz doğrularına (straight lines) dönüştürülebiliyorsa bu koneksiyona projektif düzdür denir [1].

2.25. Teorem

$n > 2$ olmak üzere $n-$boyutlu bir Riemann manifoldunun projektif düz olması için gerek ve yeter şart projektif eğrilik tensörünün sıfır olmasıdır.

2.26. Teorem

Projektif düz bir Riemann manifoldu sabit eğriliklidir [1].

O halde projektif eğrilik tensörü bir manifoldun sabit eğrilikli manifold ile farkını ifade eder.

2.3.2. Weyl konformal eğrilik tensörü

Weyl eğrilik tensörü Hermann Weyl (1885-1955) tarafından tanımlanmış olup bir uzay-zaman (spacetime) ve daha genel olarak bir Riemann manifoldunun eğriliğini ölçer. Riemann eğrilik tensörü nesnenin hacim değişikleri hakkında bilgi verirken Weyl tensörü yalnızca cisme uygulanan gelgit kuvvetinin (tidal force) cismin şeklindeki bozunmalar hakkında bilgi verir [6].

Riemann eğrilik tensörünün izi olan Ricci eğriliği, gelgit kuvvetinin varlığında hacim değişimleri hakkında kesin bilgi verir, Weyl tensörü Riemann tensörünün izi olmayan (traceless) bileşenidir.

$n \geq 4$ olmak üzere $n-$boyutlu bir Riemann manifoldunun Weyl eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \\ &+ \frac{1}{n-2}[g(Z,X)QY - g(Y,Z)QX + \rho(X,Z)Y - \rho(Y,Z)X]\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır [68].

2.27. Tanım

M bir manifold ve M üzerinde iki Riemann metriği g, g' olsun. Buna göre

a) M üzerinde $g = e^{2f}g'$ olacak biçimde C^∞ sınıfından bir f fonksiyonu varsa g ve g' metrikleri konformal
b) $\alpha^* g'$ ve g konformal olacak biçimde M'nin bir α diffeomorfizmi varsa g ve g' metrikleri konformal denktir

denir. Burada α^*, α diffeomorfizminin pull-back dönüşümünü göstermektedir [6].

Konformal denk olan iki metrik için vektörler arasındaki açı aynıdır. Gerçekten X ve Y iki vektör alanı olmak üzere

$$cos(X,Y) = \frac{g(X,Y)}{\sqrt{g(X,X)}\sqrt{g(Y,Y)}} = \frac{e^{2f}g'(X,Y)}{\sqrt{e^{2f}g'(X,X)}\sqrt{e^{2f}g'(Y,Y)}} = cos(e^{2f}X, e^{2f}Y)$$

dir.

Weyl eğrilik tensörü konformal dönüşümler altında invaryant kalmaktadır. Bu nedenle bu tensöre Weyl konformal eğrilik tensörü de denilmektedir.

2.28. Tanım

(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. Bir $p \in M$ noktasının bir komşuluğu $\mathcal{U}$ olmak üzere $(\mathcal{U}, e^{2f}g)$ düz olacak biçimde $\mathcal{U}$ üzerinde tanımlı C^∞ sınıfından bir f fonksiyonu varsa (M,g) ye konformal düz denir [6].

2.29. Teorem

$n \geq 4$ olmak üzere $n-$boyutlu bir Riemann manifoldunun konformal düz olması için gerek yeter koşul Weyl konformal eğrilik tensörünün sıfır olmasıdır [6].

2.30. Teorem

2−boyutlu her Riemann manifoldu konformal düzdür [6].

2.3.3. Konsörkılır eğrilik tensörü

$n-$boyutlu bir Riemann manifoldu üzerinde birinci eğriliği sabit ikinci eğriliği sıfır olan eğriye bir jeodezik çember adı verilir. Jeodezik çemberleri yine jeodezik çembere dönüştüren konformal dönüşümlere konsörkılır dönüşümler, bu dönüşümler üzerine çalışan geometriye konsörkılır geometri adı verilir. Konsörkılır geometri hakkındaki ilk çalışma Kentaro Yano [69] tarafından 1940'da yapılmıştır. Yano bu çalışmasında konsörkılır dönüşümler altında invaryant kalan konsörkılır eğrilik tensörünü tanımlamıştır. $n \geq 4$ olmak üzere $n-$boyutlu bir Riemann manifoldunun konsörkılır eğrilik tensörü

$$\mathcal{Z}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{\tau}{n(n-1)}\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right]$$

biçiminde tanımlanır.

2.31. Teorem

Bir Riemann manifoldunun uygun konsörkılır dönüşümler altında Öklid uzayına indirgenebilmesi için gerek ve yeter şart bu dönüşümler altında invaryant kalan konsörkılır eğrilik tensörünün sıfır olmasıdır [69].

2.32. Teorem

Sabit eğrilikli bir uzay konsörkılır dönüşümler altında sabit eğrilikli bir uzaya dönüşür [69].

2.33. Teorem

Bir Einstein manifoldu konsörkılır dönüşümler altında yine Einstein manifoldtur [69].

2.34. Tanım

Konsörkılır eğrilik tensörü sıfır ise manifolda konsörkılır düzdür denir.

2.3.4. Quasi-konformal eğrilik tensörü

Quasi-konformal eğrilik tensörü konformal ve konsörkılır eğrilik tensörlerinin lineer birleşimi olarak Yano ve Sawaski [67] tarafından tarif edilmiştir.

$n \geq 4$ olmak üzere $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu M olsun. M nin Weyl konformal eğrilik tensörü $\mathcal{W}$, konsörkılır eğrilik tensörü $\mathcal{Z}$ ve $pq \neq 0$ olacak biçimde p, q keyfi sabitleri için M üzerinde quasi-konformal eğrilik tensörü

$$\widetilde{\mathcal{C}}\left(X,Y\right)Z = -\left(n-2\right)q\mathcal{W}\left(X,Y\right)Z + \left\{p+\left(n-2\right)q\right\}\mathcal{Z}\left(X,Y\right)Z$$

biçiminde tanımlanır. Buradan M üzerinde quasi-konformal eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{C}}(X,Y)Z = {} & pR(X,Y)Z + q[\rho(Y,Z)X - \rho(X,Z)Y + g(Y,Z)QX \\ & - g(X,Z)QY] - \frac{\tau}{n}[\frac{p}{n-1} + 2q][g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$p = 1$ ve $q = \frac{1}{n-2}$ alınırsa $\tilde{\mathcal{C}}(X,Y)Z = \mathcal{W}(X,Y)Z$ olur ve Weyl conformal eğrilik tensörü $\mathcal{W}$ nun özel bir durumu olduğu görülür. Bu nedenle $\tilde{\mathcal{C}}$ ye "quasi-conformal" ismi verilmiştir. Eğer $\widetilde{\mathcal{C}} = 0$ ise M'ye quasi-conformal düzdür denir.

2.3.5. Konharmonik eğrilik tensörü

Konharmonik dönüşümler düzgün fonksiyonların harmonik özelliklerini koruyan, konformal dönüşümlerin özel bir tipidir. Bu dönüşümler Y. Ishi [35] tarafından çalışılmıştır. Konharmonik dönüşümler altında invaryant kalan tensöre konharmonik eğrilik tensörü adı verilir.

2.35. Tanım

$n \geq 4$ olmak üzere $n-$boyutlu bir Riemann manifoldunun konharmonik eğrilik tensörü

$$\mathcal{K}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}\left[\rho(Y,Z)X - \rho(X,Z)Y + g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY\right]$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $\mathcal{K} = 0$ ise M ye konharmonik düzdür denir.

2.3.6. Eğrilik tensörleri üzerinde işlemler

Eğrilik tensörleri üzerinde tanımlanan bazı işlemler yardımı ile manifoldların simetri koşulları incelenmektedir.

2.36. Tanım

M bir Riemann manifoldu ve M üzerinde $(1,3)-$tipinde bir tensör D olsun. Eğer D tensör, Tanım 2.22'de verilen koşulları sağlıyorsa D ye genelleştirilmiş eğrilik tensörü adı verilir. Ayrıca $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_{X_1} D)(X_2, X_3)X_4 + (\nabla_{X_2} D)(X_3, X_1)X_4 + (\nabla_{X_3} D)(X_1, X_2)X_4 = 0$$

2.Bianchi özdeşliğini sağlarsa D ye bir proper genelleştirilmiş eğrilik tensörü denir [54].

Genelleştirilmiş eğrilik tensörünün $C^\infty(M)$ üzerindeki lineer birleşimi yine bir genelleştirilmiş eğrilik tensörüdür ancak bu, genel durumda proper genelleştirilmiş eğrilik tensörleri için geçerli değildir. Bunun yanında genelleştirilmiş eğrilik tensörlerinin $\mathbb{R}$ üzerindeki lineer birleşimi bir genelleştirilmiş eğrilik tensörüdür.

2.37. Tanım

$n \geq 3$ olmak üzere $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu M olsun. Her $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \Gamma(TM)$ için $(0,2)-$tipindeki A ve E tensörlerinin Kulkarni-Nomizu çarpımı

$$\begin{aligned}(A \wedge E)(X_1, X_2, X_3, X_4) &= A(X_1, X_4)E(X_2, X_3) + A(X_2, X_3)E(X_1, X_4) \\ &\quad - A(X_1, X_3)E(X_2, X_4) - A(X_2, X_4)E(X_1, X_3)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [54].

2.38. Tanım

$n \geq 3$ olmak üzere $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu M olsun. $X, Y \in \Gamma(TM)$ vektör alanları ve $(1,3)-$tipindeki bir tensör D olmak üzere her $Z \in \Gamma(TM)$ için $\mathscr{D}$, $\mathscr{A}$ ve $X \wedge_A Y$ endomorfizmleri

$$\mathscr{D}(X,Y)(Z) = D(X,Y)Z$$
$$g(\mathscr{A}(X), Y) = A(X,Y)$$
$$(X \wedge_A Y)Z = A(Y,Z)\,X - A(X,Z)\,Y$$

şeklinde tanımlanır [6, 54].

Eğer $A = g$ alınırsa $(X \wedge_g Y)\,Z = g(Y,Z)\,X - g(X,Z)\,Y$ olur. Buna göre yukarıda tanımlanan projektif, konformal, konsörkılır ve konharmonik eğrilik tensörleri, sırasıyla,

$$
\begin{aligned}
P &= R - \frac{1}{n-1}\rho \wedge \rho \\
C &= R - \frac{1}{n-2} g \wedge \rho + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} g \wedge g \\
Z &= R - \frac{\tau}{n(n-1)} g \wedge g \\
K &= R - \frac{1}{(n-2)} g \wedge \rho
\end{aligned}
$$

şeklinde ifade edilir.
$k \geq 1$ olmak üzere $(0,k)$ $-$tipinde T tensör alanı için T üzerinde bir $\mathscr{H}$ endomorfizmi

$$(\mathscr{H}.T)\,(X_1,...,X_k) = -T(\mathscr{H}X_1,...,X_k)... - T(X_1,...,\mathscr{H}X_k)$$

olarak tanımlanır. Özel olarak $\mathscr{H} = D(X,Y)$ ve $\mathscr{H} = X \wedge_A Y$ alınırsa her $X, Y, X_i \in \Gamma(TM),\ i = 1, 2, ..., k$ için, sırasıyla

$$
\begin{aligned}
(\mathscr{D}(X,Y).T)(X_1,...,X_k) &= -T(\mathscr{D}(X,Y)(X_1),...,X_k) - ... - T(X_1,...,\mathscr{D}(X,Y)(X_k)) \\
&= -T(D(X,Y)X_1,...,X_k) - ... - T(X_1,...,D(X,Y)X_k)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
((X \wedge_A Y)T)(X_1,...,X_k) &= -T((X \wedge_A Y)X_1, X_2,...,X_k) - ... \\
&\quad - T(X_1, X_2...,(X \wedge_A Y)X_k) \\
&= A(X,X_1)T(Y,X_2,...,X_k) + ... + A(X,X_k)T(X,X_2,...,Y) \\
&\quad - A(Y,X_1)T(X,X_2,...,X_k) - ... - A(Y,X_k)T(X_1,X_2,...,X)
\end{aligned}
$$

olur. Bu şekilde elde edilen $(\mathscr{D}(X,Y).T)(X_1,...,X_k)$ tensörü $D.T(X_1,...,X_k)$ ve $((X \wedge_A Y)T)(X_1,...,X_k)$ tensörü $Q(A,T)(X_1,...,X_k)$ şeklinde gösterilir [54].

2.39. Tanım

M üzerinde bir vektör alanı X ve bir 1-form ω olsun. $X_1 \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\omega_X(X_1) = \omega(X_1)X$$

endomorfizmi için

$$\begin{aligned}(\omega_X T)(X_1, X_2, ..., X_k) &= -T(\omega X(X_1), X_2, ..., X_k) - ... - T(X_1, X_2, ..., \Pi_X(X_k)) \\ &= -\omega(X_1)T(X, X_2, ..., X_k) - \omega(X_2)T(X_1, X, ..., X_k) - ... \\ &- \omega(X_k)T(X_1, X_2, ..., X)\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $X_i \in \Gamma(TM),\ i = 1, 2, ..., k$ dir [54].

Simetri, manifoldların diferensiyel geometrisinin çalışılmasında önemli bir rol oynar. Bir M manifoldunun lokal geodezik simetrileri izometri ise manifolda lokal simetrik manifold, eğer lokal geodezik simetrileri tüm manifolda genişletilebiliyorsa global simetrik manifold denir. Bunun yanında bir manifoldun lokal simetrikliği eğrilik ile ifade edilebilir: eğer $\nabla R = 0$ ise manifolda lokal simetriktir denir. M üzerindeki bir geometrik yapı bazı eğrilik tensörlerine kısıtlanarak uygulanabiliyorsa buna eğrilikten kısıtlanan geometrik yapı (a curvature restricted geometric struture) adı verilir [55]. Son 80 yılda lokal simetri konusu $\nabla R = 0$ koşulunun daha zayıf genelleştirmeleri elde edilerek çeşitli eğriliklerden kısıtlanan geometrik yapılarla çalışılmıştır. Lokal simetrinin genelleştirmesi yarı-simetrik manifold olarak adlandırılır ve aşağıdaki biçimde tanımlanır.

2.40. Tanım

M bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $\mathscr{R}(X,Y).R = 0$ ise M ye bir yarı-simetrik manifold denir. Burada $\mathscr{R}(X,Y)$ lineer endomorfizmi R üzerinde bir türev olarak hareket eder [61].

2.41. Tanım

Bir M Riemann manifoldu üzerinde $(0,r)-$tipindeki tensörlerin uzayı $\mathcal{T}_r^0$ olsun. $(0,4)-$tipindeki D tensörü için $D.T = 0$ ise M ye bir $T-$ yarı-simetrik manifold denir [54].

Özel olarak $R.\rho = 0$ ve $R.\mathcal{P} = 0$ ise M ye sırasıyla Ricci yarı-simetrik ve projektif yarı-simetrik manifold denir. Farklı eğrilik tensörleri kullanılarak farklı simetri koşulları elde edilebilir. Shaikh ve Kundu [54] eğrilik tensörlerini genelleştirerek çeşitli geometrik yapılar üzerindeki eğrilik şartlarının denkliklerini elde etmişlerdir.

2.4. Altmanifoldlar

2.42. Tanım

$boy\bar{M} \geq boyM$ olacak şekilde iki Riemann manifoldu M ve $\bar{M}$, $i : M \to \bar{M}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olsun. Her $p \in M$ için i nin türev dönüşümü i_{*p} olmak üzere $rank\ i_{*p} = boyM$ ise $i-$ye bir immersiyon ve M ye $\bar{M}$ nin bir immersed altmanifoldu denir [68].

2.43. Tanım

$i : M \to \bar{M}$ bir immersiyon olsun. Eğer i bire bir ise i ye bir imbedding ve M ye (ya da $i(M)$ ye) de $\bar{M}$ nin bir imbedding altmanifoldu denir [68].

2.44. Tanım

$(\bar{M}, \bar{g})$ bir Riemann manifoldu, M de $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(X,Y) = \bar{g}(i_*(X), i_*(Y))$$

şeklinde tanımlı g metriğine M üzerinde $\bar{g}$ den indirgenen Riemann metriği denir [68].

2.45. Tanım

$\bar{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. Her $p \in M$ ve $X_p \in T_pM$ için $\bar{g}(X_p, N_p) = 0$ ise N_p vektörüne M nin p noktasındaki normal vektörü denir. Eğer N_p birim vektör ise M nin p noktasındaki birim normal vektörü denir. N_p normal vektörlerinin kümesi

$$T_pM^{\perp} = \{N_p \in T_p\bar{M} : \bar{g}(X_p, N_p) = 0,\ \forall X_p \in T_pM\}$$

dir [68] .

M nin normal vektör alanlarından oluşan

$$\Gamma(TM^{\perp}) = \{N \in \Gamma(T\bar{M}) : \bar{g}(X,N) = 0\ ,\ \forall X \in \Gamma(TM)\}$$

kümesine M nin normal vektör alanları uzayı denir. N ye M nin normal vektör alanı, $TM^{\perp} = \bigcup\limits_{p \in M} T_pM^{\perp}$ ifadesine de M nin normal demeti denir [68]. Buradan

$$\bar{\Gamma}(TM) = \Gamma(TM) \oplus \Gamma(TM^{\perp})$$

biçiminde yazılır [68]. $\bar{M}$ ve M üzerindeki koneksiyonlar sırasıyla $\bar{\nabla}, \nabla$ olmak üzere her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $\bar{\nabla}_X Y$ nin teğet ve normal kısımları, sırasıyla, $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$ olmak üzere

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$$

denklemine Gauss denklemi denir [68]. Bu şekilde tanımlanan ∇ koneksiyonu, M üzerinde bir Riemann koneksiyonudur. Burada $h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM^{\perp})$ ile tanımlı normal demet değerli simetrik bilineer formdur. h ya M nin ikinci temel formu denir.

2.46. Tanım

$\bar{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M ve $\bar{M}$ nin birim normal vektör alanı N olsun. Her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^{\perp}_X N$$

şeklinde tanımlanan denkleme Weingarten denklemi denir. $-A_N X$ ve $\nabla^{\perp}_X N$ sırasıyla $\bar{\nabla}_X N$ nin teğet ve normal bileşenleridir. Burada $A_N : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ dönüşümü iyi tanımldır ve M nin şekil operatörü olarak adlandırılır. $\nabla^{\perp}$ e M nin $\Gamma(TM^{\perp})$ normal demetindeki koneksiyonu denir [68].

2.47. Tanım

n-boyutlu bir Riemann manifoldu M ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olsun. Her p noktasına T_pM nin $r-$boyutlu bir $\mathcal{D}_p$ altuzayını karşılık getiren

$$\begin{aligned} \mathcal{D} : M &\rightarrow T_pM \\ p &\rightarrow \mathcal{D}_p \subset T_pM \end{aligned}$$

dönüşümüne M üzerinde $r-$boyutlu bir dağılım (distribüsyon) denir.

$X \in \Gamma(TM)$ için $X_p \in \mathcal{D}_p$ ise X vektör alanına $\mathcal{D}$ dağılımına aittir denir ve $\mathcal{D}$ dağılımına ait vektör alanlarının uzayı $\Gamma(\mathcal{D})$ ile gösterilir. $\Gamma(\mathcal{D})$ nin baz vektör alanları diferansiyellenebilir ise $\mathcal{D}$ ye diferensiyellenebilir dağılım denir [68].

2.48. Tanım

n-boyutlu bir Riemann manifoldu M ve M üzerinde $r-$boyutlu bir dağılım $\mathcal{D}$ olsun. M nin her bir p noktasında $T_pM^{\perp}$ normal uzayına $(n-r)-$boyutlu bir $\mathcal{D}_p^{\perp}$ altuzayı bağlayan $\mathcal{D}^{\perp}$ dönüşüme $\mathcal{D}$ dağılımının tümleyen dağılımı denir [73].

2.49. Tanım

n-boyutlu bir Riemann manifoldu M ve M üzerinde $r-$boyutlu bir dağılım $\mathcal{D}$ olsun. Her $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ için $[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{D})$ ise $\mathcal{D}$ dağılımına involüttür denir. [68].

2.50. Tanım

n-boyutlu bir Riemann manifoldu $\bar{M}$ ve $\bar{M}$ üzerinde $r-$boyutlu bir dağılım $\mathcal{D}$ olsun. $\bar{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu M olmak üzere, eğer M nin her p noktasındaki tanjant uzayı ile $\mathcal{D}_p$ aynı ise M ye $\mathcal{D}$ dağılımının integral manifoldu denir. Eğer $\mathcal{D}$ dağılımının M altmanifoldunu kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa bu manifolda dağılımın maksimal integral manifoldu denir [68].

2.51. Tanım

n-boyutlu bir Riemann manifoldu $\bar{M}$ ve $\bar{M}$ üzerinde $r-$boyutlu bir dağılım $\mathcal{D}$ olsun. Eğer her $p \in \bar{M}$ için $\mathcal{D}$ dağılımının p noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa $\mathcal{D}$ dağılımına integrallenebilirdir denir [68].

2.52. Teorem

n-boyutlu bir Riemann manifoldu $\bar{M}$ ve $\bar{M}$ üzerinde $r-$boyutlu bir dağılım $\mathcal{D}$ olsun. Bu durumda her involüt dağılım integrallenebilirdir. Ayrıca $\mathcal{D}$ dağılımının $\forall p \in \bar{M}$ noktasından geçen bir tek maksimal integral manifoldu vardır ve p noktasını içeren diğer tüm integral manifoldlar bu maksimal integral manifoldun bir açık altmanifoldudur [68].

2.5. Kompleks Manifoldlar

2.53. Tanım

$1 \leq i \leq n$ için z_i bir kompleks sayı olmak üzere $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ $n-$lilerinin oluşturduğu $\mathbb{C}^n$ uzayına $n-$boyutlu kompleks sayılar uzayı denir.

Burada $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times ... \times \mathbb{C}$ olup $z = (z_1, z_2, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ için $z_1, z_2, ..., z_n$ ler z nin kompleks koordinatlarıdır. Reel ve sanal kısımları x_{2j-1} ve x_{2j} olmak üzere her bir z_j koordinatı $z_j = x_{2j-1} + ix_{2j}$ biçiminde yazılırsa $z = (x_1, x_2, ..., x_{2n-1}, x_{2n})$ şeklinde bir ifade elde edilir. Böylece $\mathbb{C}^n$, kompleks koordinatlar ile donatılmış $2n-$boyutlu $\mathbb{R}^{2n}$ öklid uzayı olarak düşünülebilir. $\{x_1, x_2, ..., x_{2n-1}, x_{2n}\}$ ler z nin reel koordinatları olarak adlandırılır [40].

2.54. Tanım

n-değişkenli kompleks $f(z) = f(z_1, z_2, ..., z_n)$ fonksiyonu verilsin. $f(z) = u + iv$ olmak üzere eğer u ve v fonksiyonları $x_1, x_2, ..., x_{2n-1}, x_{2n}$ reel koordinatlarında C^r sınıfından ise f de $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ koordinatlarında C^r sınıfındandır denir . $\mathbb{C}^n$ de bir açık $\mathcal{U}$ olmak üzere $\mathcal{U}$ üzerinde tanımlı C^∞ fonksiyonların kümesi $C^\infty(\mathcal{U})$ ile gösterilir [40].

2.55. Tanım

$\mathbb{C}$ de bir bölge D olmak üzere $f : D \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. $z_0 \in D$ için

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcut ise f fonksiyonu z_0 da diferensiyellenebilirdir denir [40].

2.56. Tanım

$w = f(z)$ kompleks fonksiyonu z_0 noktası ve bunun komşuluğundaki her noktada diferensiyellenebilir ise f ye analitiktir denir. Eğer f fonksiyonu D bölgesinin her noktasında diferensiyellenebilir ise f ye D de analitiktir ve D de analitik olan fonksiyona ise holomorfik fonksiyon denir [56].

2.57. Tanım

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu bir $z = x + iy$ noktasında türevli ise u ve v fonksiyonlarının z noktasında birinci mertebeden kısmi türevleri vardır ve bu türevler Cauchy-Riemann denklemleri olarak adlandırılan $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ denklemlerini sağlar [56].

2.58. Teorem

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu için u ve v fonksiyonları bir D bölgesinde sürekli ve birinci mertebeden kısmi türevlere sahip olsun. Eğer u ve v fonksiyonları D nin her noktasında Cauchy-Riemann denklemlerini sağlarsa, f fonksiyonu D de analtiktir [56].

2.59. Tanım

M bir küme ve $U \subset M$ olsun. Eğer $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü bire-bir ve $\varphi(U)$, $\mathbb{C}^n$'nin alışılmış topolojisine göre açık ise (U, φ) ikilisine $n-$boyutlu kompleks harita denir [40].

2.60. Tanım

(U, φ) ve (V, ψ) M üzerinde iki kompleks harita olsun. Eğer,
1. $U \cap V \neq \varnothing$
2. $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ fonksiyonu 1-1 , holomorfik ve terside holomorfik ise bu iki haritaya bağdaşıktır denir [40].

2.61. Tanım

Bir M kümesi üzerindeki tüm $n-$boyutlu bağdaşık (U_i, φ_i) kompleks haritalarının koleksiyonuna $n-$boyutlu maksimal $\mathcal{U}$ atlası denir. $n-$boyutlu maksimal $\mathcal{U}$ atlası lokal koordinat sistemi olarak da adlandırılır. M topolojik uzayı ise $n-$boyutlu bir $\mathcal{U}$ maksimal atlasına kompleks analitik yapı denir [40].

2.62. Tanım

M irtibatlı bir Hausdorf uzayı ve üzerinde bir kompleks analitik yapı $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i) : i \in I\}$ olsun. O zaman $(M, \mathcal{U})$ ikilisine $n-$boyutlu bir kompleks manifold denir.

Örnek

Bir boyutlu kompleks manifold Riemann yüzeyi olarak adlandırılır.

Örnek

$\mathbb{C}^{n+1}$ in orijininden geçen doğruların kümesi $\mathbb{P}^n$ olsun. Bir $l \subset \mathbb{C}^{n+1}$ doğrusu sıfırdan farklı herhangi bir $Z \in l$ tarafından tanımlanır, dolayısıyla

$$\mathbb{P}^n = \frac{\{[Z] \neq 0 \in \mathbb{C}^{n+1}\}}{[Z] \sim [\lambda Z]}$$

biçiminde yazılabilir. Doğruların $\mathcal{U}_i = \{[Z] : Z_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$ altkümesi üzerinden $\mathbb{C}^n$ e bire-bir ve örten φ_i dönüşümü

$$\varphi_i([Z_0, ..., Z_n]) = (\frac{Z_0}{Z_i}, ..., \frac{\hat{Z}_i}{Z_i}, ..., \frac{Z_n}{Z_i})$$

şeklindedir. Bu durumda $\varphi_i(\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_i) \subset \mathbb{C}^n$ üzerinde

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(z_1, ..., z_n) = (\frac{z_1}{z_j}, ..., \frac{\hat{z}_j}{z_j}, ..., \frac{1}{z_j}, ..., \frac{z_n}{z_j})$$

dönüşümü holomorfiktir. Böylece $\mathbb{P}^n$ bir kompleks manifold yapısına sahip olur. Bu kompleks manifolda kompleks projektif uzay denir $\mathbb{CP}^n$ ile gösterilir [27].

2.63. Tanım

$2n-$boyutlu bir reel manifold M olsun. $J : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ şeklinde tanımlı lineer dönüşümü $J^2 = -I$ koşulunu sağlıyor ise J ye M üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı, bu kompleks yapı ile birlikte M ye bir hemen hemen kompleks manifold denir [68].

2.64. Tanım

Hemen hemen kompleks yapı J olmak üzere

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y]$$

şeklinde tanımlı $(1, 2)-$tipindeki N_J tensör alanına J nin Nijenhuis torsiyon tensörü denir . $N_J = 0$ ise J ye integrallenebilirdir denir [68].

2.65. Teorem

Bir hemen hemen kompleks yapının kompleks yapı olması için gerek ve yeter şart Nijenhuis tensörünün sıfır olmasıdır [68].

2.66. Teorem

Her kompleks manifold doğal bir hemen hemen kompleks yapı taşır [68].

2.67. Önerme

Bir hemen hemen kompleks M manifoldu çift boyutludur [68].

$m-$boyutlu bir kompleks manifold M olsun. $(x_1, y_1, ..., x_n, y_n)$ reel koordinatlar ve $z = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, ..., n$ olmak üzere $p \in M$ için T_pM nin doğal reel bir bazı $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial y_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\}$ dir. $k = 1, 2, ..., n$ $J_p : T_pM \to T_pM$ kompleks yapı olmak üzere

$$J_p\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k},\ J_p\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\ , k = 1, 2, ..., n$$

dır [68].

2.68. Tanım

(M, J) bir hemen hemen kompleks manifold ve g bir Riemann metriği olsun. Eğer

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

ise g ye bir Hermityan metrik ve (M, J, g) ye bir hemen hemen Hermityan manifold denir [68].

2.69. Tanım

(M, J, g) bir hemen hemen Hermityan manifold olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\Phi\left(X, Y\right) = g(X, JY)$$

şeklinde tanımlı Φ tensörüne M nin temel 2-formu denir [68].

2.70. Teorem

(M, J) hemen hemen kompleks manifoldu üzerindeki lineer koneksiyon ∇ ve bu koneksiyonun torsiyon tensörü T olsun. M nin bir kompleks manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ ve $T = 0$ olmasıdır [68].

2.71. Teorem

(M, J, g) hemen hemen Hermityan manifold ve M üzerinde lineer koneksiyon ∇ olsun. Aşağıdaki önermeler denktir.

1. $\nabla J = 0$
2. $\nabla \Phi = 0$
3. Hemen hemen kompleks yapının torsiyonu sıfırdır ve temel iki form kapalıdır. Yani $T = 0$ ve $d\Phi = 0$ dır [68].

2.72. Tanım

(M, J, g) hemen hemen Hermityan manifold olsun. Φ temel 2-formu kapalı ise g ye bir Kähler metrik ve (M, g) ikilisine hemen hemen Kähler manifold denir. M bir kompleks manifold ise $(M,\ g)$ bir Kähler manifold olarak adlandırılır [68].

Sonuç

M bir Hermityan manifold olsun. M nin Kähler olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ olmasıdır [68].

2.73. Tanım

(M, J, g) bir hemen hemen Hermityan manifold olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$(\nabla_X J)Y + (\nabla_Y J)X = 0$

veya denk olarak

$(\nabla_X J)X = 0$

ise M ye bir yaklaşık(nearly)-Kähler manifoldu ve

$(\nabla_X J)Y + (\nabla_{JX} J)JY = 0$

ise M ye bir quasi-Kähler manifoldu denir. [68].

2.74. Tanım

(M, J, g) bir hemen hemen Hermityan manifold ve M nin bir bazı $\{E_1, E_2, ...E_n,$

$JE_1, JE_2, ..., JE_n\}$ olsun. Her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\delta\Phi(X) = -\sum_{i=1}^{n}\{(\nabla_{E_i}\Phi)(E_i, X) + (\nabla_{JE_i}\Phi)(JE_i, X)\}$$

olmak üzere $\delta\Phi(X) = 0$ ise M ye bir hemen hemen semi-Kähler (yarı-Kähler) manifoldu, eğer J nin Nijenhuis tensörü sıfır ise yarı-Kähler manifoldu adı verilir [68].

2.6. Kontakt Manifoldlar

2.75. Tanım

$(2n+1)-$boyutlu diferensiyellenebilir bir reel manifold M olsun. Bir η 1-formu için

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

koşulu sağlanıyor ise η ya M üzerinde bir kontakt form ve M ye bu formla birlikte bir kontakt manifold denir [10].

$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ ifadesi M üzerinde bir hacim elementidir ve M yönlendirilebilirdir. Ayrıca $d\eta$ nın rankı $2n$ dir ve böylece 1- boyutlu $\{X_p \in T_pM |\, d\eta(X_p, T_pM) = 0\}$ altuzayı elde edilir. Bu uzayda $d\eta(\xi, X) = 0,\ \ \eta(\xi) = 1$ şartlarını sağlayan global bir ξ vektör alanı vardır. ξ vektör alanına η kontakt yapısının karakteristik vektör alanı ya da Reeb vektör alanı denir [10].

2.76. Tanım

(M, η) bir kontakt manifold olmak üzere $p \in M$ için $\mathcal{D}_p = \{X_p \in T_pM |\, \eta_p(X_p) = 0\}$ olsun. $\mathcal{D} = \underset{p\in M}{\cup} \mathcal{D}_p$ uzayına kontakt dağılım denir [10].

2.77. Tanım

$(2n+1)\,-$boyutlu diferensiyellenebilir bir reel manifold M ve M üzerinde $(1,1)$ tipinde tensör alanı φ , bir vektör alanı ξ ve η 1-form olsun. M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi$$

ve

$\eta(\xi) = 1$

özellikleri sağlanıyorsa (φ, ξ, η) ya M üzerinde hemen hemen kontakt yapı ve bu yapı ile birlikte M manifolduna hemen hemen kontakt manifold denir [10].

2.78. Teorem

(M, φ, ξ, η) hemen hemen kontakt manifold olsun. Bu durumda
1. $\varphi\xi = 0$
2. $\eta \circ \varphi = 0$
3. rank $\varphi = 2n$
dir [10].

