GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

OPERATÖR KATSAYILI KENDİNE EŞ OLMAYAN STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

Gökhan MUTLU

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KASIM 2018

Gökhan MUTLU tarafından hazırlanan "OPERATÖR KATSAYILI KENDİNE EŞ OLMAYAN STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Esra KIR ARPAT

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ………………………..

Başkan: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ………………………

Üye: Prof. Dr. Nurhayat İSPİR

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ……………………...

Üye: Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN

Matematik Ana Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ……………………

Üye: Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA

Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Doktora Tezi olduğunu onaylıyorum. ……………………

Tez Savunma Tarihi: 26/11/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Doktora Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……………………………

Prof. Dr. Sena YAŞYERLİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun larak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Gökhan MUTLU

26/11/2018

OPERATÖR KATSAYILI KENDİNE EŞ OLMAYAN STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL TEORİSİ

(Doktora Tezi)

Gökhan MUTLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Kasım 2018

ÖZET

Bu tezde, operatör katsayılı kendine eş olmayan Sturm-Liouville operatörünün spektral analizi incelenmiştir. Bu operatörün tanım kümesi bulunmuş, kendine eş olmayan operatör katsayılı Sturm-Liouville denkleminin bazı özel çözümleri elde edilmiştir. Özel olarak Jost çözümü bulunmuş ve özellikleri incelenmiştir. Bu operatörün nokta spektrumu bulunmuş ve potansiyel fonksiyonun sonlu ilk moment ve üstel azalma koşullarını sağlaması durumunda bu operatörün sonlu sayıda özdeğeri olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, potansiyel fonksiyonun quasi-selfadjoint olması halinde operatörün rezolvent operatörü hesaplanmış, operatörün sürekli spektrumu ve spektral tekillikleri elde edilmiştir. Son olarak, potansiyel fonksiyonun sonlu ilk moment ve üstel azalma koşullarını sağlaması durumunda bu operatörün sonlu sayıda spektral tekilliği olduğu ispatlanmıştır.

Bilim Kodu	:	20404
Anahtar Kelimeler	:	Spektral analiz, Sturm-Liouville operatörü, non-selfadjoint operatör, özdeğer, spektral tekillik, rezolvent operatör, Jost çözümü, operatör katsayılı
Sayfa Adedi	:	51
Danışman	:	Doç. Dr. Esra KIR ARPAT

SPECTRAL THEORY OF NON-SELFADJOINT STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH OPERATOR COEFFICIENT

(Ph. D. Thesis)

Gökhan MUTLU

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

November 2018

ABSTRACT

In this thesis, spectral analysis of non-selfadjoint Sturm-Liouville operator with operator coefficient is investigated. The domain of the operator is defined and some special solutions of the Sturm-Liouville equation with non-selfadjoint operator coefficient are obtained. In particular, Jost solution is found and its properties are investigated. The point spectrum of this operator is obtained and it is proved that this operator has a finite number of eigenvalues if the potential function satisfies the first finite moment and exponential decay conditions. Moreover, if the potential function is quasi-selfadjoint, the resolvent of the operator is calculated and the continuous spectrum and spectral singularities of the operator are obtained. Finally, it is proved that this operator has a finite number of spectral singularities as long as the potential function satisfies the first finite moment and exponential decay conditions.

Science Code	:	20404
Key Words	:	Spectral analysis, Sturm-Liouville operator, non-selfadjoint operator, eigenvalue, spectral singularity, resolvent operator, Jost solution, operator coefficient
Page Number	:	51
Supervisor	:	Assoc. Prof. Dr. Esra KIR ARPAT

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca karşılaştığım her türlü zorlukta beni cesaretlendiren, zaman ayırarak tezimin her aşamasıyla tek tek ilgilenen, bilgi ve tecrübesinden fazlasıyla istifade ettiğim hocam Sayın Doç. Dr. Esra KIR ARPAT'a sonsuz teşekkür ederim. Tez izleme komitemizde yer alan Sayın Prof. Dr. Elgiz BAYRAM ve Sayın Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN hocalarıma göstermiş oldukları yakın ilgi ve yardımlardan dolayı çok teşekkür ederim. Tüm çalışmalarım boyunca maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli annem Liman BÜYÜKKÖMÜRCÜ, kardeşim Gizem ÖZÇELİK ve anlayışı, sabrı ve sevgisiyle daima yanımda olan değerli eşim Damla AMUTKAN MUTLU'ya sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{A}^{\circ}$	A kümesinin içi
$\overline{\boldsymbol{A}}$	A kümesinin kapanışı
$\boldsymbol{A}^{*}$	A lineer operatörünün adjointi
$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H})$	H Hilbert uzayında sınırlı operatörlerin ailesi
$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{A})$	A lineer operatörünün tanım kümesi
$\boldsymbol{I}$	Birim operatör
$\boldsymbol{\sigma}_{\infty}(\boldsymbol{H})$	H uzayında tanımlı kompakt operatörlerin ailesi
$\mathbb{C}_{-}$	Açık kompleks alt yarı düzlemi
$\mathbb{R}_{+}$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{A})$	A kümesinin Lebesgue ölçüsü

1. GİRİŞ

Matematik ve fizikteki çoğu problemin çözümünde diferensiyel ve fark denklemleri kullanılır. Bu denklemlerin ve bu denklemler yardımıyla oluşturulan diferensiyel ve fark operatörlerinin spektral analizi yüz yıldan uzun zamandır matematikçilerin ilgisini çekmektedir. Spektral teori, bir karesel matrisin özdeğer ve özvektörlerinin bulunmasından ortaya çıkan ve sonra pek çok matematiksel uzaydaki operatörlerin yapısını ve özelliklerini anlamaya yarayan çok geniş bir teoridir. Spektral teorinin temelleri ilk olarak Hilbert tarafından Hilbert uzayları teorisini geliştirirken ortaya atılmıştır. Hilbert'in ilk çalışmalarından sonra von Neumann tarafından fiziksel uygulamalara paralel olarak bir normal operatörün spektral analizi incelenmiştir. Daha sonra bu teori Banach cebirlerini kapsayacak şekilde genelleştirilmiştir.

Spektral teori kimyada atomlar ve moleküllerin lokal titreşimlerini ve fizikte akustik dalga yönlerindeki engelleri incelemek için kullanılır. Kuantum mekaniği, Schrödinger denklemi sayesinde formüle edilmiş ve bu denklemin yardımıyla oluşturulan Schrödinger operatörünün spektral analizi bu konudaki çalışmalarda çok önemli yer tutmuştur. Ayrıca fiziksel uygulamalara sahip Sturm-Liouville, Dirac ve Klein-Gordon diferensiyel denklemleri yardımıyla üretilen operatörlerin spektral analizi yapılmıştır. Adı geçen operatörler kendine eş operatörlerdir. Ancak bazı fiziksel problemlerde kendine eş olmayan operatörlerle karşılaşılmış ve bu operatörlerin spektral analizi ile ilgili çalışmalar başlamış ve günümüzde de devam etmektedir.

Kendine eş olmayan operatörler genel olarak enerji korunumlu olmayan sistemlerde karşımıza çıkar. Sürtünme kuvveti içeren sistemler, açık rezonatörler teorisi ve esnek olmayan saçılma teorisi bu operatörlerin karşımıza çıktığı alanlara örnek olarak verilebilir. Ayrıca lineer olmayan bir spektral parametreye bağlı operatör değerli fonksiyonlar içeren kendine eş operatörlerin teorisinde de kendine eş olmayan operatörlerle karşılarız. Kendine eş olmayan operatörlerle ilgili ilk çalışmalar adi diferensiyel denklemlerin incelenmesi için yapılmıştır. Özel olarak kendine eş olmayan Sturm-Liouville operatörünün spektral analizi M.A. Naimark ve B.S. Pavlov tarafından yapılmıştır [1-3].

$L_2(\mathbb{R}_+)$ uzayında

$l_0(y) := -y'' + q(x)y, 0 < x < \infty$

diferensiyel ifadesi ve

$y'(0) - hy(0) = 0$

sınır koşulu yardımıyla üretilen Sturm-Liouville operatörünü ele alalım. Burada q kompleks değerli fonksiyon ve $h \in \mathbb{C}$ dir. Bu operatörün kendine eş olmayan ve singüler olduğu açıktır. Bu operatörün spektral analizi M.A. Naimark tarafından yapılmıştır [1-2]. Bu operatörün sürekli spektrumunun $[0, \infty)$ aralığı olduğu ve özdeğerleri kümesinin sınırlı ve sayılabilir olduğu gösterilmiştir. Ayrıca

$\sup_x e^{\varepsilon x}|q(x)| < \infty, \varepsilon > 0$

koşulu altında bu operatörün sonlu sayıda özdeğeri bulunduğu gösterilmiştir [1-2]. B.S. Pavlov

$\sup_x e^{\varepsilon x}|q(x)| < \infty, \varepsilon > 0$

koşulu altında bu operatörün sonlu sayıda ve sonlu katlılığa sahip özdeğeri ve spektral tekillikleri bulunduğunu göstermiştir [3]. V.E. Lyance spektral tekilliklerin bu operatörün esas fonksiyonları cinsinden spektral açılımındaki önemini göstermiştir [4]. Kendine eş matris katsayılı Sturm-Liouville diferensiyel ve fark operatörlerinin spektral analizi [5-7] de yapılmıştır.

E, n boyutlu $(n < \infty)$ Öklid uzayı ve $L_2(\mathbb{R}_+, E)$, vektör değerli ve karesi integrallenebilir fonksiyonların Hilbert uzayı olsun. Bu uzayda

$l_1(y) = -y'' + Q(x)y, 0 < x < \infty$

diferensiyel ifadesi ve

$y(0) = 0$

sınır koşulu yardımıyla üretilen Sturm-Liouville operatörünü ele alalım. Burada $Q(x)$ kendine eş olmayan matris değerli fonksiyondur. Bu operatörün ayrık spektrumu [8-9] da incelenmiştir. Ayrıca [10-12] de kendine eş olmayan matris katsayılı Sturm-Liouville diferensiyel operatörlerinin sonlu sisteminin spektral özellikleri incelenmiştir.

