



**SIRA İSTATİSTİKLERİNİN BAĞIMLILIK YAPISININ KAPULALAR İLE  
İNCELENMESİ**

**Ferhan BAŞ KAMAN**

**DOKTORA TEZİ  
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**NİSAN 2018**

Ferhan BAŞ KAMAN tarafından hazırlanan “SIRA İSTATİSTİKLERİNİN BAĞIMLILIK YAPISININ KAPULALAR İLE İNCELENMESİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

**Danışman:** Doç. Dr. Hülya OLMUŞ

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

**Başkan:** Prof. Dr. Semra ERBAŞ

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

**Üye:** Prof. Dr. Fatih TANK

Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

**Üye:** Prof. Dr. Mehmet YILMAZ

İstatistik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

**Üye:** Doç. Dr. Hacı Hasan ÖRKCÜ

İstatistik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 19/04/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
  - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
  - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
  - Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
  - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ferhan BAŞ KAMAN

19/04/2018

# SIRA İSTATİSTİKLERİNİN BAĞIMLILIK YAPISININ KAPULALAR İLE İNCELENMESİ

(Doktora Tezi)

Ferhan BAŞ KAMAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Nisan 2018

## ÖZET

İstatistik teorisinde, değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını anlamak uzun yıllar çalışılmış ve bu bağımlılık yapısını ortaya koymak için birçok yöntem geliştirilmiştir. Son zamanlarda bunun için kullanılan en etkili yöntemlerden biri de kapula fonksiyonlarıdır. Kapula fonksiyonları yardımıyla iki veya çok değişkenli dağılımların kolayca inşa edilebilmesi de kapulalara olan ilgiyi artırmıştır. Bu tezde istatistiksel hipotezlerde, tahmin problemlerinde, istatistiksel süreç kontrollerinde, güvenilirlik, risk yönetimi ve birçok uygulamalı alanda yaygın olarak kullanılmakta olan sıra istatistiklerinin bağımlılık yapısı kapulalarla araştırılmıştır. İlk olarak  $X_{(1)}, X_{(n)}$  uç sıra istatistiklerinin bağımlılık ilişkilerine bakılmış ve bu ilişkilerin değişimine bağlı olarak Clayton, Frank, Gumbel, Gaussian, Farlie-Gumbel-Morgenstern ve min-max-kapula ailelerinin veri setine uygunlukları Ki-kare uyum iyiliği testi ile incelenmiştir. İkinci olarak da Dolati ve Úbeda-Flores (2009) tarafından önerilen sıra istatistiklerinin marjinal dağılımları ile elde edilmiş kapulanın çarpım kapulası ile doğrusal bir kombinasyonu oluşturularak yeni bir karma kapula elde edilmiştir. Elde edilen yeni karma kapulanın önemli kapulalarla ilişkileri, simetri yapısı, sıralama özelliği, kadran bağımlılığı, uyumu ve Kendall'ın  $\tau$ 'su ve Spearman'ın  $\rho$ 'su için yeni sınırları elde edilmiştir. Yeni karma kapula negatif kadran bağımlılığa sahip bulunmuştur. Ayrıca yeni oluşturulan kapula Farlie-Gumbel-Morgenstern kapulasına uygulanarak Farlie-Gumbel-Morgenstern kapulasının yeni bir formu elde edilmiştir. Yeni karma kapula negatif kadran bağımlı olduğu için Farlie-Gumbel-Morgenstern kapulasının yeni formu negatif yönde daha güçlü bir bağımlılık yapısına sahip bulunmuştur. Farlie-Gumbel-Morgenstern kapulasının yeni formu bazı kapulalar ile karşılaştırılmıştır. Bunlar Farlie-Gumbel-Morgenstern kapulası, Gaussian kapulası ve Frank kapulasıdır. Burada karşılaştırmada kullanılan kapulalar arasında en uygun kapulayı bulmak için Akaike bilgi kriteri ve Bayesian bilgi kriteri kullanılmıştır.

Bilim Kodu : 20509

Anahtar Kelimeler : Karma kapula, Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula, negatif kadran bağımlılık, sıra istatistikleri

Sayfa Adedi : 53

Danışman : Doç. Dr. Hülya OLMUŞ

INVESTIGATION OF DEPENDENCE STRUCTURE OF THE ORDER STATISTICS  
BY COPULAS  
(PhD. Thesis)

Ferhan BAŞ KAMAN

GAZİ UNIVERSITY  
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

April 2018

ABSTRACT

In statistics theory, it has been studied to understand dependency structure between variables for many years and some methods have been developed to reveal this dependency structure. Recently, one of the most effective methods for this purpose are copula functions. The ability to easily construct bivariate or multivariate distributions with the help of the copula functions has also increased the relevance of the copula. In this thesis, dependency structure of order statistics which are widely used in statistical hypothesis, prediction problems, statistical process controls, reliability, risk management and many applied areas, have been investigated with copulas. Firstly, dependency relations of the extreme order statistics  $X_{(1)}, X_{(n)}$  have been examined and the suitability of Clayton, Frank, Gumbel, Gaussian, Farlie-Gumbel-Morgenstern and min-max-copula families to the data set has been explored by Chi-square goodness of fit test from depending on the change of these relations. Secondly, a new mixture copula has been obtained by creating a linear combination of product copula with copula which is obtained with marginal distributions of order statistics which was proposed by Dolati and Úbeda-Flores (2009). Relationships with significant copulas, symmetry, quadrant dependency, concordance, and new bounds for Spearman's rho and Kendall's tau of new mixture copula is obtained. It is seen that the new mixture copula is found as negative quadrant dependence. In addition, a new form of Farlie-Gumbel-Morgenstern copula is obtained by applying Farlie-Gumbel-Morgenstern copula to new mixture copula. Because the new mixture copula has negative quadrant dependency, the new form of Farlie-Gumbel-Morgenstern copula has been found to have a stronger negative dependency. The new form of the Farlie-Gumbel-Morgenstern copula has been compared to some copulas. These are Farlie-Gumbel-Morgenstern, Gaussian and Frank copulas. To find the best-fit copula between the copulas used in the comparison, Akaike information criterion and Bayesian information criterion are used.

Science Code : 20509

Key Words : Mixture copula, Farli-Gumbel-Morgenstern copula, negative dependency, order statistics

Page Number : 53

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Hülya OLMUŞ

## TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren danışmanım Doç. Dr. Hülya OLMUŞ'a, tez sürecinde değerli katkılarından dolayı Tez İzleme Komitesindeki hocalarım Prof. Dr. Mehmet YILMAZ ve Doç. Dr. H. Hasan ÖRKÇÜ'ye ve son olarak görüş ve düşüncelerinden yararlandığım tez savunma jürimde olan Prof. Dr. Semra ERBAŞ ve Prof. Dr. Fatih TANK'a teşekkürü bir borç bilirim. Bu zorlu süreçte maddi manevi desteklerini benden hiç esirgemeyen annem Selma BAŞ'a, babam Mehmet BAŞ'a, kayınvalidem Veside KAMAN'a, kayınpederim Bayram KAMAN'a, kardeşlerim Tuğba BAŞ, Fatih BAŞ, Yusuf KAMAN, Alperen KAMAN ve Zeynep Nazlı KAMAN'a, kuzenim Hafize BAŞ ADEMOĞLU'na, dostum Çiğdem ÇAKIR ASADOV'a ve adını yazamadığım bütün sevdiklerime çok teşekkür ederim. Son olarak her zaman yanımda olup desteğini benden hiç esirgemeyen sevgili eşim İbrahim KAMAN'a ve bu süreçte aramıza katılan biricik oğlum Ömer Bayram KAMAN'a sonsuz teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT .....	v
TEŞEKKÜR .....	vi
İÇİNDEKİLER .....	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ .....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ .....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL TANIMLAR VE ÖZELLİKLER.....	5
2.1. Kapuların Tanımı ve Genel Özellikleri .....	5
2.1.1. Sklar teoremi.....	7
2.1.2. Kapuların olasılık yoğunluk fonksiyonu.....	8
2.1.3. Kapulalarda sıralama .....	8
2.1.4. Fréchet-Hoeffding sınırı .....	8
2.1.5. Bir kapulanın duali ve eşkapula .....	9
2.1.6. Çarpım kapulası .....	9
2.1.7. Sağkalım (survival) kapulası .....	9
2.2. Kapuların Simetri Özellikleri.....	10
2.3. Kapuların Bağımlılık Yapıları .....	11
2.3.1. Uyumluluk (concordance) .....	12
2.3.2. Kadran (quadrant) bağımlılık.....	12
2.3.3. Kendall'ın $\tau$ 'su ve Spearman'ın $\rho$ 'su.....	12
2.4. Tezde Kullanılan Kapula Aileleri .....	13
2.4.1. Arşimedyen kapulası .....	13



	<b>Sayfa</b>
2.4.2. Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) kapulası .....	15
2.4.3. Gaussian kapulası.....	15
2.5. Sıra İstatistikleri .....	16
2.5.1. Sıra istatistiklerinin marjinal ve ortak dağılım fonksiyonları .....	16
2.6. Model Seçimi.....	18
2.6.1. Ki-kare uyum iyiliği testi.....	18
2.6.2. Akaike bilgi kriteri ve Bayesian bilgi kriteri .....	18
<b>3. <math>X_{(1)}</math> VE <math>X_{(n)}</math> UÇ SIRA İSTATİSTİKLERİ ÜZERİNE ÇALIŞMALAR</b>	<b>21</b>
3.1. $X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$ Uç Sıra İstatistiklerinin Kapulası .....	21
3.2. $X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$ Uç Sıra İstatistiklerinin Bağımlılık Yapısı Üzerine Bir Simülasyon Çalışması .....	21
<b>4. SIRA İSTATİSTİKLERİNİN DAĞILIM ÖZELLİKLERİ KULLANILARAK YENİ KAPULALAR ELDE ETME VE YENİ ÖNERİLEN KARMA KAPULA.....</b>	<b>25</b>
4.1. Sıra İstatistikleri Çiftleri Kullanılarak Kapula İnşa Etme .....	25
4.2. Yeni Karma Kapula.....	28
<b>5. EN UYGUN KAPULA SEÇİMİ VE SİMÜLASYON ÇALIŞMASI ....</b>	<b>37</b>
5.1. En Uygun Kapula Seçimi .....	37
5.2. Simülasyon Çalışması .....	41
<b>6. SONUÇ VE ÖNERİLER .....</b>	<b>47</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>51</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>53</b>

## ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. Arşimedyen kapula aileleri, bu ailelerin fonksiyonları, üreticileri, parametre aralıkları ve parametrelerinin Kendall'ın $\tau$ 'su ile ilişkileri ....	15
Çizelge 3.1. Uç sıra istatistikleri $(X_{(1)}, X_{(n)})$ için simülasyon sonuçları .....	23



**ŞEKİLLERİN LİSTESİ**

<b>Şekil</b>	<b>Sayfa</b>
Şekil 5.1. Kendall'ın $\tau$ 'su $\tau = -0,0476$ olduğunda kapulalardan üretilen $(u, v)$ çiftlerinin saçılım grafikleri .....	42
Şekil 5.2. Kendall'ın $\tau$ 'su $\tau = -0,1144$ olduğunda kapulalardan üretilen $(u, v)$ çiftlerinin saçılım grafikleri .....	43
Şekil 5.3. Kendall'ın $\tau$ 'su $\tau = -0,2100$ olduğunda kapulalardan üretilen $(u, v)$ çiftlerinin saçılım grafikleri .....	43
Şekil 5.4. Kendall'ın $\tau$ 'su $\tau = -0,2561$ olduğunda kapulalardan üretilen $(u, v)$ çiftlerinin saçılım grafikleri .....	44
Şekil 5.5. Kendall'ın $\tau$ 'su $\tau = -0,3087$ olduğunda kapulalardan üretilen $(u, v)$ çiftlerinin saçılım grafikleri .....	45

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$\Sigma$	Pozitif tanımlı korelasyon matrisi
$\Phi$	Bir-boyutlu standart normal dağılımın dağılım fonksiyonu
$H$	Tanım kümesi $S_1 \times S_2$ olan ortak dağılım fonksiyonu
$\Phi^{-1}$	$\Phi$ 'nin tersi
$\bar{H}$	$H$ 'nin sağ kalım fonksiyonu
$\rho_{12}$	Gaussian kapulanın parametresi
$V_H(B)$	$B$ dikdörtgeninin $H$ fonksiyonundaki hacmi
$I$	$[0,1]$ , birim aralık
$B$	Dikdörtgen
$R$	Gerçek eksen, $(-\infty, \infty)$
$\theta$	Kapula parametresi
$\tilde{C}$	Kapulanın duali
$f$	Olasılık yoğunluk fonksiyonu
$\rho$	Spearman'ın $\rho$ değeri
$H_0$	Yokluk hipotezi
$M$	Fréchet-Hoeffding üst sınırı
$I^2$	$[0,1]^2$ , birim kare
$C'$	Alt kapula
$H_1$	Alternatif hipotez
$\varphi^{-1}$	Arşimedyan kapula üreticisinin sözde tersi
$\varphi$	Arşimedyan kapulanın üreticisi
$\Pi$	Çarpım kapulası
$C^*$	Eş kapula
$W$	Fréchet-Hoeffding alt sınırı

<b>Simgeler</b>	<b>Açıklama</b>
$\bar{R}^2$	Genişletilmiş gerçek düzlem, $\bar{R} \times \bar{R}$
$\bar{R}$	Genişletilmiş gerçek eksen, $[-\infty, \infty]$
$c$	Kapula olasılık yoğunluk fonksiyonu
$\theta$	Kapula parametresinin tahmini
$\tau$	Kendall'ın $\tau$ değeri
$\bar{C}$	Sağ kalım fonksiyonu
$\hat{C}$	Sağ kalım kapulası
$S_1, S_2$	Genişletilmiş gerçek eksenin boş olmayan alt kümeleri
$F, G$	Marjinal dağılım fonksiyonları
$\bar{F}, \bar{G}$	Marjinal sağ kalım fonksiyonları
$\alpha, \beta$	Olasılık değerleri
$F^{-1}, G^{-1}$	Marjinal dağılım fonksiyonlarının tersi
$C, D, C_\theta(u, v)$	Kapula fonksiyonu

<b>Kısaltmalar</b>	<b>Açıklama</b>
<b>AIC</b>	Akaike bilgi kriteri
<b>BIC</b>	Bayesian bilgi kriteri
<b>FGM</b>	Farlie-Gumbel-Morgenstern kapula
<b>NQD</b>	Negatif kadran bağımlı
<b>PQD</b>	Pozitif kadran bağımlı

## 1. GİRİŞ

Değişkenler arasındaki ilişkiyi anlayabilmek için öncelikle değişkenlerin bağımlılık yapısını açıklamak gerekir. Değişkenler arası bağımlılık yapısı istatistik teorisinde uzun yıllar araştırılmış ve bu bağımlılık yapısını ortaya koymak için birçok yöntem geliştirilmiştir. En çok kullanılan yöntemlerden biri de klasik regresyon analizidir. Ancak regresyon analizi bazı varsayımlar gerektirmektedir. Bu varsayımlardan kaçınmak için de bazı yaklaşımlar geliştirilmiştir. Bunlardan biri de kapula fonksiyonlarıdır.

İlk olarak 1940 yılında Hoeffding çok değişkenli dağılımlar, bu dağılımların özellikleri ve bağımlılık ölçüleri üzerine bazı çalışmalar yapmıştır. 1959 yılında Sklar tarafından ilk defa kapulaların varlığı ortaya koyulmuş ve çok değişkenli dağılım fonksiyonlarıyla dağılımın bir boyutlu marjinalleri arasında bir bağıntı tanımlamaya yardımcı olduğunu göstermiştir.

Nelsen (2006) kapulaları, tek değişkenli marjinalleri  $[0,1]$  aralığı üzerinde düzgün dağılıma sahip ve çok değişkenli dağılımları kendi tek değişkenli marjinallerine bağlayan fonksiyonlar olarak ifade eder (Nelsen, 2006:7). Kapula fonksiyonunun asıl amacı, gözlenen verilere en uygun düşen çok değişkenli dağılımı bağımlılık yapısını da ortaya koyarak elde etmektir.

