T.C.

NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İLKÖĞRETİM ANABİLİM DALI

MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİLİKLER ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Canan ÇAKIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
PROF.DR. EŞREF HATIR

Konya–2015

T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

BİLİMSEL ETİK SAYFASI

Öğrencinin	Adı Soyadı	CANAN ÇAKIR
	Numarası	098302051005
	Ana Bilim / Bilim Dalı	İLKÖĞRETİM/Matematik Eğitimi
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tezin Adı	İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİLİKLER ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Bu tezin proje safhasından sonuçlanmasına kadarki bütün süreçlerde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini, tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel kurallara uygun olarak atıf yapıldığını bildiririm.

Canan ÇAKIR

T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

KONYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ KABUL FORMU

Öğrencinin		
	Adı Soyadı	CANAN ÇAKIR
	Numarası	098302051005
	Ana Bilim / Bilim Dalı	İLKÖĞRETİM/Matematik Eğitimi
	Programı	Tezli Yüksek Lisans
	Tez Danışmanı	Prof. Dr. Eşref HATIR
	Tezin Adı	İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİLİKLER ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

Yukarıda adı geçen öğrenci tarafından hazırlanan İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİLİKLER ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA başlıklı bu çalışma 02.../.11.../.2015 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunarak, jürimiz tarafından yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Ünvanı, Adı Soyadı	Danışman ve Üyeler	İmza
Prof. Dr. Eşref HATIR	Danışman	
Doç. Dr. Aynur KESKİN KAYMAKCI	Üye	
Doç. Dr. Allaguly GURBANLYEV	Üye	

Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi
A1-Blok 42090 Meram Yeni Yol /Meram /KONYA
Telefon: (0 332) 324 7660 Faks : 0 332 324 5510
Elektronik Ağ: www.konya.edu.tr E-Posta: ebil@konya.edu.tr

TEŞEKKÜR

Öncelikle lisans ve yüksek lisans eğitimimde bilgi ve tecrübesiyle yol gösteren sayın hocam Prof. Dr. Eşref Hatır'a tez çalışmama verdiği destekten dolayı teşekkürü borç bilirim.

Çalışmamda bana manevi destek olan aileme, Konya'daki ailem olan Fevzi Şirin ve ailesine, eşim Arif Çakır'a minnetimi ifade etmek isterim.

Canan ÇAKIR

T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin	Adı Soyadı	CANAN ÇAKIR
	Numarası	098302051005
	Ana Bilim / Bilim Dalı	İLKÖĞRETİM/Matematik Eğitimi
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tezin Adı	İDEAL TOPOLOJİK UZAYLARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİLİKLER ÜZERİNE BİR ARAŞTIRMA

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde ideal topolojik uzaylarda tanımlanan bazı küme çeşitleri ve özellikleri incelenip, yorumlandı.

İkinci bölümde, ilk olarak $D_I(c,\delta_p)$-küme ve δ-pre-I-açık küme olarak adlandırılan kümeler, ikinci olarak δ^*-t-küme ve δ^*-B-küme olarak adlandırılan kümeler tanımlanıp özellikleri incelendi ve diğer küme çeşitleri ile bağlantıları örneklerle ele alındı.

Üçüncü bölümde sürekliliğin yeni dağılımları elde edildi. Bunun için $D_I(c,\delta_p)$-süreklilik, δ-I-almost süreklilik ve δ^*-B-süreklilik kavramları tanımlanıp sürekliliğin iki yeni dağılımı elde edildi.

Anahtar Kelimeler: **$D_I(c,\delta_p)$-küme, δ-pre-I-açık küme, δ^*-B-küme, $D_I(c,\delta_p)$-süreklilik, δ-I-almost süreklilik**

T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

Öğrencinin		
	Adı Soyadı	CANAN ÇAKIR
	Numarası	098302051005
	Ana Bilim / Bilim Dalı	İLKÖĞRETİM/Matematik Eğitimi
	Programı	Tezli Yüksek Lisans ■ Doktora □
	Tezin İngilizce Adı	A RESEARCH OF GENERALIZED CONTINUITY IN IDEAL TOPOLOGICAL SPACES

SUMMARY

This study consists of three parts. In the first part, some types of sets that are defined in ideal topological spaces and their features were researched and interpreted.

In the second part , firstly the sets called $D_I(c,\delta_p)$-set and δ-pre-I-set were identified, secondly the features of the sets called δ^*-t-set and δ^*-B-set were researched and the connections with the other types of sets were examplified.

In the third part the new decompositions of continuity were obtained. For this purpose two new decompositions of continuity defining $D_I(c,\delta_p)$-continuity, δ-I-almost continuity and δ^*-B-continuity were obtained.

Key Words: $D_I(c,\delta_p)$ set, δ-pre-I-open set, δ^*-B-set, $D_I(c,\delta_p)$ continuity, δ-I-almost continuity

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

GİRİŞ

1933 yılında Kuratowski (Kuratowski, 1933), ideal kavramı yardımıyla bir topolojik uzayda lokal fonksiyon tanımını vermiştir ve bu fonksiyonun özelliklerini incelemiştir. Ardından 1945 yılında Vaidyanathaswamy (Vaidyanathaswamy, 1945: 51-61) lokal fonksiyon kavramından yararlanarak bir kapanış işlemi tanımlamıştır ve kapanış işlemi ile elde ettiği kapalı kümelerden yeni bir topoloji oluşturmuştur. 1964 yılında Hayashi (Hayashi, 1964: 205-215) kendi adını verdiği yeni bir uzay tanımlamıştır. Daha sonra 1975 yılında Samuels (Samuels, 1975: 409-416) idealleri değiştirmek suretiyle yeni araştırmalar yapmıştır. Janković ve Hamlet (Janković ve Hamlet, 1990: 295-310) lokal fonksiyon kavramı ile ilgili o zamana kadar yapılan tüm çalışmaları ayrıntılı bir şekilde incelemişlerdir ve bu kavramla ilgili yeni özellikler elde etmişlerdir. En genel anlamda, bir f fonksiyonunun sürekliliği literatürde şöyle ifade edilir:

(X,τ) ve (Y,φ) topolojik uzayları ile $f:(X,\tau)\to(Y,\varphi)$ fonksiyonu verilsin. Eğer bir $x\in X$ noktası ve $f(x)$ noktasının her $V\subset Y$ komşuluğu için $f(U)\subset V$ olacak şekilde x noktasının bir U komşuluğu varsa, f fonksiyonuna x noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu her $x\in X$ noktasında sürekli ise, bu takdirde f fonksiyonuna süreklidir denir.

Genelleştirilmiş süreklilik kavramları üzerine yapılan ilk temel çalışmalar Fomin (Fomin, 1943: 471-480) tarafından 1943 yılında tanımlanan θ-süreklilik ile başlamıştır. Sonra 1961 yılında Levine (Levine, 1961) zayıf süreklilik kavramını tanımlamıştır. Buna göre her sürekli fonksiyon θ-sürekli ve zayıf süreklidir, fakat tersi her zaman doğru değildir. Ayrıca her θ-sürekli fonksiyon zayıf süreklidir.

1990 yılında Janković ve Hamlet (Janković ve Hamlet, 1990: 295-310) X kümesi üzerinde bir I ideali ve bir τ topolojisi yardımıyla elde edilen ideal topolojik uzayda I-açık küme kavramını tanımlamışlardır. Bu çalışmadan sonra almost-I-açık, α-I-açık, semi-I-açık, β-I-açık küme kavramları elde edilmiş ve sürekliliğin yeni dağılımları elde edilmiştir. Bu çalışmanın amacı

δ-I-almost-süreklilik, $D_I(c, \delta_p)$-süreklilik ve δ^*-B-süreklilik kavramlarından yararlanarak sürekliliğin yeni dağılımlarını elde etmektir.

1. BÖLÜM

İDEAL TOPOLOJİK UZAY VE İDEAL TOPOLOJİK UZAYDA VERİLEN BAZI KÜME ÇEŞİTLERİNİN İNCELENMESİ

Bu bölümde, çalışma için gerekli olan bazı temel kavramlar ile genelleştirilmiş kümeleri incelenecektir.

1. 1. İdeal Topolojik Uzay

1. 1. 1. Tanım (Kuratowski, 1933)

Boş olmayan bir X kümesi verilsin. $P(X)$ kuvvet kümesi olmak üzere, boş olmayan bir $I \subset P(X)$ ailesi,

a) $A \in I$ ve $B \subset A$ ise, $B \in I$

b) $A, B \in I$ ise, $(A \cup B) \in I$

şartlarını sağlıyorsa, bu takdirde I ailesine, X kümesi üzerinde **ideal** denir.

1. 1. 2. Tanım (Kuratowski, 1933)

(X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Ayrıca I ailesi, X kümesi üzerinde bir ideal olsun. Bu takdirde, $A^*(I, \tau)$ =$\{x \in X \mid \forall\, U \in N_{(X)}$ için, $U \cap A \notin I\}$ kümesine, A kümesinin I ideali ve τ topolojisine bağlı **lokal fonksiyonu** denir. Bu çalışmada, karışıklığa neden olmadıkça, $A^*(I, \tau)$ gösterimi yerine, A^* gösterimi kullanılacaktır.

(X, τ) topolojik uzay olsun. X kümesi üzerinde bir I ideali ve $A, B \subset X$ kümeleri verilsin. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler sağlanır.

a) Eğer $A \subset B$ ise, $A^* \subset B^*$

b) $A^* = (A^*)^- \subset A^-$

c) $(A^*)^* \subset A^*$

d) $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$

e) $(A \cap B)^* \subset A^* \cap B^*$

f) Eğer $U \in \tau$ ise, $U \cap A^* \subset (U \cap A)^*$

Vaidyanathaswamy (Vaidyanathaswamy, 1945: 51-61) herhangi bir $A \subset X$ alt kümesi için, $A^{-*} = A \cup A^*$ şeklinde tanımlanan $Cl^*: P(X) \to P(X)$ fonksiyonunun, Kuratowski kapanış aksiyomlarını sağladığını göstermiştir.

1. 1. 3. Tanım (Janković ve Hamlet, 1990: 295-310)

(X, τ) topolojik uzayı ve X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. I ideali ile birlikte verilen (X, τ) topolojik uzayına, **ideal topolojik uzay** denir ve (X, τ, I) şeklinde gösterilir.

1. 1. 4. Tanım (Vaidyanathaswamy,1960)

(X, τ) topolojik uzayı ve X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Bu takdirde, $\tau^*(I) = \{U \subset X \,\big|\, (X - U)^{-*} = (X - U)\}$ şeklinde tanımlanan $\tau^*(I)$ ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji belirtir. Bu topoloji τ topolojisinden daha ince bir topolojidir. Janković ve Hamlett(Janković ve Hamlet, 1990: 295-310), minimal ideal $I = \{\emptyset\}$ ile maksimal ideali $I = P(X)$ kullanarak aşağıdaki sonuca ulaşmışlardır.

(1) $I = \{\emptyset\}$ için $A^* = A$ ve $A = A^{-*}$ olduğundan, $\tau^*(I) = \tau$

(2) $I = P(X)$ için $A^* = \emptyset$ ve $A = A^{-*}$olduğundan, $\tau^*(I) = P(X)$

Ayrıca, tanımlanabilecek diğer idealler bu iki ideal arasında yer aldığından, (1) ve (2) sonuçlarından faydalanarak o ideallere karşılık gelen $\tau^*(I)$ topolojileri ile ilgili aşağıdaki bağıntının bulunması açıktır.

(X,τ) topolojik uzayı verilsin. X kümesi üzerindeki her I ideali için, $\{\emptyset\} \subset I \subset P(X)$ olduğundan, $\tau = \tau^*(\{\emptyset\}) \subset \tau^*(I) \subset \tau^*\big(P(X)\big) = P(X)$ elde edilir. Yine X kümesi üzerinde $I \subset J$ olacak şekilde I ve J gibi iki ideal verildiğinde, $\tau^*(I) \subset \tau^*(J)$ bağıntısı bulunur. $\tau^*(I)$ topolojisinin topoloji tabanı da şöyle verilmiştir.

1. 1. 5. Tanım (Vaidyanathaswamy,1960)

(X,τ) topolojik uzayı ve X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Bu takdirde, $\beta(I,\tau) = \{U \setminus I \;\big|\; U \subset \tau, I \in \boldsymbol{I}\}$ ailesi, $\tau^*(I)$ topolojisi için bir tabandır.

İdeal topolojik uzaylarda yapılan çalışmalar neticesinde bazı özel uzayların tanımlanması da sağlanmıştır. Bu uzayların bazıları aşağıda ele alınmıştır.

1. 1. 6. Tanım (Samuels, 1975: 409-416)

(X,τ,I) ideal topolojik uzayında $\tau \cap I$ = $\{\emptyset\}$ ise, bu takdirde (X,τ,I) ideal topolojik uzayına Samuels uzayı denir.

1. 1. 7. Tanım (Hayashi, 1964: 205-215)

(X,τ,I) ideal topolojik uzayı verilsin. Eğer $X = X^*$ ise bu takdirde (X,τ,I) ideal topolojik uzayına Hayashi uzayı denir.

Janković ve Hamlett (Janković ve Hamlet, 1990: 295-310) Hayashi uzayı ile Samuels uzayı kavramlarının çakışık olduğunu göstermişlerdir ve bu iki kavramı, Hayashi-Samuels uzayı olarak adlandırmışlardır. Ayrıca, bu uzayı karakterize eden bazı özellikleri de aşağıdaki gibi elde etmişlerdir.