H ayrılabilir Hilbert uzayı olmak üzere $L_2(\mathbb{R}_+, H)$, $[0, \infty)$ aralığının her sonlu alt aralığında Bochner-integrallenebilir ve

$$\int_0^\infty \|F(x)\|^2 dx < \infty$$

koşulunu sağlayan vektör değerli $F(x)$ $(0 < x < \infty)$ fonksiyonların uzayı olsun. Bu uzayda

$$l_2(Y) = -Y'' + Q(x)Y, 0 < x < \infty$$

diferensiyel ifadesi yardımıyla üretilen Sturm-Liouville operatörünü ele alalım. Burada $Q(x)$ her $x > 0$ için H de tanımlı kendine eş ve kompakt operatördür. Bu operatörün ayrık spektrumu [13-17] de incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında [13-17] deki çalışmaların aksine kendine eş olmayan, kompakt operatör katsayılı Sturm-Liouville operatörünün spektral özellikleri incelenmiş ve [10-12] deki sonuçlar operatör katsayılı duruma genelleştirilmiştir. Dolayısıyla bu çalışmada $L_2(\mathbb{R}_+, H)$ uzayında

$$L(Y) = -Y'' + Q(x)Y, 0 < x < \infty$$

diferensiyel ifadesi ve

$$Y(0) = 0$$

sınır koşulu yardımıyla üretilen Sturm-Liouville operatörünün spektral özellikleri incelenmiştir. Burada $Q(x)$ her $x > 0$ için H de tanımlı kendine eş olmayan ve kompakt operatördür.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm Giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde ise tez boyunca kullanılan temel kavram ve teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde L operatörünün tanımı ve temel özellikleri verilmiş ve Jost çözümü de dahil olmak üzere bazı özel çözümleri ve bu çözümlerin özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde L operatörünün nokta spektrumu bulunmuş ve $Q(x)$ potansiyel fonksiyonu üzerindeki bazı koşullar altında L operatörünün sonlu sayıda özdeğeri bulunduğu gösterilmiştir. Beşinci bölümde ise $Q(x)$ potansiyel fonksiyonunun quasi-selfadjoint olması durumunda L operatörünün rezolvent operatörü hesaplanmış ve spektral tekillikleri elde edilmiştir. Ayrıca, $Q(x)$ potansiyel fonksiyonu üzerindeki bazı koşullar altında L operatörünün sonlu sayıda spektral tekilliği olduğu ispatlanmıştır. Son bölümde ise ileriki çalışmalar için sonuç ve öneriler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez boyunca kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Tanım

X bir K cismi üzerinde vektör uzayı olsun.

$\|.\| : X \to \mathbb{R}_+,\ x \to \|x\|$

dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $a \in K$ için

i) $\|x\| = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 0$

ii) $\|ax\| = |a|\|x\|$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde bir norm adını alır ve $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu uzay denir. Eğer X uzayındaki her Cauchy dizisi bu norma göre yakınsaksa X uzayına tam uzay veya Banach uzayı denir [18].

2.2. Tanım

$K = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere X, K üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$(.\,,.) : X \times X \to K$

dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise $(.,.)$ ye X üzerinde bir iç çarpım ve $\left(X,(.,.)\right)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir.

i) Her $x \in X$ için $(x, x) \geq 0$ ve $(x, x) = 0 \ \Leftrightarrow x = 0$

ii) Her $x, y \in X$ için $(x, y) = \overline{(y, x)}$

iii) $Her\ x, y \in X$ ve $\lambda \in K$ için $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$

iv) Her $x, y, z \in X$ için $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

$(X, (.,.))$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in X$ olsun. x vektörünün normu

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda X iç çarpım uzayı bir normlu uzay olur. Eğer bu uzay $\|.\|$ normuna göre tam ise X uzayına Hilbert uzayı denir [18].

2.3. Tanım

X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $A: X \to Y$ dönüşümü verilsin. Eğer $D(A)$, X in bir alt uzayı, her $\lambda \in K$ ve her $x, y \in D(A)$ için;

$$A(x + \lambda y) = A(x) + \lambda A(y)$$

eşitliği sağlanıyorsa A ya lineer operatör veya kısaca operatör denir. $D(A)$ kümesine A operatörünün tanım kümesi denir [18].

2.4. Tanım

X Hilbert uzayı ve A, tanım kümesi $D(A)$ olan X de tanımlı bir operatör olsun. $D(A)$, X in yoğun bir alt uzayı olsun. $z \in X$ ve her $x \in D(A)$ için;

$$(Ax, y) = (x, z)$$

eşitliğini sağlayan bütün y vektörlerinin kümesini D^* ile gösterelim. Tanım kümesi $D(A^*) = D^*$ olan A^* operatörünü;

$$A^* y = z, \forall y \in D^*$$

olarak tanımlayalım. A^* operatörüne A operatörünün adjointi denir. Eğer $A = A^*$ ise A ya kendine eş operatör aksi halde ise kendine eş olmayan operatör denir [1].

2.5. Tanım

H Hilbert uzayında sınırlı kümeleri kompakt kümelere dönüştüren bir operatöre kompakt veya tamamen sürekli operatör denir. H uzayında tanımlı bütün kompakt operatörlerin ailesi $\sigma_\infty(H)$ ile gösterilir [1].

2.6. Tanım

A, H Hilbert uzayında tanımlı operatör olsun. $(A-\lambda I)x=0$ denklemini sağlayan sıfırdan farklı en az bir $x \in D(A)$ vektörü varsa, λ kompleks sayısına A operatörünün bir özdeğeri ve x vektörüne de A operatörünün bir özvektörü denir. A operatörünün bütün özdeğerlerinin oluşturduğu kümeye A nın nokta ya da diskret spektrumu denir ve $\sigma_d(A)$ ile gösterilir [18].

2.7. Tanım

H Hilbert uzayında tanımlı A operatörü verilsin. $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $R_\lambda(A) := (A-\lambda I)^{-1}$ operatörüne A nın rezolvent operatörü denir. $R_\lambda(A)$ mevcut, sınırlı ve tanım kümesi H de yoğun olacak biçimdeki bütün kompleks sayıların kümesine A nın rezolvent kümesi denir ve $\rho(A)$ ile gösterilir. $R_\lambda(A)$ mevcut, sınırsız ve tanım kümesi H de yoğun olacak biçimdeki bütün kompleks sayıların kümesine A sürekli spektrumu denir ve $\sigma_c(A)$ ile gösterilir [18].

2.8. Tanım

H Hilbert uzayında tanımlı A operatörü verilsin. A nın rezolventinin çekirdeğinin kutup noktası olup, sürekli spektrumda bulunan ve A operatörünün özdeğeri olmayan kompleks sayıya A operatörünün bir spektral tekilliği denir. A operatörünün bütün spektral tekilliklerinin kümesi $\sigma_{ss}(A)$ ile gösterilir [1].

2.9. Tanım

X ve Y Banach uzayları ve lineer olmayan bir $f: D \subset X \to Y$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x \in D^\circ$ için

$$f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + w(x-x_0)$$

koşulunu sağlayan $A: X \to Y$ sınırlı operatörü ve

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|w(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

olacak şekilde $w: D \to Y$ dönüşümü varsa, f dönüşümü $x_0 \in D^\circ$ noktasında Fréchet-türevlenebilirdir denir [18].

2.10. Tanım

X bir Banach uzayı olsun. $s: A \subset \mathbb{R} \to X$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $t \in A$ için

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(t) x_i$$

olacak biçimde A_i ayrık kümeleri ve farklı $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektörleri mevcut ise s fonksiyonu basit fonksiyondur denir. Burada χ_{A_i} karakteristik fonksiyonu

$$\chi_{A_i}(t) = \begin{cases} 1, & t \in A_i \\ 0, & t \notin A_i \end{cases}$$

biçiminde tanımlıdır. $f: A \subset \mathbb{R} \to X$ fonksiyonu verilsin. Eğer hemen hemen her yerde

$$\lim_{n \to \infty} \|f(t) - s_n(t)\| = 0$$

olacak biçimde (s_n) basit fonksiyon dizisi varsa f fonksiyonu Bochner-ölçülebilirdir denir. Eğer f fonksiyonu Bochner-ölçülebilir ve

$$\lim_{n \to \infty} \int_A \|f(t) - s_n(t)\| dt = 0$$

olacak biçimde (s_n) basit fonksiyon dizisi varsa f fonksiyonu Bochner-integrallenebilirdir denir [18].

2.1. Teorem

Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesi içindeki sıfırları (eğer varsa) ayrıktır [19].

2.2. Teorem

Özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesi içindeki sıfırlarının yığılma noktaları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır [19].

2.3.Teorem (Privalov)

Açık üst düzlemde özdeş olarak sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun, reel eksendeki sıfırlarının Lebesgue ölçüsü sıfırdır [19].

2.4.Teorem

$f \in L_1(-\infty, \infty)$ için f nin Fourier dönüşümü

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itx} dt$$

olsun. Bu durumda $\lim\limits_{x \to \infty} \tilde{f}(x) = 0$ olur [20].

2.5. Teorem

$(g_v(x))$ ölçülebilen fonksiyonlar dizisi ve

$$\lim_{v \to v_0} (g_v(x)) = g(x)$$

olsun. Eğer her v için $|g_v(x)| \leq G(x)$ olacak biçimde bir $G \in L_1(-\infty, \infty)$ varsa

$$\lim_{v \to v_0} \int_{\mathbb{R}} g_v(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx$$

olur [20].

2.6.Teorem (Bolzano-Weierstrass)

Sonsuz elemanlı ve sınırlı her kümenin en az bir yığılma noktası vardır [21].

3. L OPERATÖRÜNÜN ÖZELLİKLERİ VE JOST ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde operatör katsayılı kendine eş olmayan Sturm-Liouville operatörünün tanımı, özellikleri ve Jost çözümü de dahil olmak üzere bazı özel çözümleri ve bu özel çözümlerin özellikleri verilecektir.

3.1. L Operatörünün Tanımı ve Özellikleri

H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. $H_1 := L_2(\mathbb{R}_+, H)$ kümesi aşağıdaki özellikleri sağlayan f fonksiyonlarının kümesi olsun.

i) $f: (0, \infty) \to H$ vektör değerli bir fonksiyondur

ii) f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığının her sonlu alt aralığında Bochner-integrallenebilirdir

iii) $\int_0^\infty \|f(x)\|^2 \, dx < \infty$

H_1 üzerinde aşağıdaki iç çarpımı tanımlayalım.

$$(f, g)_1 = \int_0^\infty (f(x), g(x))_H \, dx$$

H_1 bu iç çarpımla bir Hilbert uzayıdır [22].

H_1 uzayında

$$l(y) := -y'' + Q(x)y, 0 < x < \infty \tag{3.1}$$

diferensiyel ifadesini ele alalım. Burada her $x > 0$ için $Q(x)$, H de tanımlı kendine eş olmayan ve kompakt operatördür. (3.1) diferensiyel ifadesi ve

$$y(0) = 0$$

sınır koşulu yardımıyla üretilen L operatörünü tanımlayalım. L operatörünün tanım kümesi $D(L)$, H_1 uzayının aşağıdaki özellikleri sağlayan elemanlarından oluşur.

i) y ikinci mertebeden Fréchet-türevlenebilirdir

ii) $l(y) \in H_1$

iii) $y(0) = 0$

Aşağıdaki notasyonları kullanalım.

$$\sigma(x) = \int_x^\infty \|Q(t)\| dt$$

$$\sigma_1(x) = \int_x^\infty t\|Q(t)\| dt$$

Aşağıdaki denklemin bazı özel çözümlerini elde edeceğiz.

$$-y'' + Q(x)y = \lambda^2 y \qquad (3.2)$$

Kabul edelim ki

$$\int_0^\infty t\|Q(t)\|\, dt < \infty \qquad (3.3)$$

koşulu sağlansın.

3.1.1. Teorem

(3.3) koşulu altında, (3.2) denkleminin

$$S(0,\lambda) = 0,\ S'(0,\lambda) = I \qquad (3.4)$$

sınır koşullarını sağlayan $S(x,\lambda)$ çözümü vardır. Üstelik $S(x,\lambda)$ operatör değerli fonksiyonu λ nın tam fonksiyonudur.

İspat

$$S(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\left[\sin(\lambda x)\,I+\int_0^x \sin\big(\lambda(x-t)\big)\,Q(t)S(t,\lambda)dt\right]$$

eşitliğiyle tanımlanan $S(x,\lambda)$ fonksiyonunun (3.2)denkleminin (3.4) sınır koşullarını sağlayan bir çözümü olduğu kolaylıkla görülmektedir. $S(x,\lambda)$ fonksiyonunun varlığını ve λ nın tam fonksiyonu olduğunu ardışık yaklaşımlar yöntemi ile gösterelim.