Sıra istatistikleri, olasılık teorisinde ve istatistiksel çıkarımlarda önemli bir yere sahiptir. İstatistiksel hipotezlerde, tahmin problemlerinde, istatistiksel süreç kontrollerinde, güvenilirlik, risk yönetimi ve birçok uygulamalı alanda yaygın olarak kullanılmakta ve bu sebeple araştırmacılar tarafından büyük önem görmektedir. Birçok araştırmacı sıra istatistiklerinin bağımlılık yapısını kapula fonksiyonu yardımıyla çalışmıştır. Averous, Genest ve Kochar (2005) sıra istatistikleri çiftleri arasındaki ilişkinin örneğin ilk çekildiği dağılımdan bağımsız olduğunu kapulalar ile ispatlamışlardır. Ayrıca iki sıra istatistiği arasındaki ilişkinin derecesini kıyaslamış ve bu sıra istatistikleri çifti için kapulalarla bazı bağımlılık sıralamaları oluşturmuşlardır. Schmitz (2004),  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ,  $n \in N$ ,  $n$  aynı dağılımlı bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere,  $X_{(1)}$  ve  $X_{(n)}$  uç sıra istatistikleri arasındaki bağımlılık yapısını bulmuştur. Buradan Kendall'ın  $\tau$ 'su ve Spearman'ın  $\rho$ 'su arasında  $3\tau_n \geq \rho_n \geq \tau_n > 0$  eşitsizliğinin olduğunu göstermiş ve ayrıca sayısal ispatlarla  $n$

sonsuz giderken Spearman'ın  $\rho$ 'sunun Kendall'ın  $\tau$ 'suna oranının  $\frac{3}{2}$ 'ye yakınsadığını bulmuştur. Li ve Li (2007) Schmitz'in varsayımını,  $X_{(1)}$  ve  $X_{(n)}$  arasındaki kapulaya L'Hospital kuralını uygulayarak sağlamış ve son olarak Chen (2007) elde edilen bu sonuçlardan faydalanarak  $n \geq 2$  olduğunda aynı dağılımlı iki uç sıra istatistiği  $X_{(1)}$  ve  $X_{(n)}$  arasındaki Spearman'ın  $\rho$ 'su için üç yeni formül elde etmiştir. Bu formüller,  $\rho_n$  ve  $\tau_n$  arasındaki eşitsizlik ilişkisini Schmitz'in (2004) bulmuş olduğu  $3\tau_n \geq \rho_n \geq \tau_n > 0$  eşitsizliğinden daha sıkı bir şekilde ortaya koymaktadır. Ghalibaf (2016) bağımsız ve aynı dağılımlı sürekli rastgele değişkenlerin  $X_{(1)}$  ve  $X_{(n)}$  uç sıra istatistikleri için kapula yardımıyla, aralarındaki ilişkileri bazı ilişki katsayıları ile farklı  $n$  değerleri için hesaplamış ve  $n$  değerinin artışıyla bağımlılığın azaldığını sayısal değerler ve grafiklerle göstermiştir.

İstatistikte, verilen marjinal fonksiyonlar yardımıyla iki veya çok değişkenli dağılımların kurulması uzun yıllardır ilgi görmekte ve çalışma konusu olmaktadır. Son zamanlarda Sklar teoremi sayesinde ise kapulalar kolayca inşa edilebilmektedir. Nelsen (2006: 51, 105), kitabında kapula kurmak için farklı metotlardan bahsetmektedir. Günümüzde veri analizi ve modellemesi ile uğraşan araştırmacılar, hem her zamankinden daha güçlü hesaplama yöntemlerine sahip hem de karmaşık sistemleri farklı dağılımlar veya bu dağılımların farklı versiyonları ile modelleyerek sistemlerin durumları hakkında daha iyi tahmin, öngörü ve açıklamalarda bulunabilmektedirler. Bunun için de karma dağılımlar kullanılmaktadır. Yantis, Meyer ve Keith Smith (1991) karma dağılımları "karma dağılımlar verilerin değişik özelliklerini açıklayan sonlu veya sonsuz sayıdaki bileşenden, olası farklı dağılım türlerinden oluşmuştur ve karma dağılımları iki veya daha fazla ağırlıklandırılmış dağılım fonksiyonunun doğrusal kombinasyonunun bir formu olarak düşünmek de mümkündür" olarak açıklar.

Kapulalar fonksiyonların birleşimleriyle elde edilen özel fonksiyonlardır. Dolayısıyla uygun dönüşümler yapılarak yeni kapulalar oluşturulabilir veya var olan kapulalar iyileştirilebilir. Son zamanlarda birçok araştırmacı yeni kapulalar inşa etmek veya var olan kapulaları iyileştirerek daha yüksek korelasyonlu değişkenler elde etmeyi hedeflemişlerdir. Literatürde en önemli parametrik kapula ailelerinden biri olan Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) kapulası kolay cebirsel özellikleri nedeniyle araştırmacılar tarafından büyük ilgi görmüştür. FGM kapulasının en büyük dezavantajı ise Spearman'ın  $\rho$ 'su ve Kendall'ın  $\tau$ 'sunun alt

ve üst sınır aralıklarının sırasıyla  $[-1/3, 1/3]$  ve  $[-2/9, 2/9]$  olmasıdır. Bu sınırlı bağımlılığı genişletmek için araştırmacılar FGM kapulasının yeni formlarını önermişlerdir. Huang ve Kotz (1999), Bairamov ve Kotz (2000), Lai ve Xie (2000), Bairamov, Kotz ve Bekçi (2001), Rodriguez ve Flores (2004), FGM ailesinin birçok yeni modifikasyonu üzerinde çalışmışlardır. Dolati ve Úbeda-Flores (2009) sıra istatistiklerinin marjinal dağılımlarını kullanarak yeni iki farklı kapula elde etmiş ve elde ettikleri kapulaların özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca elde ettikleri kapulaları FGM kapula ailesine uygulayarak FGM kapulasının iki yeni formunu elde etmişlerdir. Bayramoglu ve Bairamov (2014) rastgele seçilmiş sürekli bir kapula kullanarak sıra istatistiklerinin dağılımının temel alındığı yüksek korelasyonlu yeni bir iki değişkenli dağılım oluşturmuştur.

Tezin 2. bölümünde kapulalar, kapulaların bağımlılık ve simetri özellikleri, sıra istatistikleri ve model seçimi ile ilgili temel tanımlar ve özelliklere yer verilmiştir. Tezin 3. bölümünde  $X_{(1)}, X_{(n)}$  uç sıra istatistikleri için farklı  $n$  değerlerinde sıra istatistiklerinin bağımlılık ilişkilerine bakılmış ve bu ilişkilerin değişimine bağlı olarak Clayton, Frank, Gumbel, Gaussian, FGM ve min-max-kapula ailelerinin veri setine uygunlukları Ki-kare uyum iyiliği testi ile incelenmiştir. Tezin 4. bölümünde Dolati ve Úbeda-Flores (2009) tarafından önerilen sıra istatistiklerinin marjinal dağılımları ile elde edilmiş kapulanın çarpım kapulası ile doğrusal bir kombinasyonu oluşturularak yeni bir karma kapula elde edilmiştir. Elde edilen yeni karma kapulanın önemli kapulalarla ilişkileri, simetri yapısı, sıralama özelliği, kadrans bağımlılığı, uyumu ve Kendall'ın  $\tau$ 'su ve Spearman'ın  $\rho$ 'su için yeni sınırları elde edilmiştir. Ayrıca yeni oluşturulan kapula FGM kapulasına uygulanarak FGM kapulasının yeni bir formu elde edilmiştir. Tezin 5. bölümünde simülasyonla FGM kapulasının yeni formu bazı kapulalar ile karşılaştırılmıştır. Bunlar FGM kapulası, Gaussian kapulası ve Frank kapulasıdır. Burada modele en uygun kapulayı bulmak için Akaike bilgi kriteri ve Bayesian bilgi kriteri kullanılmıştır.





## 2. TEMEL TANIMLAR VE ÖZELLİKLER

Bu bölümde rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını ortaya koyan kapulalar, kapuların bağımlılık yapıları ve simetri özellikleri, sıra istatistikleri ve model seçimi ile ilgili temel tanımlara ve özelliklere yer verilmiştir.

### 2.1. Kapuların Tanımı ve Genel Özellikleri

Kapulalar ve özelliklerini anlayabilmek için öncelikle bazı matematiksel tanımlara yer vermek gerekir.

$R$  gerçekteksen  $(-\infty, \infty)$ 'u,  $\bar{R}$  genişletilmiş gerçekteksen  $[-\infty, \infty]$ 'u,  $\bar{R}^2$  genişletilmiş gerçektezlem  $\bar{R} \times \bar{R}$  'yi ifade etmektedir.  $\bar{R}^2$  'de bir dikdörtgen iki kapalı aralığın Kartezyen çarpımıdır ve bu  $B$  dikdörtgeni  $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$  ile ifade edilmektedir. Burada  $B$  dikdörtgenin köşe noktaları  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_1, y_2)$ ,  $(x_2, y_1)$  ve  $(x_2, y_2)$  'dir.  $I^2$  birim karesi  $I = [0, 1]$  olmak üzere  $I \times I$  çarpımıdır (Nelsen, 2006: 7, 8).

#### Tanım

$S_1$  ve  $S_2$   $\bar{R}$  'nin boş olmayan alt kümeleri ve  $H$  tanım kümesi  $S_1 \times S_2$  olacak şekilde bir fonksiyon olsun.  $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$  bütün köşeleri  $H$  'nin tanım kümesinde olan bir dikdörtgen olması halinde  $B$  'nin  $H$  'deki hacmi aşağıdaki gibi verilir (Nelsen, 2006: 8).

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1), \quad (2.1)$$

#### Tanım

Köşeleri  $H$  fonksiyonunun tanım kümesinde olan bütün  $B$  dikdörtgenleri için  $V_H(B) \geq 0$  oluyorsa,  $H$  fonksiyonuna her bir değişkene göre azalmayan (yani 2-artan veya yarı monoton) fonksiyon denir (Nelsen, 2006: 8).

Lemma

$S_1$  ve  $S_2$ ,  $\bar{R}$ 'nin boş olmayan alt kümeleri ve  $H$  tanım kümesi  $S_1 \times S_2$  olan 2-artan bir fonksiyon olsun.  $x_1 \leq x_2$ ,  $x_1, x_2 \in S_1$  ve  $y_1 \leq y_2$ ,  $y_1, y_2 \in S_2$  olsun. O zaman  $t \rightarrow H(t, y_2) - H(t, y_1)$  fonksiyonu  $S_1$  üzerinde ve  $t \rightarrow H(x_2, t) - H(x_1, t)$  fonksiyonu  $S_2$  üzerinde azalmayan bir fonksiyondur (Nelsen, 2006: 9).

Lemma

$S_1$  ve  $S_2$ ,  $\bar{R}$ 'nin boş olmayan alt kümeleri ve  $H$  tanım kümesi  $S_1 \times S_2$  olan 2-artan bir fonksiyon olsun. O zaman  $H$  her değişkeni için azalmayan bir fonksiyondur.

$S_1$ 'in en küçük  $a_1$  elemanına ve  $S_2$ 'nin en küçük  $a_2$  elemanına sahip olduğunu varsayalım.  $H: S_1 \times S_2 \rightarrow R$  fonksiyonuna, her  $(x, y) \in S_1 \times S_2$  için  $H(x, a_2) = H(a_1, y) = 0$  oluyorsa temelli (grounded) fonksiyon denir (Nelsen, 2006: 9).

Lemma

$S_1$  ve  $S_2$ ,  $\bar{R}$ 'nin boş olmayan alt kümeleri ve  $H$  tanım kümesi  $S_1 \times S_2$  olan temelli 2-artan bir fonksiyon olsun.  $S_1 \times S_2$ 'de  $(x_1, y_1)$  ve  $(x_2, y_2)$  herhangi noktalar olduğunda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir (Nelsen, 2006: 9).

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|, \quad (2.2)$$

Tanım (İki boyutlu alt kapula (veya kısaca alt kapula))

$C'$  fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bir alt kapuladır.

1.  $S_1$  ve  $S_2$ , 0 ve 1'i bulduran  $I = [0, 1]$ 'in alt kümeleri olmak üzere  $C'$ 'nin tanım kümesi  $S_1 \times S_2$ 'dir.
2.  $C'$  temelli ve 2-artan bir fonksiyondur.

3. Her  $u \in S_1$  ve her  $v \in S_2$  için  $C'(u,1) = u$  ve  $C'(1,v) = v$  dir.

Tanım kümesi  $C'$  olan her  $(u,v)$  için  $0 \leq C'(u,v) \leq 1$  'dir. Öyle ki burada  $C'$  'nin görüntü kümesi  $I$  'nın bir alt kümesidir (Nelsen, 2006: 10).

### Tanım (İki boyutlu kapula (veya kısaca kapula))

$C : I^2 \rightarrow I$  ile tanımlanmış fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise iki boyutlu kapula olarak adlandırılır.

1. Her  $u, v \in I$  için sınır şartları aşağıdaki gibi bulunur.

$$C(u,0) = C(0,v) = 0.$$

$$C(u,1) = u \text{ ve } C(1,v) = v.$$

2.  $u_1 \leq u_2$  ve  $v_1 \leq v_2$  olacak şekilde her  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$  için 2-artanlık özelliği, aşağıdaki gibidir.

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0, \text{ (Nelsen, 2006: 10, 11).}$$

### Tanım (n-boyutlu kapula)

n-boyutlu bir kapula aşağıdaki özelliklere sahip bir  $C : I^n \rightarrow I$  fonksiyonudur.

1. Her  $u \in I^n$  için  $u$  'nun en az bir koordinatı 0 ise  $C(u) = 0$  ve  $u_k$  hariç  $u$  'nun bütün koordinatları 1 ise  $C(u) = u_k$  olmalıdır.

2.  $a \leq b$  olan her  $a, b \in I^n$  için  $V_C([a, b]) \geq 0$  olmalıdır (Nelsen, 2006: 45).

#### **2.1.1. Sklar teoremi**

$H$ , marjinalleri  $F$  ve  $G$  olan ortak bir dağılım fonksiyonu olsun. Her  $x, y \in \bar{R}$  için;

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)), \quad (2.3)$$

olacak şekilde bir  $C$  kapulası vardır. Eğer  $F$  ve  $G$  sürekliyse  $C$  tektir; aksi halde,  $C$ ,  $F$  ve  $G$ 'nin değer kümelerinin Kartezyen çarpımı (yani,  $RangeF \times RangeG$ ) üzerinde tanımlanmıştır. Tersine, eğer  $C$  bir kapula ve  $F$  ile  $G$  dağılım fonksiyonlarıysa o zaman (2.3) ile tanımlanan  $H$  fonksiyonu marjinalleri  $F$  ve  $G$  olan bir ortak dağılım fonksiyonudur.  $F$  ve  $G$  sürekli ise bu durumda

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)), \quad (2.4)$$

olur (Nelsen, 2006: 18, 22).

### 2.1.2. Kapulaların olasılık yoğunluk fonksiyonu

Kapulaların olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanır (Nelsen, 2006: 108).

$$c(u_1, u_2, \dots, u_m) = \frac{\partial^m C(u_1, u_2, \dots, u_m)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_m} \quad (2.5)$$

### 2.1.3. Kapulalarda sıralama

$C_1$  ve  $C_2$  iki kapula olsun. Eğer her  $(u, v) \in I$  için  $C_1(u, v) \leq C_2(u, v)$  oluyorsa  $C_1$ ,  $C_2$ 'den küçüktür denir ve  $C_1 < C_2$  ile gösterilir. Kapular kümesine ilişkin bu kısmi sıralamaya uyum sıralaması denir. Bu sıralama her kapula çifti karşılaştırılabilir olmadığından kısmi bir sıralamadır. Bununla birlikte tamamen sıralı kapula aileleri de vardır.  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  olduğunda  $C_{\alpha_1} < C_{\alpha_2}$  oluyorsa  $C_\alpha$  kapula ailesine pozitif sıralı,  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  olduğunda  $C_{\alpha_1} > C_{\alpha_2}$  oluyorsa da negatif sıralı denir (Nelsen, 2006: 39).

### 2.1.4. Fréchet-Hoeffding sınırı

Her  $C$  kapulası ve her  $(u, v) \in I^2$  için  $M(u, v) = \min(u, v)$  olacak şekilde bir minimum kapula ve  $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$  olacak şekilde bir maksimum kapula vardır ve

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v), \quad (2.6)$$

yazılabilir. (2.6) eşitsizliği Fréchet-Hoeffding sınırlarının kapula versiyonudur. Burada  $M$  'ye Fréchet-Hoeffding üst sınırı ve  $W$  'ye Fréchet-Hoeffding alt sınırı denir. Burada Fréchet-Hoeffding üst sınır kapulası her kapuladan büyük, Fréchet-Hoeffding alt sınır kapulası da her kapuladan küçüktür (Nelsen, 2006: 30).

### 2.1.5. Bir kapulanın duali ve eşkapula

Bir kapulanın duali  $\tilde{C}(u, v) = u + v - C(u, v)$  ile tanımlanan  $\tilde{C}$  fonksiyonudur ve eşkapula  $C^*$  ile gösterilirse,  $C^*(u, v) = 1 - C(1 - u, 1 - v)$  ile ifade edilir. Bu fonksiyonlardan ikisi de kapula değildir, ancak  $C$ ,  $X$  ile  $Y$  rastgele değişkenler çiftinin bir kapulası ise kapulanın duali ve eş kapulanın her biri  $X$  ve  $Y$  'ye ilişkin bir olayın olasılığını ifade eder (Nelsen, 2006: 33, 34).

### 2.1.6. Çarpım kapulası

$\Pi$  çarpım kapulasıdır ve her  $(u, v) \in [0, 1]^2$  için  $\Pi(u, v) = u.v$  'dir.  $X$  ve  $Y$  sürekli rastgele değişkenler olsun. O zaman  $X$  ile  $Y$  'nin bağımsız olması için gerek ve yeter şart  $C_{XY} = \Pi$  olmasıdır (Nelsen, 2006: 27, 28).

### 2.1.7. Sağkalım (survival) kapulası

Birçok uygulamada, ilgilenilen rastgele değişkenler bir yığındaki bireylerin veya nesnelerin yaşam sürelerini temsil eder. Bir bireyin veya nesnenin  $x$  zamanının ötesinde yaşaması veya sağ kalması olasılığı sağkalım fonksiyonu  $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$  ile verilir.