1. 1. 1. Önerme (Janković ve Hamlet, 1990: 295-310)

(X, τ) topolojik uzayı ve X kümesi üzerinde bir I ideali verilsin. Bu takdirde, aşağıdaki özellikler birbirine denktir.

a) $X = X^*$

b) $\tau \cap I = \{\emptyset\}$

c) Her $U \in \tau$ kümesi için, $U \subset U^*$

1. 2. İdeal Topolojik Uzaylarda Bazı Küme Çeşitleri ve Özellikleri

Bu kesimde, literatürde (X, τ) topolojik uzayında ve (X, τ, I) ideal topolojik uzayında tanımlanan bazı küme çeşitleri incelenip yorumlanacaktır.

1. 2. 1. Tanım

(X, τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin.

a) $A \subset ((A^{\circ})^{-})^{\circ}$ ise, A kümesine α-açık küme(Njastad, 1965: 961-970),

b) $A \subset (A^{\circ})^{-}$ ise, A kümesine semi-açık küme (Levine, 1963: 36-41),

c) $A \subset (A^{-})^{\circ}$ ise, A kümesine pre-açık küme (Mashhour, 1982: 47-53),

d) $A \subset ((A^{-})^{\circ})^{-}$ ise, A kümesine β-açık küme (Abd E.M. El-Deeb, Mahmoud, 1983: 77-90) denir.

(X, τ) topolojik uzayında verilen yukarıdaki tanımda geçen küme çeşitleri, benzer şekilde (X, τ, I) ideal topolojik uzayında aşağıdaki tanımda verilmiştir.

1. 2. 2. Tanım

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ kümesi verilsin.

a) $A \subset ((A^{\circ})^{-*})^{\circ}$ ise, A kümesine α-I-açık küme (Hatır ve Noiri, 2002: 341-349),

b) $A \subset (A^{\circ})^{-*}$ ise, A kümesine semi-I-açık küme (Hatır ve Noiri, 2002: 341-349),

c) $A \subset (A^{-*})^{\circ}$ ise, A kümesine pre-I-açık küme (Dontchev ve Przemski, 1996),

d) $A \subset ((A^{-*})^{\circ})^{-}$ ise, A kümesine β-I-açık küme (Hatır ve Noiri, 2002: 341-349) denir.

Przemski, (Przemski, 1993: 93-98) Dontchev ve Przemski (Dontchev ve Przemski, 1996: 109-120) aşağıdaki küme çeşitlerini tanımlayıp bu kümelerden yararlanarak açık bir kümenin dolayısıyla sürekliliğin yeni dağılımlarını elde etmişlerdir.

1. 2. 3. Tanım

(X, τ) topolojik uzayı ve herhangi bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer,

a) $A^{\circ} = ((A^{\circ})^{-})^{\circ}$ ise, A kümesine $D(c, \alpha)$-küme (Przemski, 1993: 93-98)

b) $A^{\circ} = A \cap (A^{\circ})^{-}$ ise, A kümesine $D(c, s)$-küme (Przemski, 1993: 93-98)

c) $A^{\circ} = A \cap (A^{-})^{\circ}$ ise, A kümesine $D(c, p)$-küme (Przemski, 1993: 93-98)

d) $A \cap ((A^{\circ})^{-})^{\circ} = A \cap (A^{-})^{\circ}$ ise, A kümesine $D(\alpha, p)$-küme (Przemski, 1993: 93-98)

e) $A^{\circ} = A \cap ((A^{-})^{\circ})^{-}$ ise, A kümesine $D(c, \beta)$-küme (Dontchev ve Przemski, 1996: 109-120)

f) $A \cap ((A^{\circ})^{-})^{\circ} = A \cap ((A^{-})^{\circ})^{-}$ ise, A kümesine $D(\alpha, \beta)$-küme denir. (Dontchev ve Przemski, 1996: 109-120)

1. 2. 4. Tanım (Velićko, 1968: 103-118)

(X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin.

a) $A = (A^-)^\circ$ ise, A kümesine regüler açık

b) $A = (A^\circ)^-$ ise, A kümesine regüler kapalı denir.

1. 2. 5. Tanım (Velićko, 1968: 103-118)

(X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. $\forall x \in A$ noktası için, $x \in G \subset A$ olacak şekilde bir regüler açık G kümesi varsa A kümesine δ-açık küme denir. δ-açık kümenin tümleyeni δ-kapalıdır. x noktasını ihtiva eden her U açık kümesi için eğer $(U^-)^\circ \cap A \neq \emptyset$ ise, $x \in X$ noktası A kümesinin δ-kapanış noktası olarak adlandırılır. Bütün δ-kapanış noktalarının kümesi A kümesinin δ-kapanışını oluşturur ve $A^{-\delta}$ şeklinde gösterilir. A kümesinin δ-içi ise, A kümesinin ihtiva ettiği X'deki bütün regüler açık kümelerin birleşimidir ve A^{δ° şeklinde gösterilir. Eğer $A^{\delta^\circ} = A$ ise, A kümesi δ-açıktır.

δ-açık kümeler bir topoloji oluşturur. Bu topoloji τ^δ ile gösterilir. Bu topolojiye göre her δ-açık küme açık bir küme olduğundan, $\tau^\delta \subset \tau \subset \tau^*$ elde edilir.

1. 2. 1. Önerme (Velićko, 1968: 103-118)

(X, τ) topolojik uzayı ve $A, B \subset X$ alt kümesi verilsin. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

a) $A^- \subset A^{-\delta}$

b) $A \subset B$ ise, $A^{-\delta} \subset B^{-\delta}$

c) $(A \cap B)^{-\delta} \subset A^{-\delta} \cap B^{-\delta}$

d) $(A \cup B)^{-\delta} = A^{-\delta} \cup B^{-\delta}$

1. 2. 2. Önerme (Velićko, 1968: 103-118)

(X, τ) topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin.

a) A açık ise, $A^{-\delta} = A^{-}$

b) A kapalı ise, $A^{\delta^{\circ}} = A^{\circ}$dir.

Velićko tarafından verilen δ-açık kümelerden daha zayıf küme çeşitleri aşağıdaki gibi verilmiştir.

1. 2. 6. Tanım

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ kümesi verilsin.

a) $A \subset (A^{-\delta})^{\circ}$ ise, A kümesine δ-pre-açık küme (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993)

b) $A \subset ((A^{-\delta})^{\circ})^{-}$ ise, A kümesine δ-β-açık küme(Hatır ve Noiri, 2009: 205-211)

c) $A \subset ((A^{-\delta})^{\circ})^{-*}$ ise, A kümesine β^{*}-I-açık küme denir.(Ekici ve Noiri, 2009: 165-177)

δ-kapanış tanımından yararlanılarak aşağıdaki küme çeşitleri elde edilmiştir.

1. 2. 7. Tanım (Przemski, 1993: 93-98)

(X, τ) topolojik uzayı ve $A \subset X$ kümesi verilsin.

a) $A^{\circ} = A \cap (A^{-\delta})^{\circ}$ ise, A kümesine $D(c, \delta_p)$-küme,

b) $A^{\circ} = A \cap ((A^{-\delta})^{\circ})^{-}$ ise, A kümesine $D(c, \delta_\beta)$-küme,

c) $A \cap ((A^{\circ})^{-})^{\circ} = A \cap (A^{-\delta})^{\circ}$ ise, A kümesine $D(\alpha, \delta_p)$-küme,

d) $A \cap ((A^{\circ})^{-})^{\circ} = A \cap ((A^{-\delta})^{\circ})^{-}$ ise, A kümesine $D(\alpha, \delta_\beta)$-küme denir.

Przemski'nin verdiği tanımlardan yararlanılarak ideal topolojik uzayında aşağıdaki tanımlar elde edilmiştir.

1. 2. 8. Tanım (Hatır, 2002: 57-62)

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer,

a) $A^{\circ} = A \cap (A^{-*})^{\circ}$ ise, A kümesine $D_I(c, p)$-küme

b) $A^{\circ} = A \cap ((A^{\circ})^{-*})^{\circ}$ ise, A kümesine $D_I(c, \alpha)$-küme

c) $A^{\circ} = A \cap (A^{\circ})^{-*}$ ise, A kümesine $D_I(c, s)$-küme

d) $A^{\circ} = A \cap ((A^{-*})^{\circ})^{-}$ ise, A kümesine $D_I(c, \beta)$-küme denir.

1. 2. 3. Önerme (Hatır, 2002: 57-62)

(X, τ, I) ideal topolojik uzayında aşağıdaki özellikler sağlanır.

a) Her $D(c, p)$-küme, $D_I(c, p)$-kümedir.
b) Her $D(c, \alpha)$-küme, $D_I(c, \alpha)$-kümedir.
c) Her $D(c, s)$-küme, $D_I(c, s)$-kümedir.
d) Her $D(c, \beta)$-küme, $D_I(c, \beta)$-kümedir.

İspat

a) A kümesi bir $D(c, p)$-küme olsun. Bu durumda $A^{\circ} = A \cap (A^{-})^{\circ}$ eşitliği sağlanır. $A^{\circ} \subset A^{*} \cup A = A^{-*}$ olduğundan, $A^{\circ} \subset A \cap (A^{-*})^{\circ} = A \cap (A^{*} \cup A)^{\circ} \subset A \cap (A^{-} \cup A)^{\circ} = A \cap (A^{-})^{\circ}$ elde edilir. Dolayısıyla, A kümesi bir $D_I(c, p)$-kümedir.

b) A kümesi bir $D(c, \alpha)$-küme olsun. Bu durumda $A^{\circ} = A \cap ((A^{\circ})^{-})^{\circ}$ eşitliği sağlanır. Lokal fonksiyon ile ilgili özelliklerden, $A^{\circ} \subset A \cap ((A^{\circ})^{-*})^{\circ} = A \cap (A^{\circ} \cup (A^{\circ})^{*})^{\circ} \subset A \cap ((A^{\circ})^{-})^{\circ} = A^{\circ}$ elde edilir. Bu ise A kümesinin $D_I(c, \alpha)$-küme olduğunu gösterir.

c) A kümesi bir $D(c, s)$-küme olsun. Bu durumda $A^{\circ} = A \cap (A^{\circ})^{-}$ eşitliği sağlanır. Lokal fonksiyon ile ilgili özellikler kullanılarak $A^{\circ} \subset A \cap$

$(A^{\circ})^{-*} = A \cap ((A^{\circ})^{*} \cup A^{\circ}) \subset A \cap ((A^{\circ})^{-} \cup A^{\circ}) = A \cap (A^{\circ})^{-} = A^{\circ}$ eşitliği elde edilir. Bu ise A kümesinin $D_I(c,s)$-küme olduğunu gösterir.

d) A kümesi bir $D(c,\beta)$-küme olsun. Bu durumda, $A^{\circ} = A \cap ((A^{-})^{\circ})^{-}$ eşitliği sağlanır. Lokal fonksiyon ile ilgili özelliklerden, $A^{\circ} \subset A \cap ((A^{-*})^{\circ})^{-} = A \cap ((A^{*} \cup A)^{\circ})^{-} \subset A \cap ((A^{-} \cup A)^{\circ})^{-} = A \cap ((A^{-})^{\circ})^{-} = A^{\circ}$ eşitliği elde edilir. Bu ise A kümesinin $D_I(c,\beta)$-küme olduğunu gösterir.

1. 2. 1. Uyarı

1. 2. 3. Önermedeki gerektirmelerin tersleri genellikle doğru değildir. Bu durum (Hatır ve Noiri, 2009: 205-211) aşağıdaki örneklerle açıklanmıştır.

1. 2. 1. Örnek

$X = \{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,d\}, \{a,b,d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ ideali verilsin. $A = \{a, b\} \subset X$ kümesini alalım. A kümesi $D_I(c,p)$-küme, fakat $D(c,p)$-küme değildir.

Gerçekten $A^{*} = \{a,b\}^{*} = \emptyset$ ve $(A^{-*})^{\circ} = \{a\}$ olduğundan, A kümesi $D_I(c,p)$-küme, fakat $D(c,p)$-küme değildir. Ayrıca, A kümesi, $D_I(c,\beta)$-kümedir, fakat $D(c,\beta)$-küme değildir.

1. 2. 2. Örnek

$X = \{a,b,c,d\}$ kümesi ile üzerinde tanımlanan $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c,d\}, \{b,c,d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ ideali verilsin. $A = \{a,b\} \subset X$ kümesini ele alalım. A kümesi $D_I(c,\alpha)$-küme, fakat $D_I(c,s)$-küme değildir. Çünkü $((A^{\circ})^{-*})^{\circ} = (\{b\}^{-*})^{\circ} = \{b\}$, yani, A kümesi $D_I(c,\alpha)$-küme, fakat $(A^{\circ})^{-*} = (\{b\})^{-*} = \{a,b\}$ olduğundan, A kümesi $D_I(c,s)$-küme değildir.

Buraya kadar incelenen kümelerden yararlanarak açık bir kümenin dağılımları elde edilmiştir.

1. 2. 1. Teorem (Hatır, 2002: 57-62)

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Bu takdirde,

a) A kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart A kümesinin, hem α-I-açık hem de $D_I(c, \alpha)$-küme olmasıdır.

b) A kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart A kümesinin, hem pre-I-açık hem de $D_I(c, p)$-küme olmasıdır.

c) A kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart A kümesinin, hem semi-I- açık hem de $D_I(c, s)$-küme olmasıdır.

d) A kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart A kümesinin, hem β-I-açık hem de $D_I(c, \beta)$-küme olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$

1. 2. 2. Tanım ve 1. 2. 8. Tanım gereğince, her açık küme α-I-açık, pre-I-açık, semi-I-açık ve β-I-açıktır. Aynı zamanda her açık küme $D_I(c, \alpha)$, $D_I(c, p)$, $D_I(c, s)$, $D_I(c, \beta)$ kümedir. Fakat bu gerektirmelerin tersleri genellikle doğru değildir.

