GAZİ ÜNİVERSİTESİ

1926

SABİTLEŞTİRİLMİŞ FUZZY SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR

Ayten GEZİCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAYIS 2018

Ayten GEZİCİ tarafından hazırlanan "SABİTLEŞTİRİLMİŞ FUZZY SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Başkan: Prof. Dr. Erdal GÜNER

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Prof. Dr. Hakan EFE

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Tez Savunma Tarihi: 09/05/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

....

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ayten GEZİCİ
09/05/2018

SABİTLEŞTİRİLMİŞ FUZZY SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Ayten GEZİCİ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2018

ÖZET

Bu tezde, herhangi bir fuzzy soft kümesi üzerinde tanımlanan fuzzy soft topolojiye göre tümleyen tanımı verilmiş ve bu tanımla birlikte bu küme üzerinde sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzay tanımlanmıştır. Daha sonra, bu uzayın sayılabilirliği ile ilgili teoremler verilip ispatlanmıştır.

Bilim Kodu	:	20405
Anahtar Kelimeler	:	Fuzzy topolojik uzay, fuzzy soft topolojik uzay, fuzzy soft nokta, fuzzy soft komşuluk.
Sayfa Adedi	:	68
Danışman	:	Prof. Dr. Cemil YILDIZ

MIXED FUZZY SOFT TOPOLOGICAL SPACES

(M. Sc. Thesis)

Ayten GEZİCİ

GAZİ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

May 2018

ABSTRACT

In this thesis, the definition complement is given according to fuzzy soft topology defined over a fuzzy soft set and together with this definition mixed fuzzy soft topological space is defined. Then, related theorems of this space are given and proven.

Science Code	: 20405
Key Words	: Fuzzy topological space, fuzzy soft topological space, fuzzy soft point, fuzzy soft neighbourhood.
Page Number	: 68
Supervisor	: Prof. Dr. Cemil YILDIZ

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında değerli yardımlarını benden esirgemeyen, zamanını bana ayırıp birikimlerinden yararlanma fırsatı veren değerli hocam Sayın Prof. Dr. Cemil YILDIZ' a çok teşekkür ederim.

Tüm çalışmalarım boyunca desteklerini her zaman yanımda hissettiğim değerli aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{E}$	Parametre kümesi
$\boldsymbol{FS(X,E)}$	Fuzzy soft kümeler ailesi
$\boldsymbol{I^X}$	Fuzzy kümeler ailesi
$\boldsymbol{P(X)}$	X'in kuvvet kümesi
$\boldsymbol{P_x^\lambda}$	Fuzzy nokta
$\boldsymbol{P(X,E)}$	Fuzzy soft noktaların kümesi
$\boldsymbol{S(X,E)}$	Soft kümeler ailesi
$\boldsymbol{X}$	Evrensel küme
$\boldsymbol{x_A}$	Soft nokta
$\boldsymbol{x_A^\lambda}$	Fuzzy soft nokta

1. GİRİŞ

Klasik küme mantığı, Cantor'un 1879'da ortaya attığı haliyle bir elemanın kümeye ait ya da ait olmamasıyla ifade edilmiştir. Ancak bu mantık gerek günlük hayatta gerekse bilimsel çalışmalarda ortaya çıkan problemleri ifade etmede yetersiz kalmıştır. Çünkü klasik küme mantığında kesinlik vardır ve bu kesinlik belirsizlik içeren problemleri modelleyememiştir. Matematik, mühendislik, ekonomi ve çevresel problemleri çözmedeki bu zorluklar yeni bir teorinin ortaya atılmasına sebep olmuştur. Bu doğrultuda 17. yy da ortaya atılan olasılık kuramı belirsizlik durumunu matematiksel olarak incelemiştir. 1900'lerin başında Lukaisewicz bir önermenin doğru ve yanlış arasında sonsuz değerler alabileceğini söylemiştir. 1965 yılında Azeri matematikçi Zadeh tarafından yayımlanan makalede belirsizliklerin modellenmesine imkan tanıyan fuzzy küme kavramı verilmiştir. Fuzzy küme mantığında her elemanının $[0, 1]$ aralığında kümeye ait olma derecesi vardır. Bir elemanın ait olma derecesi ne kadar büyükse sahip olduğu özellik o kadar güçlüdür. Belirsizlik içeren problemleri modelleyen bu mantık bilimsel çevrelerde de kabul görmüş ve fabrika sanayi, metro işletme sistemi ve teknolojik aletler yapımında kullanılmıştır.

Fuzzy küme uygulamalı bilimlerde kullanıldığı kadar teorik bilimlerde de kullanılmıştır. 1968 yılında Chang [5] fuzzy topolojik uzay tanımını vermiştir. 1976 yılında ise, Lowen [11] fuzzy topolojik uzay kavramını genelleştirmiştir. Pao-Ming ve Ying-Ming [18] fuzzy nokta tanımını vermiş ve fuzzy topolojik uzayda komşuluk, Q-komşuluk tanımlarını vererek klasik topolojideki birçok kavramı fuzzy topoloji için tanımlamışlardır.

1999 yılında Molodstov [15] belirsizlik durumları için yeni bir teori olan soft küme kavramını geliştirmiştir. Bu kavramla birlikte Molodstov soft kümeyi parametre kümesi yardımıyla tanımlamış ve fuzzy kümedeki üyelik fonksiyonunun belirlenme zorluğunu ortadan kaldırmıştır. Ayrıca Molodstov [15] soft kümelerin Rieman integrasyonu, Peron integrasyonu, oyun teorisi ve olasılık teorisi gibi alanlarda uygulamasını başarılı bir şekilde vermiştir. Aktaş ve Çağman [3] soft kümelerin cebirsel yapısını, Shabir ve Naz [21] soft topolojik uzay tanımını , Hussain ve Ahmad [9] bir soft noktanın soft kümeye göre durumunu, Nazmul ve Samanta [16] soft komşuluğu tanımlamışlardır. Soft küme teori olarak geliştirilmeye devam etmiş ve Aygünoğlu [2], Dizman [6], Maji, Biswas, Roy [13], Zorlutuna ve Akdağ [29] soft küme ve topolojisi ile ilgili çalışmalar yapmışlardır.

2001 yılında Maji ve arkadaşları [12] fuzzy ve soft kümelerden yararlanarak fuzzy soft kümeyi tanımlamışlardır. Ahmad ve Kharal [1] fuzzy soft kümelerde birleşim, kesişim ve De Morgan özelliklerini vermişlerdir. Tanay ve Kandemir [23] fuzzy soft topolojik uzayları ve bu uzaya ait temel özellikleri tanımlamışlardır. Fuzzy ve soft kümeler üzerindeki özellikler fuzzy soft kümeler için de verilmiş, Varol ve Aygün [26, 27], Neog ve arkadaşları [17], Roy ve Samanta [20], Şimşekler ve Yüksel [22] ve Hussain [10] tarafından fuzzy küme kavramı geliştirilmiştir.

Bu tezin ikinci bölümünde fuzzy ve soft küme tanımları, bunlarla ile ilgili özellikler ve bu kümeler üzerinde tanımlanan topolojik uzay tanımları verilmiştir. Bölüm sonunda Tripaty ve Ray [24] tarafından verilen sabitleştirilmiş fuzzy topolojik uzay tanımı verilmiştir.

Üçüncü bölümde fuzzy soft kümeye ait kesişim, birleşim ve tümleyen tanımları gibi temel kavramlar verilmiştir. Evrensel küme üzerinde tanımlanan fuzzy soft topolojik uzay ile Şimsekler ve Yüksel [22] tarafından verilen herhangi bir küme üzerinde tanımlanan fuzzy soft topolojik uzay tanımı verilmiştir. Bu iki topolojik uzay üzerinde bir kümenin tümleyeni, komşuluk, Q-komşuluk, çakışımsılık vb. gibi tanımlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde Borah ve Hazarika'dan [4] farklı olarak sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzay herhangi bir küme üzerinde tanımlanan iki topolojik uzaydan faydalanarak tanımlanmıştır. Bu tanımın verilebilmesi için yeni bir tümleyen tanımı verilmiş ve evrensel küme herhangi bir fuzzy soft kümesi olarak düşünülmüştür. Sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzaylarda birinci sayılabilirlik, ikinci sayılabilirlik ve Q-birinci sayılabilirlik tanımları verilmiş ve ilgili teoremler ispatlanmıştır [7, 8].

Beşinci bölümde ise, sonuç ve öneriler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, fuzzy küme, soft küme tanımları ve bu kümeler üzerindeki işlemler ile bu kümeler üzerine konulan topolojiler verilmiştir. Tripathy ve Ray [24] tarafından tanımlanan fuzzy topolojiler ile elde edilen sabitleştirilmiş fuzzy topoloji tanımı verilmiştir.

2.1. Fuzzy Topolojik Uzaylar

2.1.1. Tanım

$X \neq \varnothing$ herhangi bir küme ve $I = [0,1]$ olsun. $\mu_A : X \to [0,1]$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen $A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X\} \subset X\mathrm{x}I$ kümesine X de bir fuzzy(bulanık) küme ve $x \in X$ için $\mu_A(x)$ değerine x'in A'ya ait olma derecesi denir. X den I ya tanımlanan bütün fonksiyonların kümesi I^X ile gösterilir ve her bir elemanı bir fuzzy kümesidir [28].

2.1.2. Tanım

$X \neq \emptyset$ olmak üzere $\emptyset$ ve X fuzzy kümeleri sırasıyla, $\forall x \in X$ için, $\mu_\emptyset(x) = 0$ ve $\mu_X(x) = 1$ şeklinde tanımlanan üyelik fonksiyonları ile karakterize edilir ve $\emptyset = \{(x,0) : x \in X\} = 0$ ve $X = \{(x,1) : x \in X\} = 1$ şeklinde gösterilir [28].

Örnek

$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi verilsin.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0.1, & x = a \\ 0.5, & x = b \\ 0.8, & x = c \\ 0.3, & x = d, \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\mu_A : X \to [0,1]$ fonksiyonu tarafından karaterize edilen A fuzzy kümesi, $A = \{(a, 0.1), (b, 0.5), (c, 0.8), (d, 0.3)\}$ olarak ifade edilir.

2.1.3. Tanım

$X \neq 0$ ve $A, B \in I^X$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler vardır: $\forall x \in X$ için,

(1) $A \leq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$
(2) $A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x)$
(3) $C = A \vee B \Leftrightarrow \mu_C(x) = maks\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$,
(4) $D = A \wedge B \Leftrightarrow \mu_D(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$,
(5) $E = A^c \Leftrightarrow \mu_E(x) = 1 - \mu_A(x)$ [28] .

Şimdi yukarıda tanımlanan fuzzy kümeler üzerindeki özelliklere örnekler verelim.

Örnek

$X = \{a, b, c\}$ olsun.

(1) $A = \{(a, 0.4), (b, 0.6), (c, 0.2)\}$ ve $B = \{(a, 0.7), (b, 0.8), (c, 0.5)\}$ iki fuzzy küme olsun.

$\mu_A(a) = 0.4 \leq 0.7 = \mu_B(a)$

$\mu_A(b) = 0.6 \leq 0.8 = \mu_B(b)$

$\mu_A(c) = 0.2 \leq 0.5 = \mu_B(c)$ olduğundan $A \leq B$ dir.

(2) $A = \{(a, 0.5), (b, 0), (c, 0.9)\}$ ve $B = \{(a, 0.5), (b, 0), (c, 0.9)\}$ iki fuzzy küme olsun.

$\mu_A(a) = 0.5 = \mu_B(a)$

$\mu_A(b) = 0 = \mu_B(b)$

$\mu_A(c) = 0.9 = \mu_B(c)$ olduğundan $A = B$ dir.

(3) $A = \{(a, 0.9), (b, 0.3), (c, 0.5)\}$ ve $B = \{(a, 0.7), (b, 0.2), (c, 0.6)\}$ iki fuzzy küme olsun.

$\mu_C(a) = maks\{\mu_A(a) = 0.9, \mu_B(a) = 0.7\} = 0.9$

$\mu_C(b) = maks\{\mu_A(b) = 0.3, \mu_B(b) = 0.2\} = 0.3$

$\mu_C(c) = maks\{\mu_A(c) = 0.5, \mu_B(c) = 0.6\} = 0.6$

olduğundan $C = A \vee B$ fuzzy kümesi $C = \{(a, 0.9), (b, 0.3), (c, 0.6)\}$ dir.

(4) $A = \{(a, 0.4), (b, 0.7), (c, 0.9)\}$ ve $B = \{(a, 0.7), (b, 0.8), (c, 0.1)\}$ iki fuzzy kümesi olsun.

$\mu_D(a) = min\{\mu_A(a) = 0.4, \mu_B(a) = 0.7\} = 0.4$

$\mu_D(b) = min\{\mu_A(b) = 0.7, \mu_B(b) = 0.8\} = 0.7$

$\mu_D(c) = min\{\mu_A(c) = 0.9, \mu_B(c) = 0.1\} = 0.1$

olduğundan $D = A \wedge B$ fuzzy kümesi $D = \{(a, 0.4), (b, 0.7), (c, 0.1)\}$ dır.

(5) $A = \{(a, 0.9), (b, 0.3), (c, 0.6)\}$ fuzzy küme olsun.

$\mu_{A^c}(a) = 1 - \mu_A(a) = 1 - 0.9 = 0.1$

$\mu_{A^c}(b) = 1 - \mu_A(b) = 1 - 0.3 = 0.7$

$\mu_{A^c}(c) = 1 - \mu_A(c) = 1 - 0.6 = 0.4$ olduğundan $A^c = \{(a, 0.1), (b, 0.7), (c, 0.4)\}$ fuzzy kümesidir.

2.1.4. Tanım

$\{A_j : j \in J\}$ fuzzy kümeler ailesi için keyfi birleşim ve kesişim,

$C = \bigvee_{j \in J} A_j \Leftrightarrow C(x) = sup_{j \in J}\{A_j(x) : x \in X\}$
$D = \bigwedge_{j \in J} A_j \Leftrightarrow D(x) = inf_{j \in J}\{A_j(x) : x \in X\}$

şeklinde ifade edilir [28].

2.1.5. Önerme

$X \neq \varnothing$ bir küme ve $A, B, C \in I^X$ olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

(1) $A \vee B = B \vee A$
(2) $A \wedge B = B \wedge A$

(3) $A \vee A = A = A \wedge A$
(4) $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
(5) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
(6) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
(7) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
(8) $A \leq B \Rightarrow A \vee B = B$
(9) $A \leq B \Rightarrow A \wedge B = A$ [28].

2.1.6. Önerme

$\{A_j : j \in J\}$ fuzzy kümeler ailesi ve $B \in I^X$ olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

(1) $B \vee (\bigwedge_{j \in J} A_j) = \bigwedge_{j \in J}(B \vee A_j)$
(2) $B \wedge (\bigvee_{j \in J} A_j) = \bigvee_{j \in J}(B \wedge A_j)$
(3) $(\bigwedge_{j \in J} A_j)^c = \bigvee_{j \in J} A_j^c$
(4) $(\bigvee_{j \in J} A_j)^c = \bigwedge_{j \in J} A_j^c$ [28].

2.1.7. Önerme

$X \neq \varnothing$ bir küme ve $A, B, C \in I^X$ olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

(1) $A \vee \varnothing = A$
(2) $A \wedge \varnothing = \varnothing$
(3) $A \vee X = X$
(4) $A \wedge X = A$
(5) $\varnothing^c = X$
(6) $X^c = \varnothing$ [28].

2.1.8. Tanım

$X \neq \varnothing$ ve A, X de bir fuzzy küme olmak üzere $SuppA = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$ kümesine A nın support(destek) kümesi denir [18].

2.1.9. Tanım

$X \neq \varnothing$ ve A, X de bir fuzzy küme olsun. $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere, $A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$ kümesine A nın bir seviye alt kümesi denir [14].

2.1.10. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme ve τ, I^X deki fuzzy kümelerden oluşan bir alt aile olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan τ ailesine X üzerinde Chang anlamında fuzzy topoloji ve (X, τ) ikilisine de Chang anlamında fuzzy topolojik uzay denir.

(t_1) $\emptyset, X \in \tau$,

(t_2) $A_1, A_2, ..., A_n \in \tau$ için $\wedge_{i \in J}^{n} A_j \in \tau$,

(t_3) $\{A_j\}_{j \in J} \in \tau$ için $\vee_{j \in J} A_j \in \tau$ [5].

Örnek

$X = \{a, b, c, d\}$ olmak üzere,

$A = \{(a, 0.2), (b, 0.4), (c, 0.8), (d, 0)\}$,

$B = \{(a, 0.7), (b, 0.1), (c, 0.3), (d, 0.3)\}$,

$C = \{(a, 0.2), (b, 0.1), (c, 0.3), (d, 0)\}$,

$D = \{(a, 0.7), (b, 0.4), (c, 0.8), (d, 0.3)\}$ fuzzy kümelerini alalım.

$\tau = \{\varnothing, X, A, B, C, D\}$ fuzzy kümelerinden oluşan aile bir fuzzy topolojidir. Gerçekten,

(t_1) $\varnothing, X \in \tau$ dır.

(t_2) $A \wedge B \Rightarrow \forall x \in X$ için $min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ olduğundan,

$A \wedge B = C = \{(a, 0.2), (b, 0.1), (c, 0.3), (d, 0)\}$,

$A \wedge C = C = \{(a, 0.2), (b, 0.1), (c, 0.3), (d, 0)\}$,

$A \wedge D = A = \{(a, 0.2), (b, 0.4), (c, 0.8), (d, 0)\}$,

$B \wedge C = C = \{(a, 0.2), (b, 0.1), (c, 0.3), (d, 0)\}$,

$B \wedge D = B = \{(a, 0.7), (b, 0.1), (c, 0.3), (d, 0.3)\}$,

$C \wedge D = C = \{(a, 0.2), (b, 0.1), (c, 0.3), (d, 0)\}$ dır.

Buradan $\forall A, B \in \tau$ için $A \wedge B \in \tau$ olduğundan (t_2) şartı sağlanır.

(t_3) $A \vee B \Rightarrow \forall x \in X$ için $maks\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ olduğundan,

$A \vee B = D = \{(a, 0.7), (b, 0.4), (c, 0.8), (d, 0.3)\}$,

$A \vee C = A = \{(a, 0.2), (b, 0.4), (c, 0.8), (d, 0)\}$,

$A \vee D = D = \{(a, 0.7), (b, 0.4), (c, 0.8), (d, 0.3)\}$,

$B \vee C = B = \{(a, 0.7), (b, 0.1), (c, 0.3), (d, 0.3)\}$,

$B \vee D = D = \{(a, 0.7), (b, 0.4), (c, 0.8), (d, 0.3)\}$,

$C \vee D = D = \{(a, 0.7), (b, 0.4), (c, 0.8), (d, 0.3)\}$

$A \vee B \vee C \vee D = D = \{(a, 0.7), (b, 0.4), (c, 0.8), (d, 0.3)\}$ dır.

Buradan $\forall A, B \in \tau$ için $A \vee B \in \tau$ olduğundan (t_3) şartı sağlanır.

O halde τ ailesi bir fuzzy topolojidir.

2.1.11. Tanım

X boştan farklı bir küme, $\lambda \in (0, 1]$ olmak üzere, X deki P_x^λ fuzzy kümesine X de fuzzy nokta denir ve $P_x^\lambda : X \to I$ üyelik fonksiyonu,

$$P_x^\lambda(y) = \begin{cases} \lambda, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Burada x' e P_x^λ fuzzy noktasının dayanağı(support) ve λ' ya da P_x^λ fuzzy noktasının değeri denir [18].

Örnek

$X = \{a,b,c\}$ olsun ve A fuzzy kümesi $A = \{(a,0.2),(b,0.5),(c,0.7)\}$ şeklinde tanımlansın. $P_a^{0.2}, P_b^{0.5}, P_c^{0.7}$ fuzzy noktaları;

$P_a^{0.2} = \{(a,0.2),(b,0),(c,0)\}$,

$P_b^{0.5} = \{(a,0),(b,0.5),(c,0)\}$,

$P_c^{0.7} = \{(a,0),(b,0),(c,0.7)\}$ olarak tanımlanır.

2.1.12. Tanım

$A \in I^X$ ve P_x^λ bir fuzzy nokta olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $\lambda \leq \mu_A(x)$ ise, P_x^λ fuzzy noktası A fuzzy kümesinin elemanıdır denir ve $P_x^\lambda \in A$ şeklinde gösterilir. Yani,

$P_x^\lambda \in A \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\lambda \leq \mu_A(x)$ dır [18].