Ortak dağılım fonksiyonu  $H$  olan bir  $(X, Y)$  rastgele değişken çifti için ortak sağkalım fonksiyonu  $\bar{H}(x, y) = P[X > x, Y > y]$  ile verilir.  $\bar{H}$  'nin marjinaleri sırasıyla tek değişkenli  $\bar{F}$  ve  $\bar{G}$  sağkalım fonksiyonları olan  $\bar{H}(x, -\infty)$  ve  $\bar{H}(-\infty, y)$  fonksiyonlarıdır. Sklar teoreminde belirtildiği gibi bir değişkenli ve ortak sağkalım fonksiyonları arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı vardır.  $X$  ile  $Y$  'nin kapulasının  $C$  olduğu varsayıldığında

$$\begin{aligned}
\bar{H}(x, y) &= 1 - F(x) - G(y) + H(x, y) \\
&= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y)) \\
&= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y)),
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

$\hat{C}: I^2 \rightarrow I$  fonksiyonu

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) \quad (2.7)$$

olarak tanımlanır ve  $X$  ve  $Y$  rastgele değişkenlerinin sağkalım kapulasını ifade eder. Burada  $\hat{C}$  sağkalım kapulasını, ortak dağılım fonksiyonu  $C$  kapulası olan rastgele değişkenlere ilişkin  $\bar{C}$  sağkalım fonksiyonuyla karıştırmamak gerekir (Nelsen, 2006: 32).

$$\bar{C}(u, v) = P[U > u, V > v] = 1 - u - v + C(u, v) = \hat{C}(1 - u, 1 - v) \quad (2.8)$$

## 2.2. Kapulaların Simetri Özellikleri

$X$  bir rastgele değişken ve  $a$  bir gerçek sayı olsun. Bu durumda  $X - a$  ve  $a - X$  rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları aynıysa, yani herhangi bir  $x \in R$  için  $P[X - a \leq x] = P[a - X \leq x]$  ise,  $X$ ,  $a$  çevresinde simetriktir denir.

### Tanım

$X$  ve  $Y$  rastgele değişkenler ve  $(a, b)$ ,  $R^2$ 'de bir nokta olsun.

1.  $X$  ile  $Y$  rastgele değişkenleri sırasıyla  $a$  ve  $b$  çevresinde simetrikse,  $(X, Y)$ 'ye  $(a, b)$  çevresinde marjinal olarak simetriktir denir.
2.  $X - a$  ile  $Y - b$ 'nin ortak dağılım fonksiyonu  $a - X$  ile  $b - Y$ 'nin ortak dağılım fonksiyonuyla aynıysa  $(X, Y)$ 'ye  $(a, b)$  çevresinde ışımsal simetriktir denir.

3.  $(X - a, Y - b), (X - a, b - Y), (a - X, Y - b)$  ve  $(a - X, b - Y)$  rastgele değişken çiftleri ortak bir dağılıma sahipse,  $(X, Y)$  'ye  $(a, b)$  civarında ortak simetriktir denir.

### Teorem

$X$  ile  $Y$  ortak dağılım fonksiyonu  $H$ , marjinalleri sırasıyla  $F$  ve  $G$ , kapulası  $C$  olan sürekli rastgele değişkenler olsun. O zaman  $\forall (u, v) \in I^2$  için,

$X$  ile  $Y$  deęiştirilebilir (exchangable)  $\Leftrightarrow F = G$  ve  $C(u, v) = C(v, u)$ .

Her  $(u, v) \in I^2$  için  $C(u, v) = C(v, u)$  olduğunda  $C$  'ye simetriktir denir.

### Teorem

$X$  ile  $Y$  ortak dağılım fonksiyonu  $H$ , marjinalleri sırasıyla  $F$  ve  $G$ , kapulası  $C$  olan sürekli rastgele değişkenler olsun. Ayrıca  $X$  ile  $Y$  'nin sırasıyla  $a$  ve  $b$  çevresinde simetrik olduğu varsayalım. O zaman  $(X, Y)$   $(a, b)$  çevresinde ışınsal simetriktir, o zaman  $H$

$H(a + x, b + y) = \overline{H}(a - x, b - y)$  tüm  $(x, y) \in \overline{R}^2$  koşulunu sadece ve sadece  $C = \hat{C}$  olduğunda sağlar, yani  $C(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$  her  $(u, v) \in I^2$  olur (Nelsen, 2006: 36, 38).

### **2.3. Kapulaların Bağımlılık Yapıları**

Rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık ilişkileri olasılık ve istatistikte en geniş olarak çalışılan konulardan biridir. Jogdeo (1982) "bağımlılığın doğası çok değişik biçimler alabilir ve bağımlılık üzerinde bazı özel varsayımlarda bulunulmadıkça hiçbir anlamlı istatistiksel model tasarlanamaz" diyerek bağımlılığın önemini vurgulamıştır. Bu bölümde rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapıları ve bazı birliktelik ölçüleri tanıtılıp bu yapıların kapulalarla nasıl ifade edildiği incelenecektir.



### 2.3.1. Uyumluluk (concordance)

$(x_i, y_i)$  ve  $(x_j, y_j)$ ,  $(X, Y)$  sürekli rastgele değişkenler vektöründe iki gözlemi gösterebilir. Burada  $x_i < x_j$  ve  $y_i < y_j$  ya da  $x_i > x_j$  ve  $y_i > y_j$  ise  $(x_i, y_i)$  ve  $(x_j, y_j)$  gözlemleri uyumludur (concordant) denir. Benzer şekilde  $x_i < x_j$  ve  $y_i > y_j$  ya da  $x_i > x_j$  ve  $y_i < y_j$  ise  $(x_i, y_i)$  ve  $(x_j, y_j)$  gözlemleri uyumsuzdur (discordant) denir.

$C_1$  ve  $C_2$  kapulaları için eğer  $C_1 \leq C_2$  ise  $C_2$  kapulası  $C_1$  kapulasından daha uyumludur (concordant) denir ve  $C_1 <_c C_2$  ile gösterilir (Nelsen, 2006: 157, 158).

### 2.3.2. Kadran (quadrant) bağımlılık

$X$  ve  $Y$  rastgele değişkenler olsun. Eğer her  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  için  $P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x]P[Y \leq y]$  ya da  $P[X > x, Y > y] \geq P[X > x]P[Y > y]$  ise  $X$  ile  $Y$ 'ye pozitif kadran bağımlı (PQD) denir. Benzer şekilde  $P[X \leq x, Y \leq y] \leq P[X \leq x]P[Y \leq y]$  ya da  $P[X > x, Y > y] \leq P[X > x]P[Y > y]$  ise  $X$  ile  $Y$ 'ye negatif kadran bağımlı (NQD) denir.

Bir başka ifade ile eğer bir  $C$  kapulası her  $(u, v) \in [0, 1]^2$  için  $\Pi(u, v) <_c C$  ise pozitif kadran bağımlı (PQD),  $C <_c \Pi(u, v)$  ise negatif kadran bağımlıdır (NQD) (Nelsen, 2006: 187, 189).

### 2.3.3. Kendall'in $\tau$ 'su ve Spearman'ın $\rho$ 'su

Kendall'in  $\tau$ 'su ve Spearman'ın  $\rho$ 'su  $X$  ve  $Y$  gibi iki rastgele değişken arasındaki ilişkiyi ölçen parametrik olmayan iki ölçüdür. Kendall'in  $\tau$ 'su ve Spearman'ın  $\rho$ 'sunun  $X$  ve  $Y$  değişkenlerinin  $C$  kapulası ile ilişkisi sırasıyla aşağıdaki teoremlerde verilmiştir.

#### Teorem

$X$  ve  $Y$  kapulası  $C$  olan sürekli rastgele değişkenler olduğunda Kendall'in  $\tau$ 'su aşağıdaki gibi elde edilir (Nelsen, 2006: 161).

$$\tau(C) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(x, y) dC(x, y) - 1 \quad (2.9)$$

### Teorem

$X$  ve  $Y$  kapulası  $C$  olan sürekli rastgele değişkenler olduğunda Spearman'ın  $\rho$ 'su aşağıdaki gibi elde edilir (Nelsen, 2006: 167).

$$\rho(C) = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(x, y) dx dy - 3 \quad (2.10)$$

## 2.4. Tezde Kullanılan Kapula Aileleri

Bu bölümde tezde kullanılan kapula aileleri tanıtılmıştır.

### 2.4.1. Arşimedyen kapulası

Arşimedyen kapula ailesi; kolayca inşa edilebilmesi, bu sınıfa ait kapula ailelerinin büyük farklılıklar içermesi ve bu sınıfın üyelerinin sahip olduğu özelliklerden dolayı uygulamalarda sıklıkla kullanılmaktadır. Arşimedyen kapulaların özellikleri aşağıda verilmiştir.

$\varphi$ ,  $\varphi: I \rightarrow [0, \infty]$  sürekli, konveks ve kesin azalan ve  $\varphi(1) = 0$  olacak şekilde bir fonksiyon olsun.  $\varphi$ 'nin sözde (pseudo) tersi, tanım kümesi  $[0, \infty]$  değer kümesi  $I$  olan;

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & , 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & , \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (2.11)$$

ile verilen fonksiyondur. Burada  $\varphi^{[-1]}$ 'in sürekli ve  $[0, \infty]$  üzerinde artmayan ve  $[0, \varphi(0)]$  üzerinde kesin azalan bir fonksiyondur. Buradan  $C: I^2 \rightarrow I$

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (2.12)$$

biçimindeki kapulara Arşimedyen kapula denir.  $\varphi$  fonksiyonuna kapulanın üreticisi denir.

$\varphi(0) = \infty$  ise,  $\varphi$  'ye tam (strict) üretici denir. Bu durumda  $\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$  'ye de tam

Arşimedyen kapula denir.

Kapuların üreticisi için özellikler aşağıda verilmiştir.

1.  $\varphi(1) = 0$ .
2. Her  $t \in (0,1)$  için  $\varphi'(t) < 0$  'dır, yani  $\varphi$  azalan bir fonksiyondur.
3. Her  $t \in (0,1)$  için  $\varphi''(t) \geq 0$  'dır, yani  $\varphi$  konveks bir fonksiyondur.

### Teorem

$C$  üreticisi  $\varphi$  olan bir Arşimedyen kapula olsun. Bu durumda;

1.  $C$  simetriktir, yani her  $u, v \in I$  için  $C(u, v) = C(v, u)$  olur.
2.  $C$  birleşme özelliğine sahiptir, yani her  $u, v, w \in I$  için  $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$  olur.
3. Eğer  $c > 0$  herhangi bir sabitse,  $c\varphi$  'de  $C$  'nin üreticisidir.

Çizelge 2.1 de önemli Arşimedyen kapula aileleri, bu ailelerin fonksiyonları, üreticileri, parametre aralıkları ve bu kapula ailelerinin parametrelerinin Kendall'ın  $\tau$  'su ile ilişkileri verilmiştir (Nelsen, 2006: 109, 132).

Çizelge 2.1. Arşimedyen kapula aileleri, bu ailelerin fonksiyonları, üreticileri, parametre aralıkları ve parametrelerinin Kendall'ın  $\tau$ 'su ile ilişkileri

Kapula Ailesi	$C_\theta(u, v)$	$\varphi_\theta(t)$	Parametre aralığı	Kendall'ın $\tau$ değeri
Clayton	$[\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-\frac{1}{\theta}}$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$[-1, \infty) \setminus \{0\}$	$\frac{\theta}{\theta + 2}$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)})$	$-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$	$(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$	$1 - \frac{4}{\theta} [D_1(-\theta) - 1]$
Gumbel	$\exp(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}})$	$(-\ln t)^\theta$	$[1, \infty)$	$\frac{\theta - 1}{\theta}$

\*Burada  $D_1$ , 1. Dereceden Debye fonksiyonunu göstermektedir.  $D_1(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1}$

#### 2.4.2. Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) kapulası

Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) dağılımları modellemede, birliktelik testlerinde ve parametre dışı yöntemlerin etkinliğini çalışmada yaygın olarak kullanılmıştır. 1995 yılında de la Horra ve Fernandez yaptıkları çalışmalar sonucunda FGM ailesinin güçlü bir sınıf olduğunu ileri sürmüşlerdir. FGM kapulası aşağıdaki gibi verilir (Nelsen, 2006: 77).

$$C_\theta(u, v) = uv[1 + \theta(1-u)(1-v)], \quad \theta \in [-1, 1] \quad (2.13)$$

FGM kapulasının Kendall'ın  $\tau$ 'su ve Spearman'ın  $\rho$ 'su ile ilişkisi sırasıyla,  $\tau = \frac{2\theta}{9}$  ve

$$\rho = \frac{\theta}{3} \text{ eşitlikleri ile elde edilir (Nelsen, 2006: 162).}$$

#### 2.4.3. Gaussian kapulası

Gaussian kapula, çok değişkenli Gaussian dağılımından türetilmiştir.  $\Phi$  bir-boyutlu standart normal dağılımın dağılım fonksiyonu ve  $\Phi_\Sigma^n$  pozitif tanımlı korelasyon matrisi  $\Sigma$  ile n-boyutlu standart normal dağılımın dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda n-boyutlu Gaussian kapula  $C_\Sigma^\Phi$  aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$C_\Sigma^\Phi(u_1, \dots, u_n) = \Phi_\Sigma^n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)), \quad \forall (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n \quad (2.14)$$

$n = 2$  için aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$C_{\rho_{12}}^{\Phi}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\rho_{12}^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{s^2 - 2\rho_{12} \cdot s \cdot t + t^2}{2(1-\rho_{12}^2)}\right) ds dt, \quad (u, v) \in [0, 1]^2 \quad (2.15)$$

Burada  $\rho_{12}$  iki değişkenli standart normal dağılımın korelasyon katsayısıdır. Gaussian kapulasının Kendall'ın  $\tau$ 'su ile ilişkisi

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho_{12})$$

eşitliği ile elde edilir (Embrechts, Lindskog ve Mcneil, 2003: 357,360).

## 2.5. Sıra İstatistikleri

$X_1, X_2, \dots, X_n$  bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişkenler ve  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  bu rastgele değişkenlerin sıra istatistikleri olsun. Buna göre  $X_{(i)}$ 'ye  $i$ . sıra istatistiği denir.

$X_{(1)}$ ,  $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$  yani en küçük sıra istatistiğini,  $X_{(n)}$ ,  $\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$  yani en büyük sıra istatistiğini ifade eder.

### 2.5.1. Sıra istatistiklerinin marjinal ve ortak dağılım fonksiyonları

1. sıra istatistiğinin dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$F_1(x) = P\{X_{(1)} \leq x\} = 1 - [1 - F(x)]^n, \quad -\infty < x < \infty \quad (2.16)$$

$$f_1(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.17)$$

$1 \leq r \leq n$  olmak üzere  $r$ . sıra istatistiğinin dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
F_r(x) &= P\{X_{(r)} \leq x\} \\
&= \sum_{i=r}^n \binom{n}{i} F(x)^i [1-F(x)]^{n-i}, \quad -\infty < x < \infty
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$f_r(x) = \frac{n!}{r!(n-r)!} F(x)^r [1-F(x)]^{n-r} f(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{2.19}$$

$n$ . sıra istatistiğinin dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= P\{X_{(n)} \leq x\} \\
&= F(x)^n, \quad -\infty < x < \infty
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$f_n(x) = nF(x)^{n-1} f(x), \quad -\infty < x < \infty \tag{2.21}$$

$1 \leq r < s \leq n$  olmak üzere  $r$ . ve  $s$ . sıra istatistiklerinin ortak dağılım ve ortak olasılık yoğunluk fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
F_{(r),(s)}(x, y) &= P\{X_{(r)} \leq x, X_{(s)} \leq y\} \\
&= \sum_{j=s}^n \sum_{i=r}^j \frac{n!}{i!(j-i)!(n-j)!} F(x)^i [F(y) - F(x)]^{j-i} [1-F(y)]^{n-j}, \\
&\quad -\infty < x < y < \infty
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
f_{r,s}(x, y) &= \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} F(x)^{r-1} f(x) \times \\
&\quad [F(y) - F(x)]^{s-r-1} f(y) [1-F(y)]^{n-s}, \quad -\infty < x < y < \infty
\end{aligned} \tag{2.23}$$

1. ve  $n$ . sıra istatistiklerinin ortak dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
F_{(1),(n)}(x, y) &= P\{X_{(1)} \leq x, X_{(n)} \leq y\} \\
&= \begin{cases} F(y)^n - (F(y) - F(x))^n, & x < y \\ F(y)^n, & x \geq y \end{cases}, \tag{2.24}
\end{aligned}$$

(Arnold, Balakrishnan ve Nagaraja 1992: 9, 21).

## 2.6. Model Seçimi

Veriye en uygun kapulayı seçmek için literatürde kullanılan birçok yöntem vardır. Bu yöntemlerden tezde kullanılmış olan Ki-kare uyum iyiliği testi, Akaike bilgi kriteri (Akaike Information Criterion- *AIC*) ve Bayesian bilgi kriteri (Bayesian Information Criterion- *BIC*) bu bölümde verilmiştir.