$\Leftarrow$

a) A kümesi α-I-açık ve $D_I(c, \alpha)$-küme olsun. Bu durumda $A \subset ((A^{\circ})^{-*})^{\circ}$ ve $A^{\circ} = A \cap ((A^{\circ})^{-*})^{\circ}$ olur, $A \subset ((A^{\circ})^{-*})^{\circ} = A^{\circ}$ olduğundan, A kümesi açık bir kümedir.

b) A kümesi pre-I-açık ve $D_I(c, p)$-küme olsun. Bu durumda $A \subset (A^{-*})^{\circ}$ ve $A^{\circ} = A \cap (A^{-*})^{\circ}$ olur. $A \subset A \cap (A^{-*})^{\circ} = A^{\circ}$ olduğundan, A kümesi açık bir kümedir.

c) A kümesi semi-I-açık ve $D_I(c, s)$-küme olsun. Bu durumda $A \subset (A^{\circ})^{-*}$ ve $A^{\circ} = A \cap (A^{\circ})^{-*}$ olur. $A \subset A \cap (A^{\circ})^{-*} = A^{\circ}$ olduğundan, A kümesi açık bir kümedir.

d) A kümesi β-I-açık ve $D_I(c,\beta)$-küme olsun. Bu durumda $A \subset ((A^{-*})^{\circ})^{-}$ ve $A^{\circ} = A \cap ((A^{-*})^{\circ})^{-}$ olur. $A \subset ((A^{-*})^{\circ})^{-} = A^{\circ}$ olduğundan, A kümesi açık bir kümedir.

1. 3. δ-t-Küme, δ-B-Küme ve Özellikleri

1. 3. 1. Tanım (Hatır ve Noiri, 2006: 281-287)

(X,τ) topolojik uzayı ve $A \subset X$ verilsin. Eğer,

a) $(A^{-})^{\circ} = A^{\circ}$ ise, A kümesine t-küme

b) $(A^{-\delta})^{\circ} = A^{\circ}$ ise, A kümesine δ-t-küme denir.

1. 3. 2. Tanım (Hatır ve Noiri, 2006: 281-287)

(X,τ) topolojik uzayı ve $A \subset X$ verilsin. Eğer,

a) $U \in \tau$ ve V kümesi t-küme olmak üzere, $A = U \cap V$ ise, A kümesine B-küme

b) $U \in \tau$ ve V kümesi δ-t-küme olmak üzere, $A = U \cap V$ ise , A kümesine δ-B-küme denir.

1. 3. 1. Önerme (Hatır ve Noiri, 2006: 281-287)

(X,τ,I) ideal topolojik uzayında aşağıdaki özellikler sağlanır.

a) Her t-küme, B-kümedir.

b) Her δ-t-küme, δ-B-kümedir.

c) Her δ-t-küme, t-kümedir.

d) Her δ-B-küme, B-kümedir.

2. BÖLÜM

$\boldsymbol{D_I(c, \delta_p)}$-KÜME, $\boldsymbol{\delta}$-PRE-$\boldsymbol{I}$-AÇIK KÜME, $\boldsymbol{\delta^*}$-$\boldsymbol{t}$-KÜME VE $\boldsymbol{\delta^*}$-$\boldsymbol{B}$-KÜME

Bu bölümde açık bir kümenin dağılımını elde edebilmek için, birinci olarak, $D(c, \delta_p)$-küme tanımından yararlanılarak $D_I(c, \delta_p)$-küme, ikinci olarak δ-pre-açık küme tanımından yararlanılarak δ-pre-I-açık küme elde edilmiştir. Üçüncü olarak, δ-t-küme ve δ-B-küme tanımından yararlanılarak, sırasıyla δ^*-t-küme ve δ^*-B-küme tanımları elde edilmiştir.

2. 1. $\boldsymbol{D_I(c, \delta_p)}$-Küme ve Özellikleri

2. 1. 1. Tanım

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. $A^{\circ} = A \cap (A^{-\delta})^{*\circ}$ ise, A kümesine $\boldsymbol{D_I(c, \delta_p)}$**-küme** denir.

$D_I(c, \delta_p)$-kümenin birinci bölümde tanımlanan küme çeşitleriyle bağlantısı aşağıda incelenmiştir.

2. 1. 1. Önerme

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi $D_I(c, \delta_p)$-küme ise, $D(c, \delta_p)$-kümedir.

İspat

A kümesi $D_I(c, \delta_p)$ küme, yani, $A \cap (A^{-\delta})^{*\circ} = A^{\circ}$ olsun. $\tau^*(I)$ topolojisi τ topolojisinden ince olduğundan, $A^{\circ} \subset A \cap (A^{-\delta})^{\circ} \subset A \cap (A^{-\delta})^{*\circ} = A^{\circ}$ elde edilir.

O halde A kümesi $D(c, \delta_p)$-kümedir.

2. 1. 1. Uyarı

2. 1. 1. Önermedeki gerektirmenin tersi genellikle doğru değildir.

2. 1. 1. Örnek

$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ ideali verilsin, $A = \{b, c\}$ olsun. A kümesi $D(c, \delta_p)$-kümedir fakat $D_I(c, \delta_p)$-küme değildir.

$A^{-\delta} = \{b, c, d\}$ ve $(A^{-\delta})^{\circ} = \{b\}$ buradan $A^{\circ} = A \cap (A^{-\delta})^{\circ}$ bulunur ki A kümesi $D(c, \delta_p)$-kümedir. τ^* topolojisi

$\tau^* = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}, \{b, d\}, \{b, c, d\}\}$ olarak bulunur.

$(A^{-\delta})^{*\circ} = \{b, c, d\}$ ve $\{b\} = A^{\circ} \neq A \cap (A^{-\delta})^{*\circ} = \{b, c\}$ bulunur ki A kümesi $D_I(c, \delta_p)$-küme değildir.

2. 1. 2. Tanım (Özcan, 2006)

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. $A^{\circ} = A \cap ((A^{-\delta})^{\circ})^{-*}$ ise, A kümesine $D_I(c, \delta_\beta)$-küme denir.

2. 1. 2. Uyarı

$D_I(c, \delta_p)$-küme ile $D_I(c, \delta_\beta)$-küme birbirinden bağımsızdır. Bu durum aşağıdaki örneklerle incelenmiştir.

2. 1. 2. Örnek

$X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{e\}, \{a\}, \{c, e\}, \{e, a\}, \{c, a\},$ $\{e, c, a\}, \{e, c, d\}, \{e, c, d, a\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{e\}, \{c\}, \{a\}, \{d\}, \{e, a\}, \{e, c\}, \{a, c\}$ $, \{a, d\}, \{e, d\}, \{c, d\}, \{e, c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, e, d\}, \{a, e, c\}, \{a, e, c, d\}\}$ ideali verilsin. $A = \{a, b\}$ olsun. A kümesi $D_I(c, \delta_\beta)$-kümedir, fakat $D_I(c, \delta_p)$-küme değildir.

$A^{-\delta} = \{a, b\}$ ve $((A^{-\delta})^{\circ})^{-*} = \{a\}$ olduğundan, $A^{\circ} = \{a\} = A \cap ((A^{-\delta})^{\circ})^{-*}$ bulunur ki, A kümesi $D_I(c, \delta_\beta)$-kümedir. τ^* topolojisi

$\tau^* = \{\emptyset, X, \{c\}, \{e\}, \{a\}, \{c,e\}, \{e,a\}, \{c,a\}, \{e,c,a\}, \{e,c,d\}, \{e,c,d,a\}, \{b,c,d,e\},$

$\{c,d\}, \{c,d,a\}, \{a,b,c,d\}, \{e,d\}, \{e,d,a\}, \{a,b,d,e\}, \{a,b,c,e\}, \{c,b,d\}, \{e,b,d\},$

$\{b,e,c\}, \{d\}, \{a,d\}, \{a,b,d\}, \{a,b,c\}, \{a,b,e\}, \{a,b\}, \{b,e\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{b\}\}$

olduğundan, $(A^{-\delta})^{*^\circ} = \{a,b\}$ ve $\{a\} = A^\circ \neq A \cap (A^{-\delta})^{*^\circ} = \{a,b\}$ bulunur. O halde A kümesi $D_I(c,\delta_p)$-küme değildir.

2. 1. 3. Örnek

$X = \{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ ideali verilsin, $A = \{c,d\}$ olsun. A kümesi $D_I(c,\delta_p)$-kümedir fakat $D_I(c,\delta_\beta)$-küme değildir. Gerçekten, τ^* topolojisi

$\tau^* = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a\}, \{b\}, \{b,c\}\{a,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{b,c,d,e\}\}$ olduğundan, $A^\circ = \{c\} = A \cap (A^{-\delta})^{*^\circ} = \{c\}$ bulunur ki, A kümesi $D_I(c,\delta_p)$-kümedir. Fakat $((A^{-\delta})^\circ)^{-*} = \{c,d,e\}$ olduğundan, $\{c\} = A^\circ \neq A \cap ((A^{-\delta})^\circ)^{-*} = \{c,d\}$ bulunur ki, A kümesi $D_I(c,\delta_\beta)$-küme değildir.

2. 1. 2. Önerme

Her $D_I(c,\delta_p)$-küme $D_I(c,p)$-kümedir.

2. 1. 3. Uyarı

2. 1. 2. Önermedeki gerektirmenin tersi genellikle doğru değildir.

2. 1. 4. Örnek

$X = \{a,b,c,d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{d\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ ideali verilsin. $A = \{b,d\}$ olsun. A kümesi $D_I(c,p)$-kümedir, fakat $D_I(c,\delta_p)$-küme değildir.

Gerçekten $A^{-*} = \{a, b, d\}$, $(A^{-*})^{\circ} = \{d\}$ ve $A^{\circ} = \{d\}$ olduğundan, $A^{\circ} = A \cap (A^{-*})^{\circ}$,yani, A kümesi, $D_I(c, p)$-kümedir. τ^* topolojisi

$\tau^* = \{\emptyset, X, \{d\}, \{c\}, \{c, d\}, \{a, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}\}$ olduğundan,

$A^{-\delta} = \{a, b, d\}$ ve $(A^{-\delta})^{*\circ} = \{a, b, d\}$ bulunur.

Yine, $\{d\}$=$A^{\circ} \neq A \cap (A^{-\delta})^{*\circ} = \{b, d\}$ olduğundan, A kümesi $D_I(c, \delta_p)$-küme değildir.

$D_I(c, \delta_p)$-kümenin $D(\alpha, \delta_p)$ ve $D(\alpha, p)$-küme ile bağlantısı aşağıda incelenmiştir.

2. 1. 3. Önerme

Her $D_I(c, \delta_p)$-küme $D(\alpha, \delta_p)$-kümedir.

İspat

2. 1. 1. Şema gereğince her $D_I(c, \delta_p)$-küme $D(c, \delta_p)$-kümedir. 2. 1. 1. Şema gereğince, her $D(c, \delta_p)$-küme $D(\alpha, \delta_p)$-kümedir. Dolayısıyla her $D_I(c, \delta_p)$-küme $D(\alpha, \delta_p)$-kümedir.

2. 1. 4. Önerme

Her $D_I(c, \delta_p)$-küme $D(\alpha, p)$-kümedir.

İspat

2. 1. 1. Şema gereğince, her $D_I(c, \delta_p)$-küme $D(c, \delta_p)$-kümedir. 2. 1. 1. Şema gereğince, her $D(c, \delta_p)$-küme, $D(\alpha, p)$-kümedir. Dolayısıyla, her $D_I(c, \delta_p)$-küme $D(\alpha, p)$-kümedir.

2. 1. 4. Uyarı

2. 1. 3. Önerme ve 2. 1. 4. Önermenin tersi doğru değildir.

2. 1. 5. Örnek

2. 1. 4. Örnekteki A kümesi $D(\alpha, p)$-kümedir ve $D(\alpha, \delta_p)$-kümedir, fakat $D_I(c, \delta_p)$-küme değildir.

Gerçekten $\{d\} = A \cap ((A^\circ)^-)^\circ = A \cap (A^{-\delta})^\circ = \{d\}$ olur ki A kümesi $D(\alpha, \delta_p)$-kümedir. Yine $\{d\} = A \cap ((A^\circ)^-)^\circ = A \cap (A^-)^\circ = \{d\}$ olur ki A kümesi $D(\alpha, p)$-kümedir. Fakat $\{d\} = A^\circ \neq A \cap (A^{-\delta})^{*\circ} = \{b, d\}$ olduğundan, A kümesi $D_I(c, \delta_p)$-küme değildir.

2. 1. 1. Teorem

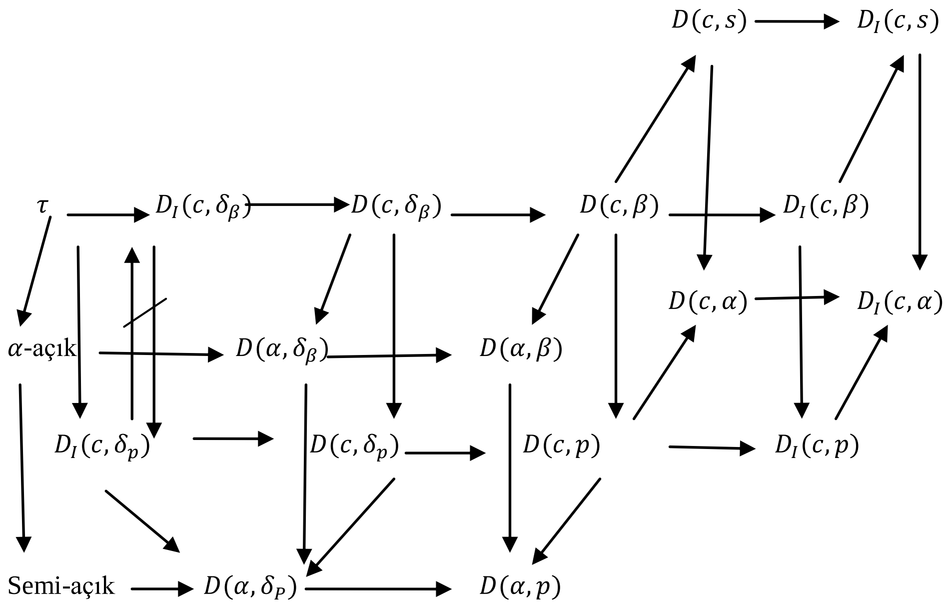
(X, τ, I) ideal topolojik uzayı verilsin. Eğer her $a \in \Delta$ için U_a , $D_I(c, \delta_p)$-küme ise, $\cup\{U_\alpha : \alpha\epsilon\Delta\}$ $D_I(c, \delta_p)$-kümedir.

