

T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

SAYILAR TEORİSİNİN GRAF
TEORİDE UYGULAMALARI

Sevil DİNÇER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Prof. Dr. Halil ARDAHAN

Konya – 2014

T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

BİLİMSEL ETİK SAYFASI

Öğrencinin	Adı Soyadı	Sevil DİNÇER
	Numarası	098307041011
	Ana Bilim/ Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı/ Matematik Eğitimi Bilim Dalı
	Programı	Tezli Yüksek Lisans
	Tezin Adı	Sayılar Teorisinin Graf Teoride Uygulamaları

Bu tezin proje safhasından sonuçlanmasına kadarki bütün süreçlerde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını bildiririm.





Sevil DİNÇER

T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ KABUL FORMU

Öğrencinin	Adı Soyadı	Sevil DİNÇER
	Numarası	098307041011
	Ana Bilim/ Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi
	Anabilim Dalı/ Matematik Eğitimi Bilim Dalı	Matematik Eğitimi Bilim Dalı
	Programı	Tezli Yüksek Lisans
Tez Danışmanı	Prof. Dr. Halil ARDAHAN	
Tezin Adı	Sayılar Teorisinin Graf Teoride Uygulamaları	

Yukarıda adı geçen öğrenci tarafından hazırlanan "Sayılar Teorisinin Graf Teoride Uygulamaları" başlıklı bu çalışmada, 15.06.2023 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliğiyle başarılı bulunarak, jüriimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Unvanı, Adı Soyadı	Danışman ve Üyeler	İmza
Prof. Dr. Halil ARDAHAN	Danışman	
Doç. Dr. Bünyamin AYDIN	Üye	
Doç. Dr. Ahmet ERDOĞAN	Üye	

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam sırasında bana danışmanlık yaparak emeğini esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Halil ARDAHAN hocama, sevgi ve fedakârlıklarını esirgemeyen, maddi ve manevi her zaman yanımda olan aileme, değerli eşim Mehmet Ali DİNÇER ve kızım Hifa DİNÇER' e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarına maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a teşekkürler.

Sevil DİNÇER
KONYA-2014

T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Adı Soyadı	Sevil DİNÇER
Numarası	098307041011
Ana Bilim/ Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı/ Matematik Eğitimi Bilim Dalı
Programı	Tezli Yüksek Lisans
Tez Danışmanı	Prof. Dr. Halil ARDAHAN
Tezin Adı	Sayılar Teorisinin Graf Teoride Uygulamaları

ÖZET

Bir G grafi, V düğümler kümesi ile E kenarlar kümesinden oluşur ve $G = (V, E)$ ile gösterilir. Belli kurallar altında düğümlere, kenarlara veya her ikisine de tamsayılar kümesinden elemanlar atanarak grafların etiketleme yapıları. Graf teori, alışılmışın dışında bir problemin çözümü olarak ortaya çıkarken günümüzde birçok alanda kullanılmaktadır. Matematikte ise modern cebirin önemli alanlarından biri haline gelmiştir. Ayrıca, graf teori matematik eğitiminde matematiksel modelleme gibi alanlarda işlevseldir.

Bu çalışmada, Euler' in Phi fonksiyonunun bir genellemesi olan Jordan totient fonksiyonu kullanılarak yeni bir graf etiketleme tanımı yapılmıştır. Bu yeni tanımın hangi tür graflarda uygulanabildiği incelenmiştir. Ayrıca graf teori kullanılarak matematiksel etkinlikler oluşturulmuştur.

T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin	Adı Soyadı	Sevil DİNÇER
	Numarası	098307041011
	Ana Bilim/ Bilim Dalı	Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı/ Matematik Eğitimi Bilim Dalı
	Programı	Tezli Yüksek Lisans
	Tez Danışmanı	Prof. Dr. Halil ARDAHAN
	Tezin İngilizce	Applications of Number Theory to Graph Theory

SUMMARY

A graph $G = (V, E)$ is consisting of two sets V and E . The elements of V are called vertices, and the elements of E are called edges. A graph labeling is an assignment of integers to the vertices or edges, or both, subject to certain conditions. An unusual solution to the problem appears to be the graph theory used in many areas today. In mathematics, it has become one of the important areas of modern algebra. Also, graph theory, mathematical modeling in mathematics education is functional in areas such as.

In this study, Euler' s Phi function, which is Jordan totient function were made using the new definition of a graph theory. The new kind of definition which can be applied to graphs were examined. Also mathematical activities were created using graph theory.

İÇİNDEKİLER

Bilimsel Etik Sayfası.....	ii
Tez Kabul Formu.....	iii
Önsöz.....	iv
Özet	v
Summary.....	vi
İçindekiler.....	vii
Simgeler	viii
Şekiller Listesi.....	ix
Giriş.....	1
1. Graf Teorinin Tanım ve Teoremleri	3
2. Graf Etiketleme.....	16
2.1. <i>Graceful</i> Etiketleme.....	17
2.2. <i>Harmonious</i> Etiketleme.....	22
2.3. Asal Etiketleme.....	24
2.4. Kare Toplam Etiketleme.	30
3. <i>Jordan</i> Toplam Grafi.....	35
3.1. <i>Jordan</i> Toplam Grafi... ..	36
4. Graf Teorinin Matematik Eğitiminde Uygulamaları.....	41
5. Sonuç ve Öneriler.....	53
Kaynaklar	54
Özgeçmiş	56

SİMGELER

C_n	:	n düğümlü devir graf
$\deg(v)$:	bir v düğümünün derecesi
$d(s, t)$:	s ve t düğümleri arasındaki en kısa yol (mesafe)
E	:	kenarlar kümesi
\bar{G}	:	G 'nin bütünleyeni
$G_1 \cup G_2$:	bileşim grafi
$G_1 + G_2$:	graflarda toplama işlemi
$G_1 \times G_2$:	grafların kartezyen çarpımı
$G[G_2]$:	grafların bileşkesi
H_n	:	n düğümlü dümen graf
$J_k(r)$:	<i>Jordan</i> 'in <i>totient</i> fonksiyonu
K_n	:	n düğümlü tam graf
$K_{m,n}$:	tam ikili graf
K_{n_1, n_2, \dots, n_k}	:	çoklu graf
P_n	:	n düğümlü yol grafi
Q_n	:	n küp graf
$\langle S \rangle$:	indüklenmiş alt graf
T	:	ağaç
V	:	düğüm kümesi
(V, E)	:	V düğümler kümesi ve E kenarlar kümesi olan graf
W_n	:	tekerlek graf
\bar{W}_n	:	dişli graf
\mathbb{Z}^+	:	pozitif tamsayılar kümesi
$\varphi(n)$:	<i>Euler</i> 'in <i>Phi</i> fonksiyonu
$\mu(n)$:	<i>Möbius</i> fonksiyonu

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil-1.1. (5,5) graf.....	3
Şekil-1.2. Basit graf.....	4
Şekil-1.3. Genel graf.....	4
Şekil-1.4. Yönlendirilmiş graf.....	4
Şekil-1.5. Kısmi yönlendirilmiş graf.....	5
Şekil-1.6. Graf.....	5
Şekil-1.7. 5-regüler graf.....	6
Şekil-1.8. Graf ve derece dizisi.....	6
Şekil-1.9.a. Alt graf.....	7
Şekil-1.9.b. Yayılan alt graf.....	7
Şekil-1.9.c. İndüklenmiş alt graf.....	7
Şekil-1.10. Yürüyüş.....	8
Şekil-1.11. Yol grafi.....	8
Şekil-1.12. C_3 Devir graf.....	8
Şekil-1.13.a. Bağlantılı graf.....	9
Şekil-1.13.b. Bağlantısız graf.....	9
Şekil-1.14. <i>Euler</i> grafi.....	9
Şekil-1.15. Tam graf K_4	9
Şekil-1.16.a. İkili graf.....	10
Şekil-1.16.b. Tam ikili graf $K_{3,4}$	10
Şekil-1.17. $K_{1,6}$ yıldız graf.....	10
Şekil-1.18. Köklü ağaç.....	11
Şekil-1.19. 3-lü ağaç.....	11
Şekil-1.20. Tırtıl.....	12
Şekil-1.21.a. G grafi.....	12
Şekil-1.21.b. \overline{G} grafi.....	12
Şekil-1.22. $G_1 \cup G_2$	12
Şekil-1.23. Toplam grafi.....	13
Şekil-1.24.a. W_n grafi.....	13
Şekil-1.24.b. \overline{W}_n grafi.....	13
Şekil-1.24.c. H_n grafi.....	13
Şekil-1.25. Graflarda kartezyen çarpım.....	14
Şekil-1.26. Grafların bileşkesi.....	14
Şekil-2.1.1. $q=3$ ve $q=4$ için <i>graceful</i> graf.....	17
Şekil-2.1.2. P_6 <i>graceful</i> grafi.....	18
Şekil-2.1.3. Tırtıl grafin <i>graceful</i> etiketlemesi.....	18
Şekil-2.1.4. K_4 tam grafinin <i>graceful</i> etiketlemesi.....	18
Şekil-2.1.5. $K_{1,4}$ tam ikili <i>graceful</i> grafi.....	18
Şekil-2.1.6. $K_{1,4}$ tam ikili <i>graceful</i> grafi.....	19
Şekil-2.1.7. <i>Graceful</i> graf ve alt grafi.....	19
Şekil-2.1.8. 2 kenarlı grafin $2!$ tane <i>graceful</i> etiketlemesi.....	19

Şekil-2.1.9. Euler grafi.....	20
Şekil-2.2.1. <i>Harmonious</i> graf.....	22
Şekil-2.2.2. Tırtıl <i>harmonious</i> graf.....	22
Şekil-2.2.3. $n=5$ için C_5 <i>harmonious</i> grafi.....	23
Şekil-2.2.4. $K_{1,4}$ <i>harmonious</i> grafi.....	23
Şekil-2.3.1. Asal etiketleme.....	24
Şekil-2.3.2. P_4 asal graf.....	24
Şekil-2.3.3. C_5 asal graf.....	24
Şekil-2.3.4. K_3 asal graf.....	25
Şekil-2.3.5. Asal tırtıl graf.....	25
Şekil-2.3.6. Asal ikili ağaç graf.....	25
Şekil-2.3.7. Asal W_8 grafi.....	25
Şekil-2.3.8. $n=5$ için üst üçgen matris.....	26
Şekil-2.3.9. $n=5$ için maksimum kenarlı asal graf.....	27
Şekil-2.3.10. Düğüm asal etiketleme.....	27
Şekil-2.3.11. Yüksek düğüm asal etiketleme.....	27
Şekil-2.3.12. P_n toplam asalgraf.....	28
Şekil-2.3.13. $K_{1,4}$ toplam asal graf.....	29
Şekil-2.3.14. C_6 toplam asal graf.....	30
Şekil-2.4.1. $P_2 \times P_3$ kare toplam grafi.....	30
Şekil-2.4.2. K_4 kare toplam grafi.....	31
Şekil-2.4.3. C_5 kare toplam graf.....	31
Şekil-2.4.4. Kare toplam ağaç graf.....	31
Şekil-2.4.5. $K_{2,3}$ kare toplam grafi.....	32
Şekil-2.4.6. Asal kare toplam graf.....	32
Şekil-2.4.7. Asal graf.....	33
Şekil-2.4.8. K_2 asal kare toplam graf.....	34
Şekil-2.4.7. $K_{1,2}$ asal kare toplam graf.....	34
Şekil-3.1.1. <i>Jordan</i> toplam grafi.....	36
Şekil-3.1.2. $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ değerleri için yol <i>Jordan</i> toplam grafları.....	37
Şekil-3.1.3. $K_{1,4}$ <i>Jordan</i> toplam grafi.....	38
Şekil-3.1.4. Tırtıl <i>Jordan</i> toplam graf.....	38
Şekil-3.1.5. T_7 <i>Jordan</i> toplam grafi.....	39
Şekil-3.1.6. $P_3 \cup P_5$ <i>Jordan</i> toplam grafi.....	40
Şekil-4.1. Araştırmacı problem çözme süreci.....	42

GİRİŞ

Graf teori, matematiğin yapısal ilişkilerini inceleyen bir dalıdır. Bireyler, davranışlar, birimler ve günlük hayatta karşılaşılan problem durumları gibi olguların, nesnelerin düğümlerle ve nesnelere arası ilişkilerin de doğru parçaları ile ifade edilmesiyle oluşturulan modellemeye ise graf adı verilir. Bu modelleme ile kompleks halde bulunan problem durumları organize edilip görselleştirilerek daha basit ve anlaşılır hale gelmektedir.

1736 yılında Leonhard *Euler*'in Königsberg köprü problemini çözmesiyle graf teorisinin temelleri atılmıştır. 1847 yılında Kirchhof, elektrik ağlarının özelliklerini incelerken ağaçlarla ilgili teori geliştirmiştir. 1857'de A. Cayley, hidrokarbonların doymuş izomerlerini sayarken ağaçları keşfetmiştir. 1976'da Kenneth Appel ve Wolfgang Haken tarafından 4 renk problemi olarak bilinen sınır şehirleri farklı renklere boyamak şartıyla haritanın 4 renk ile boyanabileceğine dair problemin bilgisayar yardımı ile çözülmesi graf teorisini araştırmacılar için gözde alanlarından biri haline getirmiştir. Günümüzde ise graf teorisi kimya, elektrik, ekoloji, arkeoloji, gelişim psikolojisi, sosyal bilimler, eğitim, radyo frekansları gibi birçok alanda araştırmacıların çalışmalarına katkı sağlamaktadır. Ayrıca matematiğin grup teorisi, matris teorisi, olasılık, topoloji ve sayısal analiz gibi bir çok branşı ile de yakından ilgilidir.

Graf teorisinin popüler alanlarından birisi graf etiketlemedir. Graf etiketleme, başlangıçta bir renk problemi olarak ele alınmıştır. Fakat daha sonraları yeterli sayıda renk olmadığından bu iş sayılarla yapılmaya başlanmıştır. Böylece graf etiketleme, belli kurallar altında düğümlere, kenarlara ya da her ikisine de tamsayılar kümesinden elemanlar atanarak oluşturulmuştur. Etiketleme işi, Gerhard Ringel'in 1963 yılında "Fourth Czechoslovakian *Symposium* on Combinatorics, Graphs, and Complexity, Smolenice" de bir konjektür önermesi ile dikkat çekmiştir. Günümüze kadar ise bu alan ile ilgili 1700 den fazla makale yayımlanmıştır.

Graf etiketleme yöntemlerine,

- *Graceful* Etiketleme
- *Harmonious* Etiketleme
- Asal Etiketleme

- Fark Grafları
- Kare Toplam Etiketleme
- Sihirli Etiketleme
- Ters Sihirli Etiketleme
- *Cordial* Etiketleme
- Kare Fark Etiketleme
- Geometrik Etiketleme
- Permütasyon ve kombinasyon grafları
- Bölen grafları örnek gösterilebilir.

Graf etiketleme, X-ray kristalografi, sosyal psikoloji, elektrik devre teorisi, füze rehberlik kodları, bilişim ağlarının adresleme sistemleri, radar yer kodları gibi birçok alanda aktif bir şekilde kullanılmaktadır.

Graf teori, matematik eğitiminde matematiksel modellemenin uygulama alanlarında günden güne daha kullanışlı hâle gelmektedir. Günümüzdeki matematik eğitim anlayışı öğrenciyi merkeze alan, yapılandırıcı öğrenme anlayışını benimseyen ve öğrenmede etkinliklere (modellemelere) önem veren bir yapıya sahiptir. Öğretim programları da bu anlayışa bağlı olarak düzenlenmektedir ve öğrenme etkinliklerine önem verilmektedir. Dolayısıyla gerçek hayat durumlarında karşılaşılan problemleri anlamada, bağlantı kurmada ve çözümede graf teori yöntemleri çok kullanışlı olduğundan matematik eğitimi alanında da işlevseldir.