İlk olarak Im$\lambda \leq 0$ durumunu ele alalım.

$$S(x,\lambda)=xe^{i\lambda x}Z(x,\lambda)$$

diyelim. Bu durumda

$$Z(x,\lambda)=\frac{\sin(\lambda x)e^{-i\lambda x}}{\lambda x}I+\int_0^x \frac{\sin\big(\lambda(x-t)\big)}{\lambda x}e^{-i\lambda(x-t)}Q(t)Z(t,\lambda)dt$$

olur. Bu eşitliğin

$$Z(x,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty} Z_k(x,\lambda)$$

biçiminde bir çözümünü ardışık yaklaşımlar yöntemi ile arayalım. Bu yönteme göre

$$Z_0(x,\lambda)=\frac{\sin(\lambda x)e^{-i\lambda x}}{\lambda x}I$$

ve

$$Z_k(x,\lambda)=\int_0^x \frac{\sin(\lambda(x-t))}{\lambda x}e^{-i\lambda(x-t)}Q(t)Z_{k-1}(t,\lambda)dt$$

biçiminde tanımlanır. Im$\lambda \leq 0$ ve $0 \leq t \leq x$ için

$$\left|\frac{\sin(\lambda x)\, e^{-i\lambda x}}{\lambda x}\right| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x e^{-2i\lambda s} ds\right| \leq 1$$

ve

$$\left|\frac{\sin\big(\lambda(x-t)\big)\, e^{-i\lambda(x-t)}}{\lambda x}\right| \leq 1 - \frac{t}{x} \leq 1$$

olduğundan $Z(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(x,\lambda)$ serisi, $\sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k(x)$ serisi tarafından üstten sınırlanır. Burada

$$\zeta_0(x) = 1,\ \zeta_k(x) = \int_0^x t\|Q(t)\|\, \zeta_{k-1}(t)dt, k = 1,2,\ldots$$

şeklindedir.

$$0 \leq\ \zeta_k(x) \leq \frac{1}{k!}\left[\int_0^x t\|Q(t)\|dt\right]^k, k = 1,2, \ldots$$

olduğundan $\sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k(x)$ serisi $0 \leq x \leq a$ şeklindeki her sonlu aralıkta düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla $Z(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(x,\lambda)$ serisi $0 \leq x \leq a$ aralığında düzgün yakınsak olup $Z(x,\lambda)$ çözümü mevcuttur. Dolayısıyla $S(x,\lambda) = xe^{i\lambda x}Z(x,\lambda)$ eşitliğinden $S(x,\lambda)$ da mevcuttur. Ayrıca $\sum_{k=0}^{\infty} Z_k(x,\lambda)$ serisi düzgün yakınsak olduğundan ve bu serinin her terimi $\mathrm{Im}\lambda < 0$ bölgesinde analitik olduğundan bu serinin toplamı olan $Z(x,\lambda)$ ve dolayısıyla $S(x,\lambda)$, $\mathrm{Im}\lambda < 0$ bölgesinde analitiktir. Benzer şekilde $S(x,\lambda)$ fonksiyonun $\mathrm{Im}\lambda > 0$ bölgesinde analitik olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $S(x,\lambda)$, λ nın tam fonksiyonudur.

3.2. Jost Çözümü

Bu bölümde (3.2) denkleminin Jost çözümü ve bu çözümün özelliklerini verilecektir.

3.2.1. Teorem

(3.3) koşulu altında, (3.2) denkleminin

$$\lim_{x\to\infty} e^{i\lambda x}E(x,\lambda) = I, \mathrm{Im}\lambda \leq 0 \tag{3.5}$$

koşulunu sağlayan $E(x,\lambda)$ operatör değerli fonksiyonu vardır.

İspat

$$E(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}I + \frac{1}{\lambda}\int_x^\infty \sin(\lambda(t-x))Q(t)E(t,\lambda)dt \tag{3.6}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $E(x,\lambda)$ fonksiyonunun (3.5) sınır koşulunu sağladığı açıktır. Ayrıca bu fonksiyonun türevlerini alırsak

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}E(x,\lambda) &= -i\lambda e^{-i\lambda x}I + \frac{1}{\lambda}\int_x^\infty \frac{d}{dx}\sin\big(\lambda(t-x)\big)\,Q(t)E(t,\lambda)dt \\ &= -i\lambda e^{-i\lambda x}I - \int_x^\infty \cos\big(\lambda(t-x)\big)\,Q(t)E(t,\lambda)dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}E(x,\lambda) &= -\lambda^2 e^{-i\lambda x}I - \int_x^\infty \frac{d}{dx}\cos(\lambda(t-x))Q(t)E(t,\lambda)dt + Q(x)E(x,\lambda) \\ &= -\lambda^2 e^{-i\lambda x}I - \lambda\int_x^\infty \sin(\lambda(t-x))Q(t)E(t,\lambda)dt + Q(x)E(x,\lambda)\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitliklerden $E(x,\lambda)$ fonksiyonunun (3.2) denklemini sağladığı kolayca görülmektedir.

3.2.1. Tanım

$E(x,\lambda)$ operatör değerli fonksiyonuna (3.2) denkleminin Jost çözümü adı verilir [23].

3.2.2. Teorem

(3.3) koşulu altında $E(x,\lambda)$ Jost çözümü aşağıdaki gösterime sahiptir.

$$E(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}I + \int_x^\infty e^{-i\lambda t}K(x,t)dt\,, \mathrm{Im}\lambda \leq 0 \qquad (3.7)$$

Burada $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu

$$\|K(x,t)\| \leq \frac{1}{2}\exp(\sigma_1(x))\sigma(\frac{x+t}{2}) \qquad (3.8)$$

eşitsizliğini sağlar. Ayrıca $E(x,\lambda)$ operatör değerli fonksiyonu $\mathrm{Im}\lambda < 0$ bölgesinde analitik ve $\mathrm{Im}\lambda \leq 0$ bölgesinde süreklidir.

İspat

(3.7) ifadesini (3.6) eşitliğinde yazarsak

$$\int_x^\infty e^{i\lambda t}K(x,t)dt = \frac{1}{2}\int_x^\infty Q(s)ds\int_x^{2s-x} e^{i\lambda t}dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_x^\infty Q(s)ds\int_s^\infty K(s,u)du\int_{u+x-s}^{u+s-x} e^{i\lambda t}dt$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikteki integralleri hesaplar ve Fourier gösteriminin tekliğini kullanırsak $0 < x \leq t$ için

$$K(x,t) = \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty Q(s)ds + \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+t}{2}} Q(s)ds\int_{t+x-s}^{t+s-x} K(s,u)du +$$
$$\frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty Q(s)ds\int_s^{t+s-x} K(s,u)\,du \qquad (3.9)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliğe ardışık yaklaşımlar yöntemi uygularsak bu eşitliği sağlayan $K(x,t)$ nin mevcut olduğunu ve (3.8) eşitsizliğini sağladığını gösterebiliriz. Bunun için

$$K_0(x,t) = \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty Q(s)ds$$

ve

$$K_m(x,t) = \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+t}{2}} Q(s)ds\int_{t+x-s}^{t+s-x} K_{m-1}(s,u)du + \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty Q(s)ds\int_s^{t+s-x} K_{m-1}(s,u)\,du$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. $x \le t$ olduğundan

$$\|K_0(x,t)\| \le \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \|Q(s)\| ds = \frac{1}{2}\sigma(\frac{x+t}{2})$$

ve

$$\|K_1(x,t)\| \le \frac{1}{2}\int_{x}^{\frac{x+t}{2}} \|Q(s)\| ds \int_{t+x-s}^{t+s-x} \frac{1}{2}\sigma(\frac{s+u}{2}) du + \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} \|Q(s)\| ds \int_{s}^{t+s-x} \frac{1}{2}\sigma(\frac{s+u}{2})\, du$$

$$\le \frac{1}{2}\sigma(\frac{x+t}{2}) \int_{x}^{\infty} s\|Q(s)\| ds$$

$$\le \frac{1}{2}\sigma(\frac{x+t}{2})\sigma_1(x)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Tümevarım metodu kullanılarak

$$\|K_m(x,t)\| \le \frac{1}{2}\sigma(\frac{x+t}{2})\frac{{\sigma_1}^m(x)}{m!},\ m = 0,1,2,\ldots$$

olduğu gösterilebilir. Bu eşitsizlik yardımıyla

$$\sum_{m=0}^{\infty} K_m(x,t)$$

serisinin keyfi $a > 0$ için $0 < a \le x \le t$ aralığında düzgün yakınsak olduğu gösterilebilir. Gerçekten σ ve σ_1 azalan olduğundan

$$\|K_m(x,t)\| \le \frac{1}{2}\sigma(\frac{x+t}{2})\frac{{\sigma_1}^m(x)}{m!} \le \frac{1}{2}\sigma(0)\frac{{\sigma_1}^m(0)}{m!},\ m = 0,1,2,\ldots$$

olur. Ayrıca

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{{\sigma_1}^m(0)}{m!} = e^{\sigma_1(0)}$$

olduğundan karşılaştırma testinden

$$\sum_{m=0}^{\infty} K_m(x,t)$$

serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

$$K(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty} K_m(x,t)$$

olduğundan

$$\|K(x,t)\| \leq \sum_{m=0}^{\infty} \|K_m(x,t)\|$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2}\sigma(\frac{x+t}{2}) \frac{{\sigma_1}^m(x)}{m!} = \frac{1}{2}\sigma(\frac{x+t}{2}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{{\sigma_1}^m(x)}{m!} = \frac{1}{2}\sigma(\frac{x+t}{2}) e^{\sigma_1(x)}$$

olup (3.8) eşitsizliği sağlanır. Son olarak

$$\int_x^{\infty} \sigma(u)du = \int_x^{\infty} du \int_u^{\infty} \|Q(t)\|dt = \int_x^{\infty} \|Q(t)\|dt \int_x^t du = \int_x^{\infty} (t-x)\|Q(t)\|dt \leq \sigma_1(x)$$

eşitsizliğinden

$$\int_x^{\infty} \|K(x,t)\|dt \leq \frac{1}{2} e^{\sigma_1(x)} \int_x^{\infty} \sigma(\frac{x+t}{2})dt = e^{\sigma_1(x)} \int_x^{\infty} \sigma(u)du \leq e^{\sigma_1(x)}\sigma_1(x)$$

bulunur. Buradan $E(x,\lambda)$ operatör değerli fonksiyonu $\mathrm{Im}\lambda < 0$ bölgesinde analitik ve $\mathrm{Im}\lambda \leq 0$ bölgesinde süreklidir.

3.2.3. Teorem

$K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun x ve t değişkenlerine göre kısmi türevleri mevcut olup $c > 0$ olmak üzere

$$\|K_x(x,t)\| \leq \frac{1}{4} \|Q(\frac{x+t}{2})\| + c\sigma(\frac{x+t}{2})$$

ve

$$\|K_t(x,t)\| \leq \frac{1}{4}\|Q(\frac{x+t}{2})\| + c\sigma(\frac{x+t}{2})$$

eşitsizliklerini sağlar.