2.1.13. Tanım

(X,τ) fuzzy topolojik uzay ve P_x^λ bir fuzzy nokta olsun. P_x^λ fuzzy noktasını içeren en az bir $A \in \tau$ fuzzy kümesini kapsayan N fuzzy kümesine, P_x^λ fuzzy noktasının fuzzy komşuluğu denir. Yani;

N, P_x^λ fuzzy noktasının fuzzy komşuluğu $\Leftrightarrow \exists A \in \tau$ var öyle ki $P_x^\lambda \in A \leq N$.

P_x^λ fuzzy noktasının tüm fuzzy komşuluklarının ailesi,

$N(P_x^\lambda) = \{N \in I^X : N, P_x^\lambda$ fuzzy noktasının fuzzy komşuluğu $\}$ ile gösterilir [18].

2.1.14. Teorem

(X,τ) fuzzy topolojik uzay ve P_x^λ bir fuzzy nokta olmak üzere $N(P_x^\lambda)$ fuzzy komşuluklar ailesi, aşağıdaki komşuluk aksiyomlarını sağlar:

$N_1)$ $\forall A \in N(P_x^\lambda)$ için $P_x^\lambda \in A$ dır.

$N_2)$ $\forall A_1, A_2 \in N(P_x^\lambda)$ için $A_1 \wedge A_2 \in N(P_x^\lambda)$ dır.

$N_3)$ $A \in N(P_x^\lambda)$ ve $A \leq B$ ise, $B \in N(P_x^\lambda)$ dır.

$N_4)$ $N \in N(P_x^\lambda)$ olsun. $A \leq N$ olacak şekilde bir $A \in N(P_x^\lambda)$ öyle ki, $P_y^\lambda \in A$ şartını sağlayan her P_y^λ fuzzy noktası için $N \in N(P_y^\lambda)$ dır [18].

2.1.15. Tanım

(X, τ) fuzzy topolojik uzay, P_x^λ bir fuzzy nokta, $N(P_x^\lambda), P_x^\lambda$ fuzzy noktasının komşuluklar ailesi ve $E(P_x^\lambda) \leq N(P_x^\lambda)$ olsun. Eğer $\forall N \in N(P_x^\lambda)$ için $\exists A \in E(P_x^\lambda)$ var öyle ki $A \leq N$ ise, $E(P_x^\lambda)$ ya P_x^λ nın komşuluklar tabanı denir [18].

2.1.16. Tanım

$A \in I^X$ ve P_x^λ herhangi bir fuzzy nokta olmak üzere eğer $\lambda + \mu_A(x) > 1$ oluyorsa, bu durumda P_x^λ fuzzy noktası ile A fuzzy kümesi çakışımsıdır (quasi-coincident) denir ve $P_x^\lambda q A$ şeklinde gösterilir [18].

Örnek

$X = \{a, b, c\}$ olsun. $A = \{(a, 0.7), (b, 0.7), (c, 0.9)\}$ fuzzy kümesi ve $P_b^{0.7} = \{(a, 0), (b, 0.7), (c, 0)\}$ fuzzy nokta olmak üzere, $b \in X$ için $\lambda + \mu_A(b) = 0.7 + 0.7 = 1.4 > 1$ olduğundan $P_b^{0.7} q A$ dır.

2.1.17. Tanım

$A, B \in I^X$ olmak üzere, $\exists x \in X$ için $\mu_A(x) + \mu_B(x) > 1$ oluyorsa, A ve B kümeleri çakışımsıdır denir ve AqB şeklinde gösterilir [18].

Örnek

$X = \{a, b, c\}$ olsun. $A = \{(a, 0.4), (b, 0.6), (c, 0.2)\}$ ve $B = \{(a, 0.3), (b, 0.5), (c, 0.9)\}$ fuzzy kümeleri olmak üzere, $c \in X$ için $\mu_A(c) + \mu_B(c) = 0.2 + 0.9 = 1.1 > 1$ olduğundan AqB dir.

2.1.18. Teorem

$A, B \in I^X$ olsun. Bu durumda, $A \leq B \Leftrightarrow A$ fuzzy kümesi B^c ile çakışımsı değildir [18].

İspat

$$\begin{aligned} A \leq B &\Rightarrow \forall x \in X \quad \text{için} \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \\ &\Rightarrow \forall x \in X \quad \text{için} \quad \mu_A(x) + 1 \leq \mu_B(x) + 1 \\ &\Rightarrow \forall x \in X \quad \text{için} \quad \mu_A(x) + 1 - \mu_B(x) \leq 1 \\ &\Rightarrow \forall x \in X \quad \text{için} \quad \mu_A(x) + \mu_{B^c}(x) \leq 1 \end{aligned}$$

Dolayısıyla, A fuzzy kümesi B^c fuzzy kümesi ile çakışımsı değildir. Yani, $A \not{q} B^c$ dir.

Tersine, A fuzzy kümesi B^c fuzzy kümesi ile çakışımsı olmasın.

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad \text{için} \quad \mu_A(x) + \mu_{B^c}(x) \leq 1 &\Rightarrow \mu_A(x) \leq 1 - \mu_{B^c}(x) \\ &\Rightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \\ &\Rightarrow A \leq B. \end{aligned}$$

2.1.19. Tanım

(X, τ) bir fuzzy topolojik uzay, $N \in \tau$ ve P_x^λ bir fuzzy nokta olsun. Eğer en az bir $B \in \tau$ kümesi için $P_x^\lambda q B$ ve $B \leq N$ oluyorsa, N fuzzy kümesine P_x^λ fuzzy noktasının Q-komşuluğu denir ve P_x^λ nın bütün Q-komşulukları $N_Q(P_x^\lambda) = \{N_Q \in I^X : N_Q, P_x^\lambda$ fuzzy noktasının Q-komşuluğu $\}$ ile gösterilir [18].

2.1.20. Teorem

(X, τ) fuzzy topolojik uzay ve P_x^λ bir fuzzy nokta olmak üzere, $N_Q(P_x^\lambda)$ Q-komşulukların ailesi aşağıdaki şartları sağlar:

$N_1)$ $\forall A \in N_Q(P_x^\lambda)$ için $P_x^\lambda q A$ dır.

$N_2)$ $\forall A_1, A_2 \in N_Q(P_x^\lambda)$ için $A_1 \wedge A_2 \in N_Q(P_x^\lambda)$ dır.

$N_3)$ $A \in N_Q(P_x^\lambda)$ ve $A \leq B$ ise, $B \in N_Q(P_x^\lambda)$ dır.

N_4) $N \in N_Q(P_x^\lambda)$ ise, her $P_y^\lambda qV$ için $V \in N_Q(P_y^\lambda)$ ve $V \leq N$ olacak şekilde bir $V \in N_Q(P_x^\lambda)$ vardır [18].

Fuzzy topoloji tanımını verdikten sonra Tripathy ve Ray [24] tarafından fuzzy topolojilerle elde edilen sabitleştirilmiş fuzzy topolojik uzay tanımını verelim.

2.1.21. Tanım

(X, τ_1) ve (X, τ_2) iki fuzzy topolojik uzay olsun. Fuzzy kümelerden oluşan $\tau_1(\tau_2)$ ailesi, $\tau_1(\tau_2) = \{A_1 \in I^X : X$ de $A_1 q A_2$ olacak şekilde A_2 fuzzy kümesi için A_3 τ_2 açık var öyle ki $A_3 q A_2$ ve τ_1 kapalı $\overline{A_3} \leq A_1\}$ şeklinde tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan aile X üzerinde fuzzy topolojidir ve bu topolojiye sabitleştirilmiş fuzzy topoloji denir. $(X, \tau_1(\tau_2))$ uzayına da sabitleştirilmiş fuzzy topolojik uzay denir [24].

2.2. Soft Topolojik Uzaylar

Bu bölümde soft küme, soft topoloji tanımları ve ilgili teoremler verilecektir.

2.2.1. Tanım

(1) X evrensel küme, E parametrelerin kümesi, $A \subset E$ ve $P(X)$; X in kuvvet kümesi olsun. Bu durumda $F : A \to P(X)$ küme değerli fonksiyon olmak üzere, (F, A) ikilisine veya F_A ya (X, A) üzerinde bir soft küme denir ve X üzerindeki tüm soft kümelerin ailesi $S(X, A)$ ile göstreilir.

(2) X evrensel küme, E parametrelerin kümesi ve $P(X)$; X in kuvvet kümesi olsun. Bu durumda $F : E \to P(X)$ küme değerli fonksiyon olmak üzere (F, E) ikilisine veya F_E ye (X, E) üzerinde bir soft küme denir.

$e \in A$ için, $F(e)$, (F, A) soft kümesinin e-yaklaşımlı elemanlarının kümesi olarak dikkate alınabilir. Açıkça, bir soft küme klasik anlamda bir küme değildir. Diğer bir ifade ile X üzerinde soft küme X evrensel kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir ailesidir [15].

Yukarıda verilen soft küme tanımının genişletilmiş halini verelim.

2.2.2. Tanım

X evrensel küme , E parametrelerin kümesi, $A \subset E$ ve $P(X)$; X in kuvvet kümesi olsun. Buna göre (F, A) soft kümesi (F, E) soft kümesi olarak şu şekilde düşünülebilir. $F : E \to P(X), F(e) \neq \emptyset, e \in A, F(e) = \emptyset, e \notin A$. Burada (F, E) kümesine (F, A) soft kümesinin genişletilmiş kümesi denir.

X üzerindeki tüm soft kümelerin ailesi $S(X, E)$ ile gösterilir. Bundan sonraki tanımlarda kullandığımız soft kümeler genişletilmiş soft kümelerdir [2].

Örnek

$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ kümesi evlerin kümesi ve $E =$ {pahalı,güzel,ahşap, ucuz, bahçeli} $= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametrelerin kümesi olsun. (F, E) soft kümesi, bir A kişisinin satın almayı düşündüğü evlerin özelliklerini tanımlasın.

F dönüşümünü düşünelim: Örneğin, $F(e_1)$ "pahalı evler" anlamındadır.

$F(e_1) = \{h_2, h_4\}$,
$F(e_2) = \{h_1, h_3\}$,
$F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$,
$F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}$
$F(e_5) = \{h_1\}$

olsun. Buradan (F, E) soft kümesi,

$(F, E) =$ { (pahalı ev,$\{h_2, h_4\}$), (güzel ev,$\{h_1, h_3\}$), (ahşap ev,$\{h_3, h_4, h_5\}$), (ucuz ev, $\{h_1, h_3, h_5\}$), (bahçeli ev,$\{h_1\}$)} dir [15].

Örnek

$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ evrensel küme, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi ve $A = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E$ olsun. $F_A = \{(e_1, \{h_2, h_3\}), (e_2, \{h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_4, h_5\}), (e_4, \varnothing)\}$ soft kümesi genişletilmiş soft kümedir.

2.2.3. Tanım

$F_A, G_B \in S(X,E)$ olsun. $\forall e \in E$ için $F_A(e) \subset G_B(e)$ ise, F_A' ya G_B' nin alt kümesi denir ve $F_A \tilde{\subset} G_B$ ile gösterilir [2].

2.2.4. Tanım

$F_A, G_B \in S(X,E)$ olsun. $F_A \tilde{\subset} G_B$ ve $G_B \tilde{\subset} F_A$ ise, F_A ve G_B kümelerine eşit soft kümeler denir [2].

2.2.5. Tanım

$F_A, G_B \in S(X,E)$ olsun. Her $e \in E$ için $H_C(e) = F_A(e) \cap G_B(e)$ olmak üzere H_C kümesine F_A ve G_B soft kümelerinin kesişimi denir ve $H_C = F_A \tilde{\cap} G_B$ ile gösterilir [2].

2.2.6. Tanım

$F_A, G_B \in S(X,E)$ olsun. Her $e \in E$ için $H_C(e) = F_A(e) \cup G_B(e)$ olmak üzere H_C kümesine F_A ve G_B soft kümelerinin birleşimi denir ve $H_C = F_A \tilde{\cup} G_B$ ile gösterilir [2].

Örnek

$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ evrensel küme, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $A = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B = \{e_2, e_3\}$ parametre kümeleri ve

$F_A = \{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, \{h_3, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_4, h_5\}), (e_4, \varnothing)\}$
$G_B = \{(e_1, \varnothing), (e_2, \{h_3\}), (e_3, \{h_2, h_4\}), (e_4, \varnothing)\}$ soft kümeleri olsun.

$\forall e \in E$ için $G_B(e) \subset F_A(e)$ olduğundan $G_B \tilde{\subset} F_A$ dir.

F_A ve G_B soft kümelerinin birleşimi her $e \in E$ için,

$H_C(e_1) = F_A(e_1) \cup G_B(e_1) = \{h_1, h_2\}$
$H_C(e_2) = F_A(e_2) \cup G_B(e_2) = \{h_3, h_5\}$
$H_C(e_3) = F_A(e_3) \cup G_B(e_3) = \{h_2, h_4, h_5\}$
$H_C(e_4) = F_A(e_4) \cup G_B(e_4) = \varnothing$

$H_C = \{(e_1, \{h_1, h_2\}), (e_2, \{h_3, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_4, h_5\}), (e_4, \varnothing)\}$

soft kümesidir.

F_A ve G_B soft kümelerinin kesişimi her $e \in E$ için,

$$H_C(e_1) = F_A(e_1) \cap G_B(e_1) = \varnothing$$
$$H_C(e_2) = F_A(e_2) \cap G_B(e_2) = \{h_3\}$$
$$H_C(e_3) = F_A(e_3) \cap G_B(e_3) = \{h_2, h_4\}$$
$$H_C(e_4) = F_A(e_4) \cap G_B(e_4) = \varnothing$$

$H_C = \{(e_1, \varnothing), (e_2, \{h_3\}), (e_3, \{h_2, h_4\}), (e_4, \varnothing)\}$ soft kümesidir.

2.2.7. Tanım

$E = \{e_1, e_2, e_3, ..., e_n\}$ parametrelerin bir kümesi olmak üzere $\neg E = \{\neg e_1, \neg e_2, \neg e_3, ..., \neg e_n\}$ kümesine parametre kümesinin değili denir. Burada $\neg e_i$ nin anlamı, her i için e_i parametresinin değilidir [13].

2.2.8. Önerme

E parametrelerin kümesi ve $A, B \subset E$ olsun. Bu durumda,

(1) $\neg(\neg A) = A$

(2) $\neg(A \cup B) = (\neg A \cup \neg B)$

(3) $\neg(A \cap B) = (\neg A \cap \neg B)$ dır [13].

2.2.9. Tanım

F_A , X evrensel kümesi üzerinde soft küme olsun. F_A soft kümesinin tümleyeni,

$$F_A^c : \neg A \to P(X), F^c(\alpha) = X - F(\neg\alpha), \forall\alpha \in \neg A$$

şeklinde tanımlanır [13].

Örnek

$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ kümesi evlerin kümesi ve $E = \{$pahalı,güzel,ahşap, ucuz, bahçeli$\} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametrelerin kümesi olsun.

(F, E) soft kümesi,

$(F, E) = \{$(pahalı ev, $\{h_2, h_4\}$), (güzel ev, $\{h_1, h_3\}$), (ahşap ev, $\emptyset$), (ucuz ev, $\{h_1, h_3, h_5\}$), (bahçeli ev, $\{h_1\}$)$\}$

alalım.

Buradan $(F, E)^c$ kümesi,

$(F, E)^c = \{$(pahalı değil, $\{h_1, h_3, h_5, h_6\}$), (güzel değil, $\{h_2, h_4, h_5, h_6\}$), (ahşap değil, $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6)$), (ucuz değil, $\{h_2, h_4, h_6\}$), (bahçeli değil, $\{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$)$\}$

seklindedir [13].

Şimdi tümleyen tanımının farklı bir ifadesini verelim.

2.2.10. Tanım

$F_A \in S(X, E)$ olsun. (F, A) soft kümesinin tümleyeni F_A^c ile gösterilir ve $F_A^c : E \to I^X$ e bir dönüşüm olmak üzere $F_A^c(e) = X - F_A(e)$ şeklinde tanımlanır. F_A^c'ye F_A' nın soft tümleyen fonksiyonu denir.

$(F_A^c)^c = F_A$ dır [2].

Örnek

$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ evrensel küme, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ parametre kümesi ve $A = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E$ olsun.

$(F, A) = \{(e_1, \{h_2\}), (e_2, \{h_1, h_3\}), (e_3, \{h_1, h_2, h_4\}), (e_4, \varnothing)\}$ olmak üzere,

$(F^c, A) = \{(e_1, \{h_1, h_3, h_4\}), (e_2, \{h_2, h_4\}), (e_3, \{h_3\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_3, h_4\})\}$ şeklindedir.

2.2.11. Tanım

$F_A \in S(X, E)$ olsun. Bu durumda $\forall e \in E, F(e) = \emptyset$ ise F_A soft kümesine boş soft küme denir ve Φ ile gösterilir [2].

Örnek

X evrensel kümesi ahşap evlerden oluşan küme olarak dikkate alınsın. $X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ ve $E = \{$ tuğla, kerpiç, çelik, taş$\}$ olsun. Bu durumda $(F, E) = \{$ (tuğla evler, $\emptyset$), (kerpiç evler, $\emptyset$), (çelik evler, $\emptyset$), (taş evler $\emptyset$)$\}$ soft kümesi boş soft kümedir [13].

2.2.12. Tanım

$F_E \in S(X, E)$ olsun. Bu durumda $\forall e \in E, F_E(e) = X$ ise F_E soft kümesine evrensel soft küme denir ve $\tilde{E}$ ile gösterilir [2].

2.2.13. Tanım

$F_A \in S(X, E)$ olsun. Bu durumda $\forall e \in A \subset E$, için $F_A(e) = X$ ve $\forall e \in E \backslash A$ için $F_A(e) = \emptyset$ ise F_A soft kümesine yerel evrensel soft küme denir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir [2].

Örnek

X evrensel kümesi ahşap evlerden oluşan küme olarak dikkate alınsın. $X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ ve $E = \{$tuğla değil, kerpiç değil, çelik değil, taş değil$\}$ olsun. Bu durumda $(G, E) = \{$ (tuğla olmayan evler, X), (kerpiç olmayan evler, X), (çelik olmayan evler, X), (taş olmayan evler, X)$\}$ soft kümesi evrensel soft kümedir [13].

Şimdi, Molodstov tarafından verilen, soft kümeler tanımında (1) anlamındaki soft kümeler için "VE" ve "VEYA" işlemlerinin tanımları verilecektir.

2.2.14. Tanım

X evrensel küme, E parametre kümesi ve $A, B \subset E$ olsun. "$(F, A) \quad VE \quad (G, B)$" soft kümesi $(F, A) \wedge (G, B)$ ile gösterilir ve $(F, A) \wedge (G, B) = (H, A \times B)$ şeklinde tanımlanır.

Burada $\forall(\alpha,\beta) \in A \times B$ için $H(\alpha,\beta) = F(\alpha) \cap G(\beta)$ dır [15].

Örnek

$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}$ evlerin kümesi olsun.
e_1 : çok maliyetli, e_2 :maliyetli, e_3 :ucuz, e_4 :güzel ve e_5 :bahçeli olmak üzere;
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}, A = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E$ ve $B = \{e_3, e_4, e_5\} \subset E$ olsun.

$(F,A) = \{(e_1, \{h_2, h_4, h_7, h_8\}), (e_2, \{h_1, h_3, h_5\}), (e_3, \{h_6, h_9, h_{10}\})\}$
$(G,B) = \{(e_3, \{h_6, h_9, h_{10}\}), (e_4, \{h_2, h_3, h_7\}), (e_5, \{h_5, h_6, h_8\})\}$

soft kümeler olmak üzere, $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ soft kümesi,

$H(e_1,e_4) = F(e_1) \cap G(e_4) = \{h_2, h_7\}$,
$H(e_1,e_5) = F(e_1) \cap G(e_5) = \{h_8\}$,
$H(e_1,e_3) = F(e_1) \cap G(e_3) = \varnothing$,
$H(e_2,e_4) = F(e_2) \cap G(e_4) = \{h_3\}$,
$H(e_2,e_5) = F(e_2) \cap G(e_5) = \{h_5\}$,
$H(e_2,e_3) = F(e_2) \cap G(e_3) = \varnothing$,
$H(e_3,e_4) = F(e_3) \cap G(e_4) = \varnothing$,
$H(e_3,e_5) = F(e_3) \cap G(e_5) = \{h_6\}$,
$H(e_3,e_3) = F(e_3) \cap G(e_3) = \{h_6, h_9, h_{10}\}$ dir [15].

2.2.15. Tanım

X evrensel küme, E parametre kümesi ve $A, B \subset E$ olsun. "(F,A) $\quad VEYA \quad$ (G,B)" soft kümesi $(F,A) \vee (G,B)$ ile gösterilir ve $(F,A) \vee (G,B) = (H, A \times B)$ şeklinde tanımlanır.