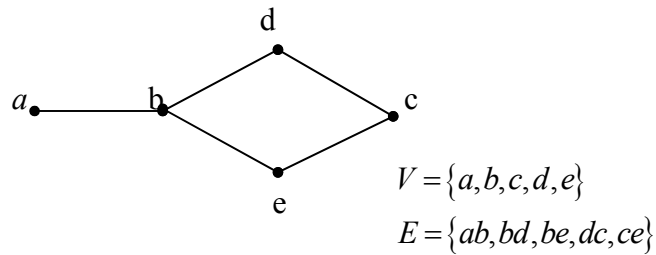
Tez çalışmamız dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde daha sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak tanım ve teoremlere yer verilmiştir. İkinci bölümde *graceful* etiketleme, *harmonious* etiketleme, asal etiketleme ve kare toplam etiketleme yöntemlerinden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde *Jordan Totient* fonksiyonu kullanılarak yeni bir graf etiketleme tanımı yapılmış ve özellikleri incelenmiştir. Son olarak dördüncü bölümde ise birinci ve ikinci bölümde bahsedilen çeşitli bilgi ve teoremleri anlamaya veya uygulamaya yönelik matematiksel etkinlikler graf teori yardımıyla oluşturulmuştur.

1. GRAF TEORİNİN TANIM VE TEOREMLERİ

Graf teori alanında çalışan birçok bilim adamı graf teorisinin terminolojisini kişiselleştirmişlerdir. Dolayısıyla graf teorisinde kullanılan sembollerde evrensel bir kabul bulunmamaktadır. Daha ziyade bu konuda otorite olan kişilerin sembolleri takip edilmektedir.

Tanım 1.1. G grafi; sonlu, boştan farklı V düğümler kümesi ile E kenarlar kümesinden oluşur ve $G = (V, E)$ ile gösterilir. Grafta, $v_i \in V$ olmak üzere her bir kenar sırası önemli olunmadan $e_k = \{v_i, v_j\} = v_i v_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$) düğüm çifti ile belirlenir. Buradaki v_i ve v_j düğümleri e_k kenarının başlangıç ve bitiş düğümleridir. n düğümlü ve m kenarlı bir graf (n, m) graf olarak adlandırılır. $(1, 0)$ grafına aşikâr (*trivial*) graf denir (Harary, 1969: 9).

Şekil-1.1. (5,5) graf

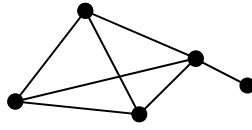


Tanım 1.2. Düğümler kümesi ve kenarlar kümesi boş küme olan graflar boş graf olarak adlandırılır. Bir düğümün başka bir düğümle bağlantısı yoksa bu düğüme ayrık düğüm denir (Gross ve Yellen, 1998: 2).

Tanım 1.3. Başlangıç ve bitiş düğümü aynı düğüm olan kenarlara döngü denir. Bu şekilde başlangıç ve bitiş düğümü aynı olan birbirinden farklı birden fazla kenar varsa bu kenarlar paralel kenar olarak adlandırılır. (Gross ve Yellen, 1998: 2,3).

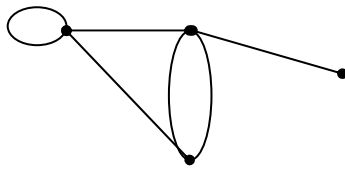
Tanım 1.4. Paralel kenarı bulunmayan ve döngü içermeyen graflara basit graf denir (Gross ve Yellen, 1998: 3).

Şekil-1.2. Basit graf



Tanım 1.5. Hem paralel kenar ve hem de döngü bulunan graflara genel (*pseudo*) graf denir (Harary, 1969: 10).

Şekil-1.3. Genel graf

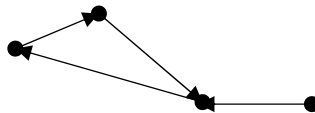


Tanım 1.6. Bir $e_k = v_i v_j$ kenarında v_i ile v_j düğümleri komşudur. e_k kenarı ile v_i düğümü ya da e_k kenarı ile v_j düğümü çakışıkır. Aynı düğüm ile çakışık olan iki kenara, komşu kenarlar denir ($i, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$)

(Gross ve Yellen, 1998: 6).

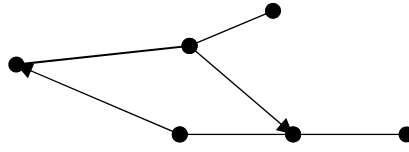
Tanım 1.7. Sonlu, boştan farklı $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ düğümler kümesi ile $e_k = v_i v_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$) olacak şekilde farklı düğümlerin sıralı ikililerinin oluşturduğu kenarlar kümesi $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ olan $G = (V, E)$ grafına yönlendirilmiş graf denir. Yönlendirilmiş grafta v_i düğümünden v_j düğümüne doğru, yönlendirilmiş doğru parçası ile temsil edilen kenarlara yönlendirilmiş kenar denir. (Harary, 1969: 10).

Şekil-1.4. Yönlendirilmiş graf



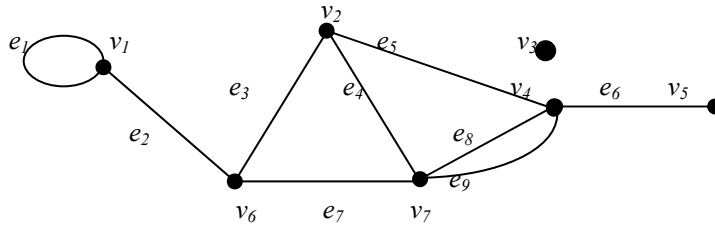
Tanım 1.8. Hem yönlendirilmemiş kenarı ve hem de yönlendirilmiş kenarı bulunan graflar kısmi yönlendirilmiş graflardır (Gross ve Yellen, 1998: 3).

Şekil-1.5. Kısmi yönlendirilmiş graf



Tanım 1.9. $G = (V, E)$ bir graf ve $v \in V$ olsun. v düğümü ile çakışık olan kenarların sayısına, v düğümünün derecesi denir ve $deg(v)$ ile gösterilir. Her bir kenar çakışık olduğu düğüme tam olarak bir derece, döngü ise çakışık olduğu düğüme iki derece birden kazandırır. Bir grafın düğümlerinin derecesinin küçükten büyüğe doğru sıralanması ile oluşturulan diziyeye o grafın derece dizisi denir. Açık olarak her bir graf tek türlü derece dizisine sahiptir. Yapısal olarak farklı olan iki grafın derece dizileri aynı olabilir (Gross ve Yellen, 1998: 6).

Şekil-1.6. Graf

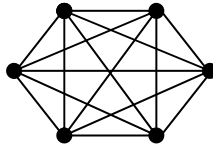


Şekil-1.6. da verilen grafın;

- e_1 döngüdür.
- e_8 ve e_9 paralel kenarlardır.
- v_2 ve v_6 komşu düğümlerdir.
- e_3 ve e_7 komşu kenarlardır.
- $deg(v_2) = 3$ ve $deg(v_7) = 4$ tür.
- v_3 ayrık düğümdür. Ayrık düğümün derecesi sıfırdır.
- $v_3, v_5, v_1, v_2, v_6, v_4, v_7$ düğümlerinin derece dizisi sırasıyla $\langle 0, 1, 3, 3, 3, 4, 4 \rangle$ şeklindedir.

Tanım 1.10. Bir grafın bütün düğümlerinin dereceleri birbirine eşit ise regüler graf olarak adlandırılır. Regüler grafın her düğümünün derecesi k ise bu grafa k -regüler graf denir (Gross ve Yellen, 1998: 12).

Şekil-1.7. 5-regüler graf



Tanım 1.11. Yönlendirilmiş grafta bir v düğümüne gelen kenarların sayısına iç derece, v düğümünden çıkan düğümlerin sayısına da dış derece denir. Her bir döngü ise bir iç derece ve bir dış derece olarak ayrı ayrı sayılır. Açık olarak bir düğümün iç derecesi ile dış derecesinin toplamı düğümün derecesini verir (Gross ve Yellen, 1998: 8).

Teorem 1.1. Bir yönlendirilmiş grafta iç derecelerin toplamı, dış derecelerin toplamına veya grafın kenar sayısına eşittir. Yani, n düğümlü ve m kenarlı yönlendirilmiş graf $G = (V, E)$ ve $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ olsun. O zaman,

$$\sum_{i=1}^n i_{iç} \deg(v_i) = \sum_{i=1}^n d_{iş} \deg(v_i) = m$$

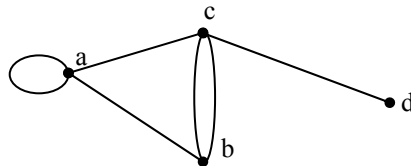
dır (Gross ve Yellen, 1998: 8).

İspat. Her bir yönlendirilmiş kenar bir tane iç derece ve bir tane dış derece belirtir. Dolayısıyla derecelerden herhangi birinin toplamı kenar sayısına eşittir.

Teorem 1.2. (Euler) Bir grafta bulunan düğümlerin derecelerinin toplamı, grafın kenar sayısının iki katıdır (Gross ve Yellen, 1998: 7).

İspat. Her bir kenar iki düğüm ile çakışık olduğundan derecelerin toplamı bulunurken her kenar iki kere sayılır. Buradan derece toplamının kenar sayısının iki katı olduğu görülür.

Şekil-1.8. Graf ve derece dizisi

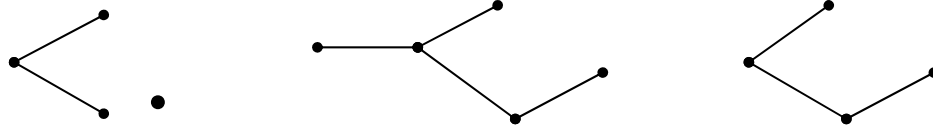


Şekil-1.8. altı kenarlı bir graftır ve sırasıyla d, b, c, a düğümlerinin derece dizisi $\langle 1,3,4,4 \rangle$ şeklindedir. Derecelerin toplamı $1+3+4+4=12$ olup bu da grafta bulunan kenar sayısının iki katıdır.

Tanım 1.12. Bütün kenar ve düğümleri bir G grafına ait olan grafa alt graf denir. Eğer bir G grafının alt grafi H grafi ise bu G grafi H grafının süper grafi olarak tanımlanır. G grafının bütün düğümlerini içeren alt graf yayılan (spanning) alt graf olarak adlandırılır. S kümesi, G grafının düğümler kümesinin herhangi bir alt kümesi olmak üzere S kümesinin elemanlarından oluşturulan G 'nin maksimum alt grafına indüklenmiş (induced) alt graf denir ve $\langle S \rangle$ ile gösterilir. $\langle S \rangle$ alt grafında iki düğümün komşu olması için gerek ve yeter şart bu düğümlerin G 'de komşu olmasıdır (Harary, 1969: 11).

Örneğin Şekil-1.1. grafının alt grafi, yayılan alt grafi ve indüklenmiş alt grafi aşağıdaki gibidir.

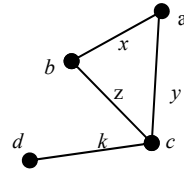
Şekil-1.9.a. Alt graf Şekil-1.9.b. Yayılan alt graf Şekil-1.9.c. İndüklenmiş alt graf



Şekil-1.1. grafı da Şekil-1.9.a. alt grafının süper grafıdır.

Tanım 1.13. Bir grafın iki düğümü arasında bulunan bir kenar $e_i = v_{i-1}v_i$ ($i=1,2,\dots,n$) şeklinde tanımlanmak üzere, v_0 düğümünden v_n düğümüne doğru herhangi bir $W = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n)$ dizisine bu iki düğüm arasındaki bir yürüyüş denir. Bir yürüyüş dizisindeki kenar sayısı o yürüyüşün uzunluğudur. Başlangıç ve bitiş düğümleri aynı olan yürüyüşlere kapalı yürüyüş, farklı olan yürüyüşlere de açık yürüyüş denir. Tüm kenarları farklı olan yürüyüş patika olarak adlandırılır (Gross ve Yellen, 1998: 22).

Şekil-1.10. Yürüyüş



Şekil-1.10. da

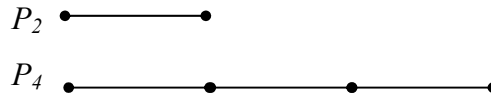
$W_1 = (b, x, a, y, c, k, d, k, c, z, b)$ uzunluğu 5 olan kapalı yürüyüş

$W_2 = (d, k, c, z, b, x, a)$ uzunluğu 3 olan açık yürüyüş ve patikadır.

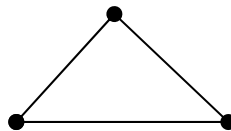
Tanım 1.14. Bir grafin s düğümünden t düğümüne yapılan en kısa yürüyüşünün uzunluğuna bu düğümler arasındaki mesafe denir ve $d(s, t)$ ile gösterilir. Eğer s ve t düğümleri arasında hiç yürüyüş yoksa mesafe ∞ kabul edilir (Harary, 1969: 14).

Tanım 1.15. Tekrar eden kenarı ve düğümü bulunmayan yürüyüşe yol denir. n düğümlü bir P yol grafi P_n ile gösterilir. Bir yol da $|V_P| = |E_P| + 1$ dir. Açık olarak her yol bir patikadır. Hiç kenarı bulunmayan, yalnızca bir düğümü olan yürüyüş, patika veya yola aşikâr (*trivial*) denir (Gross ve Yellen, 1998: 32).

Şekil-1.11. Yol grafi

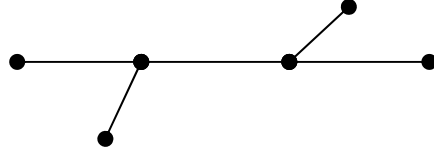


Tanım 1.16. $n \geq 3$ için aşikâr (*trivial*) olmayan kapalı yola devir denir. Bir devir grafta $|V_C| = |E_C|$ dır (Gross ve Yellen, 1998: 32).

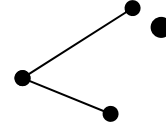
Şekil-1.12. C_3 Devir graf

Tanım 1.17. Birbirinden farklı her düğüm çiftinin arasında yol varsa o grafa bağlantılı graf denir. Aksi durumda bağlantısız graf olarak adlandırılır (Harary, 1969: 13).

Şekil-1.13.a. Bağlantılı graf



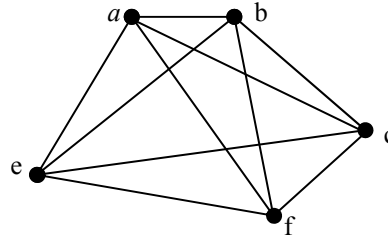
Şekil-1.13.b. Bağlantısız graf



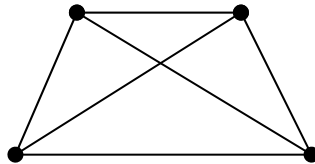
Tanım 1.18. Bağlantılı bir grafa her kenarı içeren kapalı bir patika varsa *Euler* patikası denir. *Euler* patikası bulunduran bir graf *Euler* grafi adını alır (Aktaran: Şenol, 2014: 9).

Teorem 1.3. Bağlantılı bir grafin *Euler* grafi olması için gerek ve yeter koşul her düğümün derecesinin çift olmasıdır (Aktaran: Şenol, 2014: 9).

Euler grafinde her kenardan sadece bir kere geçilebilirken düğümler tekrar edebilir.

Şekil-1.14. *Euler* grafi

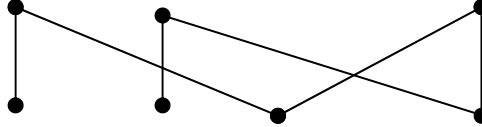
Tanım 1.19. Bütün düğümlerin birbirine komşu olduğu basit graflara tam graf denir. n düğümlü herhangi bir tam graf K_n ile gösterilir (Harary, 1969: 16).