İspat

(3.9) eşitliğinden $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonunun x ve t değişkenlerine göre sürekli kısmi türevlere sahip olduğu görülmektedir. (3.9) eşitliğinde

$$A(s,x,t) = \int_{t+x-s}^{t+s-x} K(s,u)du$$

ve

$$B(s,x,t) = \int_{s}^{t+s-x} K(s,u)du$$

olarak tanımlayalım. (3.9) eşitliğinden

$$K_x(x,t) = -\frac{1}{4}Q(\frac{x+t}{2}) + \frac{1}{4}Q(\frac{x+t}{2})A(\frac{x+t}{2},x,t) - \frac{1}{2}Q(x)A(x,x,t)$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x}^{\frac{x+t}{2}} Q(s)A_x(s,x,t)ds - \frac{1}{4}Q(\frac{x+t}{2})B(\frac{x+t}{2},x,t) + \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} Q(s)B_x(s,x,t)ds$$

bulunur. Burada

$$A\left(\frac{x+t}{2},x,t\right) = \int_{\frac{x+t}{2}}^{\frac{3t-x}{2}} K\left(\frac{x+t}{2},u\right)du$$

$$B\left(\frac{x+t}{2},x,t\right) = \int_{\frac{x+t}{2}}^{\frac{3t-x}{2}} K\left(\frac{x+t}{2},u\right)du$$

ve

$A_x(s,x,t) = -K(s,t+s-x) - K(s,t+x-s)$

$B_x(s,x,t) = -K(s,t+s-x)$

$A(x,x,t) = 0$

olduğundan $0 < x \leq t$ için

$$K_x(x,t) = -\frac{1}{4}Q(\frac{x+t}{2}) + \frac{1}{4}Q(\frac{x+t}{2})A(\frac{x+t}{2},x,t) - \frac{1}{2}Q(x)A(x,x,t)$$
$$+\frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+t}{2}} Q(s)A_x(s,x,t)ds - \frac{1}{4}Q(\frac{x+t}{2})B(\frac{x+t}{2},x,t) + \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} Q(s)B_x(s,x,t)ds$$
$$= -\frac{1}{4}Q\left(\frac{x+t}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+t}{2}} Q(s)K(s,t+x-s)ds - \frac{1}{2}\int_x^{\infty} Q(s)K(s,t+s-x)ds$$

elde edilir. (3.8) eşitsizliğini kullanırsak son eşitlikten

$$\|K_x(x,t)\| \leq \frac{1}{4}\left\|Q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\| + \frac{1}{4}\exp\big(\sigma_1(x)\big)\,\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\int_x^{\frac{x+t}{2}}\|Q(s)\|ds$$
$$+\frac{1}{4}\exp\big(\sigma_1(x)\big)\int_x^{\infty}\|Q(s)\|\sigma\left(\frac{2s+t-x}{2}\right)ds$$
$$\leq \frac{1}{4}\|Q(\frac{x+t}{2})\| + \frac{1}{2}\exp(\sigma_1(x))\sigma(\frac{x+t}{2})\sigma(0)$$
$$\leq \frac{1}{4}\|Q(\frac{x+t}{2})\| + \frac{1}{2}\exp(\sigma_1(0))\sigma(\frac{x+t}{2})\sigma(0)$$

$$\leq \frac{1}{4}\|Q(\frac{x+t}{2})\| + c\sigma(\frac{x+t}{2})$$

olup $\|K_x(x,t)\|$ için istenen eşitlik elde edilir. Burada

$$c = \frac{1}{2}\exp(\sigma_1(0))\sigma(0)$$

sabittir. $\|K_t(x,t)\|$ için de benzer şekilde ispat yapılır.

3.2.4. Teorem

(3.3) koşulu altında (3.2) denkleminin $\mathrm{Im}\lambda \leq 0$ $(\lambda \neq 0)$ için $E(x,\lambda)$ ve $E_1(x,\lambda)$ fonksiyonlarından oluşan temel çözümler sistemi vardır ve bu çözümler aşağıdaki asimptotik eşitlikleri sağlar.

i) $E(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}[I + o(1)],\ \mathrm{Im}\lambda \leq 0,\ x \to \infty$

ii) $E_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x}[I + o(1)],\ \mathrm{Im}\lambda \leq 0,\ x \to \infty$

iii) $E(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}[I + o(1)],\ \mathrm{Im}\lambda \leq 0,\ |\lambda| \to \infty$

iv) $E_x(x,\lambda) = -i\lambda e^{-i\lambda x}[I + o(1)],\ \mathrm{Im}\lambda \leq 0,\ x \to \infty$

Ayrıca $\mathrm{Im}\lambda \leq 0$ için bu çözümler aşağıdaki gibi ifade edilebilirler.

$$E(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}\left[I + \frac{1}{2i\lambda}\int_x^\infty Q(t)dt + A(x,\lambda)\right]$$

$$E_x(x,\lambda) = -i\lambda e^{-i\lambda x}\left[I + \frac{1}{2i\lambda}\int_x^\infty Q(t)dt + B(x,\lambda)\right]$$

$$E_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\left[I - \frac{1}{2i\lambda}\int_x^\infty Q(t)dt + A_1(x,\lambda)\right]$$

Burada $A(x,\lambda)$, $B(x,\lambda)$ ve $A_1(x,\lambda)$ operatör değerli fonksiyonları (3.3) koşuluna benzer koşulları sağlar.

İspat

Teorem 3.2.2. den (3.3) koşulu altında (3.2) denkleminin $\mathrm{Im}\lambda \leq 0$ için $E(x,\lambda)$ çözümü vardır ve (3.6) eşitliğini sağlar. (3.6) eşitliğinin x e göre türevini alırsak

$$E_x(x,\lambda) = -i\lambda e^{-i\lambda x}I - \int_x^\infty \cos\lambda(t-x)Q(t)E(t,\lambda)dt \tag{3.10}$$

elde ederiz. (3.7) eşitliğinden

$$e^{i\lambda x}E(x,\lambda) = I + \int_x^\infty e^{i\lambda(x-t)}K(x,t)dt\,,\ \text{Im}\lambda \le 0$$

elde edilir. Im$\lambda \le 0$ olduğundan $|e^{i\lambda(x-t)}| \le 1$ ve dolayısıyla

$$\left\|\int_x^\infty e^{i\lambda(x-t)}K(x,t)dt\right\| \le \int_x^\infty \left|e^{i\lambda(x-t)}\right| \|K(x,t)\|dt$$
$$\le \int_x^\infty \|K(x,t)\|dt$$

eşitsizliği elde edilir. $\int_0^\infty \|K(x,t)\|dt < \infty$ olduğundan

$$\int_0^\infty \|K(x,t)\|dt = o(1),\ x \to \infty$$

bulunur. Sonuç olarak Im$\lambda \le 0,\ x \to \infty$ için

$$E(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}[I + o(1)]$$

ve (3.10) eşitliği, (3.3) koşulu ve $e^{i\lambda x}E(x,\lambda)$ fonksiyonunun sınırlı olduğu göz önüne alınırsa

$$E_x(x,\lambda) = -i\lambda e^{-i\lambda x}[I + o(1)],\ \text{Im}\lambda \le 0,\ x \to \infty$$

elde edilir. (3.6) ve (3.7) eşitliklerinden

$$E(x,\lambda) = e^{-i\lambda x}\left[I + \frac{1}{2i\lambda}\int_x^\infty e^{i\lambda t}Q(t)E(t,\lambda)dt - \frac{e^{2i\lambda x}}{2i\lambda}\int\limits_x^\infty e^{-i\lambda t}Q(t)E(t,\lambda)dt\right]$$

$$= e^{-i\lambda x}\left[I + \frac{1}{2i\lambda}\int_x^\infty Q(t)dt + A(x,\lambda)\right]$$

bulunur. Burada

$$A(x,\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}\int_x^{\infty}Q(t)dt\int_t^{\infty}e^{-i\lambda(s-t)}K(t,s)ds$$
$$-\frac{e^{2i\lambda x}}{2i\lambda}\int_x^{\infty}e^{-2i\lambda t}Q(t)\left[I+\int_t^{\infty}e^{-i\lambda(s-t)}K(t,s)ds\right]dt$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde (3.7) ve (3.10) eşitlikleri yardımıyla

$$E_x(x,\lambda)=-i\lambda e^{-i\lambda x}\left[I+\frac{1}{2i\lambda}\int_x^{\infty}Q(t)dt+B(x,\lambda)\right]$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$B(x,\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}\int_x^{\infty}Q(t)dt\int_t^{\infty}e^{-i\lambda(s-t)}K(t,s)ds$$

$$+\frac{e^{2i\lambda x}}{2i\lambda}\int_x^{\infty}e^{-2i\lambda t}Q(t)\left[I+\int_t^{\infty}e^{-i\lambda(s-t)}K(t,s)ds\right]dt$$

şeklindedir. Şimdi $-\mu:=\mathrm{Im}\lambda<0$ olsun. (3.8) eşitsizliğinden

$$\left\|\int_x^{\infty}Q(t)dt\int_t^{\infty}e^{-i\lambda(s-t)}K(t,s)ds\right\|\leq\frac{1}{2}e^{\sigma_1(x)}\int_x^{\infty}\|Q(t)\|\sigma(t)dt\int_t^{\infty}e^{-\mu(s-t)}ds$$
$$\leq\frac{1}{2\mu}e^{\sigma_1(x)}\sigma^2(x)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $a>0$ olmak üzere

$$\int_a^{\infty}\sigma(u)du=\int_a^{\infty}du\int_u^{\infty}\|Q(t)\|dt=\int_a^{\infty}\|Q(t)\|dt\int_a^{t}du=\int_a^{\infty}(t-a)\|Q(t)\|dt\leq\ \sigma_1(a)<\infty$$

eşitsizliği ve (3.3) koşulu göz önüne alınırsa

$$\int_a^{\infty}x\sigma^2(x)dx=\int_a^{\infty}\sigma(x)dx\int_x^{\infty}t\|Q(t)\|dt<\infty$$

bulunur. Ayrıca $0<a<b$ için

$$\int_a^b xe^{2\mu x}dx \int_x^\infty e^{-2\mu t}\|Q(t)\|dt = x\frac{e^{2\mu x}}{2\mu}\Big|_a^b\Big| \int_x^\infty e^{-2\mu t}\|Q(t)\|dt - \frac{1}{2\mu}\int_a^b \left[e^{2\mu x}\int_x^\infty e^{-2\mu t}\|Q(t)\|dt - x\|Q(x)\|\right]dx$$

$$\leq \frac{be^{2\mu b}}{2\mu}\int_b^\infty e^{-2\mu t}\|Q(t)\|dt + \frac{1}{2\mu}\int_a^b x\|Q(x)\|dx$$

$$\leq \frac{1}{2\mu}\int_b^{2b} t\|Q(t)\|dt + \frac{be^{-2\mu b}}{2\mu}\int_{2b}^\infty \|Q(t)\|dt + \frac{1}{2\mu}\int_a^b x\|Q(x)\|dx$$

bulunur. Bu eşitsizlik ve (3.3) koşulu göz önüne alınırsa

$$\int_a^\infty xe^{2\mu x}dx\int_x^\infty e^{-2\mu t}\|Q(t)\|dt < \infty, a > 0$$

bulunur. Bu eşitsizliklerden

$$\int_a^\infty x\|A(x,\lambda)\|dx < \infty, a > 0$$

ve

$$\int_a^\infty x\|B(x,\lambda)\|dx < \infty, a > 0$$

elde edilir. Şimdi $E_1(x,\lambda)$ çözümünü elde edelim. Im$\lambda = 0, \lambda \neq 0$ için

$$E_1(x,\lambda) = E(x,-\lambda)$$

olarak tanımlayalım. Im$\lambda < 0$ ve yeterince büyük $x > 0$ değerleri için $E_1(x,\lambda)$

$$E_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x}I - \frac{e^{i\lambda x}}{2i\lambda}\int_x^\infty e^{-i\lambda t}Q(t)E_1(t,\lambda)dt - \frac{e^{-i\lambda x}}{2i\lambda}\int_h^x e^{-i\lambda t}Q(t)E_1(t,\lambda)dt \qquad (3.11)$$

denkleminin çözümü olarak tanımlanır.