2.79. Tanım

(M, φ, ξ, η) hemen hemen kontakt manifold olsun. M üzerinde bir g Riemann metriği

$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$ ve $\eta(X) = g(X, \xi)$

şartlarını sağlıyor ise (φ, ξ, η, g) yapısına hemen hemen kontakt metrik yapı ve $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ ye hemen hemen kontakt metrik manifold denir [10].

Sonuç

$(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Bu durumda $g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y)$ dir [10].

2.80. Tanım

M üzerinde bir hemen hemen kontakt metrik yapı (φ, ξ, η, g) için

$\Omega(X, Y) = g(X, \varphi Y)$

şeklinde tanımlı Ω dönüşümüne (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapının temel 2-formu denir [10].

2.81. Tanım

M $n-$boyutlu bir diferansiyellenebilir manifold ve f, $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı olsun. $f^3+f=0$ ise f'ye M üzerinde $f-$yapı denir [68].

f nin rankı sabittir. $rank f = r$ olsun. Eğer $n=r$ ve çift ise $f-$yapı bir hemen hemen kompleks yapıdır. Eğer M yönlendirilebilir, n tek ve $n-1=r$ ise $f-$ yapı bir hemen hemen kontakt yapıdır [68].

M^{2n+1} bir hemen hemen kontakt manifold olsun. Bu durumda $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı vardır [70]. Eğer bu kompleks yapı integrallenebilir ise M^{2n+1} üzerindeki hemen hemen kontakt yapı normaldir denir [70]. Normallik hemen hemen kontakt manifoldlar üzerindeki çalışmalarda önemli bir kavram olup Sasaki ve Hatakeyama [52] tarafından tanımlanmıştır.

2.82 Teorem

$(2n+1)$-boyutlu hemen hemen kontakt metrik manifold (M,φ,ξ,η,g) olsun. $\mathbb{R}$ reel doğru olmak üzere $M\times\mathbb{R}$ çarpım manifoldu göz önüne alınsın. $M\times\mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı $\left(X,\ f\frac{d}{dt}\right)$ şeklindedir. X, M ye teğet bir vektör alanı, t , $\mathbb{R}$ nin koordinatı $f\in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ olmak üzere $\mathcal{J}:\Gamma(T(M\times\mathbb{R}))\to\Gamma(T(M\times\mathbb{R}))$ için

$$\mathcal{J}\left(X,\ f\frac{d}{dt}\right)=\left(\varphi X-f\xi,\ \eta(X)\frac{d}{dt}\right)$$

ile tanımlı $\mathcal{J}$ dönüşümü $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır [10].

2.83. Tanım

$(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. $\mathbb{R}$ reel doğru olmak üzere $M^{2n+1}\times\mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerindeki $\mathcal{J}$ hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise $(\varphi,\xi,\eta,)$ yapısına normaldir denir [52].

İntegrallenebilme için gerek ve yeter koşul $\mathcal{J}$ nin Nijenhuis tensörünün sıfır olması olduğundan normallik koşulları φ nin Nijenhuis tesörünün bileşenleri cinsinden verilebilir. $[\mathcal{J},\mathcal{J}]$, $(1,2)-$tipinde tensör alanı olup M^{2n+1} üzerinde X ve Y vektör alanları için $[\mathcal{J},\mathcal{J}]((X,0),(Y,0))$ ve $[\mathcal{J},\mathcal{J}]((X,0),(0,\frac{d}{dt}))$ ifadeleri

$$[\mathcal{J},\mathcal{J}]((X,0),(Y,0))=-([X,Y],0)+\left[\left(\varphi X,\eta(X)\frac{d}{dt}\right),\ \left(\varphi Y,\eta(Y)\frac{d}{dt}\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= -\mathcal{J}\left[\left(\varphi X, \eta(X)\frac{d}{dt}\right),\ (Y,0)\right] - \mathcal{J}\left[(X,0),\ \left(\varphi Y, \eta(Y)\frac{d}{dt}\right)\right] \\
&= \left(\varphi^2[X,Y] - \eta([X,Y])\xi, 0\right) \\
&+ \left([\varphi X, \varphi Y], (\varphi X\eta(Y) - \varphi Y\eta(X))\frac{d}{dt}\right) \\
&- \left(\varphi[\varphi X, Y] + Y(\eta(X))\xi,\ \eta([\varphi X, Y])\frac{d}{dt}\right) \\
&- \left(\varphi[X, \varphi Y] - (X\eta(Y))\xi,\ \eta([X, \varphi Y])\frac{d}{dt}\right) \\
&= \left([\varphi,\varphi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi,\ ((\mathcal{L}_{\varphi X}\eta)Y - (\mathcal{L}_{\varphi Y}\eta)X)\frac{d}{dt}\right) \\
&= \left[\left(\varphi X, \eta(X)\frac{d}{dt}\right), (-\xi, 0)\right] \\
&- \mathcal{J}\left[\left(\varphi X, \eta(X)\frac{d}{dt}\right), \left(0, \frac{d}{dt}\right)\right] - \mathcal{J}\left[(X,0), (-\xi,0)\right]
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{J},\mathcal{J}]((X,0),(0,\frac{d}{dt})) &= \left(-[\varphi X,\xi], (\xi\eta(X))\frac{d}{dt}\right) + \left(\varphi[X,\xi], \eta([X,\xi])\frac{d}{dt}\right) \\
&= ((\mathcal{L}_\xi\varphi)X, (\mathcal{L}_\xi\eta)(X))
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Burada $[\varphi,\varphi]$, φ nin Nijenhuis tensörü olup

$$
N_\varphi(X,Y) = [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - [X,Y]
$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $N^{(1)}, N^{(2)}, N^{(3)}$ ve $N^{(4)}$ tensörleri

$$
\begin{aligned}
N^{(1)} &= [\varphi,\varphi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi \\
N^{(2)} &= ((\mathcal{L}_{\varphi X}\eta)Y - (\mathcal{L}_{\varphi Y}\eta)X) \\
N^{(3)} &= (\mathcal{L}_\xi\varphi)X \\
N^{(4)} &= (\mathcal{L}_\xi\eta)(X)
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlanır. O halde (φ,ξ,η) hemen hemen kontakt yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul bu dört tensörün sıfır olmasıdır. Ancak $N^{(1)}$ in sıfır olması diğerlerinin de sıfır olmasını sağlayacağından normallik koşulu

$$
[\varphi,\varphi](X,Y) + 2d\eta(X,Y)\xi = 0
$$

koşuluna indirgenir [10].

2.84. Teorem

Bir (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapı için φ nin kovaryant türevi

$$\begin{aligned} 2\left(g\left(\nabla_X \varphi\right) Y, Z\right) = & \, 3d\Phi\left(X, \varphi Y, \varphi Z\right) - 3d\Phi\left(X, Y, Z\right) + g\left(N^{(1)}\left(Y, Z\right), \varphi X\right) \\ & + N^{(2)}\left(Y, Z\right) \eta\left(X\right) + 2d\eta\left(\varphi X, Y\right) \eta\left(Z\right) - 2d\eta\left(\varphi Z, X\right) \eta\left(Y\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

dir [10].

2.85. Tanım

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Eğer ξ killing vektör alanı ise M ye bir $K-$ kontakt manifold denir [10].

2.86. Tanım

Bir M hemen hemen kontakt metrik manifoldu üzerinde bir h tensör alanı

$$h = \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi \varphi = \frac{1}{2}N^{(3)} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir kontakt metrik manifold üzerinde h tensörü simetrik ve φ ye göre ters-değişimli, yani $h\varphi = -\varphi h$ dir. Ayrıca $\dot{I}zh = 0$ olup

$$\nabla_X \xi = -\varphi X - \varphi h X$$

dir [10].

1960'da Shigeo Sasaki hemen hemen kontakt manifoldları belli tensör alanlarının terimleri ile çalışmıştır. İlk çalışmalarda normal kontakt metrik yapı olarak anılan manifoldlar 1965'den itibaren Sasakian manifoldları olarak adlandırılmıştır [16].

2.87. Tanım

$(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen kontakt metrik manifold M olsun. Eğer M normal ve $\Phi = d\eta$ ise M ye Sasakian manifold denir.

2.88. Teorem

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. M nin Sasakian olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X \varphi) Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y) X$$

olmasıdır [10].

2.7. Yarı-İnvaryant Altmanifoldlar

Sasakian manifoldların altmanifoldlarının çeşitli sınıfları bulunmaktadır. Bu konuda literatürde birçok çalışma yapılmıştır [3–5]. Bu sınıflardan biri yarı-invaryant altmanifoldlardır.

2.89. Tanım

$(2n+1)-$boyutlu bir hemen hemen kontakt metrik manifold $\left(\bar{M}, \varphi, \xi, \eta, g\right)$, $\bar{M}$ nin reel $m-$boyutlu bir altmanifoldu M ve ξ, M ye teğet olsun. O zaman aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımları mevcut ise M ye $\bar{M}$ nin bir yarı-invaryant altmanifoldu denir.

1. $TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^{\perp} \oplus \xi$ dir. Burada $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}^{\perp}$ ve ξ dağılımları birbirlerine ortogonaldir.
2. $\mathcal{D}$ dağılımı φ ye göre invaryanttır. Yani her $p \in M$ için $\varphi\mathcal{D}_p = \mathcal{D}_p$ dir.
3. $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımı φ ye göre anti-invaryant dır. Yani her $p \in M$ için $\varphi\mathcal{D}_p \subset T_pM^{\perp}$ dir [5].

Yarı-invaryant altmanifoldlar Yano ve Kon [41, 72, 73] tarafından "kontakt CR-altmanifoldlar" adı altında incelenmiştir. Literatürde konu bu iki başlık altında çalışılmaktadır. Birçok çalışmadaki temel fark ξ vektör alanının bulunduğu dağılımdır. Yano ve Kon'a göre bu vektör alanı $\mathcal{D}$ ye veya $\mathcal{D}^{\perp}$ e ait olabilir. Bununla birlikte yarı-invaryant başlığı altında yapılan çalışmalarda ξ, M ye teğet alınmakta ve M nin teğet uzayı $TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^{\perp} \oplus \xi$ biçiminde yazılmaktadır. Bu durum dağılımların integrallenebilmesi ile ilgili sonuçları etkilemektedir.

3. KOMPLEKS KONTAKT MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

Bu bölümde kompleks kontakt manifoldun tanımı, normalliği ve temel özellikleri verilecektir.

3.1. Tanım ve Teoremler

3.1. Tanım

M kompleks boyutu $(2n+1)$ olan bir kompleks manifold , M üzerinde bir kompleks yapı J ve M nin bir açık örtüsü $\mathcal{U}=\{\mathcal{O}_\alpha\}$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa M ye bir kompleks kontakt manifold denir.

$i)$ Her $\mathcal{O}_\alpha$ üzerinde $\omega_\alpha \wedge (d\omega_\alpha)^n \neq 0$ olacak biçimde bir ω_α holomorfik $1-$formu vardır,

$ii)$ Eğer $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \neq \emptyset$ ise $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta$ üzerinde $\omega_\alpha = f_{\alpha\beta}\omega_\beta$ olacak biçimde sıfırdan farklı holomorfik bir $f_{\alpha\beta}$ fonksiyonu vardır [38].

ω_α kompleks 1-formuna kompleks kontakt form denir. $p \in \mathcal{O}_\alpha$ noktasında $\omega_\alpha \neq 0$ olmak üzere $\omega_\alpha = 0$ denklemi T_pM nin $2n-$boyutlu bir kompleks H_p altvektör uzayını tanımlar. M üzerinde H_p lifleri ile donatılmış vektör demeti $\mathcal{H}$ ile gösterilsin. Her α, β için $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta$ üzerinde $\mathcal{H}_\alpha = \mathcal{H}_\beta$ olduğundan $\mathcal{H} = \bigcup\limits_\alpha \mathcal{H}_\alpha$ iyi tanımlıdır. Bu şekilde tanımlanan holomorfik ve integrallenemeyen $\mathcal{H}$ vektör demetine yatay altdemet adı verilir. Yatay altdemetin reel boyutu $4n$ dir $[21, 32, 38]$.
Karakteristik sınıfları vektör demetlerinin sınıflandırılmasını sağlar ve manifoldun global eğriliklerini ölçer. Bu sınıflar içerisinde Chern sınıfları kompleks vektör demetlerinin karakteristik sınıflarıdır $[49, 53]$. Chern yönlendirilebilir bir reel kontakt manifoldun tanjant demetinin yapı grubunun $SO(1) \times U(n)(= SO(1) \times (SO(n) \otimes U(1))$ e indirgenebileceğini göstermiştir [38]. Benzer şekilde Kobayashi [38] kompleks kontakt manifoldların yapı grubunu ve Chern sınıflarını aşağıdaki teorem ile vermiştir.

3.2. Teorem

M kompleks boyutu $(2n+1)$ olan bir kompleks kontakt manifold olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir;

1. M nin tanjant demetinin yapı grubu $U(1) \times (sp(n) \otimes U(1))$ dir.
2. M nin $i-$yinci Chern sınıfı $c_i(M)$ ve $\{f_{\alpha\beta}\}$ tarafından tanımlanan doğru demeti üzerindeki karakteristik sınıfı α olsun. Bu durumda

   $1 + c_1(M) + c_2(M) + ... = (1+\alpha)(1+n\alpha+...)$

dir. Özel olarak $c_1(M) = (n+1)\alpha$ dır.

3. M üzerinde, bir reel kontakt manifold olan bir P asli lif demeti vardır. P nin yapı grubu $U(1)$ dir. Dahası P reel kontakt manifoldu M den ve P üzerinde reel kontakt form ω_α dan doğal olarak elde edilebilir [38].

$\mathcal{L} = TM/\mathcal{H}$ bölüm uzayı M üzerinde bir kompleks doğru demetidir. Yukarıdaki teoremden dolayı $c_1(M) = c_1(\mathcal{L})$ dir [21]. Teoremin birinci maddesi reel kontakt geometriye benzer şekildedir. İkinci maddede kontakt formun global olarak tanımlanabilmesi (yani $f_{\alpha\beta} = 1$) için $\mathcal{L}$ nin M üzerinde trivial (aşikar) kompleks doğru demeti olması gerektiğini belirtmektedir. Buna göre;

3.3. Önerme

(M, ω) bir kompleks kontakt manifold olsun. Eğer M kompakt ise ω nın global olabilmesi için gerek ve yeter koşul $c_1(M) = 0$ olmasıdır [14, 38].

M üzerinde bu koşullara uygun kompleks doğru demeti biriciktir. Bu doğru demeti $\mathcal{V}$ ile gösterilir ve Whitney toplamı gereği $TM \cong \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ dir. Bu şekilde tanımlanan $\mathcal{V}$ altdemetine dikey altdemet adı verilir. Dikey altdemetin reel boyutu 2 dir [21, 38]. Bu durum Foreman [21] tarafından aşağıdaki teorem ile ifade edilmiştir.

3.4. Teorem

TM nin aşağıdaki koşulları sağlayan 2-boyutlu $J-$invaryant bir tek $\mathcal{V}$ altdemeti vardır:

1. $TM \cong \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ dir.
2. $\mathcal{V} \cong \mathcal{L}$ olacak şekilde kompleks doğru demetidir.
3. $\mathcal{V}$ nin

$$u(U) = 1, u(V) = 0, v(V) = 1, v(U) = 0$$
$$\forall X \in \mathcal{H} \text{ için } du(U, X) = dv(V, X) = 0$$

şartlarını sağlayan $U, V = -JU$ local bazları mevcuttur.

$TM \cong \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$ toplamını ayıran iki projeksiyon $p : TM \to \mathcal{H}$ ve $q : TM \to \mathcal{V}$ olsun. Burada $\mathcal{O} \in \mathcal{U}$ üzerinde $q = u \otimes U + v \otimes V$ dir. Diğer yandan $\mathcal{H}$ ve $\mathcal{V}$ vektör demetleri $J-$invaryant olduğundan, $p \circ J = J \circ p$ ve $q \circ J = J \circ q$ dir [21].

Bilinen tüm kompleks kontakt manifold örnekleri için $\mathcal{V}$ integrallenebilir olduğundan bu aşamadan itibaren $\mathcal{V}$ nin integrallenebilir olduğu kabul edilecektir. Ancak bu durumun genel bir ispatı henüz verilmemiştir [21, 44]. Diğer yandan her $\mathcal{O}_\alpha \in \mathcal{U}$ için $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \neq \emptyset$ üzerinde $\mathcal{V}|_{\mathcal{O}_\alpha} = \mathcal{V}|_{\mathcal{O}_\beta}$ dır [21].

3.5. Lemma

$X \in T\mathcal{O}, Y \in \mathcal{H}$ için $dv(X,Y) = du(JX,Y)$ dir.

(M,ω) , $\{(\omega_\alpha, \mathcal{O}_\alpha) | \mathcal{O}_\alpha \in \mathcal{U}\}$ yapısı ile birlikte bir kompleks kontakt manifold olsun. Her $\mathcal{O}_\alpha, \mathcal{O}_\beta, \mathcal{O}_\gamma \in \mathcal{U}$ için $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \neq \emptyset$ üzerinde $\omega_\alpha = f_{\alpha\beta}\omega_\beta$ olduğundan $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \cap \mathcal{O}_\gamma$ üzerinde $f_{\beta\gamma}f_{\gamma\theta}f_{\theta\beta} = 1$ dir. Bu durumda $\{f_{\alpha\beta}\}$ geçiş fonksiyonları ile birlikte M üzerinde bir $\tilde{P}$ kompleks doğru demeti elde edilir. M üzerinde $\tilde{P}$ ile ilişkili bir doğru demeti P ile gösterilsin. O zaman $\mathcal{O}_\alpha \in \mathcal{O}$ içinde, $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere, kompleks değerli sıfırdan farklı

$$h_{\alpha\beta} = \tau_{\alpha\beta}^{-1} f_{\alpha\beta}\tau_{\alpha\beta} \tag{3.1}$$

olacak biçimde τ_α fonksiyonları mevcuttur. τ_α fonksiyonları P nin geçiş fonksiyonları olup

$$|h_{\alpha\beta}| = 1 \tag{3.2}$$

dir. Her bir $\mathcal{O}_\alpha$ için $\pi_\alpha = \tau_\alpha^{-1}\omega_\alpha$ alınırsa Eş. 3.1' den $\pi_\alpha = h_{\alpha\beta}\pi_\beta$ olur.

3.6. Tanım

(M,J) bir kompleks kontakt manifold ve $\mathcal{H}$ yatay altdemet olsun. Tanım kümeleri M yi örten kompleks değerli $1-$formlar kümesi $\{\pi\}$ olsun. Her α, β için tanım kümeleri $\mathcal{O}_\alpha, \mathcal{O}_\beta$ olan π_α, π_β $1-$formları aşağıdaki koşulları sağlıyorsa $\{\pi\}$ ye M üzerinde bir normalize kompleks kontakt yapı denir [19].

i) $\mathcal{U}$ üzerinde $\mathcal{H} = \text{çek}\pi$ dir.
ii) $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta$ üzerinde $\pi_\alpha = h_{\alpha\beta}\pi_\beta$ olacak biçimde $h_{\alpha\beta} : \mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \to S^1$ fonksiyonu vardır.

$\forall X, Y \in T\mathcal{O}_\alpha$ için bir lokal kompleks 2-form

$$\Omega = d\pi(pX, pY)$$

biçiminde tanımlansın ve $\tilde{G} = Re\ \Omega$ ve $\tilde{H} = -Im\ \Omega$ alınsın. Bu durumda Lemma 3.5' dan $\forall X, Y \in T\mathcal{O}$ için $\tilde{H}(X,Y) = \tilde{G}(JX,Y)$ dir. Normalize bir kompleks kontakt yapı için $v_\alpha = u_\alpha \circ J$ olmak üzere $\pi_\alpha = u_\alpha - iv_\alpha$ dir.
$\pi_\beta = u_\beta - iv_\beta$ ve $\pi_\alpha = h_{\alpha\beta}\pi_\beta$ olsun. O zaman $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta$ üzerinde tanımlı reel değerli a, b fonksiyonları için $h_{\alpha\beta} = a + ib$ olmak üzere

$$u_\alpha = au_\beta + bv_\beta \quad \text{ve} \quad v_\alpha = -bu_\beta + av_\beta$$

olur. Ayrıca $d\pi_\alpha = dh_{\alpha\beta} \wedge \pi_\beta + h_{\alpha\beta} d\pi_{\alpha\beta}$ ve $\pi_\alpha \circ p = 0$ olduğundan $\Omega_\alpha = h_{\alpha\beta}\Omega_\beta$ dir. Böylece

$$\tilde{G}_\alpha = a\tilde{G}_\beta + b\tilde{H}_\beta \ \text{ ve } \ \tilde{H}_\alpha = -b\tilde{G}_\beta + a\tilde{H}_\beta$$

olur. Diğer yandan Eş. 3.2'den $a^2 + b^2 = 1$ dir.
P çember demetinin bir koneksiyonu σ olsun. O zaman her $\mathcal{O}_\alpha$ üzerinde

$$i\sigma_\alpha = i\sigma_\beta + \frac{dh_{\alpha\beta}}{h_{\alpha\beta}}$$

olacak biçimde σ_α reel 1-formu vardır. ω_α kompleks kontakt formu için $\omega_\alpha \wedge (d\omega_\alpha)^n \neq 0$ olduğundan $\pi_\alpha \wedge (d\pi_\alpha)^n \neq 0$ ve böylece $\pi_\alpha \wedge (\Omega_\alpha)^n \neq 0$ olur. Burada

$$\Omega_\alpha = d\pi_\alpha - i\sigma_\alpha \wedge \pi_\alpha$$

dir [31, 32]. $\{\sigma_\alpha\}$, $\mathcal{V}$ üzerindeki koneksiyon için lokal 1-formlar kümesidir. Bu koneksiyona Ishihara-Konishi koneksiyonu denir [21]. Böylece

$$\tilde{G} = du_\alpha - \sigma_\alpha \wedge v_\alpha \qquad\qquad \tilde{H} = dv_\alpha + \sigma_\alpha \wedge u_\alpha$$

olur. Ishihara-Konishi koneksiyonun ifadesi aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

3.7. Önerme

$\mathcal{O}$ üzerinde $\sigma(X) = g(\nabla_X U, V)$ dir [21,32,33].

Kompleks kontakt formun global tanımlı olması durumunda yapıya katı (strict) kompleks kontakt yapı adı verilir. Foreman [21] kompleks kontakt formun global tanımlanması durumunda σ nın sıfır olacağını ispatlamıştır. 1978 yılındaki çalışmasında Shubiya [57] bir kompleks kontakt manifold üzerinde bir kompleks hemen hemen kontakt yapının varlığını kanıtlamıştır. Aynı sonuç Ishihara-Konishi tarafından aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

3.8. Teorem

$(2n+1)-$boyutlu bir M kompleks kontakt manifoldu her zaman bir C^∞ hemen hemen kontakt yapı taşır [33].

Foreman [21] tez çalışmasında M manifoldu üzerinde Hermityan metriği tanımlayarak bu metriğin global olduğunu göstermiş ve bu metrik ile birlikte her kompleks hemen hemen kontakt manifoldun en az bir kompleks kontakt metrik yapı taşıdığını kanıtlamıştır. Ayrıca Foreman bu metriklerin birden fazla biçimde tanımlanabileceğini göstermiştir. Bir kompleks hemen hemen kontakt yapının tanımı, bir reel hemen hemen kontakt yapının kompleks karşılığı olarak aşağıdaki biçimde verilmiştir.

3.9. Tanım

M kompleks boyutu $(2n+1)$ olan bir kompleks manifold, M üzerinde kompleks yapı J ve Hermityan metrik g olsun. Eğer M nin aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\mathcal{U}$ açık örtüsü mevcut ise M ye kompleks hemen hemen kontakt metrik manifold denir;

1. Her $\mathcal{O}_\alpha$ üzerinde u_α, $v_\alpha = u_\alpha \circ J$ 1-formları, U_α, $V_\alpha = -JU_\alpha$ dual birim vektör alanları ve G_α, $H_\alpha = G_\alpha J$ $(1,1)-$tensörleri vardır öyle ki

$$\begin{aligned} &H_\alpha^2 = G_\alpha^2 = -I + u_\alpha \otimes U_\alpha + v_\alpha \otimes V_\alpha \\ &G_\alpha J = -JG_\alpha,\ G_\alpha U = 0, \quad g(X, G_\alpha Y) = -g(G_\alpha X, Y) \end{aligned} \tag{3.3}$$

   dir.
2. $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \neq \emptyset$ üzerinde

$$\begin{aligned} &u_\beta = au_\alpha + bv_\alpha, \quad v_\beta = -bu_\alpha + av_\alpha, \\ &G_\beta = aG_\alpha + bH_\alpha, \quad H_\beta = -bG_\alpha + aH_\alpha \end{aligned}$$

   olacak şekilde $a^2 + b^2 = 1$ koşulunu sağlayan a and b fonksiyonları vardır [10,32,44].

$\mathcal{O}_\alpha$ anlaşılıdğından buradan itibaren alt indisler kullanılmaycaktır. Bu tanımdan doğrudan hesaplama ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç

Bir (M, G, H, U, V, u, v, g) kompleks hemen hemen kontakt metrik manifoldunda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [33, 44].

$$\begin{aligned} &HG = -GH = J + u \otimes V - v \otimes U \\ &JH = -HJ = G \\ &GU = HU = HV = 0 \\ &uG = vG = uH = vH = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

$JV = U,\ g(U, V) = 0$
$g(HX, Y) = -g(X, HY)$

3.10. Tanım

M bir kompleks hemen hemen kontakt metrik manifold ve M üzerinde bir vektör alanı X olsun. Eğer $X \in \mathcal{H}$ ise X e yatay (horizontal) vektör alanı, $X \in \mathcal{V}$ ise X e dikey (vertical) vektör alanı denir.

3.11. Tanım

M bir kompleks hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. M nin bir lokal ortonormal bazı $\{X_i, GX_i, HX_i, JX_i, U, V, 1 \leq i \leq n\}$ şeklindedir. Bu durumda

$$\mathcal{H} = sp\{X_i, GX_i, HX_i, JX_i, 1 \leq i \leq n\}, \qquad \mathcal{V} = sp\{U, V\}$$

dir. Herhangi bir X vektör alanı $X_0 \in \mathcal{H}$ olmak üzere

$$X = X_0 + u(X)U + v(X)V \tag{3.5}$$

biçiminde yazılır. Burada $X_0 = pX$ dir.

Bir reel kontakt manifold için Eş. 2.3 biçiminde tanımlanan simetrik h operatörü reel kontakt geometride önemli bir rol oynar. Benzer şekilde kompleks kontakt geometride h_U ve h_V tensörleri mevcuttur. Bu tensörler tanımlanmadan önce $sym(T)$ ve $skew(T)$ tanımı verilecektir. Ayrıntılı bilgi için [21]'e bakılabilir.

3.12. Tanım

J hemen hemen kompleks yapısı ile birlikte bir vektör uzayı V ve $T : V \to V$ herhangi bir lineer dönüşüm olmak üzere $sym(T)$ ve $skew(T)$

$$g(sym(T)X, Y) = \frac{1}{2}(g(TX, Y) + g(TY, X)),$$
$$g(skew(T)X, Y) = \frac{1}{2}((g(TX, Y) - g(TY, X))$$

şeklinde tanımlanır. Burada $sym(T)$ tensörü g metriği ile ilişkili simetrik tensör $skew(T)$ tensörü ise skew (anti)-simetrik tensördür. Ayrıca $T = sym(T) + skew(T)$ dir.

$h_U,\ h_V : TM \to \mathcal{H}$ simetrik operatörleri $h_U = \frac{1}{2} sym(\mathcal{L}_U G) \circ p$ ve $h_V = \frac{1}{2} sym(\mathcal{L}_V G) \circ p$ biçiminde tanımlanır. h_U ve h_V lineer dönüşümleri için

$$h_U G = -G h_U,\ h_V H = -H h_V$$
$$h_U(U) = h_U(V) = h_V(U) = h_V(V) = 0$$

dir [44]. Levi-Civita koneksiyonu ∇ olmak üzere

$$\nabla_X U = -GX - G h_U X + \sigma(X) V \quad \text{ve} \quad \nabla_X V = -HX - H h_V X - \sigma(X) U$$

dir [44]. Böylece

$$\nabla_U U = \sigma(U)V,\ \nabla_V U = \sigma(V)V,\ \nabla_U V = -\sigma(U)U, \nabla_V V = -\sigma(V)U$$

olarak elde edilir.

3.13. Önerme

$\{G, H, U, V, u, v, g\}$ bir kompleks hemen hemen kontakt yapı olsun. Bu durumda
1. $\nabla_U G = \sigma(U)H$ ve $\nabla_V H = -\sigma(V)G$
2. $G(\nabla_U J) = -(\nabla_U J)G$
3. $p(\mathcal{L}_U G)p = \underbrace{2Gh_U}_{\text{simetrik}} + \underbrace{\sigma(U)H}_{\text{skew-simetrik}}$
4. $\dot{I}z(h_U) = 0$
5. Her $X \in \mathcal{H}, W \in \mathcal{V}$ için $d\sigma(W, X) = 0$
dir [21].

Diğer yandan $\tilde{G} = du - \sigma \wedge v$ ve $\tilde{H} = dv + \sigma \wedge u$ eşitlerinden

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \tilde{G})(Y, Z) + (\nabla_Y \tilde{G})(Z, X) + (\nabla_Z \tilde{G})(X, Y) &= -v(X) d\sigma(Y, Z) - v(Y) d\sigma(Z, X) \\
&\quad - v(Z) d\sigma(X, Y) + \sigma(X) g(Y, HZ) \\
&\quad + \sigma(Y) g(Z, HX) + \sigma(Z) g(X, HY) \\
(\nabla_X \tilde{H})(Y, Z) + (\nabla_Y \tilde{H})(Z, X) + (\nabla_Z \tilde{H})(X, Y) &= u(X) d\sigma(Y, Z) + u(Y) d\sigma(Z, X) \\
&\quad + u(Z) d\sigma(X, Y) - \sigma(X) g(Y, GZ) \\
&\quad - \sigma(Y) g(Z, GX) + \sigma(Z) g(X, GY)
\end{aligned}$$

dir [44].

Sonuç

M bir kompleks hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. M üzerindeki herhangi iki X, Z vektör alanı için,

$$
\begin{aligned}
d\sigma(GZ, GX) &= d\sigma(HZ, HX) = d\sigma(X, Z) - 2u \wedge v(X, Z) d\sigma(U, V) \\
d\sigma(U, X) &= v(X) d\sigma(U, V)\ ,\ \ d\sigma(V, X) = -u(X) d\sigma(U, V) \\
d\sigma(Z, X) &= d\sigma(JZ, JX), \quad d\sigma(JX, Z) = d\sigma(X, JZ) \\
d\sigma(GX, Z) &= d\sigma(X, GZ)\ , \quad d\sigma(HX, Z) = d\sigma(X, HZ)
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

dir [44].

Reel kontakt geometrideki Eş. 2.6' ya benzer bir eşitlik Foreman [21] tarafından kompleks hemen hemen kontakt metrik manifoldlar için aşağıdaki şekilde verilmiştir.

3.14. Teorem

M bir kompleks hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$
\begin{aligned}
2g\left(\left(\nabla_X G\right) Y, Z\right) = g\left(\left[G, G\right]\left(Y, Z\right), GX\right) &- 3v \wedge d\sigma\left(X, GY, GZ\right) + 3v \wedge d\sigma\left(X, Y, Z\right) \\
&- 2\sigma\left(X\right) \widetilde{H}\left(Y, Z\right) + 4v\left(X\right) g\left(Y, JZ_0\right) - \sigma\left(Y\right) \widetilde{H}\left(Z, X\right) \\
&+ \sigma\left(GY\right) g(Z, JX_0) - 2u(Y) g(X, Z_0) - 2v(Y) g(Z, JX_0) \\
&+ \sigma\left(Z\right) \widetilde{H}\left(Y, X\right) - \sigma\left(GZ\right) g(Y, JX_0) + 2u(Z) g(X, Y_0) \\
&+ 2v(Z) g(Y, JX_0)
\end{aligned}
$$

dir [21].

3.15. Önerme

$\{G, H, U, V, u, v, g\}$ bir kompleks hemen hemen kontakt yapı, X, Y yatay vektör alanları ve U bir dikey birim vektör alanı olmak üzere

$$
d\sigma(X, Y) = 2g(JX, Y) + g((\nabla_U J)GX, Y) - 2g(Hh_U X, Y)
$$

dir [21].

3.2. Kompleks Hemen Hemen Kontakt Metrik Manifoldların Normalliği

Bir kompleks hemen hemen kontakt yapı doğal olarak bir kompleks kontakt yapıdan daha zayıftır. Bir kompleks kontakt yapı her zaman kompleks hemen hemen kontakt yapı taşır [21, 33, 57] ancak tersinin sağlanabilmesi için manifoldun normal olması gerekir. Kompleks kontakt manifoldların normalliği üzerine ilk çalışmalar Ishihara ve Konishi [31] tarafından yapılmıştır. Bu altbölümde bir kompleks kontakt metrik manifold için Ishihara ve Konishi [32] ile Korkmaz [44] tarafından verilen normallik koşulları ve eğrilik özellikleri sunulacaktır.