İspat

Her $a \in \Delta$ için $U_a^\circ = U_a \cap ((U_a)^{-\delta})^{*\circ}$yazabiliriz. Buradan, $\bigcup_{a\in\Delta} U_a^\circ = \bigcup_{a\in\Delta} (U_a \cap ((U_a)^{-\delta})^{*\circ}) = \bigcup_{a\in\Delta}(U_a) \cap \bigcup_{a\in\Delta}((U_a)^{-\delta})^{*\circ}$ yardımıyla $(\bigcup_{a\in\Delta} U_a)^\circ = (\bigcup_{a\in\Delta} U_a) \cap ((\bigcup_{a\in\Delta} U_a)^{-\delta})^{*\circ}$ elde edilir. Dolayısıyla, $\bigcup_{a\in\Delta} U_a$ kümesi $D_I(c, \delta_p)$-kümedir.

Şimdiye kadar bahsedilen kümeler arasındaki bağlantılar (Hatır ve Caldas, 2010: 197-202) incelenmiştir.

2.1.1.Şema



2. 2. δ-Pre-I-Açık Küme ve Özellikleri

2. 2. 1. Tanım (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993)

(X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $A \subset (A^{-\delta})^{\circ}$ ise, A kümesine δ-pre-açık küme denir.

2. 2. 1. Önerme

Her açık küme δ-pre-açık kümedir.

İspat

(X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi açıksa $A \subset A^{\circ}$ yazılır.

1. 2. 1. (a) Önerme gereğince $A \subset A^{-\delta}$ olduğundan, $A \subset A^{\circ} \subset (A^{-\delta})^{\circ}$elde edilir. Dolayısıyla A kümesi δ-pre-açık kümedir.

Açık bir kümenin dağılımını elde edebilmek için δ-pre-açık küme kavramından yararlanılarak aşağıdaki tanım elde edilmiştir.

2. 2. 2. Tanım

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $\boldsymbol{A} \subset (\boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{\delta}})^{*\circ}$ ise, A kümesine **$\boldsymbol{\delta}$-pre-$\boldsymbol{I}$-açık küme** denir.

2. 2. 2. Önerme

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer A kümesi δ-pre-açık küme ise, δ-pre-I-açık küme olur.

İspat

$\tau^*(I)$ topolojisi τ topolojisinden ince olduğundan sonuç açıktır.

2. 2. 1. Uyarı

Aşağıdaki örnekte görüleceği gibi 2. 2. 2. Önermenin tersi genellikle doğru değildir.

2. 2. 1. Örnek

$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ ideali verilsin. $A = \{b, c\}$ olsun. τ^* topolojisi

$\tau^* = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}\}$ olarak bulunur.

O halde $A^{-\delta} = \{b, c, d\}$ ve $(A^{-\delta})^{*\circ} = \{b, c, d\}$ olduğundan $A \subset (A^{-\delta})^{*\circ}$ bulunur. A kümesi δ-pre-I-açık kümedir. Fakat $(A^{-\delta})^{\circ} = \{b\}$ ve $A \not\subset (A^{-\delta})^{\circ}$ olduğundan, A kümesi δ-pre-açık küme değildir.

2. 2. 3. Önerme

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer A kümesi regüler açık ise, δ-pre-I-açık kümedir.

İspat

Regüler açık küme açık bir küme olduğundan, ispat açıktır.

2. 2. 3. Tanım

(X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $X - A$ kümesi δ-pre-I-açık ise, A kümesine δ-pre-I-kapalı denir.

2. 2. 4. Önerme

(X,τ,I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesinin δ-pre-I-kapalı olması için gerek ve yeter şart $(A^{\delta^\circ})^{-*} \subset A$ olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$

A kümesi δ-pre-I-kapalı olsun. $X - A$ kümesi δ-pre-I-açık kümedir yani

$X - A \subset ((X - A)^{-\delta})^{*\circ} = X - (A^{\delta^\circ})^{-*}$olup,

$(A^{\delta^\circ})^{-*} \subset A$ elde edilir.

$\Leftarrow$

$(A^{\delta^\circ})^{-*} \subset A$ olsun. Bu takdirde

$X - A \subset X - (A^{\delta^\circ})^{-*} = ((X - A)^{-\delta})^{*\circ}$ ve

$X - A \subset ((X - A)^{-\delta})^{*\circ}$ olup, $X - A$ kümesi δ-pre-I-açıktır. O halde A kümesi δ-pre-I-kapalıdır.

2. 2. 4. Tanım (Mashhour, Abd E.M., El-Deeb, 1982: 47-53)

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. $A^* \subset A$ ise, A kümesine τ^*-kapalı denir.

2. 2. 5. Önerme

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesi δ-pre-I-kapalı ve δ-açık ise, τ^*-kapalıdır.

İspat

A kümesi δ-pre-I-kapalı olsun. Bu takdirde $(A^{\delta^\circ})^{-*} \subset A$ ve aynı zamanda A kümesi δ-açık olduğundan, $A^* = (A^{\delta^\circ})^* \subset A^{\delta^\circ} \cup \left(A^{\delta^\circ}\right)^* = (A^{\delta^\circ})^{-*} \subset A$ bulunur. Dolayısıyla, A kümesi τ^*-kapalıdır.

2. 2. 6. Önerme

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $A \subset B \subset A^{-\delta}$ ve B kümesi δ-pre-I-açık ise, A kümesi de δ-pre-I-açıktır.

İspat

$A \subset B \subset A^{-\delta}$ bağıntısında δ-kapanış alınırsa $A^{-\delta} \subset B^{-\delta} \subset A^{-\delta}$ bulunur. Buradan $A^{-\delta} = B^{-\delta}$ olup, B kümesinin δ-pre-I-açık olmasından $A \subset B \subset (B^{-\delta})^{*\circ} = (A^{-\delta})^{*\circ}$ elde edilir. Buradan $A \subset (A^{-\delta})^{*\circ}$, yani A kümesi δ-pre-I-açıktır.

2. 2. 7. Önerme

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı verilsin, $\forall \alpha \in \Delta$ için, U_α kümeleri δ-pre-I-açık ise, $\cup\{U_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ kümesi de δ-pre-I-açıktır.

İspat

$\forall\alpha \in \Delta$ için U_α kümesi δ-pre-I-açık olsun. Bu takdirde, $U_\alpha \subset ((U_\alpha)^{-\delta})^{*\circ}$ olup, her iki yanın α üzerinden birleşimi alınırsa, $\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in\Delta}(U_\alpha)^{-\delta})^{*\circ} \subset (\bigcup_{\alpha\in\Delta}({U_\alpha}^{-\delta}))^{*\circ} \subset ((\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha)^{-\delta})^{*\circ}$ ve buradan $\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha \subset ((\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha)^{-\delta})^{*\circ}$ bulunur. Dolayısıyla, $\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha$ kümesi δ-pre-I-açıktır.

2. 2. 2. Uyarı

Herhangi iki δ-pre-I-açık kümenin kesişimi δ-pre-I-açık küme olmayabilir.

2. 2. 2. Örnek

$X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ ideali verilsin $A = \{b, d, e\}$ ve $B = \{a, d, e\}$ kümeleri δ-pre-I-açık küme olduğu halde $A \cap B = \{d, e\}$ kümesi δ-pre-I-açık küme değildir.

Gerçekten $\tau^* = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d, e\}\}$ olduğundan, $A^{-\delta} = \{a, b, d, e\}$, $(A^{-\delta})^{*\circ} = \{a, b, d, e\}$ olup, $A \subset (A^{-\delta})^{*\circ}$, yani, A kümesi δ-pre-I-açıktır.

$B^{-\delta} = \{a, b, d, e\}$, $(B^{-\delta})^{*\circ} = \{a, b, d, e\}$ olup, $B \subset (B^{-\delta})^{*\circ}$, yani, B kümesi δ-pre-I-açıktır.

$A \cap B = \{d, e\}$, $\{d, e\}^{-\delta} = \{d, e\}$ ve $(\{d, e\}^{-\delta})^{*\circ} = \emptyset$ olduğundan, $A \cap B = \{d, e\}$ kümesi δ-pre-I-açık değildir.

2. 2. 8. Önerme

(X, τ, I) ideal topolojik uzayında aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a) Her δ-pre-açık küme, β^*-I-açık küme (Ekici ve Noiri, 2009: 165-177),

b) Her δ-pre-açık küme, δ-β-açık küme (Hatır ve Noiri, 2006: 281-287),

c) Her α-açık küme, δ-pre-açık küme (Raychaudhuri ve Mukherjee: 1993),

d) Her α-açık küme, δ- pre-I-açık küme,

e) Her α-I-açık küme, δ-pre-açık küme (Raychaudhuri ve Mukherjee: 1993)

f) Her α-I-açık küme, δ-pre-I-açık kümedir.

2. 2. 3. Uyarı

2. 2. 8. Önermenin tersleri genellikle doğru değildir.

2. 2. 3. Örnek

$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ ideali verilsin. A =$\{b, c\}$ olsun. τ^* topolojisi

$\tau^* = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, d\}\}$ olarak bulunur.

A kümesi β^*-I-açık küme iken δ-pre-açık küme değildir. Gerçekten $A^{-\delta} = \{b, c, d\}$, $(A^{-\delta})^{\circ} = \{b\}$ ve $((A^{-\delta})^{\circ})^{-*} = \{b, c, d\}$ olduğundan, $A \subset ((A^{-\delta})^{\circ})^{-*}$ olup, A kümesi β^*-I-açık kümedir, fakat $A = \{b, c\} \not\subset \{b\} = (A^{-\delta})^{\circ}$ olduğundan, A kümesi δ-pre-açık küme değildir.

2. 2. 4. Örnek

2. 2. 3. Örnekte verilen A kümesi, δ-β-açık kümedir, fakat δ-pre-açık küme değildir. Gerçekten $A^{-\delta} = \{b, c, d\}$, $(A^{-\delta})^{\circ} = \{b\}$ ve $((A^{-\delta})^{\circ})^{-} = \{b, c, d\}$ dir. $A = \{b, c\} \subset \{b, c, d\} = ((A^{-\delta})^{\circ})^{-}$ olup, A kümesi δ-β-açık kümedir, fakat $A = \{b, c\} \not\subset \{b\} = (A^{-\delta})^{\circ}$ olduğundan, A kümesi δ-pre-açık küme değildir.

2. 2. 5. Örnek

$X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ ideali verilsin. $A = \{b, c\}$ olsun. A kümesi δ-pre-açık kümedir, fakat α-açık küme değildir. Gerçekten $A^{-\delta} = X$ ve $A \subset (A^{-\delta})^{\circ}$ olduğundan, A kümesi

δ-pre-açık kümedir. Fakat $((A^{\circ})^{-})^{\circ} = \emptyset$ olduğundan, A kümesi α-açık küme değildir.

2. 2. 6. Örnek

$X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ ideali verilsin. $A = \{b, d, e\}$ olsun. τ^* topolojisi

$\tau^* = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d, e\}\}$ olarak bulunur.

A kümesi δ-pre-I-açık kümedir fakat α-açık küme değildir.

Gerçekten $A^{-\delta} = \{a, b, d, e\}$ ve $(A^{-\delta})^{*\circ} = \{a, b, d, e\}$ olup, $A = \{b, d, e\} \subset \{a, b, d, e\} = (A^{-\delta})^{*\circ}$ olduğundan, A kümesi δ-pre-I-açık kümedir. Fakat $((A^{\circ})^{-})^{\circ} = \emptyset$ olduğundan, α-açık küme değildir.

2. 2. 7. Örnek

2. 2. 5. Örnekte verilen A kümesi δ-pre-açık kümedir, fakat α-I-açık küme değildir. Gerçekten $A = \{b, c\}$, $A \subset (A^{-\delta})^{\circ} = X$ olduğundan, A kümesi δ-pre-açık kümedir. Fakat $((A^{\circ})^{-*})^{\circ} = \emptyset$ olduğundan, A kümesi α-I-açık küme değildir.

2. 2. 8. Örnek

2. 2. 6. Örnekte verilen A kümesi δ-pre-I-açık kümedir, fakat α-I-açık küme değildir. Gerçekten $A^{-\delta} = \{a, b, d, e\}$ ve $(A^{-\delta})^{*\circ} = \{a, b, d, e\}$ olup, $A = \{b, d, e\} \subset \{a, b, d, e\} = (A^{-\delta})^{*\circ}$ olduğundan, A kümesi δ-pre-I-açık kümedir. Fakat $((A^{\circ})^{-*})^{\circ} = \emptyset$ olduğundan, A kümesi α-I-açık küme değildir.