Şekil-1.15. Tam graf K_4 

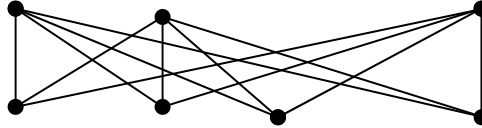
Tanım 1.20. $G = (V, E)$ grafinde V düğümler kümesinin boştan farklı ayrık iki alt kümesi V_1 ve V_2 olsun. Eğer her bir $e = uv \in E$ kenarı $u \in V_1$ ve $v \in V_2$ olacak şekilde oluşturuluyorsa G grafinde ikili graf denir. V düğümler kümesinin ayrık alt kümelerinde bulunan düğümlerin tamamı karşılıklı olarak bir kenar ile bağlantılıdır

G grafi tam ikili graf olarak adlandırılır. Eğer $|V_1|=m$ ve $|V_2|=n$ ise tam ikili graf $G = K_{m,n} = K(m,n)$ şeklinde yazılır. Bir $K_{m,n}$ tam grafının $m.n$ tane kenarı vardır (Harary, 1969: 17).

Şekil-1.16.a. İkili graf

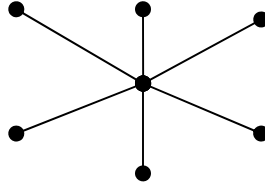


Şekil-1.16.b. Tam ikili graf $K_{3,4}$



Tanım 1.21. $K_{1,n}$ ikili grafi yıldız olarak adlandırılır (Harary, 1969: 18).

Şekil-1.17. $K_{1,6}$ yıldız graf

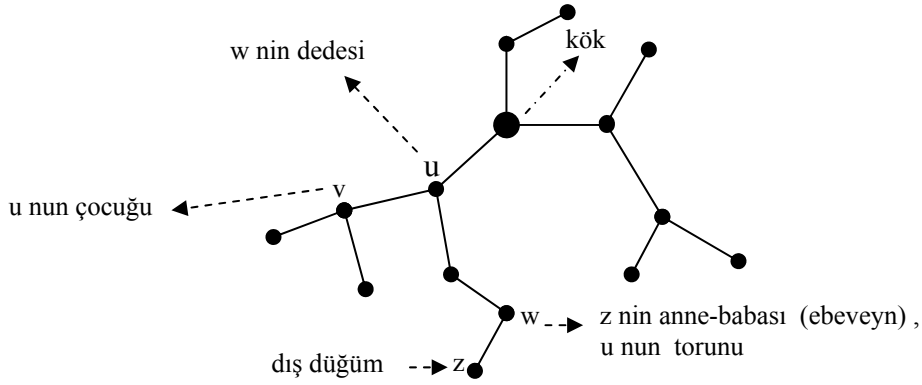


Tanım 1.22. Bağlantılı ve devir içermeyen grafa ağaç denir. Bir ağaç seçilmiş bir düğüme sahip ise köklü ağaç olarak adlandırılır ve seçilen bu düğüme de ağacın kökü denir. (Gross ve Yellen, 1998: 86).

“Köklü ağaçlarda düğümler arasında bir hiyerarşi tanımlanır. Kenarlarda doğal olarak bir yön oluşmuştur ve böylece düğümlerin giriş ve çıkış derecelerinden söz edilebilir” (Işıkdemir, 2007: 36).

Tanım 1.23. Bir düğümün hiç çocuğu yoksa yani derecesi 0 ise dış düğüm olarak adlandırılır. Düğüm dış düğüm değilse yani çocuğu varsa iç düğümdür (Gross ve Yellen, 1998: 94).

Şekil-1.18. Köklü ağaç



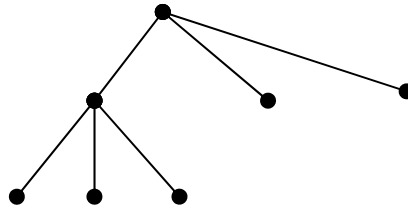
w düğümü, z düğümünün ebeveyni ve aynı zamanda u düğümünün torunudur. u düğümü, w düğümünün dedesidir. v düğümü, u düğümünün çocuğudur.

Tanım 1.24. Köklü ağaçta;

- Herhangi bir v düğümü için bu düğümün çocuklarının sayısı düğümün derecesi olarak adlandırılır.
- Kökten, bir v düğümüne olan tek türlü yolun en kısa uzunluğuna derinlik veya seviye denir. Kökün derinliği "0" dır.
- Kökten, bir v düğümüne olan en uzun yolun uzunluğuna yükseklik denir (Gross ve Yellen, 1998: 94).

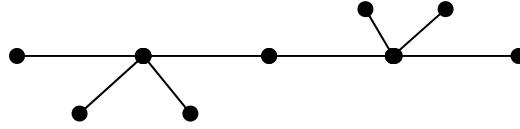
Tanım 1.25. $m \geq 2$ olmak üzere her bir düğümünün (kök dâhil) derecesi en fazla m olan köklü ağaca m -li ağaç denir. Tam m -li ağaçta her bir iç düğümün tam olarak m tane çocuğu vardır ve bütün dış düğümlerin derinliği aynıdır. Eğer $m = 2$ ise ikili ağaç elde edilir. Açık olarak her bir iç düğümünün derecesi 2 ve bütün dış düğümlerinin derinliği aynı olan ikili ağaca da tam ikili ağaç denir (Gross ve Yellen, 1998: 95).

Şekil-1.19. 3-lü ağaç



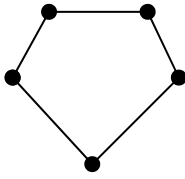
Tanım 1.26. Tek bir yola komşu olan bütün kenarları içeren ağaçlara tırtıl denir. Genellikle bu yol tırtılın omurgası olarak adlandırılır (Aktaran: Graham ve Sloane, 1980: 392).

Şekil-1.20. Tırtıl

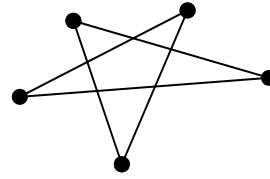


Tanım 1.27. “Bir G grafinin bütün düğümlerini içeren \bar{G} bütünleyen grafında iki düğümün komşu olması için gerek ve yeter şart bu düğümlerin G ’de komşu olmamasıdır (Harary, 1969: 15).

Şekil-1.21.a. G grafi

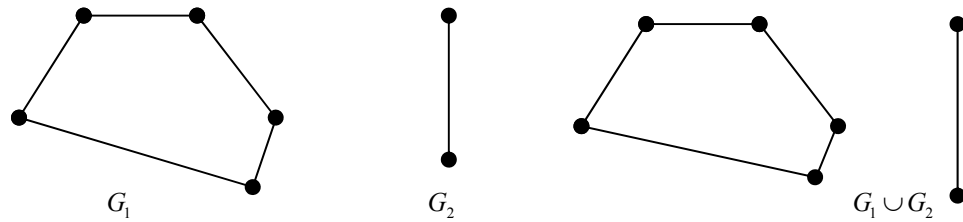


Şekil-1.21.b. \bar{G} grafi



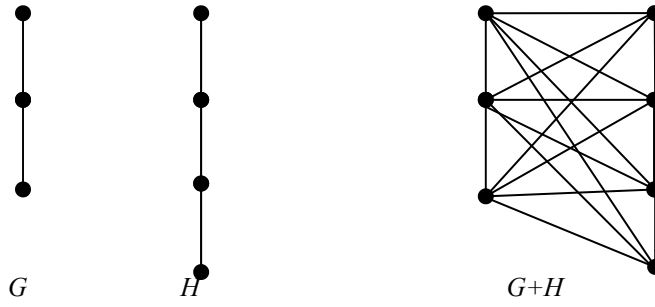
Tanım 1.28. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ olan G_1 ve G_2 grafları için $V = V_1 \cup V_2$ ve $E = E_1 \cup E_2$ şeklinde tanımlanan $G(V, E) = G_1 \cup G_2$ grafına bileşim grafi denir (Harary, 1969: 21).

Şekil-1.22. $G_1 \cup G_2$



Tanım 1.29. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ grafları için $G_1 \cup G_2$ bileşim grafında V_1 ve V_2 kümelerinde bulunan karşılıklı her bir düğüm çiftine bir kenar eklenmesiyle oluşan $G_1 + G_2$ grafi toplam grafıdır (Harary, 1969: 21).

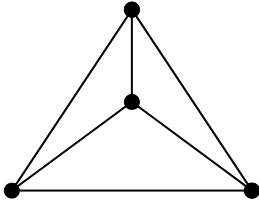
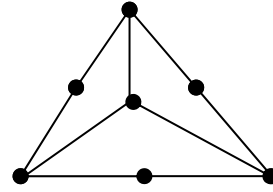
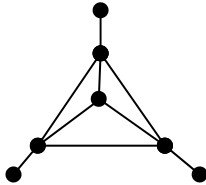
Şekil-1.23. Toplam grafi



Tanım 1.30. Tekerlek graf $W_n = K_1 + C_n$ şeklinde tanımlanır. Tekerlek grafında, C_n grafına çerçeve ve K_1 grafına da uç graf denir (Gross ve Yellen, 1998: 241).

W_n de, C_n devir grafının her komşu düğüm çiftinin arasına bir düğüm daha eklenerek elde edilen graflar dişli olarak adlandırılır ve \overline{W}_n şeklinde gösterilir (Aktaran: Liang ve Bai, 2009: 113).

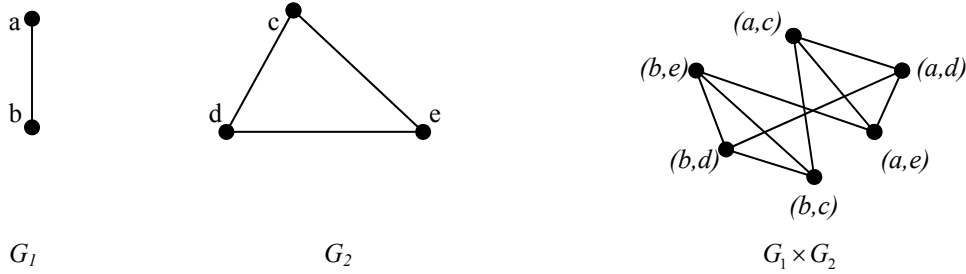
W_n grafında, C_n grafının her bir düğümüne bir kenar eklenerek elde edilen grafa dümen graf denir ve H_n ile gösterilir (Aktaran: Ramasubramanian ve Kala, 2012: 1591).

Şekil-1.24.a. W_n grafiŞekil-1.24.b. \overline{W}_n grafiŞekil-1.24.c. H_n grafi

Tanım 1.31. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki graf ve $u_i \in V_1, v_j \in V_2$ ($i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,m$) olsun. Bu iki grafın $G_1 \times G_2$ kartezyen çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır.

1. Döğümler kümesi $V_1 \times V_2$ dir.
2. $u = (u_1, v_1), v = (u_2, v_2) \in V_1 \times V_2$ döğümleri arasında kenar olması için $u_1 u_2 \in E_1$ ve $v_1 = v_2$ veya $v_1 v_2 \in E_2$ ve $u_1 = u_2$ olmalıdır (Harary, 1969: 22).

Şekil-1.25. Graflarda kartezyen çarpım

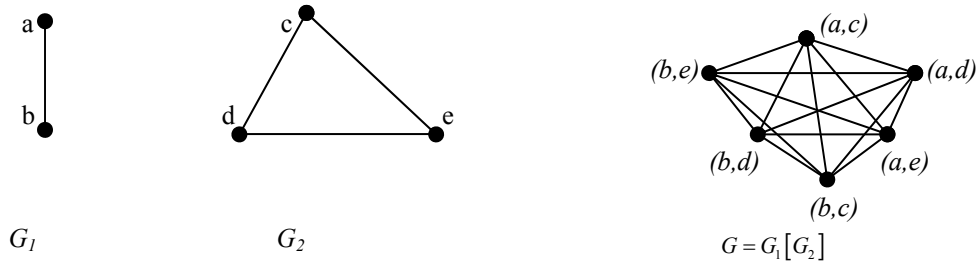


$Q_1 = K_2$ ve $Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$ olmak üzere $Q_n = K_2 \times K_2 \times \dots \times K_2$ (n tane) n -küp grafi kartezyen çarpım sonucu elde edilen graf çeşididir (Harary, 1969: 23).

Tanım 1.32. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki graf ve $u_i \in V_1, v_j \in V_2$ ($i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,m$) olsun. Bu iki grafın $G = G_1[G_2]$ bileşkesi aşağıdaki gibi tanımlanır.

1. Döğümler kümesi $V_1 \times V_2$ dir.
2. $u = (u_1, v_1), v = (u_2, v_2) \in V_1 \times V_2$ döğümlerinin bileşke grafta komşu olması için $u_1 u_2 \in E_1$ veya $v_1 v_2 \in E_2$ ve $u_1 = u_2$ olmalıdır (Harary, 1969: 22).

Şekil-1.26. Grafların bileşkesi



$G_1, (n_1, m_1)$ graf ve $G_2, (n_2, m_2)$ graf olsun. G_1 ve G_2 grafları arasında tanımlanan işlemler sonucunda elde edilen yeni grafların düğüm sayısı ve kenar sayısı Tablo 1.1. deki gibidir.

Tablo-1.1. Graflara uygulanan işlemler sonucu elde edilen düğüm ve kenar sayısı

İşlem	İşlem	Düğüm sayısı	Kenar sayısı
Bileşim	$G_1 \cup G_2$	$n_1 + n_2$	$m_1 + m_2$
Toplam	$G_1 + G_2$	$n_1 + n_2$	$m_1 + m_2 + n_1.n_2$
Kartezyen çarpım	$G_1 \times G_2$	$n_1.n_2$	$n_1.m_2 + n_2.m_1$
Bileşke	$G_1 [G_2]$	$n_1.n_2$	$n_1.m_2 + n_2^2.m_1$

Kaynak: Harary, 1969: 22.

2. GRAF ETİKETLEME

Graf etiketleme, belli kurallar altında düğümlere, kenarlara ya da her ikisine de tamsayılar kümesinden elemanlar atanarak oluşturulur. Yani düğümlerin etiketlenmesi için uygun bir sayı kümesinin, bu düğümleri birbirine bağlayan kenarlara uygulanacak uygun bir kuralın, düğümler kümesinin ve kenarların alacağı değerlere uygun koşulların oluşturulması ile graf etiketlemesi yapılır.

Graf etiketleme ile ilgili en önemli yayınlardan ilki Rosa (1967) tarafından yayınlanan “On certain valuations of the vertices of graphs” makalesi olmuştur. Bu makalede Rosa graf etiketleme yöntemlerinden bahsetmiştir. Bu yöntemler diğer araştırmalara ilham kaynağı olurken graf etiketlemeye olan ilgi günden güne artış göstermiştir. Günümüze kadar birçok graf etiketleme yöntemi bulunmuş ve bu konuda 1700 den fazla makale yayımlanmıştır. Araştırmacılar graf etiketlemeyi birçok bilim dalında incelemelerini kolaylaştırmak ve araştırmalarını daha anlaşılır hale getirmek için kullanmaktadırlar. Graf etiketleme, sayılar teorisi gibi matematiğin çeşitli alanlarında önemli rol oynarken kodlama teorisi, füze güdüm kodları, bilişim ağları, X-ray kristalografisi gibi birçok alanda da araştırmacılara büyük kolaylık sağlamaktadır.

Bu bölümde

- *Graceful* Etiketleme
- *Harmonious* Etiketleme
- Asal Etiketleme
- Kare Toplam Etiketleme

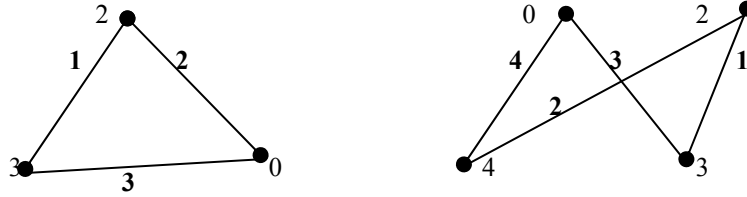
etiketleme yöntemleri hakkında bilgi verilecektir.

2.1. Graceful Etiketleme

Rosa (1967), makalesinde bu etiketleme yöntemini ilk olarak β -değerlendirme olarak isimlendirmiştir. Daha sonraları Golomb (1977), yöntemin β -değerlendirme olan adını *Graceful* etiketleme olarak değiştirmiştir. Günümüzde de daha çok bu isim kabul görmekte ve bilinmektedir (Gallian, 2013: 5).