$E_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x} F(x,\lambda)$

değişken değiştirmesinden sonra (3.11) eşitliğinden

$$F(x,\lambda) = I - \frac{1}{2i\lambda}\int_x^{\infty} Q(t)F(t,\lambda)dt - \frac{e^{-2i\lambda x}}{2i\lambda}\int_h^x e^{2i\lambda t} Q(t)F(t,\lambda)dt$$

bulunur.

$$\frac{1}{2|\lambda|}\int_h^{\infty} \|Q(t)\|dt = q < 1$$

koşulunu sağlayan pozitif h sayısı için Teorem 3.2.3 e benzer olarak ardışık yaklaşımlar yöntemi kullanılarak $h \le x < \infty$ aralığında (3.11) denkleminin bir çözümü olduğu gösterilebilir. Bu koşul altında

$$\|F(x,\lambda)\| \le \frac{1}{1-q}, \ (x \ge h)$$

olup buradan $x \ge 2h$

$$\|F(x,\lambda) - I\| \le \frac{1}{2|\lambda|}\int_x^{\infty} \|Q(t)\|\|F(t,\lambda)\|dt + \frac{e^{-2\mu x}}{2|\lambda|}\int_h^x e^{2\mu t}\|Q(t)\|\|F(t,\lambda)\|dt$$

$$\le c\int_{\frac{x}{2}}^{\infty} \|Q(t)\|dt + e^{-\mu x}\int_h^{\frac{x}{2}} \|Q(t)\|dt$$

$$\le C[\sigma(\tfrac{x}{2}) + e^{-\mu x}]$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ve (3.3) koşulundan

$$E_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x}[I + o(1)], \ \mathrm{Im}\lambda \le 0, \ x \to \infty$$

elde edilir. (3.11) eşitliğinin x e göre türevini alırsak

$$E_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\left[I - \frac{1}{2i\lambda}\int_x^\infty Q(t)dt + A_1(x,\lambda)\right]$$

bulunur. Burada

$$A_1(x,\lambda) = -\frac{1}{2i\lambda}\int_x^\infty Q(t)[F(t,\lambda) - I]dt - \frac{e^{-2i\lambda x}}{2i\lambda}\int_h^x e^{2i\lambda t}Q(t)F(t,\lambda)dt$$

şeklindedir. Son olarak iii) eşitliğini ispatlayalım. (3.7) eşitliğinden

$$e^{i\lambda x}E(x,\lambda) = I + \int_x^\infty e^{i\lambda(x-t)}K(x,t)dt\,,\ \mathrm{Im}\lambda \leq 0$$

olup Teorem 2.4. ve Teorem 2.5. kullanılarak iii) eşitliği ispatlanır.

3.2.5.Teorem

(3.3) koşulu altında

$$Y'' = Q(x)Y$$

denkleminin $E(x,0)$ ve $E_1(x)$ fonksiyonlarından oluşan bir temel çözümler sistemi vardır ve bu çözümler aşağıdaki asimptotik eşitlikleri sağlar.

i) $E(x,0) = I + o(1),\ x \to \infty$

ii) $E_1(x) = x[I + o(1)],\ x \to \infty$

İspat

$E(x,0)$ çözümü (3.6) eşitliğinden

$$E(x,0) = I + \int_x^\infty (t-x)Q(t)E(t,0)dt$$

integral denklemini sağlar. Bu eşitlik ve (3.3) koşulundan i) asimptotik eşitliği elde edilir.

$$\int_h^\infty t\|Q(t)\|\,dt < 1$$

olacak biçimdeki h pozitif sayısı ve $h \leq x < \infty$ için

$$E_1(x) = xI - x\int_x^\infty Q(t)\,E_1(t)dt - \int_h^x tQ(t)E_1(t)dt$$

olarak tanımlayalım. Teorem 3.2.2. ye benzer olarak ardışık yaklaşımlar metodu yardımıyla $E_1(x)$ çözümünün varlığı ve $Y'' = Q(x)Y$ denklemini sağladığı kolayca gösterilebilir. Ayrıca kısmi integrasyon uygulayarak

$$\int_h^x tQ(t)E_1(t)dt = -\int_t^\infty sQ(s)dsE_1(t)\Big|_h^x + \int_h^x\left[\int_t^\infty sQ(s)ds\right]E_1{}'(t)dt$$

bulunur. (3.3) koşulu, $x^{-1}E_1(x)$ ve $E_1{}'(x)$ operatörlerinin sınırlı olmasından

$$-\int_t^\infty sQ(s)ds\,E_1(t)\Big|_h^x = o(1)\,,\ x \to \infty$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned}\left\|\int_h^x\left[\int_t^\infty sQ(s)ds\right]E_1{}'(t)dt\right\| &\leq c\int_h^x dt\int_t^\infty s\|Q(s)\|ds\\ &= c\int_h^x s\|Q(s)\|ds\int_h^s dt + c\int_x^\infty s\|Q(s)\|ds\int_h^x dt\\ &\leq c\int_h^x s^2\|Q(s)\|ds + cx\int_x^\infty s\|Q(s)\|ds\\ &\leq cx\left[x^{-\frac{1}{2}}\int_h^{\sqrt{x}} s\|Q(s)\|ds + \int_{\sqrt{x}}^\infty s\|Q(s)\|ds\right]\\ &= o(1),\ x \to \infty\end{aligned}$$

bulunur. Buradan ve $E_1(x)$ in tanımından

$$E_1(x) = x[I + o(1)],\ x \to \infty$$

elde edilir.

4. L OPERATÖRÜNÜN NOKTA SPEKTRUMU

Bu bölümde L operatörünün nokta spektrumu bulunarak, $Q(x)$ potansiyel fonksiyonu üzerindeki bazı koşullar altında L operatörünün sonlu sayıda özdeğeri bulunduğu gösterilecektir.

4.1. Teorem

L operatörünün nokta spektrumu için

$$\sigma_d(L) = \{\lambda^2 : \ \mathrm{Im}\lambda < 0, \ E(\lambda) := E(0,\lambda) \text{ tersinir değildir}\}$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat

Kabul edelim ki $\mathrm{Im}\lambda < 0$ ve $E(\lambda)$ tersinir olmasın. Bu durumda en az bir $u \in H$ vardır öyle ki $u \neq 0$ ve $E(\lambda)u = 0$ dır. $y(x) := E(x,\lambda)u$ vektör değerli fonksiyonu (3.2) denkleminin bir çözümüdür ve $y(0) = E(\lambda)u = 0$ eşitliği sağlanır. Ayrıca

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} E(x,\lambda)u = [\lim_{x\to\infty} E(x,\lambda)]u = 0u = 0$$

olduğundan $y \in H_1$ gerçeklenir. Dolayısıyla λ^2, L operatörünün bir özdeğeridir.

Karşıt olarak λ^2, L operatörünün bir özdeğeri ve $\mathrm{Im}\lambda < 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$-y'' + Q(x)y = \lambda^2 y, \ y(0) = 0$$

başlangıç değer problemini sağlayan bir $y \in H_1$ vardır. Teorem 3.2.4. den (3.2) denkleminin her çözümü

$$y(x,\lambda) = E(x,\lambda)a + E_1(x,\lambda)b$$

biçiminde yazılabilir. Burada a ve b sabit vektörlerdir. Teorem 3.2.4. deki (ii) asimptotik eşitliğinden $\lim_{x\to\infty} E_1(x,\lambda) = \infty$ olup $y \in H_1$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ ve $\mathrm{Im}\lambda < 0$ özel durumunda ise $y(x,\lambda) = E(x,\lambda)a$ olmasıdır. $y(0) = 0$ olması $E(\lambda)$ nın tersinir olmadığını ispatlar.

Şimdi L operatörünün özdeğerlerinin özelliklerini inceleyelim. Bunun için [24] deki sonuçlar kullanılacaktır.

$M_1 := \{\lambda : \mathrm{Im}\lambda < 0, E(\lambda)$ tersinir değildir$\}$

diyelim. Bu durumda $\sigma_d(L) = \{\lambda^2 : \lambda \in M_1\}$ olur.

$$E(\lambda) = I + \int_0^\infty e^{-i\lambda t} K(0,t)dt\,,\ \mathrm{Im}\lambda \leq 0$$

olduğunu hatırlatalım. Burada

$$A(\lambda) = \int_0^\infty e^{-i\lambda t} K(0,t)dt\,,\ \mathrm{Im}\lambda \leq 0$$

olarak tanımlayalım. $0 < t < \infty$ için

$$K(0,t) = \frac{1}{2}\int_{\frac{t}{2}}^{\infty} Q(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{t}{2}} Q(s)ds \int_{t-s}^{t+s} K(s,u)du + \frac{1}{2}\int_{\frac{t}{2}}^{\infty} Q(s)ds \int_s^{t+s} K(s,u)\,du \qquad (4.1)$$

eşitliği vardır. Ayrıca, her $x > 0$ için $Q(x) \in \sigma_\infty$ olduğundan (4.1) eşitliğinden her $0 < t < \infty$ için $K(0,t) \in \sigma_\infty$ olduğu kolayca elde edilir. Her $\mathrm{Im}\lambda \leq 0$ için $A(\lambda)$ kompakt operatörlerin integrali olarak tanımlandığından kompakttır. Ayrıca $E(\lambda)$, $\mathrm{Im}\lambda < 0$ bölgesinde analitik olduğundan $A(\lambda)$ da $\mathrm{Im}\lambda < 0$ bölgesinde analitik operatör fonksiyonudur.

4.1. Tanım

A operatörü verilsin. Eğer

$$(I + R)(I - A) = I$$

eşitliği sağlanıyorsa A operatörünün rezolventi R operatörüdür denir [24].

Şimdi [24] deki sonuçları $E(\lambda)$ operatör fonksiyonuna uygulayarak L operatörünün nokta spektrumunu Teorem 4.1. den farklı olarak elde edebiliriz.