2. 2. 4. Uyarı

δ- pre-I-açık küme ile δ-β-açık küme birbirinden bağımsızdır. Bu durum aşağıda örneklerle incelenmiştir.

2. 2. 9. Örnek

$X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde $\tau = \big\{\emptyset, X, \{c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\big\}$ topolojisi ve $I = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\big\}$ ideali tanımlansın ve $A = \{d, e\}$ olsun. A kümesi δ- pre-I-açık kümedir, fakat δ-β-açık küme değildir. Gerçekten τ^* topolojisi

$\tau^* = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{d, e\}, \{a, b, c\}, \{a, d, e\}, \{b, d, e\},$ $\{c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{a, b, d, e\}\}$ olarak bulunur.

Buradan $A^{-\delta} = \{d, e\}$,$(A^{-\delta})^{*\circ} = \{d, e\}$ bulunur, $A = \{d, e\} \subseteq \{d, e\} = (A^{-\delta})^{*\circ}$ olduğundan A kümesi δ- pre-I-açık kümedir. Fakat $((A^{-\delta})^{\circ})^{-} = \emptyset$ bulunur ki $A = \{d, e\} \not\subset \emptyset = \big((A^{-\delta})^{\circ}\big)^{-}$ olduğundan A kümesi δ-β-açık küme değildir.

2. 2. 10. Örnek

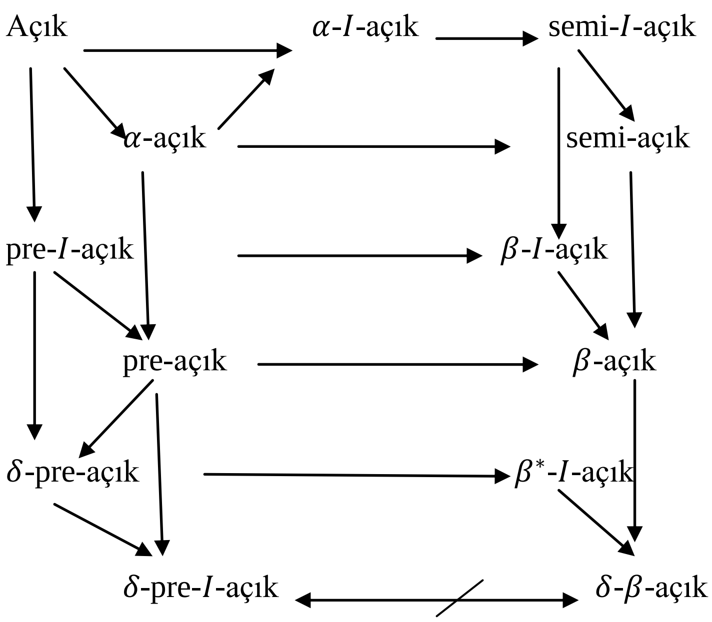
$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \big\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\big\}$ topolojisi ve $I = \big\{\emptyset, \{b\}\big\}$ ideali verilsin ve $A = \{a, b, d\}$ olsun. A kümesi δ-β-açık kümedir fakat δ- pre-I-açık küme değidir. τ^* topolojisi

$\tau^* = \big\{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c, d\}\big\}$ olarak bulunur.

O halde $A^{-\delta} = \{a, b, d\}$ ve $((A^{-\delta})^{\circ})^{-} = \{a, b, d\}$ bulunur ki $A = \{a, b, d\} \subseteq \{a, b, d\} = \big((A^{-\delta})^{\circ}\big)^{-}$ olduğundan A kümesi δ-β-açık kümedir. Fakat $(A^{-\delta})^{*\circ} = \{b\}$ olduğundan $A = \{a, b, d\} \not\subset \{b\} = (A^{-\delta})^{*\circ}$ bulunur ki A kümesi δ- pre-I-açık küme değildir.

Buraya kadar incelenen kavramlar arasındaki ilişkiler aşağıdaki şema ile verilmiştir.

2. 2. 1. Şema



2. 2. 10. Önerme

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ verilsin. Eğer $U \subset X$ ve $U \in \tau^{\delta}$ ise, $A^{-\delta} \cap U \subset (A \cap U)^{-\delta}$ dır.

İspat

Her $x \in X$ için $x \in A^{-\delta} \cap U$ olsun. x noktasını ihtiva eden her V δ-açık kümesi için $x \in V \cap U$ kümesi δ-açıktır. Buradan $V \cap U \cap A \neq \emptyset$ bulunur, yani $x \in (A \cap U)^{-\delta}$ olup, istenen elde edilir.

2. 2. 1. Teorem

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ verilsin. Eğer A kümesi δ-pre-I-açık ve B kümesi δ-açık ise, $A \cap B$ kümesi δ-pre-I-açıktır.

İspat

Hipotez gereğince, $A \subset (A^{-\delta})^{*\circ}$ ve $B = B^{\delta\circ}$ dir. Buradan,

$$A \cap B \subset (A^{-\delta})^{*\circ} \cap B^{\delta\circ}$$

$$=(A^{-\delta})^{*\circ} \cap (B^{\delta\circ})^{*\circ}$$

$$=(B^{\delta\circ} \cap A^{-\delta})^{*\circ}$$

$$\subset((A \cap B)^{-\delta})^{*\circ}$$ bulunur.

O halde $A \cap B$ kümesi δ-pre-I-açıktır.

2. 2. 11. Örnek

$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ ideali verilsin. $A = \{b, c\}$ olsun. τ^* ve τ^δ topolojileri

$\tau^* = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$

$\tau^\delta = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a\}, \{a, b\}\}$ olarak bulunur.

$(A^{-\delta})^{*\circ} = \{b\}$ olup, $A \not\subset (A^{-\delta})^{*\circ}$ olduğundan, A kümesi δ-pre-I-açık değildir. τ^δ topolojisinin elamanlarına bakıldığında, A kümesinin elemanlarını içeren yalnız X kümesi vardır yani A kümesini elde etmek için δ-açık küme olarak yalnız X kümesi ile kesişim işlemi yapılabilir, bu durumda $X \cap A = A$ olmakla beraber A kümesi δ-pre-I-açık değildir.

O halde A kümesinin δ-açık ve δ-pre-I-açık iki kümenin kesişimi şeklinde yazılamadığı görülür.

2. 2. 5. Tanım (Janković ve Hamlet, 1990: 295-310)

(X, τ, I) ideal topolojik uzay ve $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A üzerindeki alt uzay topolojisi $\tau_{|A}$ şeklinde gösterilirse, $I_{|A} = \{A \cap I \mid I \in \boldsymbol{I}\}$ A üzerindeki idealdir.

2. 2. 11. Önerme (Janković ve Hamlet, 1990: 295-310)

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve $A, B \subset X$ alt kümeleri verilsin ve $B \subset A$ olsun. Bu takdirde $B^*(\tau_A, I_A) = B^*(\tau, I) \cap A$ dır.

2. 2. 12. Önerme

(X, τ, I) ideal topolojik uzay, $U \subset X$ δ-açık alt küme ve V kümesi δ-pre-I-açık ise, $U \cap V$ kümesi U alt uzayında δ-pre-I-açıktır.

İspat

$U \in \tau^\delta$ ve V kümesi δ-pre-I-açık olsun. Buradan 2. 2. 10. Önermeyi kullanarak

$$\begin{aligned} U \cap V \subset U^{\delta^\circ} \cap (V^{-\delta})^{*\circ} &= U \cap ((U^{\delta^\circ})^{*\circ} \cap (V^{-\delta})^{*\circ}) = (U^{\delta^\circ} \cap V^{-\delta})^{*\circ_U} \\ &= (U \cap U^{\delta^\circ} \cap V^{-\delta})^{*\circ_U} \subset (U \cap (U \cap V)^{-\delta})^{*\circ_U} \\ &= ((U \cap V)^{-\delta_U})^{*\circ_U} \end{aligned}$$

elde edilir ki,

$U \cap V$ kümesi U alt uzayında δ-pre-I-açıktır.

Açık bir kümenin dağılımını aşağıdaki teoremle elde edilmiştir.

2. 2. 2. Teorem

(X, τ, I) ideal topolojik uzayında A kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart A kümesinin hem δ-pre-I-açık hem de $D_I(c, \delta_p)$-küme olmasıdır.

İspat

$\Rightarrow$

Her açık küme δ-pre-I-açık küme ve $D_I(c, \delta_p)$-kümedir. A kümesi açık olsun. $A = A^\circ$ dir. 1. 2. 1. Önerme(a) gereğince $A \subset A^{-\delta}$ sağlanır. $\tau^*(I)$ topolojisi τ topolojisinden ince olduğundan, $A^\circ \subset (A^{-\delta})^\circ \subset (A^{-\delta})^{*\circ}$ yazılabilir. $A = A^\circ$ bağıntısında her iki tarafta $(A^{-\delta})^{*\circ}$ ile kesişim işlemi yapılırsa, yani,

$(A^{-\delta})^{*\circ} \cap \overset{\circ}{A} = A \cap (A^{-\delta})^{*\circ}$ durumunda, $\overset{\circ}{A} = A \cap (A^{-\delta})^{*\circ}$ elde edilir. Dolayısıyla, A kümesi $D_I(c, \delta_p)$-kümedir.

A kümesi açık olsun, $A \subset \overset{\circ}{A}$ dir. Bu takdirde $A \subset \overset{\circ}{A} \subset (A^{-\delta})^{\circ} \subset (A^{-\delta})^{*\circ}$ olup, $A \subset (A^{-\delta})^{*\circ}$, yani, A kümesi δ-pre-I-açık kümedir.

$\Leftarrow$

A kümesi hem δ-pre-I-açık küme hem de $D_I(c, \delta_p)$-küme olsun. Bu takdirde $A \subset (A^{-\delta})^{*\circ}$ ve $\overset{\circ}{A} = A \cap (A^{-\delta})^{*\circ}$ olup, $A \subset A \cap (A^{-\delta})^{*\circ} = \overset{\circ}{A}$ elde edilir. Dolayısıyla, A kümesi açıktır.

2. 2. 4. Uyarı

$D_I(c, \delta_p)$-küme ve δ-pre-I-açık küme birbirinden bağımsızdır. Bu durum aşağıdaki örneklerle incelenmiştir.

2. 2. 12. Örnek

$X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ ideali verilsin ve $A = \{c, d\}$ olsun. A kümesi $D_I(c, \delta_p)$-kümedir fakat δ-pre-I-açık küme değildir. τ^* topolojisi

$\tau^* = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d, e\}\}$ olarak bulunur.

O halde $A^{-\delta} = \{c, d, e\}$ ve $(A^{-\delta})^{*\circ} = \{c\}$ bulunur ki $\{c\} = \overset{\circ}{A} = A \cap (A^{-\delta})^{*\circ} = \{c\}$,yani, A kümesi $D_I(c, \delta_p)$-kümedir.

Fakat $\{c, d\} = A \not\subset (A^{-\delta})^{*\circ} = \{c\}$ olduğundan, A kümesi δ-pre-I-açık küme değildir.

2. 2. 13. Örnek

$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ ideali verilsin. $A = \{b, d\}$ olsun. A kümesi δ-pre-I-açık kümedir, fakat $D_I(c, \delta_p)$-küme değildir. τ^* topolojisi

$\tau^* = \{\emptyset, X, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}\}$ olarak bulunur.

O halde $A^{-\delta} = \{a, b, d\}$ ve $(A^{-\delta})^{*\circ} = \{a, b, d\}$ bulunur ki $\{b, d\} = A \subset (A^{-\delta})^{*\circ} = \{a, b, d\}$ olduğundan, A kümesi δ-pre-I-açık kümedir.

$\{d\} = A^{\circ} \neq A \cap (A^{-\delta})^{*\circ} = \{b, d\}$ olduğundan, A kümesi $D_I(c, \delta_p)$-küme değildir.

2. 3. δ^*-t-Küme, δ^*-B-Küme ve Özellikleri

Bu kısımda, açık bir kümenin yeni bir dağılımını elde edebilmek için δ^*-t-küme ve δ^*-B-küme olarak adlandırılan iki yeni küme tanımlanmıştır. δ^*-t-küme ve δ^*-B-kümenin daha önce topolojik uzayda verilen t-küme, B-küme, δ-t-küme, δ-B-küme ile aralarındaki ilişki incelenmiştir.

2. 3. 1. Tanım

(X, τ, I) ideal topolojik uzayı ve $A \subset X$ verilsin. Eğer,

a) $(A^{-\delta})^{*\circ} = A^{\circ}$ ise, A kümesine δ^*-t-küme

b) $U \in \tau$ ve V kümesi δ^*-t-küme olmak üzere, $A = U \cap V$ ise, A kümesine δ^*-B-küme denir.

2. 3. 1. Önerme

(X, τ, I) ideal topolojik uzayında aşağıdaki özellikler sağlanır.

a) Her δ^*-t-küme, δ^*-B-kümedir.

b) Her δ^*-t-küme, δ-t-kümedir.

c) Her δ^*-B-küme, δ-B-kümedir.

İspat

a) $X \in \tau$ ve A kümesi δ^*-t-küme ise, $A = A \cap X$ olduğundan, A kümesi δ^*-B-kümedir.

b) A kümesi δ^*-t-küme ise, $(A^{-\delta})^{*\circ} = A^\circ$ olacaktır. Buradan $A^\circ \subset (A^{-\delta})^\circ \subset (A^{-\delta})^{*\circ} = A^\circ$ ve $(A^{-\delta})^\circ = A^\circ$ bulunur. Bu ise, A kümesinin δ-t-küme olmasıdır.

c) A kümesi δ^*-B-küme ve $X \in \tau$ ise $A = A \cap X$ olduğundan, A kümesi δ^*-t-kümedir. Buradan (b) gereğince, A kümesi δ-t-kümedir. 1. 3. 1. Önerme(b) gereğince A kümesi δ-B-kümedir.