Tanım 2.1.1. $G=(V,E)$, q kenarlı bir graf olsun. Eğer $f:V \rightarrow \{0,1,2,\dots,q\}$ birebir fonksiyon ve $\forall u,v \in V$ olmak üzere her bir $e=uv \in E$ kenarı için $f^*:E \rightarrow \{1,2,\dots,q\}$, $f^*(uv)=|f(u)-f(v)|$ şeklinde tanımlanan indüksiyon fonksiyonu bire bir ise f fonksiyonuna *graceful* etiketleme denir. Herhangi bir graf *graceful* etiketlemeye sahip ise *graceful* graf olarak adlandırılır (Aktaran: Huang vd., 1982: 31).

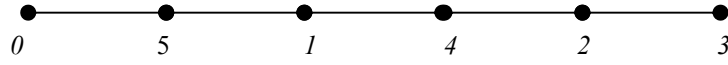
Şekil-2.1.1. $q=3$ ve $q=4$ için *graceful* graf



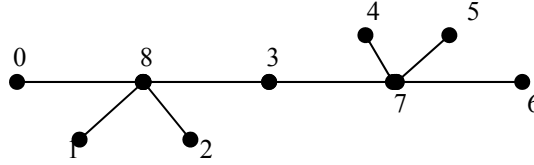
Bütün ağaçlara graceful etiketleme yapılabileceğini belirten Ringel- Kotzig konjektürü hala açık bir problemdir. Buna rağmen ağaçlara çeşitli sınırlamalar getirilerek ya da ağaçların farklı tanımlarından yola çıkılarak yeni bakış açıları geliştirilmiştir. Ağaçların en fazla kaç düğüme kadar *graceful* olduğunu araştırırken *hybrid* algoritması ve *back-tracking* algoritması gibi çeşitli algoritmalar kullanılmaktadır.

Teorem 2.1.1. Düğüm sayısı en fazla 35 olan her ağaç *graceful*dur (Fang, 2010: 2).

Bu teoremin ispatı *hybrid* algoritması kullanılarak yapılmıştır. Bu teoremden önce Aldred and McKay (1998: 2), 27 düğüme kadar her ağacın *graceful* olduğunu gösterirken; Horton (2003: 63), düğüm sayısı 29' a kadar olan bütün ağaçlara *graceful* etiketleme yapılabileceğini *back-tracking* algoritması ile ispatlamıştır. Her yol grafi ile tırtıl grafa *graceful* etiketleme yapılabilir (Aktaran: Watson, 2000).

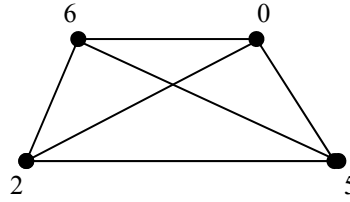
Şekil-2.1.2. P_6 graceful grafi

Şekil-2.1.3. Tırtıl grafin graceful etiketlemesi

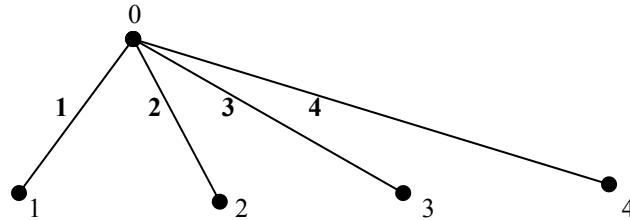


Teorem 2.1.2. $n > 4$ ise K_n tam grafi *graceful* değildir

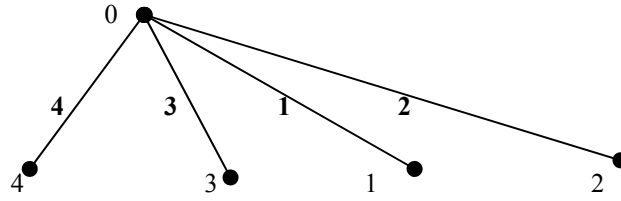
(Aktaran: Wallis, 2000: 124).

Şekil-2.1.4. K_4 tam grafinin graceful etiketlemesi

Graceful grafa, q etiketine sahip bir kenarın elde edilebilmesi için grafin bu kenarına komşu olan düğümleri 0 ve q tamsayıları ile etiketlenmelidir. Bir grafa birden fazla *graceful* etiketlemesi yapılabilir yani *graceful* etiketleme tek türlü değildir (Srivastav, 2008: 73).

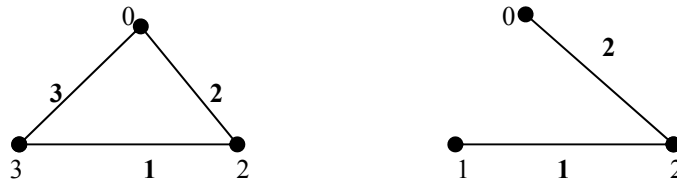
Şekil-2.1.5. $K_{1,4}$ tam ikili graceful grafi

Şekil-2.1.5. te verilen $K_{1,4}$ tam ikili grafinin farklı etiketlemesi aşağıdaki gibi de yapmak mümkündür.

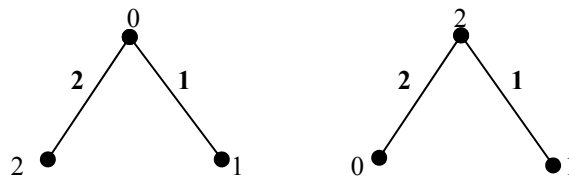
Şekil-2.1.6. $K_{1,4}$ tam ikili *graceful* grafi

Teorem 2.1.3. Bir *graceful* grafin kendisinden farklı en az bir tane alt *graceful* grafi vardır (Uma ve Murugesan, 2012: 368).

İspat. G grafi, n düğümlü ve m kenarlı olsun. v_i ve v_j düğümlerinin etiketleri sırasıyla x_i ve x_j olmak üzere $|x_i - x_j| = m$ dir. m etiketli kenar silinerek G' nin n düğümlü ve $m - 1$ kenarlı alt *graceful* grafi elde edilir.

Şekil-2.1.7. *Graceful* graf ve alt grafi

Teorem 2.1.4. q kenarlı bir grafin $q!$ tane *graceful* etiketlemesi vardır (Sheppard, 1976: 381).

Şekil-2.1.8. 2 kenarlı grafin $2!$ tane *graceful* etiketlemesi

Teorem 2.1.5. G , Euler grafi olsun. G grafinin kenarlar kümesi $E(G)$ olmak üzere

$|E(G)| \equiv 0, 3 \pmod{4}$ ise G grafi *graceful*dur (Aktaran: Wallis, 2000: 125).

İspat. G , grafinin *graceful* etiketlemesi f olsun. G 'nin kenarları z_1, z_2, \dots, z_n olmak üzere $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ için herhangi bir z_i kenarının uç noktaları x_i ve y_i şeklinde tanımlansın ve $f(x_i) > f(y_i)$ olsun. Buradan

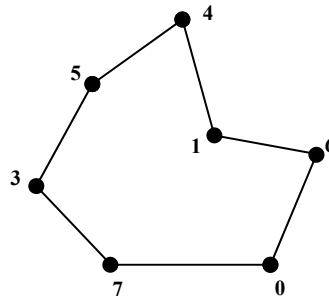
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(z_i) &= \sum_{i=1}^n f(x_i) - \sum_{i=1}^n f(y_i) \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i) + \sum_{i=1}^n f(y_i) - 2 \cdot \sum_{i=1}^n f(y_i) \end{aligned}$$

dır. G , Euler graf olduğundan $\sum_{i=1}^n f(x_i) + \sum_{i=1}^n f(y_i)$ toplamı çift olacaktır.

Dolayısıyla $\sum_{i=1}^n f(z_i)$ da çifttir.

Diğer taraftan f fonksiyonu *graceful* etiketleme olduğundan ilk n tane pozitif tamsayı üzerinde $\sum_{i=1}^n f(z_i)$ toplamı $\frac{1}{2}n(n+1)$ dir. $\frac{1}{2}n(n+1)$ de yalnızca $n \equiv 0, 3 \pmod{4}$ olması durumunda çifttir.

Şekil-2.1.9. Euler grafi



Şekil-2.1.9. da verilen C_7 Euler grafinin 7 tane kenarı vardır. $7 \equiv 3 \pmod{4}$ olduğundan bu graf *graceful*dur.

Üzerinde çalışılan bazı önemli *graceful* graflar Tablo-2.1.1. de verilmiştir.

Tablo-2.1.1. Grafların *graceful* olma durumları

Graf2	<i>Graceful</i>	Graf	<i>Graceful</i>
Ağaçlar	<i>Graceful</i> , n düğüm sayısı olmak üzere $n \leq 35$ ise	$K_{1,1,m,n}$	<i>Graceful</i>
C_n	<i>Graceful</i> , $n \equiv 0,3 \pmod{4}$ ise	n küp $K_2 \times K_2 \times \dots \times K_2$	<i>Graceful</i>
W_n	<i>Graceful</i>	$C_n \cup K_{p,q}$	<i>Graceful</i> , $n > 8$ için $n \equiv 0,3 \pmod{4}$ ise
Dümen	<i>Graceful</i>	$K_i \cup K_{m,n}$	<i>Graceful</i>
Tırtıl	<i>Graceful</i>	$\bigcup_{i=1}^t K_{m_i, n_i}$	<i>Graceful</i> , $2 \leq m_i \leq n_i$ ise
\overline{W}_n	<i>Graceful</i>	$C_s \cup P_n$	<i>Graceful</i> , $s+n \geq 6$ ise
K_n	<i>Graceful</i> , $n \leq 4$ ise	$C_m \times P_n$	$n = 2$, m tek, $m = 3$, $m = 6$, m tek ve $3 \leq n \leq 12$, $m \equiv 2 \pmod{4}$ ve $n \equiv 3 \pmod{4}$
$K_{m,n}$	<i>Graceful</i>	$K_4 \times P_n$	<i>Graceful</i> , $n=2,3,4,5$ ise
$K_{1,m,n}$	<i>Graceful</i>	$P_m \times P_n$	<i>Graceful</i>

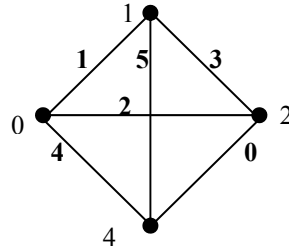
Kaynak: Gallian, 2013: 26.

Tablo-2.1.1. de görüldüğü gibi her graf *graceful* etiketlemeye sahip olmayabilir. Bu durumda araştırmacılar ya graflarda işlemleri kullanarak grafların *graceful* olma durumlarını incelemişler ya da *graceful* tanımından hareketle yeni tanımlar yapmışlardır. Bu tanımlara *k-graceful*, *skolem-graceful*, *tek-graceful* gibi etiketlemeler örnek verilebilir.

2.2. Harmonious Etiketleme

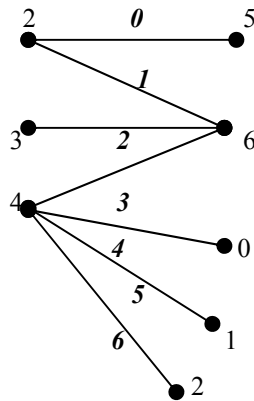
Tanım 2.2.1. $G = (V, E)$, q kenarlı, p düğümlü ve $q \geq p$ olan bir graf olsun. Eğer $f : V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$ birebir fonksiyon ve $\forall u, v \in V$ olmak üzere her bir $e = uv \in E$ kenarı için $f^* : E \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$, $f^*(uv) \equiv [f(u) + f(v)] \pmod{q}$ şeklinde tanımlanan indüksiyon fonksiyonu bire bir ise f fonksiyonuna *harmonious* etiketleme denir. Herhangi bir graf *harmonious* etiketlemeye sahip ise *harmonious* graf olarak adlandırılır. Ağaç graflarda tamı tamına bir düğümün etiketi tekrar edebilir. Bu şekilde yapılan etiketleme de *harmoniostur* (Graham ve Sloane, 1980: 388).

Şekil-2.2.1. *Harmonious* graf

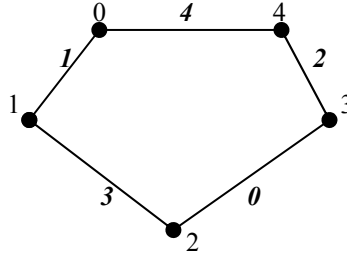


Teorem 2.2.1. Herhangi bir tırtıl graf *harmoniostur* (Graham ve Sloane, 1980: 392).

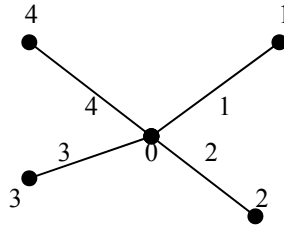
Şekil-2.2.2. Tırtıl *harmonious* graf



Teorem 2.2.2. $n \geq 3$ için C_n grafının *harmonious* olması için gerek ve yeter şart n 'nin tek olmasıdır (Graham ve Sloane, 1980: 393).

Şekil-2.2.3. $n=5$ için C_5 *harmonious* grafi

Teorem 2.2.3. $K_{m,n}$ tam ikili grafinin *harmonious* olması için gerek ve yeter şart $m=1$ veya $n=1$ olmasıdır (Graham ve Sloane, 1980: 397).

Şekil-2.2.4. $K_{1,4}$ *harmonious* grafi

Tablo-2.2.1. de bazı özel grafların *harmonious* olma durumları verilmiştir.

Tablo-2.2.1. Grafların *harmonious* olma durumları

<u>Graf</u>	<u>Harmonious</u>	<u>Graf</u>	<u>Harmonious</u>
Ağaç	<i>Harmonious</i> , n düğüm sayısı olmak üzere $n \leq 26$ ise	$K_4 \times P_n$	<i>Harmonious</i>
Tırtıllar	<i>Harmonious</i>	K_n	<i>Harmonious</i> , $n \leq 4$ ise
C_n	<i>Harmonious</i> , n tek ise	$K_{m,n}$	<i>Harmonious</i> , m veya n , 1'e eşit ise
W_n	<i>Harmonious</i>	$K_{1,m,n}$	<i>Harmonious</i>
\overline{W}_n	<i>Harmonious</i>	$K_{1,1,m,n}$	<i>Harmonious</i>
H_n	<i>Harmonious</i>	$P_m \times P_n$	<i>Harmonious</i> , $(m, n) \neq (2, 2)$

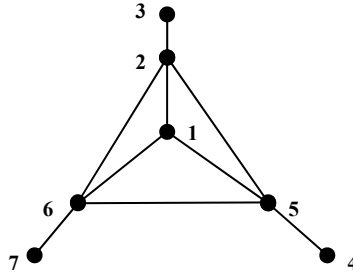
Kaynak: Gallian, 2013: 30.

2.3. Asal Etiketleme

Asal etiketlemenin kökeni Entringer' e dayanmaktadır. Daha sonraları Tout ve ark. (1982) makalelerinde asal etiketlemenin tanımını yapmışlardır.

Tanım 2.3.1. $G = (V, E)$ bir graf olsun. Eğer $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, |V|\}$ birebir ve örten fonksiyon ve $\forall u, v \in V$ olmak üzere her bir $e = uv \in E$ kenarı $(f(u), f(v)) = 1$ şeklinde etikleniyorsa G grafında asal etiketleme vardır. Asal etiketleme bulunan graflara asal graf denir (Tout vd., 1982: 365).

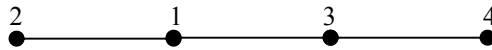
Şekil-2.3.1. Asal etiketleme



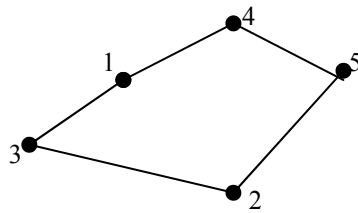
Entringer (1980'ler), "Bütün ağaçlar asal etiketlemeye sahiptir." konjektürünü ortaya koymuştur. Bu konjektür çeşitli sınırlamalar ya da şartlar konularak ispatlanmaya çalışılmaktadır. Son olarak Haxel vd. (2012) bütün büyük ağaçların asal olduğunu ispatlamıştır.