### 2.6.1. Ki-kare uyum iyiliği testi

Ki-kare uyum iyiliği testi veriye uygun model seçiminde kullanılan yöntemlerden biridir. Gözlenen ve beklenen frekanslar üzerinden Ki-kare istatistiği hesaplanır. Hesaplanan beklenen frekansların gözlenen frekanslara eşit ya da yakın olması istenir. Burada hesaplanan ki-kare istatistiğinin serbestlik derecesi  $sd = ((I - 1)(J - 1)) - p - (q - 1)$  olup,  $I$  satır sayısını,  $J$  sütun sayısını,  $p$  tahmin edilen parametre sayısını ve  $q$  birleştirilen hücre sayısını ifade eder. En küçük ki-kare değerine sahip kapula ailesi verilere en uygun olanıdır. Ki-kare test istatistiği aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{(G_{ij} - B_{ij})^2}{B_{ij}} \quad (2.25)$$

Burada  $G_{ij}$ , gözlenen frekanslar,  $B_{ij}$ , beklenen frekanslardır (Genest ve Rivest, 1993).

### 2.6.2. Akaike bilgi kriteri ve Bayesian bilgi kriteri

Akaike (1974) tarafından önerilen Akaike bilgi kriteri (Akaike Information Criterion- *AIC*) ve Schwarz (1978) tarafından önerilen Bayesian bilgi kriteri (Bayesian Information Criterion- *BIC*) veriye en uygun modeli seçmede yaygın olarak kullanılan yöntemlerdir. En küçük *AIC* ve *BIC* değerine sahip model en uygun model olarak belirlenir. Farklı yöntemlerle hesaplanabilen bilgi kriterleri kapulalar için aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$AIC = -2 \sum_{i=1}^N \ln c(u_i, y_i) + 2k, \quad (2.26)$$

$$BIC = -2 \sum_{i=1}^N \ln c(u_i, v_i) + k \ln N. \quad (2.27)$$

Burada  $k$  kapula parametrelerinin sayısı,  $N$  örnek çapı,  $c(u_i, v_i)$  ise  $C(u_i, v_i)$  kapulasının olasılık yoğunluk fonksiyonudur (Li ve diğerleri, 2013).







### 3. $X_{(1)}$ VE $X_{(n)}$ UÇ SIRA İSTATİSTİKLERİ ÜZERİNE ÇALIŞMALAR

Bu bölümde  $X_{(1)}$  ve  $X_{(n)}$  uç sıra istatistiklerinin kapulası verilmiştir. Ayrıca  $X_{(1)}$  ve  $X_{(n)}$  uç sıra istatistikleri için bir simülasyon çalışmasına yer verilmiştir.

#### 3.1. $X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$ Uç Sıra İstatistiklerinin Kapulası

$X_1, X_2, \dots, X_n, n \in N$ ,  $n$  aynı dağılımlı bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere,  $X_{(1)}$  ve  $X_{(n)}$  uç sıra istatistiklerinin kapulasını elde etmek için eşitlik (2.4) ile verilen  $C(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v))$  ifadesi çözülür. Burada öncelikle  $F^{(-1)}(u)$  ve  $G^{(-1)}(v)$

$$u = 1 - [1 - F(x)]^n \text{ olmak üzere } F^{(-1)}(u) = 1 - [1 - u]^{1/n}$$

$$v = G(y)^n \text{ olmak üzere } G^{(-1)}(v) = v^{1/n}$$

olarak bulunur.  $1 - [1 - F(x)]^n$  ve  $G(y)^n$ 'nin sırasıyla 1. ve  $n$ . sıra istatistiklerinin dağılım fonksiyonu olduğuna dikkat edilmelidir. Eşitlik (2.21) ile verilen 1. ve  $n$ . sıra istatistiklerinin ortak dağılım fonksiyonu kullanılarak  $C_n(F_1(x), F_n(y)) = F_{(1),(n)}(x, y)$  eşitliği çözülür ve

$$C_n(u, v) = \begin{cases} v - (v^{1/n} + (1-u)^{1/n} - 1)^n, & 1 - (1-u)^{1/n} < v^{1/n} \\ v, & 1 - (1-u)^{1/n} \geq v^{1/n}, \end{cases} \quad (3.1)$$

bulunur.  $C_n(u, v)$ , “min-max-kapula” olarak ifade edilir ve  $X_{(1)}$  ve  $X_{(n)}$  uç sıra istatistiklerinin kapulasıdır (Schmitz, 2004).

#### 3.2. $X_{(1)}$ ve $X_{(n)}$ Uç Sıra İstatistiklerinin Bağımlılık Yapısı Üzerine Bir Simülasyon Çalışması

$X \sim N(0, 1)$  dağılımından çekilmiş rastgele örnekler ve  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  bu rastgele örneğin sıra istatistikleri olsun. Bu çalışmada farklı  $n$  değerleri için sıra istatistiklerinin bağımlılık ilişkilerine bakılmış ve bu ilişkilerin değişimine bağlı olarak Clayton, Frank, Gumbel, Gaussian, FGM ve min-max-kapula ailelerinin veri setine uygunlukları incelenmiştir. Çalışmada beş duruma yer verilmiş ve bu beş durum içinde de ikişer duruma bakılmıştır.

Birinci durum  $n = 2$ , ikinci durum  $n = 5$ , üçüncü durum  $n = 10$ , dördüncü durum  $n = 20$  ve beşinci durum  $n = 100$  olması halinde  $X_{(1)}, X_{(n)}$  uç sıra istatistikleri için  $4 \times 4$ 'lük çeyrek noktalarla ve  $6 \times 6$ 'lık noktalarla sınıflanmış sonuçlar elde edilmiştir. Standart normal dağılımdan 1000 tane örnek çekilmiştir. Burada gözlenen frekanslar  $X_{(1)}, X_{(n)}$  sıra istatistiklerinin  $4 \times 4$ 'lük çeyrek noktalarla ( $j = 1, 2, 3, 4$  için  $1000 \times \frac{j}{4}$ ) ve  $6 \times 6$ 'lık noktalarla ( $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  için  $1000 \times \frac{j}{6}$ ) sınıflanmış frekans matrisidir.  $\theta$ , kapula ailelerinin parametre tahmini ve  $\tau$  değeri  $X_{(1)}, X_{(n)}$  sıra istatistiklerinden elde edilen Kendall'in tau'sudur.  $\tau$  değeri kullanılarak kapula aileleri için parametre tahminleri yapılmış ve buradan beklenen frekanslar elde edilmiştir. Elde edilen değerlerle her bir kapula ailesi için  $\chi^2$  değerleri hesaplanmış ve bu işlem  $r = 500$  kez tekrarlanmıştır. Her bir ailenin veri setine uygunluğunu test etmek için aşağıdaki hipotez kurulur.

$H_0$  : Kapula ailesi veri seti için uygundur.

$H_1$  : Kapula ailesi veri seti için uygun değildir.

$4 \times 4$ 'lük çeyrek noktalarla sınıflanmış frekans matrisinden  $\chi^2$  tablo değeri  $\chi^2_{8;0.05} = 16.92$  olarak ve  $6 \times 6$ 'lık noktalarla sınıflanmış frekans matrisinden  $\chi^2$  tablo değeri  $\chi^2_{24;0.05} = 36.42$  olarak hesaplanmış ve tablo değeri ile hesaplanan  $\chi^2$  değerleri karşılaştırılmıştır. Bütün durumlar ve sonuçları Çizelge 3.1 de verilmiştir. Veri seti için uygun bulunan kapula aileleri yanında “ \* ” sembolüyle, hesaplanamayan değerler “ - ” sembolüyle gösterilmiştir.

Çizelge 3.1. Uç sıra istatistikleri  $(X_{(1)}, X_{(n)})$  için simülasyon sonuçları

$n$	$\tau$	Kapula ailesi	$\theta$	$p \times p$	Hesaplanan $\chi^2$ değeri	$\chi^2$ tablo değeri
2	0,3244	Clayton	0,9603	4 × 4	126,80	16,92
				6 × 6	224,06	36,42
		Frank	3,1995	4 × 4	91,48	16,92
				6 × 6	176,85	36,42
		Gumbel	1,4802	4 × 4	89,07	16,92
				6 × 6	176,80	36,42
		Gaussian	0,4878	4 × 4	95,76	16,92
				6 × 6	175,90	36,42
		*Min-max copula	2	4 × 4	*13,87	16,92
				6 × 6	38,49	36,42
		FGM	-	4 × 4	-	16,92
				6 × 6	-	36,42
5	0,1061	Clayton	0,2373	4 × 4	18,28	16,92
				6 × 6	71,69	36,42
		Frank	0,9634	4 × 4	17,20	16,92
				6 × 6	70,91	36,42
		Gumbel	1,1187	4 × 4	20,27	16,92
				6 × 6	69,95	36,42
		Gaussian	0,1658	4 × 4	17,07	16,92
				6 × 6	68,04	36,42
		*Min-max copula	5	4 × 4	*12,52	16,92
				6 × 6	56,53	36,42
		FGM	0,4773	4 × 4	17,24	16,92
				6 × 6	71,14	36,42
10	0,0680	Clayton	0,1458	4 × 4	17,42	16,92
				6 × 6	46,00	36,42
		Frank	0,6140	4 × 4	19,66	16,92
				6 × 6	45,1	36,42
		Gumbel	1,0729	4 × 4	22,51	16,92
				6 × 6	47,64	36,42
		Gaussian	0,1066	4 × 4	19,17	16,92
				6 × 6	44,24	36,42
		*Min-max copula	10	4 × 4	*16,01	16,92
				6 × 6	41,30	36,42
		FGM	0,3059	4 × 4	19,36	16,92
				6 × 6	45,73	36,42
20	0,0482	*Clayton	0,1012	4 × 4	*16,05	16,92
				6 × 6	60,96	36,42
		*Frank	0,4344	4 × 4	*14,14	16,92
				6 × 6	55,63	36,42
		*Gumbel	1,0506	4 × 4	*14,03	16,92
				6 × 6	55,88	36,42
		*Gaussian	0,0756	4 × 4	*13,82	16,92
				6 × 6	54,97	36,42
		*Min-max copula	20	4 × 4	*15,20	16,92
				6 × 6	56,44	36,42
		*FGM	0,2168	4 × 4	*14,53	16,92

Çizelge 3.1. (devam) Uç sıra istatistikleri  $(X_{(1)}, X_{(n)})$  için simülasyon sonuçları

100	0,0018	Clayton	0,0036	6 × 6	55,20	36,42
				4 × 4	17,26	16,92
				6 × 6	53,81	36,42
		Frank	0,0163	4 × 4	17,47	16,92
				6 × 6	53,45	36,42
		Gumbel	1,0018	4 × 4	17,23	16,92
				6 × 6	53,85	36,42
		Gaussian	0,0028	4 × 4	17,41	16,92
				6 × 6	54,46	36,42
		Min-max copula	100	4 × 4	17,61	16,92
				6 × 6	54,60	36,42
		FGM	0,0081	4 × 4	17,64	16,92
				6 × 6	54,6	36,42

Sonuçlar incelendiğinde  $4 \times 4$  'lük çeyriklere ayrılmış veri seti için  $n = 2, 5, 10$  olması halinde sadece min-max-kapulası için  $H_0$  yokluk hipotezi kabul edilir ve veri seti için uygun bulunur. Diğer kapula aileleri veri seti için uygun bulunmaz. FGM kapula ailesi için Kendall  $\tau$  sınırları  $[-2/9, 2/9]$  aralığındadır. Dolayısıyla  $n = 2$  olması halinde hesaplanan  $\tau = 0,3244$  değeri sınırların dışında olduğu için burada FGM kapulası hesaplanmaz.  $n = 20$  olması halinde bütün kapula aileleri için  $H_0$  yokluk hipotezi kabul edilir ve veri seti için uygun bulunur.  $n = 100$  olması halinde ise bütün kapula aileleri için  $H_0$  yokluk hipotezi red edilir ve veri seti için uygun bulunmaz.  $6 \times 6$  'lık noktalara ayrılmış veri seti için bütün durumlarda çalışılan tüm kapula aileleri için  $H_0$  yokluk hipotezi red edilir ve veri seti için uygun bulunmaz. Dolayısıyla veriyi  $6 \times 6$  'lık noktalara ayırmak kullanışlı değildir.

Yapılan simülasyon çalışmasında  $n$  'nin küçük değerleri için min-max-kapulasının iyi sonuçlar verirken  $n = 20$  olması halinde bütün kapula ailelerinin birbirine benzer sonuçlar vererek veri setine uygun bulunduğu tespit edilmiştir.  $n$  'nin büyük değerleri için ise hem min-max-kapulasının hem de diğer kapula ailelerinin veriye uygun olmadığı tespit edilmiştir. En küçük ve en büyük sıra istatistikleri çiftleri arasındaki bağımlılık yapısının incelenmesinde min-max-kapulasının diğer kapula ailelerine göre daha iyi sonuçlar verdiği fakat  $n$  'nin küçük değerleri için daha elverişli olduğu simülasyonla gösterilmiştir.

#### 4. SIRA İSTATİSTİKLERİNİN DAĞILIM ÖZELLİKLERİ KULLANILARAK YENİ KAPULALAR ELDE ETME VE YENİ ÖNERİLEN KARMA KAPULA

Bu bölümde Dolati ve Úbeda-Flores (2009) tarafından önerilen kapula inşa etme yöntemleri ve yeni önerilen karma kapula verilmiştir.

##### 4.1. Sıra İstatistikleri Çiftleri Kullanılarak Kapula İnşa Etme

Dolati ve Úbeda-Flores (2009) sıra istatistiklerinin marjinal dağılımlarını kullanarak yeni iki farklı kapula elde etmiş ve elde ettikleri kapulaların özelliklerini incelemişlerdir. Yapılan dönüşümler aşağıda verilmiştir.

$(X_1, Y_1)$  ve  $(X_2, Y_2)$ , ortak kapulası  $D$  olan ve  $(0,1)$  aralığında düzgün dağılım gösteren iki bağımsız vektör olsun.  $X_{(1)}, X_{(2)}$  ve  $Y_{(1)}, Y_{(2)}$  bu vektörlerin sıra istatistikleri olmak üzere rastgele bir  $(Z_{(1)}, Z_{(2)})$  vektörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$(Z_{(1)}, Z_{(2)}) = \begin{cases} (X_{(1)}, Y_{(2)}), & 1/2 \text{ olasılıkla} \\ (X_{(2)}, Y_{(1)}), & 1/2 \text{ olasılıkla.} \end{cases}$$

$(Z_{(1)}, Z_{(2)})$  rastgele vektörünün dağılımı aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} H_1(x, y) &= \frac{1}{2} P(X_{(1)} \leq x, Y_{(2)} \leq y) + \frac{1}{2} P(X_{(2)} \leq x, Y_{(1)} \leq y) \\ &= \frac{1}{2} \{P(Y_{(2)} \leq y) - P(X_{(1)} > x, Y_{(2)} \leq y) + P(X_{(2)} \leq x) - P(X_{(2)} \leq x, Y_{(1)} > y)\} \\ &= \frac{1}{2} \{y^2 - (y - D(x, y))^2 + x^2 - (x - D(x, y))^2\} \\ &= D(x, y) \{x + y - D(x, y)\} \\ &= D(x, y) \{1 - (1 - x - y + D(x, y))\} \\ &= D(x, y) \{1 - \bar{D}(x, y)\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

$\alpha \in [0,1]$  için rastgele  $(T_{(1)}, T_{(2)})$  çifti aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$(T_{(1)}, T_{(2)}) = \begin{cases} (Z_{(1)}, Z_{(2)}), & \alpha \text{ olasılıkla} \\ (X_{(1)}, Y_{(1)}), & 1 - \alpha \text{ olasılıkla.} \end{cases}$$

Buradan,  $(T_{(1)}, T_{(2)})$  rastgele değişkeninin dağılımı  $C_\alpha[D]$  aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} C_\alpha[D] &= \alpha D(x, y) \{1 - \bar{D}(x, y)\} + (1 - \alpha) D(x, y) \\ &= D(x, y) \{1 - \alpha \bar{D}(x, y)\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

$(Z_{(1)}, Z_{(2)})$  rastgele vektörü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(Z_{(1)}, Z_{(2)}) = \begin{cases} (X_{(1)}, Y_{(1)}), & 1/2 \text{ olasılıkla} \\ (X_{(2)}, Y_{(2)}), & 1/2 \text{ olasılıkla.} \end{cases}$$

$(Z_{(1)}, Z_{(2)})$  rastgele vektörünün dağılımı aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\begin{aligned} H_2(x, y) &= \frac{1}{2} P(X_{(1)} \leq x, Y_{(1)} \leq y) + \frac{1}{2} P(X_{(2)} \leq x, Y_{(2)} \leq y) \\ &= \frac{1}{2} \{1 - P(X_{(1)} > x) - P(Y_{(1)} > y) + P(X_{(1)} > x, Y_{(1)} > y) + D^2(x, y)\} \\ &= \frac{1}{2} \{1 - (1 - x)^2 - (1 - y)^2 + (1 - x - y + D(x, y))^2 + D^2(x, y)\} \\ &= \Pi(x, y) + D(x, y) \bar{D}(x, y). \end{aligned} \quad (4.3)$$

$\alpha \in [0, 1]$  için rastgele  $(T_{(1)}, T_{(2)})$  çifti aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$(T_{(1)}, T_{(2)}) = \begin{cases} (Z_{(1)}, Z_{(2)}), & \alpha \text{ olasılıkla} \\ (X_{(1)}, X_{(2)}), & 1 - \alpha \text{ olasılıkla.} \end{cases}$$

Buradan,  $(T_{(1)}, T_{(2)})$  rastgele değişkeninin dağılımı  $C_\alpha^\circ[D]$  aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} C_\alpha^\circ[D] &= \alpha \{\Pi(x, y) + D(x, y) \bar{D}(x, y)\} + (1 - \alpha) \Pi(x, y) \\ &= \Pi(x, y) + \alpha D(x, y) \bar{D}(x, y). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Herhangi bir  $D$  kapulası için,  $0 \leq \alpha \leq 1$  aralığında  $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$  üzerinden tanımlanan iki kapula aşağıdaki gibidir.

$$C_\alpha[D] = D(x, y)\{1 - \alpha\bar{D}(x, y)\}, \quad (4.5)$$

$$C_\alpha^\circ[D] = \Pi(x, y) + \alpha D(x, y)\bar{D}(x, y). \quad (4.6)$$

Elde edilen kapuların minimum kapula, maksimum kapula ve çarpım kapulası ile ilişkileri aşağıda verilmiştir.