Kompleks hemen hemen kontakt manifoldların tanımında verilen G ve H tensörleri birer f-yapıdır [31]. Yani

$$G^3 + G = 0 \text{ ve } H^3 + H = 0$$

dır. Ishihara ve Konishi reel kontakt yapının normallik tensörüne kompleks hemen hemen kontakt yapının özelliklerini uygulayarak M üzerinde $(1,2)-$tipindeki S ve T tensörlerini,

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= [G,G](X,Y) + 2g(X,GY)U - 2g(X,HY)V \\ &\quad + 2(v(Y)HX - v(X)HY) + \sigma(GY)HX \\ &\quad - \sigma(GX)HY + \sigma(X)GHY - \sigma(Y)GHX \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= [H,H](X,Y) - 2g(X,GY)U + 2g(X,HY)V \\ &\quad + 2(u(Y)GX - u(X)GY) + \sigma(HX)GY \\ &\quad - \sigma(HY)GX + \sigma(X)GHY - \sigma(Y)GHX \end{aligned} \tag{3.8}$$

biçiminde tanımlamaktadır. Burada

$$[G,G](X,Y) = (\nabla_{GX}G)Y - (\nabla_{GY}G)X - G(\nabla_X G)Y + G(\nabla_Y G)X$$

olup G nin Nijenhuis tensörüdür. Bu tensörlere Ishihara-Konishi tensörleri denilmektedir.

3.2.1. IK-normal kompleks kontakt metrik manifoldlar

3.16. Tanım

Eğer $S = T = 0$ ise M kompleks hemen hemen kontakt metrik manifolduna normaldir denir [32].

Bir kompleks hemen hemen kontakt manifold yukarıdaki manada normal ise manifolda Ishihara-Konishi anlamında "IK-normal" dir denilmektedir.

3.17. Önerme

M bir IK-normal kompleks kontakt metrik manifold ise M üzerindeki kompleks yapı Kähler'dir, yani $\nabla J = 0$ dır [32].

3.18 Teorem

Bir M kompleks hemen hemen kontakt metrik manifoldunun IK-normal olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X G)Y = \sigma(X)HY - u(Y)X - v(Y)JX + g(X,Y)U + g(JX,Y)V$$
$$(\nabla_X H)Y = -\sigma(X)GY + u(Y)JX - v(Y)X + g(X,JY)U + g(X,Y)V$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır [31].

3.19. Önerme

M bir IK-normal kompleks kontakt metrik manifold olsun. M üzerindeki herhangi iki X ve Y vektör alanı için

$d\sigma\,(X,Y) = 2g\,(JX,Y)$

dir [32].

Yukarıdaki önermeden bir IK-normal kompleks kontakt metrik manifold için $d\sigma(U,V) = -2$ dir.

3.20. Önerme

(M,J) kompleks manifoldu g Hermityan metriği ile birlikte bir IK-normal kompleks kontakt metrik manifold ise bu durumda M skalar eğriliği $(4n+2)(4n+4)$ olan Eistein-Kähler uzayıdır. Eğer M tam ise kompakttır [32].

3.21 Teorem

Bir M kompleks hemen hemen kontakt metrik manifoldunun IK-normal olması için gerek ve yeter koşul

$$R(X,Y)U = u(Y)X - u(X)Y + v(Y)JX - v(X)JY + 2g(JX,Y)V$$
$$R(X,Y)V = -v(Y)X + v(X)Y - u(Y)JX + u(X)JY - 2g(JX,Y)U$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır [19].

IK-normal kompleks kontakt metrik manifoldların eğrilik özellikleri Ishihara ve Konishi [32] tarafından elde edilmiştir.

3.22. Önerme

M bir IK-normal kompleks kontakt metrik manifold olsun. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R(U,V)V = 4U, \quad R(V,U)U = 4V$$
$$R(X,U)U = X - u(X)u + 3v(X)V$$
$$R(X,V)V = X - v(X)V + 3u(X)U$$
$$R(U,V)X = v(X)V - u(X)V$$
$$R(X,U)Y = -g(X,Y)U + g(JX,Y)V + u(Y)X - v(Y)JX - 2u(X)JY$$
$$R(X,V)Y = -g(X,Y)V - g(JX,Y)U - v(Y)X - u(Y)JX - 2u(X)JY$$

dir [32].

Sonuç

Eğrilik özelliklerinden yararlanılarak IK-normal bir M kompleks kontakt metrik manifoldun kesitsel eğrilikleri

1. $K(U,V) = 4$
2. $K(X,U) = K(X,V) = 1$, $X \in \mathcal{H}$ için

biçimindedir. Ayrıca Ricci eğriliği $\rho(X,Y) = (4n+4)\,g(X,Y)$ dir.

3.23. Teorem

Bir IK-normal kompleks kontakt metrik manifoldun birinci Chern sınıfı pozitiftir [32].

3.2.2. Normal kompleks kontakt metrik manifoldlar

Önerme 3.17 gereği IK-normallik manifoldu Kähler olmaya zorlamaktadır. Yani Kähler olmayan bir kompleks hemen hemen kontakt metrik manifold IK-normal olamaz. Reel kontakt geometrinin iyi bilinen örneklerinden biri olan Heisenberg grubun kompleks eşleniği kompleks Heisenberg grup Kähler olmadığından IK-normal değildir. Bu sebeple Korkmaz [44] 2000 yılında yayınlanan çalışmasında IK-normallik tanımını genişletmiştir. Korkmaz tarafından verilen tanıma göre kompleks Heisenberg grup normaldir. Korkmaz anlamında normallik "normal kompleks kontakt metrik manifold" olarak adlandırılacaktır ve bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar bu tanım ve bu tanımdan elde edilen neticelere dayanmaktadır.

3.24. Tanım

M bir kompleks hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Eğer

1. $X, Y \in \mathcal{H}$ için $S(X,Y) = T(X,Y) = 0$
2. Her X için $S(X,U) = T(X,V) = 0$

ise M ye normal kompleks kontakt metrik manifold denir [44].

Korkmaz tarafından verilen normallik tanımı Ishihara-Konishi'nin vermiş olduğu tanıma göre daha zayıftır. Dolayısıyla IK-normal bir manifold yukarıdaki anlamda da normaldir.

Reel kontakt manifoldlarda önemli yer tutan h tensörü eğer manifold normal ise sıfır olmaktadır. Benzer bir durum Korkmaz tarafından aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

3.25. Önerme

Eğer bir M kompleks hemen hemen kontakt metrik manifodu normal ise $h_U = h_V = 0$ dır [44].

Sonuç

Eğer M bir normal kompleks kontakt metrik manifold ise

$$\nabla_X U = -GX + \sigma(X)V \quad \text{ve} \quad \nabla_X V = -HX - \sigma(X)U \tag{3.9}$$

dir.

Sonuç

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold olmak üzere her $X, Y \in \mathcal{H}$ için

$$d\sigma(X,Y) = 2g(JX,Y) + g((\nabla_U J)GX,Y) \tag{3.10}$$

dir.

Normallik tanımından hareketle bir kompleks hemen hemen kontakt metrik manifoldun normal olması için sağlaması gereken koşul Korkmaz tarafından aşağıdaki teoremle verilmiştir;

3.26. Teorem

Bir M kompleks hemen hemen kontakt metrik manifoldunun normal olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} g((\nabla_X G)Y,Z) &= \sigma(X)g(HY,Z) + v(X)d\sigma(GZ,GY) - 2v(X)g(HGY,Z) \qquad (3.11)\\ &- u(Y)g(X,Z) - v(Y)g(JX,Z) + u(Z)g(X,Y) + v(Z)g(JX,Y),\\ g((\nabla_X H)Y,Z) &= -\sigma(X)g(GY,Z) - u(X)d\sigma(HZ,HY) - 2u(X)g(GHY,Z) \qquad (3.12)\\ &+ u(Y)g(JX,Z) - v(Y)g(X,Z) - u(Z)g(JX,Y) + v(Z)g(X,Y) \end{aligned}$$

olmasıdır [44].

Sonuç

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold ve M üzerindeki kompleks yapı J olsun. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$g((\nabla_X J)Y,Z) = u(X)(d\sigma(Z,GY) - 2g(HY,Z)) + v(X)(d\sigma(Z,HY) + 2g(GY,Z)) \tag{3.13}$$

dir [44].

IK-normal kompleks kontakt metrik manifoldların Kähler olduğu bilinmektedir. Blair ve Molina [11] aşağıdaki önermeyi ispatlamışlardır.

3.27. Önerme

Normal bir kompleks kontakt metrik manifold yarı-Kähler manifoldtur.

Bir M normal kompleks kontakt metrik manifoldunun eğrilik şartları Korkmaz [44] tarafından aşağıdaki teoremde verilmiştir. Ayrıca aynı sonuçlar normallik şartı olmaksızın Foreman [21] tarafından da elde edilmiştir.

3.28. Teorem

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold olsun. M nin Riemann eğriliği R olmak üzere her $X, Y, Z \in \mathcal{H}$ ve $U, V \in \mathcal{V}$ için

$$R(U,V,V,U) = R(V,U,U,V) = -2d\sigma(U,V) \tag{3.14}$$
$$R(X,U)U = X \ , \ R(X,V)V = X \tag{3.15}$$
$$R(X,Y)U = 2(g(X,JY) + d\sigma(X,Y))V \tag{3.16}$$
$$R(X,Y)V = -2(g(X,JY) + d\sigma(X,Y))U \tag{3.17}$$
$$R(X,U)V = \sigma(U)GX + (\nabla_U H)X - JX \tag{3.18}$$
$$R(X,V)U = -\sigma(V)HX + (\nabla_V G)X + JX \tag{3.19}$$
$$R(X,U)Y = -g(X,Y)U - g(JX,Y)V + d\sigma(Y,X)V, \tag{3.20}$$
$$R(X,V)Y = -g(X,Y)V + g(JX,Y)U - d\sigma(Y,X)U \tag{3.21}$$
$$R(U,V)X = JX \tag{3.22}$$

dir [44].

3.29. Teorem

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold olsun. X, Y, Z ve W yatay vektör alanları için

$$\begin{aligned} g(R(GX,GY)GZ,GW) &= g(R(X,Y)Z,W) - 2g(JZ,W)d\sigma(X,Y) \\ &+ 2g(HX,Y)d\sigma(GZ,W) + 2g(JX,Y)d\sigma(Z,W) \\ &- 2g(HZ,W)d\sigma(GX,Y), \end{aligned} \tag{3.23}$$
$$\begin{aligned} g(R(HX,HY)HZ,HW) &= g(R(X,Y)Z,W) - 2g(JZ,W)d\sigma(X,Y) \\ &- 2g(GX,Y)d\sigma(HZ,W) + 2g(JX,Y)d\sigma(Z,W) \\ &+ 2g(GZ,W)d\sigma(HX,Y) \end{aligned} \tag{3.24}$$

dir [44].

3.2.3. $\mathcal{GH}-$ kesitsel eğrilik

Holomorfik kesitsel eğriliğin kompleks manifoldlar için oynadığı rolü, reel kontakt manifoldlar için $\phi-$kesitsel eğrilik kavramı oynar. $\phi-$kesitsel eğriliğin kompleks kontakt geometrideki karşılığı Korkmaz [44] tarafından verilmiştir.

3.30. Tanım

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold, $X, Y \in \mathcal{H}$ ve $a^2 + b^2 = 1$ olsun. X birim vektör alanı ve $Y = aGX + bHX$ tarafından gerilen kesite bir $\mathcal{GH}-$kesit denir. Bir $\mathcal{GH}-$kesitin kesitsel eğriliği

$$\mathcal{GH}_{a,b}(X, Y) = K(X, aGX + bHX)$$

dir ve M nin $\mathcal{GH}-$kesitsel eğriliği olarak adlandırılır [44].

$\mathcal{GH}-$kesitsel eğriliğin a ve b nin seçiminden bağımsız olduğu kabul edilir. Bu durumda $\mathcal{GH}(X, Y)$ notasyonu kullanılır.
Sasakian manifoldlarda $\phi-$kesitsel eğrilik, manifoldun kesitsel eğriliğini tam olarak tanımlamaktadır. Ancak kompleks kontakt geometride $\mathcal{GH}-$kesitsel eğrilik, holomorfik kesitsel eğriliği tam olarak vermemektedir. Bu durum için Korkmaz aşağıdaki bağıntıyı ispatlamıştır.

3.31. Lemma

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold olmak üzere

$$K(X, JX) = \mathcal{GH}(X) + 3 \tag{3.25}$$

dir [44].

3.32. Tanım

Sabit $\mathcal{GH}-$ kesitsel eğrilikli bir normal kompleks kontakt metrik manifolda, kompleks kontakt uzay formu denir [44].

Korkmaz [44] $\mathcal{GH}$-kesitsel eğriliği sabit olan manifoldlar için aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

3.33 Teorem

M kompleks boyutu 5 veya 5 den büyük olan bir normal kompleks kontakt metrik manifold olsun. Eğer $\mathcal{GH}-$kesitsel eğrilik M nin herbir noktasındaki $\mathcal{GH}-$kesitin seçiminden bağımsız ise M nin Riemann eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z = \frac{c+3}{4}&[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + g(Z,JY)JX + g(X,JZ)JY \\
&+ 2g(X,JY)JZ] + \frac{c-1}{4}[(u(X)u(Z) + v(X)v(Z))Y \\
&- (u(Y)u(Z) + v(Y)v(Z))X + 4u \wedge v(X,Y)JZ + 2u \wedge v(X,Z)JY \\
&+ 2u \wedge v(Z,Y)JX + 2g(X,GY)GZ + g(X,GZ)GY + g(Z,GY)GX \\
&+ 2g(X,HY)HZ + g(X,HZ)HY + g(Z,HY)HX \\
&+ [u(Y)g(X,Z) - u(X)g(Y,Z) + v(X)g(Z,JY) + v(Y)g(X,JZ) \\
&+ 2v(Z)g(X,JY)]U + [v(Y)g(X,Z) - v(X)g(Y,Z) - u(X)g(Z,JY) \\
&- u(Y)g(X,JZ) - 2u(Z)g(X,JY)]V] \\
&- \frac{4}{3}(c + 1 + d\sigma(U,V))[(v(X)u \wedge v(Z,Y) + v(Y)u \wedge v(X,Z) \\
&+ 2v(Z)u \wedge v(X,Y))U - (u(X)u \wedge v(Z,Y) + u(Y)u \wedge v(X,Z) \\
&+ 2u(Z)u \wedge v(X,Y))V]
\end{aligned}$$

fromundadır [44]. Burada c, M nin sabit $\mathcal{GH}$-kesitsel eğriliğidir.

Yukarıdaki teoremden doğrudan hesaplama yapılarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç

Bir kompleks kontakt uzay formunun Ricci eğriliği

$$\begin{aligned}
\rho(X,Y) = &((n+2)c + 3n + 2)g(X,Y) + (-(n+2)c + n - 2 \\
&- 2d\sigma(U,V))(u(X)u(Y) + v(X)v(Y))
\end{aligned} \tag{3.26}$$

ve skaler eğrilik

$$\tau = 4n(n+2)c + 4n(3n+4) - 4d\sigma(U,V)$$

dir [44].

3.3. Kompleks Kontakt Manifold Örnekleri

Kompleks kontakt manifold örneklerinin az olması konuya olan ilginin reel kontakt geometriye olan ilgiye nazaran daha az olmasına sebep olmuştur [10].

Bu altbölümde kompleks kontakt metrik manifold örneklerine yer verilecektir.

Örnek

Kompleks $(2n+1)$-boyutlu kompleks projektif uzayı $\mathbb{CP}^{2n+1}$ üzerindeki kompleks kontakt yapı Kobayashi [38] tarafından verilmiştir.
Kompleks $(2n+2)$-boyutlu kompleks vektör uzayı $\mathbb{C}^{2n+2}$ deki lokal koordinatlar $z^1, z^2, ..., z^{2n+1}, z^{2n+2}$ olsun. $\mathbb{C}^{2n+2} - \{0\}$, $\mathbb{CP}^{2n+1}$ üzerindeki bir L doğru demeti ile ilişkili asli lif demetidir.

$$\omega = z^1 dz^2 - z^2 dz^1 + ... + z^{2n+1} dz^{2n+2} - z^{2n+2} dz^{2n+1}$$

alınsın. $\mathbb{CP}^{2n+1}$ in bir açık örtüsü $\{U_i\}$ ve $\{U_i\}$ üzerinde $\mathbb{C}^{2n+2} - \{0\}$ in asli lif demetinin holomorfik çapraz kesiti (cross-section) s_i olsun. $\omega_i = s_i^*(\omega)$ olmak üzere $\{\omega_i\}$ kompleks 1-formlar ailesi $\mathbb{CP}^{2n+1}$ üzerinde bir kompleks kontakt yapı tanımlar. Diğer yandan $\mathbb{C}^{2n+2}$, $(4n+4)$-boyutlu reel vektör uzayı olarak düşünülürse $(4n+3)$-boyutlu $\mathbb{RP}^{4n+3}$ reel projektif uzayı elde edilir. Bu durumda $\mathbb{RP}^{4n+3}$, $\mathbb{CP}^{2n+1}$ üzerinde yapı grubu $U(1)$ olan bir asli lif demetidir. Ayrıca her tek boyutlu reel projektif uzay bir reel kontakt manifold örneği olduğundan $\mathbb{RP}^{4n+3}$ üzerindeki standart kontakt yapıdan $\mathbb{CP}^{2n+1}$ üzerindeki kompleks kontakt yapı elde edilir [38]. Kompleks projektif uzay bir IK-normal kompleks kontakt metrik manifold örneğidir [32].

Örnek

M^{2n+1} ve N^{n+1} iki kompleks manifold olsun. $\tilde{T}(N)$ dual kotanjant demet (kompleks kotanjant vektörlerin uzayı) olmak üzere $\tilde{T}(N)$ üzerinde ω holomorfik 1-formu

$$\omega(u) = v(\delta\pi(u)), \quad u \in T_v(\tilde{T}(N))$$

biçiminde tanımlı olsun. Burada π , $\tilde{T}(N)$ den N ye projeksiyon dönüşümü ve $\delta\pi : T(\tilde{T}(N)) \to T(N)$ biçiminde tanımlı olup π nin diferensiyelini göstermektedir. N nin lokal koordinatları $z^0, z^1, ..., z^n$ olmak üzere $\tilde{T}(N)$ nin N den indirgenen koordinatları

$z^0, z^1, ..., z^n, \psi_0, \psi_1, ..., \psi_n$ olsun. Bu durumda

$$\omega = \psi_0 dz^0 + \psi_1 dz^1 + ... + \psi_n dz^n$$

biçiminde olur. $\tilde{T}(N)$ nin lifi $(n+1)-$boyutlu kompleks vektör uzayı oluşturur. N üzerinde, lifi n-boyutlu kompleks projektif uzay olan (kompleks projektif kotanjant uzay) bir lif demeti doğal olarak elde edilir. Bu demetin kompleks boyutu M nin boyutu olan $2n+1$ dir. $T(N)$ nin lifi $(2n+2)-$boyutlu reel vektör uzayı olarak düşünülürse N üzerinde bir kotanjant küre demeti P olarak alınır (yani, P nin lifi $\tilde{T}(N)$ nin lifi içinde bir küredir). $\tilde{T}(N) - N$, M üzerindeki bir L doğru demeti ile ilişkili asli lif demetidir. M üzerindeki kompleks kontakt yapının tanımı ilk örneğe benzer şekildedir. P kotanjant küre demeti üzerindeki klasik reel kontakt yapı M kompleks projektif kotanjant demet üzerindeki kompleks kontakt yapıdan türetilir [44].

Örnek

Reel kontakt geometrinin önemli örneklerinden biri olan reel Heisenberg grup

$$H_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}^3$$

biçiminde tanımlanır. Reel Heisenberg grup üzerindeki kontakt form $\eta = \frac{1}{2}(dz - ydx)$ Darboux formu olup Sasakian metrik $g = \frac{1}{4}(dx^2 + dy^2) + \eta \otimes \eta$ dir [2].
Reel Heisenberg grubun kompleks analoğu olan kompleks Heisenberg grup $H_{\mathbb{C}}$, $GL(3, \mathbb{C})$ nin bir alt grubu olup

$$H_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : b_{12}, b_{13}, b_{23} \in \mathbb{C} \right\} \simeq \mathbb{C}^3$$

biçiminde tanımlanır. Kompleks Heisenberg grup üzerinde kompleks kontakt yapı Baikoussis ve ark. [2] tarafından verilmiştir. Bir $B \in H_{\mathbb{C}}$ noktasının z_1, z_2, z_3 koordinatları $z_1(B) = b_{23}, z_2(B) = b_{12}, z_3(B) = b_{13}$ şeklinde tanımlansın. $H_{\mathbb{C}}$ üzerindeki kontakt form $\theta = \frac{1}{2}(dz_3 - z_2 dz_1)$ dir. $\theta = u - iv$, $v = u \circ J$ ve $4\frac{\partial}{\partial z_3} = U + iV$ alınır ise $u(X) = g(U, X)$ ve $v(X) = g(V, X)$ dir. Ayrıca G ve H

tensörleri reel koordinatlarla

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_2 & -x_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_2 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & y_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde verilir. O zaman $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ reel koordinatları için Hermityan metrik

$$g = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + x_2^2 + y_2^2 & 0 & 0 & 0 & -x_2 & -y_2 \\ 0 & 1 + x_2^2 + y_2^2 & 0 & 0 & y_2 & -x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -x_2 & y_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -y_2 & -x_2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Böylece $(H_{\mathbb{C}}, G, H, u, v, U, V, g)$ bir kompleks kontakt metrik manifold olur [2, 63]. Kompleks Heisenberg grup üzerinde $\sigma = 0$ ve

$$\begin{aligned} (\nabla_X G)Y &= g(X,Y)U - u(Y)X - g(X,JY)V - v(Y)JX + 2v(X)GHY, \\ \nabla_X U &= -GX, \\ (\nabla_X H)Y &= g(X,Y)V - v(Y)X + g(X,JY)U + u(Y)JX - 2u(X)GHY, \\ \nabla_X U &= -HX \end{aligned}$$

dir [2]. Korkmaz [44] bu eşitliklerden yararlanarak kompleks Heisenberg grubun normal kompleks kontakt metrik manifold örneği olduğunu göstermiştir.

Örnek

Kompleks kontakt manifoldların önemli bir örneği kuaterniyonik-Kähler manifoldları üzerinde twistor uzaylarıdır. Twistor uzayları teorik fiziğin önemli çalışma alanlarındandır. Ayrıca bu uzaylar üzerindeki kontakt yapılar da teorik fizikte çalışılan konular arasındadır. Twistor uzayları üzerinde kompleks kontakt yapıyı Foreman [21] tanımlamıştır.

3.34. Tanım

$n-$boyutlu diferensiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde tanımlı $(1,1)-$tipinde tensörleri içeren 3-boyutlu bir vektör demeti V olsun. M nin herbir koordinat komşuluğunda V nin

$$A^2 = B^2 = C^2 = -I$$
$$BC = -CB = A, \quad CA = -AC = B, \quad AB = -BA = C$$

koşullarını sağlayan bir lokal tabanı $\{A, B, C\}$ olsun. $\{A, B, C\}$ ye V nin lokal kanonik bazı, V ye M üzerinde hemen hemen kuaterniyonik yapı ve (M, V) ikilisine de hemen hemen kuaterniyonik manifold denir [34].

3.35. Tanım

(M, V) bir hemen hemen kuaterniyonik manifold olsun. p, q ve r lokal $1-$formları için

$$\nabla_X A = r(X)B - q(X)C$$
$$\nabla_X B = -r(X)A + p(X)C$$
$$\nabla_X C = q(X)A - p(X)B$$

koşulları sağlanıyor ise (M, V) ye kuaterniyonik-Kähler manifoldu denir [68].

Blair [10] $\mathbb{CP}^{2n+1}$ üzerindeki kontakt yapının varlığını kuaterniyonik Kähler yapısından yararlanarak göstermiştir. Kuaterniyonik- Kähler manifoldu üzerindeki metrik Einstein metriğidir [10]. Bu durumda bu manifoldlar skalar eğriliği sıfır , pozitif ve negatif olmak üzere 3 sınıfa ayrılabilir. Bu üç durum için M üzerindeki twistor uzayı Z lokal olarak

$$Z = \{xA + yB + zC : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset V$$

biçiminde tanımlanır. Eğer g nin skalar eğriliği sıfırdan farklı ise Z , $V \to M$ için bir koneksiyondan türetilen doğal bir kompleks yapı ve kompleks kontakt yapı taşır [19]. Eğer skalar eğrilik sıfır ise bu inşa ile bir kompleks kontakt manifold elde edilemez. Eğer V aşikar ise o zaman global bir $\{A, B, C\}$ paralel kompleks yapılar kümesi elde edilir. Bu şekildeki hemen hemen kuaterniyonik manifoldlara hiperkähler manifoldu adı verilir. Foreman [19] kuaterniyonik manifoldların bu sınıfı ile katı (strict) normal kompleks kontakt metrik manifoldlar (kompleks Sasakian) arasında ilişki kurmuştur.

Örnek

Bootby-Wang liflemesi reel kontakt geometrinin önemli bir sınıfıdır. Bu sınıf kompleks kontakt manifoldlar için Foreman [23] tarafından çalışılmıştır. Foreman bir kompleks manifold üzerinde global kompleks kontakt form ile kompleks Bootby-Wang liflemesini elde etmiştir. Blair ve Turgut Vanlı [8] enerjinin bir kritik noktası olarak Iwasawa manifoldunun Boothby-Wang liflemesi üzerine çalışmışlardır.

Örnek

Bir kompleks manifold üzerindeki bir sol invaryant holomorfik kompleks kontakt bir 1-form ile birlikte $(2n+1)-$boyutlu bir G kompleks lie grubu bir kompleks kontakt lie grubudur [10]. Kompleks kontakt Lie grupları Foreman [25] tarafından incelenmiştir.

Örnek

Kompleks kontakt manifoldların bir başka örneği Korkmaz [42] tarafından verilen $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{CP}^n(16)$ dır. Korkmaz dikey demeti eğrilik tarafından sıfırlanan $(R(X,Y)\mathcal{V} = 0)$ kompleks kontakt manifoldları çalıştığı makalesinde bu koşulu sağlayan bir kompleks kontakt M manifoldunun lokal olarak $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{CP}^n(16)$ tarafından verilebileceğini göstermiş ve $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{CP}^n(16)$ üzerindeki kompleks kontakt metrik yapıyı elde etmiştir. Ayrıca Korkmaz [42] bir kompleks kontakt metrik manifoldun $h_U = h_V$ olması halinde $R(X,Y)\mathcal{V} = 0$ koşulu ile birlikte $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{CP}^n(16)$ ya lokal izometrik olduğunu kanıtlamıştır.

Örnek

$z^k = x^k + iy^k,\ k = 1,2,3$ olmak üzere

$$M = \{(z^1, z^2, z^3)|z_i \in \mathbb{C}, cosz^3cos\bar{z}^3 + sinz^3sin\bar{z}^3 \neq 0\}$$

üzerindeki bir form $\theta = \frac{1}{2}(cosz^3dz^1 + sinz^3dz^2)$ biçiminde verilsin. Bu durumda

$$d\theta = \frac{1}{2}(-sinz^3dz^3 \wedge dz^1 + cosz^3dz^3 \wedge dz^2)$$

ve böylece M üzerinde

$$\theta \wedge d\theta = \frac{1}{4}(-dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3) \neq 0$$

olur. O halde θ, $\mathbb{C}^3$ üzerinde bir kompleks kontakt formdur [36]. Bu form ile birlikte

$\mathbb{C}^3$ bir kompleks kontakt manifold olur. Ayrıca kontakt yapının U ve V dikey vektör alanları

$$U = 2(cosz^3\frac{\partial}{\partial z^1} + sinz^3\frac{\partial}{\partial z^2} + cos\bar{z}^3\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1} + sin\bar{z}^3\frac{\partial}{\partial \bar{z}^2})$$

ve

$$U = -2i(cosz^3\frac{\partial}{\partial z^1} + sinz^3\frac{\partial}{\partial z^2} - cos\bar{z}^3\frac{\partial}{\partial \bar{z}^1} - sin\bar{z}^3\frac{\partial}{\partial \bar{z}^2})$$

dir. Diğer yandan (M, θ) üzerindeki kompleks kontakt metrik yapı

$$g = \frac{1}{8\mu}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve $(1,1)-$tipinde tensör alanı

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sinz^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -cosz^3 \\ 0 & 0 & 0 & -sin\bar{z}^3 & cos\bar{z}^3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & sin\bar{z}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -cos\bar{z}^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sinz^3 & cosz^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Burada $\mu = cosz^3cos\bar{z}^3 + sinz^3sin\bar{z}^3$ dir. Böylece (M, θ, g) bir kompleks kontakt metrik manifold örneği olur.

3.36. Tanım

J_1, J_2, J_3 bir M kompleks manifoldu üzerinde kompleks yapılar ve g bir Hermityan metriği olmak üzere eğer

$$J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = J_1J_2J_3 = -I$$

ise (M, J_1, J_2, J_3, g) ye bir hiperkähler manifold denir.

Imada [30] doktora tez çalışmasında hiperkähler manifoldlar üzerinde kompleks kontakt manifoldların yapısı ile ilgili olarak aşağıdaki teoremi vermiştir.

3.37. Teorem

$(\tilde{M}, J_1, J_2, J_3, \tilde{g})$ bir hiperkähler manifold olsun. $\mathbb{C}^*$ ın $\tilde{M}$ üzerinde J_1 ile holomorfik olarak etki ettiği kabul edilsin. O zaman $\tilde{M}/\mathbb{C}^*$ bölüm uzayı doğal olarak bir düzgün manifold yapısı taşır ve $\pi : \tilde{M} \to \tilde{M}/\mathbb{C}^*$ bölüm dönüşümü kanonik olarak $\tilde{M}/\mathbb{C}^*$

üzerinde bir IK-normal kompleks kontakt metrik yapısına indirgenir.

Bu teoremden $\mathbb{CP}^{2n+1}$ bir IK-normal kompleks kontakt manifoldtur [30]. Imada bu çalışmasında kompleks kontakt metrik manifoldlar için yeni örnekler vermiştir.

Örnek

$\mathbb{C}^4 - \{0\}$, $p = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ konum vektörü üzerinde hareket eden

$J_1 p = (iz_1, iz_2, iz_3, iz_4)$
$J_2 p = (\bar{z}_3, \bar{z}_4, -\bar{z}_1, -\bar{z}_2)$
$J_3 p = (i\bar{z}_3, i\bar{z}_4, -i\bar{z}_1, -i\bar{z}_2)$

yapısı ile bir hiperkähler manifold olsun. $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ olmak üzere z nin normu $\sqrt{\sum_{k=1}^{4} z_k \bar{z}_k}$ biçiminde verilsin. $\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}^4 - \{0\}$ üzerinde J_1 ile değişimli serbest etki olan ve $\lambda(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda z_3, \lambda z_4)$ şeklide tanımlı bir etki olsun. Bu durumda $\mathbb{C}^*$, z noktasında

$$\nu = \frac{1}{2\|z\|} \sum_{j=1}^{4} (z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}),$$

$$J_1 \nu = \frac{i}{2\|z\|} \sum_{j=1}^{4} (z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j})$$

vektörlerinin gerdiği bir tanjant uzaya sahiptir. Böylece u ve v 1-formları

$$u = \frac{1}{2\|z\|} \sum_{j=1}^{2} (-z_{2j-1} dz_{2j} - \bar{z}_{2j} d\bar{z}_{2j} + z_{2j} dz_{2j-1} + \bar{z}_{2j} d\bar{z}_{2j-1}),$$

$$v = -\frac{i}{2\|z\|} \sum_{j=1}^{2} (z_{2j-1} dz_{2j} - \bar{z}_{2j-1} d\bar{z}_{2j} - z_{2j} dz_{2j-1} + \bar{z}_{2j} d\bar{z}_{2j-1})$$

biçiminmde elde edilir [30]. Diğer yandan

$$A = i\begin{bmatrix} z_2\bar{z}_1 & -\|z\|^2 + z_2\bar{z}_2 & z_2\bar{z}_3 & z_2\bar{z}_4 \\ \|z\|^2 - z_1\bar{z}_1 & -z_1\bar{z}_2 & -z_1\bar{z}_3 & -z_1\bar{z}_4 \\ z_4\bar{z}_1 & z_4\bar{z}_2 & z_4\bar{z}_3 & -\|z\|^2 + z_4\bar{z}_4 \\ -z_3\bar{z}_1 & -z_3\bar{z}_2 & \|z\|^2 - z_3\bar{z}_3 & -z_3\bar{z}_4 \end{bmatrix}$$

olmak üzere G ve H yapı tensörleri

$$G = \frac{1}{\|z\|^2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & A \\ \bar{A} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}, \quad H = \frac{1}{\|z\|^2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & iA \\ -i\bar{A} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Son olarak U ve V dikey vektör alanları

$$U = \frac{1}{2\|z\|}\sum_{j=1}^{2}(-\bar{z}_{2j-1}dz_{2j} - z_{2j-1}d\bar{z}_{2j} + \bar{z}_{2j}dz_{2j-1} + z_{2j}d\bar{z}_{2j-1}),$$
$$V = \frac{i}{2\|z\|}\sum_{j=1}^{2}(\bar{z}_{2j-1}dz_{2j} - z_{2j-1}d\bar{z}_{2j} - \bar{z}_{2j}dz_{2j-1} + z_{2j}d\bar{z}_{2j-1})$$

şeklinde olmak üzere Fubini-Study metriği ile birlikte (G, H, J, U, V, u, v, g) yapısı bir IK-normal kompleks kontakt metrik manifold olur.

Imada aynı çalışmada yukarıdaki örnekten yararlanarak yeni bir IK-normal kompleks kontakt manifold örneği vermiştir.