4.2.Teorem

$R(\lambda)$, $-A(\lambda)$ nın rezolventi olsun. Bu durumda

$$\sigma_d(L) = \{\lambda^2 : \mathrm{Im}\lambda < 0,\ \lambda, I + R(\lambda) \text{ nın kutbudur}\}.$$

İspat

$R(\lambda)$, $-A(\lambda)$ nın rezolventi olduğundan

$$I + R(\lambda) = (I + A(\lambda))^{-1} = (E(\lambda))^{-1}$$

elde edilir. [24] den eğer $I + R(\lambda)$ bir $\lambda = \lambda_0$ için mevcutsa yani $E(\lambda)$ tersinirse, $I + R(\lambda)$ izole noktalar hariç $\mathbb{C}_-$ yarı düzleminin tamamında mevcuttur ve λ nın meromorfik fonksiyonudur. $M_1 \neq \mathbb{C}_-$ olduğundan $I + R(\lambda)$ mevcut olacak biçimde en az bir $\lambda = \lambda_0$ vardır. Sonuç olarak $I + R(\lambda)$, L operatörünün özdeğerlerini oluşturan izole noktalar hariç $\mathbb{C}_-$ yarı düzleminin tamamında mevcuttur ve λ nın meromorfik fonksiyonudur. Dolayısıyla

$$(E(\lambda))^{-1} = I + R(\lambda) = \frac{S(\lambda)}{d(\lambda)}, \lambda \in \mathbb{C}_-$$

gösterimi vardır. Burada $S(\lambda)$, $\mathbb{C}_-$ yarı düzleminde analitik operatör fonksiyonu ve $d(\lambda)$, $\mathbb{C}_-$ yarı düzleminde analitik skaler fonksiyondur. Ayrıca bu izole noktalar $I + R(\lambda)$ nın kutup noktaları olup $d(\lambda)$ analitik fonksiyonunun sıfırlarından ibarettir. Dolayısıyla

$M_1 = \{\lambda : \mathrm{Im}\lambda < 0,\ \ I + R(\lambda)$ nın kutbudur$\} = \{\lambda : \mathrm{Im}\lambda < 0,\ d(\lambda) = 0\}$

olup ispat tamamlanır.

Şimdi $Q(x)$ potansiyel fonksiyonu üzerindeki bazı koşullar altında L operatörünün özdeğerlerinin yapısını inceleyelim.

4.3.Teorem

(3.3) koşulu altında M_1 kümesi sınırlı ve sayılabilirdir. Ayrıca, yığılma noktaları (eğer varsa) reel eksenin sınırlı bir alt aralığındadır.

İspat

Teorem 3.2.4. deki iii) asimptotik eşitliğinden

$E(\lambda) = I + o(1),\ \mathrm{Im}\lambda \leq 0,\ |\lambda| \to \infty$

bulunur. Buradan kapalı alt yarı düzlemdeki yeterince büyük λ kompleks sayıları için $E(\lambda) \to I$ olup $E(\lambda)$ tersinirdir. Dolayısıyla M_1 kümesi sınırlıdır. Ayrıca

$M_1 = \{\lambda : \mathrm{Im}\lambda < 0,\ \ d(\lambda) = 0\}$

gösteriminden ve Teorem 2.1. den $d(\lambda)$ analitik fonksiyonunun sıfırları ayrık olduğundan M_1 kümesi sayılabilirdir. Son olarak, Teorem 2.2. den M_1 kümesinin yığılma noktaları (eğer varsa) reel eksenin sınırlı bir alt aralığındadır.

Sonuç

(3.3) koşulu altında $\sigma_d(L)$ kümesi sınırlı ve sayılabilirdir. Ayrıca, yığılma noktaları (eğer varsa) reel eksenin sınırlı bir alt aralığındadır.

İspat

$\sigma_d(L) = \{\lambda^2 : \lambda \in M_1\}$

olduğundan ve Teorem 4.3. den ispat açıktır.

Şimdi,

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon t}\|Q(t)\|\,dt < \infty,\ \varepsilon > 0 \tag{4.2}$$

koşulunun sağlandığını kabul edelim.

4.4. Teorem

(4.2) koşulu altında L operatörünün sonlu sayıda özdeğeri vardır.

İspat

(3.8) eşitsizliğinden

$$\|K(x,t)\| \le c\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) = c\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty e^{\varepsilon s}e^{-\varepsilon s}\|Q(s)\|ds \le ce^{-\varepsilon(\frac{x+t}{2})}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty e^{\varepsilon s}\|Q(s)\|ds$$

$$\le ce^{-\varepsilon\left(\frac{x+t}{2}\right)}\int_0^\infty e^{\varepsilon s}\|Q(s)\|ds \le Ce^{-\varepsilon\left(\frac{x+t}{2}\right)}$$

elde edilir. Burada

$$c = \frac{1}{2}e^{\sigma_1(0)} \text{ ve } C = \int_0^\infty e^{\varepsilon s}\|Q(s)\|ds$$

pozitif sabitlerdir. Ayrıca

$$\|K(x,t)\||e^{-i\lambda t}| \le Ce^{-\varepsilon(\frac{x+t}{2})}e^{t\operatorname{Im}\lambda}, \forall t \in (x,\infty)$$

olup, buradan

$$\int_x^\infty e^{t\mathrm{Im}\lambda}e^{-\varepsilon(\frac{x+t}{2})}dt = e^{-\varepsilon\frac{x}{2}}\int_x^\infty e^{t(\mathrm{Im}\lambda-\frac{\varepsilon}{2})}dt \le \int_x^\infty e^{t(\mathrm{Im}\lambda-\frac{\varepsilon}{2})}dt$$

bulunur. Son integralin sonlu olması için gerek ve yeter şart $\mathrm{Im}\lambda - \frac{\varepsilon}{2} < 0$ olmasıdır. Dolayısıyla integraller için düzgün yakınsaklık testinden

$$\int_x^\infty e^{-i\lambda t}K(x,t)dt$$

integrali $\mathrm{Im}\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$ bölgesinde λ ya göre düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla aşağıdaki türevi hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\lambda}E(x,\lambda) &= -ixe^{-i\lambda x}I + \frac{d}{d\lambda}\int_x^\infty e^{-i\lambda t}K(x,t)dt \\ &= -ixe^{-i\lambda x}I + \int_x^\infty \frac{d}{d\lambda}e^{-i\lambda t}K(x,t)dt \\ &= -ixe^{-i\lambda x}I - \int_x^\infty ite^{-i\lambda t}K(x,t)dt\end{aligned}$$

Buradan $E(x,\lambda)$ fonksiyonunun $\mathrm{Im}\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$ bölgesine bir analitik devamının olduğu sonucu çıkar. Analitik devamın tekliğinden, Teorem 4.2. nin ispatında olduğu gibi

$$\left(E(\lambda)\right)^{-1} = I + R(\lambda) = \frac{S(\lambda)}{d(\lambda)}, Im\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$$

gösterimi elde edilir. $M_1 = \{\lambda : \mathrm{Im}\lambda < 0,\ d(\lambda) = 0\}$, $\sigma_d(L) = \{\lambda^2 : \lambda \in M_1\}$ ve M_1 kümesinin sınırlı olduğunu hatırlatalım. Kabul edelim ki M_1 sonlu olmasın. Bu durumda Bolzano-Weierstrass Teoremi'nden M_1 in en az bir yığılma noktası vardır. Teorem 4.3. den M_1 in yığılma noktaları reel eksen üzerinde bulunabilir. $d(\lambda)$ fonksiyonu $\mathrm{Im}\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$ bölgesinde analitik olduğundan Teorem 2.2. den $d(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının yığılma noktaları $\mathrm{Im}\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$ bölgesinin sınırında olmalıdır. Bu ise $\varepsilon > 0$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla M_1 ve $\sigma_d(L)$ kümeleri sonludur.

5. L OPERATÖRÜNÜN REZOLVENT OPERATÖRÜ VE SPEKTRAL TEKİLLİKLERİ

Bu bölümde ilk olarak L operatörünün rezolvent operatörü hesaplanacaktır. Bu amaçla tezin bundan sonraki kısmında $Q(x)$ potansiyelinin quasi-selfadjoint olduğu kabul edilecektir. Ayrıca L operatörünün sürekli spektrumu ve spektral tekillikleri elde edilecek (4.2) koşulu altında L operatörünün sonlu sayıda spektral tekilliği olduğu ispatlanacaktır.

5.1. Rezolvent Operatörü

L operatörünün rezolvent operatörünü bulmak için

$$-y'' + Q(x)y - \lambda^2 y = g \tag{5.1}$$

denkleminin genel çözümünü bulmalıyız. Burada $g \in H_1$, $\mu = \lambda^2 \in \rho(L)$ ve $\mathrm{Im}\lambda \leq 0$ dır. (5.1) denkleminin homojen kısmının genel çözümü

$$y(x,\lambda) = S(x,\lambda)a + E(x,\lambda)b$$

şeklindedir. Burada a ve b sabit vektörlerdir. (5.1) denkleminin genel çözümünü bulmak için parametrelerin değişimi yöntemini kullanalım. (5.1) denkleminin genel çözümünü

$$y(x,\lambda) = S(x,\lambda)a(x) + E(x,\lambda)b(x) \tag{5.2}$$

şeklinde arayalım. Burada $a(x)$ ve $b(x)$ vektör değerli fonksiyonlardır. (5.2) eşitliğinin her iki yanının türevini alırsak

$$y'(x,\lambda) = S'(x,\lambda)a(x) + S(x,\lambda)a'(x) + E'(x,\lambda)b(x) + E(x,\lambda)b'(x)$$

elde ederiz. Kabul edelim ki

$$S(x,\lambda)a'(x) + E(x,\lambda)b'(x) = 0$$

olsun. Tekrar türev alıp (5.1) denkleminde yerine yazarsak

$$S'(x,\lambda)a'(x) + E'(x,\lambda)b'(x) = -g(x)$$

elde ederiz. Dolayısıyla

$$\begin{cases} S(x,\lambda)a'(x) + E(x,\lambda)b'(x) = 0 \\ S'(x,\lambda)a'(x) + E'(x,\lambda)b'(x) = -g(x) \end{cases} \tag{5.3}$$

sistemini elde ederiz.

5.1.1. Not

(5.3) sisteminden $a'(x)$ ve $b'(x)$ fonksiyonlarını elde etmek mümkün olmadığından $Q(x)$ potansiyeli üzerine ek bir koşul koymamız gerekmektedir. Bundan sonra $Q(x)$ potansiyelinin quasi-selfadjoint olduğu varsayılacaktır. Bu koşul sadece rezolvent operatörünü elde etmek için değil quasi-selfadjoint potansiyeller kuantum mekaniğinde daha yaygın olduğu için de kabul edilmiştir.

5.1.1. Tanım

Eğer her $x > 0$ için $Q^*(x) = PQ(x)P^{-1}$ olacak biçimde pozitif, sınırlı ve tersi sınırlı P operatörü varsa $Q(x)$ potansiyeli quasi-selfadjointtir denir [25].

5.1.2. Tanım

$Y(x)$ ve $Z(x)$ operatör değerli fonksiyonları (3.2) denkleminin iki çözümü olsun. $Y(x)$ ve $Z(x)$ operatör değerli fonksiyonlarının p-Wronskiyanı

$$W_p[Y,Z](x) := Z'(x)PY(x) + Z(x)PY'(x)$$

olarak tanımlanır [26].

5.1.1. Lemma

$Y(x)$ ve $Z(x)$ operatör değerli fonksiyonları (3.2) denkleminin iki çözümü ve $\mathrm{Im}\lambda^2 = 0$ olsun. Bu durumda $W_p[Y,Z^*](x)$, x değişkeninden bağımsızdır.