### Durum 1.

Minimum kapula olan  $M$  kapulası ele alınsın.  $[0,1]^2$  üzerinde her  $(x, y)$  için  $\bar{M}(x, y) = M(1-x, 1-y)$  ve  $M(x, y)\bar{M}(x, y) = M(x, y) - \Pi(x, y)$  olduğu bilinmektedir. (4.5) ve (4.6) kapularını minimum kapulasına uygulandığı zaman aşağıdaki kapular elde edilmiştir.

$$C_\alpha[M](x, y) = \alpha \Pi(x, y) + (1 - \alpha)M(x, y), \quad (4.7)$$

ve

$$C_\alpha^\circ[M](x, y) = \alpha M(x, y) + (1 - \alpha)\Pi(x, y). \quad (4.8)$$

(4.7) ve (4.8) ile verilen kapula formları Fréchet-Mardia kapula ailesine aittir.

### Durum 2.

Maksimum kapula olan  $W$  kapulası ele alınsın.  $[0,1]^2$  üzerinde her  $(x, y)$  için  $W(x, y)\bar{W}(x, y) = 0$  olduğu bilinmektedir. (4.5) ve (4.6) kapularını maksimum kapulasına uygulandığı zaman aşağıdaki kapular elde edilmiştir.

$$C_\alpha[W](x, y) = W(x, y), \quad (4.9)$$



ve

$$C_{\alpha}^{\circ}[W](x, y) = \Pi(x, y). \quad (4.10)$$

(4.9) ile verilen kapula maksimum kapula, (4.10) ile verilen kapula çarpım kapulasıdır.

### Durum 3.

$\Pi$  çarpım kapulası ele alınsın. (4.5) ve (4.6) kapulaları  $\Pi$  çarpım kapulasına uygulandığı zaman aşağıdaki kapulalar elde edilmiştir.

$$C_{\alpha}[\Pi](x, y) = xy[1 - \alpha(1 - x)(1 - y)], \quad (4.11)$$

ve

$$C_{\alpha}^{\circ}[\Pi](x, y) = xy[1 + \alpha(1 - x)(1 - y)]. \quad (4.12)$$

(4.11) ve (4.12) ile elde edilen kapulalar FGM kapula ailesinin üyeleridir.

Elde edilen yeni kapulaların ayrıca bilinen önemi kapulalarla aralarındaki ilişkileri, simetri yapısı ve bağımlılık üzerindeki etkileri Dolati ve Úbeda-Flores (2009) tarafından incelenmiştir.

Bölüm 4.2’de Dolati ve Úbeda-Flores’in (2009) yaptığı çalışmadan çıkılarak yeni bir karma kapula elde edilmiştir.

## **4.2. Yeni Karma Kapula**

Bu bölümde Dolati ve Úbeda-Flores’in (2009) yaptığı çalışmadan çıkılarak yeni bir karma kapula elde edilmiştir.  $(X_1, Y_1)$  ve  $(X_2, Y_2)$ , ortak kapulası  $D$  olan ve  $(0,1)$  aralığında düzgün dağılım gösteren iki bağımsız vektör olsun.  $X_{(1)}, X_{(2)}$  ve  $Y_{(1)}, Y_{(2)}$  bu vektörlerin sıra istatistikleri olmak üzere aşağıdaki gibi bir rastgele vektör tanımlansın.

$$(Z_{(1)}, Z_{(2)}) = \begin{cases} (X_{(1)}, Y_{(2)}), & 1/2 \text{ olasılıkla} \\ (X_{(2)}, Y_{(1)}), & 1/2 \text{ olasılıkla.} \end{cases}$$

Buna göre  $(Z_{(1)}, Z_{(2)})$  rastgele vektörünün dağılımı Eşitlik 4.1 de olduğu gibidir.

$$\begin{aligned} H_1(x, y) &= \frac{1}{2} P(X_{(1)} \leq x, Y_{(2)} \leq y) + \frac{1}{2} P(X_{(2)} \leq x, Y_{(1)} \leq y) \\ &= \frac{1}{2} \{P(Y_{(2)} \leq y) - P(X_{(1)} > x, Y_{(2)} \leq y) + P(X_{(2)} \leq x) - P(X_{(2)} \leq x, Y_{(1)} > y)\} \\ &= \frac{1}{2} \{y^2 - (y - D(x, y))^2 + x^2 - (x - D(x, y))^2\} \\ &= D(x, y) \{x + y - D(x, y)\} \\ &= D(x, y) \{1 - (1 - x - y + D(x, y))\} \\ &= D(x, y) \{1 - \bar{D}(x, y)\}. \end{aligned}$$

Dolati ve Úbeda-Flores'in (2009) yaptığından farklı olarak  $\alpha \in [0, 1]$  için rastgele  $(T_{(1)}, T_{(2)})$  çifti aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(T_{(1)}, T_{(2)}) = \begin{cases} (Z_{(1)}, Z_{(2)}), & \alpha \text{ olasılıkla} \\ (X_{(1)}, X_{(2)}), & 1 - \alpha \text{ olasılıkla.} \end{cases}$$

Buradan,  $(T_{(1)}, T_{(2)})$  rastgele değişkeninin dağılımı  $C_\alpha^\wedge[D]$  aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned} C_\alpha^\wedge[D] &= \alpha D(x, y)(1 - \bar{D}(x, y)) + (1 - \alpha) \Pi(x, y) \\ &= \alpha D(x, y) - \alpha D(x, y) \bar{D}(x, y) + \Pi(x, y) - \alpha \Pi(x, y). \end{aligned}$$

Herhangi bir  $D$  kapulası için,  $0 \leq \alpha \leq 1$  aralığında  $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$  üzerinden tanımlanan yeni iki değişkenli dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$C_\alpha^\wedge[D] = \alpha D(x, y) - \alpha D(x, y) \bar{D}(x, y) + \Pi(x, y) - \alpha \Pi(x, y). \quad (4.13)$$

$C_\alpha^\wedge[D]$  iki değişkenli dağılım fonksiyonunun bir kapula olması için sınır şartlarını sağlaması gereklidir. Bu durum aşağıda incelenmiştir.

$$C_{\alpha}^{\Delta}[D](x,0) = \alpha \cdot 0(x+0-0) + (1-\alpha) \cdot x \cdot 0 = 0.$$

$$C_{\alpha}^{\Delta}[D](0,y) = \alpha \cdot 0(0+y-0) + (1-\alpha) \cdot 0 \cdot y = 0.$$

$$C_{\alpha}^{\Delta}[D](x,1) = \alpha \cdot x(x+1-x) + (1-\alpha) \cdot x \cdot 1 = x.$$

$$C_{\alpha}^{\Delta}[D](1,y) = \alpha \cdot y(1+y-y) + (1-\alpha) \cdot 1 \cdot y = y.$$

$C_{\alpha}^{\Delta}[D](x,0) = C_{\alpha}^{\Delta}[D](0,y) = 0$  ve  $C_{\alpha}^{\Delta}[D](x,1) = x$ ,  $C_{\alpha}^{\Delta}[D](1,y) = y$  sınır şartları sağlandığı için  $C_{\alpha}^{\Delta}[D]$  bir kapuladır.

Yeni karma kapula minimum, maksimum ve çarpım kapularına uygulandığında elde edilecek durumlar aşağıda verilmiştir.

### Durum 1.

Minimum kapula olan  $M$  kapulası ele alınsın.  $[0,1]^2$  üzerinde her  $(x,y)$  için  $\overline{M}(x,y) = M(1-x,1-y)$  ve  $M(x,y)\overline{M}(x,y) = M(x,y) - \Pi(x,y)$  olduğu bilgisi kullanılarak aşağıdaki kapula elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} C_{\alpha}^{\Delta}[M] &= \alpha M(x,y) - \alpha M(x,y) + \alpha \Pi(x,y) + \Pi(x,y) - \alpha \Pi(x,y) \\ &= \Pi(x,y). \end{aligned}$$

Elde edilen kapula çarpım kapulasıdır.

### Durum 2.

Maksimum kapula olan  $W$  kapulası ele alınsın.  $[0,1]^2$  üzerinde her  $(x,y)$  için  $W(x,y)\overline{W}(x,y) = 0$  olduğu bilgisi kullanılarak aşağıdaki kapula elde edilmiştir.

$$C_{\alpha}^{\Delta}[W] = \alpha W(x,y) + (1-\alpha)\Pi(x,y).$$

Elde edilen kapula Fréchet-Mardia kapula ailesine aittir.

### Durum 3.

$\Pi$  çarpım kapulası ele alınsın.

$$\begin{aligned} C_{\alpha}^{\Delta}[\Pi] &= \alpha xy - \alpha xy(1-x)(1-y) + xy - \alpha xy \\ &= xy[1 - \alpha(1-x)(1-y)]. \end{aligned}$$

Elde edilen kapula Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) kapula ailesinin üyesi olarak bulunur.

Aşağıda yeni karma kapulaya ilişkin bazı özellikler verilmiştir.

Eğer bütün  $x, y \in [0,1]$  için  $D(x, y) = D(y, x)$  oluyorsa  $D$  kapulası simetriktir denir.

Aşağıda verilen teorem  $C_{\alpha}^{\Delta}[D]$  kapulasının simetri yapısı ile ilgilidir.

### Teorem

Eğer bir  $D$  kapulası simetrikse  $C_{\alpha}^{\Delta}[D]$  kapulası da simetriktir.

### *İspat*

$$C_{\alpha}^{\Delta}[D](y, x) = \alpha D(y, x) - \alpha D(y, x) \bar{D}(y, x) + \Pi(y, x) - \alpha \Pi(y, x).$$

$D(x, y) = D(y, x)$  ve  $\bar{D}(x, y) = 1 - x - y + D(x, y)$ ,  $\bar{D}(y, x) = 1 - x - y + D(y, x)$  olduğu için  $\bar{D}(x, y) = \bar{D}(y, x)$  bulunur. Aynı zamanda  $\Pi(x, y) = x \cdot y = y \cdot x$  olduğu için  $C_{\alpha}^{\Delta}[D](y, x) = C_{\alpha}^{\Delta}[D](x, y)$  bulunur ve ispat tamamlanır.

Bir kapula  $C = \hat{C}$  yani  $C(x, y) = x + y - 1 + C(1-x, 1-y)$  sağlanıyorsa ışınsal simetriktir denir. Aşağıda verilen teorem  $C_{\alpha}^{\Delta}[D]$  kapulasının ışınsal simetri yapısı ile ilgilidir.

### Teorem

Eğer  $D$  kapulası ışınsal simetrikse her  $\alpha \in [0,1]$  için  $C_{\alpha}^{\Delta}[D]$  kapulası da ışınsal simetriktir.

### *İspat*

$$\begin{aligned}
\hat{C}_\alpha^\Delta[D](x, y) &= x + y - 1 + C_\alpha^\Delta[D](1 - x, 1 - y) \\
&= x + y - 1 + \alpha D(1 - x, 1 - y) - \alpha D(1 - x, 1 - y) \bar{D}(1 - x, 1 - y) + (1 - \alpha) \Pi(1 - x, 1 - y) \\
&= x + y - 1 + \alpha D(1 - x, 1 - y) - \alpha \bar{D}(x, y) \hat{D}(x, y) + (1 - x)(1 - y) - \alpha(1 - x)(1 - y) \\
&= x + y - 1 + \alpha D(1 - x, 1 - y) - \alpha \bar{D}(x, y) \hat{D}(x, y) + 1 - x - y + xy - \alpha + \alpha x + \alpha y - \alpha xy \\
&= \alpha x + \alpha y - \alpha + \alpha D(1 - x, 1 - y) - \alpha \bar{D}(x, y) \hat{D}(x, y) + xy - \alpha xy \\
&= \alpha(x + y - 1 + D(1 - x, 1 - y) - \bar{D}(x, y) \hat{D}(x, y) + (1 - \alpha)xy) \\
&= \alpha \hat{D}(x, y) - \alpha \bar{D}(x, y) \hat{D}(x, y) + (1 - \alpha) \hat{\Pi}(x, y).
\end{aligned}$$

Burada  $D(1 - x, 1 - y) = \bar{D}(x, y)$ ,  $\bar{D}(1 - x, 1 - y) = \hat{D}(x, y)$  ve  $\Pi(x, y) = \hat{\Pi}(x, y)$  özellikleri kullanılmıştır.  $\hat{C}_\alpha^\Delta[D] = C_\alpha^\Delta[\hat{D}] = C_\alpha^\Delta[D]$  olduğu için ispat tamamlanmış olur.

$\alpha_1 \leq \alpha_2$  olduğunda  $C_{\alpha_1} < C_{\alpha_2}$  oluyorsa  $C_\alpha$  kapula ailesine pozitif sıralı,  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  olduğunda  $C_{\alpha_1} > C_{\alpha_2}$  oluyorsa  $C_\alpha$  kapula ailesine negatif sıralı denir. Aşağıda verilen teorem  $C_\alpha^\Delta[D]$  kapulasının sıralama özelliği ile ilgilidir.

### Teorem

$C_\alpha^\Delta[D]$  parametrik kapula ailesi negatif sıralıdır.

### *İspat*

$\alpha_1 \leq \alpha_2$  iken  $C_{\alpha_1}^\Delta[D](x, y) - C_{\alpha_2}^\Delta[D](x, y) < 0$  durumunda  $C_\alpha$  kapula ailesi pozitif sıralı aksi takdirde yani  $C_{\alpha_1}^\Delta[D](x, y) - C_{\alpha_2}^\Delta[D](x, y) > 0$  ise negatif sıralıdır. Aşağıda  $C_\alpha^\Delta[D]$  kapulası negatif sıralı olarak varsayıp incelenirse;

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 D(x, y)(1 - \bar{D}(x, y)) + (1 - \alpha_1) \Pi(x, y) - \alpha_2 D(x, y)(1 - \bar{D}(x, y)) - (1 - \alpha_2) \Pi(x, y) > 0 \\
&(\alpha_1 - \alpha_2)(D(x, y)(1 - \bar{D}(x, y))) + xy - \alpha_1 xy - xy + \alpha_2 xy > 0 \\
&(\alpha_1 - \alpha_2)(D(x, y)(x + y - D(x, y))) - (\alpha_1 - \alpha_2)xy > 0 \\
&(\alpha_1 - \alpha_2)(xD(x, y) + yD(x, y) - D^2(x, y) - xy) > 0 \\
&(\alpha_1 - \alpha_2)(x(D(x, y) - y) - D(x, y)(D(x, y) - y)) > 0 \\
&\underbrace{(\alpha_1 - \alpha_2)}_{-} \underbrace{((x - D(x, y))}_{+} \underbrace{(D(x, y) - y))}_{-} > 0.
\end{aligned}$$

Her zaman  $x \geq D(x, y)$  ve  $y \geq D(x, y)$  olduğu için ispat tamamlanmış olur.

Bir  $C$  kapulası  $\Pi <_c C$  ise pozitif kadran bağımlı (PQD),  $C <_c \Pi$  ise negatif kadran bağımlıdır (NQD) denir. Aşağıda verilen teorem  $C_\alpha^\wedge[D]$  kapulasının kadran bağımlılık yapısı ile ilgilidir.

### Teorem

Her  $\alpha \in [0, 1]$  için  $C_\alpha^\wedge[D]$  kapulası negatif kadran bağımlıdır.

### *İspat*

Bütün kapulalar için  $W(x, y) \leq C(x, y) \leq M(x, y)$  durumu sağlanır.  $C_\alpha^\wedge[D]$  kapulası için bu sınırlar yerine konulursa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\alpha W(x, y) + (1 - \alpha)\Pi(x, y) <_c C_\alpha^\wedge[D](x, y) <_c \Pi(x, y).$$

Burada  $C_\alpha^\wedge[D](x, y) <_c \Pi(x, y)$  olduğu için ispat tamamlanmış olur.

$C_1$  ve  $C_2$  kapulaları için eğer  $C_1 \leq C_2$  ise  $C_2$  kapulası  $C_1$  kapulasından daha uyumludur ( $C_1 <_c C_2$ ) denir. Aşağıda verilen teorem  $C_\alpha^\wedge[D]$  kapulasının uyumluluk özelliği ile ilgilidir.

### Teorem

$D_1$  ve  $D_2$   $D_1 <_c D_2$  olan iki kapula ise her  $\alpha \in [0, 1]$  için  $C_\alpha^\wedge[D_1] <_c C_\alpha^\wedge[D_2]$  olur.