Örnek

$\mathbb{C}^*$, $\mathbb{C}^4 - \{z_1.z_2.z_3.z_4 = 0\}$ üzerinde $\lambda.(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \lambda^{-1}z_3, \lambda^{-4}z_4)$ ile tanımlı bir etkidir. Bu etki J_1 ile değişimli serbest bir etkidir. Bu etkinin yörünge (orbit) uzayı $\mathbb{C}^*$, z noktasında

$$\nu = \frac{1}{2\|z\|}(z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + \bar{z}_1\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2} + \bar{z}_2\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} - z_3\frac{\partial}{\partial z_3} - \bar{z}_3\frac{\partial}{\partial \bar{z}_3} - z_4\frac{\partial}{\partial z_4} - \bar{z}_4\frac{\partial}{\partial \bar{z}_4}),$$
$$J_1\nu = \frac{i}{2\|z\|}(z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - \bar{z}_1\frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} + z_2\frac{\partial}{\partial z_2} - \bar{z}_2\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} - z_3\frac{\partial}{\partial z_3} + \bar{z}_3\frac{\partial}{\partial \bar{z}_3} - z_4\frac{\partial}{\partial z_4} + \bar{z}_4\frac{\partial}{\partial \bar{z}_4})$$

vektörlerinin gerdiği tanjant uzaylara sahiptir. Bu durumda $M = (\mathbb{C}^4\backslash\{z_1z_2z_3 = 0\}/\mathbb{C}^*$ bir kompleks manifoldtur. M üzerinde F biholomorfik dönüşümü

$$F([z_1,z_2,z_3,z_4]) = (\frac{z_2}{z_1}, z_1z_3, z_1z_4)$$

olarak tanımlansın. Bu dönüşümden M manifoldu $\mathbb{C}^3\backslash\{z_1z_2z_3 = 0\}$ uzayına izometriktir. Standart iç çarpımdan direkt hesaplama ile u ve v 1-formları

$$\begin{aligned}
u &= \frac{-i}{2\|z\|}(-z_1dz_4+\bar{z}_1d\bar{z}_4+z_2dz_3-\bar{z}_2d\bar{z}_3-z_3dz_2+\bar{z}_3d\bar{z}_2-z_4dz_1+\bar{z}_4d\bar{z}_1),\\
v &= \frac{1}{2\|z\|}(-z_1dz_4-\bar{z}_1d\bar{z}_4+z_2dz_3+\bar{z}_2d\bar{z}_3+z_3dz_2+\bar{z}_3d\bar{z}_2-z_4dz_1-\bar{z}_4d\bar{z}_1)
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir [30]. Diğer yandan

$$A = i\begin{bmatrix} z_1\bar{z}_4 & -z_1\bar{z}_3 & -z_1\bar{z}_2 & -\|z\|^2+z_1\bar{z}_1\\ z_2\bar{z}_4 & -z_2\bar{z}_3 & \|z\|^2-z_2\bar{z}_2 & z_2\bar{z}_1\\ -z_3\bar{z}_4 & -\|z\|^2+z_3\bar{z}_3 & z_3\bar{z}_2 & -z_3\bar{z}_1\\ \|z\|^2-z_4\bar{z}_4 & z_4\bar{z}_3 & z_4\bar{z}_2 & -z_4\bar{z}_1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere G ve H yapı tensörleri

$$G = \frac{1}{\|z\|^2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & A\\ \bar{A} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}, \quad H = \frac{1}{\|z\|^2}\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & iA\\ -i\bar{A} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$$

biçimindedir. Son olarak U ve V dikey vektör alanları

$$\begin{aligned}
U &= \frac{i}{2\|z\|}(z_1\frac{\partial}{\partial\bar{z}_4}-\bar{z}_1\frac{\partial}{\partial z_4}-z_2\frac{\partial}{\partial\bar{z}_3}+\bar{z}_2\frac{\partial}{\partial z_3}-z_3\frac{\partial}{\partial\bar{z}_2}+\bar{z}_3\frac{\partial}{\partial z_2}+z_4\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1}-\bar{z}_4\frac{\partial}{\partial z_1})\\
V &= \frac{-1}{2\|z\|}(z_1\frac{\partial}{\partial\bar{z}_4}+\bar{z}_1\frac{\partial}{\partial z_4}-z_2\frac{\partial}{\partial\bar{z}_3}-\bar{z}_2\frac{\partial}{\partial z_3}-z_3\frac{\partial}{\partial\bar{z}_2}-\bar{z}_3\frac{\partial}{\partial z_2}+z_4\frac{\partial}{\partial\bar{z}_1}+\bar{z}_4\frac{\partial}{\partial z_1})
\end{aligned}$$

şeklinde olmak üzere $\mathbb{C}^4$ deki standart iç çarpımdan indirgenen metrik ile birlikte (G,H,U,V,u,v,g) kompleks hemen hemen kontakt metrik yapısı bir IK-normal kompleks kontakt metrik yapı olur.

3.38. Tanım

$(4n+3)-$boyutlu bir reel manifold M olsun. M üzerinde $(\varphi_i,\xi_i,\eta_i), i=1,2,3$ Sasakian yapılar olmak üzere

$$\varphi_k = \varphi_i\varphi_j - \eta_j \otimes \xi_i = -\varphi_j\varphi_i + \eta_i \otimes \xi_j$$
$$\eta_i \circ \varphi_j = \eta_k, \quad \eta_i(\xi_j) = \delta_{ij}$$

koşullarını sağlayan $\{\varphi_i, \xi_i, \eta_i\}, 1 \leq i \leq 3$ üçlüsüne bir 3-Sasakian yapı denir. M ye üzerindeki bu yapı ile birlikte bir 3-Sasakian manifold denir. Burada $\{i,j,k\}$, $\{1,2,3\}$ ün dairesel permitasyonudur.

Imada [30] S^{4n+3} ve S^{4m+3} üzerindeki 3-Sasaki yapıların $S^{4m+3} \times S^{4n+3}$ üzerinde bir kompleks hemen hemen kontakt yapıya indirgendiğini göstermiştir ve böylece yeni bir kompleks kontakt metrik manifold örneği elde etmiştir.

Örnek

$S^{4m+3}\times S^{4n+3}$ üzerindeki iki 3- Sasakian yapı $\{\varphi_i^m, \xi_i^m, \eta_i^m\}_{\{i=1,2,3\}}$ ve $\{\varphi_i^n, \xi_i^n, \eta_i^n\}_{\{i=1,2,3\}}$ olsun. Her $X, Y \in \Gamma(T(S^{4m+3} \times S^{4n+3}))$ için

$$J_{m,n}(X,Y) = (\varphi_1^m X - \eta_1^n(Y)\xi_1^m, \varphi_1^n Y + \eta_1^m(X)\xi_1^m)$$

$S^{4m+3}\times S^{4n+3}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır. Ayrıca $J_{m,n}$ integrallenebilir olduğundan $(S^{4m+3}\times S^{4n+3}, J_{m,n})$ bir kompleks manifoldtur. g_m ve g_n sırasıyla S^{4m+3} ve S^{4n+3} üzerindeki 3-Sasaki yapı ile ilişkili metrikler olmak üzere $S^{4m+3}\times S^{4n+3}$ üzerindeki ilişkili metrik

$$g_{m,n}((X,Y),(X',Y')) = g_m(X,X') + \eta_1^m(X)\eta_1^m(X') + g_n(Y,Y') + \eta_1^n(Y)\eta_1^n(Y')$$

biçiminde tanımlanır. $g_{m,n}$ bir Hermityan metriktir.
$X \in \Gamma(TS^{4m+3})$ ve $Y \in \Gamma(TS^{4n+3})$ olsun. Bu durumda dikey vektör alanları uzayının bazı sırasıyla $\{{\xi_1}^m, {\xi_2}^m, {\xi_3}^m\}$ ve $\{{\xi_1}^n, {\xi_2}^n, {\xi_3}^n\}$ olmak üzere

$$X = X_0 + {\eta_1}^m(X){\xi_1}^m + {\eta_2}^m(X){\xi_2}^m + {\eta_3}^m(X){\xi_3}^m$$
$$Y = Y_0 + {\eta_1}^n(Y){\xi_1}^n + {\eta_2}^n(Y){\xi_2}^n + {\eta_3}^n(Y){\xi_3}^n$$

biçiminde yazılabilir. Burada $X_0 \in sp\{{\xi_1}^m, {\xi_2}^m, {\xi_3}^m\}^{\perp}$ ve $Y_0 \in sp\{{\xi_1}^n, {\xi_2}^n, {\xi_3}^n\}^{\perp}$ dikey bileşenlerdir. Bu parçalama ile birlikte $(1,1)-$tipindeki $G_{m,n}$ ve $H_{m,n}$ tensörleri

$$
\begin{aligned}
G_{m,n}(X,Y) = (&\varphi_2^m X_0 - \frac{{\eta_3}^m(X) - {\eta_3}^n(Y)}{2}{\xi_1}^m + {\eta_1}^n(Y){\xi_2}^m + {\eta_1}^m(X){\xi_3}^m, \\
&\varphi_2^n Y_0 - \frac{{\eta_2}^m(X) - {\eta_2}^n(Y)}{2}{\xi_1}^n - {\eta_1}^m(Y){\xi_2}^n - {\eta_1}^m(X){\xi_3}^n) \\
H_{m,n}(X,Y) = J&_{m,n}G_{m,n}(X,Y)
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlanır. G ve H kompleks hemen hemen kontakt metrik yapı şartlarını sağlar [30]. Ayrıca kompleks hemen hemen kontakt metrik yapı şartlarını sağlayacak biçimde $u_{m,n}, v_{m,n}$ 1-formları ve $U_{m,n}, V_{m,n}$ vektör alanları

$$
\begin{cases}
u_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}({\eta_3}^m + {\eta_3}^n),\ v_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}({\eta_2}^m + {\eta_2}^n), \\
U_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}({\xi_3}^m + {\xi_3}^n), V_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}({\xi_2}^m + {\xi_2}^n)
\end{cases}
$$

biçiminde tanımlanırsa $(S^{4m+3} \times S^{4n+3}, G_{m,n}, H_{m,n}, J_{m,n}, U_{m,n}, V_{m,n}, u_{m,n}, v_{m,n}, g_{m,n})$ bir kompleks hemen hemen kontakt metrik manifold örneğidir. Bu yapı Kähler olmadığından IK-normal değildir [30].

4. NORMAL KOMPLEKS KONTAKT METRİK MANİFOLDLARIN EĞRİLİK ÖZELLİKLERİ

Bir manifoldun Öklid uzayından uzaklaşma ölçüsü olarak tarif edilen eğrilik kavramı Riemann geometrisinin en temel unsurlarından biridir. Manifold üzerinde kurulan yapılar manifoldun eğrilik özelliklerinde farklılıklara neden olmaktadır. Riemann eğriliği, Ricci eğriliği ve skalar eğrilik eşitlikleri bu yapılara göre hesaplanmaktadır.

Normal kompleks kontakt metrik manifoldların eğrilikleri Korkmaz [44] tarafından verilmiştir. Bu bölümde genel vektör alanları için bu eşitlikler yeniden ifade edilerek önemli sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar kullanılarak bir manifoldun normal olması için gerek yeter koşul $\bar{G}$ ve $\bar{H}$ nın kovaryant türevleri cinsinden verilmiştir. Ayrıca Ricci eğriliği için yeni eşitlikler elde edilmiş ve tüm bu sonuçlar kompleks Heisenberg gruba uygulanmıştır.

4.1. Teorem

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold olsun. X, Y, Z ve W yatay vektör alanları için

$$g(R(GX,GY)GZ,GW) = g(R(HX,HY)HZ,HW) = g(R(X,Y)Z,W) \tag{4.1}$$

dir.

İspat

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold ve $X, Y, Z, W \in \mathcal{H}$ olsun. Eş. 3.23 ve Eş. 3.10' dan

$$\begin{aligned} g(R(GX,GY)GZ,GW) - g(R(X,Y)Z,W) = & -2g(JZ,W)g((\nabla_U J)GX,Y) \\ & - 2g(HX,Y)g((\nabla_U J)Z,W) \\ & + 2g(JX,Y)g((\nabla_U J)GZ,W) \\ & + 2g(HZ,W)g((\nabla_U J)X,Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan $(\nabla_U J)GX = \nabla_U JGX - J(\nabla_U GX)$ ve $JG = -H$ olduğundan Önerme 3.13' den $(\nabla_U J)GX = 0$ bulunur. Ayrıca

$$(\nabla_U J)Z = (\nabla_U J)GZ = 0$$

olur ve böylece

$$g(R(GX,GY)GZ,GW) - g(R(X,Y)Z,W) = 0$$

bulunur. Benzer şekilde $g(R(HX,HY)HZ,HW) = g(R(X,Y)Z,W)$ olduğu gösterilir.

Normal kompleks kontakt metrik manifoldların eğrilikleri korkmaz tarafından incelenmiş, yatay ve dikey vektör alanları için eğrlik şartları Teorem 3.2.2 de verilmiştir. Eş. 3.5 den doğrudan hesaplama yapılarak aşağıdaki teorem elde edilir. Bu teorem ile Korkmaz tarafından verilen bu eşitlikler genel vektör alanları için verilmiştir.

4.2. Teorem

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
R(X,U)U &= X_0 - 2d\sigma(U,V)v(X)V \ , \quad R(X,V)V = X_0 - 2d\sigma(U,V)u(X)U,\\
R(X,U)V &= \sigma(U)GX_0 + (\nabla_U H)\, X_0 - JX_0 + 2d\sigma(U,V)v(X)U,\\
R(X,V)U &= -\sigma(V)HX_0 + (\nabla_V G)\, X_0 + JX_0 + 2d\sigma(U,V)u(X)V,\\
R(U,V)X &= JX_0 + 2d\sigma(U,V)(u(x)V - v(X)U),\\
R(V,U)X &= -JX_0 + 2d\sigma(U,V)(u(x)V - v(X)U),\\
R(X,Y)U &= -u(X)Y_0 + v(X)\left(\sigma(V)HY_0 - (\nabla_V G)\, Y_0 - JY_0\right)\\
&\quad + u(Y)X_0 + v(Y)\left(\sigma\,(V)\, HX_0 + (\nabla_V G)\, X_0 + JX_0\right)\\
&\quad + \left[2\left(g(X_0, JY_0) + d\sigma\,(X_0, Y_0)\right) \ +2d\sigma\,(U,V)\, u \wedge v(X,Y)\right] V,\\
R(X,Y)V &= -u(X)\left(\sigma(U)GY_0 + (\nabla_U H)\, Y_0 - JY_0\right) - v(X)Y_0\\
&\quad u(Y)\left(\sigma\,(U)\, GX_0 + (\nabla_U H)\, X_0 - JX_0\right) + v(Y)X_0\\
&\quad + \left[-2\left(g(X_0, JY_0) + d\sigma\,(X_0, Y_0)\right) \ -2d\sigma\,(U,V)\, u \wedge v(X,Y)\right] U,\\
R(X,U)Y &= u\,(Y)\, X_0 - v(X)JY_0 + v(Y)\left(\sigma(U)GX_0 + (\nabla_U H)\, X_0\right.\\
&\quad \left. -JX_0\right) + \left[-g(X_0, Y_0) - 2d\sigma\,(U,V)\, v(X)v(Y)\right] U\\
&\quad + \left[d\sigma\,(Y_0, X_0) - g(JX_0, Y_0) \ - \ 2d\sigma\,(U,V)\, v(X)u(Y))\right] V,\\
R(X,V)Y &= u(X)JY_0 + v(Y)X_0 + u(Y)\left(-\sigma(U)HX_0 + (\nabla_V G)\, X_0\right.\\
&\quad \left. +JX_0\right) + \left[-g(X_0, Y_0) + 2d\sigma\,(U,V)\, u(X)u(Y)\right] V\\
&\quad \left[-d\sigma\,(Y_0, X_0) + g(JX_0, Y_0) \ - \ 2d\sigma\,(U,V)\, u(X)v(Y)\right] U
\end{aligned}$$

dir.

4.3. Teorem

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ olsun. O zaman

$$d\sigma(X,Y) = 2g(JX_0, Y_0) + g((\nabla_U J)GX_0, Y_0) + d\sigma(U,V)u \wedge v(X,Y) \tag{4.2}$$

dir.

İspat

$X, Y \in \Gamma(TM)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
2d\sigma(X,Y) &= X\sigma(Y) - Y\sigma(X) - \sigma([X,Y]) \\
&= Xg(\nabla_Y U, V) - Yg(\nabla_X U, V) - g\left(\nabla_{[X,Y]}U, V\right) \\
&= g(\nabla_X \nabla_Y U, V) + g(\nabla_Y U, \nabla_X V) - g(\nabla_Y \nabla_X U, V) \\
&- g(\nabla_X U, \nabla_Y V) - g\left(\nabla_{[X,Y]}U, V\right) \\
&= g(R(X,Y)U, V) + g(\nabla_Y U, \nabla_X V) - g(\nabla_X U, \nabla_Y V)
\end{aligned}$$

dir. Eş. 3.4 ve Eş. 3.9'dan

$$2d\sigma(X,Y) = g(R(X,Y)U, V) + 2g(JX,Y) + 2u \wedge v(X,Y)$$

bulunur. Ayrıca Eş. 3.5 ve $R(X,Y)U$ nun genel ifadesinden

$$g(R(X,Y)U,V) = 2(g(X_0, JY_0) + d\sigma(X_0, Y_0)) + 2d\sigma(U,V)u \wedge v(X,Y)$$

dir. Diğer yandan $g(JX,Y) = g(JX_0, Y_0) - u \wedge v(X,Y)$ olduğu göz önüne alınırsa Eş. 4.2 elde edilir.

Normallik için gerek ve yeter koşul Korkmaz tarafından G ve H yapı tensörlerinin kovaryant türevlerini içeren metrik cinsinden verilmiştir. Reel kontakt manifoldlarda bu teorem yapı tensörlerinin sadece kovaryant türevleri cinsinden Teorem 2.6 ile ifade edilmiştir. Ayrıca Ishihara ve Konishi [32] tarafından IK-normallik için gerek ve yeter koşulu G ve H yapı tensörlerinin kovaryant türevleri cinsinden Teorem 3.18 ile verilmiştir. Aşağıdaki teoremle benzer durum kompleks kontakt metrik manifoldlar için ispatlanmıştır.

4.4. Teorem

Bir M kompleks hemen hemen kontakt metrik manifoldunun normal olması için gerek ve yeter koşul her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}(\nabla_X G)Y &= \sigma(X)HY - 2v(X)JY - u(Y)X - v(Y)JX \\ &+ v(X)\left(2JY_0 - (\nabla_U J)GY_0\right) + g(X,Y)U + g(JX,Y)V \\ &- d\sigma(U,V)v(X)\left(u(Y)V - v(Y)U\right)\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_X H)Y &= -\sigma(X)GY + 2u(X)JY + u(Y)JX - v(Y)X \\ &+ u(X)\left(-2JY_0 - (\nabla_U J)GY_0\right) - g(JX,Y)U + g(X,Y)V \\ &+ d\sigma(U,V)u(X)\left(u(Y)V - v(Y)U\right)\end{aligned} \tag{4.4}$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold olsun. O zaman Eş. 3.11 ve Eş. 3.12 geçerlidir. Bu eşitlikler

$$\begin{aligned}g((\nabla_X G)Y, Z) &= g(\sigma(X)HY - 2v(X)JY - u(Y)X - v(Y)JX \\ &+ g(X,Y)U + g(JX,Y)V, Z) + v(X)d\sigma(GZ, GY)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}g((\nabla_X H)Y, Z) &= g(-\sigma(X)GY + 2u(X)JY + u(Y)JX - v(Y)X \\ &- g(JX,Y)U + g(X,Y)V, Z) - u(X)d\sigma(HZ, HY)\end{aligned}$$

şeklinde düzenlenebilir.
Diğer yandan $u \wedge v(Y,Z) = g(u(Y)V - v(Y)U, Z)$ eşitliği ve Eş. 3.6'dan

$$\begin{aligned}g((\nabla_X G)Y, Z) &= g(\sigma(X)HY - 2v(X)JY - u(Y)X - v(Y)JX \\ &+ g(X,Y)U + g(X,JY)V, Z) \\ & v(X)\left[d\sigma(Y,Z) - 2d\sigma(U,V)g(u(Y)V - v(Y)U, Z)\right]\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}g((\nabla_X H)Y, Z) &= g(-\sigma(X)GY + 2u(X)JY + u(Y)JX - v(Y)X \\ &- g(JX,Y)U + g(X,Y)V, Z) \\ &+ u(X)\left[d\sigma(Y,Z) - 2d\sigma(U,V)g(u(Y)V - v(Y)U, Z)\right]\end{aligned}$$

olur. Eş. 4.2'den

$$d\sigma(Y,Z) = g(2JY_0 + (\nabla_U J)\,GY_0 + d\sigma(U,V)\,(u(Y)V - v(Y)\,U), Z)$$

dir. Son eşitlikler kullanılarak Eş. 4.3 ve Eş. 4.4 elde edilir.
Tersine Eş. 4.3 ve Eş. 4.4 sağlansın. Keyfi bir X vektör alanı için Eş. 3.7 ve Eş. 3.8'den

$$S(X,U) = (\nabla_{GX}G)U - G(\nabla_X G)U + G(\nabla_U G)X - \sigma(U)\,GHX$$
$$T(X,V) = (\nabla_{HX}H)V - H(\nabla_X H)V + H(\nabla_V H)X - \sigma(V)\,GHX$$

dir. Ayrıca Eş. 4.3 ve Eş. 4.4'den $S(X,U) = T(X,V) = 0$ elde edilir.
Diğer yandan X ve Y iki yatay vektör alanı olmak üzere

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= (\nabla_{GX}G)Y - (\nabla_{GY}G)X - G(\nabla_X G)Y + G(\nabla_Y G)X \\ &+ 2g(X,GY)U - 2g(X,HY)V + \sigma(GY)HX \\ &- \sigma(GX)HY + \sigma(X)GHY - \sigma(Y)GHX \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= (\nabla_{HX}H)Y - (\nabla_{HY}H)X - H(\nabla_X H)Y + H(\nabla_Y H)X \\ &- 2g(X,GY)U + 2g(X,HY)V + \sigma(HX)GY \\ &- \sigma(HY)GX + \sigma(X)GHY - \sigma(Y)GHX. \end{aligned}$$

dir. Eş. 4.3 ve Eş. 4.4'ün uygulanması ile

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= \sigma(GX)HY - \sigma(GY)HX - 2g(X,GY)U + 2g(X,HY)V - \sigma(X)GHY \\ &+ \sigma(Y)GHX + 2g(X,GY)U - 2g(X,HY)V + \sigma(GY)HX - \sigma(GX)HY \\ &+ \sigma(X)GHY - \sigma(Y)GHX \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} T(X,Y) &= -\sigma(HX)GY + \sigma(HY)GX + \sigma(X)HGY - \sigma(Y)HGX + 2g(X,GY)U \\ &- 2g(X,HY)V - 2g(X,GY)U + 2g(X,HY)V + \sigma(HX)GY - \sigma(HY)GX \\ &+ \sigma(X)GHY - \sigma(Y)GHX \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde M normaldir ve ispat tamamlanır.

Eş. 3.13, Eş. 4.2, Eş. 4.3 ve Eş. 4.4 kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold ve M üzerinde keyfi iki vektör alanı X ve Y olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}(\nabla_X J)Y &= -2u\,(X)\,HY + 2v(X)GY + u(X)\,(2HY_0 + (\nabla_U J)\,Y_0)\\ &\quad + v(X)\,(-2GY_0 + (\nabla_U J)\,JY_0)\end{aligned}$$

dir.

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold ve M nin bir lokal ortonormal bazı

$$\{X_i, GX_i, HX_i, JX_i, U, V : 1 \leq i \leq n\}$$

olmak üzere Ricci tensörü

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n}[g(R(X_i,X)Y,X_i) + g(R(GX_i,X)Y,GX_i) \qquad (4.5)\\ &\quad + g(R(HX_i,X)Y,HX_i) + g(R(JX_i,X)Y,JX_i)]\\ &\quad + g(R(U,X)Y,U) + g(R(V,X)Y,V)\end{aligned}$$

formundadır.

4.5. Teorem

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold ve M üzerinde iki yatay vektör alanı X,Y olmak üzere

$$\rho\,(GX,GY) = \rho\,(HX,HY) = \rho\,(X,Y) \qquad (4.6)$$

$$\rho\,(GX,Y) = -\rho\,(X,GY)\,, \quad \rho\,(HX,Y) = -\rho\,(X,HY) \qquad (4.7)$$

dir.

İspat

M nin bir lokal ortonormal bazı $\{X_i, GX_i, HX_i, JX_i, U, V : 1 \leq i \leq n\}$ olmak üzere Eş. 4.5'den

$$\begin{aligned}\rho(GX, GY) = &\sum_{i=1}^{n}[g(R(X_{i,}GX)GY, X_i) \\ &+ g(R(GX_i, GX)GY, GX_i) + g(R(HX_i, GX)GY, HX_i) \\ &+ g(R(JX_i, GX)GY, JX_i)] + g(R(U, GX)GY, U) \\ &+ g(R(V, GX)GY, V)\end{aligned} \tag{4.8}$$

şaklinde yazılabilir. Eş. 4.1'den

$$g(R(X_{i,}GX)GY, X_i) = g(R(GX_{i,}GGX)GGY, GX_i) = (g(R(GX_{i,}X)Y, GX_i)$$
$$g(R(GX_i, GX)GY, GX_i) = g(R(X_i, X)Y, X_i)$$
$$g(R(HX_i, GX)GY, HX_i) = g(R(GJX_i, GX)GY, GJX_i) = g(R(JX_i, X)Y, JX_i)$$
$$g(R(JX_i, GX)GY, JX_i) = g(R(-GHX_i, GX)GY, -GHX_i) = g(R(HX_i, X)Y, HX_i)$$

bulunur.
Ayrıca Eş. 3.15'den

$$\begin{aligned}g(R(U, GX)GY, U) &= g(R(GY, U)U, GX) \\ &= g(GY, GX) \\ &= g(R(Y, U)U, X) \\ &= g(R(U, X)Y, U)\\ g(R(V, GX)GY, V) &= g(X, Y) = g(R(V, X)Y, V)\end{aligned}$$

bulunur. Tüm bu eşitlikler kullanılırsa $\rho(GX, GY) = \rho(X, Y)$ elde edilir. Benzer şekilde Eş. 4.5'den

$$\begin{aligned}\rho(HX, HY) = &\sum_{i=1}^{n}[g(R(X_{i,}HX)HY, X_i) \\ &+ g(R(GX_i, HX)HY, GX_i) + g(R(HX_i, HX)HY, HX_i) \\ &+ g(R(JX_i, HX)HY, JX_i)] + g(R(U, HX)HY, U) \\ &+ g(R(V, HX)HY, V)\end{aligned}$$

olur ve eşitlik Eş. 4.1'den

$$g(R(X_i, HX)HY, X_i) = g(R(HX_{i,}HHX)HHY, HX_i) = (g(R(HX_{i,}X)Y, HX_i)$$

$$g(R(HX_i, HX)HY, HX_i) = g(R(X_i, X)Y, X_i)$$
$$g(R(GX_i, HX)HY, GX_i) = g(R(-HJX_i, HX)HY, -HJX_i) = g(R(JX_i, X)Y, JX_i)$$
$$g(R(JX_i, HX)HY, JX_i) = g(R(HGX_i, HX)HY, HGX_i) = g(R(GX_i, X)Y, GX_i)$$

bulunur. Diğer yandan Eş. 3.15'den

$$g(R(U, HX)HY, U) = g(R(U, X)Y, U) \quad \text{ve} \quad g(R(V, HX)HY, V) = g(R(V, X)Y, V)$$

eşitliklerine ulaşılır. Böylece bulunan son eşitliklerin kullanılmasıyla $\rho(HX, HY) = \rho(X, Y)$ elde edilir. Ayrıca Eş. 4.5'den

$$\begin{aligned}
\rho(GX, Y) = \sum_{i=1}^{n} & [g(R(X_i, GX)Y, X_i) + g(R(GX_i, GX)Y, GX_i) \\
& + g(R(HX_i, GX)Y, HX_i) + g(R(JX_i, GX)Y, JX_i)] \\
& + g(R(U, GX)Y, U) + g(R(V, GX)Y, V) \\
\rho(HX, Y) = \sum_{i=1}^{n} & [g(R(X_i, HX)Y, X_i) + g(R(GX_i, HX)Y, GX_i) \\
& + g(R(HX_i, HX)Y, HX_i) + g(R(JX_i, HX)Y, JX_i)] \\
& + g(R(U, HX)Y, U) + g(R(V, HX)Y, V)
\end{aligned}$$

dir. Eş. 3.15 ve Eş.4.1 'den $\rho(GX, Y) = -\rho(X, GY)$ ve $\rho(HX, Y) = -\rho(X, HY)$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

4.6. Teorem

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold olsun. X yatay vektör alanı ve $U, V = -JU$ dikey vektör alanları için

$$\rho(X, U) = \rho(X, V) = 0 \tag{4.9}$$
$$\rho(U, U) = \rho(V, V) = 4n - 2d\sigma(U, V), \quad \rho(U, V) = 0 \tag{4.10}$$

dir.

İspat

M üzerindeki herhangi bir X yatay vektör alanı ve $U, V = -JU$ dikey vektör alanları için eşitlik Eş. 4.5'den

$$\rho(X,U)=\sum_{i=1}^{n}[g(R(X_{i,}X)U,X_i)+g(R(GX_i,X)U,GX_i) \tag{4.11}$$
$$+\,g(R(HX_i,X)U,HX_i)$$
$$+\,g(R(U,X)U,U)+g(R(V,X)U,V)$$
$$\rho(X,V)=\sum_{i=1}^{n}[g(R(X_{i,}X)V,X_i)+g(R(GX_i,X)V,GX_i) \tag{4.12}$$
$$+\,g(R(HX_i,X)V,HX_i)+g(R(JX_i,X)V,JX_i)]$$
$$+\,g(R(U,X)V,U)+g(R(V,X)V,V)$$

yazılabilir.
X_i ve X, M üzerinde yatay vektör alanları olduğundan Eş. 3.16 ve Eş. 3.17'den

$$\begin{aligned} g(R(X_{i,}X)U,X_i) &= g(2(g(X_{i,},JX)+d\sigma(X_{i,},X))V,X_{i,}) \\ &= 2(g(X_{i,},JX)+d\sigma(X_{i,},X))g(V,X_i) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(R(X_{i,}X)V,X_i) &= g(-2(g(X_{i,},JX)+d\sigma(X_{i,},X))U,X_{i,}) \\ &= -2(g(X_{i,},JX)+d\sigma(X_{i,},X)g(U,X_i) \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $g(U,X_i)=g(V,X_i)=0$ olduğunudan

$$g(R(X_{i,}X)U,X_i)=0 \ \text{ ve } g(R(X_{i,}X)V,X_i)=0$$

olur. Benzer şekilde $g(U,X_i)=g(U,GX_i)=g(U,HX_i)=g(U,JX_i)=g(V,X_i)=g(V,GX_i)=g(V,HX_i)=g(V,JX_i)=0$ olduğundan

$$g(R(GX_i,X)U,GX_i)=g(R(HX_i,X)U,HX_i)=g(R(JX_i,X)U,JX_i)=0$$

ve

$$g(R(GX_i,X)V,GX_i)=g(R(HX_i,X)V,HX_i)=g(R(JX_i,X)V,JX_i)=0$$

dir. Diğer taraftan Eş. 3.15, Eş. 3.18 ve Eş. 3.19'dan

$$g(R(U,X)U,U)=-g(R(X,U)U,U)=-g(X,U)=0,$$

$$g(R(V,X)V,V) = -g(R(X,V)V,V) = -g(X,V) = 0,$$
$$g(R(V,X)U,V). = -g(R(X,V)U,V) = -g(-\sigma(V)HX + (\nabla_V G)X + JX, V) = 0,$$
$$g(R(U,X)V,U) = -g(R(X,U)V,U) = -g(\sigma(U)GX + (\nabla_U H)X - JX, U) = 0$$

olarak bulunur. Bu eşitliklerin Eş. 4.11 ve Eş. 4.12'de kullanılmasıyla Eş. 4.9 elde edilir. Ayrıca

$$\rho(U,U) = \sum_{i=1}^{n}[g(R(X_i,U)U,X_i) + g(R(GX_i,U)U,GX_i) + g(R(HX_i,U)U,HX_i)$$
$$+ g(R(JX_i,U)U,JX_i)] + g(R(U,U)U,U) + g(R(V,U)U,V)$$

$$\rho(V,V) = \sum_{i=1}^{n}[g(R(X_i,V)V,X_i) + g(R(GX_i,V)V,GX_i) + g(R(HX_i,V)V,HX_i)$$
$$+ g(R(JX_i,V)V,JX_i)] + g(R(U,V)V,U) + g(R(V,V)V,V)$$

olup Eş. 3.14, Eş. 3.15 ve doğrudan hesaplama ile Eş. 4.10 elde edilir.

Sonuç

Bir M normal kompleks kontakt metrik manifoldu üzerindeki keyfi bir X vektör alanı için

$$\rho(X,U) = (4n - 2d\sigma(U,V))\,u(X), \tag{4.13}$$
$$\rho(X,V) = (4n - 2d\sigma(U,V))\,v(X)$$

dir.