Burada $\forall(\alpha,\beta) \in A \times B$ için $h(\alpha,\beta) = F(\alpha) \cup G(\beta)$ dır [15].

Örnek

$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\}$ evlerin kümesi olsun.
e_1 : çok maliyetli, e_2 :maliyetli, e_3 :ucuz, e_4 :güzel ve e_5 :bahçeli olmak üzere;

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}, A = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E$ ve $B = \{e_3, e_4, e_5\} \subset E$ olsun.

$(F,A) = \{(e_1, \{h_2, h_4, h_7, h_8\}), (e_2, \{h_1, h_3, h_5\}), (e_3, \{h_6, h_9, h_{10}\})\}$
$(G,B) = \{(e_3, \{h_6, h_9, h_{10}\}), (e_4, \{h_2, h_3, h_7\}), (e_5, \{h_5, h_6, h_8\})\}$

soft kümeler olmak üzere, $(F,A) \vee (G,B) = (H, A \times B)$ soft kümesi,

$$\begin{aligned}
H(e_1,e_4) &= F(e_1) \cup G(e_4) = \{h_2, h_3, h_4, h_7, h_8\},\\
H(e_1,e_5) &= F(e_1) \cup G(e_5) = \{h_2, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8\},\\
H(e_1,e_3) &= F(e_1) \cup G(e_3) = \{h_2, h_4, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}\},\\
H(e_2,e_4) &= F(e_2) \cup G(e_4) = \{h_1, h_2, h_3, h_5, h_7\},\\
H(e_2,e_5) &= F(e_2) \cup G(e_5) = \{h_1, h_3, h_5, h_6, h_8\},\\
H(e_2,e_3) &= F(e_2) \cup G(e_3) = \{h_1, h_3, h_5, h_6, h_9, h_{10}\},\\
H(e_3,e_4) &= F(e_3) \cup G(e_4) = \{h_2, h_3, h_6, h_7, h_9, h_{10}\},\\
H(e_3,e_5) &= F(e_3) \cup G(e_5) = \{h_5, h_6, h_8, h_9, h_{10}\},\\
H(e_3,e_3) &= F(e_3) \cup G(e_3) = \{h_6, h_9, h_{10}\} \quad \text{dır [15].}
\end{aligned}$$

2.2.16. Önerme

E parametre kümesi, A, B ve $C \subset E, (F,A), (G,B)$ ve (H,C) soft kümeler olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

(1) $(F,A) \vee [(G,B) \vee (H,C)] = [(F,A) \vee (G,B)] \vee (H,C)$
(2) $(F,A) \wedge [(G,B) \wedge (H,C)] = [(F,A) \wedge (G,B)] \wedge (H,C)$
(3) $(F,A) \wedge [(G,B) \vee (H,C)] = [(F,A) \wedge (G,B)] \vee [(F,A) \wedge (H,C)]$
(4) $(F,A) \vee [(G,B) \wedge (H,C)] = [(F,A) \vee (G,B)] \wedge [(F,A) \vee (H,C)]$ [13].

2.2.17. Tanım

$F_A \in S(X,E)$ ve $A \subset E$ olsun. Her $e \in A$ için $F_A(e) = \{x\}$ ve $\forall e \in E \backslash A$ için $F_A(e) = \emptyset$ şeklinde tanımlanan F_A soft kümesine soft nokta denir.

Gösterimde kolaylık olması için soft noktayı x_A şeklinde göstereceğiz [21].

Örnek

$X=\{a,b,c\}, E=\{e_1,e_2,e_3\}, A=\{e_1,e_2\}$ olsun.
$x_A=\{(e_1,\{a\}),(e_2,\{a\}),(e_3,\emptyset)\}$ soft kümesi soft noktadır.

2.2.18. Önerme

J indeks kümesi ve $F_A, G_B, H_C, (F_A)_i, (G_B)_i \in S(X,E)$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler sağlanır.

(1)$F_A \tilde{\cap} F_A = F_A, F_A \tilde{\cup} F_A = F_A$
(2)$F_A \tilde{\cap} G_B = G_B \tilde{\cap} F_A, F_A \tilde{\cup} G_B = G_B \tilde{\cup} F_A$
(3)$F_A \tilde{\cup}(G_B \tilde{\cup} H_C) = (F_A \tilde{\cup} G_B)\tilde{\cup} H_C, F_A \tilde{\cap}(G_B \tilde{\cap} H_C) = (F_A \tilde{\cap} G_B)\tilde{\cap} H_C$
(4)$F_A \tilde{\cap}(\tilde{\cup}_{i\in J}(G_B)_i) = \tilde{\cup}_{i\in J}(F_A \tilde{\cap}(G_B)_i), F_A \tilde{\cup}(\tilde{\cap}_{i\in J}(G_B)_i) = \tilde{\cap}_{i\in J}(F_A \tilde{\cup}(G_B)_i)$
(5)$\Phi \tilde{\subseteq} F_A \tilde{\subseteq} \tilde{A} \tilde{\subseteq} \tilde{E}$
(6)$(F_A^c)^c = F_A$
(7)$(\tilde{\cap}_{i\in J}(F_A)_i)^c = \tilde{\cup}_{i\in J}(F_A)_i^c, (\tilde{\cup}_{i\in J}(F_A)_i)^c = \tilde{\cap}_{i\in J}(F_A)_i^c$
(8)$F_A \tilde{\subseteq} G_B \Rightarrow G_B^c \tilde{\subseteq} F_A^c$ [2].

İspat

(3) Birleşim tanımından $\forall e \in E$ için,

$$\begin{aligned}
(F_A \tilde{\cup}(G_B \tilde{\cup} H_C))(e) &= F_A(e) \cup (G_B \tilde{\cup} H_C)(e) \\
&= F_A(e) \cup (G_B(e) \cup H_C(e)) \\
&= (F_A(e) \cup G_B(e)) \cup H_C(e) \\
&= (F_A \tilde{\cup} G_B)(e) \cup H_C(e) \\
&= ((F_A \tilde{\cup} G_B)\tilde{\cup} H_C)(e)
\end{aligned}$$

dir.Böylece $(F_A \tilde{\cup}(G_B \tilde{\cup} H_C)) = ((F_A \tilde{\cup} G_B)\tilde{\cup} H_C)$ elde edilir.

(4) Birleşim ve kesişim tanımlarından $\forall e \in E$ için,

$$\begin{aligned}(F_A \tilde{\cap} (\tilde{\cup}_{i\in J}(G_B)_i)(e) &= F_A(e) \cap (\tilde{\cup}_{i\in J}(G_B)_i)(e)\\ &= F_A(e) \cap (\cup_{i\in J}(G_B)_i(e))\\ &= \cup_{i\in J}(F_A(e) \cap (G_B)_i(e))\\ &= \cup_{i\in J}(F_A \tilde{\cap} (G_B)_i)(e)\\ &= (\tilde{\cup}_{i\in J}(F_A \tilde{\cap} (G_B)_i))(e)\end{aligned}$$

dir. Böylece $F_A \tilde{\cap} (\tilde{\cup}_{i\in J}(G_B)_i) = \tilde{\cup}_{i\in J}(F_A \tilde{\cap} (G_B)_i)$ elde edilir.

(7) $\forall e \in E$ için,

$$\begin{aligned}(\tilde{\cap}_{i\in J}(F_A)_i)^c(e) &= X - (\tilde{\cap}_{i\in J}(F_A)_i)(e)\\ &= X - (\cap_{i\in J}(F_A)_i(e))\\ &= \cup_{i\in J}((F_A)_i(e))^c\\ &= (\tilde{\cup}_{i\in J}(F_A)_i^c)(e)\end{aligned}$$

dir. Böylece $(\tilde{\cap}_{i\in J}(F_A)_i)^c = \tilde{\cup}_{i\in J}(F_A)_i^c$ elde edilir

$(1)-(2)-(5)-(6)-(8)$ maddeleri benzer şekilde ispatlanabilir.

2.2.19. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme ve τ, X üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan soft kümelerin bir ailesi ise, (X, τ) çiftine soft topolojik uzay denir.

(t_1) $\Phi, \tilde{E} \in \tau$,
(t_2) $F_E, G_E \in \tau \Rightarrow F_E \cap G_E \in \tau$,
(t_3) $\forall i \in J$ için $(F_i)_E \in \tau \Rightarrow \sqcup_{i\in J}(F_i)_E \in \tau$ [21].

Örnek

$X = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve

$F_1 = \{(e_1, \{h_1\}), (e_2, \{h_2, h_3\})\}$,
$F_2 = \{(e_1, \{h_2, h_3\}), (e_2, \{h_3\})\}$,

$F_3 = \{(e_1, X\}, (e_2, \{h_2, h_3\})\}$
$F_4 = \{(e_1, \varnothing\}), (e_2, \{h_3\})\}$

soft kümelerini alalım.

$\tau = \{\Phi, \tilde{E}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$ ailesi X üzerinde soft topolojidir.

2.2.20. Tanım

$X \neq \varnothing$ üzerinde tanımlanan τ_1 ve τ_2 topolojileri verilmiş olsun. Her $F_A \in \tau_2$ için $F_A \in \tau_1$ oluyorsa τ_2 soft topolojisine τ_1 topolojisinden daha kaba denir [21].

2.2.21. Teorem

(X, τ_1) ve (X, τ_2) iki soft topolojik uzay olsun. $(X, \tau_1 \cap \tau_2)$ uzayı da soft topolojik uzaydır [21].

İspat

(t_1) $\Phi, \tilde{E} \in \tau_1$ ve $\Phi, \tilde{E} \in \tau_2$ olduğundan $\Phi, \tilde{E} \in \tau_1 \cap \tau_2$ dir.

(t_2) $F_A, G_B \in \tau_1 \cap \tau_2$ olsun. Buradan $F_A, G_B \in \tau_1$ ve $F_A, G_B \in \tau_2$ dir ve $F_A \tilde{\cap} G_B \in \tau_1$ ve $F_A \tilde{\cap} G_B \in \tau_2$ dir. Böylece $F_A \tilde{\cap} G_B \in \tau_1 \cap \tau_2$ olur.

(t_3) Her $i \in I$ için $(F_A)_i \in \tau_1 \cap \tau_2$ olsun. Buradan $(F_A)_i \in \tau_1$ ve $(F_A)_i \in \tau_2$ dir.

$\tilde{\cup}_{i \in I}(F_A)_i \in \tau_1, \tilde{\cup}_{i \in I}(F_A)_i \in \tau_2$ dir. Böylece $\tilde{\cup}_{i \in I}(F_A)_i \in \tau_1 \cap \tau_2$ olur.

$\tau_1 \cap \tau_2$ ailesi $t_1), t_2), t_3)$ şartını sağladığından topolojidir ve $(X, \tau_1 \cap \tau_2)$ uzayı soft topolojik uzaydır.

2.2.22. Tanım

$F_A \in S(X, E)$ ve $x \in X$ olsun. $\forall e \in E$ için $x \in F_A(e)$ ise, x, F_A soft kümesine aittir denir ve $x \tilde{\in} F_A$ şeklinde gösterilir [21].

2.2.23. Tanım

(X, τ) bir soft topolojik uzay, $F_A \in S(X, E)$ olsun. F_A soft kümesinin içi $(F_A)^\circ = \tilde{\cup}\{G_B : G_B$ soft açık küme ve $G_B \tilde{\subseteq} F_A\}$ şeklinde tanımlanır [29].

2.2.24. Önerme

(X, τ) bir soft topolojik uzay, $F_A \in S(X, E)$ olsun. F_A soft açık kümedir $\Leftrightarrow F_A = (F_A)^\circ$ dir [29].

2.2.25. Tanım

(X, τ) bir soft topolojik uzay, $F_A \in S(X, E)$ ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \tilde{\in} G_B \tilde{\subseteq} F_A$ olacak şekilde en az bir $G_B \in \tau$ varsa, x'e G_A kümesinin soft iç noktası denir [21].

2.2.26. Tanım

(X, τ) bir soft topolojik uzay, $F_A \in S(X, E)$ ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \tilde{\in} G_B \tilde{\subseteq} F_A$ olacak şekilde en az bir $G_B \in \tau$ varsa, F_A'ya x noktasının bir soft komşuluğu denir.

Bir x noktasının soft komşuluklar ailesi $N_\tau(x)$ ile gösterilir [21].

2.2.27. Önerme

(X, τ) bir soft topolojik uzay olsun. $N_\tau(x)$ komşuluk sistemi için aşağıdakiler sağlanır:

(1) Her $x \in X$ noktasının bir soft komşuluğu vardır.

(2) $F_A, G_B \in N_\tau(x)$ ise $F_A \tilde{\cap} G_B \in N_\tau(x)$ dir.

(3) $F_A \in N_\tau(x)$ ve $F_A \tilde{\subseteq} G_B$ ise $G_B \in N_\tau(x)$ dir [21].

Şimdi fuzzy küme ve soft küme arasındaki ilişkiyi verelim.

2.2.28. Önerme

Her fuzzy küme bir soft küme olarak dikkate alınabilir [3].

İspat

G bir fuzzy küme ve X evrensel kümesinden $[0,1]$ e $\mu_G(x) = sup\{\alpha : x \in G(\alpha)\}$ ile tanımlı μ_G, G fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu olsun. μ_G fonksiyonu için α seviye kümelerinin ailesi dikkate alınsın. Bu durumda $G(\alpha)$ ailesi bilinirse $\mu_G(x)$ fonksiyonları $\mu_G(x) = sup\{\alpha : x \in G(\alpha)\}$ eşitliği ile bulunabilir. Böylece her G fuzzy kümesi, aynı zamanda $(G, [0,1])$ şeklinde bir soft küme olarak dikkate alınabilir.

Fuzzy kümeler ve soft kümeler arasındaki bu ilişkiyi daha iyi anlamak için bunu bir örnekle açıklayalım.

Örnek

X evrensel kümesi $X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ olacak şekilde altı tane evden ve parametre kümesi, sadece evlerin cazipliğini değerlendiren sözel değişken "evlerin kalitesi" parametresinden oluşsun. Bu sözel değişken parametre için değişken terimlerin kümesi $E(\text{kalite}) = \{\text{en iyi,iyi,orta,kötü}\}$ şeklinde tanımlanabilir. Her bir değişken terim kendi fuzzy kümesi ile ilgilidir. Bunlardan ikisi;

$F_{\text{en iyi}} = \{(h_1, 0.2), (h_2, 0.7), (h_5, 0.9), (h_6, 1)\}$

$F_{\text{kötü}} = \{(h_1, 0.9), (h_2, 0.3), (h_3, 1), (h_4, 1), (h_5, 0.2)\}$

şeklinde düşünülebilir. $F_{\text{kötü}}$ fuzzy kümesinin α seviye kümeleri,

$F_{\text{kötü}}(0.2) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$,
$F_{\text{kötü}}(0.3) = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$,
$F_{\text{kötü}}(0.9) = \{h_1, h_3, h_4\}$,
$F_{\text{kötü}}(1) = \{h_3, h_4\}$ dir.

$A = \{0.2, 0.3, 0.9, 1\} \subset [0,1]$ parametrelerin kümesi ve her $\alpha \in A$ için $F_{\text{kötü}}(\alpha)$ ile tanımlı,

$F : A \to P(X)$ küme değerli dönüşümü dikkate alınsın. Böylece,

$(F_{\text{kötü}}, [0,1]) = \{(0.2, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}), (0.3, \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), (0.9, \{h_1, h_3, h_4\}),$
$(1, \{h_3, h_4\})\}$ bir soft kümedir.

3. FUZZY SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde fuzzy soft kümelerle yapılan işlemler ve fuzzy soft topoloji kavramı verilecektir. [8] da tanımlanan sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzay tanımı ve bu uzaydaki komşuluk, Q-komşuluk tanımları verilecektir.

3.1. Fuzzy Soft Topolojik Uzaylar

3.1.1. Tanım

(1) X evrensel küme, E parametrelerin kümesi, $A \subset E$ olsun. Buna göre $f : A \to I^X$ fonksiyon olmak üzere (f, A) ikilisine veya f_A ya X üzerinde bir fuzzy soft küme denir.

(2) X evrensel küme, E parametrelerin kümesi olsun. Buna göre $f : E \to I^X$ fonksiyon olmak üzere (f, E) ikilisine veya f_E ya X üzerinde bir fuzzy soft küme denir [12].

Yukarıdaki tanımda (1) de verilen fuzzy soft küme tanımının genişletilmiş hali olan fuzzy soft küme tanımını verelim.

3.1.2. Tanım

X evrensel küme, E parametrelerin kümesi, $A \subset E$ olsun. Buna göre (f, A) fuzzy soft kümesi (f, E) fuzzy soft kümesi olarak şu şekilde düşünülebilir.$f_A : E \to I^X, f_A(e) = \mu_{f_A}(e), e \in A, f_A(e) = 0, e \in E \backslash A$. Burada (f, E) kümesine (f, A) fuzzy soft kümesinin genişletilmiş kümesi denir.

Bundan sonra kullanacağımız (f, A) fuzzy soft kümeleri genişletilmiş fuzzy soft kümelerdir. X üzerindeki tüm fuzzy soft kümelerin ailesini $FS(X, E)$ ile gösterilecektir [20].

Örnek

$X = \{a, b, c, d\}, E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve $A = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E$.

$$\begin{aligned} f_A =&\{(e_1, \{(a, 0.5), (b, 0.3), (c, 0.7), (d, 0.8)\}), (e_2, \{(a, 0.8), (b, 0.1), (c, 0.4), (d, 0.2)\}), \\ &(e_3, \{(a, 0.3), (b, 0.6), (c, 0.2), (d, 0.9)\}), (e_4, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\})\} \end{aligned}$$

şeklinde fuzzy kümelerden oluşan aile f_A fuzzy soft kümesidir.

3.1.3. Tanım

$f_A, g_B \in FS(X,E)$ olsun. Her $e \in E$ için $f_A(e) \leq g_B(e)$ ise, f_A' ya g_B' nin fuzzy soft alt kümesi denir. Alt küme $f_A \sqsubseteq g_B$ ile gösterilir [27].

Örnek

$X = \{a,b,c\}, E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve $A = \{e_1, e_2\} \subset E$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E$.

$$f_A = \{(e_1, \{(a,0.2),(b,0.3),(c,0.5)\}),(e_2,\{(a,0.5),(b,0.7),(c,0.6)\}),(e_3,\{(a,0),(b,0),(c,0)\}),(e_4,\{(a,0),(b,0),(c,0)\})\}$$
$$g_B = \{(e_1, \{(a,0.4),(b,0.9),(c,0.8)\}),(e_2,\{(a,0.7),(b,0.8),(c,0.9)\}),(e_3,\{(a,0.4),(b,0.7),(c,0.7)\}),(e_4,\{(a,0),(b,0),(c,0)\})\}$$

fuzzy soft kümelerini alalım. $\forall e \in E$ için $f_A(e) \leq g_B(e)$ olduğundan f_A kümesi g_B' nin fuzzy soft alt kümesidir, yani $f_A \sqsubseteq g_B$ dir.

3.1.4. Tanım

$f_A, g_B \in FS(X,E)$ olsun. $f_A \sqsubseteq g_B$ ve $g_B \sqsubseteq f_A$ ise, f_A ve g_B eşittir denir [27].

3.1.5. Tanım

$f_A, g_B \in FS(X,E)$ olsun. Buna göre $\forall e \in E$ için $h_{A\cup B}(e) = f_A(e) \vee g_B(e)$ olmak üzere $h_{A\cup B}$ fuzzy soft kümesine, f_A ve g_B fuzzy soft kümelerinin birleşimi denir. Birleşim $h_{A\cup B} = f_A \sqcup g_B$ ile gösterilir [27].

Örnek

$X = \{a,b,c\}, E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve $A = \{e_1, e_2\} \subset E$ ve $B = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E$.

$f_A = \{(e_1, \{(a,0.3),(b,0.7),(c,0.9)\}),(e_2,\{(a,0.3),(b,0),(c,0.2)\}),(e_3,\{(a,0),(b,0),(c,0)\})\}$
$g_B = \{(e_1, \{(a,0.7),(b,0.1),(c,0.4)\}),(e_2,\{(a,0.3),(b,0.5),(c,0.2)\}),(e_3,\{(a,0.4),(b,0),(c,0.4)\})\}$

fuzzy soft kümelerini alalım. $h_{A\cup B} = f_A \sqcup g_B$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
h(e_1) = f(e_1) \vee g(e_1) =& \{(a,0.3),(b,0.7),(c,0.9)\} \vee \{(a,0.7),(b,0.1),(c,0.4)\} \\
=& \{(a,0.7),(b,0.7),(c,0.9)\}, \\
h(e_2) = f(e_2) \vee g(e_2) =& \{(a,0.3),(b,0),(c,0.2)\} \vee \{(a,0.3),(b,0.5),(c,0.2)\} \\
=& \{(a,0.3),(b,0.5),(c,0.2)\}, \\
h(e_3) = f(e_3) \vee g(e_3) =& \{(a,0),(b,0),(c,0)\} \vee \{(a,0.4),(b,0),(c,0.4)\} \\
=& \{(a,0.4),(b,0),(c,0.4)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{A\cup B} =& \{(e_1,\{(a,0.7),(b,0.7),(c,0.9)\}),(e_2,\{(a,0.3),(b,0.5),(c,0.2)\}),(e_3,\{(a,0.4), \\
& (b,0),(c,0.4)\})\}
\end{aligned}$$

$h_{A\cup B} = \{h(e_1), h(e_2), h(e_3)\}$ kümesidir.