### *İspat*

$$\begin{aligned}
& \alpha D_1(x, y)(1 - \bar{D}_1(x, y)) + (1 - \alpha) \Pi(x, y) < \alpha D_2(x, y)(1 - \bar{D}_2(x, y)) + (1 - \alpha) \Pi(x, y) \\
& D_1(x, y)(x + y - D_1(x, y)) - D_2(x, y)(x + y - D_2(x, y)) < 0 \\
& D_1(x, y)x + D_1(x, y)y - D_1^2(x, y) - D_2(x, y)x - D_2(x, y)y + D_2^2(x, y) < 0 \\
& (D_1(x, y) - D_2(x, y))x + (D_1(x, y) - D_2(x, y))y - (D_1^2(x, y) - D_2^2(x, y)) < 0 \\
& \underbrace{(D_1(x, y) - D_2(x, y))}_{-} \underbrace{(x - D_1(x, y) + y - D_2(x, y))}_{+} < 0.
\end{aligned}$$

Her zaman  $x \geq D_1(x, y)$  ve  $y \geq D_2(x, y)$  olduğu için ispat tamamlanmış olur.

Aşağıda verilen teorem  $C_\alpha^\Delta[D]$  kapulasının Kendall'ın  $\tau$ 'su ve Spearman'ın  $\rho$ 'su ile ilişkisini vermektedir.

### Teorem

Her  $\alpha \in [0, 1]$  ve verilen bir  $D$  kapulası için  $C_\alpha^\Delta[D]$  kapulasının ilişki katsayılarının sınırları aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\frac{(-\alpha)(\alpha + 2)}{3} \leq \tau(C_\alpha^\Delta[D]) \leq 0,$$

$$-\alpha \leq \rho(C_\alpha^\Delta[D]) \leq 0.$$

### *İspat*

$C_1$  ve  $C_2$  kapulaları için eğer  $C_1 <_c C_2$  ise  $\tau(C_1) \leq \tau(C_2)$  ve  $\rho(C_1) \leq \rho(C_2)$  olur (Nelsen, 2006: 169).

Bütün kapulalar için  $W(x, y) \leq C(x, y) \leq M(x, y)$  durumu sağlandığından,  $C_\alpha^\Delta[D]$  kapulası için bu sınırlar yerine konulduğunda;

$\alpha W(x, y) + (1 - \alpha) \Pi(x, y) < C_\alpha^\Delta[D](x, y) < \Pi(x, y)$  elde edilir. Burada  $\tau(\Pi(x, y)) = 0$  ve Fréchet-Mardia kapula ailesi olan  $C_{\alpha, \beta}(x, y) = \beta M(x, y) + (1 - \alpha - \beta) \Pi(x, y) + \alpha W(x, y)$

için Kendall'in  $\tau$ 'sunun  $\tau_{\alpha,\beta} = \frac{(\beta - \alpha)(\alpha + \beta + 2)}{3}$  ve Spearman'in  $\rho$ 'sunun  $\rho_{\alpha,\beta} = \beta - \alpha$

bilgisi kullanılarak hesaplamalar yapılır (Nelsen, 2006: 162). Burada  $C_\alpha^\Delta[D]$  kapulasının sınırlarını elde etmek için  $\beta = 0$  alınması gerektiğine dikkat edilmelidir. Bu durum ilişki parametrelerinin hesaplanmasında da uygulandığı zaman yukarıdaki sınırlar elde edilmiş ve ispat tamamlanmış olur.

Yeni elde edilen karma kapula FGM kapula ailesine uygulanmış ve FGM kapulasının yeni bir formu aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$C_\alpha^\Delta[D_\theta](x, y) = \alpha xy[1 + \theta(1-x)(1-y)][x + y - xy - \theta xy(1-x)(1-y)] + (1-\alpha)xy \quad (4.14)$$

Bazı cebirsel işlemlerden sonra yeni oluşturulan kapula için Kendall'in  $\tau$ 'su ve Spearman'in  $\rho$ 'su aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\begin{aligned} \tau(C_\alpha^\Delta[D_\theta](x, y)) &= 4 \int_0^1 \int_0^1 [\alpha xy[1 + \theta(1-x)(1-y)][x + y - xy - \theta xy(1-x)(1-y)] + (1-\alpha)xy \\ &\quad \cdot [1 - \alpha + \dots - 16\alpha\theta^2 x^3 y^3] dx dy - 1 \\ &= \frac{4\alpha^2\theta^3}{11025} - \frac{\alpha^2\theta^2}{450} + \frac{\alpha^2\theta}{225} - \frac{2\alpha\theta^2}{225} + \frac{\alpha\theta}{9} - \frac{2\alpha}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(C_\alpha^\Delta[D_\theta](x, y)) &= 12 \int_0^1 \int_0^1 [\alpha xy[1 + \theta(1-x)(1-y)][x + y - xy - \theta xy(1-x)(1-y)] + (1-\alpha)xy dx dy - 3 \\ &= -\frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha\theta}{6} - \frac{\alpha\theta^2}{75} \end{aligned}$$

Buradan Kendall'in  $\tau$ 'su ve Spearman'in  $\rho$ 'su sırasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$\tau(C_\alpha^\Delta[D_\theta](x, y)) = \left(\frac{4\theta^2}{11025} - \frac{\theta}{450} + \frac{1}{225}\right)\alpha^2\theta + \left(-\frac{2\theta^2}{225} + \frac{\theta}{9} - \frac{2}{9}\right)\alpha,$$

$$\rho(C_\alpha^\Delta[D_\theta](x, y)) = \left(-\frac{1}{3} + \frac{\theta}{6} - \frac{\theta^2}{75}\right)\alpha.$$



Hesaplamalara göre  $\alpha \in [0,1]$  ve  $\theta \in [-1,1]$  için  $\rho(C_\alpha^\wedge[D_\theta]) \in [-0,51\hat{3}, 0]$  ve  $\tau(C_\alpha^\wedge[D_\theta]) \in [-0,3492517, 0]$  aralıklarında bulunmuştur.  $(\alpha, \theta) = (1, -1)$  için Kendall'ın  $\tau$ 'su  $\tau = -0,3492517$ , Spearman'ın  $\rho$ 'su  $\rho = -0,51\hat{3}$  değerlerine kadar düşmüştür. FGM kapula ailesinin en büyük dezavantajı Kendall'ın  $\tau$ 'su ve Spearman'ın  $\rho$ 'sunun sırasıyla  $[-2/9, 2/9]$  ve  $[-1/3, 1/3]$  alt ve üst sınırlarına sahip olmasıdır. Negatif kadrana bağımlı olduğu ispatlanan yeni karma kapula FGM kapulasına uygulandığı zaman FGM kapulasının sınırları negatif yönde genişletilmiş ve negatif yönde daha güçlü bir bağımlılık elde edilmiştir.



## 5. EN UYGUN KAPULA SEÇİMİ VE SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde FGM kapulasının yeni formu bazı kapulalarla karşılaştırılacaktır. *AIC* ve *BIC* bilgi kriterleri kullanılarak en iyi kapula seçimi yapılacak ve karşılaştırmada kullanılan kapulardan simülasyonla veri üretilecektir. Üretilen veri kullanılarak saçılım grafikleri elde edilerek yorumlamalar yapılmıştır.

### 5.1. En Uygun Kapula Seçimi

FGM kapulasının yeni oluşturulan formu bazı kapulalarla karşılaştırılarak veriye en uygun kapula aileleri seçilmiştir. FGM kapulasının yeni formu negatif korelasyona uygun olduğu için karşılaştırmada kullanılacak kapulalar negatif korelasyonda kullanılmaya uygun olarak seçilmiştir. Bunlar FGM kapulası, Gaussian kapulası ve Frank kapulasıdır. FGM kapulasının yeni formu parametre sınırlarını aşmayacak şekilde uygun alfa olasılıkları ile kullanılmıştır. Çalışmada beş duruma yer verilmiştir.  $X \sim N(0,1)$  ve  $Y \sim N(0,1)$  olacak şekilde 100 örnek çapında birbirleriyle korelasyonlu iki veri seti oluşturulmuştur. Korelasyonlu veri elde etmek için Cholesky ayrışımı kullanılmıştır (Li ve diğerleri, 2013). Birinci durumda  $X$  ve  $Y$  arasındaki Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,0476$ , ikinci durumda  $X$  ve  $Y$  arasındaki Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,1144$ , üçüncü durumda  $X$  ve  $Y$  arasındaki Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,2100$ , dördüncü durumda  $X$  ve  $Y$  arasındaki Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,2561$  ve beşinci durumda  $X$  ve  $Y$  arasındaki Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,3087$  olması halinde  $X$  ve  $Y$  verisine en uygun kapula ailesi araştırılmıştır. En uygun kapulayı bulmak için *AIC* ve *BIC* bilgi kriterleri kullanılmıştır. En küçük *AIC* ve *BIC* değerine sahip olan kapula modele en uygun kapula olarak tespit edilir. *AIC* ve *BIC* bilgi kriterlerini hesaplamak için elde edilen  $X$  ve  $Y$  korelasyonlu verisinin rankları kullanılır. Bu ranklar aşağıda verildiği gibi hesaplanır.

$$\begin{cases} u_i = \frac{\text{rank}(X_i)}{N+1} \\ v_i = \frac{\text{rank}(Y_i)}{N+1} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Burada  $rank(X_i)$ (veya  $rank(Y_i)$ ),  $X$  (veya  $Y$ ) 'ler arasında azalan bir sıraya göre sıralandığında kaçınıcı sırada olduğunu ifade eder. Bu dönüşümle  $(u, v)$  standart düzgün dağılım vektörü elde edilir.

Kapuların olasılık yoğunluk fonksiyonu  $c(u, v)$  ve parametre aralıkları Çizelge 5.1 de verilmiştir. Burada  $\rho_{12}$  ve  $\theta$  kapula parametreleridir. Kapula parametreleri Kendall'in  $\tau$ 'su ile olan ilişkileri kullanılarak tahmin edilmiştir. Korelasyonlu veri  $X$  ve  $Y$ 'den hesaplanan Kendall'in  $\tau$  değerleri kullanılarak parametre tahminleri yapılmıştır. Ayrıca beş farklı durum için de  $X$  ve  $Y$  arasındaki Spearman'ın  $\rho$ 'su, dönüşümle elde edilmiş  $(u, v)$  standart düzgün dağılım vektörü arasındaki Kendall'in  $\tau$ 'su ve Spearman'ın  $\rho$ 'su hesaplanmıştır.

Çizelge 5.1. Çalışmada kullanılan kapula ailelerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları, parametre aralıkları ve Kendall'in  $\tau$ 'su ile ilişkileri

Kapula	Kapula olasılık yoğunluk fonksiyonu $c(u, v)$	Parametre aralığı	Kendall'in $\tau$ değeri
Gaussian	$\frac{1}{\sqrt{(1-\rho_{12}^2)}} \exp\left\{-\frac{\zeta_1^2 \rho_{12}^2 - 2\rho_{12}\zeta_1\zeta_2 + \zeta_2^2 \rho_{12}^2}{2(1-\rho_{12}^2)}\right\}$ $\zeta_1 = \Phi^{-1}(u), \zeta_2 = \Phi^{-1}(v)$	$[-1, 1]$	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho_{12})$
Frank	$\frac{-\theta(e^{-\theta} - 1)e^{-\theta(u+v)}}{[(e^{-\theta} - 1) + (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)]^2}$	$(-\infty, \infty)$ $\setminus\{0\}$	$1 - \frac{4}{\theta} [D_1(-\theta) - 1]$
FGM	$1 + \theta(2u - 1)(2v - 1)$	$[-1, 1]$	$\frac{2\theta}{9}$
New-FGM	$1 - \alpha + \alpha\theta^2(-16u^3v^3 + 24u^3v^2 - 8u^3v + 24u^2v^3 - 36u^2v^2 + 12u^2v - 8uv^3 + 12uv^2 - 4uv) + \alpha\theta(-18u^2v^2 + 18u^2v - 3u^2 + 2v) + \alpha(-4uv + 2u + 2v)$	$[-1, 1]$	$\left(\frac{4\theta^2}{11025} - \frac{\theta}{450} + \frac{1}{225}\right)\alpha^2\theta + \left(-\frac{2\theta^2}{225} + \frac{\theta}{9} - \frac{2}{9}\right)\alpha$

\*Burada  $D_1$ , 1. Dereceden Debye fonksiyonunu göstermektedir.  $D_1(\theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1}$

Çizelge 5.2 de  $X$  ve  $Y$  arasındaki farklı Kendall  $\tau$  değerlerine göre kapuların karşılaştırma sonuçları özetlenmiştir. Veriye en uygun kapula ailesi yanında “ \* ” sembolüyle, hesaplanamayan değerler “ — ” sembolüyle gösterilmiştir.

Çizelge 5.2.  $X$  ve  $Y$  arasındaki farklı Kendall  $\tau$  değerlerine göre kapulaların karşılaştırma sonuçları

$X$ ve $Y$ arasındaki $\tau$	$X$ ve $Y$ arasındaki $\rho$	$u$ ve $v$ arasındaki $\tau$	$u$ ve $v$ arasında ki $\rho$	Kapula ailesi	Kapula parametresi ( $\rho_{12}$ veya $\theta$ )	$AIC$	$BIC$
-0,0476	-0,0728	-0,0469	-0,0721	New FGM ( $\alpha = 0,2$ )	-0,1392	1,487	4,092
				*New FGM ( $\alpha = 0,4$ )	0,9996	1,215	3,820
				FGM	-0,2143	1,457	4,062
				Gaussian	-0,0747	1,393	3,998
				Frank	-0,4293	1,489	4,094
-0,1144	-0,1722	-0,1152	-0,1734	*New FGM ( $\alpha = 0,4$ )	-0,5395	-1,079	1,526
				New FGM ( $\alpha = 0,6$ )	0,2845	-0,832	1,773
				New FGM ( $\alpha = 0,9$ )	0,900	0,191	2,797
				FGM	-0,5149	-0,978	1,626
				Gaussian	-0,1788	-0,809	1,795
				Frank	-1,0409	-1,047	1,577
-0,2100	-0,2944	-0,2101	-0,2945	New FGM ( $\alpha = 0,7$ )	0,6426	-7,018	-4,413
				New FGM ( $\alpha = 0,8$ )	-0,3400	-6,932	-4,327
				New FGM ( $\alpha = 0,9$ )	-0,0950	-6,764	-4,158
				FGM	-0,9451	-6,661	-4,056
				*Gaussian	-0,3239	-9,465	-6,860
				Frank	-1,9609	-7,402	-4,796
-0,2561	-0,3620	-0,2558	-0,3610	New FGM ( $\alpha = 0,8$ )	-0,7939	-11,544	-8,939
				New FGM ( $\alpha = 0,9$ )	-0,5194	-11,088	-8,483
				FGM	—	—	—
				*Gaussian	-0,3915	-14,461	-11,855
				Frank	-2,4360	-12,606	-10,000
-0,3087	-0,4450	-0,3095	-0,4454	New FGM ( $\alpha = 0,9$ )	-0,9569	-20,076	-17,471
				FGM	—	—	—
				*Gaussian	-0,4661	-22,556	-19,951
				Frank	-3,0167	-19,690	-17,084

$X$  ve  $Y$  arasındaki Kendall'ın  $\tau$ 'su  $\tau = -0,0476$  olduğunda,  $X$  ve  $Y$  arasındaki Spearman'ın  $\rho$ 'su  $\rho = -0,0728$  olarak elde edilmiştir. Dönüşümle elde edilen  $(u, v)$  çiftleri arasındaki Kendall'ın  $\tau$ 'su  $\tau = -0,0469$ , Spearman'ın  $\rho$ 'su  $\rho = -0,0721$  olarak bulunmuştur. Burada en küçük  $AIC$  ve  $BIC$  değerine sahip kapula  $\alpha = 0,4$  olduğunda yeni FGM kapulasıdır, dolayısıyla en uygun kapula olarak belirlenir. Daha sonra Gaussian kapula, FGM kapula,  $\alpha = 0,2$  olduğunda yeni FGM kapula ve son olarak en zayıf kapula Frank kapulası olarak tespit edilir.

$X$  ve  $Y$  arasındaki Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,1144$  olduğunda,  $X$  ve  $Y$  arasındaki Spearman'ın  $\rho$ 'su  $\rho = -0,1722$  olarak elde edilmiştir. Dönüşümle elde edilen  $(u, v)$  çiftleri arasındaki Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,1152$ , Spearman'ın  $\rho$ 'su  $\rho = -0,1734$  olarak bulunmuştur. Burada en küçük  $AIC$  ve  $BIC$  değerine sahip kapula  $\alpha = 0,4$  olduğunda yeni FGM kapulasıdır, dolayısıyla en uygun kapula olarak belirlenir. Daha sonra Frank kapulası, FGM kapula,  $\alpha = 0,6$  olduğunda yeni FGM kapula, Gaussian kapula ve son olarak en zayıf kapula  $\alpha = 0,9$  olduğunda yeni FGM kapula olarak tespit edilir.