İspat

M üzerindeki herhangi bir X vektör alanı için Eş. 3.5' den

$$\rho(X,U) = \rho(X_0 + u(X)U + v(X)V, U) = \rho(X_0,U) + u(X)\rho(U,U) + v(X)\rho(V,U),$$
$$\rho(X,V) = \rho(X_0 + u(X)U + v(X)V, V) = \rho(X_0,V) + u(X)\rho(U,V) + v(X)\rho(V,V)$$

dir. Böylece Eş. 4.9 ve Eş. 4.10'dan ispat tamamlanır.

Diğer yandan Eş. 3.5, Eş. 4.10 ve Eş. 4.13'den aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold ve X, Y keyfi iki vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\rho(X,Y) = \rho(X_0, Y_0) + (4n - 2d\sigma(U,V))\,(u(X)u(Y) + v(X)v(Y)) \tag{4.14}$$

dir.

Sonuç

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold ve X, Y keyfi iki vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\rho(X,Y) = \rho(GX, GY) + (4n - 2d\sigma(U,V))\,(u(X)u(Y) + v(X)v(Y))\,,$$
$$\rho(X,Y) = \rho(HX, HY) + (4n - 2d\sigma(U,V))\,(u(X)u(Y) + v(X)v(Y))$$

dir.

İspat

$GX = GX_0$, $GY = GY_0$ ve $HX = HX_0, HY = HY_0$ olduğundan

$\rho(GX, GY) = \rho(GX_0, GY_0)$ ve $\rho(HX, HY) = \rho(HX_0, HY_0)$

dir. Bu durumda Eş. 4.14'den

$$\rho(X,Y) = \rho(GX, GY) + (4n - 2d\sigma(U,V))\,(u(X)u(Y) + v(X)v(Y))\,,$$
$$\rho(X,Y) = \rho(HX, HY) + (4n - 2d\sigma(U,V))\,(u(X)u(Y) + v(X)v(Y))$$

olarak elde edilir.

4.7. Teorem

Bir M normal kompleks kontakt metrik manifoldu üzerinde Q Ricci operatörü için

$$QG = GQ, \quad QH = HQ \tag{4.15}$$

dir.

İspat

M üzerindeki X ve Y vektör alanları için

$$\rho\left(GX,Y\right)=g(GX,QY)=-g(X,GQY)$$

ve

$$\rho\left(X,GY\right)=g(X,QGY)$$

olur. Ayrıca Eş. 4.7'den $g(X,GQY)=g(X,QGY)$ ve böylece $QG=GQ$ olarak elde edilir. Benzer şekilde $QH=HQ$ olduğu gösterilir.

Sonuç

Bir M normal kompleks kontakt metrik manifoldu üzerinde Q Ricci operatörü için $QJ=JQ$ dir.

Kompleks Heisenberg grup üzerindeki kompleks kontakt metrik yapı Baikoussis, Blair ve F. Gouli-Andreou [2] tarafından verilmiştir ve normalliğini Korkmaz [44] ispatlamıştır. Blair ve Turgut Vanlı [63] yaptıkları çalışmada bu grup üzerindeki enerji fonksiyonlarını incelemişlerdir. Bu çalışmada yazarlar kompleks Heisenberg grup için baz vektörleri ve bunların kovaryant türevlerini vermişlerdir. Bunlardan yola çıkılarak ve yukarıda elde edilen sonuçlar kullanılarak kompleks Heisenberg grup üzerinde yapılan hesaplamalar aşağıda verilmiştir.

Örnek

Kompleks Heisenberg grubun bir $\{e_1,e_1^*,e_2,e_2^*,e_3,e_3^*\}$ ortonormal baz sistemi

$$e_1=2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_3}+y_2\frac{\partial}{\partial y_3}\right),$$
$$e_1^*=2\left(\frac{\partial}{\partial y_1}-y_2\frac{\partial}{\partial x_3}+x_2\frac{\partial}{\partial y_3}\right),$$
$$e_2=2\frac{\partial}{\partial x_2}\quad,\ e_2^*=2\frac{\partial}{\partial y_2}\ ,$$
$$e_3=U=2\frac{\partial}{\partial x_3}\quad,\ e_3^*=-V=2\frac{\partial}{\partial y_3}$$

biçiminde verilsin.

Buradan

$$
\begin{aligned}
&Ge_1 = -e_2,\ Ge_1^* = e_2^*,\ Ge_2 = e_1,\ Ge_2^* = -e_1^* \\
&He_1 = -e_2^*,\ He_1^* = -e_2,\ He_2 = e_1^*,\ He_2^* = e_1 \\
&Je_1 = -e_1^*,\ Je_1^* = e_1,\ Je_2 = -e_2^*,\ Je_2^* = e_2
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir [63]. Ayrıca vektörlerinin Lie braketleri

$$
[e_1, e_2] = -2e_3,\ [e_1, e_2^*] = -2e_3^*,\ [e_1^*, e_2] = -2e_3^*,\ [e_1^*, e_2^*] = 2e_3 \tag{4.16}
$$

şeklinde olup diğerleri sıfırdır [63]. Diğer yandan

$$
2g(\nabla_{e_i} e_j, e_k) = (g\,[e_i, e_j]\,, e_k) + g\,([e_k, e_i]\,, e_j) - g\,([e_j, e_k]\,, e_i)
$$

olup buradan $j = 1, 2, 3$ için

$$
\nabla_{e_j} e_j = \nabla_{e_j^*} e_j = \nabla_{e_j} e_{j^*} = \nabla_{e_j^*} e_j^* = 0 \tag{4.17}
$$

dir. Eş. 4.16 ve Eş. 4.17'den

$$
\begin{aligned}
\nabla_{e_2} e_3 &= \nabla_{e_2^*} e_3^* = -e_1 & \nabla_{e_2^*} e_3 &= -\nabla_{e_2} e_3^* = e_1^* \\
\nabla_{e_1} e_3 &= \nabla_{e_1^*} e_3^* = e_2 & \nabla_{e_1} e_3^* &= -\nabla_{e_1^*} e_3 = e_2^* \\
-\nabla_{e_1} e_2 &= \nabla_{e_1^*} e_2^* = e_3 & \nabla_{e_1} e_2^* &= \nabla_{e_1^*} e_2 = -e_3^*
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece Riemann eğrilik tensörünün tanım ve özelliklerinden

$$
\begin{array}{ccc}
R(e_1, e_1^*)e_1 = 0 & R(e_1, e_2)e_1 = 3e_2 & R(e_1, e_2^*)e_1 = 3e_2 \\
R(e_1, e_1^*)e_1^* = 0 & R(e_1, e_2)e_1^* = -e_2^* & R(e_1, e_2^*)e_1^* = 0 \\
R(e_1, e_1^*)e_2 = -2e_2^* & R(e_1, e_2)e_2 = -3e_1 & R(e_1, e_2^*)e_2 = -e_2^* \\
R(e_1, e_1^*)e_2^* = 2e_2 & R(e_1, e_2)e_2^* = e_1^* & R(e_1, e_2^*)e_2^* = -3e_1 \\
R(e_1^*, e_2)e_1 = e_2^* & R(e_1^*, e_2^*)e_1 = -e_2 & R(e_2, e_2^*)e_1 = -2e_1^* \\
R(e_1^*, e_2)e_1^* = 3e_2 & R(e_1^*, e_2^*)e_1^* = 3e_2^* & R(e_2, e_2^*)e_1^* = 2e_1 \\
R(e_1^*, e_2)e_2 = -3e_1^* & R(e_1^*, e_2^*)e_2 = e_1 & R(e_2, e_2^*)e_2 = 0 \\
R(e_1^*, e_2)e_2^* = 3e_1 & R(e_1^*, e_2^*)e_2^* = -3e_1^* & R(e_2, e_2^*)e_2^* = 0
\end{array}
$$

hesaplamaları yapılır. Ayrıca Eş. 3.9'dan ve kompleks Hesinberg grup üzerinde $\sigma = 0$ olduğundan $R(e_3, e_3^*)e_3^* = 0$ bulunur. Diğer yandan Eş. 3.15 , Eş. 3.18 ve Eş. 3.19' dan

$$
R(e_1, e_3)e_3^* = -e_1^* \qquad R(e_1, e_3^*)e_3 = e_1^*
$$

$$\begin{aligned} R(e_1^*, e_3^*)e_3 &= 3e_1 & R(e_1^*, e_3^*)e_3 &= -e_1 \\ R(e_2, e_3)e_3^* &= -e_2^* & R(e_2, e_3^*)e_3 &= e_2^* \\ R(e_2^*, e_3^*)e_3 &= e_2 & R(e_2^*, e_3^*)e_3 &= -3e_2 \end{aligned}$$

ve Eş. 3.16 ve Eş. 3.17'den

$$R(e_1, e_1^*)e_3 = R(e_1, e_2)e_3 = R(e_1, e_2^*)e_3 = 0$$
$$R(e_1^*, e_2)e_3 = R(e_1^*, e_2^*)e_3 = R(e_2, e_2^*)e_3 = 0$$
$$R(e_1, e_1^*)e_3^* = R(e_1, e_2)e_3^* = R(e_1, e_2^*)e_3^* = 0$$
$$R(e_1^*, e_2)e_3^* = R(e_1^*, e_2^*)e_3^* = R(e_2, e_2^*)e_3^* = 0$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikler kullanılarak Eş. 4.9 ve Eş. 4.10'den

$$\rho(e_i, e_i) = \rho(e_i^*, e_i^*) = 4,\ i = 1,2 \text{ ve } \rho(e_3, e_3) = \rho(e_3^*, e_3^*)$$
$$\rho(e_i, e_j) = \rho\left(e_i^*, e_j^*\right) = 0,\ j = 1,2,3$$

dir. Doğrudan hesaplama yapılarak kompleks Hesinberg grubun skaler eğriliği $\tau = -8$ olur. Diğer taraftan kesitsel eğrilikler

$$k(e_1, e_3) = k(e_1^*, e_3) = k(e_2, e_3) = k(e_2^*, e_3) = 1,$$
$$k(e_1, e_3^*) = k(e_1^*, e_3^*) = k(e_2, e_3^*) = k(e_2^*, e_3^*) = 1$$

olur ve $\sigma = 0$ olduğundan

$$k(e_3, e_3^*) = 0$$

bulunur. Benzer şekilde

$$k(e_1, e_1^*) = k(e_1, e_2^*) = k(e_1^*, e_2) = k(e_2, e_2^*) = 0$$
$$k(e_1, e_2) = 3 \text{ ve } k(e_1^*, e_2^*) = 1$$

olur. Bu sonuçlarla birlikte manifoldun holomorfik kesitsel eğriliği $K(X, JX) = 0$ dır.

5. NORMAL KOMPLEKS KONTAKT METRİK MANİFOLDLAR ÜZERİNDE EĞRİLİK TENSÖRLERİ

Bu bölümde normal kompleks kontakt metrik manifoldlar için projektif, konformal, konsörkılır, quasi-konformal ve konharmonik eğrilik tensörleri incelenmiş ve elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

Kompleks boyutu $(2n+1)$ olan bir normal kompleks kontakt metrik manifold M olsun. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için M üzerinde projektif, konformal, konsörkılır, quasi-konformal ve konharmonik eğrilik tensörleri sırasıyla aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z - \frac{1}{4n+1}\left[\rho(Y,Z)X - \rho(X,Z)Y\right], \\
\mathcal{W}(X,Y)Z &= R(X,Y,Z) + \frac{\tau}{(4n+1)4n}\left(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right) \\
&\quad + \frac{1}{4n}\left(g(X,Z)QY - g(Y,Z)QX + \rho(X,Z)Y - \rho(Y,Z)X\right), \\
\mathcal{Z}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z - \frac{\tau}{(4n+2)(4n+1)}\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right], \\
\widetilde{\mathcal{C}}(X,Y)Z &= pR(X,Y)Z + q\left[\rho(Y,Z)X - \rho(X,Z)Y + g(Y,Z)QX\right. \\
&\quad \left. - g(X,Z)QY\right] - \frac{\tau}{4n+2}\left[\frac{p}{4n+1} + 2q\right]\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right], \\
\mathcal{K}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z - \frac{1}{4n}\left[\rho(Y,Z)X - \rho(X,Z)Y + g(Y,Z)QX - g(X,Z)QY\right].
\end{aligned}
$$

5.1. Lemma

Bir M normal kompleks kontakt metrik manifoldu üzerinde X, Y yatay vektör alanları ve U, V dikey vektör alanları için projektif, konformal, konsörkılır, quasi-konformal ve konharmonik eğrilik tensörleri aşağıdaki eşitleri sağlar:

$$\mathcal{P}(U,V,V,U) = \mathcal{P}(V,U,U,V) = -\frac{4n(1+2d\sigma(U,V)}{4n+1}, \tag{5.1}$$

$$\mathcal{P}(X,U)U = \mathcal{P}(X,V)V = -[\frac{1+2d\sigma(U,V)}{4n+1}]X, \tag{5.2}$$

$$\mathcal{P}(X,Y)U = R(X,Y)U, \quad \mathcal{P}(X,Y)V = R(X,Y)V, \tag{5.3}$$

$$\mathcal{P}(U,X)Y = R(U,X)Y - \frac{1}{4n+1}\rho(X,Y)U, \tag{5.4}$$

$$\mathcal{P}(V,X)Y = R(V,X)Y - \frac{1}{4n+1}\rho(X,Y)V, \tag{5.5}$$

$$\mathcal{W}(V,U,U,V) = C(U,V,V,U) = \frac{-\tau + (4n+1)8nd\sigma(U,V)}{4n(4n+1)}, \tag{5.6}$$

$$\mathcal{W}(X,U)U=\left(\frac{-\tau-(4n+1)(8n-2d\sigma(U,V))}{4n(4n+1)}\right)X+\frac{1}{4n}QX, \tag{5.7}$$

$$\mathcal{W}(X,Y)U=R(X,Y)U,\quad \mathcal{W}(X,Y)V=R(X,Y)V, \tag{5.8}$$

$$\mathcal{W}(X,U)V=R(X,U)V,\quad \mathcal{W}(X,V)U=R(X,V)U, \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(U,X)Y&=\left[\left(1-\frac{\tau}{4n(4n+1)}\right)g(X,Y)-\frac{1}{4n}\rho(X,Y)\right]U \\ &-\frac{1}{4n}g(X,Y)QU+(g(JX,Y)-d\sigma(Y,X))V,\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{W}(V,X)Y&=\left[\left(1-\frac{\tau}{4n(4n+1)}\right)g(X,Y)-\frac{1}{4n}\rho(X,Y)\right]g(X,Y)V \\ &-\frac{1}{4n}g(X,Y)QV-(g(JX,Y)-d\sigma(Y,X))U,\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\mathcal{Z}(V,U,U,V)=Z(U,V,V,U)=-\left(2d\sigma(U,V)+\frac{\tau}{(4n+2)(4n+1)}\right), \tag{5.12}$$

$$\mathcal{Z}(X,U)U=\left(1-\frac{\tau}{(4n+2)(4n+1)}\right)X, \tag{5.13}$$

$$\mathcal{Z}(X,Y)U=R(X,Y)U,\quad \mathcal{Z}(X,Y)U=R(X,Y)V, \tag{5.14}$$

$$\mathcal{Z}(X,U)V=R(X,U)V,\quad \mathcal{Z}(X,V)U=R(X,V)U, \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(U,X)Y&=\left(1-\frac{\tau}{(4n+2)(4n+1)}\right)g(X,W)U \\ &+(g(JX,W)-d\sigma(W,X))V,\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}(V,X)Y&=\left(1-\frac{\tau}{(4n+2)(4n+1)}\right)g(X,W)V \\ &-(g(JX,W)-d\sigma(W,X))U,\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\mathcal{K}(U,V,V,U)=\mathcal{K}(V,U,U,V)=\frac{-1}{4n}(4n+(8n+2)d\sigma(U,V) \tag{5.18}$$

$$\mathcal{K}(X,U)U=\mathcal{K}(X,V)V=\frac{1}{2n}d\sigma(U,V)-\frac{1}{4n}QX, \tag{5.19}$$

$$\mathcal{K}(X,Y)U=R(X,Y)U,\quad \mathcal{K}(X,Y)V=R(X,Y), \tag{5.20}$$

$$\mathcal{K}(U,X)Y=R(X,U)Y-\frac{1}{4n}(\rho(X,Y)U+g(X,Y)QU), \tag{5.21}$$

$$\mathcal{K}(V,X)Y=R(V,X)Y-\frac{1}{4n}(\rho(X,Y)-V+g(X,Y)QV), \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{C}}(U,V,V,U)&=\tilde{\mathcal{C}}(V,U,U,V)=-2(p+q)d\sigma(U,V)+8nq \\ &-\frac{\tau}{4n+2}\left[\frac{p}{4n+1}+2q\right],\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{C}}(X,U)U&=\tilde{\mathcal{C}}(X,V)V=(p-\frac{\tau}{4n+2}[\frac{p}{4n+1}+2q] \\ &+(4n-2d\sigma(U,V))q)X+qQX,\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\tilde{\mathcal{C}}(X,Y)U=pR(X,Y)U,\quad \tilde{\mathcal{C}}(X,Y)V=pR(X,Y)V, \tag{5.25}$$

$$\tilde{C}(U,X)Y = pR(U,X)Y + q(-\rho(X,Y)U - g(X,Y)QU) \quad (5.26)$$
$$+ \frac{\tau}{4n+2}[\frac{p}{4n+1} + 2q]g(X,Y)U,$$
$$\tilde{C}(V,X)Y = pR(V,X)Y + q(-\rho(X,YV) - g(X,Y)QV) \quad (5.27)$$
$$+ \frac{\tau}{4n+2}[\frac{p}{4n+1} + 2q]g(X,Y)V.$$

Normal kompleks kontakt manifoldlar üzerinde bu tensörleri inceleyen ilk çalışma Blair ve Molina [11] tarafından yapılmıştır. Yazarlar 2011 yılında yaptıkları çalışmada aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır.

5.2. Teorem

Konformal düz olan normal kompleks kontakt metrik manifold yoktur.

Bu teorem bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun konformal dönüşümler altında $\mathbb{C}^n$ ye dönüşemeyeceğini göstermektedir. 2016 yılında Yıldırım kompleks $(\kappa,\mu)-$ uzayları için konformal, konharmonik ve Bochner eğrilik tensörlerini incelemiş ve belirli koşullara uygun kompleks $(\kappa,\mu)-$uzayların konformal ve konharmonik düz olamayacağını göstermiştir.

5.3. Teorem

Bir normal kompleks kontakt metrik manifold projektif düz, quasi-konformal düz, konsörkılır düz ve konharmonik düz olamaz.

İspat

M nin bir quasi-konformal düz normal kompleks kontakt metrik manifold olduğu kabul edilsin. Bu durumda her $X,Y,Z,T \in \Gamma(TM)$ keyfi vektör alanları için$\tilde{C}$ nin tanımından

$$g(R(X,Y)Z,T) = -\frac{q}{p}\{\rho(Y,Z)g(X,T) - \rho(X,Z)g(Y,T) + g(Y,Z)\rho(X,T) \quad (5.28)$$
$$- g(Z,X)\rho(Y,T)\} + \frac{\tau}{4n+2}\{\frac{1}{4n+1} + 2\frac{q}{p}\}\{g(Y,Z)g(X,T)$$
$$- g(X,Z)g(Y,T)\}$$

dir.

$X=T=U$ ve $Y=Z=V$ seçilirse Eş. 3.14 den

$$
\begin{aligned}
g(R(U,V)V,U) = -\frac{q}{p}\{&\rho(V,V)g(U,U)-\rho(U,V)g(V,U)+g(V,V)\rho(U,U) \\
&-g(V,U)\rho(V,U)\}+\frac{\tau}{4n+2}\{\frac{1}{4n+1}+2\frac{q}{p}\}\{g(V,V)g(U,U) \\
&-g(U,V)g(V,U)\}
\end{aligned}
$$

olur ve buradan

$$
d\sigma\left(U,V\right)=\frac{p}{p+2q}\left(4nq-\frac{2q\left(4n+1\right)+p}{2\left(4n+1\right)\left(4n+2\right)}\tau\right) \tag{5.29}
$$

olarak bulunur. Diğer yandan $Y=Z=U$ ve X, T birim ve ortogonal yatay vektör alanları için

$$
g(R(X,U)U,X)=-\frac{q}{p}\left\{\rho(U,U)+\rho\left(X,X\right)\right\}
$$

olur. Eş. 3.15, Eş. 4.10 ve Eş. 5.29'dan

$$
\rho(X,X)=-(4n+\frac{p}{q})+\frac{8npq}{p+2q}-\frac{p}{4n+2}[\frac{2qp(4n+1)+p^2}{(4n+1)(p+2q)}-\frac{1}{q(4n+1)}+\frac{2}{p}]\tau
$$

olarak bulunur ve X den bağımsız olur.
Ayrıca birim ortogonal X,Y yatay vektör alanları için Eş. 5.28'den kesitsel eğrilik

$$
\begin{aligned}
k(X,Y)=g(R(X,Y)Y,X) &= -\frac{q}{p}\{\rho\left(Y,Y\right)g(X,X)-g\left(X,Y\right)g(Y,X) \\
&+g\left(Y,Y\right)\rho(X,X)-g\left(X,Y\right)\rho(Y,Y)\} \\
&+\frac{\tau}{4n+2}\left\{\frac{1}{4n}+2\frac{q}{p}\right\}\{g(Y,Y)g(X,X)-g(X,Y)g(Y,X)\} \\
&= -\frac{q}{p}\{\rho\left(Y,Y\right)+\rho(X,X)\}+\frac{\tau}{4n+2}\left\{\frac{1}{4n}+2\frac{q}{p}\right\} \\
&= -2\frac{q}{p}\rho\left(X,X\right)+\frac{\tau}{4n+2}\left\{\frac{1}{4n}+2\frac{q}{p}\right\}
\end{aligned}
$$

dir. Benzer şekilde Eş. 5.28'dan M nin holomorfik kesitsel eğriliği,

$$
\begin{aligned}
k(X,JX) &= g(R(X,JX)JX,X) \\
&= -\frac{q}{p}\{\rho\left(JX,JX\right)g(X,X)-g\left(X,JX\right)g(JX,X) \\
&+g\left(JX,JX\right)\rho(X,X)-g\left(X,JX\right)\rho(JX,JX)\}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\tau}{4n+2}\left\{\frac{1}{4n}+2\frac{q}{p}\right\}\{g(JX,JX)g(X,X)-g(X,JX)g(JX,X)\}$$

olur ve buradan X yatay vektör alanı için $g(X,JX)=0$, $\rho(X,X)=\rho(JX,JX)$ olduğundan

$$k(X,JX)=-2\frac{q}{p}\rho(X,X)+\frac{\tau}{4n+2}\left\{\frac{1}{4n}+2\frac{q}{p}\right\}$$

olarak bulunur. O halde $k(X,JX)=k(X,Y)$ dir. X yatay vektör alanı için kesitsel eğrilik $\mathcal{GH}-$kesitsel eğriliği tanımlar yani; $k(X,Y)=\mathcal{GH}(X)$ dir. Bu durumda Eş. 3.25' den dolayı çelişki oluşur. Bu durumda başlangıçtaki kabul yanlıştır. Yani M quasi-konformal düz olamaz. Benzer düşünce ile projektif, konsörkılır ve konharmonik tensörleri için ispat yapılır.

5.4. Tanım

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold olsun. Her X,Y,Z yatay vektör alanları için

$G^2(\mathcal{P}(GX,GY)GZ)=0$ ve $H^2(\mathcal{P}(HX,HY)HZ)=0$

ise M manifolduna $\mathcal{GH}-$ projektif düz,

$G^2(\mathcal{W}(GX,GY)GZ)=0$ ve $H^2(\mathcal{W}(HX,HY)HZ)=0$

ise M manifolduna $\mathcal{GH}-$ konformal düz,

$G^2(\widetilde{\mathcal{C}}(GX,GY)GZ)=0$ ve $H^2(\widetilde{\mathcal{C}}(HX,HY)HZ)=0$

ise M manifolduna $\mathcal{GH}-$ quasi-konformal düz,

$G^2(\mathcal{Z}(GX,GY)GZ)=0$ ve $H^2(\mathcal{Z}(HX,HY)HZ)=0$

ise M manifolduna $\mathcal{GH}-$ konsörkılır düz,

$G^2(\mathcal{K}(GX,GY)GZ)=$ ve $H^2(\mathcal{K}(HX,HY)HZ)=0$

ise M manifolduna $\mathcal{GH}-$ konharmonik düzdür denir.

Bu tanım eğrilik tensörlerinin yatay demet üzerinde sıfır olmasını ifade etmektedir.

Ayrıca düşey demet üzerinde sıfır olduğu aşikardır.

5.5. Teorem

Bir normal kompleks kontakt metrik manifold $\mathcal{GH}-$projektif, $\mathcal{GH}-$konformal, $\mathcal{GH}-$quasi-konformal, $\mathcal{GH}-$konsörkılır ve $\mathcal{GH}-$ konharmonik düz olamaz.

İspat

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold ve X, Y, Z, W M üzerinde yatay vektör alanları olsun. Konformal eğrilik tensörünün tanımından

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{W}(GX,GY)GZ,GW) &= g(R(GX,GY)GZ,GW) \\
&+ \frac{\tau}{(4n+1)4n}[g(GY,GZ)g(GX,GW) \\
&- g(GX,GZ)g(GY,GW)] + \frac{1}{4n}[g(GX,GZ)g(QGY,GW) \\
&- g(GY,GZ)g(QGX,GW) + \rho(GX,GZ)g(GY,GW) \\
&-\rho\left(GY,GZ\right)g\left(GX,GW\right)] \\
g(\mathcal{W}(HX,HY)HZ,HW) &= g(R(HX,HY)HZ,HW) \\
&+ \frac{\tau}{(4n+1)4n}[g(HY,HZ)g(HX,HW) \\
&- g(HX,HZ)g(HY,HW)] + \frac{1}{4n}\left[g\left(HX,HZ\right)g\left(QHY,HW\right)\right. \\
&- g\left(HY,HZ\right)g\left(QHX,HW\right) + \rho\left(HX,HZ\right)g\left(HY,HW\right) \\
&\left.-\rho\left(HY,HZ\right)g\left(HX,HW\right)\right]
\end{aligned}$$

dir. Diğer yandan Eş. 4.1, Eş. 4.6 ve Eş. 4.15' den

$$\begin{aligned}
g(\mathcal{W}(GX,GY)GZ,GW) &= g(\mathcal{W}(HX,HY)HZ,HW) = g(\mathcal{W}(X,Y)Z,W), \\
-g(G\mathcal{W}(GX,GY)GZ,W) &= -g(H\mathcal{W}(HX,HY)HZ,W) = g(-\mathcal{W}(X,Y)Z,W)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca M konformal düz olamayacağından $\mathcal{W}(X,Y)Z \neq 0$ dir.
Böylece $G^2(\mathcal{W}(GX,GY)GZ) \neq$ ve $H^2(\mathcal{W}(HX,HY)HZ) \neq 0$ dır. O halde M, $\mathcal{GH}-$konformal düz değildir. Benzer düşünce ile ve aynı adımlar takip edilerek manifoldun $\mathcal{GH}-$projektif, $\mathcal{GH}-$quasi-konformal, $\mathcal{GH}-$ konsörkılır ve $\mathcal{GH}-$konharmonik düz olmadığı gösterilir.

5.6. Teorem

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold olmak üzere $\mathcal{Z}(U,X).\mathcal{Z}=0$ ve $\mathcal{Z}(V,X).\mathcal{Z}=0$ koşulları altında M nin Riemann eğrilik tensörü X,Y ve Z yatay vektör alanları için

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= g(Y,Z)X - g(X,Z)Y \\ &\quad - \frac{(4n+2)(4n+1)}{(4n+2)(4n+1)-\tau}\{[g(JY,Z) \\ &\quad - d\sigma(Z,Y)](\sigma(U)GX + (\nabla_U H)X - JX) \\ &\quad - [g(JX,Z) - d\sigma(Z,X)](\sigma(U)GY + (\nabla_U H)Y - JY) \\ &\quad - [g(JX,Y) - d\sigma(Y,X)]JZ\} \end{aligned} \tag{5.30}$$

dir.

İspat

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold ve X,Y,W,T M üzerinde yatay vektör alanları olsun. $\mathcal{Z}(U,X).\mathcal{Z}=0$ ise tanım gereği

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{Z}(U,X)\cdot\mathcal{Z}(W,Y)T - \mathcal{Z}(\mathcal{Z}(U,X)W,Y)Z \\ &\quad - \mathcal{Z}(W,\mathcal{Z}(U,X)Y)Z - \mathcal{Z}(W,Y)\mathcal{Z}(U,X)Z \end{aligned} \tag{5.31}$$

biçimindedir. $W=U$ ve $X=X_0, Y=Y_0,\ Z=Z_0,\ X_0,\ Y_0,\ Z_0 \in \mathcal{H}$ seçilir ve Eş. 5.31 U ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\begin{aligned} 0 &= u(\mathcal{Z}(U,X_0)\cdot\mathcal{Z}(U,Y_0)Z_0) - u(\mathcal{Z}(\mathcal{Z}(U,X_0)U,Y_0)Z_0) \\ &\quad - u(\mathcal{Z}(U,\mathcal{Z}(U,X_0)Y_0)Z_0) - u(\mathcal{Z}(U,Y_0)\mathcal{Z}(U,X_0)Z_0) \end{aligned} \tag{5.32}$$

olur. Böylece Eş. 5.13, Eş. 5.15 ve Eş. 5.17'den

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{\tau}{(4n+2)(4n+1)}\right)\mathcal{Z}(X_0,Y_0)Z_0 &= \left(1-\frac{\tau}{(4n+2)(4n+1)}\right)^2 g(Y_0,Z_0)X_0 \\ &\quad + [g(JY_0,Z_0) - d\sigma(Z_0,Y_0)]R(X_0,U)V \\ &\quad - [g(JX_0,Y_0) - d\sigma(Y_0,X_0)]JZ_0 \\ &\quad + \left(1-\frac{\tau}{(4n+2)(4n+1)}\right)^2 g(X_0,Z_0)W_0 \end{aligned}$$

$$- \left[g\left(JX_0, Z_0\right) - d\sigma\left(Z_0, X_0\right)\right] R\left(Y_0, U\right) V$$

olarak elde edilir. $\mathcal{Z}$ nin tanımı ve Eş. 3.18'den Eş. 5.30 elde edilir. Benzer düşünce ile Eş. 5.31'de $W = V$ seçilir ve aynı aşamalar takip edilirse Eş. 5.30 bulunur.

Kesitsel eğrilik tanımından yararlanılarak aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold olmak üzere $\mathcal{Z}\left(U, X\right).\mathcal{Z} = 0$ ve $\mathcal{Z}\left(V, X\right).\mathcal{Z} = 0$ koşulları altında M nin kesitsel eğriliği

$$k\left(X, Y\right) = 1 + \left[g\left(JX, Y\right) + d\sigma\left(X, Y\right)\right] d\sigma\left(X, Y\right)$$

dir.

5.7. Teorem

Konsörkılır eğrilik tensörü $\mathcal{Z}$ ve Ricci eğrilik tensörü ρ olmak üzere $\mathcal{Z}\left(U, X\right).\rho = 0$ ve $\mathcal{Z}\left(V, X\right).\rho = 0$ koşulunu sağlayan bir M normal kompleks kontakt metrik manifoldu ya Einstein manifoldtur ya da skaler eğriliği $\tau = \left(4n+2\right)\left(4n+1\right)$ dir.

İspat

M bir normal kompleks kontakt metrik manifold ve M üzerinde yatay X, Y, W, T vektör alanları için $\left(\mathcal{Z}\left(X, Y\right).\rho\right)\left(W, T\right) = 0$ olsun. O zaman tanım gereği

$$\rho(\mathcal{Z}(X, Y)W, T) + \rho(W, \mathcal{Z}(X, Y)T) = 0 \tag{5.33}$$

olur. Buradan $X = T = U$ ve $Y = Y_0$, $W = W_0$, Y_0, $W_0 \in \mathcal{H}$ için

$$\rho(\mathcal{Z}(U, Y_0)W_0, U) + \rho(W_0, Z(U, Y_0)U) = 0$$

dir. Ayrıca Eş. 5.13 ve Eş. 5.16'den

$$\left(1 - \frac{\tau}{\left(4n+2\right)\left(4n+1\right)}\right)\left(g\left(Y_0, W_0\right)\left(4n - 2d\sigma(U, V)\right) - \rho\left(Y_0, W_0\right)\right) = 0$$

bulunur. O zaman ;

$$\frac{\tau}{(4n+2)(4n+1)} - 1 = 0 \text{ ya da } (4n - 2d\sigma(U,V))\, g(Y_0, W_0) - \rho(Y_0, W_0) = 0$$

durumları mevcuttur. Böylece manifold Einstein manifoldtur veya skaler eğrilik $\tau = (4n+2)(4n+1)$ dir. Benzer şekilde $X = T = V$ ve $Y = Y_0$, $W = W_0$, $Y_0,\ W_0 \in \mathcal{H}$ seçilir ve aynı adımlar takip edilirse aynı sonuca ulaşılır.

5.8. Teorem

Ricci yarı-simetrik bir normal kompleks kontakt metrik manifold Einstein manifoldtur.