3.1.6. Tanım

$f_A, g_B \in FS(X,E)$ olsun. Buna göre $\forall e \in E$ için $h_{A\cap B}(e) = f_A(e) \wedge g_B(e)$ olmak üzere $h_{A\cap B}$ fuzzy soft kümesine, f_A ve g_B fuzzy soft kümelerinin kesişimi denir. Kesişim $h_{A\cap B} = f_A \sqcap g_B$ ile gösterilir [27].

Örnek

Yukarıdaki örnek göz önüne alınırsa $h_{A\cap B} = f_A \sqcap g_B$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
h(e_1) = f(e_1) \wedge g(e_1) =& \{(a,0.3),(b,0.7),(c,0.9)\} \wedge \{(a,0.7),(b,0.1),(c,0.4)\} \\
=& \{(a,0.3),(b,0.1),(c,0.4)\}, \\
h(e_2) = f(e_2) \wedge g(e_2) =& \{(a,0.3),(b,0),(c,0.2)\} \wedge \{(a,0.3),(b,0.5),(c,0.2)\} \\
=& \{(a,0.3),(b,0),(c,0.2)\}, \\
h(e_3) = f(e_3) \wedge g(e_3) =& \{(a,0),(b,0),(c,0)\} \wedge \{(a,0.4),(b,0),(c,0.4)\} \\
=& \{(a,0),(b,0),(c,0)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h_{A\cap B} = \{(e_1,\{(a,0.3),(b,0.1),(c,0.4)\}),(e_2,\{(a,0.3),(b,0),(c,0.2)\}), \\
& (e_3,\{(a,0),(b,0),(c,0)\})\}
\end{aligned}$$

$h_{A\cap B} = \{h(e_1), h(e_2), h(e_3)\}$ kümesidir.

3.1.7. Tanım

$f_A \in FS(X,E)$ olsun. f_A fuzzy soft kümesinin tümleyeni, $f_A^c : E \to I^X, f_A^c(e) = 1 - f_A(e)$ şeklinde tanımlanır ve f_A^c ile gösterilir.

f_A^c'ye f_A'nın fuzzy soft tümleyen fonksiyonu denir. $(f_A^c)^c = f_A$ dir [27].

Örnek

$X = \{a, b, c\}, E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ve $A = \{e_1, e_2, e_3\} \subset E$.

$$\begin{aligned} f_A =& \{(e_1, \{(a, 0.5), (b, 0.3), (c, 0.7)\}), (e_2, \{(a, 0.2), (b, 0.3), (c, 0.8)\}), \\ & (e_3, \{(a, 0.9), (b, 0.4), (c, 0.8)\}), (e_3, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0)\})\} \end{aligned}$$

fuzzy soft kümesini alalım. $f_A^c(e) = 1 - f_A(e)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} f^c(e_1) =& \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}\} - \{(a, 0.5), (b, 0.3), (c, 0.7)\} \\ =& \{(a, 0.5), (b, 0.7), (c, 0.3)\} \\ f^c(e_2) =& \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}\} - \{(a, 0.2), (b, 0.3), (c, 0.8)\} \\ =& \{(a, 0.8), (b, 0.7), (c, 0.2)\} \\ f^c(e_3) =& \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}\} - \{(a, 0.9), (b, 0.4), (c, 0.8)\} \\ =& \{(a, 0.1), (b, 0.6), (c, 0.2)\} \\ f^c(e_1) =& \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\}\} - \{(a, 0), (b, 0), (c, 0)\} \\ =& \{(a, 1), (b, 1), (c, 1)\} \end{aligned}$$

$f_A^c = \{f^c(e_1), f^c(e_2), f^c(e_3), f^c(e_4)\}$ kümesidir.

3.1.8. Tanım

$f_\emptyset \in FS(X,E)$ kümesi boş fuzzy soft kümesi olarak adlandırılır ve $\tilde{\Phi}$ ile gösterilir. Burada $\forall e \in E$ için $f_{\tilde{\Phi}}(e) = 0$ dır ve $0(x) = 0$, her $x \in X$ [27].

Örnek

$X = \{a, b, c\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun.

$f_\emptyset = \{(e_1, \{(a,0),(b,0),(c,0)\}),(e_2, \{(a,0),(b,0),(c,0)\}),(e_3, \{(a,0),(b,0),$
$(c,0)\}),(e_4, \{(a,0),(b,0),(c,0)\})\}$

kümesi boş fuzzy soft kümesidir.

3.1.9. Tanım

$f_X \in FS(X,E)$ kümesi tam(mutlak) fuzzy soft kümesi olarak adlandırılır ve $\tilde{X}$ ile gösterilir. Burada $\forall e \in E$ için $f_X(e) = 1$ dır ve $1(x) = 1$, her $x \in X$ [27].

Örnek

$X = \{a, b, c\}, E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olsun.

$f_X = \{(e_1, \{(a,1),(b,1),(c,1)\}),(e_2, \{(a,1),(b,1),(c,1)\}),(e_3, \{(a,1),(b,1),$
$(c,1)\}),(e_4, \{(a,1),(b,1),(c,1)\})\}$

kümesi tam fuzzy soft kümesidir.

3.1.10. Önerme

J indeks kümesi ve $f_A, g_B, h_C, (f_A)_i, (g_B)_i \in FS(X,E), \forall i \in J$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(1)$f_A \sqcap f_A = f_A, f_A \sqcup f_A = f_A$
(2)$f_A \sqcap g_B = g_B \sqcap f_A, f_A \sqcup g_B = g_B \sqcup f_A$
(3)$f_A \sqcup (g_B \sqcup h_C) = (f_A \sqcup g_B) \sqcup h_C$ ve $f_A \sqcap (g_B \sqcap h_C) = (f_A \sqcap g_B) \sqcap h_C$
(4)$f_A \sqcap (\sqcup_{i\in J}(g_B)_i) = \sqcup_{i\in J}(f_A \sqcap (g_B)_i)vef_A \sqcup (\sqcap_{i\in J}(g_B)_i) = \sqcap_{i\in J}(f_A \sqcup (g_B)_i$
(5)$\tilde{\Phi} \sqsubseteq f_A \sqsubseteq \tilde{X}$
(6)$(\sqcap_{i\in J}(f_A)_i)^c = \sqcup_{i\in J}(f_A)_i^cve(\sqcup_{i\in J}(f_A)_i)^c = \sqcap_{i\in J}(f_A)_i^c$
(7)$f_A \sqsubseteq g_B \Rightarrow (g_B)^c \sqsubseteq (f_A)^c$
(8)$f_A \sqcap g_B \sqsubseteq f_A, g_B$ ve $f_A, g_B \sqsubseteq f_A \sqcup g_B$ [27].

İspat

(3) Birleşim tanımından ve $\forall e \in E$ için,

$$\begin{aligned}
(f_A \sqcup (g_B \sqcup h_C))(e) &= f_A(e) \vee (g_B \sqcup h_C)(e) \\
&= f_A(e) \vee (g_B(e) \vee h_C(e)) \\
&= (f_A(e) \vee g_B(e)) \vee h_C(e) \\
&= (f_A \sqcup g_B)(e) \vee h_C(e) \\
&= ((f_A \sqcup g_B) \sqcup h_C)(e)
\end{aligned}$$

Böylece $(f_A \sqcup (g_B \sqcup h_C)) = ((f_A \sqcup g_B) \sqcup h_C)$ elde edilir.

(4) Birleşim ve kesişim tanımından ve $\forall e \in E$ için,

$$\begin{aligned}
(f_A \sqcap (\sqcup_{i \in J}(g_B)_i))(e) &= f_A(e) \wedge (\sqcup_{i \in J}(g_B)_i))(e) \\
&= f_A(e) \wedge (\vee_{i \in J}(g_B)_i(e)) \\
&= \vee_{i \in J}(f_A(e) \wedge (g_B)_i(e)) \\
&= \vee_{i \in J}(f_A \sqcap (g_B)_i)(e) \\
&= (\sqcup_{i \in J}(f_A \sqcap (g_B)_i))(e)
\end{aligned}$$

dir. Böylece $f_A \sqcap (\sqcup_{i \in J}(g_B)_i) = \sqcup_{i \in J}(f_A \sqcap (g_B)_i)$ elde edilir.

(6) $\forall e \in E$ için,

$$\begin{aligned}
(\sqcap_{i \in J}(f_A)_i)^c(e) &= 1 - (\sqcap_{i \in J}(f_A)_i)(e) \\
&= 1 - (\wedge_{i \in J}(f_A)_i(e)) \\
&= (\vee_{i \in J}(f_A)_i^c(e)) \\
&= \sqcup_{i \in J}(f_A)_i^c(e)
\end{aligned}$$

dir. Böylece $(\sqcap_{i \in J}(f_A)_i)^c = \sqcup_{i \in J}(f_A)_i^c$ elde edilir.

$(1) - (2) - (5) - (7) - (8)$ maddeleri benzer şekilde ispatlanabilir.

3.1.11. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme ve τ, X üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan fuzzy soft kümelerin ailesi ise, (X, τ) çiftine fuzzy soft topolojik uzay denir.

$t_1)$ $\tilde{\Phi}$, $\tilde{X} \in \tau$,
$t_2)$ $f_A, g_B \in \tau \Rightarrow f_A \sqcap g_B \in \tau$,
$t_3]$ $\forall i \in J$ için $(f_A)_i \in \tau \Rightarrow \sqcup_{i\in J}(f_A)_i \in \tau$ [20].

τ topolojisine ait her elemana fuzzy soft açık küme denir.

Örnek

$X = \{a, b, c, d\}, E = \{e_1, e_2, e_3\}$ olsun.

$$\begin{aligned}
f_A =& \{(e_1, \{(a, 0.1), (b, 0.2), (c, 0.4), (d, 0.2)\}), (e_2, \{(a, 0.2), (b, 0.4), (c, 0.8),\\
&(d, 0.7)\}), (e_3, \{(a, 0.7), (b, 0.9), (c, 0.3), (d, 0.1)\})\\
g_B =& \{(e_1, \{(a, 0.3), (b, 0.4), (c, 0.7), (d, 0.3)\}), (e_2, \{(a, 0.2), (b, 0.2), (c, 0.5),\\
&(d, 0.6)\}), (e_3, \{(a, 0.1), (b, 0.3), (c, 0.9), (d, 1)\})\\
h_C =& \{(e_1, \{(a, 0.3), (b, 0.4), (c, 0.7), (d, 0.8)\}), (e_2, \{(a, 0.3), (b, 0.4), (c, 0.8),\\
&(d, 0.9)\}), (e_3, \{(a, 0.7), (b, 0.9), (c, 0.9), (d, 1)\})\\
k_D =& \{(e_1, \{(a, 0.1), (b, 0.2), (c, 0.4), (d, 0.2)\}), (e_2, \{(a, 0.2), (b, 0.2), (c, 0.5),\\
&(d, 0.6)\}), (e_3, \{(a, 0.1), (b, 0.3), (c, 0.3), (d, 0.1)\})
\end{aligned}$$

fuzzy soft kümeleri verilsin.

$\tau = \{\Phi, \tilde{X}, f_A, g_B, h_C, k_D\}$ ailesi X kümesi üzerinde bir fuzzy soft topolojidir.

3.1.12. Tanım

f_A X de fuzzy soft küme olsun. Eğer f_A^c fuzzy soft kümesi τ ailesine ait ise, f_A'ya fuzzy soft kapalı küme denir.

Örnek

Yukarıdaki örneği dikkate alalım.

$f_A = \{(e_1, \{(a, 0.9), (b, 0.8), (c, 0.6), (d, 0.8)\}), (e_2, \{(a, 0.8), (b, 0.6), (c, 0.2), (d, 0.3)\}), (e_3, \{(a, 0.3), (b, 0.1), (c, 0.7), (d, 0.9)\})\}$
fuzzy soft kümesini alalım. Bu fuzzy kümenin tümleyeni,

$$f_A^c = \{(e_1, \{(a, 0.1), (b, 0.2), (c, 0.4), (d, 0.2)\}), (e_2, \{(a, 0.2), (b, 0.4), (c, 0.8), (d, 0.7)\}), (e_3, \{(a, 0.7), (b, 0.9), (c, 0.3), (d, 0.1)\})\}$$

fuzzy soft kümesidir ve $f_A^c \in \tau$ olduğundan f_A fuzzy soft kapalı kümedir.

3.1.13. Tanım

$f_A \in FS(X, E)$ ve $\lambda : E \to I$ fonksiyonu A da sıfırdan farklı, $E \backslash A$'da sıfır olan bir fonksiyon olsun. Her $e \in E$ için $f_A(e) = x_{\lambda(e)}$ olarak tanımlansın. Burada $e \in A$ için $f_A(e) = x_{\lambda(e)}$ bir fuzzy nokta ve $e \in E \backslash A$ için $\lambda(e) = 0$ olduğundan $f_A(e)$ boş fuzzy kümedir. Bu şekilde tanımlanan f_A fuzzy soft kümesine fuzzy soft nokta denir. Yani,

$$f_A(e)(y) = x_\lambda(e)(y) = \begin{cases} \lambda(e) & x = y, \\ 0 & x \neq y. \end{cases}$$

olduğu açıktır. Fuzzy soft nokta x_A^λ ile gösterilir ve X üzerindeki tüm fuzzy soft noktaların kümesi $P(X, E)$ ile gösterilir [27].

Örnek

$X = \{a, b, c\}, E = \{e_1, e_2, e_3\}, A = \{e_1, e_2\}$ olsun.

$$x_A^\lambda = \{(e_1, \{(a, 0.1), (b, 0), (c, 0)\}, (e_2, \{(a, 0.3), (b, 0), (c, 0)\}, (e_3, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0)\})\}$$

fuzzy soft kümesi fuzzy soft noktadır.

3.1.14. Tanım

$x_A^\lambda \in P(X,E)$ ve $g_B \in FS(X,E)$ olsun. $x_A^\lambda \sqsubseteq g_B$ ise, yani, her $e \in A \subset E$ için $x_\lambda(e) \leq g_B(e)$ $(\lambda(e) \leq g_A(e)(x), x \in X)$ ise, x_A^λ fuzzy soft noktası g_B fuzzy soft kümesine aittir denir ve $x_A^\lambda \tilde{\in} g_B$ ile gösterilir [27].

Örnek

$X = \{a,b,c\}, E = \{e_1,e_2,e_3\}, A = \{e_1,e_2\}$ olsun.

$$g_A = \{(e_1,\{(a,0.4),(b,0.3),(c,0.5)\}),(e_2,\{(a,0.5),(b,0.1),(c,0.9)\}),(e_3,\{(a,0.6),(b,0.2),(c,0.7)\})\}$$

fuzzy soft kümesini ve

$$x_A^\lambda = \{(e_1,\{(a,0.1),(b,0),(c,0)\}),(e_2,\{(a,0.3),(b,0),(c,0)\}),(e_3,\{(a,0),(b,0),(c,0)\})\}$$

fuzzy soft noktasını alalım. $\forall e \in A$ için $x_A(e) \leq g_A(e)$ olduğundan $x_A^\lambda \tilde{\in} g_A$ dır.

3.1.15. Tanım

$x_A^\lambda \in P(X,E)$ ve $g_B \in FS(X,E)$ ve (X,τ) fuzzy soft topolojik uzay olsun. Eğer $x_A^\lambda \tilde{\in} h_C \sqsubseteq g_B$ olacak şekilde bir $h_C \in \tau$ varsa, bu g_B fuzzy soft kümesine x_A^λ fuzzy soft noktasının komşuluğu denir. x_A^λ fuzzy soft noktasının bütün komşuluklarının ailesi $N(x_A^\lambda)$ ile gösterilir [27].

Örnek

Yukarıdaki örnekte verilen $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, f_A, g_B, h_C, k_D\}$ topolojisini göz önüne alırsak,

$$h_C = \{(e_1,\{(a,0.3),(b,0.4),(c,0.7),(d,0.8)\}),(e_2,\{(a,0.3),(b,0.4),(c,0.8),(d,0.9)\}),(e_3,\{(a,0.7),(b,0.9),(c,0.9),(d,1)\})\}$$

fuzzy soft kümesi,

$$x_A^\lambda = \{(e_1,\{(a,0.1),(b,0),(c,0),(d,0)\}),(e_2,\{(a,0.3),(b,0),(c,0),(d,0)\}),(e_3,\{(a,0),(b,0),(c,0),(d,0)\})\}$$

fuzzy soft noktasının bir komşuluğudur.

3.1.16. Tanım

$x_A^\lambda \in P(X,E)$ ve $g_B \in FS(X,E)$ olsun. Her $e \in A \subseteq B$ için $x_\lambda(e) q g_B(e)$ yani; $\lambda(e) > 1 - g_B(e)(x), x \in X$ ise x_A^λ fuzzy soft noktası g_B fuzzy soft kümesi ile çakışımsıdır denir ve $x_A^\lambda \tilde{q} g_B$ ile gösterilir [27].

Örnek

$X = \{a,b,c,d\}, \quad E = \{e_1,e_2,e_3\}$ olsun.

$$\begin{aligned} f_A = &\{(e_1,\{(a,0.3),(b,0.2),(c,0.4),(d,0.2)\}),(e_2,\{(a,0.5),(b,0.4),(c,0.8),(d,0.7)\}),\\ &(e_3,\{(a,0.7),(b,0.9),(c,0.3),(d,0.1)\})\} \end{aligned}$$

fuzzy soft kümesi ve

$$\begin{aligned} x_A^\lambda = &\{(e_1,\{(a,0.8),(b,0),(c,0),(d,0)\}),(e_2,\{(a,0.7),(b,0),(c,0),(d,0)\}),\\ &(e_3,\{(a,0.6),(b,0),(c,0),(d,0)\})\} \end{aligned}$$

fuzzy soft noktasını alalım.

$$x_\lambda(e_1) q f(e_1) \Rightarrow \lambda(e_1) + f(e_1)(a) = 0.3 + 0.8 = 1.1 > 1$$

$$x_\lambda(e_2) q f(e_2) \Rightarrow \lambda(e_2) + f(e_2)(a) = 0.7 + 0.5 = 1.2 > 1$$

$$x_\lambda(e_3) q f(e_3) \Rightarrow \lambda(e_3) + f(e_3)(a) = 0.7 + 0.6 = 1.3 > 1$$

olduğundan x_A^λ fuzzy soft noktası ile f_A fuzzy soft kümesi çakışımsıdır. Yani $x_A^\lambda \tilde{q} f_A$ dır.

3.1.17. Tanım

$f_A, g_B \in FS(X,E)$ olsun. Her $e \in A \subseteq B$ için $f_A(e) q g_B(e)$ yani; $f_A(e)(x) + g_B(e)(x) > 1, x \in X$ ise f_A fuzzy soft kümesine g_B fuzzy soft kümesi ile çakışımsıdır denir ve $f_A \tilde{q} g_B$ ile gösterilir [27].

Örnek

$X = \{a, b, c, d\}, E = \{e_1, e_2, e_3\}$ olsun.

$f_A = \{(e_1, \{(a, 0.3), (b, 0.2), (c, 0.4), (d, 0.2)\}), (e_2, \{(a, 0.5), (b, 0.4), (c, 0.8), (d, 0.7)\}),$
$(e_3, \{(a, 0.7), (b, 0.9), (c, 0.3), (d, 0.1)\})\},$
$g_B = \{(e_1, \{(a, 0.8), (b, 0.9), (c, 0.2), (d, 0)\}), (e_2, \{(a, 0.7), (b, 0.8), (c, 0.3), (d, 0.4)\}),$
$(e_3, \{(a, 0.6), (b, 0.4), (c, 0), (d, 0.6)\})\}$

fuzzy soft kümelerini alalım.

$g(e_1)qf(e_1) \Rightarrow g(e_1)(b) + f(e_1)(b) = 0.2 + 0.9 = 1.1 > 1$

$g(e_2)qf(e_2) \Rightarrow g(e_2)(b) + f(e_2)(b) = 0.4 + 0.8 = 1.2 > 1$

$g(e_3)qf(e_3) \Rightarrow g(e_3)(b) + f(e_3)(b) = 0.4 + 0.9 = 1.3 > 1$

olduğundan f_A fuzzy soft kümesi ile g_B fuzzy soft kümesi çakışımsıdır. Yani $f_A \tilde{q} g_B$ dır.