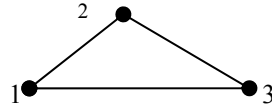
Açık olarak P_n yol grafi, C_n devir grafi ve $n < 4$ için K_n tam grafi asal graftır (Tout vd., 1982: 365).

Şekil-2.3.2. P_4 asal graf



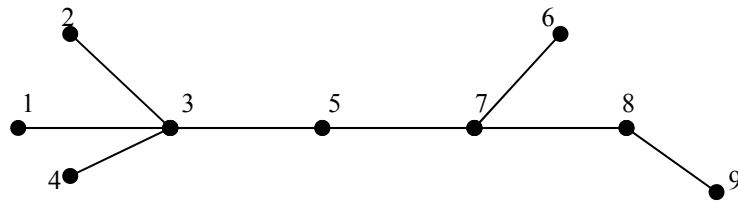
Şekil-2.3.3. C_5 asal graf



Şekil-2.3.4. K_3 asal graf

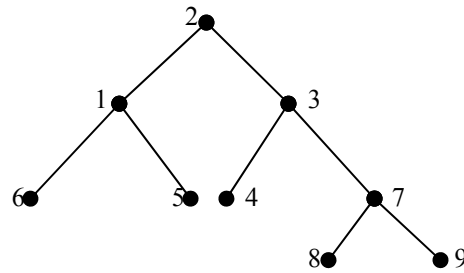
Teorem 2.3.1. Her bir düğümünün maksimum derecesi 5 veya 5' ten küçük olan herhangi bir tırtıl asal graftır (Tout vd., 1982: 366).

Şekil-2.3.5. Asal tırtıl graf

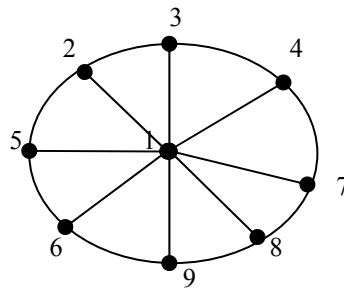


Teorem 2.3.2. Bütün ikili ağaçlar asal graftır (Tout vd., 1982: 366).

Şekil-2.3.6. Asal ikili ağaç graf



Teorem-2.3.3. $n+1$ düğümlü W_n grafının asal graf olması için gerek ve yeter şart $n+1$ ' in tek olmasıdır (Tout vd., 1982: 368).

Şekil-2.3.7. Asal W_8 grafi

Babuje (2010), sayılar teorisini kullanarak asal etiketli basit bir grafta bulunabilecek maksimum kenar sayısını veren aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 2.3.4. n düğümlü, asal etiketli basit bir grafta bulunan maksimum kenar sayısı $\sum_{k=2}^n \varphi(k)$ dir (φ , Euler'in phi fonksiyonudur.) (Babuje, 2010: 981).

İspat. $G=(V, E)$ basit grafını düşünelim. Her bir $v_i v_j \in E$ ($i, j=1, 2, \dots, n$) için $f(v_i)$ ve $f(v_j)$ aralarında asal olacak şekilde $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ düğümleri $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ile etiketlensin. $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, |V|\}$ fonksiyonu birebir ve örtendir ve $(f(v_i), f(v_j))=1$ olan bir $v_i v_j \in E$ vardır.

Şimdi G grafının kenarlarının sayısının $\sum_{k=2}^n \varphi(k)$ olduğunu ispatlayalım. P_{ij} üst üçgen matrisini, i ile j aralarında asal ise 1 değilse 0 olacak şekilde tanımlayalım. Matriste 1 ' lerin sayısı kenarların toplam sayısına eşittir. Buradan grafta bulunan toplam kenar sayısı $\sum_{k=2}^n \varphi(k)$ dir.

Örneğin $n=5$ olsun. Teorem-2.3.4. ün ispatında verildiği gibi P_{ij} üst üçgen matrisini yapalım.

Şekil-2.3.8. $n=5$ için üst üçgen matris

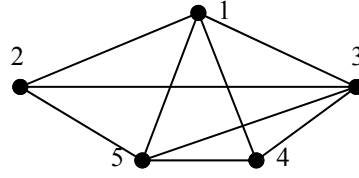
$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot \end{bmatrix}$$

Şekil-2.3.8. de verilen üst üçgen matriste toplam 9 tane 1 vardır. Buradan

$$\sum_{k=2}^5 \varphi(k) = \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(5) = 1 + 2 + 2 + 4 = 9$$

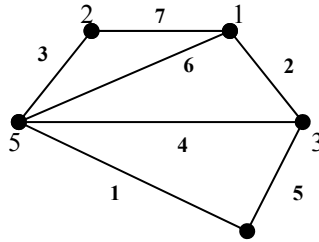
elde edilir ki 5 düğümlü bir grafın maksimum kenar sayısının 9 olabileceği görülür.

Şekil-2.3.9. $n = 5$ için maksimum kenarlı asal graf



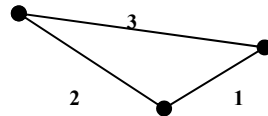
Tanım 2.3.2. $G = (V, E)$ grafında her bir düğümün derecesi en az 2 olsun. Grafın bütün kenarları birbirinden farklı $\{1, 2, 3, \dots, |E|\}$ elemanları ile etiketlenmek üzere her bir $v \in V$ düğümü ile bu düğümüne çakışık olan $\forall e \in E$ kenarı için $(v, e) = 1$ şartı sağlanıyorsa G grafi düğüm asal etiketlemeye sahiptir (Aktaran: Gallian, 2013: 160).

Şekil-2.3.10. Düğüm asal etiketleme



Tanım 2.3.3. $G = (V, E)$ grafının bütün kenarları birbirinden farklı $\{1, 2, 3, \dots, |E|\}$ elemanları ile etiketlenmek üzere eğer birbirine komşu olan her bir $e_i, e_j \in E$ kenarları için $(e_i, e_j) = 1$ oluyorsa G grafi yüksek düğüm asal etiketlemeye sahiptir (Aktaran: Gallian, 2013: 160).

Şekil-2.3.11. Yüksek düğüm asal etiketleme



Tanım 2.3.4. $G = (V, E)$, p düğümlü ve q kenarlı bir graf olsun. Eğer $f : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ birebir ve örten fonksiyon ve $\forall u, v \in V$ olmak üzere her bir $e = uv \in E$ kenarı için

- i. $(f(u), f(v))=1$
- ii. Derecesi en az 2 olan her bir düğümde, birbirine komşu $\forall e_i, e_j \in E$ kenarları için $(e_i, e_j)=1$

oluyorsa f fonksiyonuna toplam asal etiketleme denir. Toplam asal etiketlemeye sahip olan graflara toplam asal graf denir (Ramasubramanian ve Kala, 2012: 1588).

Teorem 2.3.5. P_n yolu toplam asal graftır

(Ramasubramanian ve Kala, 2012: 1589).

İspat. $P_n = v_1 v_2 v_3 \dots v_n$ yolunda n tane düğüm ve $n-1$ tane kenar vardır.

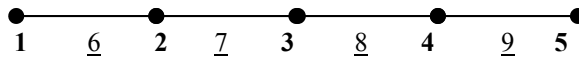
$f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$f(v_i) = i, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$f(e_j) = n + j, \quad 1 \leq j < n$$

Buradan açık olarak f fonksiyonu bire bir ve örtendir. Toplam asal graf tanımına göre herhangi bir $e = uv \in E$ için $(f(u), f(v))=1$ dir ve ayrıca derecesi en az 2 olan her bir düğümde birbirine komşu olan $\forall e_i, e_j \in E$ kenarları için $(e_i, e_j)=1$ dir. Dolayısıyla P_n yolu toplam asal graftır.

Şekil-2.3.12. P_n toplam asal graf



Teorem 2.3.6. $n > 1$ için $K_{1,n}$ yıldız grafi toplam asal graftır

(Ramasubramanian ve Kala, 2012: 1589).

İspat. $V(K_1) = \{u\}$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere v_i düğümleri komşu düğümler olsun.

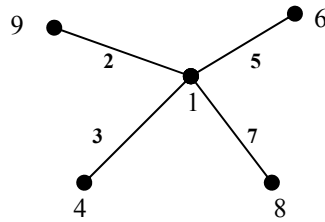
$K_{1,n}$ yıldız grafi $n+1$ düğümlü ve n kenarlıdır. $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n+1\}$

fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned}
 f(u) &= 1 \\
 f(v_i) &= 2i, \quad 1 \leq i \leq n \\
 f(e_j) &= 2j+1, \quad 1 \leq j \leq n
 \end{aligned}$$

f fonksiyonu bire bir ve örtendir. Dolayısıyla $n > 1$ için $K_{1,n}$ yıldız grafi toplam asal graftır.

Şekil-2.3.13. $K_{1,4}$ toplam asal graf



Teorem 2.3.7. n çift ise C_n grafi toplam asal graftır

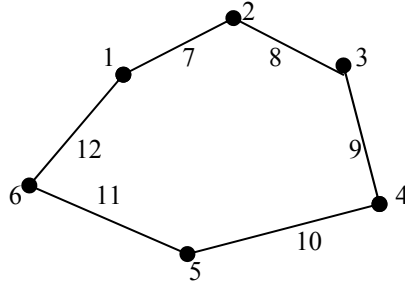
(Ramasubramanian ve Kala, 2012: 1590).

İspat. C_n grafinin n tane düğümü ve n tane kenarı vardır.

$f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, \dots, 2n\}$ fonksiyonu

$$\begin{aligned}
 f(v_i) &= i, \quad 1 \leq i \leq n \\
 f(e_j) &= n+j, \quad 1 \leq i \leq n
 \end{aligned}$$

şeklinde gibi tanımlansın. Buradan açık olarak f fonksiyonu bire bir ve örtendir. Dolayısıyla n çift ise C_n grafi toplam asal graftır.

Şekil-2.3.14. C_6 toplam asal graf

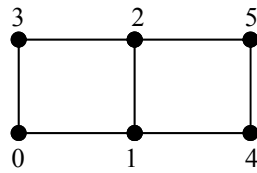
Ramasubramanian ve Kala (2012),

- H_n grafının
- $K_{2,n}$ tam ikili grafının

toplam asal graf olduğunu ve ayrıca n ' nin tek olduğunda C_n grafının toplam asal graf olmadığını ispatlamışlardır. (Ramasubramanian ve Kala, 2012).

2.4. Kare Toplam Etiketleme

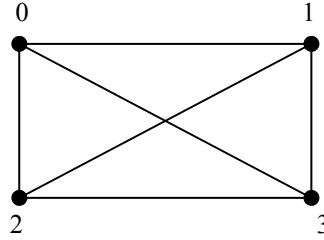
Tanım 2.4.1. $G=(V,E)$, q kenarlı p düğümlü bir graf ve $f:V \rightarrow \{0,1,2,\dots,p-1\}$ birebir - örten fonksiyon olsun. $\forall u,v \in V$ olmak üzere her bir $e=uv \in E$ kenarı için $f^*(uv)=[f(u)]^2+[f(v)]^2$ şeklinde tanımlanan indüksiyon fonksiyonu bire bir ise f fonksiyonuna kare toplam etiketleme denir (Ajitha, 2007: 78).

Şekil-2.4.1. $P_2 \times P_3$ kare toplam grafi

Teorem 2.4.1. K_n tam grafının kare toplam graf olması için gerek ve yeter şart $n \leq 5$ olmasıdır (Ajitha, 2007: 84).

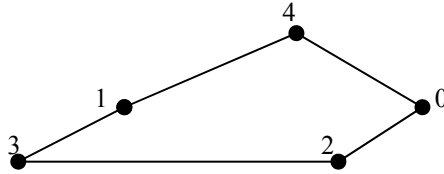
İspat. $n \geq 6$ olsun. K_n tam grafinin e_1 ve e_2 gibi herhangi iki kenarı için $f^*(e_1) = 0^2 + 5^2 = 25$ ve $f^*(e_2) = 3^2 + 4^2 = 25$ olacağından f^* fonksiyonu bire bir olmaz. Bu durum ise kare toplam etiketleme tanımı ile çelişir.

Şekil-2.4.2. K_4 kare toplam grafi



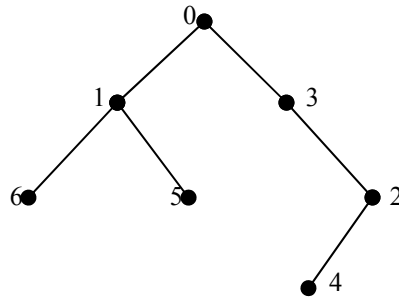
Teorem 2.4.2. Devirler kare toplam graftır (Ajitha, 2007: 84).

Şekil-2.4.3. C_5 kare toplam graf

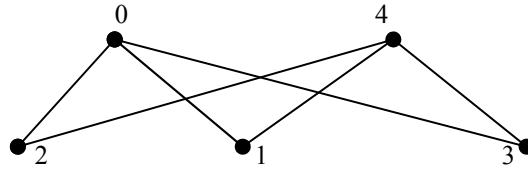


Teorem 2.4.3. Ağaçlar kare toplam graftır (Ajitha, 2007: 85).

Şekil-2.4.4. Kare toplam ağaç graf



Teorem 2.4.4. $m \leq 4, \forall n$ için $K_{m,n}$ tam ikili grafi kare toplam graftır (Ajitha, 2007: 92).

Şekil-2.4.5. $K_{2,3}$ kare toplam grafi

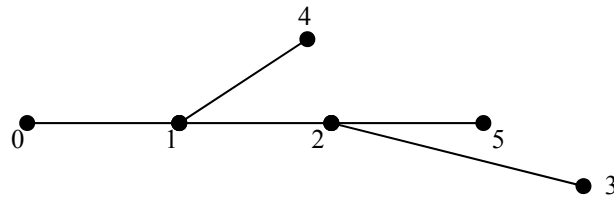
Asal sayılar, sayılar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Kare toplam etiketlemeden yola çıkılarak kenarların asal sayılarla etiketlenmesine dayanan tanım aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.4.2. $G = (V, E)$, q kenarlı n düğümlü bir graf ve $f : V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ birebir - örten fonksiyon olsun. $\forall u, v \in V$ olmak üzere her bir $e = uv \in E$ kenarı ve p_i $i = \{1, 2, \dots, q-1\}$ asalı için $f^*(uv) = (f(u))^2 + (f(v))^2 = \{1, p_1, p_2, \dots, p_{q-1}\}$ şeklinde tanımlanan indüksiyon fonksiyonu bire bir ise f fonksiyonuna asal kare toplam etiketleme denir (Ajitha, 2007: 97).

Teorem 2.4.5. G grafi asal kare toplam graf olsun. O zaman $\forall e \in E(G)$ için $f^*(e) \equiv 1 \pmod{4}$ tür (Ajitha, 2007: 97).

İspat. $f^*(e) = 1$ ise $f^*(e) \equiv 1 \pmod{4}$ olur. $f^*(e) \neq 1 \pmod{4}$ olsun. Buradan asal kare toplam graf tanımından $f^*(e)$ asal sayı olmalıdır. Dolayısıyla $f^*(e) \equiv 1 \pmod{4}$ veya $f^*(e) \equiv 3 \pmod{4}$ olacaktır. Fakat 3, 6, 7 gibi sayıların iki karenin toplamı şeklinde yazılması mümkün değildir. $f^*(e) \equiv 1 \pmod{4}$ olur ki ispat tamamlanır.

Şekil-2.4.6. Asal kare toplam graf



Şekil-2.4.6. da verilen asal kare toplam grafin kenar etiketleri

$$0^2 + 1^2 = 1; 1^2 + 2^2 = 5; 2^2 + 3^2 = 13; 1^2 + 4^2 = 17; 2^2 + 5^2 = 29$$

$$1 \equiv 1(\text{mod } 4); 5 \equiv 1(\text{mod } 4); 13 \equiv 1(\text{mod } 4); 17 \equiv 1(\text{mod } 4); 29 \equiv 1(\text{mod } 4)$$

olduğu görülür.

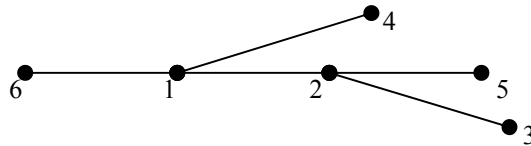
Teorem 2.4.6. G , bir asal kare toplam graf ise derecesi bir olan en az bir tane düğümü vardır (Ajitha, 2007: 98).