İspat

M Ricci yarı-simetrik bir normal kompleks kontakt metrik manifold olsun. O zaman M üzerindeki X, Y, W ve T keyfi vektör alanları için

$$\rho(R(X,Y)W,T) + \rho(W, R(X,Y)T) = 0 \tag{5.34}$$

biçimindedir. $Y = W = U$ ve $X = X_0$, $T = T_0$, $X_0,\ T_0 \in \mathcal{H}$ alınır ve Eş. 5.34'da yerine yazılırsa

$$\rho(R(X_0,U)U,T_0) + \rho(U, R(X_0,U)T_0) = 0$$

olur. Ayrıca Eş.3.15 ve Eş.3.20'den

$$\rho(X_0,T_0) + \rho(U, -g(X_0,T_0)U - g(JX_0,T_0)V + d\sigma(T_0,X_0)V) = 0$$

ve

$$\rho(X_0,T_0) - g(X_0,T_0)\rho(U,U) - g(JX_0,T_0)\rho(U,V) + d\sigma(T_0,X_0)\rho(U,V) = 0$$

olarak elde edilir. Eş. 4.10'den

$$\rho(X_0,T_0) = (4n - 2d\sigma(U,V))\, g(X_0,T_0) \tag{5.35}$$

sonucuna ulaşılır. Bu durumda manifoldun yatay demeti üzerindeki metrik Einstein olur. Diğer yandan Eş. 3.5'den manifold genel vektör alanları için Einstein olur. Benzer şekilde $Y = W = V$ ve $X = X_0$, $T = T_0$, $X_0,\ T_0 \in \mathcal{H}$ vektör alanları için Eş. 3.15, Eş. 3.21 ve Eş. 5.34'den

$$\rho(X_0, T_0) - g(X_0, T_0)\rho(V, V) + g(JX_0, T_0)\rho(U, V) - d\sigma(T_0, X_0)\rho(U, V) = 0$$

bulunur ve Eş. 4.10'dan Eş. 5.35 elde edilir. O zaman manifold Einstein'dır.

6. KOMPLEKS η-EINSTEIN NORMAL KOMPLEKS KONTAKT METRİK MANİFOLDLAR

η-Einstein manifoldlar Einstein manifoldların ayrı bir sınıfıdır. Bir kontakt manifold üzerindeki ilişkili metriğe göre tarif edilir. Bu metrikler ilk defa Okumuro [48] tarafından tanımlanmış ve Sasaki [50] tarafından isimlendirilmiştir. Bu bölümde normal kompleks kontakt metrik manifold üzerinde η-Einstein yapısı incelenecektir.

6.1. Tanım ve Teoremler

6.1. Tanım

$(M, G, H, J, U, V, u, v, g)$ bir kompleks kontakt metrik manifold ve M üzerindeki kompleks kontakt form $\eta = u - iv$ olsun. $\alpha, \beta \in C^{\infty}(M)$ fonksiyonları için M üzerinde Ricci tensörü

$$\rho = \alpha g + \beta(u \otimes U + v \otimes V)$$

eşitliğini sağlıyorsa M ye kompleks $\eta-$Einstein'dır denir.

Sonuç

$(2n+1)-$ kompleks boyutlu bir M normal kompleks kontakt metrik manifoldu kompleks η-Einstein ise $\alpha + \beta = 4n - 2d\sigma\,(U, V)$ dir.

Diğer yandan Eş. 4.10'dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç

Eğer $(2n+1)-$ kompleks boyutlu bir normal kompleks kontakt merik manifold Einstein ise $\rho(X, Y) = (4n - 2d\sigma(U, V))g(X, Y)$ dir.

Ricci eğrilik tensörü ve kompleks $\eta-$Einstein manifold tanımı gözönüne alındığında Q Ricci operatörü olmak üzere

$$QX = \alpha X + \beta(u(X)U + v(X)V)$$

elde edilir. Böylece skaler eğrilik

$$\tau = 4n\alpha + 8n - 4d\sigma\,(U, V)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\alpha = \frac{\tau - 8m + 4d\sigma(U,V)}{4m}$$
$$\beta = \frac{16m^2 - (8m+4)d\sigma(U,V) + 8m - \tau}{4m}.$$

eşitlikleri elde edilir.

Örnek

Bir M kompleks kontakt uzay formu kompleks $\eta-$Einstein dir.

Örnek

Kompleks Heisenberg grup için $\mathcal{GH}-$kesitsel eğrilik $c = 1$ ve $\sigma = 0$ dır. Bu durumda Eş. 3.26' dan kompleks Heisenberg grup üzerindeki her X, Y vektör alanı için Ricci eğriliği

$$\rho\left(X,Y\right) = -4g\left(X,Y\right) + 8\left(u(X)u(Y) + v(X)v(Y)\right)$$

dir. O halde kompleks Heisenberg grup bir kompleks η-Einstein manifold örneğidir.

Sonuç

M normal kompleks kontakt metrik manifold ve M üzerinde iki yatay vektör alanı X_0, Y_0 olsun. Bir μ düzgün fonksiyonu için eğer Ricci eğriliği $\rho\left(X_0,Y_0\right) = \mu g\left(X_0,Y_0\right)$ ise

$$\rho\left(X,Y\right) = \mu g\left(X,Y\right) + \left(4n - 2d\sigma\left(U,V\right) - \mu\right)\left(u(X)u(Y) + v(X)v(Y)\right) \tag{6.1}$$

dir. Bu durumda M nin skalar eğriliği $\tau = 4n\mu + 8n - 4d\sigma\left(U,V\right)$ biçiminde olur.

Sonuç

Bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun yatay demeti üzerinde bir Einstein metrik var ise o zaman manifold kompleks $\eta-$Einstein'dir.

Sonuç

Eğer bir normal kompleks kontakt metrik manifoldunun Ricci eğriliği $\rho(X_0, Y_0) = (4n - 2d\sigma(U,V))\, g(X_0, Y_0)$ eşitliğini sağlıyorsa o zaman manifold Einstein'dir.

6.2. Projektif Yarı-Simetrik Normal Kompleks Kontakt Metrik Manifoldlar

6.2 Teorem

Projektif yarı-simetrik normal kompleks kontakt metrik manifoldlar kompleks $\eta-$Einstein'dir.

İspat

M bir projektif yarı-simetrik normal kompleks kontakt metrik manifold olsun. O zaman X, Y, Z, W keyfi vektör alanları için

$$\begin{aligned} 0 = {} & R(X,Y)\cdot\mathcal{P}(Z,W)T - \mathcal{P}(R(X,Y)Z,W)T \\ & - \mathcal{P}(Z,R(X,Y)W)T - \mathcal{P}(Z,W)R(X,Y)T \end{aligned} \tag{6.2}$$

dir. Eş. 6.2'de $X = Z = T = U,\ Y = Y_0,\ W = W_0$ alınır ve U ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\begin{aligned} 0 = {} & u\left(R(U,Y_0)\mathcal{P}(U,W_0)U\right) - u\left(\mathcal{P}(R(U,Y_0)U,W_0)U\right) \\ & - u\left(\mathcal{P}(U,R(U,Y_0)W_0)U\right) - u\left(\mathcal{P}\left(U,W_0\right)R\left(U,Y_0\right)U\right) \end{aligned}$$

bulunur. Eş. 3.15 , Eş. 3.20 , Eş. 5.2, Eş. 5.3 ve Eş. 5.4'den

$$0 = \frac{1 + 2d\sigma\left(U,V\right)}{4n+1} g\left(Y_0, W_0\right) - \left(-g\left(Y_0,W_0\right) + \frac{1}{4n+1}\rho\left(Y_0,W_0\right)\right) \tag{6.3}$$

ve buradan

$$\rho\left(Y_0,W_0\right) = \left(4n + 2 + 2d\sigma\left(U,V\right)\right) g\left(Y_0,W_0\right) \tag{6.4}$$

bulunur.

Benzer şekilde Eş. 6.2'de $X = Z = T = V$ ve $Y = Y_0, W = W_0$ alınır ve V ile iç çarpılırsa Eş. 6.4 elde edilir. Diğer yandan Eş. 6.1 eşitliğinden

$$\rho\left(Y,W\right) = \left(4n + 2 + 2d\sigma\left(U,V\right)\right) g\left(Y,W\right) - \left(2 + 4d\sigma\left(U,V\right)\right)\left(u(Y)u(W) + v(Y)v(W)\right)$$

bulunur. Sonuç olarak manifold kompleks $\eta-$Einstein'dir.

7. NORMAL KOMPLEKS KONTAKT METRİK MANİFOLDLARIN ALTMANİFOLDLARI

Altmanifoldlar Riemann geometrisinin en önemli çalışma alanlarından biridir. Bir manifoldun, üzerinde taşıdığı yapıya göre çeşitli altmanifold sınıfları bulunmaktadır. Bu sınıflar içerisinde kontakt yapıyla ilişkili olan invaryant, anti-invaryant, yarı-invaryant, slant, yarı-slant, CR ve kontakt-CR altmanifoldları son yıllarda oldukça çalışılagelen konulardır. Reel kontakt geometride bir reel Sasakian manifoldun hemen hemen yarı-invaryant altmanifoldları Bejancu ve Papaguic [4] tarafından incelenmiştir. Yazarlar makalelerinde bir reel Sasakian manifoldun hemen hemen yarı-invaryant altmanifoldunu tanımlamış ve 6 ayrı sınıfa ayırmıştır.

Kompleks kontakt manifoldların altmanifold teorisi henüz kapsamlı bir şekilde çalışılmamış açık bir konudur. Konu hakkında yapılmış çalışmalardan iki tanesi yayınlanmış, biri ise hazırlık aşamasında kalmıştır. Yayınlanmayan çalışmasında Mihai [46] altmanifold tanımlarını vermiş ancak bu tanımlarla ilişkili sonuçlar elde etmemiştir.

Yıldırım ve Erdoğan [75, 76] kompleks kontakt manifoldların altmanifoları üzerine iki çalışma yapmıştır. Yazarların "hemen hemen kompleks kontakt manifoldların yarı-invaryant altmanifoldları [75]" isimli çalışmasında reel altmanifold teorisindeki temel denklem ve yaklaşımlar aynen takip edilmiştir. Manifoldun kompleks olması hali ele alınmamış ve yarı-invaryant altmanifold tanımı doğru şekilde verilememiştir. Çalışmada Korkmaz [44] tarafından verilen sonuçlar ele alınarak çalışıldığı belirtilmiş ancak verilen teorem ifadelerinde ve ispatlarında bu durum göz ardı edilmiştir. Dağılımlar incelenmeden ve tanımlanmadan integrallenebilirlik şartları incelenmiş ve bazı sonuçlar verilmiştir. Ancak bu sonuçlar yazarlar tarafından verilen yarı-invaryant altmanifold tanımı ile uyuşmamaktadır. Bu nedenle kompleks kontakt manifoldların yarı-invaryant altmanifoldları üzerine yapılmış bu çalışmada eksikler ve hatalar bulunmaktadır.

Bu bölümde bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun hemen hemen yarı-invaryant altmanifoldu tanımlanarak Bejancu ve Papaguic [4] tarafından yapılan sınıflandırma normal kompleks kontakt metrik manifoldlar için yapılmıştır. Smyth [47, 58] tarafından yapılan çalışmalar gözönüne alınarak Gauss ve Weingarten denklemleri verilmiştir. Bir yarı-invaryant altmanifoldun tanımı yapılarak kompleks durum da ele alınmıştır. Dağılımlar ayrıntılı olarak incelenmiş ve dağılımların integrallenebilirlik şartları verilmiştir.

7.1. Normal Kompleks Kontakt Metrik Manifoldların Hemen Hemen Yarı-İnvaryant Altmanifoldları

$(\bar{M}^{4m+2}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{J}, \bar{U}, \bar{V}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{g})$ bir normal kompleks kontakt metrik manifold, $\bar{M}$ nin $(n+2)-$boyutlu bir altmanifoldu M ve $\bar{U}, \bar{V}$ dikey vektör alanları M ye teğet olsun. O zaman

$$TM = sp\{\bar{U}, \bar{V}\} \oplus sp\{\bar{U}, \bar{V}\}^{\perp}$$

dir. Bu durumda M üzerinde bir vektör alanı X olmak üzere

$$\bar{g}(\bar{G}X, \bar{U}) = -\bar{g}(X, \bar{G}\bar{U}) = 0 \ , \ \bar{g}(\bar{G}X, \bar{V}) = -\bar{g}(X, \bar{G}\bar{V}) = 0$$

ve

$$\bar{g}(\bar{H}X, \bar{U}) = -\bar{g}(X, \bar{H}\bar{U}) = 0 \ , \ \bar{g}(\bar{H}X, \bar{V}) = -\bar{g}(X, \bar{H}\bar{V}) = 0$$

dir. O halde $\bar{G}X \in sp\{\bar{U}, \bar{V}\}^{\perp}$ ve $\bar{H}X \in sp\{\bar{U}, \bar{V}\}^{\perp}$ olur.

$$P : TM \to TM \quad , \quad Q : TM \to TM^{\perp}$$

projeksiyonları için $X \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\bar{G}X = PX + QX \tag{7.1}$$

biçiminde yazılır. Burada PX ve QX sırasıyla $\bar{G}X$ in teğet ve normal kısımlarıdır. Ayrıca $\bar{H} = \bar{G}\bar{J}$ olduğundan $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\bar{H}X = P\bar{J}X + Q\bar{J}X \tag{7.2}$$

dir. Burada $P\bar{J}X$ ve $Q\bar{J}X$ sırasıyla $\bar{H}X$ in teğet ve normal kısımlarıdır. Bu şekilde tanımlanan P dönüşümü $\Gamma(TM)$ üzerinde izomorfizim ve Q normal değerli bir 1-formdur. M nin bir p noktasındaki iki dağılım

$$\mathcal{D}_p = çek\{Q|_{sp\{\bar{U},\bar{V}\}^{\perp}}\} = \{X_p \in sp\{\bar{U}, \bar{V}\}^{\perp} : Q(X_p) = 0\}$$
$$\mathcal{D}_p^{\perp} = çek\{P|_{sp\{\bar{U},\bar{V}\}^{\perp}}\} = \{X_p \in sp\{\bar{U}, \bar{V}\}^{\perp} : P(X_p) = 0\}$$

biçiminde tanımlansın.

7.1. Önerme

$\mathcal{D}_p$ ve $\mathcal{D}_p^\perp$ dağılımları TM nin ortogonal altuzaylarıdır.

İspat

$X_p \in \mathcal{D}_p$ ve $Y_p \in \mathcal{D}_p^\perp$ olsun. Bu durumda $\bar{G}X_p = PX_p$ ve $\bar{G}Y_p = QY_p$ dir. Ayrıca

$$\bar{g}(X_p, Y_p) = \bar{g}(\bar{G}X_p, \bar{G}Y_p) + \bar{u}(X_p)\bar{u}(Y_p) + \bar{v}(X_p)\bar{v}(Y_p)$$

ve $\bar{u}(X_p) = \bar{u}(Y_p) = \bar{v}(X_p) = \bar{v}(Y_p) = 0$ olduğundan

$$\bar{g}(X_p, Y_p) = \bar{g}(\bar{G}X_p, \bar{G}Y_p)$$

bulunur. Böylece

$$\bar{g}(X_p, Y_p) = \bar{g}(PX_p, QY_p) = 0$$

dir.

Diğer yandan M ye normal olan herhangi bir vektör alanı N olmak üzere

$$B : TM^\perp \to TM$$
$$C : TM^\perp \to TM^\perp$$

projeksiyonları için

$$\bar{G}N = BN + CN \tag{7.3}$$

şeklinde yazılır. Burada BN ve CN sırasıyla $\bar{G}N$ nin teğet ve normal parçalarıdır. Ayrıca $\bar{H} = \bar{G}\bar{J}$ oduğundan

$$\bar{H}N = B\bar{J}N + C\bar{J}N \tag{7.4}$$

biçimindedir. Eş. 7.1 ve Eş. 7.2 ifadeleri gözönüne alınırsa

$$\bar{G}\bar{U} = P\bar{U} + Q\bar{U} = 0, \quad \bar{H}\bar{U} = P\bar{J}\bar{U} + Q\bar{J}\bar{U} = 0$$
$$\bar{G}\bar{V} = P\bar{V} + Q\bar{V} = 0, \quad \bar{H}\bar{V} = P\bar{J}\bar{V} + Q\bar{J}\bar{V} = 0$$

bulunur. Bu eşitliklerden

$$P\bar{U} = 0, \; Q\bar{U} = 0, \quad P\bar{J}\bar{U} = 0, \; Q\bar{J}\bar{U} = 0$$

$P\bar{V} = 0, \; Q\bar{V} = 0, \;\; P\bar{J}\bar{V} = 0, \; Q\bar{J}\bar{V} = 0$

elde edilir. Diğer yandan Eş. 7.1'e sırasıyla $\bar{G}, \bar{J}, \bar{H}$ uygulanırsa Eş. 3.3'den

$$\begin{array}{ll} P^2 = -I - BQ + u \otimes \bar{U} + v \otimes \bar{V}, & QP + CQ = 0 \\ \bar{J}P + P\bar{J} = 0, \qquad \bar{J}Q + Q\bar{J} = 0 & \\ P^2\bar{J} = -\bar{J} + B\bar{J}Q - u \otimes \bar{V} + v \otimes \bar{U} \;, & Q\bar{J}P + C\bar{J}Q = 0 \end{array}$$

olarak elde edilir. Bununla birlikte Eş. 7.3'e $\bar{G}$ ve $\bar{J}$ tensörleri uygulanırsa Eş. 3.3'den

$$\begin{array}{ll} C^2 = -I - QB, & PB + BC = 0 \\ B\bar{J} + \bar{J}B = 0, & C\bar{J} + \bar{J}C = 0 \end{array}$$

eşitliklerine ulaşılır.
Bir kompleks manifoldun CR-altmanifoldları, kontakt manifoldların altmanifoldları üzerinde yapılan çalışmalarda esas alınmaktadır. Bejancu ve Papaghiuc [4] çalışmalarında CR-altmanifold tanımından yararlanarak bir Sasakian manifoldun hemen hemen yarı-invaryant altmanifold tanımını vermiştir. Bu tanımdan yararlanılarak bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun hemen hemen yarı-invaryant altmanifold tanımı aşağıda verilecektir.

7.2. Tanım

$\bar{M}$ bir normal kompleks kontakt metrik manifold ve $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu M olsun. Eğer M boyunca $boy\mathcal{D}_p$, $boy\mathcal{D}_p^{\perp}$ sabit ve

$$\mathcal{D} : p \to \mathcal{D}_p \;\; , \;\; \mathcal{D}^{\perp} : p \to \mathcal{D}_p^{\perp}$$

dağılımları M üzerinde diferensiyellenebilir ise M ye bir hemen hemen yarı-invaryant altmanifold denir.

Aşağıdaki iki önerme yukarıdaki koşullara haiz en geniş iki distribüsyonun $\mathcal{D}_p$ ve $\mathcal{D}_p^{\perp}$ olduğunu göstermektedir.

7.3. Önerme

$\mathcal{D}$ dağılımı $sp\{\bar{U}, \bar{V}\}^{\perp}$ de bir maksimal invaryant dağılımdır. Yani
$i)$ Her $p \in M$ için $\bar{G}\mathcal{D}_p = \bar{H}\mathcal{D}_p = \mathcal{D}_p$,

$ii)$ Her $p \in M$ için eğer $\mathcal{D}'_p \subset sp\{\bar{U}, \bar{V}\}^{\perp}$ ve $\bar{G}\mathcal{D}'_p = \bar{H}\mathcal{D}'_p = \mathcal{D}'_p$ ise $\mathcal{D}'_p \subset \mathcal{D}_p$ dir.

İspat

$X_p \in \Gamma(\mathcal{D}_p)$ olsun. Bu durumda $\bar{u}(X_p) = \bar{v}(X_p) = 0$ olduğundan

$$-X_p = \bar{G}^2(X_p) = \bar{G}\bar{G}X_p = P\bar{G}X_p + Q\bar{G}X_p$$

olur ve buradan $Q\bar{G}X_p = 0$ bulunur. Böylece $X_p \in \Gamma(\bar{G}\mathcal{D}_p)$ olup $\mathcal{D}_p \subset \bar{G}\mathcal{D}_p$ dir. Diğer yandan $Y_p \in \Gamma(\bar{G}\mathcal{D}_p)$ için $QY_p = 0$ olur ve böylece $Y_p \in \Gamma(\mathcal{D}_p)$ bulunur. Yani $\bar{G}\mathcal{D}_p \subset \mathcal{D}_p$ dir. Sonuç olarak $\bar{G}\mathcal{D}_p = \mathcal{D}_p$ olur. Benzer şekilde $\bar{H}\mathcal{D}_p = \mathcal{D}_p$ olduğu görülür ve böylece (i) ispatlanmış olur.
$\mathcal{D}'_p \subset sp\{\bar{U}, \bar{V}\}^{\perp}$ herhangi bir dağılım ve $\bar{G}\mathcal{D}'_p = \mathcal{D}'_p$ olsun. Keyfi bir $X'_p \in \Gamma(\mathcal{D}'_p)$ vektör alanı için $\bar{G}X'_p \in \Gamma(\bar{G}\mathcal{D}'_p)$ dir. Bu durumda $QX'_p = 0$ olur ve böylece $X'_p \in \Gamma(\mathcal{D}_p)$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{D}'_p \subset \mathcal{D}_p$ yani $\mathcal{D}_p$ maksimaldir.
$\bar{H}$ için de aynı aşamalar takip edilerek ispat tamamlanır.

7.4. Önerme

$\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımı $sp\{\bar{U}, \bar{V}\}^{\perp}$ de maksimal anti-invaryant dağılımdır. Yani
$i)$ Her $p \in M$ için $\bar{G}\mathcal{D}^{\perp}_p, \bar{H}\mathcal{D}^{\perp}_p \subset T^{\perp}_p M$,
$ii)$ Her $p \in M$ için eğer $\mathcal{D}''_p \subset sp\{\bar{U}, \bar{V}\}^{\perp}$ ve $\bar{G}\mathcal{D}''_p, \bar{H}\mathcal{D}''_p \subset T^{\perp}_p M$ ise $\mathcal{D}''_p \subset \mathcal{D}^{\perp}_p$ dir.

İspat

$X_p \in \mathcal{D}^{\perp}_p$ olsun. O zaman $\bar{G}X_p = QX_p \in T_pM^{\perp}$ olur ve $\bar{G}\mathcal{D}_p \subset T_pM^{\perp}$ bulunur. Benzer şekilde $\bar{H}X_p = Q\bar{J}X_p \in T_pM^{\perp}$ olup $\bar{H}\mathcal{D}^{\perp}_p \subset T^{\perp}_p M$ dir. Böylece (i)'nin ispatı tamamlanır.
$\mathcal{D}''_p \subset sp\{\bar{U}, \bar{V}\}^{\perp}$ herhangi bir dağılım ve $\bar{G}\mathcal{D}''_p, \bar{H}\mathcal{D}''_p \subset T_pM^{\perp}$ olsun. Keyfi bir $X''_p \in \Gamma(\mathcal{D}''_p)$ vektör alanı için $\bar{G}X''_p \in T_pM^{\perp}$ olur. O halde $PX''_p = 0$ ve böylece $X''_p \in \Gamma(\mathcal{D}^{\perp}_p)$ dir. Sonuç olarak $\mathcal{D}''_p \subset \mathcal{D}^{\perp}_p$ bulunur. Benzer aşamalar takip edilerek H için de aynı sonuç elde edilir.

$\mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^{\perp} \oplus sp\{\bar{U}, \bar{V}\}$ nin TM deki ortogonal tümleyeni $\tilde{\mathcal{D}}$ olmak üzere bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun hemen hemen yarı-invaryant altmanifold tanımı şu şekildedir:

7.5. Tanım

Bir $\bar{M}$ normal kompleks kontakt metrik manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. Eğer $TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^{\perp} \oplus \tilde{\mathcal{D}} \oplus sp\{\bar{U}, \bar{V}\}$ biçiminde yazılabiliyorsa M'ye bir kompleks hemen hemen yarı-invaryant altmanifold denir. Buradaki $\tilde{\mathcal{D}}$ dağılımı invaryant veya anti-invaryant değildir.

$boy_{\mathbb{C}}\mathcal{D} = q,\ boy_{\mathbb{C}}\mathcal{D}^{\perp} = p,\ boy_{\mathbb{C}}\tilde{\mathcal{D}} = s$ olsun. Yani $boy_{\mathbb{C}}TM = q + p + s + 1$ dir. Bu durumda reel Sasakian manifoldlara [4] benzer şekilde aşağıdaki sınıflandırma verilebilir.

7.6. Tanım

$\bar{M}$ bir normal kompleks kontakt metrik manifold ve $\bar{M}$ nin bir hemen hemen yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer

1. $s = 0,\ q \neq 0,\ p \neq 0$ ise M'ye yarı-invaryant altmanifold
2. $p = s = 0,\ q \neq 0$ ise M'ye invaryant altmanifold
3. $q = s = 0, p \neq 0$ ise M'ye anti-invaryant altmanifold
4. $p = 0,\ q \neq 0,\ s \neq 0$ ise M'ye hemen hemen invaryant altmanifold
5. $q = 0,\ p \neq 0, s \neq 0$ ise M'ye hemen hemen anti-invaryant altmanifold
6. $q = p = 0, s \neq 0$ ise M'ye pseudo-invaryant altmanifold

adı verilir.

Reel Sasakian manifoldlar için birinci sınıf Bejancu ve Papaghiuc [3], ikinci ve üçüncü sınıf Kon ve Yano [41,71] tarafından çalışılmıştır. Bu bölümde normal kompleks kontakt metrik manifoldlar için birinci sınıf çalışılacaktır.

7.2. Normal Kompleks Kontakt Metrik Manifoldların Yarı-İnvaryant Altmanifoldları

7.2.1. Giriş

Sasakian manifoldların yarı-invaryant altmanifoldları Yano ve Kon [72] tarafından kontakt CR-altmanifoldlar adı altında çalışılmıştır. Yano ve Kon çalışmalarında kontakt yapının vektör alanı ξ nin $\mathcal{D}$ veya $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımlarının ikisinin de elemanı olabileceğini göstermiş ve her sonucu bu iki durum için ayrıca belirtmişlerdir. Yani $TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^{\perp}$ almıştır. Bejancu ve Papaguic [4] ise çalışmalarında

$$TM = sp\{\xi\} \oplus sp\{\xi\}^{\perp} = sp\{\xi\} \oplus \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^{\perp}$$

olarak almıştır. Kentaro ve Yano'nun çalışmalarında ξ vektör alanının düştüğü kısım belirli değilken Bejancu ve Papaguic'un çalışamalarında belirlenmiştir.
Bu kısımda Bejancu ve Papaguic [3, 4] tarafından yapılan çalışmalar göz önüne alınarak, normal kompleks kontakt metrik manifoldların yarı-invaryant altmanifoldları çalışılmıştır.
Tanım 7.2'de bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun hemen hemen yarı-invaryant altmanifoldu tanımlanmıştır. Önerme 7.3 ve Önerme 7.4'de $\mathcal{D}$ dağılımının maksimal invaryant dağılım, $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımının maksimal anti-invaryant dağılım olduğu gösterilmiştir. Ayrıca $\tilde{\mathcal{D}}$ dağılımının boyutu sıfır ise altmanifold yarı-invaryant altmanifold olur. Bu durumda Tanım 7.6'nın birinci maddesine denk olarak bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun yarı-invaryant altmanifoldunun tanımı aşağıda verilecektir.

7.7. Tanım

$(\bar{M}^{4m+2}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{J}, \bar{U}, \bar{V}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{g})$ bir normal kompleks kontakt metrik manifold, $\bar{M}$'nin reel boyutu $n+2$ olan bir altmanifoldu M ve $\bar{U}$, $\bar{V}$ dikey vektör alanları M ye teğet olsun. Eğer

1. $TM = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^{\perp} \oplus sp\{\bar{U}, \bar{V}\}$,
2. $\mathcal{D}$ dağılımı $\bar{G}$ ve $\bar{H}$ ye göre invaryant yani, $\bar{G}\mathcal{D} = \mathcal{D}$ ve $\bar{H}\mathcal{D} = \mathcal{D}$,
3. $\mathcal{D}^{\perp}$ dağılımı $\bar{G}$ ve $\bar{H}$ ye göre anti-invaryant yani $\bar{G}\mathcal{D}^{\perp} \subset TM^{\perp}$ ve $\bar{H}\mathcal{D}^{\perp} \subset TM^{\perp}$

ise M ye bir yarı-invaryant altmanifold denir.

Diğer yandan $\bar{G}\bar{H} = \bar{J}$ olduğundan yukarıdaki koşullar $\bar{J}$ içinde geçerlidir.
M üzerindeki herhangi bir $\mathcal{S}$ vektör demeti için $\mathcal{S}$ nin tüm diferensiyellenebilir kesitlerinin modülü $\Gamma(\mathcal{S})$ olsun. O zaman $\phi : TM \to \mathcal{D}$ ve $\psi : TM \to \mathcal{D}^{\perp}$ projeksiyonları olmak üzere her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$X = \phi X + \psi X + \bar{u}(X)\bar{U} + \bar{v}(X)\bar{V} \tag{7.5}$$

biçiminde yazılır. Burada ϕX ve ψX sırasıyla X in teğet ve normal parçalarıdır. Ayrıca

$$\bar{J}X = \phi\bar{J}X + \psi\bar{J}X + \bar{v}(X)\bar{U} - \bar{u}(X)\bar{V} \tag{7.6}$$

dir. Benzer şekilde $t : TM^{\perp} \to TM$ ve $f : TM^{\perp} \to TM^{\perp}$ dönüşümleri ile her $N \in \Gamma(T^{\perp}M)$ için, tN ve fN sırasıyla N nin teğet ve normal bileşenleri olmak üzere

$$N = tN + fN$$

yazılır.
Diğer yandan Eş. 7.1 ve 7.2'den $PX, P\bar{J}X \in \Gamma(\mathcal{D})$, $QX, Q\bar{J}X \in \Gamma(TM^{\perp})$ ve Eş. 7.3, Eş. 7.4'den $BN, B\bar{J}N \in \Gamma(\mathcal{D}^{\perp})$ ve $CN, C\bar{J}N \in \Gamma(TM^{\perp})$ dir.

7.8. Önerme

Bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun her yarı-invaryant altmanifoldu üzerinde bir C, $f-$yapısı vardır.

İspat

$X \in \Gamma(TM)$ olsun. $QX \in \Gamma(TM^{\perp})$ olacağından $\bar{G}QX = BQX + CQX$ yazılabilir. Bu ifadeye $\bar{G}$ uygulanırsa Eş. 3.3'den $-QX = \bar{G}BQX + \bar{G}CQX$ bulunur. Böylece $\bar{G}CQX + QX = 0$ ve $\bar{G}BQX = 0$ olur. Diğer yandan Eş. 7.3 ve Eş. 3.3'den $C^2N + N + \bar{G}BN = 0$ ve $BCN = 0$ dır. Buradan $C^3N + CN + C\bar{G}BN = 0$ ve $C^3N + CN = 0$ olacağından $C^3 + C = 0$ olur.

Ayrıca P, Q, B, C nin kovaryant türevleri

$$(\nabla_X P)Y = \nabla_X PY - P\nabla_X Y$$
$$(\nabla_X Q)Y = \nabla_X{}^{\perp} QY - Q\nabla_X Y$$
$$(\nabla_X B)N = \nabla_X BN - B\nabla_X{}^{\perp} N$$
$$(\nabla_X C)N = \nabla_X{}^{\perp} CN - C\nabla_X{}^{\perp} N$$

şeklindedir.
$\bar{M}$ normal kompleks kontakt metrik manifoldunun bir yarı-invaryant altmanifolddu M olsun. $TM^{\perp}$ normal tanjant uzayı

$$TM^{\perp} = \bar{G}\mathcal{D}^{\perp} \oplus \bar{H}\mathcal{D}^{\perp} \oplus \bar{J}\mathcal{D}^{\perp} \oplus \vartheta \tag{7.7}$$

şeklinde bir ayrışım (decomposition) olarak yazılabilir. Böylece anti-invaryant dağılımın $\bar{G}$ ve $\bar{H}$ tensör alanları altındaki görüntüleri belirlenmiş olur. Şimdi dağılımların daha açık ifade edilebilmesi adına bazlar incelenecektir.