3.1.18. Tanım

$x_A^\lambda \in P(X, E)$ ve $g_B \in FS(X, E)$ ve (X, τ) fuzzy soft topolojik uzay olsun. Eğer $x_A^\lambda \tilde{q} h_C \sqsubseteq g_B$ olacak şekilde bir $h_C \in \tau$ varsa, bu g_B fuzzy soft kümesine x_A^λ fuzzy soft noktasının Q-komşuluğu denir. x_A^λ fuzzy soft noktasının bütün Q-komşuluklarının ailesi $N_Q(x_A^\lambda)$ ile gösterilir [27].

Örnek

Yukarıdaki örnekte verilen $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, f_A, g_B, h_C, k_D\}$ topolojisini ve

$$\begin{aligned} x_A^\lambda = &\{(e_1, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0.8), (d, 0)\}), (e_2, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0.7), (d, 0)\}), \\ &(e_3, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0.9), (d, 0)\})\} \end{aligned}$$

fuzzy soft noktasını dikkate alalım.

$$\begin{aligned} f_A = &\{(e_1, \{(a, 0.1), (b, 0.2), (c, 0.4), (d, 0.2)\}), (e_2, \{(a, 0.2), (b, 0.4), (c, 0.8), (d, 0.7)\}), \\ &(e_3, \{(a, 0.7), (b, 0.9), (c, 0.3), (d, 0.1)\})\} \end{aligned}$$

fuzzy soft kümesi x_A^λ fuzzy soft noktası ile çakısımsıdır.

$$g_B = \{(e_1, \{(a,0.2),(b,0.5),(c,0.4),(d,0.8)\}),(e_2,\{(a,0.4),(b,0.5),(c,0.9),(d,0.8)\}),(e_3,\{(a,0.8),(b,0.9),(c,0.4),(d,1)\})\}$$

fuzzy soft kümesi de $f_A \sqsubseteq g_B$ olup x_A^λ noktasının Q-komşuluğudur.

Bu örnekten de görülebildigi gibi bir fuzzy soft noktanının Q-komşuluğu o noktayı içermeyebilir. $x_A(e_1) \nleq g_B(e_1)$ olduğundan $x_A^\lambda \tilde{\notin} g_B$ dir. Yani $x_A^\lambda \tilde{q} f_A \sqsubseteq g_B$ ve $g_B \in N_Q(x_A^\lambda)$ olup $x_A^\lambda \tilde{\notin} g_B$ dir.

3.1.19. Tanım

(X,τ) fuzzy soft topolojik uzay ve $f_A \in FS(X,E)$ olsun. f_A nın tüm kapalı üst kümelerinin arakesitine f_A nın fuzzy soft kapanışı denir ve $\overline{f_A}$ ile gösterilir. Yani,

$$\overline{f_A} = \sqcap\{h_A : h_A \text{ fuzzy soft kapalı ve } f_A \sqsubseteq h_A\}$$

$\overline{f_A}$, f_A yı kapsayan en dar kapalı kümedir ve $\overline{f_A}$ kapalıdır [27].

3.1.20. Teorem

(X,τ) fuzzy soft topolojik uzay ve $f_A, g_B \in FS(X,E)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) $\overline{\tilde{\Phi}} = \tilde{\Phi}$, $\overline{\tilde{X}} = \tilde{X}$
(2) $f_A \sqsubseteq \overline{f_A}$
(3) f_A kapalıdır $\Leftrightarrow f_A = \overline{f_A}$
(4) $f_A \sqsubseteq g_B \Rightarrow \overline{f_A} \sqsubseteq \overline{g_B}$
(5) $\overline{\overline{f_A}} = \overline{f_A}$
(6) $\overline{f_A \sqcup g_B} = \overline{f_A} \sqcup \overline{g_B}$ [27].

İspat

(1) ve (2) tanımdan açıktır.

(3) f_A kapalı bir fuzzy soft küme olsun. (2)'den $f_A \sqsubseteq \overline{f_A}$'dir. $\overline{f_A}$, f_A'yı kapsayan en dar kapalı küme olduğundan $\overline{f_A} \sqsubseteq f_A$ olur. Böylece $f_A = \overline{f_A}$ elde ederiz.

Tersine, $f_A = \overline{f_A}$ olsun. $\overline{f_A}$ kapalı olduğundan f_A da kapalı olur.

(4) $f_A \sqsubseteq g_B$ olsun. (2)'den $g_B \sqsubseteq \overline{g_B}$ dir. O halde $f_A \sqsubseteq \overline{g_B}$ dir. $\overline{g_B}$ kapalı küme ve f_A'yı kapsayan en dar kapalı küme $\overline{f_A}$ olduğundan $\overline{f_A} \sqsubseteq \overline{g_B}$ dir.

(5) $\overline{f_A} = g_B$ alalım. $\overline{f_A}$ kapalı olduğundan g_B kapalıdır. 3) den $g_B = \overline{g_B} = \overline{\overline{f_A}} \Rightarrow \overline{f_A} = \overline{\overline{f_A}}$

(6) (4)'den $\overline{f_A}, \overline{g_B} \sqsubseteq \overline{f_A \sqcup g_B}$'dir. Böylece, $\overline{f_A} \sqcup \overline{g_B} \sqsubseteq \overline{f_A \sqcup g_B}$ dır.

Tersine, (2)'den $f_A \sqcup g_B \sqsubseteq \overline{f_A} \sqcup \overline{g_B}$. $\overline{f_A}$ ve $\overline{g_B}$ kapalı kümeler ve $\overline{f_A \sqcup g_B}$ en küçük kapalı küme olduğundan $\overline{f_A \sqcup g_B} \sqsubseteq \overline{f_A} \sqcup \overline{g_B}$ olur. Böylece eşitlik sağlanır.

3.1.21. Tanım

(X, τ) fuzzy soft topolojik uzay ve $f_A \in FS(X, E)$ olsun. f_A nın tüm açık alt kümelerinin birleşimine f_A nın fuzzy soft içi denir ve ${f_A}^o$ ile gösterilir.

${f_A}^o = \sqcup\{h_A : h_A \text{ fuzzy soft açık ve } h_A \sqsubseteq f_A\}$

f_A^o, f_A nın kapsadığı en geniş açık kümedir ve f_A^o açıktır. [27].

3.1.22. Teorem

(X, τ) fuzzy soft topolojik uzay ve $f_A, g_B \in FS(X, E)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

(1) $\tilde{\Phi}^o = \tilde{\Phi}$, $\tilde{X}^o = \tilde{X}$
(2) $f_A^o \sqsubseteq f_A$
(3) f_A açıktır $\Leftrightarrow f_A = f_A^o$
(4) $f_A \sqsubseteq g_B \Rightarrow f_A^o \sqsubseteq g_B^o$
(5) $((f_A)^o)^o = f_A^o$
(6) $(f_A \sqcap g_B)^o = f_A^o \sqcap g_B^o$ [27].

İspat

(1) ve (2) tanımdan açıktır.

(3) f_A açık olsun. (2)'den $f_A^o \sqsubseteq f_A$ dir. f_A açık ve $f_A \sqsubseteq f_A$ dır. f_A^o kümesi f_A'nın kapsadığı en geniş açık küme olduğundan $f_A \sqsubseteq f_A^o$ dır. O halde $f_A = f_A^o$ dır.

Tersine, $f_A = f_A^o$ olsun. f_A^o açık olduğundan f_A açıktır.

(4) $f_A \sqsubseteq g_B$ olsun. (2)'den $f_A^o \sqsubseteq f_A$ dır. O halde $f_A^o \sqsubseteq g_B$ dir. f_A^o açık ve g_B'nin kapsadığı en geniş açık küme g_B^o olduğundan $f_A^o \sqsubseteq g_B^o$ dir.

(5) $f_A^0 = g_B$ alalım. g_B açık olduğundan (3) den $g_B = g_B^o = ((f_A)^o)^o \Rightarrow f_A = ((f_A)^o)^o$ dir.

(6) $f_A \sqcap g_B \sqsubseteq f_A$ ve $f_A \sqcap g_B \sqsubseteq g_B$ dır. (4) den $(f_A \sqcap g_B)^o \sqsubseteq f_A^o$ ve $(f_A \sqcap g_B)^o \sqsubseteq g_B^o$ dır. O halde

$$(f_A \sqcap g_B)^o \sqsubseteq f_A^o \sqcap g_B^o \tag{3.1}$$

dır. Diğer taraftan (2) den $f_A^o \sqsubseteq f_A$ ve $g_B^o \sqsubseteq g_B$ dır. Buradan $f_A^o \sqcap g_B^o \sqsubseteq f_A \sqcap g_B$ bulunur. f_A^o, g_B^o fuzzy soft açık kümeler ve $f_A^o \sqcap g_B^o$ fuzzy soft açık kümedir ve $f_A \sqcap g_B$ tarafından kapsanır. $f_A \sqcap g_B$ nın kapsadığ ı en geniş açık küme $(f_A \sqcap g_B)^o$ olduğundan $f_A^o \sqcap g_B^o \sqsubseteq (f_A \sqcap g_B)^o \sqsubseteq f_A \sqcap g_B$ dır. O halde,

$$f_A^o \sqcap g_B^o \sqsubseteq (f_A \sqcap g_B)^o \tag{3.2}$$

(3.1) ve (3.2) den $f_A^o \sqcap g_B^o = (f_A \sqcap g_B)^o$ bulunur.

3.1.23. Teorem

(X, τ) fuzzy soft topolojik uzay ve $f_A, g_B \in FS(X, E)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(1) $(f_A^o)^c = \overline{(f_A^c)}$
(2) $(\overline{f_A})^c = (f_A^c)^o$ [27].

İspat

(1) $f_A^o \sqsubseteq f_A$ dır ve $f_A^c \sqsubseteq (f_A^o)^c$ elde edilir. $(f_A^o)^c$ kapalı küme olduğundan ve $\overline{(f_A^c)} \sqsubseteq \overline{(f_A^o)^c} = (f_A^o)^c$ elde edilir.

Tersine, $f_A^c \sqsubseteq \overline{f_A^c}$ dir. $(\overline{f_A^c})^c \sqsubseteq (f_A^c)^c = f_A$ olur. $\overline{f_A^c}$ kapalı olduğundan $(\overline{f_A^c})^c$ açıktır. İç tanımından $(\overline{f_A^c})^c \sqsubseteq f_A^o$ olur ve $(f_A^o)^c \sqsubseteq ((\overline{f_A^c})^c)^c = \overline{(f_A^c)}$ elde edilir. Böylece $(f_A^o)^c = \overline{(f_A^c)}$ dir.

(2) $f_A \sqsubseteq \overline{f_A}$ dır ve $(\overline{f_A})^c \sqsubseteq f_A^c$ elde edilir. $\overline{f_A}$ kapalı olduğundan $(\overline{f_A})^c$ açıktır. $((\overline{f_A})^c)^o = (\overline{f_A})^c \sqsubseteq (f_A^c)^o$ elde edilir.

Tersine, $(f_A^c)^o \sqsubseteq f_A^c$ dir. $f_A = (f_A^c)^c \sqsubseteq ((f_A^c)^o)^c$ olur. $(f_A^c)^o$ açık olduğundan $((f_A^c)^o)^c$ kapalıdır. Kapanış tanımından $\overline{f_A} \sqsubseteq ((f_A^c)^o)^c$ olur ve $(f_A^c)^o = (((f_A^c)^o)^c)^c \sqsubseteq (\overline{f_A})^c$ elde edilir. Böylece $(\overline{f_A})^c = (f_A^c)^o$ dir.

4. SABİTLEŞTİRİLMİŞ FUZZY SOFT TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu bölümde bir f_A fuzzy soft kümesi üzerinde tanımlanmış fuzzy soft topolojik kavramından faydalanarak, f_A üzerindeki iki fuzzy soft topoloji yardımıyla oluşturulan sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzay kavramını vereceğiz.

4.1. f_A Fuzzy Soft Kümesi Üzerinde Sabitleştirilmiş Fuzzy Soft Topolojik Uzaylar

4.1.1. Tanım

$f_A \in FS(X, E)$ olmak üzere $P(f_A), f_A$ fuzzy soft kümesinin tüm fuzzy soft alt kümelerinin ailesi ve τ_f, $P(f_A)$ ailesinin bir alt ailesi olsun. τ_f ailesi aşağıdaki şartları sağlar ise (f_A, τ_f) çiftine fuzzy soft topolojik uzay denir.

$t_1)$ $\tilde{\Phi}$, $f_A \in \tau_f$,
$t_2)$ $g_A, h_A \in \tau_f \Rightarrow g_A \sqcap h_A \in \tau_f$,
$t_3)$ $\forall i \in J$ için $f_{i_A} \in \tau_f \Rightarrow \sqcup_{i\in J} f_{i_A} \in \tau_f$ [22].

τ_f nin her elemanına fuzzy soft açık küme denir. Fuzzy soft açık kümenin tümleyenine fuzzy soft kapalı denir.

Örnek

$X = \{a, b, c, d\}, E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}, A = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve

$$\begin{aligned}
f_A =&\{(e_1, \{(a, 0.3), (b, 0.4), (c, 0.5), (d, 0.6)\}), (e_2, \{(a, 0.8), (b, 0.5), (c, 0.9), (d, 0.5)\}),\\
&(e_3, \{(a, 0.7), (b, 0.9), (c, 0.3), (d, 0.4)\}), (e_4, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\})\}\\
f_{1A} =&\{(e_1, \{(a, 0.2), (b, 0.1), (c, 0.4), (d, 0.5)\}), (e_2, \{(a, 0.3), (b, 0.2), (c, 0.7), (d, 0.4)\}),\\
&(e_3, \{(a, 0.2), (b, 0.6), (c, 0.1), (d, 0.2)\}), (e_4, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\})\}\\
f_{2A} =&\{(e_1, \{(a, 0.1), (b, 0), (c, 0.3), (d, 0.4)\}), (e_2, \{(a, 0.2), (b, 0.1), (c, 0.6), (d, 0.3)\}),\\
&(e_3, \{(a, 0.2), (b, 0.5), (c, 0.1), (d, 0.1)\}), (e_4, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\})\}
\end{aligned}$$

olsun. O halde, $\tau_f = \{\tilde{\Phi}, f_A, f_{1A}, f_{2A}\}$ ailesi f_A fuzzy soft kümesi üzerinde bir fuzzy soft topolojidir.

Gerçekten τ_f ailesinin fuzzy soft topoloji olduğunu gösterelim.

(t_1) Tanımdan $\tilde{\Phi}, f_A \in \tau_f$ dir.

(t_2)

$$\begin{aligned}
f_A \sqcap f_{1A} =& \{(e_1, \{(a, 0.2), (b, 0.1), (c, 0.4), (d, 0.5)\}), (e_2, \{(a, 0.3), (b, 0.2), (c, 0.7), \\
& (d, 0.4)\}), (e_3, \{(a, 0.2), (b, 0.6), (c, 0.1), (d, 0.2)\}), (e_4, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), \\
& (d, 0)\})\} = f_{1A} \\
f_A \sqcap f_{2A} =& \{(e_1, \{(a, 0.1), (b, 0), (c, 0.3), (d, 0.4)\}), (e_2, \{(a, 0.2), (b, 0.1), (c, 0.6), \\
& (d, 0.3)\}), (e_3, \{(a, 0.2), (b, 0.5), (c, 0.1), (d, 0.1)\}), (e_4, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), \\
& (d, 0)\})\} = f_{2A} \\
f_{1A} \sqcap f_{2A} =& \{(e_1, \{(a, 0.1), (b, 0), (c, 0.3), (d, 0.4)\}), (e_2, \{(a, 0.2), (b, 0.1), (c, 0.6), \\
& (d, 0.3)\}), (e_3, \{(a, 0.2), (b, 0.5), (c, 0.1), (d, 0.1)\}), (e_4, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), \\
& (d, 0)\})\} = f_{2A} \\
\tilde{\Phi} \sqcap f_A =& \tilde{\Phi}, \tilde{\Phi} \sqcap f_{1A} = \tilde{\Phi}, \tilde{\Phi} \sqcap f_{2A} = \tilde{\Phi}.
\end{aligned}$$

Buradan τ_f nin her elemanının sonlu kesişiminin τ_f ye ait olduğu görülür ve (t_2) şartı sağlanır.

(t_3)

$$\begin{aligned}
f_A \sqcup f_{1A} =& \{(e_1, \{(a, 0.3), (b, 0.4), (c, 0.5), (d, 0.6)\}), (e_2, \{(a, 0.8), (b, 0.5), \\
& (c, 0.9), (d, 0.5)\}), (e_3, \{(a, 0.7), (b, 0.9), (c, 0.3), (d, 0.4)\}), (e_4, \\
& \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\})\} = f_A \\
f_A \sqcup f_{2A} =& \{(e_1, \{(a, 0.3), (b, 0.4), (c, 0.5), (d, 0.6)\}), (e_2, \{(a, 0.8), (b, 0.5), \\
& (c, 0.9), (d, 0.5)\}), (e_3, \{(a, 0.7), (b, 0.9), (c, 0.3), (d, 0.4)\}), (e_4, \\
& \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\})\} = f_A \\
f_{1A} \sqcup f_{2A} =& \{(e_1, \{(a, 0.2), (b, 0.1), (c, 0.4), (d, 0.5)\}), (e_2, \{(a, 0.3), (b, 0.2), \\
& (c, 0.7), (d, 0.4)\}), (e_3, \{(a, 0.2), (b, 0.6), (c, 0.1), (d, 0.2)\}), (e_4, \\
& \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\})\} = f_{1A} \\
\tilde{\Phi} \sqcup f_A =& f_A, \tilde{\Phi} \sqcup f_{1A} = f_{1A}, \tilde{\Phi} \sqcup f_{2A} = f_{2A}, f_A \sqcup f_{1A} \sqcup f_{2A} = f_A
\end{aligned}$$

Buradan τ_f nin her elemanının keyfi birleşiminin τ_f ye ait olduğu görülür ve (t_3) şartı sağlanır.

4.1.2. Tanım

(f_A, τ_f) fuzzy soft topolojik uzay ve $\beta_f \subset \tau_f$ olsun. τ_f nin her elemanı β_f nin elemanlarının birleşimi şeklinde yazabiliyorsak β_f ye τ_f nin tabanı denir.

4.1.3. Tanım

(f_A, τ_f) fuzzy soft topolojik uzay olsun. $\tau_f = \{\tilde{\Phi}, f_A\}$ topolojisine kaba yapılı fuzzy soft topoloji ve $\tau_f = P(f_A)$ topolojisine ayrık fuzzy soft topoloji denir.

4.1.4. Tanım

(f_A, τ_f) bir fuzzy soft topolojik uzay, $g_A \sqsubseteq f_A$ ve x_A^λ bir fuzzy soft nokta olsun. $x_A^\lambda \tilde{\in} h_A \sqsubseteq g_A$ olacak şekilde bir h_A fuzzy soft açık kümesi varsa, g_A fuzzy soft kümesine x_A^λ fuzzy soft noktasının fuzzy soft komşuluğu denir.
x_A^λ fuzzy soft noktasının tüm fuzzy soft komşuluklarının ailesi $N(x_A^\lambda)$ gösterilir [6].

Örnek

Yukarıdaki örnekteki (f_A, τ_f) topolojisini alalım.

$$\begin{aligned} x_A^\lambda &= \{(e_1, \{(a, 0.2), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\}), (e_2, \{(a, 0.1), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\}), \\ &\quad (e_3, \{(a, 0.2), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\}), (e_4, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\})\} \end{aligned}$$

fuzzy soft noktası olsun. O halde f_A, f_{1A} fuzzy soft kümeleri x_A^λ fuzzy soft noktasının komşuluğudur.

4.1.5. Tanım

(f_A, τ_f) bir fuzzy soft topolojik uzay, $h_A \sqsubseteq f_A$ ve x_A^λ bir fuzzy soft nokta olsun. $x_A^\lambda \tilde{\in} g_A \sqsubseteq h_A$ olacak şekilde bir g_A fuzzy soft açık kümesi varsa, x_A^λ fuzzy soft noktasına h_A fuzzy soft kümesinin fuzzy soft iç noktası denir ve $x_A^\lambda \tilde{\in} (h_A)^\circ$ ile gösterilir [6].