2. 3. 1. Uyarı

2. 3. 1. Önerme ile verilen ifadelerin tersleri genellikle doğru değildir.

2. 3. 1. Örnek

$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ ideali verilsin. $A = \{a, b, d\}$ olsun. A kümesi δ-t-kümedir, fakat δ^*-t-küme değildir. τ^* topolojisi

$\tau^* = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b, d\}\}$ olarak bulunur.

O halde $A^{-\delta} = \{a, b, d\}$ ve $\{b\} = A^\circ = (A^{-\delta})^\circ = \{b\}$ olduğundan, A kümesi δ-t-kümedir.

Fakat $\{b\} = A^\circ \neq (A^{-\delta})^{*\circ} = \{a, b, d\}$ olduğundan, A kümesi δ^*-t-küme değildir. Aynı zamanda A kümesi δ-B-küme, fakat δ^*-B-küme değildir.

2. 3. 2. Örnek

$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$ topolojisive $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ ideali verilsin. $A = \{a, b\}$ olsun. $\{a, b\} = A^{\circ} \neq (A^{-\delta})^{*\circ} = X$ olduğundan, A kümesi δ^*-t-küme değildir. Fakat $A = A \cap X$ olduğundan $A \in \tau$ ve $(X^{-\delta})^{*\circ} = X^{\circ}$ bulunur ki A kümesi δ^*-B-kümedir.

2. 3. Kısımda incelenen kümeler arasındaki bağıntılar aşağıdaki şema ile verilmiştir.

2. 3. 1. Şema

$$\begin{tikzcd}
\delta^*\text{-}B\text{-küme} \arrow[r] & \delta\text{-}B\text{-küme} \arrow[r] & B\text{-küme} \\
\delta^*\text{-}t\text{-küme} \arrow[r] \arrow[u] & \delta\text{-}t\text{-küme} \arrow[r] \arrow[u] & t\text{-küme} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

2. 3. 2. Önerme

(X, τ, I) ideal topolojik uzayındaki δ^*-t-kümelerin kesişimi yine δ^*-t-kümedir.

İspat

A ve B δ^*-t-kümeleri verilsin. $A^{\circ} = (A^{-\delta})^{*\circ}$ ve $B^{\circ} = (B^{-\delta})^{*\circ}$gereğince, kesişimleri alınırsa,

$(A \cap B)^{\circ} \subset \left((A \cap B)^{-\delta}\right)^{*\circ} \subset (A^{-\delta} \cap B^{-\delta})^{*\circ} = \left(A^{-\delta}\right)^{*\circ} \cap (B^{-\delta})^{*\circ} =$ $A^{\circ} \cap B^{\circ} = (A \cap B)^{\circ}$ olur. Buradan

$\left((A \cap B)^{-\delta}\right)^{*\circ} = (A \cap B)^{\circ}$ bulunur. O halde $A \cap B$ kümesi δ^*-t-kümedir.

2. 3. 2. Uyarı

(X,τ,I) ideal topolojik uzayında δ^*-B-küme kavramı ile δ-pre-I-açık küme kavramları birbirinden bağımsızdır.

2. 3. 3. Örnek

$X=\{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{\emptyset,X,\{c\},\{a\},\{a,c\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ topolojisi ve $I=\{\emptyset,\{c\}\}$ ideali verilsin. $A=\{b,d,e\}$ olsun. A kümesi δ-pre-I-açık kümedir, fakat δ^*-B-küme değildir. τ^* topolojisi

τ^*=$\{\emptyset,X,\{c\},\{a\},\{a,c\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,d,e\}\}$ olarak bulunur.

O halde $A^{-\delta}=\{a,b,d,e\}$ ve $(A^{-\delta})^{*\circ}=\{a,b,d,e\}$ olduğundan, $A\subset(A^{-\delta})^{*\circ}$, yani, A kümesi δ-pre-I-açık kümedir.

Fakat $\emptyset=\{b,d,e\}^\circ\neq(A^{-\delta})^{*\circ}=\{a,b,d,e\}$ olduğundan, A kümesi δ^*-t-küme değildir. Böylece A kümesi δ^*-B-küme değildir.

2. 3. 4. Örnek

$X=\{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{\emptyset,X,\{c\},\{a\},\{a,c\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ topolojisi ve $I=\{\emptyset,\{c\}\}$ ideali verilsin ve $A=\{c,d\}$ olsun. A kümesi δ^*-B-kümedir, fakat δ-pre-I-açık küme değildir. Gerçekten

$\tau^*=\{\emptyset,X,\{c\},\{a\},\{a,c\},\{a,b\},\{a,b,c\},\{a,b,d,e\}\}$ olduğundan,

$A^{-\delta}=\{c,d,e\}$ ve $(A^{-\delta})^{*\circ}=\{c\}$ bulunur. O halde $\{c\}=A^\circ=(A^{-\delta})^{*\circ}=\{c\}$ yani, A kümesi δ^*-t-kümedir. 2. 3. 1. Önerme gereğince, her δ^*-t-küme δ^*-B-küme olduğu için, A kümesi de δ^*-B-kümedir.

Fakat $\{c,d\}=A\not\subset(A^{-\delta})^{*\circ}=\{c\}$ olduğundan, A kümesi δ-pre-I-açık küme değildir.

Açık bir kümenin yeni bir dağılımı aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

2. 3. 3. Önerme

(X,τ,I) ideal topolojik uzayında $A\subset X$ kümesi verilsin. A kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart A kümesinin hem δ-pre-I-açık küme hem de δ^*-B-küme olmasıdır.

İspat

$\Leftarrow$

A kümesi δ-pre-I-açık ve δ^*-B-küme olsun. Buradan, δ^*-B-küme tanımından, V kümesi δ^*-t-küme ve $U\in\tau$ olmak üzere $A=U\cap V$ olur. Yine, A kümesi aynı zamanda δ-pre-I-açık olduğundan,

$A\subset (A^{-\delta})^{*\circ}=((U\cap V)^{-\delta})^{*\circ}\subset (U^{-\delta}\cap V^{-\delta})^{*\circ}=(U^{-\delta})^{*\circ}\cap V^{\circ}$

$A=U\cap V=U\cap(U\cap V)\subset U\cap((U^{-\delta})^{*\circ}\cap V^{\circ})$ elde edilir.

$U^{\circ}\subset (U^{-\delta})^{\circ}\subset (U^{-\delta})^{*\circ}$ ve $U^{\circ}\cap (U^{-\delta})^{*\circ}=U^{\circ}$ gereğince,

$A=U\cap V=U\cap(U\cap V)\subset U\cap((U^{-\delta})^{*\circ}\cap V^{\circ})=U^{\circ}\cap V^{\circ}=A^{\circ}$,yani, A kümesi açıktır.

$\Rightarrow$ A kümesi açık ise δ-pre-I-açık kümedir (2. 2. 2. Teorem). Aynı zamanda $A=A\cap X$ gereğince A kümesi δ^*-B-kümedir.

3. BÖLÜM

SÜREKLİLİĞİN DAĞILIMI

3. 1. $D_I(c,\delta_p)$-Süreklilik, δ-I-Almost Süreklilik ve δ^*-B-Süreklilik

İkinci bölümde incelenen kümeler yardımıyla, genelleştirilmiş sürekli fonksiyonlar elde etmek mümkündür. Bu bölümde, çalışma için gerekli genelleştirilmiş sürekli fonksiyon çeşitleri incelenip, sürekli fonksiyonların iki yeni dağılımı elde edilmiştir. Bunun için δ-I-almost süreklilik, $D_I(c,\delta_p)$-süreklilik ve δ^*-B-süreklilik kavramları tanımlanmıştır. Daha önce elde edilmiş genelleştirilmiş süreklilik kavramlarının tanımları listeler halinde verilmiştir.

3. 1. 1. Tanım

$f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer (Y, σ) topolojik uzayının her $V \in \sigma$ açık kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi (X, τ) topolojik uzayında,

a) Açık ise, f fonksiyonu sürekli

b) α-açık ise, f fonksiyonu α-sürekli (Dontchev ve Przemski, 1996)

c) pre-açık ise, f fonksiyonu pre-sürekli (Mashhour, Abd E.M. , El-Deeb, 1982: 47-53))

d) semi-açık ise, f fonksiyonu semi-sürekli (Levine, 1963: 36-41)

e) β -açık ise, f fonksiyonu β-sürekli (Abd E.M. , El-Deeb, Mahmoud, 1983: 77-90)

f) δ-pre-açık ise, f fonksiyonu δ-almost-sürekli (Raychaudhuri ve Mukherjee, 1993)

g) δ-β-açık ise, f fonksiyonu δ-β-süreklidir. (Hatır ve Noiri, 2009: 205-211)

3. 1. 2. Tanım

$f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer (Y, σ) topolojik uzayının her $V \in \sigma$ açık kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi (X, τ, I) ideal topolojik uzayında,

a) α-I-açık ise, f fonksiyonu α-I-sürekli (Hatır ve Noiri, 2002: 341-349)

b) pre-I-açık ise, pre-I-sürekli (Dontchev ve Przemski, 1996)

c) semi-I-açık ise, semi-I-sürekli (Hatır ve Noiri, 2002: 341-349)

d) β-I-açık ise, β-I-sürekli (Hatır ve Noiri, 2002: 341-349)

e) β^*-I-açık ise, β^*-I-süreklidir. (Ekici ve Noiri, 2009:165-177).

3. 1. 3. Tanım

$f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer (Y, σ) topolojik uzayının her $V \in \sigma$ açık kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi (X, τ) topolojik uzayında,

a) $D(c, \alpha)$-küme ise, $D(c, \alpha)$-sürekli (Przemski, 1993: 93-98)

b) $D(c, s)$-küme ise, $D(c, s)$-sürekli (Przemski, 1993: 93-98)

c) $D(c,p)$-küme ise, $D(c,p)$-sürekli (Przemski, 1993: 93-98)

d) $D(\alpha,p)$-küme ise, $D(\alpha,p)$-sürekli (Przemski, 1993: 93-98)

e) $D(c,\beta)$-küme ise, $D(c,\beta)$-sürekli (Dontchev ve Przemski 1996: 109-120)

f) $D(\alpha,\beta)$-küme ise, $D(\alpha,\beta)$-süreklidir. (Dontchev ve Przemski 1996: 109-120

3. 1. 4. Tanım (Hatır ve Caldas, 2010: 197-202)

$f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer (Y,σ) topolojik uzayının her $V\in\sigma$ açık kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi (X,τ) topolojik uzayında,

a) $D(c,\delta_p)$-küme ise, $D(c,\delta_p)$-sürekli

b) $D(c,\delta_\beta)$-küme ise, $D(c,\delta_\beta)$-sürekli

c) $D(\alpha,\delta_p)$-küme ise, $D(\alpha,\delta_p)$-sürekli

d) $D(\alpha,\delta_\beta)$-küme ise, $D(\alpha,\delta_\beta)$-süreklidir.

3. 1. 5. Tanım (Hatır, 2002: 57-62)

$f:(X,\tau,I)\to(Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer (Y,σ) topolojik uzayının her $V\in\sigma$ açık kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi (X,τ,I) ideal topolojik uzayında,

a) $D_I(c,\alpha)$ küme ise, f fonksiyonu $D_I(c,\alpha)$-sürekli
b) $D_I(c,p)$ küme ise, f fonksiyonu $D_I(c,p)$-sürekli
c) $D_I(c,s)$ küme ise, f fonksiyonu $D_I(c,s)$-sürekli
d) $D_I(c,\beta)$-küme ise, f fonksiyonu $D_I(c,\beta)$-süreklidir.

Aşağıdaki teoremle daha önce incelenen kümeler kullanılarak sürekli bir fonksiyonun dağılımları verilmiştir.

3. 1. 1. Teorem (Hatır, 2002: 57-62)

$f\ :(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir.

a) f fonksiyonu süreklidir.

b) f fonksiyonu α-I-süreklidir ve $D_I(c,\alpha)$-süreklidir.

c) f fonksiyonu pre-I-süreklidir ve $D_I(c,p)$-süreklidir.

d) f fonksiyonu semi-I-süreklidir ve $D_I(c,s)$-süreklidir.

e) f fonksiyonu β-I -süreklidir ve $D_I(c,\beta)$-süreklidir.

2.Bölümde tanımlanan $D_I(c,\delta_p)$-kümeyi kullanılarak $D_I(c,\delta_p)$-süreklilik tanımlanmıştır.

3. 1. 6. Tanım

$f\ :(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer (Y,σ) topolojik uzayının her V açık alt kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi (X,τ,I) uzayında $D_I(c,\delta_p)$-küme ise, f fonksiyonuna $D_I(c,\delta_p)$-sürekli denir.

3. 1. 7. Tanım (Özcan, 2006)

$f\ :(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer (Y,σ) topolojik uzayının her V açık alt kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi (X,τ,I) uzayında $D_I(c,\delta_\beta)$-küme ise, f fonksiyonuna $D_I(c,\delta_\beta)$-sürekli denir.

3. 1. 1. Önerme

$D_I(c,\delta_p)$-süreklilik ve $D_I(c,\delta_\beta)$-süreklilik kavramları birbirinden bağımsızdır.

İspat

2. 1. 2. Uyarı gereğince ispat açıktır.

2. Bölümde yer alan δ-pre-I-açık küme tanımı kullanılarak aşağıdaki tanımlar verilebilir.

3. 1. 8. Tanım

$f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Eğer (Y, σ) topolojik uzayının her V açık alt kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi (X, τ, I) uzayında δ-pre-I-açık ise, f fonksiyonuna δ-I-almost sürekli denir.