$(\bar{M}^{4m+2}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{J}, \bar{U}, \bar{V}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{g})$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, ..., e_m, \bar{G}e_1, \bar{G}e_2, ..., \bar{G}e_m$ $, \bar{H}e_1, \bar{H}e_2, ..., \bar{H}e_m, \bar{J}e_1, \bar{J}e_2, ..., \bar{J}e_m, \bar{U}, \bar{V}\}$ ve bu ortonormal baz sisteminin $e_1, e_2, ..., e_n$ M ye teğet olacak şekilde bir kısıtlaması $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olsun. Bu durumda $e_{n+1} = \bar{U}, e_{n+2} = \bar{V}$ olmak üzere $\{e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1}, e_{n+2}\}$ kümesi M nin bir ortonormal bazı olacaktır. Böylece $\mathcal{D}^{\perp}$ in bir bazı $\{e_1, e_2, ..., e_p\}$ ve $\mathcal{D}$ nin bir bazı

$\{e_{p+1}, e_{p+2}, ..., e_n\}$ biçiminde alınabilir. Ayrıca $TM^{\perp}$ in bir bazı $\{e_{n+3}, ..., e_{4m+2}\}$ olarak belirlenir. Buradan $\{e_{n+3}, ..., e_{n+2+3p}\}$ kümesi $\bar{G}\mathcal{D}^{\perp} \oplus \bar{H}\mathcal{D}^{\perp} \oplus \bar{J}\mathcal{D}^{\perp}$ in ve $\{e_{n+3+3p}, e_{n+4+3p}, ..., e_{4m+2}\}$ kümesi ise ϑ nın bir bazıdır. Yarı-invaryant altmanifoldun tanımından $e_{n+3} = \bar{G}e_1$, $e_{n+4} = \bar{G}e_2$,..., $e_{n+2+p} = \bar{G}e_p$, $e_{n+3+p} = \bar{H}e_1$, $e_{n+4+p} = \bar{H}e_2$,..., $e_{n+2+2p} = \bar{H}e_p$, $e_{n+3+2p} = \bar{J}e_1$, $e_{n+4+2p} = \bar{J}e_2$,..., $e_{n+2+3p} = \bar{J}e_p$ olarak alınabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D} = sp\{e_{\frac{p+1}{4}}, e_{\frac{p+5}{4}}, ..., e_{\frac{n-3}{4}}, \bar{G}e_{\frac{p+1}{4}}, \bar{G}e_{\frac{p+5}{4}}, ..., \bar{G}e_{\frac{n-3}{4}}, \bar{H}e_{\frac{p+1}{4}}, \bar{H}e_{\frac{p+5}{4}}, ..., \bar{H}e_{\frac{n-3}{4}},\\
&\bar{J}e_{\frac{p+1}{4}}, \bar{J}e_{\frac{p+5}{4}}, ..., \bar{J}e_{\frac{n-3}{4}}\},\\
&\mathcal{D}^{\perp} = sp\{e_1, e_2, ..., e_p\},\\
&\bar{G}\mathcal{D}^{\perp} \oplus \bar{H}\mathcal{D}^{\perp} \oplus \bar{J}\mathcal{D}^{\perp} = sp\{\bar{G}e_1, \bar{G}e_2, ..., \bar{G}e_p, \bar{H}e_1, \bar{H}e_2, ..., \bar{H}e_p, \bar{J}e_1, \bar{J}e_2, ..., \bar{J}e_p\},\\
&\vartheta = sp\{e_{\frac{n+3p+3}{4}}, e_{\frac{n+3p+4}{4}}, ..., e_{\frac{4m+2}{4}}, \bar{G}e_{\frac{n+3p+3}{4}}, \bar{G}e_{\frac{n+3p+4}{4}}, ..., \bar{G}e_{\frac{4m+2}{4}}, \bar{H}e_{\frac{n+3p+3}{4}}, \bar{H}e_{\frac{n+3p+4}{4}},\\
&..., \bar{H}e_{\frac{4m+2}{4}}, \bar{J}e_{\frac{n+3p+3}{4}}, \bar{J}e_{\frac{n+3p+4}{4}}, ..., \bar{J}e_{\frac{4m+2}{4}}\}
\end{aligned}$$

dir.

7.2.2. Gauss ve Weingarten denklemleri

Smyth [47, 58] 1967'de kompleks hiperyüzeylerin diferensiyel geometrisini çalışmış ve bir kompleks hiperyüzey için Gaus ve Weingarten denklemlerini vermiştir. Benzer düşünce ile bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun altmanifoldu için Gauss ve Weingarten denklemleri bu bölümde verilecektir.
$(\bar{M}^{4m+2}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{J}, \bar{U}, \bar{V}, \bar{u}, \bar{v}, \bar{g})$ bir normal kompleks kontakt metrik manifold ve $\bar{M}$ nin $(n+2)-$boyutlu bir yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. M ye teğet keyfi X, Y vektör alanları için Gauss denklemi

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathbf{h}(X, Y) \tag{7.8}$$

biçimindedir. Burada $\mathbf{h}(X, Y)$ ikinci temel formu ifade etmektedir ve

$$\mathbf{h}(X, Y) = \sum_{\alpha=1}^{4m-n} (h^{\alpha}(X, Y)N_{\alpha} + k^{\alpha}(X, Y)\bar{J}N_{\alpha}) \tag{7.9}$$

şeklinde tanımlanır. Diğer yandan Weingarten denklemleri

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^{\perp}_X N \tag{7.10}$$
$$\bar{\nabla}_X \bar{J}N = -A_{\bar{J}N} X + \nabla^{\perp}_X \bar{J}N \tag{7.11}$$

olarak verilir.

Burada A_N and $A_{\bar{J}N}$ sırasıyla N ve $\bar{J}N$ nın şekil operatörleridir. $s^\alpha(x), t^\alpha(X)$ ve $\tilde{s}^\alpha(x), \tilde{t}^\alpha(X)$ katsayıları için

$$\nabla_X^\perp N = \sum_{\alpha=1}^{4m-n} \{s^\alpha(x) N_\alpha + t^\alpha(X) \bar{J} N_\alpha\}$$
$$\nabla_X^\perp \bar{J}N = \sum_{\alpha=1}^{4m-n} \{\tilde{s}^\alpha(x) N_\alpha + \tilde{t}^\alpha(X) \bar{J} N_\alpha\}$$

olarak verilir.

Bu gösterimde $\bar{\nabla}, \nabla$ ve $\nabla^\perp$ sırasıyla $\bar{M}$, M ve $TM^\perp$ deki Riemann, indirgenmiş Riemannian ve indirgenmiş normal koneksiyonu göstermektedir.

Sonuç

Her $X, Y \in \Gamma(TM)$, $N \in \Gamma(T^\perp M)$ için

$\bar{g}(\mathbf{h}(X,Y), N) = \bar{g}(A_N X, Y)$ ve $\bar{g}(\mathbf{h}(X,Y), \bar{J}N) = \bar{g}(A_{\bar{J}N} X, Y)$

dir.

İspat

Gauss ve Weingarten denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\bar{g}(A_N X, Y) &= \bar{g}(\nabla_X^\perp N - \bar{\nabla}_X N, Y) \\
&= -\bar{g}(\bar{\nabla}_X N, Y) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, N) \\
&= \bar{g}(\nabla_X Y + \mathbf{h}(X,Y), N) \\
&= \bar{g}(\mathbf{h}(X,Y), N)
\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde $\bar{g}(\mathbf{h}(X,Y), \bar{J}N) = \bar{g}(A_{\bar{J}N} X, Y)$ olduğu gösterilir.

7.9. Tanım

$\bar{M}$ bir normal kompleks kontakt metrik manifold ve $\bar{M}$ nin yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. M nin ikinci temel formu $\mathbf{h}$ nın izi $İz(\mathbf{h})$ olmak üzere M nin ortalama eğriliği

$$\mu = \frac{1}{4m+2} \dot{I}z(\mathbf{h})$$

olarak tanımlanır.

Eğer $\mu = 0$ ise M ye minimal, $\mathbf{h} = 0$ ise M ye bir total jeodezik altmanifold denir. Her $X \in \Gamma(TM)$ için eğer $\nabla^{\perp}_X N = 0$ ise N ye paraleldir denir. $\mathbf{h}$ ve A nın kovaryant türevleri

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \mathbf{h})(Y, Z) &= \nabla^{\perp}_X(\mathbf{h}(Y, Z)) - \mathbf{h}(\nabla_X Y, Z) - \mathbf{h}(Y, \nabla_X Z) \\
(\nabla_X A)_N Y &= \nabla_X(A_N Y) - A_{\nabla^{\perp}_X N} Y - A_N \nabla_X Y
\end{aligned}$$

biçimindedir. Eğer her $X \in \Gamma(TM)$ için $\nabla_X \mathbf{h} = 0$ ise $\mathbf{h}$ ya paraleldir denir. Ayrıca bu durum $\nabla_X A = 0$ olmasına denktir. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $\mathbf{h}(X, Y) = \bar{g}(X, Y)\mu$ ise M ye total umbilik altmanifold denir. Eş. 7.3, Eş. 7.4 ve Eş. 7.9'den yararlanılarak doğrudan hesaplama ile

$$\begin{aligned}
\bar{G}\mathbf{h}(X, Y) &= B\mathbf{h}(X, Y) + C\mathbf{h}(X, Y) \\
\bar{H}\mathbf{h}(X, Y) &= B\bar{J}\mathbf{h}(X, Y) + C\bar{J}\mathbf{h}(X, Y) \\
\bar{J}\mathbf{h}(X, Y) &= B\bar{J}C\mathbf{h}(X, Y) + Q\bar{J}B\mathbf{h}(X, Y) + C\bar{J}B \\
\bar{J}N &= B\bar{J}CN + Q\bar{J}CN + C\bar{J}CN
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

7.2.3. Bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun yarı-invaryant altmanifoldları üzerine sonuçlar

Bu bölümde Gauss ve Weingarten denklemlerinden yararlanılarak $\bar{G}$ ve $\bar{H}$ nın kovaryant türevlerinin teğet ve normal bileşenleri hesaplanmıştır. Ayrıca yarı-invaryant altmanifold üzerinde bazı sonuçlar verilmiştir.

7.10. Lemma

$\bar{M}$ normal kompleks kontakt metrik manifoldunun bir yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\phi\nabla_X PY - \phi A_{QY} X = P\nabla_X Y &- \bar{u}(Y)\phi X + \bar{\sigma}(X) P\bar{J}Y \\
&- 2\bar{v}(X)\phi\bar{J}Y - \bar{v}(Y)\phi\bar{J}X + 2\bar{v}(X)\phi\bar{J}Y_0 \\
&- \bar{v}(X)(\phi\nabla_{\bar{U}}\bar{J}PY_0 - \bar{J}\phi\nabla_{\bar{U}}PY_0 \\
&- \phi A_{\bar{J}QY_0}\bar{U} + \bar{J}\phi A_{QY_0}\bar{U}),
\end{aligned} \tag{7.12}$$

$$
\begin{aligned}
\psi\nabla_X PY - \psi A_{QY}X &= B\mathbf{h}(X,Y) + \bar{\sigma}(X)Q\bar{J}Y - 2\bar{v}(X)\psi\bar{J}Y \\
&\quad - \bar{u}(Y)\psi X - \bar{v}(Y)\psi\bar{J}X + \bar{v}(X)\psi\bar{J}Y_0 \\
&\quad - \bar{v}(X)(\psi\nabla_{\bar{U}}\bar{J}PY_0 - \bar{J}\psi\nabla_{\bar{U}}PY_0 \\
&\quad - \psi A_{\bar{J}QY_0}\bar{U} + \bar{J}\psi A_{QY_0}\bar{U} - B\bar{J}C\mathbf{h}(\bar{U}, PY_0)),
\end{aligned} \tag{7.13}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{u}(\nabla_X PY - A_{QY}X) &= \bar{g}(\phi X, \phi Y) + \bar{g}(\psi X, \psi Y) \\
&\quad + (d\bar{\sigma}(\bar{U}, \bar{V}) - 2)\bar{v}(X)\bar{v}(Y) - \bar{v}(X)(\bar{u}(\nabla_{\bar{U}}\bar{J}PY_0 \\
&\quad - A_{\bar{J}QY_0}\bar{U}) + \bar{v}(A_{QY_0}\bar{U} - \nabla_{\bar{U}}PY_0)),
\end{aligned} \tag{7.14}
$$

$$
\begin{aligned}
\bar{v}(\nabla_X PY - A_{QY}X) &= \bar{g}(\phi\bar{J}X, \phi Y) + \bar{g}(\psi\bar{J}X, \psi Y) \\
&\quad - (d\bar{\sigma}(\bar{U}, \bar{V}) - 2)\bar{v}(X)\bar{u}(Y) - \bar{v}(X)(\bar{v}(\nabla_{\bar{U}}\bar{J}PY_0 \\
&\quad - A_{\bar{J}QY_0}\bar{U}) + \bar{u}(\nabla_{\bar{U}}PY_0 + A_{QY_0}\bar{U}),
\end{aligned} \tag{7.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{h}(X, PY) - C\mathbf{h}(X,Y) + Q\nabla_X Y &= -\nabla^{\perp}_X QY - \bar{v}(X)(\mathbf{h}(\bar{U}, \bar{J}PY_0) \\
&\quad - Q\bar{J}B\mathbf{h}(\bar{U}, PY_0) - C\bar{J}C\mathbf{h}(\bar{U}, PY_0) \\
&\quad + \nabla^{\perp}_{\bar{U}}\bar{J}QY_0 - \bar{J}\nabla^{\perp QY_0}_{\bar{U}})
\end{aligned} \tag{7.16}
$$

dır.

İspat

$\bar{M}$ normal kompleks kontakt metrik manifoldunun bir yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için Eş. 4.3'den

$$
\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_X\bar{G})Y &= \bar{\sigma}(X)P\bar{J}Y - 2\bar{v}(X)\phi\bar{J}Y - \bar{u}(Y)\phi X - \bar{v}(Y)\phi\bar{J}X + 2\bar{v}(X)\phi\bar{J}Y_0 \\
&\quad - \bar{v}(X)(\bar{\nabla}_{\bar{U}}\bar{J})PY_0 + \bar{\sigma}(X)Q\bar{J}Y - 2\bar{v}(X)\psi\bar{J}Y - \bar{u}(Y)\psi X - \bar{v}(Y)\psi\bar{J}X \\
&\quad + \bar{v}(X)\psi\bar{J}Y_0 - \bar{v}(X)(\bar{\nabla}_{\bar{U}}\bar{J})QY_0 + \{-2\bar{v}(X)\bar{v}(Y) - \bar{v}(Y)\bar{v}(X) - \bar{u}(Y)\bar{u}(X) \\
&\quad + \bar{g}(X,Y) + d\bar{\sigma}(\bar{U}, \bar{V})\bar{v}(X)\bar{v}(Y)\}\bar{U} + \{2\bar{v}(X)\bar{u}(Y) + \bar{v}(Y)\bar{u}(X) - \bar{u}(Y)\bar{v}(X) \\
&\quad + \bar{g}(\bar{J}X, Y) - d\bar{\sigma}(\bar{U}, \bar{V})\bar{v}(X)\bar{u}(Y)\}\bar{V}
\end{aligned} \tag{7.17}
$$

dir. Diğer yandan Eş. 7.5 ve Eş. 7.6'dan

$$
\bar{g}(X,Y) = \bar{g}(\phi X, \phi Y) + \bar{g}(\psi X, \psi Y) + \bar{u}(X)\bar{u}(Y) + \bar{v}(X)\bar{v}(Y) \tag{7.18}
$$

ve

$$
\bar{g}(\bar{J}X, Y) = \bar{g}(\phi\bar{J}X, \phi Y) + \bar{g}(\psi\bar{J}X, \psi Y) + \bar{v}(X)\bar{u}(Y) - \bar{u}(X)\bar{v}(Y) \tag{7.19}
$$

elde edilir.

Ayrıca Eş. 7.5, Eş. 7.6, Eş. 7.8 ve Eş. 7.10'dan

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_{\bar{U}}\bar{J})PY_0 &= \phi\nabla_{\bar{U}}\phi\bar{J}PY_0 - \bar{J}\phi\nabla_{\bar{U}}PY_0 - B\bar{J}C\mathbf{h}(\bar{U},PY_0) + \psi(\nabla_{\bar{U}}\bar{J}PY_0) \\ &- \bar{J}\psi\nabla_{\bar{U}}PY_0 + \mathbf{h}(\bar{U},\bar{J}PY_0) - Q\bar{J}B\mathbf{h}(\bar{U},PY_0) - C\bar{J}C\mathbf{h}(\bar{U},PY_0) \\ &+ [\bar{u}(\nabla_{\bar{U}}\bar{J}PY_0) - \bar{v}(\nabla_{\bar{U}}\bar{P}Y_0)]\bar{U} + [\bar{v}(\nabla_{\bar{U}}\bar{J}PY_0) + \bar{u}(\nabla_{\bar{U}}PY_0)]\bar{V}\end{aligned} \tag{7.20}$$

ve

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_{\bar{U}}\bar{J})QY_0 &= -\phi A_{\bar{J}QY_0}\bar{U} + \bar{J}\phi A_{QY_0}\bar{U} - \psi A_{\bar{J}QY_0}\bar{U} + \bar{J}\psi A_{QY_0}\bar{U} \\ &+ \nabla^{\perp}_{\bar{U}}\bar{J}QY_0 - \bar{J}\nabla^{\perp}_{\bar{U}}QY_0 - [\bar{u}(A_{\bar{J}QY_0}\bar{U}) - \bar{v}(A_{QY_0}\bar{U})]\bar{U} \\ &- [\bar{v}(A_{\bar{J}QY_0}\bar{U}) + \bar{u}(A_{QY_0}\bar{U})]\bar{V}\end{aligned} \tag{7.21}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$(\bar{\nabla}_X\bar{G})Y = \bar{\nabla}_X\bar{G}Y - \bar{G}\nabla_XY$$

olup Eş. 7.8 ve Eş. 7.10'den

$$\begin{aligned}(\nabla_X\bar{G})Y &= \phi\nabla_XPY - \phi A_{QY}X - P\nabla_XY - B\mathbf{h}(X,Y) \\ &+ \psi\nabla_XPY - \psi A_{QY}X + \mathbf{h}(X,PY) - Q\nabla_XY + \nabla^{\perp}_XQY \\ &- C\mathbf{h}(X,Y) + (\bar{u}(\nabla_XPY) - \bar{u}(A_{QY}X))\bar{U} + (\bar{v}(\nabla_XPY) - \bar{v}(A_{QY}X))\bar{V}\end{aligned} \tag{7.22}$$

olur. Eş. 7.17 - Eş. 7.22 göz önüne alınıp teğet ve normal parçaların eşitliği kullanılarak Eş. 7.12, Eş. 7.13, Eş. 7.14, Eş. 7.15 ve Eş. 7.16 elde edilir.

Yukarıdaki ispata benzer aşamalar takip edilerek ve Eş. 4.4, Eş. 7.8 ve Eş. 7.11 eşitliklerinden aşağıdaki lemma elde edilir.

7.11. Lemma

$\bar{M}$ normal kompleks kontakt metrik manifoldunun bir yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}\phi\nabla_XP\bar{J}Y - \phi A_{Q\bar{J}Y}X &= P\bar{J}\nabla_XY - \bar{\sigma}(X)PY + 2\bar{u}(X)\phi\bar{J}Y \\ &+ \bar{u}(Y)\phi\bar{J}X - \bar{v}(Y)\phi X - 2\bar{u}(X)\phi\bar{J}Y_0 \\ &- \bar{u}(X)(\phi\nabla_{\bar{U}}\bar{J}PY_0 - \bar{J}\phi\nabla_{\bar{U}}PY_0 - \phi A_{\bar{J}QY_0}\bar{U} \\ &+ \bar{J}\phi A_{QY_0}\bar{U}),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\psi\nabla_X P\bar{J}Y - \psi A_{Q\bar{J}Y}X &= B\bar{J}\mathbf{h}(X,Y) - \sigma(X)QY + 2\bar{u}(X)\psi\bar{J} \\
&+ \bar{u}(Y)\psi\bar{J}X - \bar{v}(Y)\psi X - 2\bar{u}(X)\psi\bar{J}Y_0 \\
&- \bar{u}(X)(\psi\nabla_{\bar{U}}\bar{J}PY_0 - \bar{J}\psi\nabla_{\bar{U}}PY_0 \\
&- \psi A_{\bar{J}QY_0}\bar{U} + \bar{J}\psi A_{QY_0}\bar{U} - B\bar{J}C\mathbf{h}(\bar{U},PY_0)), \\
\bar{u}(\nabla_X P\bar{J}Y - A_{Q\bar{J}Y}X) &= -\bar{g}(\phi\bar{J}X,\phi Y) - \bar{g}(\psi\bar{J}X,\psi Y) \\
&- (d\sigma(\bar{U},\bar{V}) - 2)\bar{v}(X)\bar{v}(Y) + \bar{u}(X)(-\bar{u}(\nabla_{\bar{U}}\bar{J}PY_0 \\
&- A_{\bar{J}QY_0}\bar{U}) + \bar{v}(\nabla_{\bar{U}}PY_0 + A_{QY_0}\bar{U}), \\
\bar{v}(\nabla_X P\bar{J}Y - A_{Q\bar{J}Y}X) &= \bar{g}(\phi X,\phi Y) + \bar{g}(\psi X,\psi Y) \\
&+ (d\sigma(\bar{U},\bar{V}) - 2)\bar{u}(X)\bar{u}(Y) - \bar{u}(X)(\bar{u}(\nabla_{\bar{U}}PY_0 \\
&+ A_{QY_0}\bar{U}) + \bar{v}(\nabla_{\bar{U}}\bar{J}PY_0 - A_{\bar{J}QY_0}\bar{U}), \\
\mathbf{h}(X,P\bar{J}Y) - C\bar{J}\mathbf{h}(X,Y) - Q\bar{J}\nabla_X Y &= -\nabla^{\perp}_X Q\bar{J}Y - \bar{u}(x)(\mathbf{h}(\bar{U},\bar{J}PY_0) \\
&- Q\bar{J}B\mathbf{h}(\bar{U},PY_0) - C\bar{J}C\mathbf{h}(\bar{U},PY_0) \\
&+ \nabla^{\perp}_{\bar{U}}\bar{J}QY_0 - \bar{J}\nabla_{\bar{U}}^{\perp QY_0})
\end{aligned}
$$

dır.

7.12. Lemma

$\bar{M}$ normal kompleks kontakt metrik manifoldunun bir yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$
\begin{aligned}
\phi\nabla_X BN - \phi A_{CN}X - PA_N X &= \bar{v}(X)(\phi A_{\bar{J}BN}\bar{U} + \phi\bar{J}\nabla_U BN \\
&- \phi A_{\bar{J}CN}\bar{U} - \phi\bar{J}A_{CN}\bar{U}), \\
\psi\nabla_X BN - \psi A_{CN}X - B\nabla^{\perp}_X N &= \bar{\sigma}(X)B\bar{J}N + \bar{v}(X)(\psi A_{\bar{J}BN}\bar{U} \\
&+ \psi\bar{J}\nabla_{\bar{U}}BN + B\bar{J}C\mathbf{h}(\bar{U},BN) + \psi A_{\bar{J}CN}\bar{U} \\
&- \psi\bar{J}A_{CN}\bar{U} + B\bar{J}C\nabla^{\perp}_{\bar{U}}CN), \\
\bar{u}(\nabla_X BN - A_{CN}X) &= \bar{v}(X)[\bar{u}(A_{\bar{J}BN}\bar{U} + A_{\bar{J}CN}\bar{U}) \\
&+ \bar{v}(\nabla_{\bar{a}U}BN + A_{CN}\bar{U}) \\
\bar{v}(\nabla_X BN - A_{CN}X) &= \bar{v}(X)[-\bar{u}(\nabla_U BN - A_{CN}\bar{U}) \\
&+ \bar{v}(A_{\bar{J}BN}\bar{U} + A_{\bar{J}CN}\bar{U})], \\
\mathbf{h}(X,BN) + \nabla^{\perp}_X CN - QA_N X &= C\nabla^{\perp}_X N + \bar{\sigma}(X)C\bar{J}N - \bar{v}(X)[\nabla^{\perp}_{\bar{U}}B\bar{J}N \\
&+ -Q\bar{J}B\mathbf{h}(\bar{U},BN)\nabla^{\perp}_{\bar{U}}\bar{J}CN - Q\bar{J}C\nabla^{\perp}_{\bar{U}}CN \\
&- C\bar{J}C\nabla^{\perp}_{\bar{U}}CN]
\end{aligned}
$$

dır.

İspat

$X \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(T^{\perp}M)$ olsun. Eş. 4.3 ve Eş. 7.3'den

$$(\bar{\nabla}_X \bar{G})N = \bar{\sigma}(X)B\bar{J}N + \bar{\sigma}(X)C\bar{J}N - \bar{v}(X)(\bar{\nabla}_U \bar{J})BN - \bar{v}(X)(\bar{\nabla}_U \bar{J})CN \tag{7.23}$$

olur. Diğer yandan Eş. 7.8, Eş. 7.10 ve Eş. 7.11'den

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_{\bar{U}} \bar{J})BN &= \bar{\nabla}_{\bar{U}} \bar{J}BN - \bar{J}(\bar{\nabla}_{\bar{U}} BN) \\ &= -\phi A_{\bar{J}BN}\bar{U} - \phi \bar{J}\nabla_{\bar{U}} BN - \psi A_{\bar{J}BN}\bar{U} - \psi \bar{J}\nabla_{\bar{U}} BN - B\bar{J}C\mathbf{h}(U, \bar{B}N) \\ &\quad - [\bar{u}(A_{\bar{J}BN}\bar{U}) + \bar{v}(\nabla_{\bar{U}} BN)]\bar{U} - [\bar{v}(A_{\bar{J}BN}\bar{U}) - \bar{u}(\nabla_{\bar{U}} BN)]\bar{V} \\ &\quad + \nabla^{\perp}_{\bar{U}} \bar{J}BN - Q\bar{J}B\mathbf{h}(\bar{U}, BN) - C\bar{J}C\mathbf{h}(\bar{U}, BN)\end{aligned} \tag{7.24}$$

ve

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_{\bar{U}} \bar{J})CN &= \bar{\nabla}_{\bar{U}} \bar{J}CN - \bar{J}(\bar{\nabla}_{\bar{U}} CN) \\ &= -\phi A_{\bar{J}CN}\bar{U} + \phi \bar{J}A_{CN}\bar{U} - \psi A_{\bar{J}CN}\bar{U} + \psi \bar{J}A_{CN}\bar{U} - B\bar{J}C\nabla^{\perp}_{\bar{U}} CN \\ &\quad - (\bar{u}(A_{\bar{J}CN}\bar{U}) + \bar{v}(A_{CN}\bar{U}))\bar{U} - (\bar{v}(A_{\bar{J}CN}\bar{U}) - \bar{u}(A_{CN}\bar{U}))\bar{V} + \nabla^{\perp}_{\bar{U}} \bar{J}CN \\ &\quad - Q\bar{J}C\nabla^{\perp}_{\bar{U}} CN - C\bar{J}C\nabla^{\perp}_{\bar{U}} CN\end{aligned} \tag{7.25}$$

elde edilir. Eş. 7.3, Eş. 7.4, Eş. 7.8 ve Eş. 7.10'den

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_X \bar{G})N &= -\bar{\sigma}(X)B\bar{J}N + \bar{v}(X)(\phi A_{\bar{J}BN}\bar{U} + \phi \bar{J}\nabla_{\bar{U}} BN + \phi A_{\bar{J}CN}\bar{U} \\ &\quad - \phi \bar{J}A_{CN}\bar{U}) + \bar{v}(X)(\psi A_{\bar{J}BN}\bar{U} + \psi \bar{J}\nabla_{\bar{U}} BN + \psi A_{\bar{J}CN}\bar{U} \\ &\quad - \psi \bar{J}A_{CN}\bar{U} + B\bar{J}C\mathbf{h}(\bar{U}, BN) + B\bar{J}C\nabla^{\perp}_{\bar{U}} CN) + \bar{v}(X)[(\bar{u}(A_{\bar{J}BN}\bar{U}) \\ &\quad + \bar{v}(\nabla_{\bar{U}} BN) + \bar{u}(A_{\bar{J}CN}\bar{U}) + \bar{v}(A_{CN}\bar{U}))\bar{U} + (\bar{v}(A_{\bar{J}BN}\bar{U}) \\ &\quad - \bar{u}(\nabla_{\bar{U}} BN) + \bar{v}(A_{\bar{J}CN}\bar{U}) - \bar{u}(A_{CN}\bar{U}))\bar{V}] - \bar{v}(X)[\nabla^{\perp}_{\bar{U}} B\bar{J}N \\ &\quad - Q\bar{J}B\mathbf{h}(\bar{U}, BN) + \nabla^{\perp}_{\bar{U}} \bar{J}CN - Q\bar{J}C\nabla^{\perp}_{\bar{U}} CN - C\bar{J}C\nabla^{\perp}_{\bar{U}} CN] + \bar{\sigma}(X)C\bar{J}N\end{aligned} \tag{7.26}$$

olur. Böylece Eş. 7.23 ve Eş. 7.26'den teğet ve normal parçalar birbilerine eşitlenirse ispat tamamlanır.
Yukarıdaki ispata benzer adımlar izelenerek aşağıdaki lemma elde edilir.

7.13. Lemma

$\bar{M}$ normal kompleks kontakt metrik manifoldunun bir yarı-invaryant altmanifoldu M

olsun. Her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\phi\nabla_X B\bar{J}N-\phi A_{C\bar{J}N}X+PA_NX &= \bar{u}(X)(-\phi A_{\bar{J}BN}\bar{U}-\phi\bar{J}\nabla_U\\
&\quad-\phi A_{\bar{J}CN}\bar{U}+\phi\bar{J}A_{CN}\bar{U})\\
\psi\nabla_X B\bar{J}N-\psi A_{C\bar{J}N}X-B\bar{J}\nabla^{\perp}_X N &= \bar{\sigma}(X)BN+\bar{u}(X)(-\psi A_{\bar{J}BN}\bar{U}\\
&\quad-\psi\bar{J}\nabla_{\bar{U}}BN-B\bar{J}C\mathbf{h}(\bar{U},BN)-\psi A_{\bar{J}CN}\bar{U}\\
&\quad+\psi\bar{J}A_{CN}\bar{U}-B\bar{J}C\nabla^{\perp}_{\bar{U}}CN)\\
\bar{u}(\nabla_X B\bar{J}N-A_{C\bar{J}N}X) &= -\bar{u}(X)[\bar{u}(A_{\bar{J}BN}\bar{U}+A_{C\bar{J}N}\bar{U})\\
&\quad+\bar{v}(\nabla_U BN+A_{CN}\bar{U})]\\
\bar{v}(\nabla_X B\bar{J}N-A_{C\bar{J}N}X) &= -\bar{u}(X)[-\bar{u}(\nabla_U BN+A_{CN}\bar{U})\\
&\quad+\bar{v}(A_{\bar{J}BN}\bar{U}+A_{\bar{J}CN}\bar{U})]\\
\mathbf{h}(X,B\bar{J}N)+\nabla^{\perp}_X C\bar{J}N-QA_NX &= C\bar{J}\nabla^{\perp}_X N+\bar{\sigma}(X)CN+\bar{u}(X)[\nabla^{\perp}_{\bar{U}}B\bar{J}N\\
&\quad-Q\bar{J}B\mathbf{h}(\bar{U},BN)-C\bar{J}C\mathbf{h}(\bar{U},BN)+\nabla^{\perp}_{\bar{U}}\bar{J}CN\\
&\quad-Q\bar{J}C\nabla^{\perp}_{\bar{U}}CN-C\bar{J}C\nabla^{\perp}_{\bar{U}}CN]
\end{aligned}$$

dır.

$\bar{U}$ ve $\bar{V}$ vektör alanlarının herhangi bir X vektör alanı yönündeki kovaryant türevleri gözönüne alınıp teğet ve normal bileşenlere ayrılırsa aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

7.14. Lemma

$\bar{M}$ normal kompleks kontakt metrik manifoldunun bir yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. M üzerindeki herhangi bir X vektör alanı için

$$\begin{aligned}
&\nabla_X\bar{U}=-PX+\bar{\sigma}(X)\bar{V},\quad \mathbf{h}(X,\bar{U})=-QX,\\
&\nabla_X\bar{V}=-P\bar{J}X-\bar{\sigma}(X)\bar{U},\quad \mathbf{h}(X,\bar{V})=-Q\bar{J}X
\end{aligned}$$

dir.

Buradan aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç

$\bar{M}$ normal kompleks kontakt metrik manifoldunun bir yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Her $X\in\Gamma(\mathcal{D})$ için

$$\mathbf{h}(X,\bar{U}) = \mathbf{h}(X,\bar{V}) = 0 \tag{7.27}$$

$$\nabla_X \bar{U} = -PX + \bar{\sigma}(X)\bar{V}, \quad \nabla_X \bar{V} = -P\bar{J}X - \bar{\sigma}(X)\bar{U} \tag{7.28}$$

ve her $X \in \Gamma(\mathcal{D}^{\perp})$ için

$$\mathbf{h}(X,\bar{U}) = -QX, \ \mathbf{h}(X,\bar{V}) = -Q\bar{J}X \tag{7.29}$$

$$\nabla_X \bar{U} = \bar{\sigma}(X)\bar{V}, \quad \nabla_X \bar{V} = -\bar{\sigma}(X)\bar{U} \tag{7.30}$$

dir.

Sonuç

$\bar{M}$ normal kompleks kontakt metrik manifoldunun bir yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. O zaman

$$\mathbf{h}(\bar{U},\bar{U}) = \mathbf{h}(\bar{V},\bar{V}) = \mathbf{h}(\bar{U},\bar{V}) = 0$$

$$\nabla_{\bar{U}} \bar{U} = \bar{\sigma}(\bar{U})\bar{V}, \quad \nabla_{\bar{V}} \bar{U} = \bar{\sigma}(\bar{V})\bar{V}, \ \nabla_{\bar{U}} \bar{V} = -\bar{\sigma}(\bar{U})\bar{U}, \quad \nabla_{\bar{V}} \bar{V} = -\bar{\sigma}(\bar{V})\bar{U}$$

dir.

7.2.4. Normal kompleks kontakt metrik manifoldların yarı-invaryant altmanifoldları üzerindeki dağılımların integrallenebirliği

Bir kompleks kontakt metrik manifoldun kontakt dağılımı $\mathcal{H}$ nın, integrallenemeyen bir dağılım olduğu bilinmektedir. Bu bölümde $\mathcal{D}, \mathcal{D}^{\perp}, \mathcal{D}\oplus\mathcal{D}^{\perp}, \mathcal{D}\oplus sp\{\bar{U},\bar{V}\}, \mathcal{D}^{\perp}\oplus sp\{\bar{U},\bar{V}\}$ dağılımlarının integrallenebilirliği incelenecektir.