4.1.6. Teorem

(f_A, τ_f) fuzzy soft toplojik uzay ve $g_A \sqsubseteq f_A$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır:
(i) $(g_A)^\circ$ fuzzy soft kümesi g_A fuzzy soft kümesinin kapsadığı tüm fuzzy soft kümelerin birleşimine eşittir.
(ii) $(g_A)^\circ \sqsubseteq g_A$.
(iii) $(g_A)^\circ$ bir fuzzy soft açık kümedir.
(iv) $(g_A)^\circ$, g_A fuzzy soft kümesinin kapsadığı en büyük fuzzy soft açık kümedir.
(v) g_A fuzzy soft kümesinin fuzzy soft açık küme olması için gerek ve yeter koşul $g_A = (g_A)^\circ$ olmasıdır [6].

İspat

(i) $g_A^o = \sqcup\{h_A : h_A \sqsubseteq g_A, h_A \in \tau_f\}$ olduğunu göstermeliyiz.

$x_A^\lambda \in g_A^o$ olsun. $x_A^\lambda \in h_A \sqsubseteq g_A$ olacak şekilde bir $h_A \in \tau_f$ vardır. Böylece

$$x_A^\lambda \in \sqcup\{h_A : h_A \sqsubseteq g_A, h_A \in \tau_f\} \tag{4.1}$$

olur.

Kabul edelim ki $x_A^\lambda \in \sqcup\{h_A : h_A \sqsubseteq g_A, h_A \in \tau_f\}$ olsun. Bu durumda,

$$x_A^\lambda \in g_A^o \tag{4.2}$$

olur.

(4.1) ve (4.2) gereği,

$$g_A^o = \sqcup\{h_A : h_A \sqsubseteq g_A, h_A \in \tau_f\}$$

elde edilir.

$(ii), (iii), (iv)$ ve (v) şıklarının ispatları (i) den açıktır.

4.1.7. Teorem

(f_A, τ_f) fuzzy soft toplojik uzay ve $g_A \sqsubseteq f_A$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır:
(i) $\tilde{\Phi}^\circ = \tilde{\Phi}, (f_A)^\circ = f_A$.
(ii) $((g_A)^\circ)^\circ = (g_A)^\circ$.
(iii) $g_A \sqsubseteq h_A$ ise $(g_A)^\circ \sqsubseteq (h_A)^\circ$ dir.
(iv) $(g_A)^\circ \sqcap (h_A)^\circ = (g_A \sqcap h_A)^\circ$.
(v) $(g_A)^\circ \sqcup (h_A)^\circ \sqsubseteq (g_A \sqcup h_A)^\circ$ [6].

İspat

$(i), (ii), (iii)$ tanımdan açıktır.

(iv) $g_A^o \sqsubseteq g_A$ ve $h_A^o \sqsubseteq h_A$ olduğundan ve iii) gereği

$$g_A^o \sqcap h_A^o \sqsubseteq g_A \sqcap h_A$$

olur. $g_A \sqcap h_A$ fuzzy kümesinin içindeki en büyük fuzzy soft açık küme $(g_A \sqcap h_A)^o$ fuzzy soft kümesi olduğundan

$$g_A^o \sqcap h_A^o \sqsubseteq (g_A \sqcap h_A)^o \tag{4.3}$$

olur. Diğer taraftan (iii) den $(g_A \sqcap h_A)^o \sqsubseteq g_A^o$ ve $(g_A \sqcap h_A)^o \sqsubseteq h_A^o$ olduğundan

$$(g_A \sqcap h_A)^o \sqsubseteq g_A^o \sqcap h_A^o \tag{4.4}$$

olur. (4.3) ve (4.4) den $(g_A \sqcap h_A)^o = g_A^o \sqcap h_A^o$ olduğu görülür.

(v) $g_A^o \sqsubseteq g_A$ ve $h_A^o \sqsubseteq h_A \Rightarrow g_A^o \sqcup h_A^o \sqsubseteq g_A \sqcup h_A$ olur. $g_A^o \sqcup h_A^o$ açık ve $g_A \sqcup h_A$ fuzzy soft kümesinin kapsadığı en büyük fuzzy soft açık küme $(g_A \sqcup h_A)^o$ fuzzy soft kümesi olduğundan

$$g_A^o \sqcup h_A^o \sqsubseteq (g_A \sqcup h_A)^o \sqsubseteq g_A \sqcup h_A$$

olur.

4.1.8. Tanım

(f_A, τ_f) fuzzy soft topolojik uzayı ve $g_A \sqsubseteq f_A$ olsun. g_A fuzzy soft kümesini içeren tüm fuzzy soft kapalı kümelerin kesişimine g_A fuzzy soft kümesinin kapanınışı denir ve $\overline{g_A}$ ile gösterilir. Yani,

$$\overline{g_A} = \sqcap\{h_A : g_A \sqsubseteq h_A, h_A \in \tau_f^c\}.$$

4.1.9. Teorem

(f_A, τ_f) fuzzy soft topolojik uzayı ve $g_A, h_A \sqsubseteq f_A$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

(i) $\overline{g_A}$ bir fuzzy soft kapalı kümedir.
(ii) $g_A \sqsubseteq \overline{g_A}$.
(iii) $\overline{g_A}$ fuzzy soft kümesi g_A fuzzy soft kümesini içeren en küçük fuzzy soft kapalı kümedir.
(iv) $g_A \sqsubseteq h_A$ ise $\overline{g_A} \sqsubseteq \overline{h_A}$ dır.
(v) $\overline{g_A \sqcap h_A} \sqsubseteq \overline{g_A} \sqcap \overline{h_A}$
(vi) $\overline{g_A} \sqcup \overline{h_A} = \overline{g_A \sqcup h_A}$
(vii) g_A fuzzy soft kümesinin fuzzy soft kapalı olması için gerek ve yeter şart $g_A = \overline{g_A}$ olmasıdır.
$(viii)$ $\overline{\overline{g_A}} = \overline{g_A}$ [6].

İspat

$(i), (ii), (iii), (iv)$ tanımdan açıktır.

(v) (iv) den $\overline{g_A \sqcap h_A} \sqsubseteq \overline{g_A}$ ve $\overline{g_A \sqcap h_A} \sqsubseteq \overline{h_A}$ olduğundan, taraf tarafa kesişim alırsak,

$$\overline{g_A \sqcap h_A} \sqsubseteq \overline{g_A} \sqcap \overline{h_A}$$

dır.

(vi) (iv) den $\overline{g_A} \sqsubseteq \overline{g_A \sqcup h_A}, \overline{h_A} \sqsubseteq \overline{g_A \sqcup h_A}$ olduğundan, taraf tarafa birleşim alınırsa,

$$\overline{g_A} \sqcup \overline{h_A} \sqsubseteq \overline{g_A \sqcup h_A} \tag{4.5}$$

olur. Diğer taraftan $g_A \sqsubseteq \overline{g_A}$ ve $h_A \sqsubseteq \overline{h_A} \Rightarrow g_A \sqcup h_A \sqsubseteq \overline{g_A} \sqcup \overline{h_A}$ dır. $g_A \sqcup h_A$ fuzzy soft kümesini kapsayan en küçük fuzzy soft kapalı küme $\overline{g_A \sqcup h_A}$ olduğundan,

$$g_A \sqcup h_A \sqsubseteq \overline{g_A \sqcup h_A} \sqsubseteq \overline{g_A} \sqcup \overline{h_A} \tag{4.6}$$

dır. (4.5) ve (4.6) ifadelerinden $\overline{g_A} \sqcup \overline{h_A} = \overline{g_A \sqcup h_A}$ olduğu görülür.

(vii) g_A kapalı bir fuzzy soft küme olsun. (ii) den $g_A \sqsubseteq \overline{g_A}$ dır. $\overline{g_A}$, g_A'yı kapsayan en küçük kapalı küme olduğundan $\overline{g_A} \sqsubseteq g_A$ olur. Böylece $\overline{g_A} = g_A$ elde ederiz.

Tersine, $\overline{g_A} = g_A$ olsun. $\overline{g_A}$ kapalı olduğundan g_A da kapalı olur.

$(viii)$ $\overline{g_A} = h_A$ alalım. $\overline{g_A}$ kapalı olduğundan h_A kapalı kümedir ve (vii) den $h_A = \overline{h_A} = \overline{\overline{g_A}} \Rightarrow \overline{g_A} = \overline{\overline{g_A}}$ dır.

4.1.10. Tanım

x_A^λ bir fuzzy nokta ve f_A bir fuzzy soft küme olsun. $\forall e \in A$ için $\lambda(e) + f_A(e)(x) > 1$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, x_A^λ fuzzy soft noktası f_A fuzzy soft kümesi ile çakışımsıdır denir ve $x_A^\lambda \tilde{q} f_A$ ile gösterilir [6].

4.1.11. Tanım

$f_A, g_A \in FS(X,E)$ olsun. $\forall e \in A$ için $f_A(e)(x) + g_A(e)(x) > 1$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, f_A fuzzy soft kümesi ile g_A fuzzy soft kümesi çakışımsıdır denir ve $f_A \tilde{q} g_A$ ile gösterilir [6].

4.1.12. Tanım

(f_A, τ_f) fuzzy soft topolojik uzay, x_A^λ bir fuzzy soft nokta ve $g_A \sqsubseteq f_A$ olsun. $x_A^\lambda \tilde{q} h_A$, $h_A \sqsubseteq g_A$ olacak şekilde bir h_A fuzzy soft açığı varsa, g_A fuzzy soft kümesine x_A^λ fuzzy soft noktasının Q-fuzzy soft komşuluğu denir ve Q-fuzzy soft komşuluklar ailesi $N_Q(x_A^\lambda)$ ile gösterilir [6].

4.1.13. Teorem

(f_A, τ_f) fuzzy soft topolojik uzayında $N_Q(x_A^\lambda)$ komşuluklar ailesi aşağıdaki şartları sağlar:

(i) $\forall g_A \in N_Q(x_A^\lambda)$ ise, $x_A^\lambda \tilde{q} g_A$ dır.

(ii) $g_A, h_A \in N_Q(x_A^\lambda)$ olacak şekilde iki fuzzy soft küme ise, $g_A \sqcap h_A \in N_Q(x_A^\lambda)$ dır.

(iii) $\forall g_A \in N_Q(x_A^\lambda)$ ve $g_A \sqsubseteq h_A$ ise, $h_A \in N_Q(x_A^\lambda)$ dır.

(iv) $g_A \in N_Q(x_A^\lambda)$ ise y_A^λ nın h_A ile çakışımsı olduğu her y_A^λ fuzzy noktası için $h_A \in N_Q(y_A^\lambda)$ ve $h_A \sqsubseteq g_A$ olacak şekilde $h_A \in N_Q(x_A^\lambda)$ [6].

İspat

(i) Tanım 4.1.12. den açıktır.

(ii) g_A, h_A fuzzy soft kümeleri x_A^λ fuzzy soft noktasının Q-fuzzy soft komşuluğu olduğundan,

$\forall e \in A$ için $\lambda(e) + g_A(e)(x) > 1$ ve $\lambda(e) + h_A(e)(x) > 1$ olur. Buradan her $e \in A$ için, $\lambda(e) + min\{g_A(e)(x), h_A(e)(x)\} > 1$ olduğu görülür. Yani $g_A \sqcap h_A \in N_Q(x_A^\lambda)$ dır.

(iii) g_A fuzzy soft kümesi x_A^λ fuzzy soft noktasının Q-fuzzy soft komşuluğu olduğundan her $e \in A$ için $\lambda(e) + g_A(e)(x) > 1$ ve $g_A \sqsubseteq h_A$ olduğundan her $e \in A$ için $g_A(e)(x) \leq h_A(e)(x)$ olur . Böylece her $e \in A$ için, $\lambda(e) + h_A(e)(x) > 1$ olduğu görülür. Yani $h_A \in N_Q(x_A^\lambda)$ dır.

(iv) $g_A \in N_Q(x_A^\lambda) \Rightarrow \exists h_A \in \tau$ var öyle ki $x_A^\lambda \tilde{q} h_A$ ve $h_A \sqsubseteq g_A$. $h_A \in \tau$ fuzzy soft açığı için $\exists h_A \in \tau$ var öyle ki $x_A^\lambda \tilde{q} h_A$ ve $h_A \sqsubseteq h_A$ dır. O halde $h_A \in N_Q(x_A^\lambda)$.

Şimdi h_A ile çakışımsı olan y_A^λ fuzzy soft noktası için h_A nın y_A^λ nın Q-komşuluğu olduğunu gösterelim.

$\forall$ $y_A^\lambda \tilde{q} h_A$ için h_A fuzzy soft açık olduğundan $y_A^\lambda \tilde{q} h_A$ ve $h_A \sqsubseteq h_A \Rightarrow h_A \in N_Q(y_A^\lambda)$.

Sonuç

$g_A, h_A \in FS(X,E)$ olsun. $g_A \sqsubseteq h_A$ olması için gerek ve yeter şart g_A fuzzy soft kümesinin $(h_A)^c$ fuzzy soft kümesiyle çakışımsı olmamasıdır [6].

İspat

$(\Rightarrow)$:

$g_A \sqsubseteq h_A$ olması için gerek ve yeter şart

$\forall e \in E, \forall x \in X$ için $g_A(e)(x) \leq h_A(e)(x)$

olmasıdır. Başka bir deyişle $g_A \sqsubseteq h_A$ olması için gerek ve yeter şart

$\forall e \in E, \forall x \in X$ için $g_A(e)(x) + (1 - h_A(e)(x)) \leq 1$

olmasıdır. Buradan,

$$g_A(e)(x) + h^c_A(e)(x) \leq 1$$

olur. Sonuç olarak g_A fuzzy soft kümesi h^c_A fuzzy soft kümesi ile çakısımsı değildir.

$(\Leftarrow)$:

$$\begin{aligned} g_A \not{q} h^c_A &\Rightarrow \forall x \in X \quad \text{ve} \quad \forall e \in E \quad \text{için} \quad g_A(e)(x) + h^c_A(e)(x) \leq 1 \\ &\Rightarrow g_A(e)(x) \leq 1 - h^c_A(e)(x) \\ &\Rightarrow g_A(e)(x) \leq 1 - (1 - h_A(e)(x)) \\ &\Rightarrow g_A(e)(x) \leq h_A(e)(x) \\ &\Rightarrow g_A \sqsubseteq h_A. \end{aligned}$$

4.1.14. Teorem

(f_A, τ_f) fuzzy soft topolojik uzay, x^λ_A bir fuzzy soft nokta ve $g_A \sqsubseteq f_A$ olsun. $x^\lambda_A \tilde{\in} \overline{g}_A$ olması için gerek ve yeter şart x^λ_A fuzzy soft noktasının her Q-fuzzy soft komşuluğunun g_A fuzzy soft kümesiyle x noktasında çakışımsı olmasıdır [6].

İspat

$x_A^\lambda \tilde{\in} \overline{g}_A \Leftrightarrow g_A$ fuzzy soft kümesini kapsayan her h_A fuzzy soft kapalı kümesi için $x_A^\lambda \tilde{\in} h_A$ olmasıdır, yani,

$\forall e \in A$ için $\lambda \leq h_A(e)(x)$

olmasıdır. O halde,

$x_A^\lambda \tilde{\in} \overline{g}_A \Leftrightarrow g_A^c$ fuzzy soft kümesinde kapsanan her k_A fuzzy soft açık kümesi için

$1 - \lambda \geq k_A(e)(x), \forall e \in A,$

olmasıdır. Böylece $1 - \lambda < k_A(e)(x)$ koşulunu sağlayan her k_A fuzzy soft açık kümesi g_A^c fuzzy soft kümesinde kapsanmaz. Bir önceki sonuçtan k_A fuzzy soft kümesinin g_A fuzzy soft kümesiyle çakışık olmadığı görülür.

Bir f_A fuzzy soft kümesi üzerine konulan topolojik uzaylardan yararlanarak sabitleştirilmiş fuzzy soft topoloji tanımlayabilmek için f_A kümesine göre tümleme tanımını aşağıdaki gibi verelim.

4.1.15. Tanım

f_A fuzzy soft küme ve g_A, f_A kümesinin fuzzy soft alt kümesi olsun. g_A ' nın f_A 'ya göre tümleyeni $(g_A)^c$ ile gösterilir ve $g_A^c : E \to I^X$ olmak üzere $g_A^c(e) = f_A(e) - g_A(e), \forall e \in E$ şeklinde tanımlansın. Yani, $g_A^c(e)(x) = f_A(e)(x) - g_A(e)(x), \forall e \in E, \forall x \in X.$

Örnek

$X = \{a, b, c\}$ $E = \{e_1, e_2, e_3\}$,$A = \{e_1, e_2\}$

$f_A = \{(e_1, \{(a, 0.7), (b, 0.8), (c, 0.5)\}), (e_2, \{(a, 0.4), (b, 0.9), (c, 0.3)\}), (e_3, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0)\})\}$
$g_A = \{(e_1, \{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.3)\}), (e_2, \{(a, 0.2), (b, 0.5), (c, 0.1)\}), (e_3, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0)\})\}$

olsun.

$g_A \sqsubseteq f_A$ fuzzy soft kümesinin f_A' ya göre tümleyeni $g_A^c(e)(x) = f_A(e)(x) - g_A(e)(x)$, $e \in E, x \in X$ dir.

$g_A^c = \{(e_1, \{(a, 0.1), (b, 0.3), (c, 0.2)\}), (e_2, \{(a, 0.2), (b, 0.4), (c, 0.2)\}), (e_3, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0)\})\}$

4.1.16. Teorem

(f_A, τ_1) ve (f_A, τ_2) iki fuzzy soft topolojik uzay olsun. Fuzzy soft kümelerden oluşan $\tau_1(\tau_2)$ ailesi, $\tau_1(\tau_2) = \{g_A \sqsubseteq f_A : f_A$ da tanımlı ve $g_A \widetilde{q} h_A$ olan h_A fuzzy soft kümesi için $k_A \in \tau_2$ fuzzy soft kümesi var öyle ki $k_A \widetilde{q} h_A$ ve $\overline{k_A}$ τ_1 kapalı olmak üzere $\overline{k_A} \sqsubseteq g_A\}$ şeklinde tanımlansın. Bu şekilde tanımlanan aile f_A üzerinde topoloji oluşturur.

İspat

$\tau_1(\tau_2)$ ailesinin f_A üzerinde fuzzy soft topoloji olduğunu gösterelim.

$t_1)$ $\tilde{\Phi}, f_A \in \tau_1(\tau_2)$ mi?

$\tilde{\Phi}$ boş fuzzy soft kümesi ile çakışımsı olan bir fuzzy soft küme olmadığından bu ailedeki şartları sağlamayan aksi bir örnek yoktur. O halde $\tilde{\Phi} \in \tau_1(\tau_2)$ dir.

$g_A \tilde{q} f_A$ olacak şekilde bir g_A fuzzy soft kümesi alalım. τ_2 açık f_A fuzzy soft kümesi $g_A \tilde{q} f_A$ olup τ_1 kapalı $\overline{f_A} \sqsubseteq f_A$ dir.O halde $f_A \in \tau_1(\tau_2)$.

$t_2)$ $g_A, h_A \in \tau_1(\tau_2)$. $g_A \sqcap h_A \in \tau_1(\tau_2)$. mi?

$k_A \tilde{q}(g_A \sqcap h_A)$ olacak şekilde k_A fuzzy soft kümesini alalım.

$$\begin{aligned} k_A \tilde{q}(g_A \sqcap h_A) &\Rightarrow k_A(e) q (g_A(e) \wedge h_A(e)), \forall e \in A \\ &\Rightarrow k_A(e)(x) + (g_A(e) \wedge h_A(e))(x) > 1, x \in X, \forall e \in A \\ &\Rightarrow k_A(e)(x) + g_A(e)(x) > 1 \quad \text{ve} \quad k_A(e)(x) + h_A(e)(x) > 1 x \in X, \forall e \in A \\ &\Rightarrow k_A(e) q h_A(e) \quad \text{ve} \quad k_A(e) q h_A(e), \forall e \in A \\ &\Rightarrow k_A \tilde{q} g_A \quad \text{ve} \quad k_A \tilde{q} h_A \end{aligned}$$

$g_A, h_A \in \tau_1(\tau_2)$,

$k_A \tilde{q} g_A$ için τ_2 açık k_{1A} var öyle ki $k_{1A} \tilde{q} k_A$ ve τ_1 kapalı $\overline{k_{1A}} \sqsubseteq g_A$ ve $k_A \tilde{q} h_A$ için τ_2 açık k_{2A} var öyle ki $k_{2A} \tilde{q} k_A$ ve τ_1 kapalı $\overline{k_{2A}} \sqsubseteq h_A$.
k_{1A}, k_{2A} kümeleri τ_2 açık olduğundan $k_{1A} \sqcap k_{2A} \in \tau_2$ dir. Kapalı kümeler için $\overline{k_{1A} \sqcap k_{2A}} \sqsubseteq \overline{k_{1A}} \sqcap \overline{k_{2A}} \sqsubseteq g_A \sqcap h_A$ dir.

$$\begin{aligned}
k_{1A} \tilde{q} k_A &\Rightarrow k_{1A}(e)(x) + k_A(e)(x) > 1, x \in X, \forall e \in A \\
k_{2A} \tilde{q} k_A &\Rightarrow k_{2A}(e)(x) + k_A(e)(x) > 1, x \in X, \forall e \in A \\
&\Rightarrow k_A(e)(x) + (k_{1A}(e) \wedge k_{2A}(e))(x) > 1, x \in X, \forall e \in A \\
&\Rightarrow k_A(e) q (k_{1A}(e) \wedge k_{2A}(e)), \forall e \in A \\
&\Rightarrow k_A \tilde{q} (k_{1A} \sqcap k_{2A})
\end{aligned}$$

$k_A \tilde{q} (g_A \sqcap h_A)$ için τ_2 açık $k_{1A} \sqcap k_{2A}$ var öyle ki $k_A \tilde{q} (k_{1A} \sqcap k_{2A})$ ve τ_1 kapalı $\overline{k_{1A} \sqcap k_{2A}} \sqsubseteq g_A \sqcap h_A$.