$X$  ve  $Y$  arasındaki Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,2100$  olduğunda,  $X$  ve  $Y$  arasındaki Spearman'ın  $\rho$ 'su  $\rho = -0,2944$  olarak elde edilmiştir. Dönüşümle elde edilen  $(u, v)$  çiftleri arasındaki Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,2101$ , Spearman'ın  $\rho$ 'su  $\rho = -0,2945$  olarak bulunmuştur. Burada en küçük  $AIC$  ve  $BIC$  değerine sahip kapula Gaussian kapulasıdır, dolayısıyla en uygun kapula olarak belirlenir. Daha sonra Frank kapulası,  $\alpha = 0,7$  olduğunda yeni FGM kapula,  $\alpha = 0,8$  olduğunda yeni FGM kapula,  $\alpha = 0,9$  olduğunda yeni FGM kapula ve son olarak en zayıf kapula FGM kapula olarak tespit edilir.

$X$  ve  $Y$  arasındaki Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,2561$  olduğunda,  $X$  ve  $Y$  arasındaki Spearman'ın  $\rho$ 'su  $\rho = -0,3620$  olarak elde edilmiştir. Dönüşümle elde edilen  $(u, v)$  çiftleri arasındaki Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,2558$ , Spearman'ın  $\rho$ 'su  $\rho = -0,3610$  olarak bulunmuştur. FGM kapulasının parametre aralığı  $[-1, 1]$  ve Kendall  $\tau$  değeri  $[-2/9, 2/9]$  değerleri arasında olduğu için burada kullanılamaz. Dikkat edilmelidir ki yeni FGM kapulası negatif korelasyonda daha yüksek sınırlara sahip olduğu için belirli alfa olasılık değerlerinde parametre değeri  $[-1, 1]$  olacak şekilde kullanılmaya devam edilebilir. Burada en küçük  $AIC$  ve  $BIC$  değerine sahip kapula Gaussian kapulasıdır, dolayısıyla en uygun kapula olarak belirlenir. Daha sonra Frank kapulası,  $\alpha = 0,8$  olduğunda yeni FGM kapula ve son olarak en zayıf kapula  $\alpha = 0,9$  olduğunda yeni FGM kapula olarak tespit edilir.

$X$  ve  $Y$  arasındaki Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,3087$  olduğunda,  $X$  ve  $Y$  arasındaki Spearman'ın  $\rho$ 'su  $\rho = -0,4450$  olarak elde edilmiştir. Dönüşümle elde edilen  $(u, v)$  çiftleri arasındaki Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,3095$ , Spearman'ın  $\rho$ 'su  $\rho = -0,4454$  olarak bulunmuştur. FGM kapulası burada yine parametre sınırının dışında olduğu için kullanılamaz. Burada en küçük  $AIC$  ve  $BIC$  değerine sahip kapula Gaussian kapulasıdır,

dolayısıyla en uygun kapula olarak belirlenir. Daha sonra  $\alpha = 0,9$  olduğunda yeni FGM kapula ve son olarak en zayıf kapula Frank kapulası olarak tespit edilir.

FGM kapulasının yeni oluşturulan formu için değişkenler arasında negatif korelasyon söz konusu olduğunda mutlak değerce küçük korelasyonlarda karşılaştırmada kullanılan kapulalardan daha iyi sonuç verdiği bir çok durumda da FGM kapulasından daha iyi sonuç verdiği tespit edilmiştir. Ayrıca negatif korelasyonlar mutlak değerce arttığında yeni FGM kapulasının küçük alfa olasılıklarında daha iyi sonuçlar verdiği, alfa olasılığı arttıkça sonuçlar kötüleştiği için tercih edilememektedir.

## 5.2. Simülasyon Çalışması

Kapulalardan simülasyonla rastgele vektör üretmek kapulalarda en önemli uygulamalardan biridir. Simülasyon çalışmasında beş duruma yer verilmiştir. Bölüm 5.1 de kullanılan bütün durumlar için yine bölüm 5.1 de kullanılan kapula aileleri ile rastgele vektörler üretilmiştir. Her bir kapula ailesinden 1000 tane rastgele vektör üretilmiştir. FGM kapulası, Gaussian kapulası ve Frank kapulasından rastgele vektörler Nelsen (2006: 41) tarafından önerilen algoritma ile aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

1.  $(0,1)$  aralığında düzgün dağılıma sahip  $u$  ve  $t$  bağımsız değişkenleri üret.
2.  $v = c_u^{(-1)}(t)$ , burada  $c_u^{(-1)}, c_u$  'nun yarı tersini ifade eder.
3. İstenen  $(u, v)$  çiftleri elde edilir.

FGM kapulasının yeni formu için rastgele vektörler Dolati ve Úbeda-Flores (2009) tarafından önerilen algoritma ile aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Adım 1.  $(0,1)$  aralığında düzgün dağılım gösteren rastgele bir  $S_1$  değişkeni üret;

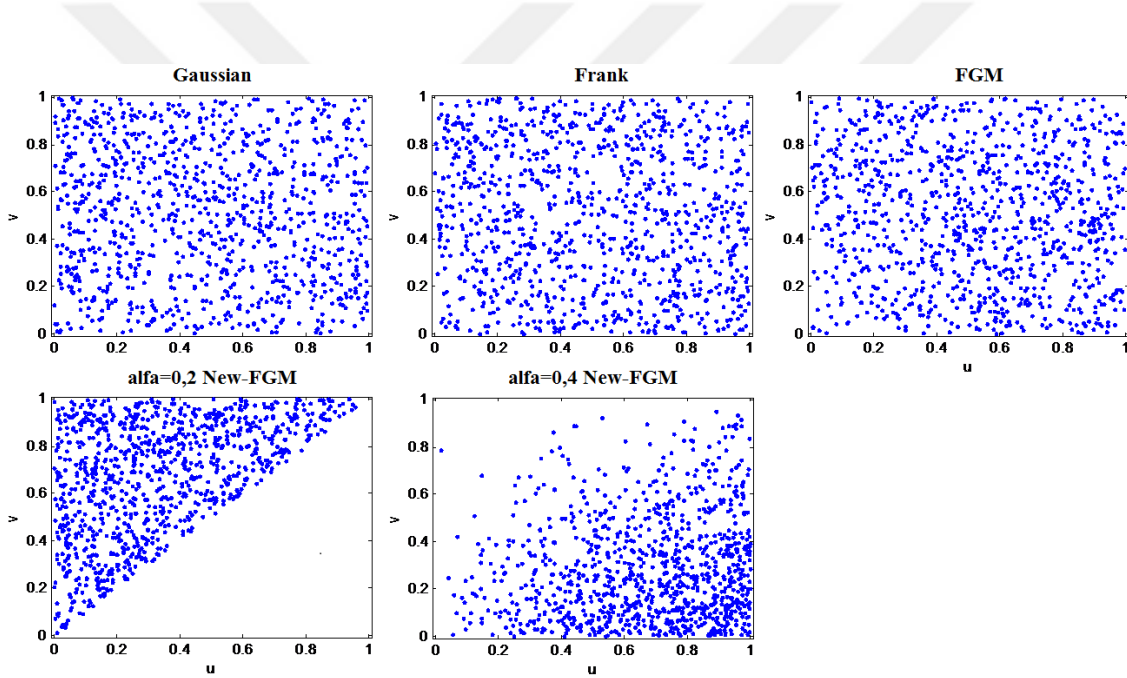
Adım 2.  $X_{(1)} \leq X_{(2)}$  ve  $Y_{(1)} \leq Y_{(2)}$  olacak şekilde FGM kapulasından bağımsız  $(X_1, Y_1)$  ve  $(X_2, Y_2)$  rastgele değişkenlerini üret.

Adım 3. Eğer  $S_1 > \alpha$  ise  $(u, v) = (X_1, X_2)$

Adım 4. Aksi takdirde;  $(0,1)$  aralığında düzgün dağılım gösteren rastgele bir  $S_2$  değişkeni üret ve  $S_2 < 1/2$  ise  $(u, v) = (X_{(1)}, Y_{(2)})$ , yoksa  $(u, v) = (X_{(2)}, Y_{(1)})$ .

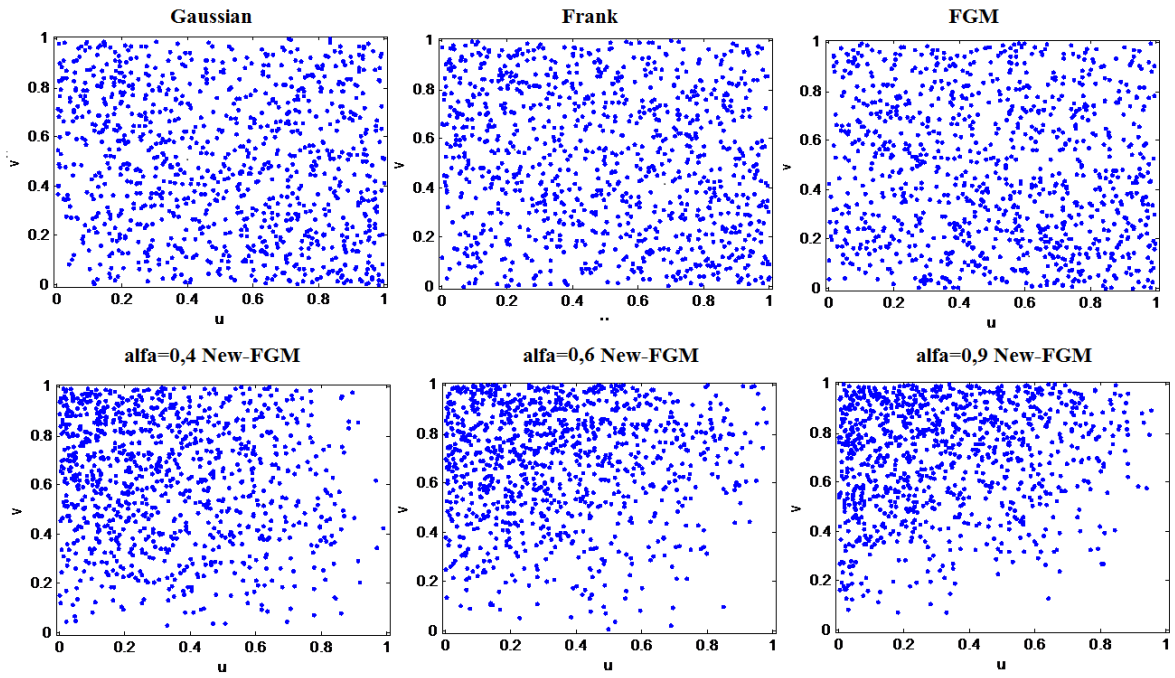
Bütün kapulalar için parametre tahminleri Çizelge 5.1 de verildiği gibi Kendall'ın  $\tau$ 'su ile ilişkilerinden tahmin edilerek bulunmuştur. Simülasyonla elde edilen 1000 tane rastgele vektör  $(u, v)$  çiftlerinin saçılım grafikleri aşağıda verilmiştir.

Şekil 5.1'de Kendall'ın  $\tau$ 'su  $\tau = -0,0476$  olduğunda kapulalardan üretilen  $(u, v)$  çiftlerinin saçılım grafikleri verilmiştir. FGM kapulasının yeni formu için  $\alpha = 0,2$  ve  $\alpha = 0,4$  olasılıkları kullanılmıştır.



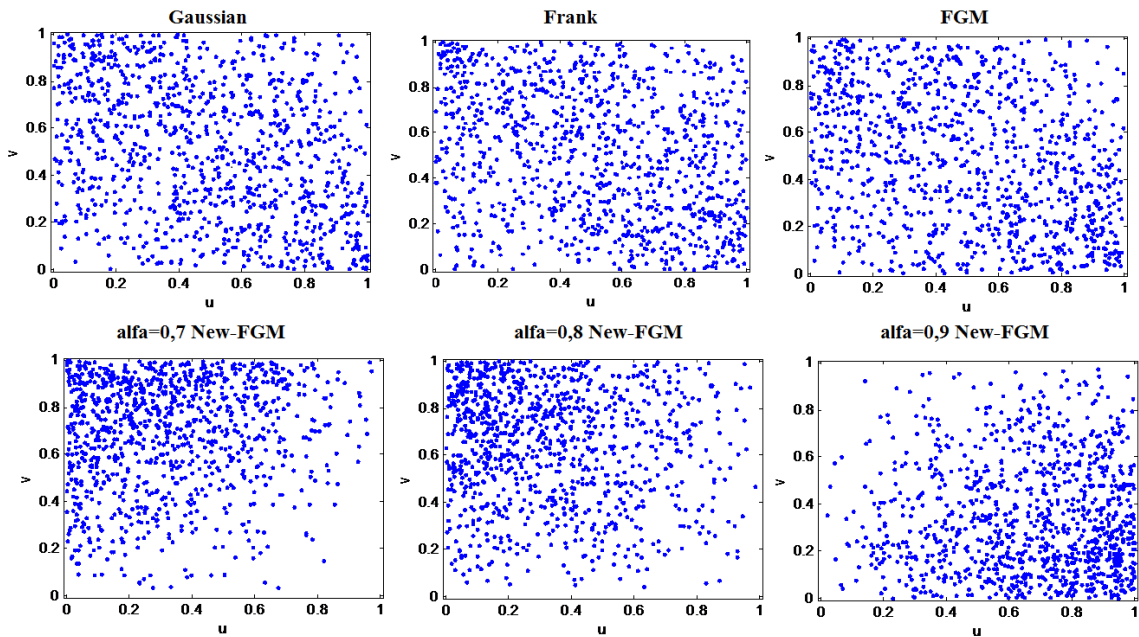
Şekil 5.1. Kendall'ın  $\tau$ 'su  $\tau = -0,0476$  olduğunda kapulalardan üretilen  $(u, v)$  çiftlerinin saçılım grafikleri

Şekil 5.2'de Kendall'ın  $\tau$ 'su  $\tau = -0,1144$  olduğunda kapulalardan üretilen  $(u, v)$  çiftlerinin saçılım grafikleri verilmiştir. FGM kapulasının yeni formu için  $\alpha = 0,4$ ,  $\alpha = 0,6$  ve  $\alpha = 0,9$  olasılıkları kullanılmıştır.



Şekil 5.2. Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,1144$  olduğunda kapulalardan üretilen  $(u, v)$  çiftlerinin saçılım grafikleri

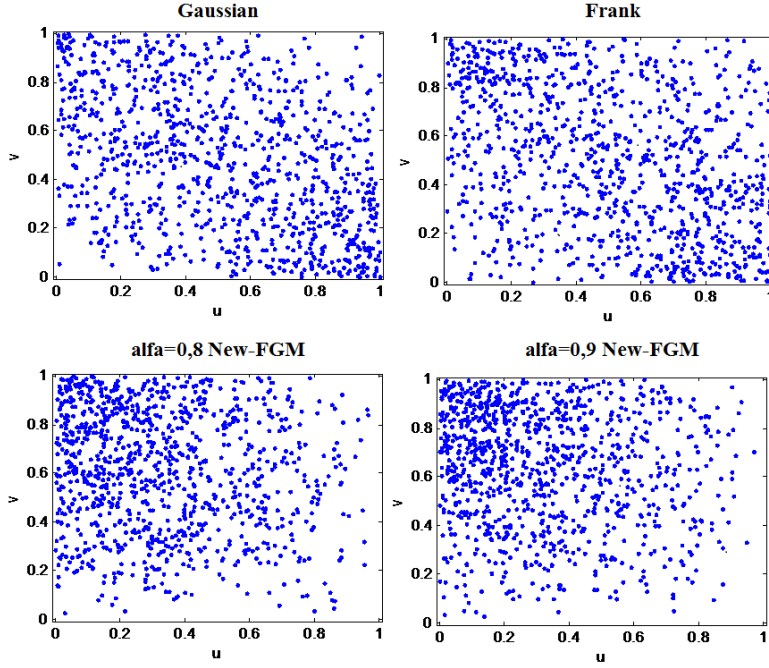
Şekil 5.3'te Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,2100$  olduğunda kapulalardan üretilen  $(u, v)$  çiftlerinin saçılım grafikleri verilmiştir. FGM kapulasının yeni formu için  $\alpha = 0,7$ ,  $\alpha = 0,8$  ve  $\alpha = 0,9$  olasılıkları kullanılmıştır.



Şekil 5.3. Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,2100$  olduğunda kapulalardan üretilen  $(u, v)$  çiftlerinin saçılım grafikleri

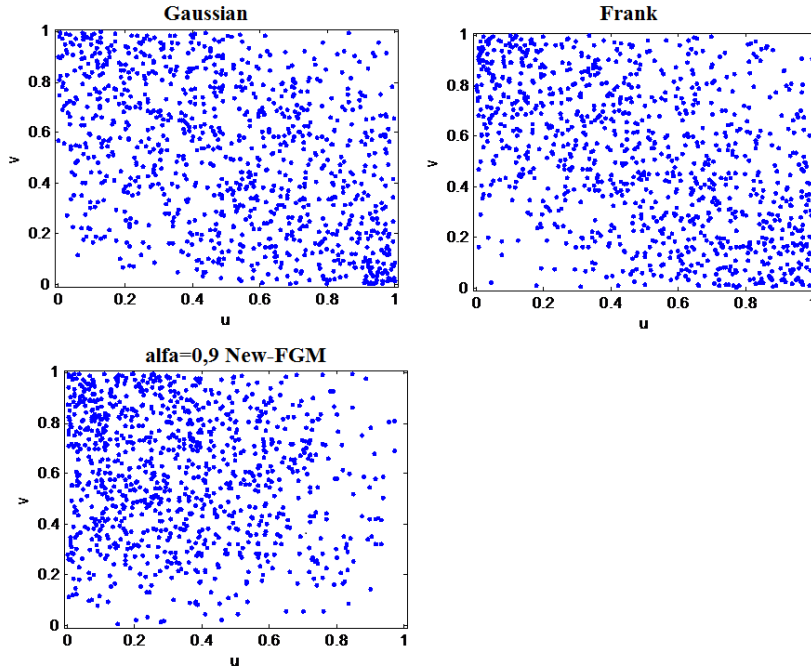


Şekil 5.4'te Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,2561$  olduğunda kapulalardan üretilen  $(u, v)$  çiftlerinin saçılım grafikleri verilmiştir. FGM kapulasının yeni formu için  $\alpha = 0,8$  ve  $\alpha = 0,9$  olasılıkları kullanılmıştır. FGM kapulasının Kendall  $\tau$  değeri  $[-2/9, 2/9]$  değerleri arasında olduğu için Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,2561$  olduğunda kullanılamaz dolayısıyla burada yer verilmemiştir.