İspat

$Y(x)$ ve $Z(x)$ fonksiyonları (3.2) denklemini sağladıkları için ve$Q^{*}(x) = PQ(x)P^{-1}$, $\mathrm{Im}\lambda^2 = 0$ olduğundan

$$-Y'' + Q(x)Y = \lambda^2 Y$$
$$-Z^{*''} + Z^{*}PQ(x)P^{-1} = \lambda^2 Z$$

eşitlikleri sağlanır. İlk eşitliği soldan $Y^{*}P$ ve ikinci eşitliği sağdan PY ile çarpar ve iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak

$$\frac{d}{dx}W_p[Y,Z^{*}](x) = \frac{d}{dx}(Z^{*'}PY + Z^{*}PY') = Z^{*''}PY + Z^{*}PY'' = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan $W_p[Y,Z^{*}](x)$ sabit olup x değişkeninden bağımsızdır.

Şimdi L operatörünün rezolventini elde ettiğimiz teoremi verelim.

5.1.1. Teorem

L operatörünün rezolvent kümesi

$\rho(L)$ $=\{\lambda^2$: $\mathrm{Im}\lambda < 0$, $\mathrm{Im}\lambda^2 = 0$ ve $E(\lambda)$ tersinirdir$\}$

ve $\mathrm{Im}\lambda < 0$ için $R_{\lambda^2}(L) := (L - \lambda^2 I)^{-1}$ rezolvent operatörünün çekirdeği

$$R(x,t;\lambda^2) = \begin{cases} E(x,\lambda)E^{-1}(\lambda)P^{-1}S^{*}(t,\lambda), & 0 \le t \le x, \\ -S(x,\lambda)P^{-1}\left(E^{*}(\lambda)\right)^{-1}E^{*}(t,\lambda)P, & x < t < \infty \end{cases} \tag{5.4}$$

biçimindedir.

İspat

$\mathrm{Im}\lambda^2 = 0$, $\mathrm{Im}\lambda < 0$ ve $E(\lambda)$ tersinir olsun. Bu bölümün başındaki sonuçlardan

$$\begin{cases} S(x,\lambda)a'(x) + E(x,\lambda)b'(x) = 0 \\ S'(x,\lambda)a'(x) + E'(x,\lambda)b'(x) = -g(x) \end{cases}$$

sistemini elde ederiz. İlk eşitliği soldan $S^{*'}(x,\lambda)P$ ve ikinci eşitliği soldan $S^{*}(x,\lambda)P$ ile çarpıp iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak

$$W_p[S,S^*](x)\, a'(x) + W_p[E,S^*](x)\, b'(x) = S^*(x,\lambda)PG(x) \tag{5.5}$$

elde ederiz. Lemma 5.1.1. den $W_p[S,S^*](x)$ ve$W_p[E,S^*](x)$, x değişkeninden bağımsızdır. Dolayısıyla $x=0$ alırsak $S(0,\lambda)=0$ ve $S'(0,\lambda)=I$ olduğundan

$$\begin{aligned} W_p[S,S^*](x) &= S^{*'}(x,\lambda)PS(x,\lambda) - S^*(x,\lambda)PS'(x,\lambda) \\ &= S^{*'}(0,\lambda)PS(0,\lambda) - S^*(0,\lambda)PS'(0,\lambda) \\ &= IP0 - 0PI \\ &= 0 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} W_p[E,S^*](x) &= S^{*'}(x,\lambda)PE(x,\lambda) - S^*(x,\lambda)PE'(x,\lambda) \\ &= S^{*'}(0,\lambda)PE(0,\lambda) - S^*(0,\lambda)PE'(0,\lambda) \\ &= IPE(\lambda) - 0PE'(0,\lambda) \\ &= PE(\lambda) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikleri (5.5) eşitliğinde yazarsak

$$PE(\lambda)b'(x) = S^*(x,\lambda)PG(x)$$

bulunur. Buradan $E(\lambda)$ tersinir olduğundan

$$b(x) = \int_0^x E^{-1}(\lambda)P^{-1}S^*(t,\lambda)\, PG(t)dt + \beta$$

bulunur. Burada β sabit bir vektördür. Benzer şekilde $W_p[S,E^*](x)$, x değişkeninden bağımsız olduğundan $x=0$ alırsak $S(0,\lambda)=0$ ve $S'(0,\lambda)=I$ olduğundan

$$W_p[S, E^*](x) = -E^*(\lambda)P \tag{5.6}$$

bulunur. $W_p[E, E^*](x)$, x değişkeninden bağımsız olduğundan $x \to \infty$ için Teorem 3.2.4. deki asimptotik bağıntılardan

$$W_p[E, E^*](x) = 0 \tag{5.7}$$

bulunur. (5.3) sistemindeki ilk eşitliği soldan $E^{*\prime}(x, \lambda)P$ ve ikinci eşitliği soldan $E^*(x, \lambda)P$ ile çarpıp iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak

$$W_p\left[S, E^*\right](x)\, a'(x) + W_p\left[E, E^*\right](x)\, b'(x) = E^*(x, \lambda)PG(x) \tag{5.8}$$

bulunur.(5.6), (5.7) ve (5.8) den

$$-E^*(\lambda)Pa'(x) = E^*(x, \lambda)PG(x)$$

bulunur. Buradan $E(\lambda)$ tersinir olduğundan $E^*(\lambda)$ da tersinir olup

$$a(x) = \alpha - \int_x^\infty P^{-1}(E^*(\lambda))^{-1}E^*(t, \lambda)PG(t)dt$$

bulunur. Burada α sabit bir vektördür. $a(x)$ ve $b(x)$ fonksiyonlarını (5.2) eşitliğinde yerine yazarsak

$$y(x, \lambda) = S(x, \lambda)\alpha - S(x, \lambda)\int_x^\infty P^{-1}\big(E^*(\lambda)\big)^{-1}E^*(t, \lambda)\, PG(t)dt$$
$$+E(x, \lambda)\int_0^x E^{-1}(\lambda)P^{-1}S^*(t, \lambda)\, PG(t)dt + E(x, \lambda)\beta$$

elde edilir. $y(0) = 0$ koşulu $\beta = 0$ olmasını ve $s \notin H_1$ olduğundan $y \in H_1$ koşulu $\alpha = 0$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla

$$y(x, \lambda) = -S(x, \lambda)\int_x^\infty P^{-1}\big(E^*(\lambda)\big)^{-1}E^*(t, \lambda)\, PG(t)dt$$
$$+E(x, \lambda)\int_0^x E^{-1}(\lambda)P^{-1}S^*(t, \lambda)\, PG(t)dt$$

bulunur. Sonuçta

$R_{\lambda^2}(L)g(x) = \int_0^\infty R(x,t;\lambda^2)\, g(t)dt$

olmak üzere (5.4) elde edilir.

5.1.2. Lemma

Her $r > 0$ için en az bir $c_r > 0$ sayısı vardır öyle ki $\mathrm{Im}\lambda < 0$, $|\lambda| \geq r$ bölgesindeki her λ için

$$\|R_{\lambda^2}(L)\| \geq \frac{c_r}{\|E(\lambda)\|\sqrt{-\mathrm{Im}\lambda}}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Özel olarak λ_0 herhangi negatif olmayan reel sayı ve $\lambda^2 \in \rho(L)$, $\lambda^2 \to \lambda_0 > 0$ ise $\|R_{\lambda^2}(L)\| \to \infty$ olur.

İspat

$$f_b(x) = \begin{cases} P^{-1}S(x,\lambda), & 0 < x < b \\ 0, & b < x < \infty \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $f_b \in L_2(\mathbb{R}_+, H)$ olup

$$R_{\lambda^2} f_b(x) = \|P\|^2 \|f_b\|^2 E(x,\lambda)E^{-1}(\lambda)P^{-1},\ \ b < x < \infty$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\|R_{\lambda^2} f_b\| \geq \int_b^\infty \|R_{\lambda^2} f_b(x)\|^2\, dx = \|P\|^2 \|f_b\|^4 \|E^{-1}(\lambda)\| \int_b^\infty \|E(x,\lambda)\|^2\, dx$$

bulunur. $b < x < \infty$, $\mathrm{Im}\lambda \leq 0$, $|\lambda| \geq \delta$ olmak üzere

$$\|E(x,\lambda)\| > \frac{1}{2} e^{x\mathrm{Im}\lambda}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde yeterince büyük $b = b_\delta$ seçelim. (Bkz. Teorem 3.2.4.) Bu durumda

$$\int_b^\infty \|E(x,\lambda)\|^2 \, dx \geq \frac{1}{4}\int_b^\infty e^{x\mathrm{Im}\lambda} \, dx = -\frac{1}{8\mathrm{Im}\lambda} e^{2b\mathrm{Im}\lambda}$$

olup

$$\|R_{\lambda^2} f_b\| \geq \|P\| \|f_b\|^2 \|E^{-1}(\lambda)\| \frac{1}{2\sqrt{-2\mathrm{Im}\lambda}} e^{2b\mathrm{Im}\lambda}$$

bulunur. Ayrıca

$$\|f_b\|^2 = \int_0^b \|P^{-1}\|^2 \|S(x,\lambda)\|^2 \, dx > 0$$

olup son integral$\mathrm{Im}\lambda \leq 0$, $|\lambda| \leq r$ bölgesindeki her yarı çemberde λ nın sürekli fonksiyonudur ve pozitif bir sabit tarafından alttan sınırlı olup ispat tamamlanır.

Şimdi bu lemma yardımıyla L operatörünün sürekli spektrumunu elde edelim.

5.1.2. Teorem

L operatörünün sürekli spektrumu $\sigma_c(L) = \mathbb{R}_+$ dır.

İspat

Göstermemiz gereken yalnızca $\lambda > 0$ için $R(L - \lambda I)$ görüntü kümesinin $L_2(\mathbb{R}_+, H)$ uzayında yoğun olmasıdır. Buna eşdeğer olarak

$$[R(L - \lambda I)]^\perp = \ker(L^* - \lambda I) = \{0\}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. λ, L^* operatörünün özdeğeri olamaz $[4]$. Dolayısıyla $\ker(L^* - \lambda I) = \{0\}$ olup ispat tamamlanır.

5.2. L Operatörünün Spektral Tekillikleri

Bu bölümde L operatörünün spektral tekillikleri elde edilecek ve (4.2) koşulu altında L operatörünün sonlu sayıda spektral tekilliği olduğu ispatlanacaktır.

Tanım 2.8. den L operatörünün spektral tekillikleri kümesi

$$\sigma_{ss}(L) = \{\lambda^2 : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ E(\lambda) \text{ tersinir değildir}\}$$

şeklindedir.

$$M_2 := \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R},\ E(\lambda) \text{ tersinir değildir}\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda

$$\sigma_{ss}(L) = \{\lambda^2 : \lambda \in M_2\} \setminus \{0\}$$

olur. Bölüm 4 den

$$\left(E(\lambda)\right)^{-1} = I + R(\lambda) = \frac{S(\lambda)}{d(\lambda)}, \lambda \in \mathbb{C}_- \tag{5.9}$$

gösterimi vardır. Burada $S(\lambda)$, $\mathbb{C}_-$ yarı düzleminde analitik operatör fonksiyonu ve $d(\lambda)$, $\mathbb{C}_-$ yarı düzleminde analitik skaler fonksiyondur. (5.9) dan

$$\frac{E(\lambda)}{d(\lambda)} S(\lambda) = I, \lambda \in \mathbb{C}_-$$

olup eğer $E(\lambda)$ tersinir yani $d(\lambda) \neq 0$ ise $S(\lambda)$ da tersinirdir ve

$$(S(\lambda))^{-1} = \frac{E(\lambda)}{d(\lambda)}, \lambda \in \mathbb{C}_-$$

bulunur. Dolayısıyla eğer $\lambda \in \mathbb{C}_-$ için $d(\lambda) \neq 0$ ise

$$E(\lambda) = d(\lambda)(S(\lambda))^{-1}, \lambda \in \mathbb{C}_- \tag{5.10}$$

elde edilir. Teorem 3.2.2. den $E(x,\lambda)$ operatör değerli fonksiyonu $\mathrm{Im}\lambda < 0$ bölgesinde analitik ve $\mathrm{Im}\lambda \leq 0$ bölgesinde sürekli olduğundan, (5.10) eşitliğinden dolayı $d(\lambda)$ ve $S(\lambda)$ fonksiyonları da reel eksende süreklidir. Dolayısıyla

$$\left(E(\lambda)\right)^{-1} = \frac{S(\lambda)}{d(\lambda)},\ \lambda \in \overline{\mathbb{C}_-} \tag{5.11}$$

gösterimi vardır.

$$N_2 = \{\lambda \in \mathbb{R} :\ d(\lambda) = 0\}$$

kümesini tanımlayalım. (5.11) eşitliğinden açık olarak $\lambda \in \mathbb{R}$ için $E(\lambda)$ tersinirdir ancak ve ancak $d(\lambda) \neq 0$ dır. Sonuç olarak

$$M_2 = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R},\ E(\lambda) \text{ tersinir değildir}\} = N_2$$

bulunur.