Böylece $g_A \sqcap h_A \in \tau_1(\tau_2)$.

$t_3)$ $g_{iA} \in \tau_1(\tau_2), \forall i \in \Delta$ iken $\bigsqcup_{i \in \Delta} g_{iA} \in \tau_1(\tau_2)$ mi?

$h_A \tilde{q} \bigsqcup_{i \in \Delta} g_{iA}$ olacak şekildeki $h_A \sqsubseteq f_A$ fuzzy soft kümesini alalım.

$$\begin{aligned}
h_A \tilde{q} \bigsqcup_{i \in \Delta} g_{iA} &\Rightarrow h_A(e) q \bigvee g_{iA}(e), \forall e \in A \\
&\Rightarrow h_A(e)(x) + \bigvee g_{iA}(e)(x) > 1, x \in X, \forall e \in A \\
&\Rightarrow h_A(e)(x) + g_{i_0 A}(e)(x) > 1, i_0 \in \Delta, x \in X, \forall e \in A \\
&\Rightarrow h_A(e) q g_{i_0 A}(e), i_0 \in \Delta, \forall e \in A \\
&\Rightarrow h_A \tilde{q} g_{i_0 A}, i_0 \in \Delta
\end{aligned}$$

$g_{i_0A} \in \tau_1(\tau_2)$ ve $h_A \tilde{q} g_{i_0A}, i_0 \in \Delta$ için τ_2 açık h_{iA} var öyle ki $h_{iA} \tilde{q} h_A$ ve τ_1 kapalı $\overline{h_{iA}} \sqsubseteq g_{i_0}$.

$$\begin{aligned} h_{iA} \tilde{q} h_A &\Rightarrow h_{iA}(e)(x) + h_A(e)(x) > 1, x \in X, \forall e \in A \\ &\Rightarrow \bigvee_{i \in \Delta} h_{iA}(e)(x) + h_A(e)(x) > 1, x \in X, \forall e \in A \\ &\Rightarrow \bigvee_{i \in \Delta} h_{iA}(e) q h_A(e), \forall e \in A \\ &\Rightarrow \bigsqcup_{i \in \Delta} h_{iA} \tilde{q} h_A. \end{aligned}$$

$\forall i$ için h_{iA} kümeleri τ_2 açık olduğundan $\bigsqcup_{i \in \Delta} h_{iA} \in \tau_2$ ve τ_1 kapalı $\overline{\bigsqcup_{i \in \Delta} h_{iA}} = \bigsqcup_{i \in \Delta} \overline{h_{iA}} \sqsubseteq \bigsqcup_{i \in \Delta} g_{iA}$ dir.

$h_A \tilde{q} \bigsqcup_{i \in \Delta} g_{iA}$, için τ_2 açık $\bigsqcup_{i \in \Delta} h_{iA}$ var öyle ki $h_A \tilde{q} \bigsqcup_{i \in \Delta} h_{iA}$ ve τ_1 kapalı $\overline{\bigsqcup_{i \in \Delta} h_{iA}} \sqsubseteq \bigsqcup_{i \in \Delta} g_{iA}$. Böylece $\bigsqcup_{i \in \Delta} g_{iA} \in \tau_1(\tau_2)$ dir.

O halde $\tau_1(\tau_2)$ ailesi f_A fuzzy soft kümesi üzerinde fuzzy soft topolojidir.

4.1.17. Tanım

Teorem 4.1.16. da tanımlanan $\tau_1(\tau_2)$ topolojisine f_A üzerinde sabitleştirilmiş(mixed) fuzzy soft topolojik uzay denir.

Örnek

$X = \{a, b, c, d\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $A = \{e_1, e_2, e_3\}$ ve

$$\begin{aligned} f_A =& \{(e_1, \{(a, 0.4), (b, 0.6), (c, 0.5), (d, 0.6)\}), (e_2, \{(a, 0.3), (b, 0.7), (c, 0.8), (d, 0.5)\}), \\ & (e_3, \{(a, 0.7), (b, 0.4), (c, 0.6), (d, 0.4)\}), (e_4, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\})\} \\ f_{1A} =& \{(e_1, \{(a, 0.2), (b, 0.4), (c, 0.3), (d, 0.5)\}), (e_2, \{(a, 0.2), (b, 0.5), (c, 0.5), (d, 0.3)\}), \\ & (e_3, \{(a, 0.4), (b, 0.3), (c, 0.5), (d, 0.3)\}), (e_4, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\})\} \\ f_{2A} =& \{(e_1, \{(a, 0.2), (b, 0.2), (c, 0.2), (d, 0.1)\}), (e_2, \{(a, 0.1), (b, 0.2), (c, 0.3), (d, 0.2)\}), \\ & (e_3, \{(a, 0.3), (b, 0.1), (c, 0.1), (d, 0.1)\}), (e_4, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\})\} \end{aligned}$$

fuzzy soft kümelerini alalım.

$\tau_1 = \{\tilde{\Phi}, f_A, f_{1A}, f_{2A}\}$ ve $\tau_2 = \{\tilde{\Phi}, f_A, f_{2A}\}$ aileleri f_A üzerinde fuzzy soft topolojidir.

τ_1 in elemanlarının tümleyenini alarak fuzzy soft kapalı kümelerin ailesini elde edelim.

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}^c =&\{(e_1, \{(a, 0.4), (b, 0.6), (c, 0.5), (d, 0.6)\}), (e_2, \{(a, 0.3), (b, 0.7), (c, 0.8), (d, 0.5)\}),\\ &(e_3, \{(a, 0.7), (b, 0.4), (c, 0.6), (d, 0.4)\}), (e_4, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\})\} = f_A\\ f_A^c =&\{(e_1, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\}), (e_2, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\}), (e_3, \{(a, 0),\\ &(b, 0), (c, 0), (d, 0)\}), (e_4, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\})\} = \tilde{\Phi}\\ f_{1A}^c =&\{(e_1, \{(a, 0.2), (b, 0.2), (c, 0.2), (d, 0.1)\}), (e_2, \{(a, 0.1), (b, 0.2), (c, 0.3), (d, 0.2)\}),\\ &(e_3, \{(a, 0.3), (b, 0.1), (c, 0.1), (d, 0.1)\}), (e_4, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\})\} = f_{2A}\\ f_{2A}^c =&\{(e_1, \{(a, 0.2), (b, 0.4), (c, 0.3), (d, 0.5)\}), (e_2, \{(a, 0.2), (b, 0.5), (c, 0.5), (d, 0.3)\}),\\ &(e_3, \{(a, 0.4), (b, 0.3), (c, 0.5), (d, 0.3)\}), (e_4, \{(a, 0), (b, 0), (c, 0), (d, 0)\})\} = f_{1A}\end{aligned}$$

olup kapalı kümelerin ailesi $\tau_1^c = \{\tilde{\Phi}^c, f_A^c, f_{1A}^c, f_{2A}^c\}$ dir.

Şimdi τ_1 ve τ_2 topolojilerinden yararlanarak f_A üzerinde sabitleştirilmiş fuzzy soft topoloji oluşturalım.

$\tilde{\Phi} \in \tau_1(\tau_2)$ mi?

$\tilde{\Phi}$ boş fuzzy soft kümesi ile çakışımsı olan bir fuzzy soft küme olmadığından bu ailedeki şartları sağlamayan aksi bir örnek yoktur. O halde $\tilde{\Phi} \in \tau_1(\tau_2)$.

$f_A \in \tau_1(\tau_2)$ mi?
$h_A \tilde{q} f_A$ olacak şekilde bir h_A fuzzy soft kümesi alalım. τ_2 açık f_A fuzzy soft kümesi $h_A \tilde{q} f_A$ olup τ_1 kapalı $\overline{f_A} = f_A \sqsubseteq f_A$ dir. O halde $f_A \in \tau_1(\tau_2)$.

$f_{2A} \in \tau_1(\tau_2)$ mi ?

$g_A \tilde{q} f_{2A}$ şeklinde $g_A \sqsubseteq f_A$ fuzzy soft kümesini alalım.
g_A fuzzy soft kümesi ile çakışımsı olan τ_2 açık f_A ve f_{2A} kümeleri vardır öyle ki, $g_A \tilde{q} f_{2A}$ ve $g_A \tilde{q} f_A$.

f_{2A}' nın τ_1'e göre kapanışı
$\overline{f_{2A}} = \sqcap\{k_A : k_A \ \tau_1 \text{ kapalı ve } f_{2A} \sqsubseteq k_A\}$=$f_A \sqcap {f_{1A}}^c$= $f_{2A} \sqsubseteq f_{2A}$ dır.

Böylece, $f_{2A} \in \tau_1(\tau_2)$ ve $\tau_1(\tau_2) = \{\tilde{\Phi}, f_A, f_{2A}\}$ ailesi f_A üzerinde sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzaydır.

Sonuç

1) (f_A, τ) ayrık olmayan fuzzy soft topolojik uzay ve $\tau(\tau)$, τ dan elde edilen sabitleştirilmiş fuzzy soft topoloji olsun. Buna göre $\tau(\tau)$ topolojisi de ayrık olmayan sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzaydır.
2) (f_A, τ) ayrık fuzzy soft topolojik uzay ve $\tau(\tau)$, τ dan elde edilen sabitleştirilmiş fuzzy soft topoloji olsun. Buna göre $\tau(\tau)$ topolojisi de ayrık sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzaydır.
3) (f_A, τ_1) ayrık fuzzy soft topolojik uzay ve (f_A, τ_2) ayrık olmayan topolojik uzay olsun. $\tau_1(\tau_2)$ de τ_1 ve τ_2 topolojilerinden elde edilen sabitleştirilmiş fuzzy soft topoloji olsun. Buna göre $\tau_1(\tau_2)$ topolojisi de ayrık olmayan sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzaydır.
4) (f_A, τ_1) ayrık olmayan fuzzy soft topolojik uzay ve (f_A, τ_2) ayrık topolojik uzay olsun. $\tau_1(\tau_2)$ de τ_1 ve τ_2 topolojilerinden elde edilen sabitleştirilmiş fuzzy soft topoloji olsun. Buna göre $\tau_1(\tau_2)$ topolojisi de ayrık olmayan sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzaydır.

İspat

1) $\tau(\tau)$ topolojisinin ayrık olmayan sabitleştirilmiş fuzzy soft topoloji olduğunu gösterelim.

$\tilde{\Phi}$ boş fuzzy soft kümesi ile çakışımsı olan bir fuzzy soft küme olmadığından bu ailedeki şartları sağlamayan aksi bir örnek yoktur. O halde $\tilde{\Phi} \in \tau(\tau)$.
$g_A \tilde{q} f_A$ olacak şekilde bir g_A fuzzy soft kümesi alalım. τ açık f_A fuzzy soft kümesi $g_A \tilde{q} f_A$ olup τ kapalı $\overline{f_A} = f_A \sqsubseteq f_A$ dir. O halde $f_A \in \tau(\tau)$.
$g_A \sqsubseteq f_A$ olsun. $k_A \tilde{q} g_A$ olacak şekilde $k_A \sqsubseteq f_A$ alalım ve h_A τ açık fuzzy soft kümesi vardır öyle ki $h_A \tilde{q} k_A$. τ ayrık olmayan topoloji olduğundan h_A nın τ ya göre kapalısı $\overline{h_A} = f_A$ dır. $\overline{h_A} = f_A \not\sqsubseteq g_A$ olduğundan $g_A \notin \tau(\tau)$ dur.
Buradan $\tau(\tau)$ sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojisinin yalnızca $\tilde{\Phi}, f_A$ elemanlarından oluştuğu görülür. $\tau(\tau) = \{\tilde{\Phi}, f_A\}$ ailesi ayrık olmayan sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzaydır.

2) $\tau(\tau)$ topolojisinin ayrık sabitleştirilmiş fuzzy soft topoloji olduğunu gösterelim.

$\tilde{\Phi}$ boş fuzzy soft kümesi ile çakışımsı olan bir fuzzy soft küme olmadığından bu ailedeki şartları sağlamayan aksi bir örnek yoktur. O halde $\tilde{\Phi} \in \tau(\tau)$.
$g_A \tilde{q} f_A$ olacak şekilde bir g_A fuzzy soft kümesi alalım. τ açık f_A fuzzy soft kümesi $g_A \tilde{q} f_A$ olup τ kapalı $\overline{f_A} = f_A \sqsubseteq f_A$ dir. O halde $f_A \in \tau(\tau)$.

$g_A \sqsubseteq f_A$ olsun. $k_A \tilde{q} g_A$ olacak şekilde $k_A \sqsubseteq f_A$ olsun. g_A τ açık fuzzy soft kümesi vardır öyle ki $g_A \tilde{q} k_A$. τ ayrık topoloji olduğundan g_A nın τ ya göre kapalısı $\overline{g_A} = g_A$ dır. $\overline{g_A} = g_A \sqsubseteq g_A$ olduğundan $g_A \in \tau(\tau)$ dur.
Buradan $\tau(\tau)$ ailesinin f_A nın tüm alt kümelerini içerdiği söylenebilir. $\tau(\tau) = P(f_A)$ ailesi ayrık sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzaydır.

3) $\tau_1(\tau_2)$ topolojisinin ayrık olmayan sabitleştirilmiş fuzzy soft topoloji olduğunu gösterelim.

$\tilde{\Phi}$ boş fuzzy soft kümesi ile çakışımsı olan bir fuzzy soft küme olmadığından bu ailedeki şartları sağlamayan aksi bir örnek yoktur. O halde $\tilde{\Phi} \in \tau_1(\tau_2)$.
$g_A \tilde{q} f_A$ olacak şekilde bir g_A fuzzy soft kümesi alalım. τ_2 açık f_A fuzzy soft kümesi $g_A \tilde{q} f_A$ olup τ_1 kapalı $\overline{f_A} = f_A \sqsubseteq f_A$ dir. O halde $f_A \in \tau_1(\tau_2)$.
$g_A \sqsubseteq f_A$ olsun. $k_A \tilde{q} g_A$ olacak şekilde $k_A \sqsubseteq f_A$ alalım ve f_A τ_2 açık fuzzy soft kümesi vardır öyle ki $f_A \tilde{q} k_A$. τ_1 ayrık olmayan topoloji olduğundan f_A nın τ_1 ya göre kapalısı $\overline{f_A} = f_A$ dır. $\overline{f_A} = f_A \not\sqsubseteq g_A$ olduğundan $g_A \notin \tau_1(\tau_2)$ dır.
Buradan $\tau_1(\tau_2)$ sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojisinin yalnızca $\tilde{\Phi}, f_A$ elemanlarından oluştuğu görülür. $\tau_1(\tau_2) = \{\tilde{\Phi}, f_A\}$ ailesi ayrık olmayan sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzaydır.

4) $\tau_1(\tau_2)$ topolojisinin ayrık olmayan sabitleştirilmiş fuzzy soft topoloji olduğunu gösterelim.

$\tilde{\Phi}$ boş fuzzy soft kümesi ile çakışımsı olan bir fuzzy soft küme olmadığından bu ailedeki şartları sağlamayan aksi bir örnek yoktur. O halde $\tilde{\Phi} \in \tau_1(\tau_2)$.
$g_A \tilde{q} f_A$ olacak şekilde bir g_A fuzzy soft kümesi alalım. τ_2 açık f_A fuzzy soft kümesi $g_A \tilde{q} f_A$ olup τ_1 kapalı $\overline{f_A} = f_A \sqsubseteq f_A$ dir. O halde $f_A \in \tau_1(\tau_2)$.
$g_A \sqsubseteq f_A$ olsun. $k_A \tilde{q} g_A$ olacak şekilde $k_A \sqsubseteq f_A$ alalım ve f_A τ_2 açık fuzzy soft kümesi vardır öyle ki $f_A \tilde{q} k_A$. τ_1 ayrık olmayan topoloji olduğundan f_A nın τ_1 ya göre kapalısı $\overline{f_A} = f_A$ dır. $\overline{f_A} = f_A \not\sqsubseteq g_A$ olduğundan $g_A \notin \tau_1(\tau_2)$ dır.
Buradan $\tau_1(\tau_2)$ sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojisinin yalnızca $\tilde{\Phi}, f_A$ elemanlarından oluştuğu görülür. $\tau_1(\tau_2) = \{\tilde{\Phi}, f_A\}$ ailesi ayrık olmayan sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzaydır.

4.2. Fuzzy Soft Topolojik Uzaylarda Sayılabilirlik

4.2.1. Tanım

(f_A, τ_f) fuzzy soft topolojik uzay ve $N(x_A^\lambda)$, x_A^λ' nın komşuluklar ailesi ve $B(x_A^\lambda) \sqsubseteq N(x_A^\lambda)$ olsun. Eğer her $g_A \in N(x_A^\lambda)$ için $h_A \sqsubseteq g_A$ olacak şekilde $h_A \in B(x_A^\lambda)$ fuzzy soft kümesi var ise, $B(x_A^\lambda)$ ailesine x_A^λ nın komşuluk tabanı denir.

4.2.2. Tanım

(f_A, τ_f) fuzzy soft topolojik uzay olsun. Eğer f_A daki her x_A^λ' nın sayılabilir bir komşuluk tabanı varsa bu uzaya birinci sayılabilir uzay denir

Aşağıdaki tanım birinci sayılabilir uzay tanımının başka şekilde ifadesidir.

4.2.3. Tanım

(f_A, τ_f) fuzzy soft topolojik uzay olsun. Eğer x_A^λ $(0 < \lambda(e) \leqslant 1)$ noktası için fuzzy soft açıkların sayılabilir bir ailesi olan $B(x_A^\lambda)$ ailesi var öyle ki her $g_A \in B(x_A^\lambda)$ için $x_A^\lambda \tilde{\in} g_A$ dır ve $x_A^\lambda \tilde{\in} h_A$ fuzzy soft açık h_A kümeleri için $k_A \sqsubseteq h_A$ olacak şekilde $k_A \tilde{\in} B(x_A^\lambda)$ vardır.

4.2.4. Tanım

(f_A, τ_f) fuzzy soft topolojik uzay ve $N_Q(x_A^\lambda)$, x_A^λ' nın Q-komşuluklar ailesi ve $B_Q(x_A^\lambda) \sqsubseteq N_Q(x_A^\lambda)$ olsun. Eğer her $g_A \in N_Q(x_A^\lambda)$ için $h_A \sqsubseteq g_A$ olacak şekilde $h_A \in B_Q(x_A^\lambda)$ fuzzy soft kümesi varsa, $B_Q(x_A^\lambda)$ ailesine x_A^λ nın Q-fuzzy soft komşuluk tabanı denir.

Kısaca Q-fuzzy soft komşuluk tabanına Q-komşuluk tabanı diyeceğiz.

4.2.5. Tanım

(f_A, τ_f) fuzzy soft topolojik uzay olsun. Eğer f_A daki her x_A^λ' nın sayılabilir bir Q-komşuluk tabanı varsa, bu uzaya Q-birinci sayılabilir uzay denir.

4.2.6. Teorem

(f_A, τ_f) uzayı birinci sayılabilir uzay ise, Q-birinci sayılabilir uzaydır.