Şekil 5.4. Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,2561$  olduğunda kapulalardan üretilen  $(u, v)$  çiftlerinin saçılım grafikleri

Şekil 5.5'te Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,3087$  olduğunda kapulalardan üretilen  $(u, v)$  çiftlerinin saçılım grafikleri verilmiştir. FGM kapulasının yeni formu için  $\alpha = 0,9$  olasılığı kullanılmıştır. FGM kapulasının Kendall  $\tau$  değeri  $[-2/9, 2/9]$  değerleri arasında olduğu için Kendall'in  $\tau$ 'su  $\tau = -0,3087$  olduğunda kullanılamaz dolayısıyla burada yer verilmemiştir.



Şekil 5.5. Kendall'ın  $\tau$ 'su  $\tau = -0,3087$  olduğunda kapulalardan üretilen  $(u, v)$  çiftlerinin saçılım grafikleri

Simülasyonla kapulalardan üretilen rastgele değişken  $(u, v)$  çiftlerinin saçılım grafikleri incelendiğinde FGM kapulasının yeni formu için elde edilen  $(u, v)$  çiftlerinin negatif bağımlılığı diğer kapulalara göre daha güçlü bir şekilde yansıttığı, özellikle Kendall  $\tau$ 'nun mutlak değerce küçük değerleri için güçlü bir bağımlılık gösterdiği gözlemlenmiştir.



## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Kapulalar rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını ortaya koymak için kullanılan etkili bir yöntemdir. Sklar teoremi sayesinde kolayca inşa edilebilmesi sebebiyle de araştırmacılar tarafından büyük ilgi görmektedir. Bu çalışmada istatistiksel hipotezlerde, tahmin problemlerinde, istatistiksel süreç kontrollerinde, güvenilirlik, risk yönetimi ve birçok uygulamalı alanda yaygın olarak kullanılmakta olan sıra istatistiklerinin bağımlılık yapısı kullanılarak çalışmalar yapılmıştır.

Schmitz'in (2004) uç sıra istatistikleri  $X_{(1)}, X_{(n)}$  için önerdiği "min-max-kapula" ile Clayton, Frank, Gumbel, Gaussian, FGM kapula aileleri farklı  $n$  değerleri kullanılarak karşılaştırılmıştır. Kapula ailelerinin veri setine uygunluğu Ki-kare uyum iyiliği testi ile incelenmiştir. Sonuçlar incelendiğinde  $4 \times 4$  'lük çeyrekliklere ayrılmış veri seti için  $n = 2, 5, 10$  olması halinde sadece min-max-kapula için  $H_0$  yokluk hipotezi kabul edilir ve veri seti için uygun bulunurken diğer kapula aileleri veri seti için uygun bulunmamıştır. FGM kapula ailesi için Kendall  $\tau$  sınırları  $[-2/9, 2/9]$  aralığında olmasından dolayı  $n = 2$  olması halinde hesaplanan  $\tau = 0.3244$  değeri sınırların dışında kalır ve burada FGM kapulası hesaplanamaz.  $n = 20$  olması halinde bütün kapula aileleri için  $H_0$  yokluk hipotezi kabul edilir ve veri seti için uygun bulunur.  $n = 100$  olması halinde ise bütün kapula aileleri için  $H_0$  yokluk hipotezi red edilir ve veri seti için uygun bulunmaz.  $6 \times 6$  'lık noktalara ayrılmış veri seti için bütün durumlarda çalışılan tüm kapula aileleri için  $H_0$  yokluk hipotezi red edilir ve veri seti için uygun bulunmaz. Yapılan simülasyon çalışmasında  $n$  'nin küçük değerleri için min-max-kapulasının iyi sonuçlar verdiği,  $n = 20$  olması halinde bütün kapula ailelerinin birbirine benzer sonuçlar vererek veri setine uygun olduğu,  $n$  'nin büyük değerleri için ise hem min-max-kapulasının hem de diğer kapula ailelerinin veriye uygun olmadığı tespit edilmiştir. En küçük ve en büyük sıra istatistikleri çiftleri arasındaki bağımlılık yapısının incelenmesinde min-max-kapulasının diğer kapula ailelerine göre daha iyi sonuçlar verdiği fakat  $n$  'nin küçük değerleri için daha elverişli olduğu simülasyonla gösterilmiştir. 1000 örnek çekilerek yapılan çalışmada veri seti  $6 \times 6$  'lık noktalara ayrıldığında bütün kapula aileleri veri setine uygun bulunmamıştır. Dolayısıyla 1000 örnek çapı için veriyi  $4 \times 4$  'lük çeyrekliklere ayırmanın daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir.

Dolati ve Úbeda-Flores (2009) tarafından önerilen sıra istatistiklerinin marjinal dağılımları ile elde edilmiş kapulanın çarpım kapulası ile doğrusal bir kombinasyonu oluşturularak yeni bir karma kapula elde edilmiştir. Elde edilen yeni karma kapulanın bilinen önemli kapulalarla ilişkileri, simetri yapısı, sıralama özelliği, kadran bağımlılığı, uyumu ve Kendall'ın  $\tau$ 'su ve Spearman'ın  $\rho$ 'su için yeni sınırları elde edilmiştir. Negatif kadran bağımlı olduğu ispatlanan yeni karma kapula FGM kapulasına uygulanmıştır. FGM kapulasının yeni formu için Kendall'ın  $\tau$ 'su ve Spearman'ın  $\rho$ 'su hesaplanmıştır. FGM kapulası için Kendall'ın  $\tau$ 'su ve Spearman'ın  $\rho$ 'su sırasıyla  $[-2/9, 2/9]$  ve  $[-1/3, 1/3]$  değerleriyle sınırlıyken yeni form için Kendall'ın  $\tau$ 'su ve Spearman'ın  $\rho$ 'su sırasıyla  $[-0,513, 0]$  ve  $[-0,3492517, 0]$  aralıklarında bulunarak negatif yönde daha güçlü bir bağımlılık yapısı elde edilmiştir.

FGM kapulasının yeni formu parametre sınırlarını aşmayacak şekilde farklı alfa olasılıkları ile negatif korelasyona uygun olan kapulalar ile karşılaştırılmıştır. Bunlar FGM kapulası, Gaussian kapulası ve Frank kapulasıdır. Burada modele en uygun kapulayı bulmak için *AIC* ve *BIC* kullanılmıştır.

Kendall'ın  $\tau$ 'su  $\tau = -0,0476$  olduğunda, en küçük *AIC* ve *BIC* değerine sahip kapula,  $\alpha = 0,4$  olduğunda yeni FGM kapulası bulunmuştur, dolayısıyla en uygun kapula olarak belirlenir. Daha sonra Gaussian kapula, FGM kapula,  $\alpha = 0,2$  olduğunda yeni FGM kapula ve son olarak en zayıf kapula Frank kapulası olarak tespit edilmiştir. Burada  $\alpha = 0,4$  iken yeni FGM kapulası, FGM kapuladan daha iyi sonuç vermiştir.

Kendall'ın  $\tau$ 'su  $\tau = -0,1144$  olduğunda, en küçük *AIC* ve *BIC* değerine sahip kapula  $\alpha = 0,4$  olduğunda yeni FGM kapulasıdır, dolayısıyla en uygun kapula olarak belirlenir. Daha sonra Frank kapulası, FGM kapula,  $\alpha = 0,6$  olduğunda yeni FGM kapula, Gaussian kapula ve son olarak en zayıf kapula  $\alpha = 0,9$  olduğunda yeni FGM kapula olarak tespit edilmiştir. Burada alfa olasılığı arttıkça yeni FGM kapula için sonuçlar kötüleşmiştir. Yeni FGM kapulası  $\alpha = 0,4$  olduğunda, FGM kapuladan daha iyi sonuç vermiştir.

Kendall'ın  $\tau$ 'su  $\tau = -0,2100$  olduğunda en küçük *AIC* ve *BIC* değerine sahip kapula Gaussian kapulası bulunmuştur, dolayısıyla en uygun kapula olarak belirlenir. Daha sonra Frank kapulası,  $\alpha = 0,7$  olduğunda yeni FGM kapula,  $\alpha = 0,8$  olduğunda yeni FGM kapula,

$\alpha = 0,9$  olduğunda yeni FGM kapula ve son olarak en zayıf kapula FGM kapula olarak tespit edilir. Burada yine alfa olasılığı arttıkça yeni FGM kapula için sonuçlar kötüleşmiştir. Ayrıca yeni FGM kapulası tüm durumlarda FGM kapulasından daha iyi bulunmuştur.

Kendall'ın  $\tau$ 'su  $\tau = -0,2561$  iken FGM kapulasının parametre aralığı  $[-1,1]$  ve Kendall  $\tau$  değeri  $[-2/9,2/9]$  değerleri arasında olduğu için burada kullanılamaz. Dikkat edilmelidir ki yeni FGM kapulası negatif korelasyonda daha yüksek sınırlara sahip olduğu için belirli alfa olasılık değerlerinde parametre değeri  $[-1,1]$  olacak şekilde kullanılmaya devam edilebilmiştir. Burada en küçük *AIC* ve *BIC* değerine sahip kapula Gaussian kapulası bulunmuştur, dolayısıyla en uygun kapula olarak belirlenir. Daha sonra Frank kapulası,  $\alpha = 0,8$  olduğunda yeni FGM kapula ve son olarak en zayıf kapula  $\alpha = 0,9$  olduğunda yeni FGM kapula olarak tespit edilir. Yine burada alfa olasılığı arttıkça yeni FGM kapula için sonuçlar kötüleşmiştir.

Kendall'ın  $\tau$ 'su  $\tau = -0,3087$  olduğunda, FGM kapulası yine parametre sınırının dışında olduğu için kullanılamamıştır. Burada en küçük *AIC* ve *BIC* değerine sahip kapula Gaussian kapulası bulunmuştur, dolayısıyla en uygun kapula olarak belirlenir. Daha sonra  $\alpha = 0,9$  olduğunda yeni FGM kapula ve son olarak en zayıf kapula Frank kapulası olarak tespit edilmiştir.

Son olarak Gaussian, Frank, FGM ve yeni FGM kapulasından rastgele değişken üretilerek saçılım grafikleri elde edilmiştir. Grafikler incelendiğinde yeni FGM kapulasından elde edilen  $(u, v)$  çiftlerinin negatif bağımlılığı diğer kapulalara göre daha güçlü bir şekilde yansıttığı, özellikle Kendall  $\tau$ 'nun mutlak değerce küçük değerleri için güçlü bir bağımlılık gösterdiği tespit edilmiştir.

FGM kapulasının yeni oluşturulan formu için değişkenler arasında negatif korelasyon sözkonusu olduğunda mutlak değerce küçük korelasyonlarda karşılaştırmada kullanılan kapulalardan daha iyi sonuç verdiği bir çok durumda da FGM kapulasından daha iyi sonuç verdiği tespit edilmiştir. Negatif korelasyonlar mutlak değerce arttığında yeni FGM kapulasının küçük alfa olasılıklarında daha iyi sonuçlar verdiği, alfa olasılığı arttıkça sonuçların kötüleştiği tespit edilmiştir. Yeni karma kapula negatif kadran bağımlı olduğu için FGM kapulasına uygulandığı zaman korelasyonu negatif yönde güçlendirmiştir ve FGM kapulasına göre mutlak değerce daha yüksek korelasyonlarda kullanılabilir.

Dolayısıyla FGM kapulasının yeni formu değişkenler arasında negatif bağımlılık söz konusu olduğunda kullanılmak üzere önerilmektedir.



## KAYNAKLAR

- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(6), 716-723.
- Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N. (1992). *A first course in order statistics*. New York: John Wiley&Sons, 9-21.
- Avérous, J., Genest, C. and Kochar, S.C. (2005). On the dependence structure of order statistics. *Journal of Multivariate Analysis*, 94(1), 159–171.
- Bairamov, I. and Kotz, S. (2000). On local dependence function for multivariate distributions. *New Trends in Probability and Statistics*, 5, 27–44.
- Bairamov, I., Kotz, S. and Bekçi, M. (2001). New generalized Farlie-Gumbel- Morgenstern distributions and concomitants of order statistics. *Journal of Applied Statistics*, 28(5), 521-536.
- Bayramoglu, K. and Bayramoglu (Bairamov), I. (2014). Baker-Lin-Huang type bivariate distributions based on order statistics. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 43(10-12), 1992–2006.
- Chen, YP. (2007). A note on the relationship between Spearman's  $\rho$  and Kendall's  $\tau$  for extreme order statistics. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137(7), 2165-2171.
- de la Horra, J. and Fernandez, C. (1995). Sensivity to prior independence via Farlie-Gumbel-Morgenstern model. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 24(4), 987-996.
- Dolati, A. and Úbeda-Flores, M. (2009). Constructing copulas by means of pairs of order statistics. *Kybernetika*, 45(6), 992-1002.
- Embrechts, P., Lindskog, F. and McNeil, A. (2003). Modeling dependence with copulas and applications to risk management. In S.T. Rachev, editor, *Handbook of Heavy Tailed Distribution in Finance*, North Holland, Elsevier, 357-360.
- Genest, C. and Rivest, L. P. (1993). Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88(3), 1034-1043.
- Ghalibaf, M. B. (2016). Dependent structure of extreme order statistics. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 86(14), 2846-2855.
- Hoeffding, W. (1940). Masstabinvariante korrelationstheorie. *Schriften des mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universitat Berlin*, 5(3), 179-233.
- Huang, J.S. and Kotz, S. (1999). Modifications of the Farlie-Gumbel-Morgenstern distributions, a tough hill to climb. *Metrika*, 49(2), 135-145.



- Jogdeo, K. (1982). Concepts of dependence. In Kotz, S., Johnson NL (eds), *Encyclopedia of Statistical Sciences*, New York, John Wiley and Sons, 324-334.
- Lai, C.D. and Xie, M. (2000). A new family of positive quadrant dependent bivariate distributions. *Statistics & Probability Letters*, 46(4), 359-364.
- Li, D.Q., Tang, X.S., Phoon, K.K. and Chen, Y.F. (2013). Bivariate simulation using copula and its application to probabilistic pile settlement analysis. *International Journal Numerical Analytical Methods Geomechanics*, 37(6), 597-617.
- Li, X. and Li, Z. (2007). Proof of a conjecture on Spearman's  $\rho$  and Kendall's  $\tau$  for sample minimum and maximum. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137(1), 359-361.
- Nelsen, R.B. (2006). *An Introduction to Copulas* (İkinci Baskı). New York: Springer, 7-211.
- Rodríguez-Lallena, J.A. and Úbeda-Flores, M. (2004). A new class of bivariate copulas. *Statistics & Probability Letters*, 66(3), 315-325.
- Schmitz, V. (2004). Revealing the dependence structure between  $X_{(1)}$  and  $X_{(n)}$ . *Journal of Statistical Planning and Inference*, 123(1), 41-47.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *The annals of Statistics*, 6(2), 461-464.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de repartitiona n dimesions et leursmarges. *Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris*, 8, 229-231.
- Yantis, S., Meyer, D.E. and Keith Smith, J.E. (1991). Analyses of multinomial mixture distributions new tests for stochastic models of cognition and action. *Psychological Bulletin*, 110( 2), 350-374.

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : BAŞ KAMAN, Ferhan  
 Uyuğu : T.C.  
 Doğum tarihi ve yeri : 05.07.1987, Antalya  
 Medeni hali : Evli  
 Telefon : 0(382) 288 39 37  
 e-posta : basferhan@gmail.com



Eğitim Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Doktora	Gazi Üniversitesi/ İstatistik Bölümü	Devam ediyor
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/ İstatistik Bölümü	2013
Lisans	Ondokuz Mayıs Üniversitesi/ İstatistik Bölümü	2011
Lise	Fevzi Alaettinoğlu Lisesi	2005

### İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2014- Halen	Aksaray Üniversitesi	Öğretim Görevlisi

### Yabancı Dili

İngilizce

### Yayımlar

1. Baş Kaman, F., Erbaş, S., Olmuş, H. (2017). Kategorik verilerde kümeleme için farklı algoritmaların karşılaştırılması. *Sinop Üniversitesi Fen bilimleri Dergisi*. (Kabul edildi.)

### Hobiler

Tenis, Yüzme, kitap okuma



*GAZİ GELECEKTİR..*