Teorem 2.4.7. Herhangi bir G asal kare toplam grafında $f^*(e)=1$ olan $e=uv$ kenarı dışındaki $\forall e \in E(G)$ için $f(u)$ ve $f(v)$ aralarında asaldır (Ajitha, 2007: 99).

Teorem 2.4.8. Bütün asal kare toplam graflar aynı zamanda bir asal graftır (Ajitha, 2007: 100).

İspat. G grafi, asal kare toplam graf olsun. Teorem 2.4.6.' ya göre $f(u_1)=0$ ve $\text{deg}(u_1)=1$ olacak şekilde bir u_1 düğümü vardır. $f_1: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ $f_1(u_1)=n$ ve $f_1(u_i)=f(u_i)$, $1 < i \leq n-1$ şeklinde tanımlansın. $\text{deg}(u_1)=1$ olduğundan u_1 düğümüne komşu olan u_i düğümü için $f(u_i)=1$ dir. Buradan $f(u_i)$ ile $f(u_1)$ aralarında asaldır. G grafinin diğer bütün düğümleri de Teorem 2.4.7.' den dolayı aralarında asaldır. Dolayısıyla f_1 fonksiyonu bir asal etiketleme olup G grafi asal graftır.

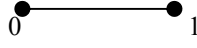
Şekil-2.4.7. Asal graf



Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir. Yani bir asal graf, asal kare toplam graf olmak zorunda değildir (Ajitha, 2007: 100).

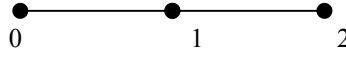
Sonuç 2.4.1. $n \leq 2$ için K_n tam grafi asal kare toplam graftır (Ajitha, 2007: 101).

Şekil-2.4.8. K_2 asal kare toplam graf



Teorem 2.4.9. $K_{1,n}$ grafinin asal kare toplam graf olması için gerek ve yeter şart $n \leq 2$ olmasıdır (Ajitha, 2007: 101).

Şekil-2.4.7. $K_{1,2}$ asal kare toplam graf



3. JORDAN TOPLAM GRAFI

Pozitif tam sayılar kümesinden kompleks sayılar kümesine tanımlanan fonksiyonlara aritmetik fonksiyon denir.

$$f : \mathbf{Z}^+ \rightarrow \mathbb{C}$$

Aritmetik fonksiyonlar kümesinin bir üyesi de *Euler*'in *Phi*- fonksiyonudur. Bu fonksiyon, $n \geq 1$ olan bir tamsayı olmak üzere, n ' den küçük ve n ile aralarında asal olan pozitif tamsayıların sayısını verir ve $\varphi(n)$ ile gösterilir (Sivaramakrishnan, 1989: 83).

$\varphi(n)$ fonksiyonunun 1' den 10' a kadar değeri aşağıda verilmiştir.

$$\begin{array}{lll} \varphi(1) = 1 & \varphi(5) = 4 & \varphi(8) = 4 \\ \varphi(2) = 1 & \varphi(6) = 2 & \varphi(9) = 6 \\ \varphi(3) = 2 & \varphi(7) = 6 & \varphi(10) = 4 \\ \varphi(4) = 2 & & \end{array}$$

Euler'in *Phi*- fonksiyonunun çok sayıda benzeri ve genellemesi vardır. Bunlara

- *Schemmel*'in *totient* fonksiyonu
- *Jordan*'ın *totient* fonksiyonu
- *Klee*'nin *totient* fonksiyonu
- *Eckford*'un *totient* fonksiyonu
- *Alder*'in *totient* fonksiyonu

örnek olarak gösterilebilir. Biz bu çalışmamızda *Jordan*'ın *totient* fonksiyonunu göz önüne alacağız.

$k \geq 1$ olmak üzere (mod r) ye göre tam kalan sınıfları sisteminden seçilen, sıralı k tane elemanı bulunan ve bu k tane elemanın en büyük ortak böleninin r ile aralarında asal olacak şekildeki sıralı kümelerin sayısına *Jordan*'ın *totient* fonksiyonu denir ve $J_k(r)$ ile gösterilir. Açık olarak $J_1(r) = \varphi(r)$ dir (Sivaramakrishnan, 1989: 91).

Jordan'ın *totient* fonksiyonu için aşağıdaki özdeşlikler geçerlidir.

- $\sum_{d|r} J_k(d) = r^k$
- $J_k(r) = \sum_{d|r} \mu\left(\frac{r}{d}\right) d^k$
- $J_k(r) = r^k \prod_{p|r} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)$

(Sivaramakrishnan, 1989).

Bu tezde $k = 2$ alınacaktır.

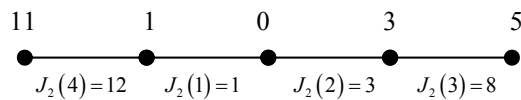
$$\begin{array}{ll} J_2(1) = 1 & J_2(4) = 12 \\ J_2(2) = 3 & J_2(5) = 24 \\ J_2(3) = 8 & J_2(6) = 24 \dots \end{array}$$

Bu bölümde, *Jordan*'ın *totient* fonksiyonu kullanılarak yeni bir graf etiketleme tanımı yapılmıştır. Bu tanımı sağlayan graflar incelenmiştir.

3.1. *Jordan* Toplam Grafi

Tanım 3.1.1. $G = (V, E)$, q kenarlı bir graf olsun. Eğer $f : V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, J_2(q)\}$ birebir fonksiyon ve $\forall u, v \in V$ olmak üzere her bir $e = uv \in E$ kenarı için $f^* : E \rightarrow \{J_2(1), J_2(2), J_2(3), \dots, J_2(q)\}$, $f^*(uv) = f(u) + f(v)$ şeklinde tanımlanan indüksiyon fonksiyonu birebir ve örten ise f fonksiyonuna *Jordan* toplam etiketlemesi denir. Herhangi bir graf *Jordan* toplam etiketlemesine sahip ise *Jordan* toplam grafi olarak adlandırılır.

Şekil-3.1.1. *Jordan* toplam grafi



Teorem 3.1.1. P_n yolu *Jordan* toplam grafidir.

İspat. $P_n = v_1v_2\dots v_n$ olsun. P_n yolu n tane düğüme ve $n-1$ tane kenara sahiptir.

$f : V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, J_2(n-1)\}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

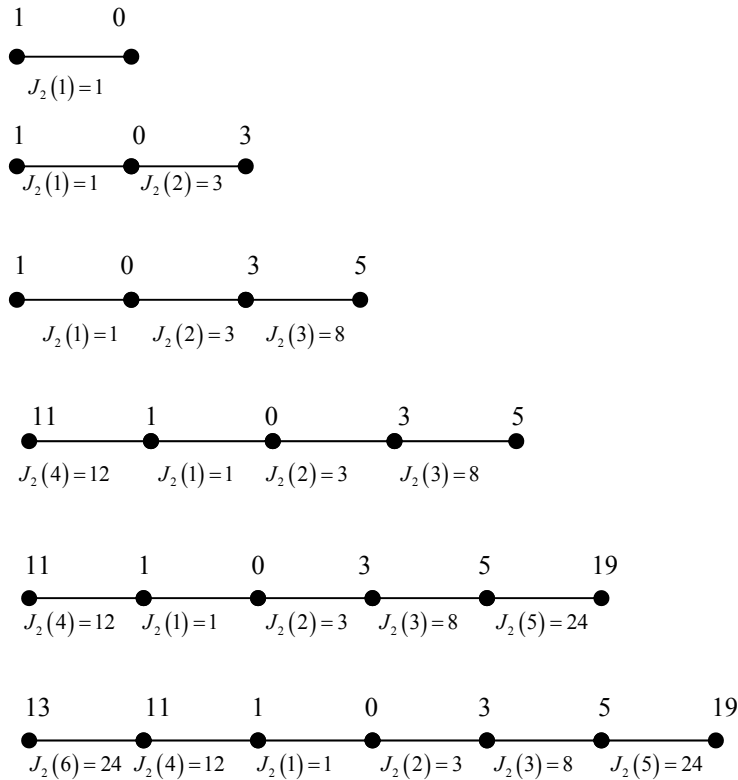
$$f(v_i) = 0$$

$$f(v_{i+1}) = 3$$

$$f(v_{i-1}) = 1$$

Geriye kalan düğümler $v_1v_2\dots v_{i-2}v_{i+2}\dots v_n$ dir. $\{J_2(3), J_2(4), \dots, J_2(n-1)\}$ kümesinin her bir elemanı komşu düğümlerin etiketleri toplamı şeklinde ifade edilebileceğinden P_n yolu *Jordan* toplam grafidir.

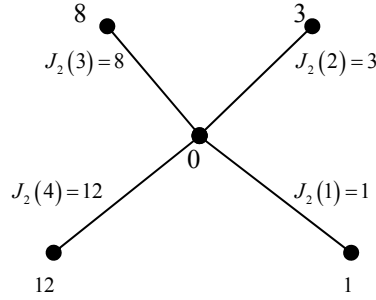
Şekil-3.1.2. $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ değerleri için yol *Jordan* toplam grafları



Teorem 3.1.2. $n < 6$ için $K_{1,n}$ Jordan toplam grafidir.

İspat. $K_{1,n}$ yıldız grafi, $n+1$ düğümlü ve n kenarlıdır. Düğümleri u, v_1, v_2, \dots, v_n olsun. Yıldız grafta $f(u) = 0$ olmak üzere diğer düğümler $f(v_i) = J_2(i)$ şeklinde etiketlenirse $\{J_2(1), J_2(2), J_2(3), \dots, J_2(n)\}$ kümesine birebir ve örten dönüşüm tanımlanır. Fakat $J_2(5) = 24 = J_2(6)$ dır. Bu durum düğümler kümesindeki 24 elemanın iki defa kullanılması demektir. Etiketleme tanımı gereği bu mümkün olmayacağından $K_{1,n}$ yıldızı $n < 6$ için Jordan toplam grafidir.

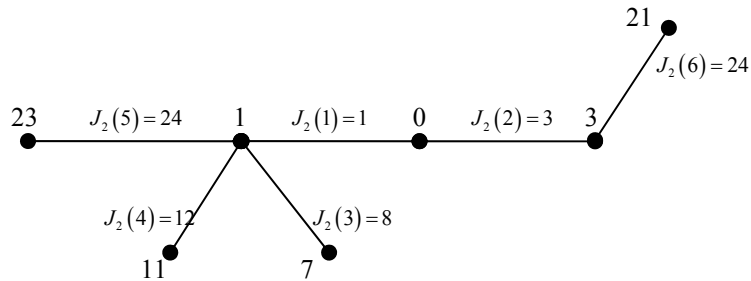
Şekil-3.1.3. $K_{1,4}$ Jordan toplam grafi



Teorem 3.1.3. Tırtıllar Jordan toplam grafidir.

İspat. Tırtılın düğümleri v_1, v_2, \dots, v_n olsun. Herhangi bir v_i düğümü θ ve bu düğüme komşu olan iki düğüm 1 ve 3 ile etiklensin ($i = 1, 2, \dots, n$). Eğer 1 ve 3 ile etiketlenen düğümler birbirine komşu değilse tırtıllara Jordan toplam etiketleme uygulanır.

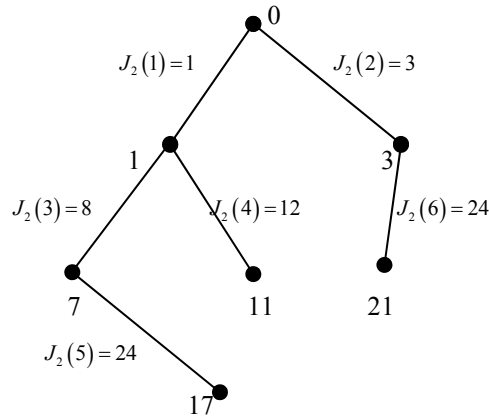
Şekil-3.1.4. Tırtıl Jordan toplam grafi



Teorem 3.1.4. Ağaçlar *Jordan* toplam grafidir.

İspat. T_n , n düğümlü ağaç olsun. Ağacın kökü 0 ile etiklensin. Köke komşu olan ilk j tane düğüm $J_2(1), J_2(2), J_2(3), \dots, J_2(j)$ ile etiklensin. Daha sonra $J_2(1) = 1$ düğümünün çocuğu veya torunu olan i tane düğümün tamamı toplamları $J_2(j+1), J_2(j+2), J_2(j+3), \dots, J_2(j+i)$ kenar etiketlerini verecek şekilde $\{0, 1, 2, \dots, J_2(n-1)\}$ kümesinden seçilen daha önce kullanılmamış uygun pozitif tam sayılarla etiklensin. Köke komşu olan düğümlerden arda kalanların hepsine bu işlem uygulanırsa $\{J_2(1), J_2(2), J_2(3), \dots, J_2(n-1)\}$ ' ne birebir ve örten bir dönüşüm tanımlanmış olur ki bu da ispatı tamamlar.

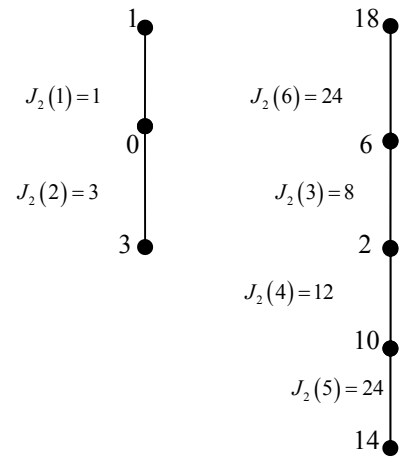
Şekil-3.1.5. T_7 *Jordan* toplam grafi



Teorem 3.1.5. $q \geq 3$ için $P_n \cup P_q$ *Jordan* toplam grafidir.

İspat. $q \geq 3$ için $P_n \cup P_q$ grafinin $n+q$ tane düğümü ve $n+q-2$ tane de kenarı vardır. $q \geq 3$ olmak üzere P_q yol grafinin herhangi üç komşu düğümü için “ 0 ile etiketlenen düğüm hem 1 ve hem de 3 ile etiketlenen düğüme komşu olsun.” şartı sağlansın. Bu etiketleme sayesinde $J_2(1) = 1$, $J_2(2) = 3$ kenar etiketleri elde edilir. Geriye kalan $n+q-4$ kenarın $\{J_2(3), J_2(4), J_2(5), \dots, J_2(n+q-2)\}$ bire bir ve örten etiketlemesi $\{3, 4, 5, 6, \dots, J_2(n+q-2)\}$ kümesinin elemanlarının yalnız bir kere kullanılması ile elde edilir.

Şekil-3.1.6. $P_3 \cup P_5$ Jordan toplam grafi



4. GRAF TEORİNİN MATEMATİK EĞİTİMİNDE UYGULAMALARI

Günümüzde her alanda gelişme ve hızlı bir ilerleme gerçekleşmektedir. Bu durum karşısında matematik eğitiminde öğrenen, öğreten ve öğrenme materyali gibi çeşitli faktörlerde de yeniden tanımlamalara ihtiyaç duyulmuştur. Özellikle öğrenci merkezli anlayışın gelişmesi öğretmenin öğrenmeyi sağlamadaki etkisini ve rolünü değiştirmiştir.