İspat

x_A^λ, f_A da herhangi bir nokta olsun. $(1-\lambda(e),1]$ aralığında $1-\lambda(e)$'ya yakınsayan $\{\lambda_n(e)\}_{n\in N}$ dizisini düşünelim. $x_A^{\lambda_n} \in f_A$ olsun. (f_A,τ_f) birinci sayılabilir uzay olduğundan her $n\in N$ için x_A^λ'nın $\{B_n(x_A^\lambda)\}$ olacak şekilde sayılabilir açık komşuluk tabanı var. $\{B_n(x_A^\lambda)\}$'nın her bir g_A elemanı için,

$$
\begin{aligned}
&g_A(e)(x) \geqslant \lambda_n(e) > 1-\lambda(e)\\
&\qquad\quad \Rightarrow \lambda(e)+g_A(e)(x) > 1\\
&\qquad\quad \Rightarrow x_A^\lambda \tilde{q} g_A
\end{aligned}
$$

dir. Böylece g_A x_A^λ' nın Q-komşuluğudur. $\{B_n(x_A^\lambda)\}$ ailesi de x_A^λ noktasının açık Q-komşuluklarından oluşur ve bu aile x_A^λ noktasının sayılabilir Q-komşuluklarının ailesidir.

Şimdi x_A^λ'nın herhangi bir h_A Q-komşuluğunu alalım. Buradan $h_A(e)(x) > 1-\lambda(e)$ dir. $\lambda_n(e) > 1-\lambda(e)$ olduğu için öyle bir $m\in N$ vardır ki $h_A(e)(x) \geqslant \lambda_m(e) > 1-\lambda(e)$ $\Rightarrow x_A^{\lambda_m} \tilde{\in} h_A$ ve h_A $x_A^{\lambda_m}$'nın açık komşuluğudur.

$g_A \in \{B_n(x_A^{\lambda_n})\}$ olacak şekilde g_A var öyle ki $g_A \sqsubseteq h_A$ ve $g_A(e)(x) > \lambda_m(e) > 1-\lambda(e)$ dir. Buradan g_A x_A^λ'nın Q-komşuluk tabanının bir elemanıdır.

Böylece (f_A,τ_f) uzayı Q-birinci sayılabilir uzaydır.

4.2.7. Tanım

(f_A,τ_f) fuzzy soft topolojik uzay olsun. Eğer τ_f nin sayılabilir bir tabanı varsa, bu uzaya ikinci sayılabilir uzay denir.

4.2.8. Tanım

x_A^λ, f_A'da bir fuzzy soft nokta, $g_A \sqsubseteq f_A$ ve $(f_A,\tau_1(\tau_2))$ sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzay olsun. $x_A^\lambda \tilde{\in} h_A \sqsubseteq g_A$ olacak şekilde bir h_A fuzzy soft açık kümesi varsa, g_A fuzzy soft kümesine x_A^λ noktasının fuzzy soft komşuluğu denir.

x_A^λ fuzzy soft komşuluklar ailesi $N'(x_A^\lambda)$ ile gösterilir.

4.2.9. Tanım

x_A^λ, f_A'da bir fuzzy soft nokta, $g_A \sqsubseteq f_A$ ve $(f_A, \tau_1(\tau_2))$ sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzay olsun. $x_A^\lambda \tilde{q} h_A \sqsubseteq g_A$ olacak şekilde bir h_A fuzzy soft açık kümesi varsa g_A fuzzy soft kümesine x_A^λ noktasının Q-fuzzy soft komşuluğu denir ve x_A^λ'nın Q-fuzzy soft komşuluklar ailesi $N'_Q(x_A^\lambda)$ ile gösterilir.

4.2.10. Tanım

$(f_A, \tau_1(\tau_2))$ sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzay ve $N(x_A^\lambda)$, x_A^λ' nın komşuluklar ailesi ve $B(x_A^\lambda) \sqsubseteq N(x_A^\lambda)$ olsun. Eğer her $g_A \in N(x_A^\lambda)$ için $h_A \sqsubseteq g_A$ olacak şekilde $h_A \in B(x_A^\lambda)$ fuzzy soft kümesi varsa, $B(x_A^\lambda)$ ailesine x_A^λ nın komşuluk tabanı denir.

4.2.11. Tanım

$(f_A, \tau_1(\tau_2))$ sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzay olsun. Eğer f_A daki her x_A^λ' nın sayılabilir bir komşuluk tabanı varsa, bu uzaya birinci sayılabilir uzay denir.

4.2.12. Tanım

$(f_A, \tau_1(\tau_2))$ sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzay olsun. Eğer f_A daki her x_A^λ' nın sayılabilir bir Q-komşuluk tabanı varsa, bu uzaya Q-birinci sayılabilir uzay denir.

4.2.13. Tanım

$(f_A, \tau_1(\tau_2))$ sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzay olsun. Eğer $\tau_1(\tau_2)$'nin sayılabilir bir tabanı varsa, bu uzaya ikinci sayılabilir uzay denir.

4.2.14. Teorem

$(f_A, \tau_1(\tau_2))$ uzayı birinci sayılabilir uzay ise, Q-birinci sayılabilir uzaydır.

İspat

x_A^λ, f_A da herhangi bir nokta olsun. $(1 - \lambda(e), 1]$ aralığında $1 - \lambda(e)$'ya yakınsayan $\{\lambda_n(e)\}_{n \in N}$ dizisini düşünelim. $x_A^{\lambda_n} \in f_A$ olsun. $(f_A, \tau_1(\tau_2))$ birinci sayılabilir uzay olduğundan her $n \in N$ için x_A^λ'nın $\{B_n(x_A^\lambda)\}$ olacak şekilde sayılabilir açık komşuluk

tabanı var. $\{B_n(x_A^\lambda)\}$'nın her bir g_A elemanı için,
$g_A(e)(x) \geqslant \lambda_n(e) > 1 - \lambda(e)$
$\Rightarrow \lambda(e) + g_A(e)(x) > 1$
$\Rightarrow x_A^\lambda \tilde{q} g_A$
dir. Böylece g_A x_A^λ' nın Q-komşuluğudur. $\{B_n(x_A^\lambda)\}$ ailesi de x_A^λ noktasının açık Q-komşuluklarından oluşur ve bu aile x_A^λ noktasının sayılabilir Q-komşuluklarının ailesidir.

Şimdi x_A^λ'nın herhangi bir h_A Q-komşuluğunu alalım. Buradan $h_A(e)(x) > 1 - \lambda(e)$ dir. $\lambda_n(e) > 1 - \lambda(e)$ olduğu için öyle bir $m \in N$ vardır ki $h_A(e)(x) \geqslant \lambda_m(e) > 1 - \lambda(e)$ $\Rightarrow x_A^{\lambda_m} \tilde{\in} h_A$ ve h_A $x_A^{\lambda_m}$'nın açık komşuluğudur.

$g_A \in \{B_n(x_A^{\lambda_n})\}$ olacak şekilde g_A var öyle ki $g_A \sqsubseteq h_A$ ve $g_A(e)(x) > \lambda_m(e) > 1 - \lambda(e)$ dir. Buradan g_A x_A^λ'nın Q-komşuluk tabanının bir elemanıdır.

Böylece $(f_A, \tau_1(\tau_2))$ uzayı Q-birinci sayılabilir uzaydır.

4.2.15. Teorem

$(f_A, \tau_1(\tau_2))$ sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzay ve x_A^λ, f_A da bir fuzzy soft nokta olsun. $\beta \subset \tau_1(\tau_2)$ alt ailesine $\tau_1(\tau_2)$ için tabandır ancak ve ancak $B(x_A^\lambda) = \{k_A \in \beta : x_A^\lambda \tilde{\in} k_A\}$ şeklinde ki aile x_A^λ'nın komşuluk tabanı ise.

İspat

Kabul edelim ki β, $\tau_1(\tau_2)$ için bir taban olsun. $B(x_A^\lambda) = \{k_A \in \beta : x_A^\lambda \in k_A\}$ ailesinin x_A^λ'nın komşuluk tabanı olduğunu gösterelim.

x_A^λ f_A da herhangi bir nokta ve h_A x_A^λ'nın herhangi bir fuzzy soft komşuluğu yani $h_A \in N(x_A^\lambda)$ olsun. $h_A \in N(x_A^\lambda)$ ise $x_A^\lambda \tilde{\in} g_A \sqsubseteq h_A$ olacak şekilde g_A fuzzy soft açığı vardır. β, $\tau_1(\tau_2)$ için taban olduğundan $g_A \in \tau_1(\tau_2)$ kümesi β'nın elemanlarının birleşimi cinsinden yazılabilir. Böylece $k_A \in \beta$ elemanı vardır öyle ki $x_A^\lambda \tilde{\in} k_A \sqsubseteq g_A$ dır. Buradan k_A x_A^λ'nın komşuluk tabanının bir elemanıdır. $k_A \in B(x_A^\lambda)$ ve $B(x_A^\lambda) = \{k_A \in \beta : x_A^\lambda \tilde{\in} k_A\}$ ailesi x_A^λ'nın komşuluk tabanıdır.

Karşıt olarak $B(x_A^\lambda)$ x_A^λ'nın komşuluk tabanı olsun. β'nın $\tau_1(\tau_2)$ için taban olduğunu gösterelim.

$g_A \in \tau_1(\tau_2)$ ve $x_A^\lambda \tilde{\in} g_A$ olsun. Buradan $g_A \in N(x_A^\lambda)$ dır. x_A^λ'nın komşuluk tabanı tanımından $h_A \in B(x_A^\lambda)$ var öyle ki $x_A^\lambda \tilde{\in} h_A \sqsubseteq g_A$ ve $h_A \in \beta$.
$\forall x_A^\lambda \tilde{\in} g_A$ ve $x_A^\lambda \tilde{\in} h_A \sqsubseteq g_A \Rightarrow g_A = \bigsqcup_{x_A^\lambda \tilde{\in} g_A} h_A$,$h_A \in \beta$.
g_A $\tau_1(\tau_2)$'nın herhangi bir elemanı olup β 'nın elemanları cinsinden yazıldı. Böylece β, $\tau_1(\tau_2)$'nin tabanıdır.

4.2.16. Önerme

$(f_A, \tau_1(\tau_2))$ sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzay olsun. Eğer $(f_A, \tau_1(\tau_2))$ ikinci sayılabilir bir uzay ise, birinci sayılabilir uzaydır.

İspat

$(f_A, \tau_1(\tau_2))$ ikinci sayılabilir uzay olsun. Buradan $\tau_1(\tau_2)$ için sayılabilir bir β tabanı vardır. Yukarı daki teoremden x_A^λ'nın β'nın alt kümesi olan $B(x_A^\lambda)$ komşluk tabanı vardır. β sayılabilir olduğundan $B(x_A^\lambda)$ ailesi de sayılabilirdir. Böylece $B(x_A^\lambda)$, x_A^λ' nın sayılabilir bir komşuluk tabanıdır.

Böylece f_A daki her fuzzy soft noktasının sayılabilir bir komşuluk tabanı vardır. Buradan $(f_A, \tau_1(\tau_2))$ birinci sayılabilir uzaydır.

Sonuç

$(f_A, \tau_1(\tau_2))$ uzayı ikinci sayılabilir uzay ise, Q- birinci sayılabilir uzaydır.

İspat

$(f_A, \tau_1(\tau_2))$ ikinci sayılabilir uzay olsun. Önerme 4.2.16 dan $(f_A, \tau_1(\tau_2))$ birinci sayılabilir uzaydır. Birinci sayılabilir uzay ise Teorem 4.2.14 den $(f_A, \tau_1(\tau_2))$ Q-birinci sayılabilir uzaydır.

4.2.17. Önerme

τ_1 ve τ_2 f_A da iki fuzzy soft topolojik uzay ve $\tau_1(\tau_2)$ de bu iki topolojiden elde edilen sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzay olsun. $\tau_1(\tau_2)$ uzayı Q-birinci sayılabilir uzay ise, τ_2 Q- birinci sayılabilir uzaydır.

İspat

x_A^λ, f_A da herhangi bir fuzzy soft nokta olsun. $\tau_1(\tau_2)$ Q-birinci sayılabilir olduğ undan, her x_A^λ'nın sayılabilir bir Q-komşuluk tabanı vardır. $g_A \in B_Q(x_A^\lambda)$ olsun. Burada $B_Q(x_A^\lambda)$ $\tau_1(\tau_2)$ nin sayılabilir bir alt ailesi olup x_A^λ nın Q-komşuluk tabanıdır. Buradan g_A $\tau_1(\tau_2)$ de x_A^λ' nın Q-komşuluğdur. Dolayısıyla $h_A \in \tau_1(\tau_2)$ var öyle ki $h_A \sqsubseteq g_A$ ve $x_A^\lambda \tilde{q} h_A$.

$\tau_1(\tau_2) \subseteq \tau_2$ olduğundan $h_A \in \tau_1(\tau_2) \Rightarrow h_A \in \tau_2$ ve $h_A \sqsubseteq g_A$, $x_A^\lambda \tilde{q} h_A$ dır. Buradan g_A x_A^λ'nın τ_2 ye göre Q-komşuluğu olur.

Böylece her $g_A \in B_Q(x_A^\lambda)$, x_A^λ'nın τ_2 ye göre Q-komşuluğudur. $B_Q(x_A^\lambda)$ τ_2 için x_A^λ'nın Q-komşuluk tabanıdır. Böylece τ_2 Q-birinci sayılabilirdir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, ilk defa herhangi bir fuzzy soft küme üzerindeki iki topolojiden elde edilen sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzay tanımı verilmiştir. Bu tanımı verebilmek için üzerinde topoloji tanımladığımız kümeye göre alınan yeni bir tümleyen tanımı verilmiştir. Ardından bu topolojik uzayın sayılabilirliği ile ilgili teoremler verilmiştir. Bu tanımla birlikte yeni bir topolojik uzay tanımlanmış olup klasik topolojide ki tanımlar ve teoremler bu uzaya taşınabilir. Böylece bu konuda çalışmalara devam edilip konu geliştirilebilir.

KAYNAKLAR

1. Ahmad, B. and Kharal, A. (2009). On fuzzy soft sets. *Advances in fuzzy systems*, 2009, Article ID 586507, 6 pages.

2. Aygünoğlu A., (2011). *Esnek Topolojik Uzaylar*. Doktora Tezi, Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli.

3. Aktaş, H. and Çağman, N. (2007). Soft sets and soft groups. *Information sciences*, 177(13), 2726-2735.

4. Borah, M.J. and Hazarika B. (2016). Some results of mixed fuzzy soft topology and applications in Chemistry. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*. 12(1), 129-138.

5. Chang, C.L. (1968). Fuzzy topological space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 24, 182-190.

6. Dizman, T.H. (2014). *Soft Ditopological-Fuzzy Soft Topological Spaces and The Applications in Medicine*, Ph.D Thesis, The Graduate School of Natural and Applied Science of Selcuk University.

7. Gezici, A., Yıldız, C. (2017, May 11-13). *Countability Mixed Fuzzy Soft Topological Spaces*. Paper presented at the International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME), Şanlı Urfa, Turkey.

8. Gezici, A., Yıldız, C. (2016, 26-27 Mayıs). *Sabitleştirilmiş Fuzzy Soft Topolojik Uzaylar*. 11. Ankara Matematik Günlerinde sunuldu, Ankara.

9. Hussain, S., Ahmad, B. (2011). Some properties of soft topological spaces. *Computers and Mathematics with Applications*, 62(11), 4058-4067.

10. Hussain S. (2015). On some generalized structures in fuzzy soft topological spaces. *Information Sciences Letters*, 4(3), 107-115.

11. Lowen, R. (1976). Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 56(3), 621-633.

12. Maji, P.K., Biswas, R. and Roy A. (2001). Fuzzy soft sets. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 9(3), 589-602.

13. Maji, P.K, Biswas, R. and Roy A.R. (2003). Soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45(4-5), 555-562.

14. Malik, D.S. and Mordeson, J.N. (1991). Fuzzy relations on rings and groups. *Fuzzy Sets and Systems*, 43(1), 117-123.

15. Molodtsov, D. (1999). Soft set theory - First result. *Computers and Mathematics with Applications* , 37(4-5), 19-31.

16. Nazmul, S. and Samanta, S. K. (2013). Neighbourhood properties of soft topological spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 6(1), 1-15.

17. Neog T.J., Sut D.K. and Hazarika G.C.(2012). Fuzzy soft topological spaces. *International Journal of Latest Trends in Mathematics*, 2(1), 54-67.

18. Pao-Ming, P. and Ying-Ming, L.(1980). Fuzzy Topology. I. Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 76(2), 571-599 .

19. Rodabaugh S.E. (1999). Powerset operator foundations for poslat fuzzy set theories and topologies. In Höhle U. and Rodabaugh S.E. (eds) Mathematics of Fuzzy Sets. *The Handbooks of Fuzzy Sets Series*, 3, Boston: MA, 91-116.

20. Roy S.and Samanta T.K. (2011). A note on fuzzy soft topological spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 3(2), 305-311.

21. Shabir M. and Naz M. (2011). On soft topological spaces. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(7) 1786-1799.

22. Simsekler T. and Yuksel S. (2013). Fuzzy soft topological spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 5(1), 87-96.

23. Tanay B. and Kandemir M.B. (2011). Topological structure of fuzzy soft sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(10), 2952-2957.

24. Tripathy B.C. and Ray G.C. (2012). On mixed fuzzy topological spaces and countability. *Soft Computing*, 16(10), 1691-1695.

25. Tripathy B.C. and Ray G.C. (2013). Mixed fuzzy ideal topological spaces. *Applied Mathematics and Computation 220*, 602-607.

26. Varol B.P. and Aygun H.(2012). Fuzzy soft topology. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 41(3), 404-419.

27. Varol, B.P. (2012). *Bulanık Esnek Topolojik Uzaylar*, Doktora Tezi, Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kocaeli.

28. Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338-353.

29. Zorlutuna, I., Akdağ, M., Min, W.K., and Atmaca, S.(2012). Remarks on soft topological spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 3(2), 171-185.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	GEZİCİ, Ayten
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	05.08.1991, Yenimahalle
Medeni hali	:	Bekar
e-mail	:	ayten.gezici.7@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	Devam ediyor.
Lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	2014
Lise	Mustafa Kemal Lisesi	2010

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

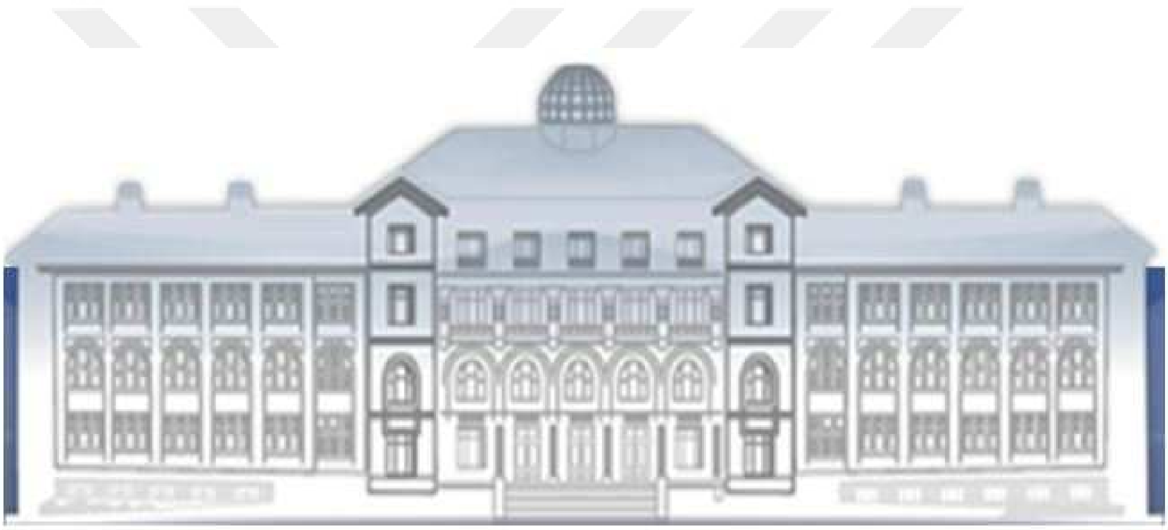
1. Erduran, Ş. F., Yiğit, E., Alar, R. and Gezici A. (2017). Soft fuzzy metric spaces. *General Letters in Mathematics,* 3(2), 91-101.
2. Erduran, Ş. F., Yiğit, E., Alar, R. and Gezici A. (2018). On soft fuzzy metric spaces and topological structure(baskıda). *Journal of Advanced Studies in Topology.*
3. Gezici, A. and Yıldız, C. (2017). Mixed fuzzy soft topological spaces(baskıda). *Gazi University Journal of Science.*

Sempozyumlar

1. Gezici, A., Yıldız, C. (2017, May 11-13). *On mixed fuzzy soft topological spaces.* Paper presented at VI. International Conference on Mathematics and Mathematics Education. Harran University, Şanlıurfa, Turkey.
2. Gezici, A., Yıldız, C. (2016, May 26-27). *Sabitleştirilmiş fuzzy soft topolojik uzaylar.* Paper presented at 11. Ankara Matematik Günleri. Ankara Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Hobiler

Kitap okumak, müzik dinlemek, spor yapmak.



GAZİ GELECEKTİR...