3. 1. 9. Tanım

$f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma, J)$ fonksiyonu verilsin. Eğer (Y, σ, J) topolojik uzayının her δ-pre-I-açık V kümesi için, $f^{-1}(V)$ kümesi (X, τ, I) uzayında δ-pre-I-açık ise, f fonksiyonuna δ-pre-I-irresolute denir.

3. 1. 2. Önerme

$f : (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

a) Her δ-almost sürekli fonksiyon δ-I-almost süreklidir.

b) Her $D_I(c, \delta_p)$-sürekli fonksiyon, $D(c, \delta_p)$-süreklidir.

c) Her $D_I(c, \delta_p)$-sürekli fonksiyon $D(\alpha, \delta_p)$ ve $D(\alpha, p)$-süreklidir.

İspat

2. 1. 1. Önerme, 2. 1. 3. Önerme, 2. 1. 4. Önerme, 2. 2. 2. Önerme gereğince ispat açıktır.

3. 1. 1. Uyarı

3. 1. 2. Önerme ile verilen ifadelerin tersleri genellikle doğru değildir.

3. 1. 1. Örnek

$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, d\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ ideali verilsin. $Y = \{a, d\}$ kümesi üzerinde de $\sigma = \{\emptyset, Y, \{a\}\}$ topolojisi verilsin. $f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(b) = f(c) = a$ ve $f(a) = f(d) = d$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu δ-I-almost süreklidir, fakat δ-almost sürekli değildir. Gerçekten, $\{a\} \in \sigma$ için $f^{-1}(\{a\}) = A = \{b, c\}$ olur.

$A^{-\delta} = \{b, c, d\}$ ve $(A^{-\delta})^{*\circ} = \{b, c, d\}$ olduğundan, $A \subset (A^{-\delta})^{*\circ}$, yani, A kümesi δ-pre-I-açık kümedir.

Öte yandan $Y \in \sigma$ için $f^{-1}(Y) = X$ ve $X \subset (X^{-\delta})^{\circ}$ bulunur ki X kümesi δ-pre-I-açık kümedir.

Fakat $A = \{b, c\}$ olmak üzere, $(A^{-\delta})^{\circ} = \{b\}$ ve $A \not\subset (A^{-\delta})^{\circ}$olduğundan, A kümesi δ-pre-açık küme değildir.

O halde f fonksiyonu δ-I-almost süreklidir, fakat δ-almost sürekli değildir.

3. 1. 2. Örnek

$X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{b\}\}$ ideali verilsin. $Y = \{b, c\}$ kümesi üzerinde de $\sigma = \{\emptyset, Y, \{b\}\}$ topolojisi verilsin. $f:(X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(a) = f(d) = b$ ve $f(b) = f(c) = f(e) = c$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu $D(c, \delta_p)$-süreklidir, fakat $D_I(c, \delta_p)$-sürekli değildir. Gerçekten, $\{b\} \in \sigma$ için $f^{-1}(\{b\}) = \{a, d\} = A$ olur.

$A^{-\delta} = \{a, c, d, e\}$ ve $(A^{-\delta})^{\circ} = \{a\}$ olduğundan, $A^{\circ} = A \cap (A^{-\delta})^{\circ}$ bulunur ki A kümesi $D(c, \delta_p)$-kümedir. Öte yandan $Y \in \sigma$ için $f^{-1}(Y) = X$ kümesi $D(c, \delta_p)$-kümedir. τ^* topolojisi

$\tau^* = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, c\}, \{a, c, d, e\}\}$ olduğundan,

$f^{-1}(\{b\}) = A = \{a, d\}$ olup, $(A^{-\delta})^{*\circ} = \{a, c, d, e\}$ ve $\{a\} = A^{\circ} \neq A \cap (A^{-\delta})^{*\circ} = \{a, d\}$ bulunur, yani, A kümesi $D_I(c, \delta_p)$-küme değildir.

O halde f fonksiyonu $D(c, \delta_p)$-süreklidir, fakat $D_I(c, \delta_p)$-sürekli değildir.

3. 1. 3. Örnek

$X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{d, e\}, \{b, c\}, \{a, d, e\}, \{b, d, e\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, d, e\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{e\}\}$ ideali verilsin. $Y = \{a, d\}$ kümesi üzerinde de $\sigma = \{\emptyset, Y, \{d\}\}$ topolojik uzayı verilsin. $f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(a) = f(c) = d$ ve $f(b) = f(d) = f(e) = a$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu $D(\alpha, p)$-süreklidir fakat $D_I(c, \delta_p)$-sürekli değildir. Gerçekten, $\{d\} \in \sigma$ için, $f^{-1}(\{d\}) = \{a, c\} = A$ olur. τ^* topolojisi,

$$\tau^* = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{d, e\}, \{b, c\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d, \{a, b, d\},$$

$$\{b, d, e\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, c, d\}\}$$ olarak bulunur.

$f^{-1}(\{d\})^{-\delta} = \{a, c\}^{-\delta} = \{a, b, c\}$ ve $(\{a, c\}^{-\delta})^{*\circ} = \{a, b, c\}$ olup, $\{a, c\} \cap \left(\{a, c\}^{-\delta}\right)^{*\circ} = \{a, c\} \cap \{a, b, c\} = \{a, c\} \neq \{a\} = A^{\circ}$ bulunur, yani, A kümesi $D_I(c, \delta_p)$-küme değildir. Dolayısıyla, f fonksiyonu $D_I(c, \delta_p)$-sürekli değildir.

Fakat $\{a, c\}$ kümesi $D(\alpha, p)$-kümedir. Öte yandan, $Y \in \sigma$ için $f^{-1}(Y) = X$ ve X kümesi $D(\alpha, p)$-kümedir. Dolayısıyla, f fonksiyonu $D(\alpha, p)$-süreklidir.

3. 1. 4. Örnek

$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ topolojisi $I = \{\emptyset, \{a\}\}$ ideali verilsin. $Y = \{c, d\}$ kümesi üzerinde de $\sigma = \{\emptyset, Y, \{c\}\}$ topolojisi verilsin. $f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(a) = f(c) = d$ ve $f(b) = f(d) = c$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu $D(\alpha, \delta_p)$-süreklidir, fakat $D_I(c, \delta_p)$-sürekli değildir. Gerçekten, $\{c\} \in \sigma$ için, $f^{-1}(\{c\}) = A = \{b, d\}$ olur.

$(A^{-\delta}) = X$ ve $(A^{-\delta})^{*\circ} = X$ olup $X \cap \{b, d\} = \{b, d\} \neq \{b\} = A^{\circ}$ bulunur, yani, A kümesi $D_I(c, \delta_p)$-küme değildir. Dolayısıyla, f fonksiyonu $D_I(c, \delta_p)$-sürekli değildir.

Fakat A kümesi $D(\alpha, \delta_p)$-kümedir. Öte yandan $Y \in \sigma$ için $f^{-1}(Y) = X$ ve X kümesi $D(\alpha, \delta_p)$-kümedir. Dolayısıyla, f fonksiyonu $D(\alpha, \delta_p)$-süreklidir.

δ-I-almost sürekli fonksiyonun karakterizasyonları ve özellikleri aşağıdaki teoremlerde incelenmiştir.

3. 1. 2. Teorem

$f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktirler.

a) f fonksiyonu δ -I-almost-süreklidir.

b) $f(x)$ noktasının her V açık komşuluğu için $f(U) \subset V$ olacak şekilde δ-pre-I-açık bir U kümesi vardır.

c) $\forall F \subset Y$ kapalı alt kümesinin ters görüntüsü δ-pre-I-kapalıdır.

d) $\forall B \subset Y$ için, $f^{-1}((B^{\delta^\circ})^{-*}) \subset f^{-1}(\overline{B})$

e) $\forall A \subset X$ için, $f((A^{\delta^\circ})^{-*}) \subset \overline{f(A)}$

İspat

a)⇒b)

$x \in X$ ve $f(x)$ noktasının herhangi bir V açık komşuluğu verilsin. f fonksiyonu δ-I-almost sürekli olduğundan, $f^{-1}(V)$ δ-pre-I-açıktır. $U = f^{-1}(V)$ alınırsa, $f(x) \in f(U) \subset V$ elde edilir.

b)⇒c)

$F \subset Y$ kapalı kümesi verilsin. $V = Y - F$ kümesi Y uzayında açıktır. (b) gereğince, x noktasını ihtiva eden U δ-pre-I-açık kümesi $f(U) \subset V$ olacak şekilde vardır. O halde $U \subset f^{-1}(V)$ ve $U \subset (U^{-\delta})^{*\circ} \subset (f^{-1}(V)^{-\delta})^{*\circ}$ dir. Buradan $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V)^{-\delta})^{*\circ}$ ve $f^{-1}(V)$ δ-pre-I-açık olur ki X uzayında $f^{-1}(F) = X - f^{-1}(Y - F) = X - f^{-1}(V)$ δ-pre-I-kapalıdır.

c) ⇒d)

$B \subset Y$alalım. B^- kümesi, Y uzayında kapalı olup, (c) gereğince, $f^{-1}(\bar{B})$ δ-pre-I-kapalı olduğundan, $X - f^{-1}(\bar{B})$ δ-pre-I-açıktır. Buradan $X - f^{-1}(\bar{B}) \subset ((X - f^{-1}(\bar{B}))^{-\delta})^{*\circ} = X - (f^{-1}(\bar{B})^{\delta^\circ})^{-*}$ ve böylece $f^{-1}((B^{\delta^\circ})^{-*}) \subset f^{-1}(\bar{B})$ elde edilir.

d)⇒e)

$A \subset X$ verilsin. (d) gereğince, $(A^{\delta^\circ})^{-*} = f^{-1}\big(f(A^{\delta^\circ})^{-*}\big) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ ve böylece $f((A^{\delta^\circ})^{-*}) \subset \overline{f(A)}$ elde edilir.

e)⇒a)

$V \subset Y$ açık alt kümesi verilsin. $Y - V$ kapalı küme olup (e) gereğince, $f((f^{-1}(Y-V)^{\delta^\circ})^{-*}) \subset \overline{f\big(f^{-1}(Y-V)\big)} = \overline{Y-V} = Y - V$ olur. Buradan $X - (f^{-1}(V)^{-\delta})^{*\circ} = ((f^{-1}(Y-V))^{\delta^\circ})^{-*} \subset f^{-1}(Y-V) \subset X - f^{-1}(V)$ olacaktır. Sonuç olarak, $f^{-1}(V) \subset (f^{-1}(V)^{-\delta})^{*\circ}$ olduğundan, $f^{-1}(V)$ kümesi δ-pre-I-açık olur ki f fonksiyonu δ-I-almost süreklidir.

δ-I-almost sürekli fonksiyonların bileşkesi aşağıdaki teoremde elde edilmiştir.

3. 1. 3. Teorem

$f: (X, \tau, I) \rightarrow (Y, \sigma, J)$ ve $g: (Y, \sigma, J) \rightarrow (Z, \varphi)$ fonksiyonları verilsin.

a) f fonksiyonu δ-I-almost sürekli ve g fonksiyonu sürekli ise, gof bileşke fonksiyonu δ -I-almost-süreklidir.

b) f fonksiyonu δ-pre-I-irresolute ve g fonksiyonu δ-I-almost sürekli ise, gof bileşke fonksiyonu δ-I-almost süreklidir.

İspat

a) $V \in \varphi$ olsun. g fonksiyonu sürekli olduğundan, $g^{-1}(V) \in \sigma$ dir. Yine f fonksiyonu δ-I-almost-sürekli olduğundan, Y uzayında alınan $g^{-1}(V)$ açık alt kümesinin ters görüntüsü, $f^{-1}(g^{-1}(V))$ kümesi (X, τ, I) uzayında δ-pre-I-açık olduğundan, gof fonksiyonu δ-I-almost süreklidir.

b) (a) kısmının ispatına benzer şekilde yapılır.

3. 1. 4. Teorem

$f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ δ-I-almost sürekli fonksiyonu ve $U \in \tau^{\delta}$ verilsin. Bu takdirde $f_{|U}: (U, \tau_U, I_U) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu da δ-I-almost süreklidir.

İspat

V kümesi Y uzayında açık bir küme olsun. f fonksiyonu δ-I-almost sürekli olduğundan, $f^{-1}(V)$ kümesi δ-pre-I-açıktır. $U \in \tau^{\delta}$ olup, 2. 2. 11. Önerme gereğince, $(f_{|U})^{-1}(V) = U \cap f^{-1}(V)$ kümesi (U, τ_U, I_U) uzayında δ-pre-I-açıktır. Dolayısıyla, $f_{|U} : (U, \tau_U, I_U) \to (Y, \sigma)$ kısıtlanış fonksiyonu δ-I-almost süreklidir.

3. 1. 10. Tanım (Hatır ve Caldas, 2010: 197-202)

$f: (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu ve $\forall\, V \in \sigma$ için, $f^{-1}(V)$ kümesi (X, τ) uzayında,

a) B-küme ise, B-sürekli

b) δ-B-küme ise, δ-B-sürekli

c) δ^*-B-küme ise, δ^*-B-süreklidir.

3. 1. 3. Önerme

Her δ^*-B-sürekli fonksiyon, δ-B-süreklidir.

İspat

2. 3. 1. Önerme(c) gereğince ispat açıktır.

3. 1. 2. Uyarı

3. 1. 3. Önerme ile verilen gerektirmenin tersi genelde doğru değildir.