5.2.1. Teorem

(3.3) koşulu altında M_2 kümesi kompakt ve $\mu(M_2) = 0$ dır.

İspat

$M_2 = \{\lambda : \lambda \in \mathbb{R},\ E(\lambda) \text{ tersinir değildir}\} = N_2$ dır. Teorem 4.3. den M_2 kümesi sınırlıdır. Dolayısıyla M_2 kümesinin kompakt olması için kapalı olduğunu göstermemiz yeterlidir. $(\lambda_n) \subset M_2$ ve $\lambda_n \to \lambda_0$ olsun. $(\lambda_n) \subset M_2$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\lambda_n \in \mathbb{R}$ ve $E(\lambda_n)$ tersinir değildir. $\lambda_n \to \lambda_0$ ve $\lambda_n \in \mathbb{R}$ olduğundan $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ dir.

$E(\lambda)$ reel eksende sürekli ve $\lambda_n \to \lambda_0$ olduğundan $E(\lambda_n) \to E(\lambda_0)$ dır. Buradaki yakınsama operatör normuna göredir.

$$GL(H) = \{A \in B(H) :\ A \text{ operatörü tersinirdir}\}$$

kümesini tanımlayalım. $GL(H)$ kümesi $B(H)$ uzayının açık bir alt kümesi olduğundan $B(H) \setminus GL(H)$ kümesi kapalıdır. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $E(\lambda_n)$ tersinir olmadığından

$E(\lambda_n) \in B(H) \setminus GL(H)$ olur. Ayrıca $E(\lambda_n) \to E(\lambda_0)$, $E(\lambda_n) \in B(H) \setminus GL(H)$ ve $B(H) \setminus GL(H)$ kümesi kapalı olduğundan $E(\lambda_0)$ tersinir değildir. Dolayısıyla $\lambda_0 \in M_2$ elde edilir. Son olarak

$$M_2 = N_2 = \{\lambda \in \mathbb{R} : \ d(\lambda) = 0\}$$

olduğundan Privalov Teoremi'nden $\mu(M_2) = 0$ bulunur.

Sonuç

(3.3) koşulu altında $\sigma_{ss}(L)$ kümesi sınırlı ve $\mu(\sigma_{ss}(L)) = 0$ dır.

İspat

$$\sigma_{ss}(L) = \{\lambda^2 : \lambda \in M_2\} \setminus \{0\}$$

olduğundan ve Teorem 5.2.1. den ispat açıktır.

5.2.2. Teorem

(4.2) koşulu altında L operatörünün sonlu sayıda spektral tekilliği vardır.

İspat

Teorem 4.4. ün ispatından $E(x,\lambda)$ fonksiyonunun $\mathrm{Im}\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$ bölgesine bir analitik devamının olduğu bilinmektedir. Analitik devamın tekliğinden, Teorem 4.2. nin ispatında olduğu gibi

$$(E(\lambda))^{-1} = I + R(\lambda) = \frac{S(\lambda)}{d(\lambda)}, \ \mathrm{Im}\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$$

bulunur. $M_2 = N_2 = \{\lambda \in \mathbb{R} : \ d(\lambda) = 0\}$, $\sigma_{ss}(L) = \{\lambda^2 : \lambda \in M_2\} \setminus \{0\}$ ve M_2 kümesi sınırlı olduğunu hatırlatalım. Kabul edelim ki M_2 sonlu olmasın. Bu durumda Bolzano-Weierstrass Teoremi'nden M_2 nin en az bir yığılma noktası vardır. $d(\lambda)$ fonksiyonu $\mathrm{Im}\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$ bölgesinde analitik olduğundan Teorem 2.2. dan $d(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının yığılma noktaları Im$\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$ bölgesinin sınırında olmalıdır. Bu ise $\varepsilon > 0$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla M_2 ve $\sigma_{ss}(L)$ kümeleri sonludur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, yarım eksende operatör katsayılı, kendine eş olmayan Sturm-Liouville operatörünün spektral teorisi incelenmiştir. Bu amaçla ilk olarak yarım eksende kendine eş olmayan operatör katsayılı Sturm-Liouville denkleminin bazı özel çözümleri elde edilmiş ve Jost çözümünün özellikleri detaylı olarak ele alınmıştır. Son olarak bu operatörün özdeğerleri ve spektral tekillikleri bulunmuş ve potansiyel fonksiyonu üzerine konulan bazı şartlar altında bu operatörün sonlu sayıda özdeğer ve spektral tekilliğe sahip olduğu gösterilmiştir. Bu sonuçlar [26] da yayınlanmıştır. İleriki aşamalarda bu operatörün esas fonksiyonları ve bu fonksiyonların özellikleri araştırılabilir. Bu tezde tanımlanan operatörün tam eksene genişlemesi ele alınarak tamamen farklı bir problem üzerinde çalışılabilir. Ayrıca, sürekli olmayan durumda operatör katsayılı diskrete Sturm-Liouville operatörünün spektral teorisi incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Naimark, M. A. (1968). *Linear differential operators, II,* New York: Ungar, 10-24, 293-305.

2. Naimark, M. A. (1968). Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunctions of a non-selfadjoint operator of second order on a semi-axis. *AMS Translations,* 2(16), 103-193.

3. Pavlov, B. S. (1967). The non-selfadjoint Schrödinger operator. *Topics in Mathematical Physics,* 1, 87-114.

4. Lyance, V. E. (1967). A differential operator with spectral singularities, I, II, *AMS Translations*, 2(60), 185-283.

5. Carlson, R. (2002). An inverse problem for the matrix Schrödinger equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 267, 564-575.

6. Clark, S., Gesztesy, F. and Renger, W. (2005). Trace formulas and Borg-type theorems for matrix valued Jacobi and Dirac finite difference operators. *Journal of Differential Equations*, 219, 144-182.

7. Gesztesy, F., Kiselev, A., and Makarov, K.A. (2002). Uniqueness results for matrix valued Schrödinger, Jacobi and Dirac type operators. *Mathematische Nachrichten,* 239, 103-145.

8. Coşkun, C. and Olgun, M. (2011). Principal functions of non-selfadjoint matrix Sturm-Liouville equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235, 4834-4838.

9. Olgun, M. and Coşkun, C. (2010). Non-selfadjoint matrix Sturm-Liouville operator with spectral singularities. *Applied Mathematics and Computation*, 216, 2271-2275.

10. Arpat, E.K. and Mutlu, G. (2015). Spectral properties of Sturm-Liouville system with eigenvalue-dependent boundary conditions. *International Journal of Mathematics,* 26(10), 155080-155088.

11. Bairamov, E. and Kir, E. (1999). Principal functions of non-selfadjoint operator generated by system of differential equations. *Mathematica Balcanica*, 13(1-2), 85-98.

12. Bairamov, E. and Kir, E. (2004). Spectral properties of a finite system of Sturm-Liouville differential operators. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics,* 35(2), 249-256.

13. Gasymov, M. G., Zikov, V. V. and Levitan, B.M. (1967).Conditions for discreteness and finiteness of the negative spectrum of Schrödinger’s operator equation. *Matematicheskie Zametki,* 2, 531-538.

14. Kostjucenko, A.G. and Levitan, B.M. (1967).Asymptotic behaviour of eigenvalues of the operator Sturm-Liouville problem. *Funkcional Analisis i Prilozen,* 1, 86-96.

15. Levitan, B.M. (1968). Investigation of the Green's function of a Sturm-Liouville equation with an operator coefficient. *Matematicheskii Sbornik*, 76(118), 239-270.

16. Levitan, B.M. (1968). *Some questions on the spectral analysis of Sturm-Liouville equation with an operator coefficient.* Proceedings of the Summer School in the Spectral Theory of Operators and the Theory of Group Representations, Baku, 161-169.

17. Levitan, B.M. and Suvorcenkova, G.A. (1968). Sufficient conditions for discreteness of a Sturm-Liouville equation with an operator coefficient. *Funkcional Analisis i Prilozen*, 2, 56-62.

18. Musayev, B. ve Alp, M. (2000). *Fonksiyonel analiz.* Ankara: Balcı Yayınları, 72-361.

19. Dolzhenko, E.P. (1979) Boundary value uniqueness theorems for analytic functions. *Mathematical Notes* 26(6), 437-442**.**

20. Schwartz, J.T. (1960). Some non-selfadjoint operators. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13, 609-639.

21. Balcı, M. (1999). *Matematik analiz 1,* Ankara: Balcı Yayınları, 91-92.

22. Yosida, K. (1980). *Functional analysis.* Berlin: Springer, 40-41.

23. Agranovic, Z.S. and Marchenko, V.A. (1965). *The inverse problem of scattering theory.* New York: Gordon and Breach, 13-57.

24. Keldysh, M.V. (1971). On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators. *Russian Mathematical Surveys,* 26, 15-44.

25. Bagarello, F., Gazeau, J.P., Szafraniec, F.H. and Znojil, M. (2015). *Non-selfadjoint operators in quantum physics: mathematical aspects.* New Jersey: John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, 276-277.

26. Bairamov, E, Arpat, E.K. and Mutlu, G. (2017). Spectral properties of non-selfadjoint Sturm-Liouville operator with operator coefficient. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 456(1), 293-306.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: MUTLU, Gökhan
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 07.01.1988, Ankara
Medeni hali	: Evli
Telefon	: 0 (312) 202 10 86
e-mail	: gmutlu@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Doktora	Gazi Üniversitesi / Matematik	Devam Ediyor
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik	2013
Lisans	Ankara Üniversitesi / Matematik	2010
Lise	Mehmetçik Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi	2006

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2011-Halen	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Arpat, E.K. and Mutlu, G. (2015). Spectral properties of Sturm-Liouville system with eigenvalue-dependent boundary conditions. *International Journal of Mathematics*, 26(10), 155080-155088.

2. Bairamov, E, Arpat, E.K. and Mutlu, G. (2017). Spectral properties of non-selfadjoint Sturm-Liouville operator with operator coefficient. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 456(1), 293-306.

Hobiler

Basketbol, Gitar, Bateri, Trekking

GAZİ GELECEKTİR...