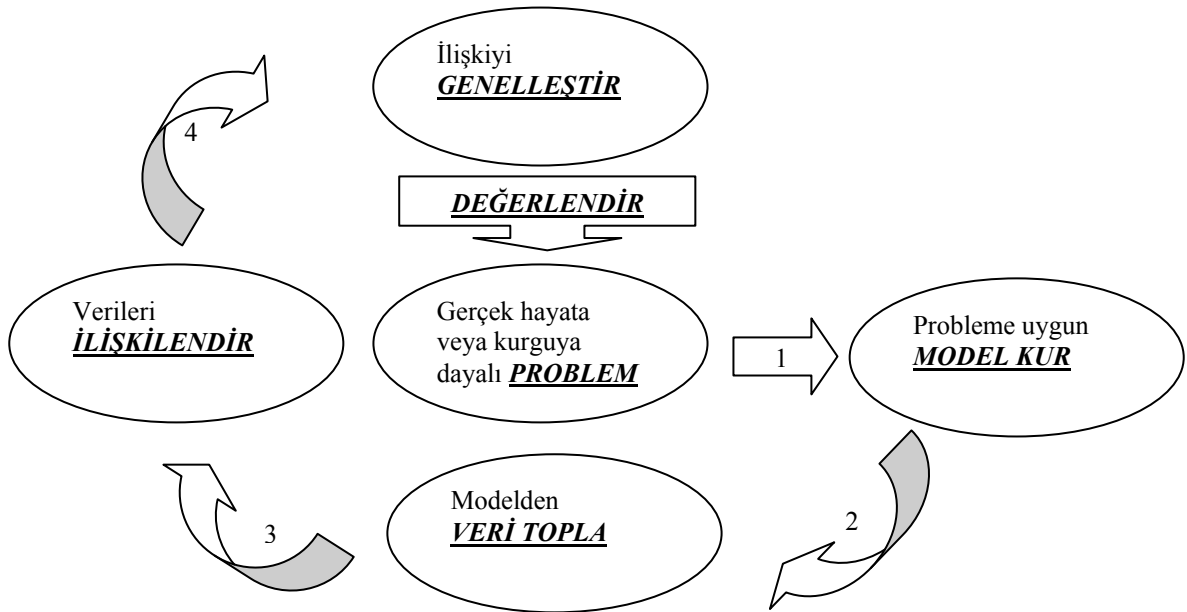
Öğrenci, öğrenme sürecinde zihinsel ve fiziksel olarak aktif katılımcı, öğrenmesinden sorumlu olan, konuşan, soru soran, sorgulayan, düşünen ve tartışan, anlayan, problem kuran ve çözebilen, birlikte çalışabilen ve değerlendirendir. Öğretmen ise kendini geliştiren ve uygulayan, sorgulayan, soru sorduran, düşündüren, tartıştıran, dinleyen, birlikte çalışabilen ve değerlendirendir (MEB, 2005a: 8). Buradan yola çıkarak MEB, öğretim programlarında matematik eğitiminin etkinlik temelli olarak planlanmasını öngörmüştür. Böylece öğrenciler öğrenirken matematiğin estetik ve eğlenceli yönünü keşfedecekler, günlük hayatla ilişki kurabilecekler ve bilgiye ulaşmada aktif bir rol oynayarak matematiği ezberlemeden öğrenebileceklerdir.

“Etkinlik kavramının geniş ve anlamsal bir zenginliği vardır. Bundan dolayı öğretim programlarında ve ders kitaplarında sunulan örneklerin büyük bir yelpazeye dağılması, etkinliklere ilişkin gerek programda gerekse akademik çalışmalarda açıklamaların net ve yeterli olmaması, kavramsal temelde öğrenme etkinliğini tanımlamayı ve özelliklerini kavramayı güçleştirmektedir.” (Uğurel vd., 2010: 105) Ayrıca ilköğretim ve ortaöğretimde görev yapan öğretmenlerin öğrenme etkinliği konusunda farklı anlayış ve tanımlamalarının olması (Bozkurt, 2012) uygulamada farklılıklar oluşturmaktadır. Öğrenme etkinliğinin literatürde yapılandırmacı eğitim anlayışının bir ürünü olan 5E modelinin ‘keşfetme (explore) aşaması’, görev ya da eğitimsel faaliyetler ve öneriler ile geliştirilen, yaşamın her döneminde geçerli olan çalışmalar gibi çeşitli tanımları bulunmaktadır.

Matematiksel etkinliklerin ulaşmayı amaçladığı kazanımın matematiksel bir içeriğe sahip olması ve ayrıca etkinliklerin birtakım matematiksel düşünme konusunda öğrencileri desteklemesi gerekmektedir. Matematiksel etkinliklerin oluşturulmasında örüntülerin de önemli bir yeri vardır. Örüntünün kelime anlamı

“numune”, “örnek”, “model”, “desen”, “resim”, “*gidişat*”, “kopyasını çıkarmak”, “... ya uydurmak” dır. Matematiksel anlamda ise örüntü “Nesne ve objelerin belli bir kurala göre ardışık dizilmesi ile oluşan bütün veya bütünü oluşturmak” şeklinde tanımlanmaktadır (Ardahan, 2005) Matematiksel etkinliklerde sorgulayıcı öğrenme ve problem çözme süreci Şekil 4.1. deki gibi modellenmektedir.

Şekil-4.1. Sorgulayıcı Öğrenme ve Problem Çözme Modeli

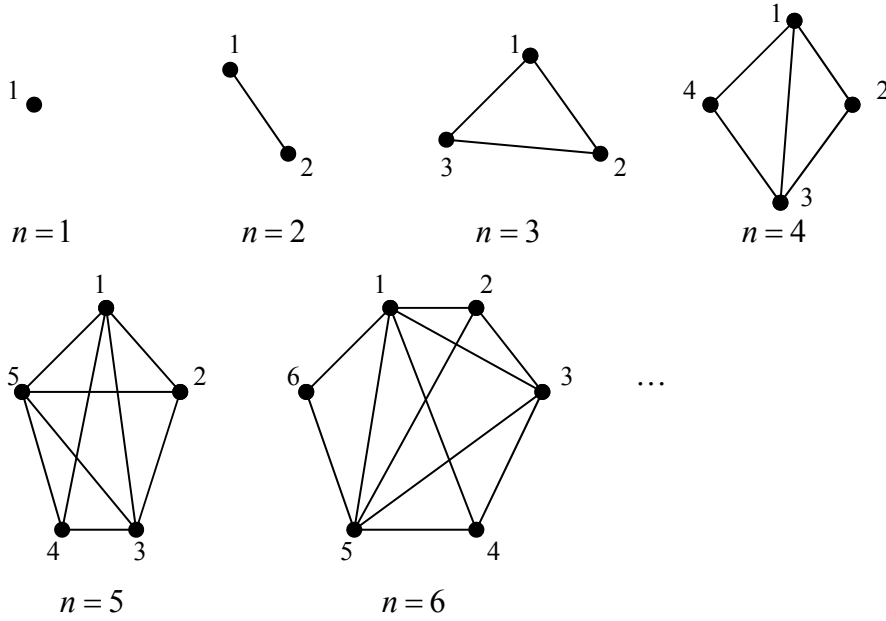


Kaynak: Ardahan, 2005.

Bu bölümde öğretim programında bulunan pozitif bölen sayısı konusu ile ilgili etkinlik graf teori kullanılarak modelleme yoluyla örneklendirilmiştir. Ayrıca asal etiketlemenin tanımı ve Teorem 2.3.4. te verilen “ n düğümlü, asal etiketli basit bir grafta bulunan maksimum kenar sayısı $\sum_{k=2}^n \varphi(k)$ dır (φ , Euler’in phi fonksiyonudur.) (Babuje, 2010: 981).” teoremi ile ilgili etkinlik graf teori yardımıyla model kurularak oluşturulmuştur. Son olarak etiketlemeden faydalanılarak yeni bir graf tanımı yapılmış ve özel durumda bu grafın bütünleyeni ile ilişkisi etkinlik yapılarak incelenmiştir.

ETKİNLİK 4.1.

n düğümlü bir grafın her bir düğümü $V = \{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin elemanları ile birbirinden farklı olacak şekilde etiketleniyor. O halde aşağıda verilen modellerden yola çıkarak etiketleme yönteminin kuralını bulunuz.

**VERİ TOPLA**

Bu modeller incelendiğinde her bir kenara ait düğüm çiftlerinin etiketi ile ilgili aşağıdaki veriler toplanır (İkililerin sırası önemli değildir.).

Düğüm Sayısı (n)	İkililer
1	-
2	(1,2)
3	(1,2), (1,3), (2,3)
4	(1,2), (1,3), (2,3), (1,4), (3,4)
5	(1,2), (1,3), (2,3), (1,4), (1,5), (2,5), (3,5), (3,4), (4,5)
6	(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5), (5,6)
n	...

VERİLERİ İLİŞKİLENDİR

Verilen modeller ve toplanan veriler ışığında etiketi aralarında asal olan düğümler arasında bir kenar olduğu, aksi durumda kenar bulunmadığı görülür. O zaman her bir kenarın çakışık olduğu düğüm çiftinin etiketi aralarında asaldır.

GENELLEŞTİR

Herhangi bir $G = (V, E)$ grafında bulunan bütün düğümler $\{1, 2, 3, \dots, |V|\}$ kümesinin elemanları ile birebir ve örten olacak şekilde etiketlendiğinde, her bir kenarın çakışık olduğu düğümlerin etiketi aralarında asal oluyorsa bu etiketleme türü asal etiketlemedir.

DEĞERLENDİR

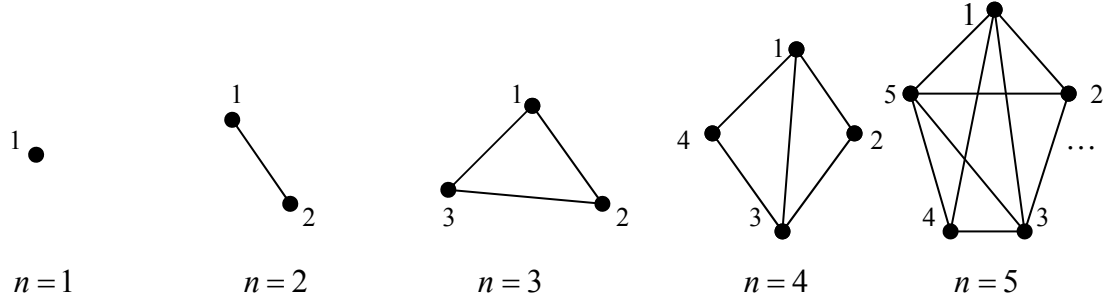
Graf çeşitlerinden P_n yol grafına, C_n devir grafına ve ikili graflara asal etiketleme uygulanabilir. Yalnız ağaçlar, tırtıl grafları, K_n tam grafi ve W_n grafi gibi graf türlerine asal etiketleme uygulayabilmek için çeşitli sınırlamalar ve şartlar getirilmiştir. Örneğin $n < 4$ için K_n tam grafına, $n+1$ 'in tek olması durumunda W_n grafına asal etiketleme uygulanabilir. Ayrıca bütün büyük ağaçların asal olduğu ispatlanmıştır.

- Öğrencinin de etkinliğin bütün aşamalarına bu şekilde cevaplar vermesi beklenmektedir.

ETKİNLİK 4.2.

Problem: n düğümlü, asal etiketli bir grafta bulunabilecek maksimum kenar sayısının *Euler*'in *Phi* fonksiyonu ile olan ilişkisini araştırınız.

Bu örüntünün ilk 5 modeli aşağıda verilmiştir.

**VERİ TOPLA**

Bu modeldeki (örüntü), düğüm sayısı (n) ile ikili (kenar) sayısı arasındaki ilişkiyi ifade ediniz.

Düğüm Sayısı (n)	İkililer	İkili (kenar) Sayısı
1	-	-
2	(1,2)	1
3	(1,2), (1,3), (2,3)	1+2
4	(1,2), (1,3), (2,3), (1,4), (3,4)	1+2+2
5	(1,2), (1,3), (2,3), (1,4), (1,5), (2,5), (3,5), (3,4), (4,5)	1+2+2+4
n

$$\begin{aligned}
n = 1 &\rightarrow 0 \text{ tane} \\
n = 2 &\rightarrow 1 \text{ tane} \\
n = 3 &\rightarrow 1 + 2 \text{ tane} \\
n = 4 &\rightarrow 1 + 2 + 2 \text{ tane} \\
n = 5 &\rightarrow 1 + 2 + 2 + 4 \text{ tane}
\end{aligned}$$

VERİLERİ İLİŞKİLENDİR

Düğüm Sayısı (n)	İkili (kenar) Sayısı
1	- $+ \varphi(2)$
2	1 $+ \varphi(3)$
3	1+2 $+ \varphi(4)$
4	1+2+2 $+ \varphi(5)$
5	1+2+2+4 $+ \varphi(n)$
\vdots	\vdots
n	$1 + 2 + 2 + 4 + \dots + \varphi(n) + \varphi(n)$

GENELLEŞTİR

Düğüm sayısı (n) arttıkça ikili (kenar) sayısı *Euler'in Phi* fonksiyonuna bağlı olarak artış göstermektedir. O zaman n düğümlü bir grafın maksimum kenar sayısı

$$1 + 2 + 2 + 4 + \dots + \varphi(n) = \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \varphi(5) + \dots + \varphi(n)$$

olup bu toplam $\sum_{k=2}^n \varphi(k)$ şeklinde ifade edilir.

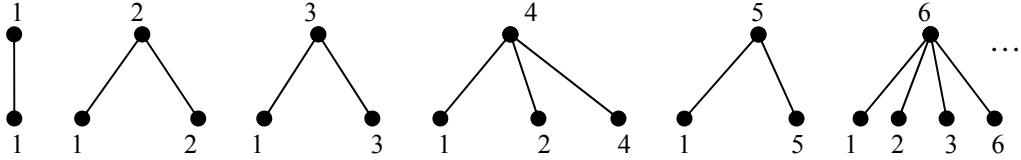
DEĞERLENDİR

Grafların düğüm sayısı ile *Euler'in Phi* fonksiyonu arasında kurulan bu ilişki sayesinde graf teori ile sayılar teorisi arasında önemli bir bağlantı olduğu görülmüştür.

- Öğrencinin de etkinliğin bütün aşamalarına bu şekilde cevaplar vermesi beklenmektedir.

ETKİNLİK 4.3.

Problem: a, b, c farklı asal sayılar ve m, k, p birer sayma sayısı olmak üzere $n = a^m \cdot b^k \cdot c^p$ şeklindeki pozitif tamsayıların pozitif bölenleri ile ilgili aşağıdaki modeller oluşturuluyor.

**VERİ TOPLA**

n pozitif tamsayısı ile bu tam sayının pozitif bölenlerinin oluşturduğu modelde bulunan kenar sayısı (pozitif bölenleri sayısı) arasındaki ilişkiyi inceleyiniz.

n	n 'nin asal çarpanlara ayrılışı	Kenar Sayısı (Pozitif Bölen Sayısı)
1	-	1
2	2^1	2
3	3^1	2
4	2^2	3
5	5^1	2
6	$2^1 \cdot 3^1$	4
n	$n = a^m \cdot b^k \cdot c^p$...

VERİLERİ İLİŞKİLENDİR

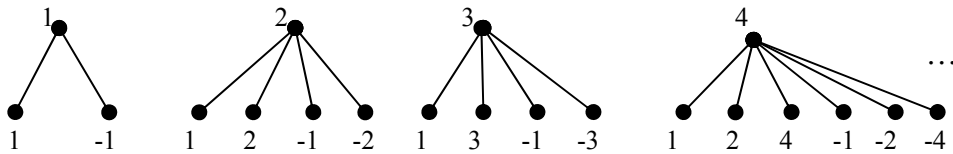
n	Kenar Sayısı (Pozitif Bölen Sayısı)	n ' nin asal çarpanlara ayrılışı	Kural
1	1	-	-
2	2	2^1	$1+1=2$
3	2	3^1	$1+1=2$
4	3	2^2	$2+1=2$
5	2	5^1	$1+1=2$
6	4	$2^1.3^1$	$(1+1).(1+1)=4$
n	...	$n = a^m . b^k . c^p$...

GENELLEŞTİR

n pozitif tamsayısı asal çarpanlara ayrıldığında oluşan tek türlü yazılımdaki asalların kuvvetlerine 1 eklenip bunlar çarpılırsa n ' nin pozitif bölen sayısı bulunur. O zaman $n = a^m . b^k . c^p$ pozitif tamsayısının pozitif bölen sayısı $(m+1).(k+1).(p+1)$ dir.

DEĞERLENDİR

n pozitif tamsayısının tam bölenlerinin sayısını bulunuz.



$$n = 1 \rightarrow 1+1 = 2 \text{ tane}$$

$$n = 2 \rightarrow 2+2 = 4 \text{ tane}$$

$$n = 3 \rightarrow 2+2 = 4 \text{ tane}$$

$$n = 4 \rightarrow 3+3 = 6 \text{ tane}$$

...