3. 1. 5. Örnek

$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ ideali verilsin, $Y = \{b, c\}$ kümesi üzerinde de $\sigma = \{\emptyset, Y, \{c\}\}$ topolojisi verilsin. $f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(b) = f(d) = f(a) = c$ ve $f(c) = b$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu δ-B-süreklidir fakat δ^*-B-sürekli değildir. Gerçekten, $\{c\} \in \sigma$ için, $f^{-1}(\{c\}) = \{a, b, d\} = A$ ve $A^{-\delta} = \{a, b, d\}$ olup $\{b\} = A^{\circ} = (A^{-\delta})^{\circ}$ olduğundan, A kümesi δ-t-kümedir. 2. 3. 1. Önermeden A kümesi δ-B-kümedir. Öte yandan $Y \in \sigma$ için $f^{-1}(Y) = X$ ve X kümesi δ-B-küme olup f fonksiyonu δ-B-süreklidir. τ^* topolojisi,

$\tau^* = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, b, d\}\}$ olarak bulunur.

$\{b\} = A^{\circ} \neq (A^{-\delta})^{*\circ} = \{a, b, d\}$ olduğundan, A kümesi δ^*-t-küme değildir. Aynı zamanda, A kümesi δ^*-B-küme değildir.

δ^*-B-süreklilik, δ-B-süreklilik, B-süreklilik arasındaki bağıntı aşağıdaki şemada verilmiştir.

3. 1. 1. Şema

δ^*-B-süreklilik $\longrightarrow$ δ-B-süreklilik $\longrightarrow$ B-süreklilik

3. 2. Sürekliliğin İdeal Topolojik Uzaylarda Dağılımı

Sürekliliğin dağılımları aşağıdaki teoremle elde edilmiştir.

3. 2. 1. Teorem

$f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki ifadeler denktirler.

a) f fonksiyonu süreklidir.

b) f fonksiyonu δ-almost sürekli ve $D(c,\delta_p)$-süreklidir.(Hatır ve Caldas, 2010: 197-202)

c) f fonksiyonu δ-almost sürekli ve δ-B-süreklidir.(Hatır ve Noiri, 2006: 281-287)

Çalışmanın esas amacını oluşturan sürekli bir fonksiyonun dağılımları, 3. 2. 1. Teoremine benzer şekilde ideal topolojik uzayda aşağıdaki teoremle verilmiştir.

3. 2. 2. Teorem

$f:(X,\tau,I)\rightarrow(Y,\sigma)$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki ifadeler denktirler.

a) f fonksiyonu süreklidir.

b) f fonksiyonu δ-I-almost sürekli ve $D_I(c,\delta_p)$-süreklidir.

c) f fonksiyonu δ-I-almost-sürekli ve δ^*-B-süreklidir.

İspat

2. 2. 2. Teorem, 2. 3. 3. Önerme, 3. 1. 6. Tanım ve 3. 1. 9. Tanımdan ispat açıktır.

3. 2. 1. Uyarı

1) δ-I-almost süreklilik ve $D_I(c,\delta_p)$-süreklilik bağımsızdır.

2) δ-I-almost süreklilik ve δ^*-B-süreklilik bağımsızdır.

3. 2. 1. Örnek

$X=\{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerinde $\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{c\},\{a,c\}\{a,b\},\{a,b,c\}\}$ topolojisi ve $I=\{\emptyset,\{c\}\}$ ideali verilsin. $Y=\{a,b\}$ kümesi üzerinde de

$\sigma = \{\emptyset, Y, \{a\}\}$ topolojisi verilsin. $f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(c) = f(d) = a$ ve $f(a) = f(b) = f(e) = b$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu $D_I(c, \delta_p)$-süreklidir, fakat δ-I-almost sürekli değildir. Gerçekten, $\{a\} \in \sigma$ için, $f^{-1}(\{a\}) = \{c, d\} = A$ ve τ^* topolojisi,

$\tau^* = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d, e\}\}$ olduğundan,

$A^{-\delta} = \{c, d, e\}$ ve $(A^{-\delta})^{*\circ} = \{c\}$ bulunur ki $A \cap (A^{-\delta})^{*\circ} = \{c\} = A^\circ$, yani, A kümesi $D_I(c, \delta_p)$-kümedir. Öte yandan, $Y \in \sigma$ için $f^{-1}(Y) = X$ olup, X kümesi $D_I(c, \delta_p)$-kümedir.

Fakat $A \not\subset (A^{-\delta})^{*\circ}$ olduğundan, A kümesi δ-pre-I-açık küme değildir.

3. 2. 2. Örnek

$X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{c, d, e\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ ideali verilsin. $Y = \{a, c\}$ kümesi üzerinde de $\sigma = \{\emptyset, Y, \{c\}\}$ topolojisi verilsin. $f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(b) = f(d) = c$ ve $f(a) = f(c) = f(e) = a$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu δ-I-almost süreklidir, fakat $D_I(c, \delta_p)$-sürekli değildir. Gerçekten, $\{c\} \in \sigma$ için, $f^{-1}(\{c\}) = \{b, d\} = A$ bulunur.τ^* topolojisi

$\tau^* = \{\emptyset, X, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{c, d, e\}, \{a, b, d, e\}\}$ olduğundan,

$A^{-\delta} = \{a, b, d, e\}$ ve $(A^{-\delta})^{*\circ} = \{a, b, d, e\}$ bulunur ki

A kümesi δ-pre-I-açık kümedir. Öte yandan, $Y \in \sigma$ için $f^{-1}(Y) = X$ olup, X kümesi δ-pre-I-açık kümedir.

Fakat $\{d\} = A^\circ \neq A \cap (A^{-\delta})^{*\circ} = \{b, d\}$ olduğundan, A kümesi $D_I(c, \delta_p)$-küme değildir.

3. 2. 3. Örnek

$X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ ideali verilsin. $Y = \{a, c\}$ kümesi üzerinde de σ=$\{\emptyset,\ Y,\ \{c\}\}$ topolojisi verilsin. $f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(b) = f(d) = f(e) = c$ ve $f(a) = f(c) = a$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu δ-I-almost-sürekli, fakat δ^*-B-sürekli değildir. Gerçekten, $\{c\} \in \sigma$ için, $f^{-1}(\{c\}) = \{b, d, e\} = A$ bulunur. τ^* topolojisi

τ^*=$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d, e\}\}$ olduğundan,

$A^{-\delta} = \{a, b, d, e\}$ ve $A \subset (A^{-\delta})^{*^\circ} = \{a, b, d, e\}$, yani, A kümesi δ-pre-I-açık kümedir. Öte yandan, $f^{-1}(Y) = X$ ve X kümesi δ-pre-I-açık küme olup, f fonksiyonu δ-I-almost süreklidir.

Fakat $U = X$ ve $V = A$ alınırsa, $\emptyset = \{b, d, e\}^\circ = A^\circ \neq (A^{-\delta})^{*^\circ} = \{a, b, d, e\}$ olduğundan, A kümesi δ^*-B-küme değildir. Dolayısıyla, f fonksiyonu δ^*-B-sürekli değildir.

3. 2. 4. Örnek

$X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ topolojisi ve $I = \{\emptyset, \{c\}\}$ ideali verilsin ve $Y = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde de σ =$\{\emptyset, Y, \{a\}\}$ topolojisi verilsin. $f: (X, \tau, I) \to (Y, \sigma)$ fonksiyonu $f(c) = f(d) = a$, $f(a) = f(b) = b$ ve $f(e) = c$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu δ^*-B-sürekli, fakat δ-I-almost sürekli değildir. Gerçekten, $\{a\} \in \sigma$ için, $f^{-1}(\{a\}) = \{c, d\} = A$ bulunur. τ^* topolojisi,

τ^*=$\{\emptyset, X, \{c\}, \{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d, e\}\}$ olduğundan,

$A^{-\delta} = \{c, d, e\}$ ve $(A^{-\delta})^{*^\circ} = \{c\}$ bulunur. O halde $\{c\} = A^\circ = (A^{-\delta})^{*^\circ} = \{c\}$ bulunur ki A kümesi δ^*-t-kümedir. 2. 3. 1. Önerme gereğince, her δ^*-t-küme

δ^*-B-küme olduğu için A kümesi de δ^*-B-kümedir. Öte yandan $f^{-1}(Y) = X$ ve X kümesi δ^*-B-küme olup, f fonksiyonu δ^*-B-süreklidir.

Fakat $\{c, d\} = A \not\subset (A^{-\delta})^{*^\circ} = \{c\}$ olduğundan, A kümesi δ-pre-I-açık küme değildir. Dolayısıyla, f fonksiyonu δ-I-almost-sürekli değildir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Birinci bölümde, çalışma için gerekli olan (X, τ, I) ideal topolojik uzayın bazı küme çeşitleri ve sürekli fonksiyon türleri incelenip yorumlanmıştır.

İkinci bölümün birinci kesiminde, $D_I(c, \delta_p)$-küme tanımlanarak diğer genelleştirilmiş küme çeşitleri arasındaki irtibat incelenmiştir. İkinci kesimde δ-pre-I-açık küme tanımlanıp özellikleri ve diğer genelleştirilmiş kümelerle bağlantısı incelenmiştir. Üçüncü kesimde δ^*-t-küme ve δ^*-B-küme tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde, bu kümeler yardımıyla δ-I-almost süreklilik, δ^*-B-süreklilik ve $D_I(c, \delta_p)$ sürekli fonksiyon kavramları verilip, sürekliliğin yeni dağılımları elde edilmiştir.

Bu çalışmada tanımlanan δ-pre-I-açık küme, $D_I(c, \delta_p)$-küme, δ^*-t-küme ve δ^*-B-küme tanımlarına benzer tanımlar yapılarak sürekli fonksiyonların başka dağılımları elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Abd El-Monsef, M. E., El-Deeb, S. N. and Mahmoud, R. A., 1983, β-open sets and β-continuous mappings, Bull. Fac. Sci. Assiut Univ.12(1), 77-90

Dontchev, J. and Przemski, M., 1996, On pre-I-open sets and a decomposition of I-contiunity, Banyan Math. J., vol. 2

Dontchev, J. and Przemski, M., 1996, On the various decompositions of continuous and some weakly continuous functions, Acta Math. Hungar. 71(1-2), 109-120

Ekici, E. and Noiri, T., 2009, On subsets and decompositions of contiunity in ideal topologicial spaces, The arabian journal for science and engineering , vol(34), number 1A,165-177

Fomin, S. , 1943, Extensions of topological spaces, Ann. of Math, 44, 471-480

Hayashi, E., 1964, Topologies defined by local properties, Math. Ann. 156, 205-215

Hatır, E. and Noiri, T., 2006, Decompositions of continuity and complete continuity, Acta Math. Hungar. 113(4), 281-287

Hatır, E. and Noiri, T., 2002, On decompositions of continuity via idealization, Acta Math. Hungar. 96(4), 341-349

Hatır, E., 2002, Idealization of Przemski’s decomposition theorems Commun. Fac. Sci Univ. Ankara Series A1 51(2), 57-62

Hatır, E. and Noiri T., 2009, On δ-β-continuous functions, Chaos, Solitions & Fractals 42(1), 205-211

Hatır, E. and Caldas M., 2010, On decomposition of continuity and α-continuity, The Arabian Journal of Science and Engineering, Volume 35, Number 2D, 197-202

Janković, D. and Hamlett, T. R., 1990, New topologies from old via ideals, Amer. Math. Monthly. 97, 295-310

Kuratowski, K., 1933, Topologie I, Warszawa.

Levine, N., 1963, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly. 70, 36-41.

Mashhour, A. S., Abd El-Monsef, M. E. and El-Deeb, S. N., 1982, On precontinuous and weak pre-continuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt, 53, 47-53

Njastad, O., On some classes nearly open sets, 1965, Pacific J. Math. Vol.15(3), 961-970

Özcan R., 2006, İdeal Topolojik Uzaylarda Sürekliliğin Dağılımı, Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya

Przemski, M., 1993, A decompositions of continuity and α-continuity, Acta Math. Hungar. 61(1-2), 93-98

Raychaudhuri S., Mukherjee M.N., 1993, On δ-almost contiunity and δ-preopen sets, Bull. Inst. Math. Academia Sinica 21(4)

Samuels, P., 1975 A topology formed from a given topological space, J. London Math. Soc. (2), 10, 409-416

Vaidyanathaswamy, R., 1945, The localization theory in set topology, Proc. Indian Acad. Sci. 20, 51-61

Vaidyanathaswamy, R., 1960, Set topology, Chelsea Publishing Company, New York

Velićko N.V., 1968, H-closed topological spaces, Amer. Math. Soc. Transl. 78, 103-118

Özgeçmiş

Adı Soyadı:	CANAN ÇAKIR	İmza:	
Doğum Yeri:	Çarşamba		
Doğum Tarihi:	09/04/1986		
Medeni Durumu:	Evli		

Öğrenim Durumu

Derece	Okulun Adı	Program	Yer	Yıl
İlköğretim	19 Mayıs İ.O		Konya	1992-1997
Ortaöğretim	Tokat Anadolu İHL-Yalova Lisesi		Tokat	1997-2004
Lisans	Selçuk Üniversitesi	İlköğ. Mate. Öğrt.	Konya	2004-2008
Yüksek Lisans	Konya Üniversitesi	İlköğ. Mate. Eğt.	Konya	2009-2015

İş Deneyimi:	Fıstıklı İ.Ö.O. İhsan Dikmen 3 İ.Ö.O. Şehit Piyade Binbaşı Ercüment Türkmen İmam-Hatip Orta Okulu Dumlupınar İmam-Hatip Orta Okulu
Hakkımda bilgi almak için önerebileceğim şahıslar:	Prof. Dr. Eşref HATIR Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL Doç. Dr. Aynur KESKİN
Tel:	0 536 477 16 79
Adres	Kaplıkaya Mah.DSİ Blokları F1 Blok Daire:5 Yıldırım/BURSA