7.15. Lemma

M bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu olsun. O zaman her $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D}^{\perp})$, $Z \in sp\{\bar{U},\bar{V}\}^{\perp}$ için

$$\bar{g}(A_{\bar{G}X}Y, Z) = \bar{g}(A_{\bar{G}Y}X, Z) \tag{7.31}$$

$$\bar{g}(A_{\bar{H}X}Y, Z) = \bar{g}(A_{\bar{H}Y}X, Z) \tag{7.32}$$

$$\bar{g}(A_{\bar{J}X}Y, Z) = \bar{g}(A_{\bar{J}Y}X, Z) \tag{7.33}$$

dir.

İspat

$X, Y \in \Gamma(\mathcal{D}^{\perp})$ ve $Z \in \Gamma(TM)$ olsun. Bu durumda $\bar{G}X = QX \in TM^{\perp}$ dir ve

$$\bar{\nabla}_Y \bar{G}X = -A_{\bar{G}X}Y + \nabla^{\perp}_Y \bar{G}X \tag{7.34}$$

olur. Ayrıca

$$\bar{\nabla}_Y Z = \nabla_Y Z + \mathbf{h}(Y, Z)$$

olup buradan

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_Y Z, \bar{G}X) = \bar{g}(\mathbf{h}(Y, Z), \bar{G}X) \tag{7.35}$$

dir. $\bar{G}X \in TM^{\perp}$ olduğundan $\bar{g}(\bar{\nabla}_Y Z, \bar{G}X) + \bar{g}(Z, \bar{\nabla}_Y \bar{G}X) = 0$ ve Eş. 7.34'den

$$\bar{g}(A_{\bar{G}X}Y, Z) = \bar{g}(\mathbf{h}(Y, Z), \bar{G}X) \tag{7.36}$$

bulunur. Diğer yandan $\mathbf{h}$ simetrik olduğu için Eş. 7.34'den

$$\begin{aligned} \bar{g}(A_{\bar{G}X}Y, Z) &= -\bar{g}(\bar{G}\bar{\nabla}_Z Y, X) \\ &= \bar{g}((\bar{\nabla}_Z \bar{G})Y, X) - \bar{g}(\bar{\nabla}_Z \bar{G}Y, X) \end{aligned}$$

olur. Eş. 3.6 ve Eş. 3.11'den

$$\bar{g}((\bar{\nabla}_Z \bar{G})Y, X) = \bar{g}(d\sigma(Y, X)\bar{V}, Z) \tag{7.37}$$

ve böylece

$$\bar{g}(A_{\bar{G}X}Y, Z) = \bar{g}(d\sigma(Y, X)\bar{V}, Z) - \bar{g}(\bar{\nabla}_Z \bar{G}Y, X)$$

dir.Ayrıca $\bar{g}(\bar{G}Y, X) = 0$ olduğundan ve Eş. 7.8'den

$$\begin{aligned} \bar{g}(A_{\bar{G}X}Y, Z) &= \bar{g}(d\sigma(Y, X)\bar{V}, Z) + \bar{g}(\bar{\nabla}_Z X, \bar{G}Y) \\ &= \bar{g}(d\sigma(Y, X)\bar{V}, Z) + \bar{g}(\nabla_Z X + \mathbf{h}(Z, X), \bar{G}Y) \\ &= \bar{g}(d\sigma(Y, X)\bar{V}, Z) + \bar{g}(\mathbf{h}(Z, X), \bar{G}Y) \end{aligned}$$

bulunur.

Nihayet Eş. 7.37'den

$$\bar{g}(A_{\bar{G}X}Y, Z) = \bar{g}(d\sigma(Y, X)\bar{V}, Z) + \bar{g}(A_{\bar{G}Y}X, Z)$$

olarak bulunur. Eğer $Z \in sp\{\bar{U}, \bar{V}\}^{\perp}$ ise Eş. 7.31 elde edilir. Benzer adımlar izlenerek Eş. 7.32 ve Eş. 7.33 gösterilir.

7.16. Lemma

M bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(\mathcal{D}^{\perp})$ için $[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^{\perp})$ dir.

İspat

$X, Y \in \Gamma(\mathcal{D}^{\perp})$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \bar{g}([X, Y], \bar{U}) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X, \bar{U}) \\ &= -\bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{U}, Y) + \bar{g}(\bar{\nabla}_Y \bar{U}, X) \end{aligned}$$

dir. Böylece Eş. 7.14'den $\bar{g}([X, Y], \bar{U}) = 0$ bulunur. Ayrıca $\bar{g}([X, Y], \bar{V}) = 0$ olduğu benzer biçimde gösterilir. O halde $[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^{\perp})$ dir.

7.17. Teorem

Bir $\bar{M}$ normal kompleks kontakt metrik manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu üzerindeki anti-invaryant dağılım involütdür.

İspat

$X, Y \in \Gamma(\mathcal{D}^{\perp})$ olsun. Eş. 4.3 eşitliğinden

$$(\bar{\nabla}_X \bar{G})Y = \bar{\sigma}(X)\bar{H}Y + \bar{g}(X, Y)\bar{U}$$

olur. Ayrıca $\bar{G}Y \in T^{\perp}M$ olduğundan Eş. 7.8, Eş. 7.10'den

$$-A_{\bar{G}Y}X + \nabla^{\perp}_X \bar{G}Y - \bar{G}\nabla_X Y - \bar{G}\mathbf{h}(X, Y) = \bar{\sigma}(X)\bar{H}Y + \bar{g}(X, Y)\bar{U} \tag{7.38}$$

dir. X ve Y yer değiştirip elde edilen eşitlik Eş. 7.38'den çıkarılırsa

$$-\bar{G}[X,Y] = A_{\bar{G}Y}X - A_{\bar{G}X}Y - \nabla^{\perp}_{X}\bar{G}Y + \nabla^{\perp}_{Y}\bar{G}X + \bar{\sigma}(X)\bar{H}Y - \bar{\sigma}(Y)\bar{H}X \qquad (7.39)$$

bulunur.
Diğer yandan $N \in \Gamma(\vartheta)$ normal kesiti için Eş. 4.3 ve Eş. 7.10 eşitliklerinden

$$\bar{g}(\nabla^{\perp}_{Y}\bar{G}X, N) = -\bar{g}(A_{\bar{G}N}Y, X) \qquad (7.40)$$

olur. X ve Y yer değiştirilip elde edilen ifade Eş. 7.40'den çıkarılır ve $A_{\bar{G}N}$ nin simetrik olduğu kullanılırsa

$$\bar{g}(\nabla^{\perp}_{X}\bar{G}Y - \nabla^{\perp}_{Y}\bar{G}X, N) = 0$$

eşitliği elde edilir. Böylece $\nabla^{\perp}_{X}\bar{G}Y - \nabla^{\perp}_{Y}\bar{G}X \in G\bar{\mathcal{D}}^{\perp} \oplus \bar{H}\mathcal{D}^{\perp} \oplus \bar{J}\mathcal{D}^{\perp}$ olur. Ayrıca $Z \in \Gamma(\mathcal{D})$ için Eş. 7.39'dan

$$\bar{g}(-\bar{G}[X,Y], \bar{G}Z) = 0$$

ve böylece

$$\bar{g}([X,Y], \bar{G}^2 Z) = \bar{g}([X,Y], Z) = 0$$

dir. Sonuç olarak $[X,Y] \in \Gamma(\mathcal{D}^{\perp})$ dir.

7.18. Teorem

M bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu olsun. $\mathcal{D}^{\perp} \oplus sp\{\bar{U}, \bar{V}\}$ dağılımı involütdür.

İspat

$X \in \Gamma(\mathcal{D}^{\perp})$ ve $Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ olsun. Eş. 3.9'dan

$$\bar{g}([X,\bar{U}], Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{U}} Y, X)$$

dir. $Y = \bar{G}Z$ olacak biçimde $Z \in \Gamma(\mathcal{D})$ seçilsin. Bu durumda Eş. 4.3 ve Eş. 7.8'den

$$\bar{g}([X,U], Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{U}}\bar{G}Z, X) = -\bar{g}(\nabla_{\bar{U}}Z, \bar{G}X) = 0$$

elde edilir. Böylece $[X, \bar{U}] \in \Gamma(\mathcal{D}^{\perp} \oplus sp\{\bar{U}, \bar{V}\})$ olur. Aynı adımlar takip edilerek $[X, \bar{V}] \in \Gamma(\mathcal{D}^{\perp} \oplus sp\{\bar{U}, \bar{V}\})$ olduğu gösterilebilir. Nihayet Teorem 7.17 göz önüne alınarak ispat tamamlanır.

7.19. Tanım

M bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu olsun. Eğer M ne invaryant altmanifold (yani her $p \in M$ için $boy\mathcal{D}_p^{\perp} = 0$) ne de anti-invaryant altmanifold (yani her $p \in M$ için $boy\mathcal{D} = 0$) ise M ye bir proper (has) yarı-invaryant altmanifold denir.

Eğer manifold kontakt CR-altmanifold ise $\mathcal{D}$ dağılımının integrallenebilirliği hakkında keskin koşulllar verilebilmektedir, bkz [72]. Ancak yarı-invaryant altmanifoldun invaryant dağılımının integrallenebilirliği hakkında keskin koşullar sunabilmek proper altmanifold kavramı ile mümkün olmaktadır.

7.20. Teorem

Bir $\bar{M}$ normal kompleks kontakt metrik manifoldun proper yarı-invaryant altmanifoldu üzerindeki invaryant dağılım involute değildir.

İspat

$X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ için Eş. 3.9'dan

$\bar{g}([X, Y], \bar{U}) = 2\bar{g}(\bar{G}X, Y)$ ve $\bar{g}([X, Y], \bar{V}) = 2\bar{g}(\bar{H}X, Y)$

olur. $\mathcal{D}$ nin integrallenebilir olduğu kabul edilsin. O zaman $\bar{g}([X, Y], \bar{U}) = \bar{g}([X, Y], \bar{V}) = 0$ yani ikinci temel form sıfır olur.
Diğer yandan $Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ için $\bar{G}X$ ve $\bar{H}X$ birim vektör olacak şekilde sırasıyla $Y = \bar{G}X$ ve $Y = \bar{H}X$ seçilirse $2\bar{g}(\bar{G}X, Y) = 2\bar{g}(\bar{H}X, Y) = 1$ olacaktır. O halde kabul yanlıştır yani, $\mathcal{D}$ integrallenebilir değildir.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç

M bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun proper yarı-invaryant altmanifoldu olsun. $\mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^{\perp}$ dağılımı involüte olamaz.

$\mathcal{D} \oplus sp\{\bar{U}, \bar{V}\}$ dağılımının integrallenebilirlik koşullarının incelenmesi için aşağıdaki lemmalar verilecektir.

7.21. Lemma

M bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda her $X \in sp\{\bar{U}, \bar{V}\}$, $Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ ve $Z \in \Gamma(\mathcal{D}^{\perp})$ vektör alanları için

$$\bar{g}(\mathbf{h}(X,Y), \bar{G}Z) = \bar{g}(\nabla_X Z, \bar{G}Y)$$
$$\bar{g}(\mathbf{h}(X,Y), \bar{H}Z) = \bar{g}(\nabla_X Z, \bar{H}Y)$$
$$\bar{g}(\mathbf{h}(X,Y), \bar{J}Z) = \bar{g}(\nabla_X Z, \bar{J}Y)$$

dir.

İspat

$X \in sp\{\bar{U}, \bar{V}\}$, $Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ ve $Z \in \Gamma(\mathcal{D}^{\perp})$ olmak üzere $N = \bar{G}Z$ olsun. O zaman Eş. 7.35'den

$$\bar{g}(\mathbf{h}(X,Y), \bar{G}Z) = \bar{g}(A_{\bar{G}Z}X, Y) = -\bar{g}((\bar{\nabla}_X \bar{G})Z - \bar{G}\bar{\nabla}_X Z, Y)$$

dir. Diğer yandan Eş. 3.11'den

$$\bar{g}(\mathbf{h}(X,Y), \bar{G}Z) = \bar{g}(\nabla_X Z, \bar{G}Y)$$

bulunur. Aynı adımlar takip edilerek diğer eşitlikler gösterilir.

7.22. Lemma

M bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu olsun. O zaman $[X, \bar{U}]$ ve $[X, \bar{V}] \in \Gamma(\mathcal{D} \oplus sp\{\bar{U}, \bar{V}\})$ dir.

İspat

Eş. 7.8 ve Eş. 7.28 göz önüne alınırsa her $Y \in \Gamma(\mathcal{D}^{\perp})$ ve $X \in \Gamma(\mathcal{D})$ için

$$\bar{g}([X, \bar{U}], Y) = \bar{g}(\nabla_{\bar{U}} Y, X)$$

olur. $Z \in \Gamma(\mathcal{D})$ olmak üzere $X = \bar{G}Z$ alınsın. Bu durumda Eş. 7.35'den

$$\bar{g}(\nabla_{\bar{U}} Y, X) = \bar{g}(\mathbf{h}(\bar{U}, Z), \bar{G}Y) = 0$$

bulunur. Böylece $\bar{g}([X, \bar{U}], Y) = 0$ olur. Aynı adımlar takip edilerek $\bar{g}([X, \bar{V}], Y) = 0$ olduğu gösterililir ve ispat tamamlanır.

7.23. Teorem

M bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu olsun. $\mathcal{D} \oplus sp\{\bar{U}, \bar{V}\}$ involüt olması için gerek ve yeter şart

$$\mathbf{h}(X, \bar{G}Y) = \mathbf{h}(\bar{G}X, Y) \tag{7.41}$$

olmasıdır.

İspat

$X, Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ için Eş. 7.16'den

$$\mathbf{h}(X, PY) - C\mathbf{h}(X, Y) + Q\nabla_X Y + \nabla^{\perp}_X QY = 0 \tag{7.42}$$

dir. $\mathbf{h}$ simetrik olduğundan Y ve X in Eş. 7.42 de yerdeğiştirmesi ile elde edilen ifade Eş. 7.42'den çıkarılırsa $\mathbf{h}(X, PY) - \mathbf{h}(Y, PX) = Q[X, Y]$ bulunur. Bu durumda $[X, Y] \in \Gamma(\mathcal{D} \oplus sp\{\bar{U}, \bar{V}\})$ olması için gerek ve yeter şart Eş. 7.41'in sağlanmasıdır. Lemma 7.22'nin gözönüne alınmasıyla ispat tamamlanır.

Son olarak total umbilik altmanifold üzerine bir sonuç verilecektir.

7.24. Teorem

M bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu olsun. Eğer M bir total umbilik altmanifold ise M bir invaryant altmanifoldtur.

İspat

M bir total umbilik altmanifold olsun. O zaman $\forall Z \in \Gamma(\mathcal{D}^{\perp})$ için

$$\mathbf{h}(Z, \bar{U}) = \bar{g}(Z, \bar{U}) = 0$$

dir. Diğer yandan Eş. 7.29'den $\mathbf{h}(Z,\bar{U}) = -QZ = \bar{G}Z$ olur. Böylece $\bar{G}Z = 0$ olup $\mathcal{D}^{\perp} = 0$ bulunur. O halde M bir invaryant altmanifoldtur.

Sonuç

Bir normal kompleks kontakt metrik manifoldun total umbilik proper yarı-invaryant altmanifoldu yoktur.

8. SONUÇ VE ÖNERİLER

Kompleks kontakt geometri, bünyesinde birçok açık problem barındıran bir alan olarak geometricilerin ilgisini beklemektedir. Bu alanda yapılan çalışmalar kısıtlı olup özellikle Riemann geometrisi üzerine çalışmalar oldukça az sayıdadır. Bu tez çalışması ile bu alandaki boşluğun doldurulmasına katıkıda bulunulmuş ve içerdiği birçok orijinal sonuçla kompleks kontakt geometriyi çalışmak isteyen geometricilere kaynak oluşturulmuştur. Gerek ülkemiz, gerekse dünyadaki diğer geometricilerin bu tez çalışmasından yararlanmaları ve yapacakları yeni araştırmalarda kullanmaları hedeflenmiştir.

Kompleks kontakt manifoldların Riemann geometrisi üzerine yeni ve orijinal sonuçların elde edildiği bu tez çalışması ile normal kompleks kontakt metrik manifoldların eğrilik özellikleri ve altmanifoldları ele alınmıştır. Eğrilik özellikleri üzerine elde edilen sonuçlar ileryen çalışmalarda kullanılacak ve konunun detaylı çalışılmasını sağlayacaktır. Ayrıca bir kompleks hemen hemen kontakt manifoldun normal olması şartı G ve H yapı tensörlerinin kovaryant türevleri cinsinden verilmiştir. Bu sonuç altmanifold teorisinin çalışılmasında oldukça önemlidir. Eğrilik tensörleri üzerine elde edilen sonuçlar kompleks kontakt manifoldların reel kontakt manifoldlardan önemli bir farkını ortaya koymaktadır. Bunun yanında simetri şartları altında ulaşılan neticeler kompleks kontakt geometrideki simetri çalışmalarına ışık tutmaktadır.

Kontakt geometrinin önemli bir metrik yapısı $\eta-$Einstein yapının kompleks kontakt geometri için tanımı ve özelliklerinin verilmesi daha sonraki çalışmalarda elde edilecek sonuçların sunulmasını kolaylaştıracaktır. Çalışmanın en önemli bölümlerinden biri olan normal kompleks kontakt metrik manifoldların altmanifold teorisi üzerine verilen tanım ve sonuçlar diğer altmanifold sınıflarının çalışılmasına yönelimi sağlayacaktır.

Bu çalışmada sunulan sonuçlardan faydalanılarak normal kompleks kontakt metrik manifoldlar üzerinde diğer eğrilik tensörleri incelenebilir, Ricci eğriliği üzerine yeni çalışmalar yapılabilir ve normal kompleks kontakt metrik manifoldların farklı sınıflardaki altmanifoldları incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Aminova, A. V. (2003). Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds. *Journal of Mathematical Sciences*, 113(3), 367-470.

2. Baikoussis, C., Blair, D. E., and Gouli-Andreou, F. (1998). Holomorphic Legendre curves in the complex Heisenberg group, *Bulletin Institute of Mathematics, Academia Sinica* , 26 , 179-194.

3. Bejancu, A., and Papaghiuc, N. (1981). Semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold. *Scientific Annals of the Alexandru Ioan Cuza University of Iasi* , 27, 163-170.

4. Bejancu, A., and Papaghiuc, N. (1984). Almost semi-invariant submanifolds of a Sasakıan manifold. *Bulletin Mathématique De La Société Des Sciences Mathématiques De La République Socialiste De Roumanie*, 76, (1), 13-30.

5. Bejancu, A. *Geometry of CR-submanifolds.*(First Edition). (2012). New York: Springer Science and Business Media, 39-50.

6. Besse, A. L. *Einstein manifolds.* (First Edition).(2007).New York: Springer Science and Business Media, 53-60.

7. Blair, D. E., and Ishihara, S. (1978). Projectable almost complex contact structures. *Kodai Mathematical Journal*, 1(1), 75-84.

8. Blair, D. E., and Turgut Vanli, A. (2006). Corrected energy of distributions for 3-Sasakian and normal complex contact manifolds. *Osaka Journal of Mathematics*, 43(1), 193-200.

9. Blair, D. E., and Korkmaz, B. (2009). Special directions in complex contact manifolds. *Contributions to Algebra and Geometry*, 50(2), 309-325.

10. Blair, D. E. (2010). *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds.* (Second edition). New York: Springer Science and Business Media, 233-263.

11. Blair, D. E., and Martín-Molina, V. (2011). Bochner and conformal flatness on normal complex contact metric manifolds. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 39(3), 249-258.

12. Blair, D. E., and Mihai, A. (2012). Symmetry in complex contact geometry. *Journal of Mathematics*, 42(2), 20I2.

13. Blair, D. E., and Mihai, A. (2012). Homogeneity and local symmetry of complex (κ, μ)-spaces. *Israel Journal of Mathematics*, 187(1), 451-464.

14. Boothby, W. M. (1961). Homogeneous complex contact manifolds. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* , 3, 144-154.

15. Boothby, W. M. (1962). A note on homogeneous complex contact manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 13(2), 276-280.

16. Boyer, C., and Galicki, K. *Sasakian geometry.* (First edition). (2008). New York: Oxford Univ. Press.

17. Fetcu, D. (2006) An adapted connection on a strict complex contact manifold. *In Proceedings of the 5th Conference of Balkan Society of Geometers*,1, 54-61.

18. Fetcu, D. (2006). Harmonic maps between complex Sasakian manifolds. *Rendiconti del Seminario Matematico. Universita e Politecnico Torino*, 64, 319-329.

19. Foreman, B. (2000). Complex contact manifolds and hyperkähler geometry. *Kodai Mathematical Journal*, 23(1), 12-26.

20. Foreman, B. (2010). Discrete groups and the complex contact geometry of $SL(2,\mathbb{C})$. *Transactions of the American Mathematical Society*, 362(8), 4191-4200.

21. Foreman, B. J. (1996). *Variational problems on complex contact manifolds with applications to twistor space theory*, PhD Thesis, Michigan State University, USA.

22. Foreman, B. (1999). Three-dimensional complex homogeneous complex contact manifolds. *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 4(1), 53-67.

23. Foreman, B. (2000). Boothby-Wang fibrations on complex contact manifolds. *Differential Geometry and its Applications*, 13(2), 179-196.

24. Foreman, B. (2002). Decompositions and the complex contacts structures of $Sl(2,\mathbb{C})$. *Kungpook mathematical journal*, 42(2), 351-351.

25. Foreman, B. (2006). Complex contact Lie groups and generalized complex Heisenberg groups. *Differential Geometry and its Applications*, 24(5), 443-446.

26. Geiges, H. (2001). A brief history of contact geometry and topology. *Expositiones Mathematicae*, 19(1), 25-53.

27. Harris, J. (1978). *Principles of algebraic geometry.* Pure and Applied Mathematics. (First edition). New York: Wiley-Interscience John Wiley and Sons, 12-16.

28. Houh, C. S. (1976). On the holonomy group of a normal complex almost contact manifold. *In Kodai Mathematical Seminar Reports* , 28(1), 72-77.

29. Imada, M. (2015). Complex almost contact metric structures on complex hypersurfaces in hyperkahler manifolds. *arXiv preprint arXiv:1511.00890*.

30. Imada, M. (2014). Construction of complex contact manifolds via reduction. *Tokyo Journal of Mathematics*, 37(2), 509-522.

31. Ishihara, S., and Konishi, M. (1979). Real contact 3-structure and complex contact structure. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 3, 151-161.

32. Ishihara, S., and Konishi, M. (1980). Complex almost contact manifolds. *Kodai Mathematical Journal*, 3(3), 385-396.

33. Ishihara, S., and Konishi, M. (1982). Complex almost contact structures in a complex contact manifold. *Kodai Mathematical Journal*, 5(1), 30-37.

34. Ishihara, S. (1974). Quaternion Kählerian manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 9(4), 483-500.

35. Ishii, Y. (1957). On conharmonic transformations. *Tensor (NS)*, 7(2), 73-80.

36. Jayne, N. (1994). Legendre foliations on contact metric manifolds. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 49(01), 173-173.

37. Kholodenko, A. L. (2013). (First Edition). Singapore: *Applications of contact geometry and topology in physics.* New York: World Scientific, 1-3.

38. Kobayashi, S. (1959). Remarks on complex contact manifolds. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 10(1), 164-167.

39. Kodama, H. (2002). Complex contact three manifolds with Legendrian vector fields. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, 78(4), 51-54.

40. Kodaira, K. (2006). *Complex manifolds and deformation of complex structures.* .(First Edition). New York: Springer, 1-23.

41. Kon, M. (1976). Invariant submanifolds in Sasakian manifolds. *Mathematische Annalen*, 219(3), 277-290.

42. Korkmaz, B. (1998). A curvature property of complex contact metric structures. *Kyungpook Mathematical Journal*, 38(2), 473-473.

43. Korkmaz, B. (2003). A nullity condition for complex contact metric manifolds. *Journal of Geometry*, 77(1-2), 108-128.

44. Korkmaz, B. (2000). Normality of complex contact manifolds. *Journal of Mathematics*, 30(4).

45. Lin, T. Y. (1963). On complex manifolds with certain structures which are related to complex contact structures. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 15(3), 187-202.

46. Mihai, A. (December, 2011). *Normal Complex Contact Metric Manifolds.* Paper presented at The 10th Pacific Rim Geometry Conference 2011, Osaka-Fukuoka, Japan.

47. Nomizu, K, Smyth, B. (1968). Differential geometry of complex hypersurfaces II. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 20(3), 498-521.

48. Okumura, M. (1962). Some remarks on space with a certain contact structure. *Tohoku Mathematical Journal*, Second Series, 14(2), 135-145.

49. Ozan, Y. (2016) *Türevlenebilir Manifoldlara Giriş.*(1.Baskı). Ankara: Orta Doğu Teknik Üniversitesi Yayınları, 100-150.

50. Sasaki, S. (1965). *Almost contact manifolds.* Lecture notes, (First edition), Sendal, Japan: Mathematical Institute, Tohoku University, 1-15.

51. Sasaki, S. (1960). On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 12(3), 459-476.

52. Sasaki, S., and Hatakeyama,Y. (1961) On differentiable manifolds with certain structure which are closely related to almost contact structure II. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series* J. 13 , 281-294.

53. Sato, H. (1999). *Algebraic topology: an intuitive approach.* (First edition). New York: American Mathematical Soc., 70-80.

54. Shaikh, A. A., and Kundu, H. (2014). On equivalency of various geometric structures. *Journal of Geometry*, 105(1), 139-165.

55. Shaikh, A. A., and Kundu, H. (2016). On some curvature restricted geometric structures for projective curvature tensor. *arXiv preprint arXiv:1609.04749*.

56. Shanahani, P.D ve Zill D. G, (2013) *Kompleks Analiz ve Uygulamalari* (Çeviri Editörü: Prof. Dr. Ahmet Dernek). Ankara: Nobel Yayınları, (Eserin orijinali 2003 de yayımlandı), 70-85.

57. Shibuya, Y. (1978). On the existence of a complex almost contact structure. *Kodai Mathematical Journal*, 1(2), 197-204.

58. Smyth, B. (1967). Differential geometry of complex hypersurfaces. *Annals of Mathematics*, 246-266.

59. Spivak, M. (1971). *Calculus on manifolds: a modern approach to classical theorems of advanced calculus.* Westview Press.

60. Synge, J. L., and Schild, A. (1969). *Tensor calculus* . (First edition). New York: Courier Corporation, 1-50.

61. Szabó, Z. I. (1985). Structure theorems on Riemannian spaces satisfying R (X, Y).R= 0. *Geometriae Dedicata*, 19(1), 65-108.

62. Tricerri, F., and Vanhecke, L. (1981). Curvature tensors on almost Hermitian manifolds. *Transactions of the American Mathematical Society*, 267(2), 365-398.

63. Turgut Vanli, A., and Blair, D. E. (2006). The Boothby-Wang fibration of the Iwasawa manifold as a critical point of the energy. *Monatshefte für Mathematik*, 147(1), 75-84.

64. Turgut Vanli, A., and Unal, I. (2015). Curvature Properties of Normal Complex Contact metric Manifolds. *arXiv preprint arXiv:1510.05916.*

65. Turgut Vanli, A., and Unal, I. (2017). Conformal, concircular, quasi-conformal and conharmonic flatness on normal complex contact metric manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14(05), 1750067.

66. Wolf, J. A. (1965). Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.*, 14, 1033-1047.

67. Yano, K., and Sawaki, S. (1968). Riemannian manifolds admitting a conformal transformation group. *Journal Differential Geometry*, 2(1), 161.

68. Yano, K., and Kon, M. (1985). *Structures on manifolds* (First edition). New Yordk: World scientific, 100-150.

69. Yano, K. (1940). Concircular geometry I. Concircular transformations. *Proceedings of the Imperial Academy*, 16(6), 195-200.

70. Yano, K., and Ishihara, S. (1966). The $f-$structure induced on submanifolds of complex and almost complex spaces. *In Kodai Mathematical Seminar Reports* , 18(2), 120-160.

71. Yano, K., and Kon, M. (1976). *Anti-invariant submanifolds.* (1st. edition) New York: M. Dekker.

72. Yano, K., and Kon, M. *Contact CR submanifolds.* Birkhäuser Boston, 1983. 43-75.

73. Yano, Kentaro, and Masahiro Kon. *CR submanifolds of Kaehlerian and Sasakian manifolds. Springer Science Business MediaVol.* 30. , 2012.

74. Yıldırım, H. (2016). On the geometry of complex $(\kappa, \mu)-$spaces. *Mathematische Nachrichten*, 289(17-18), 2312-2322.

75. Yıldırım, C., and Erdogan, E.F, (2017). On Semi-invariant Submanifolds of Almost Complex Contact Metric Manifolds. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics* 851-862.

76. Yıldırım, C., and Erdogan, E.F, (2016). On $\bar{G} - J$ anti-invariant submanifolds of almost complex contact metric manifolds, *New Trends in Mathematical Sciences*, 4(3), 277-289.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	ÜNAL, İnan
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	01.09.1983, Çorum
Medeni hali	:	Evli
Telefon	:	05064025439
e-mail	:	inanunal@gmail.com
		inanunal@munzur.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi /Matematik Böl.	2017
Yüksek Lisans	Fırat Üniversitesi /Matematik Böl.	2012
Yüksek Lisans	Ankara Üniv./Eğitim Bil.Ens.(Tezsiz)	2008
Lisans	Ankara Üniversitesi/Matematik Böl.	2006
Lise	Çorum Eti Lisesi	2000

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2010-Devam ediyor	Munzur Üniversitesi	Öğretim Görevlisi
2007-2010	Halkbankası Çorum Şubesi	Servis Görevlisi
2006-2007	Özel Eğitim Kurumları	Öğretmen

Yayınlar

1. Turgut Vanli, A., and Unal, I. (2017). Conformal, concircular, quasi-conformal and conharmonic flatness on normal complex contact metric manifolds. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 14 (05), 1750067.

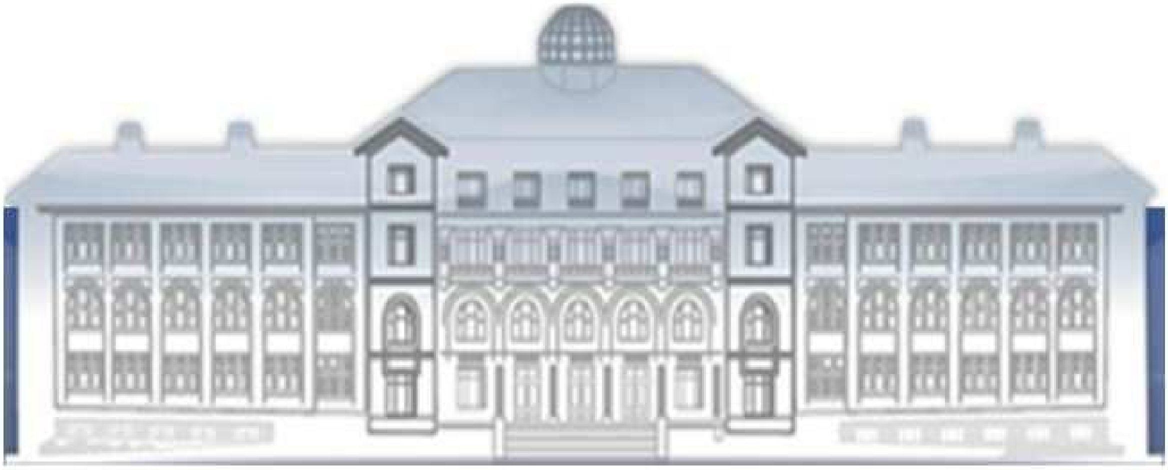
2. Turgut Vanli, A., and Unal, I. (2017) On Complex $\eta-$Einstein Normal Complex Contact Metric Manifolds, *Communications in Mathematics and Applications*, Accepted.

Kitaplar

1. Ünal, S. ve Ünal, İ. (2017). *YGS Matematik Soru Bankası.* (1. baskı). Çorum: Matematikservisi Yayınları.

Sempozyum ve Konferanslar

1. Unal I. and Bektaş M. (2012, 13-16 Haziran). *On The Gauss-Bonnet-Grotemeyer Theorem.* 10.Geometri Sempozyumunda sunuldu, BALIKESİR.
2. Turgut Vanlı A. and Unal I. (2015,7-9 Eylül). *On Curvature Properties of Normal Kompleks Kontakt Metric Manifolds.* 28. Ulusal Matematik Sempoyuzmunda sunuldu, Antalya.
3. Turgut Vanlı A. and Unal I. (2016, 12-14 May). *On Conformal, Concırcular and Quası-Conformal Curvature Tensor of Normal Complex Contact Metric Manifolds.* Paper presented at the International Conference on Mathematics and Mathematics Education, Elazığ.
4. Turgut Vanlı A. and Unal I. (2016, 25-28 May) *H-curvature Tensors of IK-normal Complex Contact Metric Manifolds.* Paper presented at the 14th International Geometry Symposium, Denizli.
5. Turgut Vanlı A. and Unal İ. (2017, 11-13 May)*On Complex Sasakian Manifolds.* Paper presented at the International Conference on Mathematics and Mathematics Education, Şanlıurfa.
6. Unal İ. and Turgut Vanlı A. (2017, 11-13 May) *Ricci Solitons on Complex Sasakian Manifolds.* Paper presented at the International Conference on Mathematics and Mathematics, Şanlıurfa.
7. Turgut Vanlı A. and Unal İ. (2017, 3-6 July) *On complex $\eta-$Einstein normal complex contact metric manifolds.* Paper presented at the 15th International Geometry Symposium, Amasya.



GAZİ GELECEKTİR...