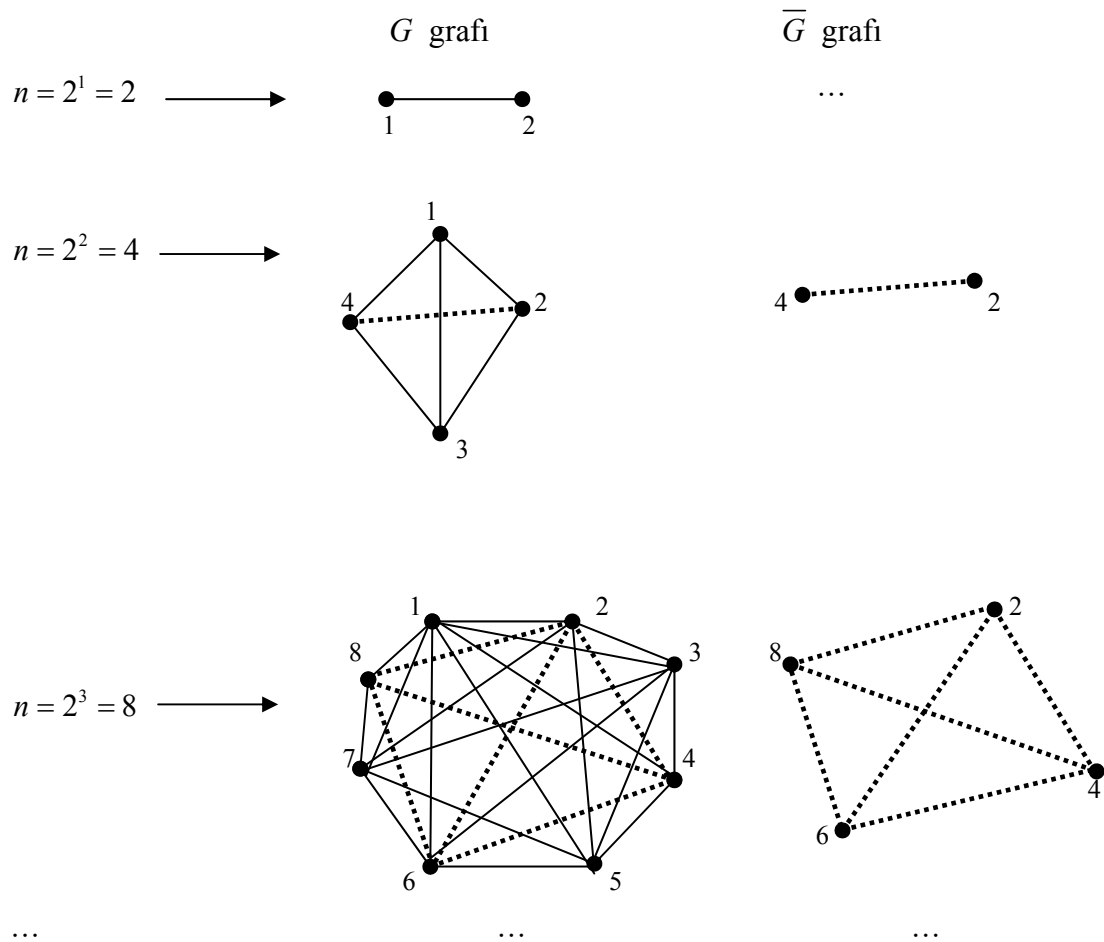
Anlaşılabacağı üzere n pozitif tamsayısının pozitif bölen sayısı, negatif bölen sayısına eşittir. Dolayısıyla tüm bölen sayısı pozitif (negatif) bölen sayısının iki

katıdır. Buradan $n = a^m \cdot b^k \cdot c^p$ pozitif tamsayısının tam bölenlerinin sayısı $2 \cdot (m+1) \cdot (k+1) \cdot (p+1)$ şeklinde ifade edilir.

- Öğrencinin de etkinliğin bütün aşamalarına bu şekilde cevaplar vermesi beklenmektedir.

ETKİNLİK 4.4.

Problem: $G = (V, E)$ olmak üzere $V = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ve sırasız $\{x, y\}$ ikilileri için $E = \{\{x, y\} : 1 \leq x, y \leq n, x \neq y \text{ ve } ((x, y), n) = 1\}$ şeklinde tanımlanan basit grafi ile bütünleyeni olan \bar{G} grafi arasında $n = 2^t$ ($t \neq 0$) olması durumunda bulunan ilişki ile ilgili aşağıdaki modeller oluşturuluyor.



VERİ TOPLA

G grafi düğüm sayısı	G grafi kenar sayısı	Toplam kenar sayısı	\overline{G} grafi kenar sayısı	\overline{G} grafi düğüm sayısı
$n = 2^1 = 2$	1	1	0	0
$n = 2^2 = 4$	5	6	1	$2^1 = 2$
$n = 2^3 = 8$	22	28	6	$2^2 = 4$
$n = 2^t$	$n = 2^{t-1}$

VERİLERİ İLİŞKİLENDİR

Toplanan veriler incelendiğinde $n = 2^t$ ($t \neq 0$) için \overline{G} grafinin kenar sayısı ile $n = 2^{t-1}$ için toplam kenar sayısının birbirine eşit olduğu görülmektedir. Ayrıca G grafinin bütünleyeni olan \overline{G} grafi, tam graf ile de ilişkilidir.

$n = 2^1 = 2$ için \overline{G} boş graf

$n = 2^2 = 4$ için $\overline{G} = K_2$

$n = 2^3 = 8$ için $\overline{G} = K_4$

...

GENELLEŞTİR

$n = 2^t$ ($t \neq 0$) düğümlü bir G grafinde $\varphi(2^t)$ tane $n = 2^t$ den küçük ve $n = 2^t$ ile arasında asal olan pozitif tamsayı vardır. Euler'in Phi fonksiyonunda “ $\forall p$ asalı ve $t \geq 1$ için $\varphi(p^t) = p^t - p^{t-1}$ dir” (Sivaramakrishnan, 1989: 83). olduğundan 2^t ile arasında asal olmayan tamsayı sayısı $2^t - \varphi(2^t) = 2^t - (2^t - 2^{t-1}) = 2^{t-1}$ dir. O zaman G grafinde bulunan 2^{t-1} düğüm istenilen şartları taşımaz ve bu düğümler arasında bir kenar yoktur. Bu durumda \overline{G} grafinin düğüm sayısı $n = 2^{t-1}$ dir. Modelden de görüldüğü gibi \overline{G} grafinde, her düğümün diğer düğümlerle bir kenar ile bağlantısı vardır. Dolayısıyla $n = 2^{t-1}$ düğümlü \overline{G} grafi aynı zamanda $K_{2^{t-1}}$ tam grafidir.

DEĞERLENDİR

Bu durum $p \neq 2$ olmak üzere $\forall p$ asal kuvveti için geçerli olur mu?

İnceleyiniz.

G grafının her bir düğümü $V = \{1, 2, 3, \dots, p^t\}$ kümesinin elemanları ile birbirinden farklı olacak şekilde etiketlensin. G grafında $\varphi(p^t)$ tane p^t den küçük ve p^t ile arasında asal olan pozitif tamsayı vardır. Dolayısıyla p^t ile arasında asal olmayan düğüm sayısı $p^t - \varphi(p^t) = p^t - (p^t - p^{t-1}) = p^{t-1}$ dir. O zaman G grafında bulunan p^{t-1} düğüm istenilen şartları taşımaz ve bu düğümler arasında bir kenar yoktur. Bu durumda \bar{G} grafının düğüm sayısı $n = p^{t-1}$ dir. \bar{G} grafında, her düğümün diğer düğümlerle bir kenar ile bağlantısı vardır. Dolayısıyla $n = p^{t-1}$ düğümlü \bar{G} grafi aynı zamanda $K_{p^{t-1}}$ tam grafıdır.

- Öğrencinin de etkinliğin bütün aşamalarına bu şekilde cevaplar vermesi beklenmektedir

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Tez çalışmasında graf teorisinin tezde ihtiyaç duyulan temel tanım ve teoremleri verilerek graf etiketleme çeşitlerinin bir bölümünden bahsedilmiştir. Graf etiketlemenin düğümlere, kenarlara veya her ikisine birden sayılar kümesinden elemanlar atanarak oluşturulmasından dolayı sayılar teorisi ile yakından ilişkisi vardır. Dolayısıyla q kenarlı bir grafın düğümler kümesinin elemanları $\{0,1,2,\dots,J_2(q)\}$ kümesinden seçilerek adına *Jordan* toplam grafi denilen yeni bir graf etiketleme tanımı yapılmıştır. Tanımlanan bu graf etiketlemenin hangi tür graflara uygulanabileceği incelenmiştir.

Önceki bölümlerde bahsedilen bilgi, teorem ve etiketlemeler kullanılarak etkinlikler oluşturulmuştur. Böylece tezde verilen bilgilerin nasıl öğretileneğine ve matematik eğitiminin her kademesinde graf teorisinin işlevsel olduğuna atıfta bulunulmuştur.

Etkinlik 4.4 ile *Jordan Totient* fonksiyonuna çeşitli sınırlamalar getirilerek etiketleme yoluyla yeni bir graf oluşturulmuştur. Oluşturulan bu grafın düğüm sayısı $n = 2^t$ ($t \neq 0$) olması durumunda, graf ile bütünleyeni arasındaki ilişki incelenmiştir.

$J_2(n)$ fonksiyonuna ait sayı dizisinin belirli bir kuralı yoktur. Fonksiyonun sonucu birbirinden farklı değerlerde eşit de çıkabilmektedir. Dolayısıyla düğümlere değerler verildiğinde bu değerlerin toplamı her zaman bir *Jordan* fonksiyonunu vermeyebilir. Buradan açık olarak K_n ve $K_{m,n}$ gibi her düğüm çifti arasında bir kenar bulunan graflara *Jordan* toplam etiketleme uygulanamaz. Ayrıca C_n , H_n , W_n graflarına ve dişlilere *Jordan* toplam etiketleme uygulanamaz. Fakat bu graflara çeşitli kısıtlamalar getirilerek veya graf işlemleri yapılarak *Jordan* toplam graf olup olmadıkları incelenebilir.

Matematik eğitiminde müfredatta bulunan birçok konu ve problem durumunu graf teori ile açıklamak ve uygun modeller oluşturmak mümkündür. Buradan hareketle ilköğretim, ortaöğretim, lise ve üniversite müfredatları gözden geçirilip modellemeler- etkinlikler oluşturulabilir.

KAYNAKLAR

1. Ajtha, V. (2007). *Studies in graph theory-labeling of graphs*. Doktora Tezi, KANNUR UNIVERSITY, Kannur, India.
2. Aldred, R. E. L. and McKay, B. D. (1998). Graceful and harmonious labellings of trees. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, 23, 69-72.
3. Ardahan, H. (2005). *Öğretim Materyalleri-CD*. Matematik Eğitimi, Örüntüler ve ders etkinlikleri, FakülteY.K. 19.11.2002 tarih ve 2002/78 sayılı Kararı, Konya.
4. Babuje, J. B. (2010). Euler's phi function and graph labeling. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, Vol. 5, no. 20, 977-984.
5. Bozkurt, A. (2012). Matematik öğretmenlerinin matematiksel etkinlik kavramına dair algıları. *Eğitim ve Bilim*, cilt 37, sayı 166, 101-115.
6. Fang, W. (2010). A computational approach to the graceful tree conjecture. *Arxiv: 1003.3045v2[cs.DM]*.
7. Gallian, J. A. (2013). *A Dynamic Survey of Graph Labeling*. The Electronic Journal of Combinatorics16. #DS6.
8. Graham, R. L. and Sloane, N. J. A. (1980) .On additive bases and harmonious graphs. *SIAM J. Alg. Discrete Math.*1, 382-404.
9. Gross, J. and Yellen, J. (1998). *Graph Theory and its Applications*. Washington: Kenneth H. Rosen. Rh.D.
10. Harary, F. (1969). *Graph Theory*. Reading, Mass: Addison Wesley.
11. Haxel, P., Pikhurko, O. and Taraz, A. (2012). Primality of Trees. *Journal of Combinatorics*, Vol 0, No 0,1.
12. Huang, C., Kotzig, A. and Rosa, A. (1982). Further results on tree labelings. *Util. Math.*, 21c, 31-48.
13. Horton, M. (2003). *Graceful trees: Statistics and algorithms*. <http://eprints.utas.edu.au/19/1/GracefulTreesStatisticsAndAlgorithms.pdf>, Erişim Tarihi: 12.02.2013, University of Tasmania.
14. Işıkdemir, F. (2007). *Sonlu Graf Teori Bağlantılılık ve Ağaçlar Üzerine*. Yüksek Lisans Tezi, OSMANGAZİ ÜNİVERSİTESİ.
15. Liang, Z. H. and Bai, Z. L. (2009). On the odd harmonious graphs with applications. *J. Appl. Math. Comput.*, 29, 105-116.
16. MEB (2005a). *İlköğretim matematik dersi öğretim programı ve kılavuzu: 6-8. Sınıflar*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü.
17. MEB (2005b). *Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı ve kılavuzu: 9-12. Sınıflar*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü.
18. Ramasubramanian, M. R. and Kala, R. (2012). Total prime graph. *International Journal of Computational Engineering Research (ijceronline.com)*, Vol 2, Issue 5.
19. Sheppard, D. A. (1976). The factorial representation of balanced labelled graphs. *Discrete Math.*, 15, 379-388.
20. Sivaramakrishnan, R. (1989). *Classical Theory of Arithmetic Functions*. New York: Marcel Dekker, Inc.
21. Srivastav, S. (2008). *Discussion on some important topics in graph theory*. Doktora tezi, SAURASHTRA UNIVERSITY.

22. Şenol, Ö. (2014). *Eğitimde Çizge Kuramı*. Yüksek Lisans Tezi, İSTANBUL KÜLTÜR ÜNİVERSİTESİ.
23. Tout, A., Dabboucy, A. N. and Howalla, K. (1982). Prime labeling of graphs. *Nat. Acad. Sci. Letters*, 11, 365-368.
24. Uğurel, I., Bukova-Güzel, E. ve Kula, S. (2010). Matematik öğretmenlerinin öğrenme etkinlikleri hakkındaki görüş ve deneyimleri. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 103-123.
25. Uma, R. and Murugesan, N. (2012). Graceful labeling of some graphs and their subgraphs. *Asian Journal of Current Engineering and Maths*, 1, 367-370.
26. Wallis, W. D. (2000). *A beginner's guide to graph theory 2*. Birkhäuser . Berlin.
27. Watson, R. L. (2000). *A survey on the graceful labeling of graphs*. Yüksek Lisans Tezi, UNIVERSITY OF COLORADO.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı:	Sevil DİNÇER	İmza:		
Doğum Yeri:	NEVŞEHİR			
Doğum Tarihi:	01.01.1986			
Medeni Durumu:	EVLİ			
Öğrenim Durumu				
Derece	Okulun Adı	Program	Yer	Yıl
İlköğretim	Atatürk İlköğretim Okulu	-	Nevşehir	1997
Ortaöğretim	H. Lütfi pamukçu ilköğretim okulu	-	Nevşehir	2000
Lise	Nevşehir Anadolu Öğretmen Lisesi	-	Nevşehir	2004
Lisans	Selçuk Üniversitesi	Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği	Konya	2009
Yüksek Lisans	Necmettin Erbakan Üniversitesi	Matematik Eğitimi	Konya	2014
Becerileri:	-			
İlgi Alanları:	Matematik eğitimi, Cebir ve Sayılar Teorisi			
İş Deneyimi:	MEB öğretmen			
Aldığı Ödüller:	-			
Hakkımda bilgi almak için önerebileceğim şahıslar:	-			
Tel:	506 3074082			
Adres	İstiklal Mah. Gül Sok. Can Apt. D Blok No:10/4 Şereflikoçhisar /ANKARA			

SEVİL DİNÇER

SAYILAR TEORİSİNİN GRAF
TEORİDE UYGULAMALARI

Yüksek Lisans Tezi 2014